

VRAGEN EN SCHIJNVRAGEN OVER RUIMTE EN TIJD

EEN TOEPASSING VAN DEN WISKUNDIGEN DENKVORM

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET
AMBT VAN BUITENGEWOON HOOGLEERAAR AAN
DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP
VRIJDAG 28 OCTOBER 1938

DOOR

DR. D. VAN DANTZIG

J. B. WOLTERS — GRONINGEN, BATAVIA

DEPOT

08418

a

VRAGEN EN SCHIJNVRAGEN OVER RUIMTE EN TIJD

EEN TOEPASSING VAN DEN WISKUNDIGEN DENKVORM

REDE

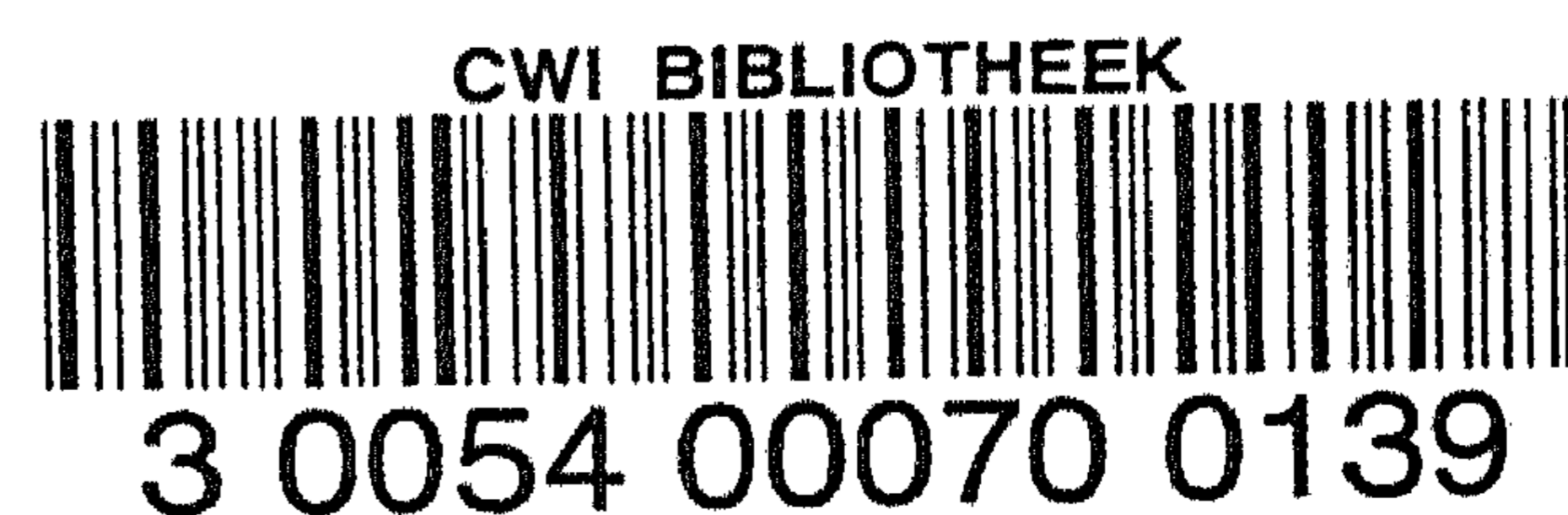
UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET
AMBT VAN BUITENGEWOON HOOGLEERAAR AAN
DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP
VRIJDAG 28 OCTOBER 1938

DOOR

DR. D. VAN DANTZIG

f 0,75

BIJ J. B. WOLTERS' UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ N.V.
GRONINGEN, BATAVIA, 1938



BOEKDRUKKERIJ J. B. WOLTERS' U.M.

*Mijne Heeren Curatoren, Professoren en Lectoren,
Dames en Heeren Privaatdocenten, Assistenten en Studenten,
En voorts Gij allen, die deze plechtigheid met Uwe
aanwezigheid vereert,*

Zeer gewaardeerde toehoorders!

Het is ongetwijfeld met een gevoel van berusting en gelatenheid dat sommigen Uwer zich tot het aanhooren van deze rede hebben opgemaakt, en het is dan ook met wanhoop in het hart dat ik tot het opstellen ervan ben overgegaan.

Gelatenheid Uwerzijds in het vooruitzicht, een uur lang te moeten luisteren naar een voordracht waarvan het onderwerp U wellicht in het geheel niet interesseert. Met de herinnering bovendien aan talloze in de schoolbanken doorgebrachte uren van gedwongen stilzwijgen en gedwongen onbewegelijkheid. En met als eenigen troost de wetenschap, dat een uur betrekkelijk gauw verstreken is, en dat déze les althans niet overhoord zal worden.

Wanhoop mijnerzijds, want hoe zal ik kunnen voorkomen, dat die talloze uren met nòg weer één vermeerderd worden, en dat het toch reeds op de wiskunde rustende odium van dorre onbegrijpelijkheid nòg weer wordt versterkt? En dit zou toch zonder twijfel het geval zijn, indien ik U een overzicht gaf van de wiskunde-in-engeren-zin, die aan de Technische Hoogeschool wordt gedoceerd, de wiskundige techniek dus, en van de vele nieuwe stellingen en methoden, waarmede deze in den laatsten tijd is verrijkt.

Het is op grond van dergelijke overwegingen dat ik gemeend heb, U beschouwingen over de *techniek* der wiskundige werkzaamheid te moeten besparen, en U uitsluitend iets mede te deelen over de ontwikkeling van den wiskundigen *denkvorm*, toegepast op de begrippen ruimte en tijd.

Ruimte en tijd toch zijn woorden die ons weinig minder vertrouwd zijn dan nijlpaard en Westerschelde bij voorbeeld.

Of toch de architect een bouwwerk bewondert om de voortreffelijke ruimteverdeling, of de huisvader klaagt dat zijn woning te weinig ruimte biedt voor zijn opgroeiende kinderen, of de bankdirecteur meent dat time money is, of dat de werkelooze arbeider zegt dat hij daar nooit iets van bemerkt heeft, het zijn steeds weer de fundamentele begrippen ruimte en tijd die aan de verschillende uitspraken hun zin verlenen.

Waar dus deze begrippen ons zoozeer vertrouwd zijn, hoe kan dan van een *ruimteprobleem* en een *tijdprobleem* in filosofischen zin sprake zijn? En inderdaad hebben de ruimte van den architect en van den huisvader, de tijd die geld is en de tijd die in gedwongen ledigheid vergaat al heel weinig met deze problemen te maken.

De filosoof toch acht zich verre boven de vraag naar de praktische bruikbaarheid van ruimte en tijd verheven. Hij wenscht ruimte en tijd als abstracte begrippen, als „Formen der Anschauung” te bestudeeren. Hem interesseert minder de ruimte die *in* de woning is, dan wel de ruimte *wáárin* de woning is, en waarin zich alle lichamen bevinden en bewegen. Deze ruimte toch, de ruimte van den filosoof dus, om den tijd voorloopig buiten beschouwing te laten, is overal. Niet slechts een vol glas, evenals een leeg glas, maar zelfs een *absoluut* leeg, dat wil zeggen een luchtledig glas is van haar vervuld. Zij bevindt zich in de atomen en moleculen waaruit de materie bestaat zoowel als er tusschen; zij is interplanetaire en interstellare zoowel als internebulare ruimte. En als onze telescopen en ultratelescopen ons eenmaal ook het laatste van de uiteenbarstende spiraal-nevelsystemen zullen hebben onthuld, die we tegenwoordig, nu ons slechts één zulk systeem bekend is, bescheidenlijk „het heelal” noemen, en als onze luchtschepen en melkwegschepen en transheelalschepen ons tot de uiterste planeet van de verste ster van de laatste nevel van het allerlaatste heelal zullen hebben gebracht, en als we dan zouden bemerken, dat deze laatste planeet *wèrkelijk* de allerlaatste was, en dat er niet aan een verren, verren horizont tòch weer een nieuw heelallenstelsel opdoemde, ja, dan zouden we nòg staan voor de ledige ruimte. Zóó althans hebben we het geleerd. „De ruimte is oneindig, onbegrensd en onafgebroken” werd mij twaalfjarige in mijn allereerste meetkundeles door mijn overigens zoo voortreffelijken wiskundeleeraar

verteld, en zesentwintig jaren reeds heb ik mij het hoofd gebroken met de vraag, of dit nu werkelijk wáár is en of het wel werkelijk iets beteekent.

Het ruimteprobleem dus: wat *is* dan die mysterieuze ruimte, waarin alle voorwerpen rondzwemmen, en wier eigenschappen totaal onafhankelijk zijn van de materie die er zich in bevindt of niet in bevindt? Wát is ze en hoe is ze?

Newton zeide: „De absolute ruimte blijft, krachtens haar natuur en zonder betrekking tot iets uiterlijks, steeds zichzelf gelijk en onbewegelijk.”¹⁾ *Is dat zoo?*

Newton zeide niet, maar onderstelde stilzwijgend, dat zij ook de eigenschappen bezit, die de meetkunde zooals wij die op school geleerd hebben, de meetkunde van Euklides dus, er aan toekent. *Is dat zoo?*

Met betrekking tot de eerste vraag willen we volstaan met in herinnering te brengen, dat experimenten van A. A. Michelson e. a. aantoonde, dat de door Newton onderstelde onbewegelijkheid der ruimte (of, wat voor de physica op hetzelfde neerkomt, van den aetner) op geenerlei wijze aan te toonen was, zoodat men er algemeen van heeft afgezien, aan de ruimte eenigerlei attribuut van bewegelijkheid of rust toe te kennen. Dit is de inhoud van de door Einstein opgestelde, ten deele reeds van Lorentz afkomstige bijzondere relativiteitstheorie.

Op de tweede vraag willen we wat nader ingaan.

De meetkunde van Euklides is een systeem van stellingen, door logische redeneering afgeleid uit een beperkt aantal axioma's of grondstellingen. Nadat men tweeduizend jaar lang deze axioma's als onaantastbare waarheden had beschouwd, hebben omstreeks 1830 twee jonge wiskundigen, Johann Bolyai en Nicolai Lobatschefsky onafhankelijk van elkaar en zonder elkaars bestaan te kennen voor het eerst den moed gehad, zich welbewust de vraag te stellen, wat zou volgen indien men één dezer axioma's door zijn ontkenning zou vervangen. Hun antwoord (dat sindsdien door alle meetkundigen juist werd bevonden) luidde: men krijgt een ander systeem van stellingen dan

¹⁾ Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Scholium over ruimte en tijd. Vgl. b.v. Dr. H. J. E. Beth, *Newton's „Principia”*, 1932, I p. 34.

dat van Euklides, dat er van afwijkt, maar op zichzelf beschouwd even streng logisch kan worden opgebouwd. Daarmede werden Lobatschefsky en Bolyai de grondleggers van de niet-Euklidische meetkunde, waarop men de woorden zou kunnen toepassen die Thomas Mann gewijd heeft aan den wereldoorlog, „mit dessen Beginn so vieles begann, was zu beginnen wohl kaum schon aufgehört hat.”¹⁾

Teneinde als privaatsdocent aan de universiteit te Göttingen te worden toegelaten hield de toen 28-jarige Bernhard Riemann den 10-den Juni 1854 zijne Habilitationsrede, getiteld „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen”. In deze, wel de allerbelangrijkste academische rede op mathematisch gebied die ooit uitgesproken is, en die, zooals blijken zal, ook thans nog actueel is, ontwikkelde Riemann de grondbeginselen van een veel algemeenere meetkunde, waarvan zoowel de Euklidische als de niet-Euklidische meetkunde bijzondere gevallen zijn. Hij besloot zijn rede met de woorden:

„Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.”

De voorspelling die Riemann hier in weinige woorden gaf van de toekomstige ontwikkeling van het ruimtebegrip is eerst een halve eeuw later waar gemaakt. Inderdád gedreven door feiten die zich op grond van de theorie van Newton niet op bevredigende wijze lieten verklaren, stelde Lorentz de beginselen op, van waar uit Einstein in 1905 de bijzondere en in 1916 de algemeene relativiteitstheorie ontwikkelde. Dit was alleen mogelijk, doordat Riemann de ruimteleer van overgeleverde vooroor-

¹⁾ Thomas Mann, Der Zauberberg (1924), Vorsatz.

deelen bevrijd en de beperktheid der begrippen opgeheven had. Bovendien berust Einsteins gravitatie-theorie grootendeels op een rechtstreeksche toepassing van de meetkunde van Riemann.

Harerzijds leidde de relativiteitstheorie tot een hernieuwden opbloei van de meetkunde. Het begrip meetkunde werd nogmaals gegeneraliseerd, waarbij in het bijzonder het werk van onzen Rector Magnificus genoemd moet worden. Hij was het, en onafhankelijk van hem Levi-Civita, die in 1918 (resp. 1917) de meetkunde op het begrip van de evenwijdige verplaatsing funderde en dit later tot het algemeenere begrip van „overbrenging” uitbreidde. „So ist der Schoutensche Raumtyp (Jena 1921) vorläufig der letzte und jüngste Spross der mit Gauss, Lobatschewskij, Bolyai und Riemann einsetzenden wirklich neuen Entwicklung der mathematisch-physikalischen Raumlehre” zegt Werner Gent dan ook in zijn werk over „Die Philosophie des Raumes und der Zeit”.¹⁾

Het was overigens niet dan schoorvoetend en noodgedrongen dat de „Schulphilosophie”, de grootste aandeelhoudster in de Maatschappij tot Exploratie van Ruimte en Tijd, de nieuwe denkbeelden aanvaardde. Talrijke waren aanvankelijk hare tegenwerpingen.

„De niet-Euklidische meetkunde is *ondenkbaar*” werd betoogd. Maar de mathematici konden bewijzen, dat, ware dit zoo, dan ook de Euklidische meetkunde ondenkbaar moest zijn, een consequentie die de aprioristen zeker niet aandurfd.

„De niet-Euklidische meetkunde is *onvoorstelbaar*” luidde een tweede tegenwerping, waarbij we iets langer willen blijven stilstaan. Men zou zich de weerlegging van deze opmerking (evenals trouwens van de eerste) al heel gemakkelijk kunnen maken, door er op te wijzen, dat, evenals andere woorden eindigend op „-baar”, het woord „onvoorstelbaar” de mogelijkheid of onmogelijkheid van een bepaalde handeling uitdrukt, dat echter wat den een onmogelijk is den ander zeer wel mogelijk kan zijn. Zoodat de tegenwerping niet een eigenschap van de niet-Euklidische meetkunde, maar een eigenschap van den spreker tot uitdrukking brengt, te weten zijn onvermogen, zich daarvan een duidelijke voorstelling te maken. Deze mededeeling van psychologischen

¹⁾ II (1930), p. 306.

aard kan de mathematicus voor kennisgeving aannemen, zoo noodig met de toevoeging dat hij voor zich deze moeilijkheden niet ondervindt.

Wil de mathematicus zich echter voor de beschuldiging van grootspraak hoeden, dan dient hij dit betoog nog te doen volgen door een beschrijving van de wijze waarop hij zich dan zulk een voorstelling ontwerpt. Dit zou hij ongeveer als volgt kunnen doen.

We teekenen een figuur, of ontwerpen daarvan een quasi-visueel beeld ¹⁾. Daarbij houden we voortdurend in gedachten, dat de eigenschappen van de geteekende figuur op een bepaalde wijze afwijken van die van de bedoelde „werkelijke” figuur. Om ons nu figuren uit de niet-Euklidische meetkunde voor te stellen, teekenen we bij voorbeeld een figuur opgebouwd uit cirkels, terwijl we ons voorhouden dat deze cirkels „eigenlijk” rechte lijnen zijn. Een andere methode berust daarop, dat we een ellips teekenen, en daarbij bedenken, dat deze „oneindig ver” van haar middelpunt verwijderd is. Binnen de ellips teekenen we bij voorbeeld een rij van zeven of acht punten die naar den rand toe steeds dichter bij elkaar komen, en we houden daarbij in gedachten, dat dit eigenlijk oneindig veel punten zijn ²⁾, die telkens op *gelijke* afstanden op elkaar volgen. Zou men nu willen tegenwerpen, dat dit toch wel een heel wonderlijke en ongewone manier van doen is, dan luidt het antwoord, dat dit in het geheel niet het geval is. Een kubus bij voorbeeld stellen we voor door twee vierkanten, verbonden door vier evenwijdige en even lange lijntjes. Daarbij bedenken we, dat de snijpunten van de beide vierkanten „in werkelijkheid” niet bestaan, en dat de hoeken b.v. van 30° , 60° , 120° en 150° die de vier lijntjes met de zijden der vierkanten maken alle gelijk aan 90° zijn! Dat een rij steeds kleiner wordende en steeds dichter bij elkaar komende lijntjes een rij van even groote en even ver van elkaar verwijderde lijnen voorstelt is ons allen reeds uit perspectievische teekeningen bekend.

¹⁾ Bij dit quasi-visuele beeld spelen doorgaans ook zekere werkelijke of voorgestelde spierbewegingen een rol. De „voorgestelde” spierbewegingen zouden wellicht tot stand kunnen komen door gelijktijdige innervatie van de werkende en de tegenwerkende spier, waarbij alleen op de eerste de aandacht gevestigd blijft.

²⁾ Op een discussie van het arithmetische oneindigheidsbegrip ga ik te dezer plaatse niet in.

Hoe kunnen we ons de aarde als een bol voorstellen, terwijl toch de meridiaancirkels bijna de rechtste lijnen zijn, die we ooit gerealiseerd hebben gezien (lichtstralen zijn namelijk tengevolge van de atmosferische breking weinig minder gekromd)? Toch alleen door ons een globe, dus een *kleinen* bol voor te stellen, en daarbij te denken, dat alle afstanden „in werkelijkheid” b.v. veertig miljoen maal zoo groot zijn. Ook hier hebben we dus een soortgelijke afwijking tusschen het *model* dat we inderdaad waarnemen en datgene wat we er eigenlijk mee bedoelen. Het woord „voorstellen” wordt dus in de nieuwere en de klassieke meetkunde inderdaad in denzelfden zin gebruikt, en de bewering dat de niet-Euklidische meetkunde ook voor den beoefenaar daarvan onvoorstelbaar zoude zijn is niet te handhaven.

Trekt zich nu de apriorist in zijn laatste verschansing terug, zeggende: „De niet-Euklidische meetkunde moge dan denkbaar en voorstelbaar zijn, zij *geldt* toch in ieder geval niet in werkelijkheid,” dan kunnen we hem naar Henri Poincaré verwijzen, die op overtuigende wijze heeft aangetoond, dat van geen enkele meetkunde gezegd kan worden dat zij in werkelijkheid geldt. Meetkunde is namelijk volgens hem een methode met behulp waarvan we de verschijnselen beschrijven of katalogiseeren. Een methode echter kan niet waar of onwaar, doch hoogstens meer of minder *doelmatig* zijn. „Dès lors, que doit-on penser de cette question. La géométrie euclidienne est-elle vraie?”

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu’une autre; elle peut seulement être *plus commode*.”¹⁾

Een sterk hiermede overeenkomende opvatting is bijzonder duidelijk uitgesproken door L. E. J. Brouwer: „De Euclidische meetkunde is een door geregeld gebruik onder de menschen zeer algemeen handelbaar geworden gebied der wiskunde, maar het is zeer goed denkbaar, dat bij dezelfde organisatie van het men-

¹⁾ La science et l’hypothèse, 1906, Chap. III, p. 67. Poincaré heeft ook ontkend dat het een zin heeft, te zeggen, dat Parijs en Londen *in werkelijkheid* verder dan een meter van elkaar verwijderd zijn. Vgl. hierover G. Mannoury, Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik, Haarlem, 1909, p. 242.

schelijk intellect een ander wiskundig gebouw dezelfde populariteit zou hebben verkregen." ¹⁾

Resumeerende kunnen we dus vaststellen dat de Euklidische meetkunde in geen enkel opzicht boven de niet-Euklidische is bevoorrecht. Als we dus in overeenstemming met Poincaré's en Brouwers betoog één uit de verschillende meetkonden kiezen om met behulp daarvan onze ervaringen te beschrijven, zal deze keuze op andere dan aprioristische overwegingen moeten berusten. We dienen dus te rade te gaan bij den man die onzen rijkdom aan natuurverschijnselen verzamelt, vermeerdert en katalogiseert om er in zijn theoretisch gezinde oogenblikken de balans van op te maken, ik bedoel den physicus.

De physicus nu, zal ongetwijfeld in overeenstemming met Poincaré en Brouwer zeggen, dat zijn metingen hem niets over de meetkundige structuur der ruimte leeren, maar uitsluitend iets over het gedrag van vaste lichamen en lichtstralen. En, terwijl hij het natuurlijk in den mathematicus hoogelijk waardeert, dat deze, om de door Riemann genoemde redenen, allerlei vreemdsoortige en ingewikkelde meetkonden bestudeert, zal hij voor zichzelf bij voorkeur die meetkunde kiezen, die hem in staat stelt, het gedrag van vaste lichamen en lichtstralen zoo eenvoudig mogelijk te beschrijven.

Zoolang hij uitsluitend lichamen van de normale, in het dagelijksch leven voorkomende afmetingen beschouwt, is hij met de Euklidische meetkunde volkomen tevreden.

Over de vraag echter, welke meetkunde voor de katalogiseering der thans bekende *kosmologische* verschijnselen de doelmatigste is, bestaat geen eenstemmigheid. Terwijl sommigen, zooals E. A. Milne ook hier nog steeds aan de Euklidische meetkunde de voorkeur geven (hetgeen volgens het betoog van Poincaré ten allen tijde mogelijk is), zijn er velen, zooals Eddington, die een gesloten Riemannsche ruimte prefereeren, zelfs al zijn (zooals de Sitter aangetoond heeft) de ons door de astronomie verstrekte gegevens voor een definitieve keuze nog niet nauwkeurig genoeg.

Vragen we ons thans af, hoe de wereld er uit zou zien, indien het gesloten ruimtemodel van Riemann op dezelfde wijze bij de verschijnselen zou passen als men gewoonlijk aanneemt dat de oneindige ruimte van Euklides doet.

¹⁾ L. E. J. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde, 1907, p. 118.

Vooreerst zou er een maximum bestaan voor den afstand van twee punten in de ruimte, evenals de afstand van twee punten op aarde (gemeten langs de aardoppervlakte) maximaal 20000 km is. Deze grootste afstand zou natuurlijk alle gemeten afstanden moeten overtreffen. Men neemt gewoonlijk aan, dat hij van de grootte-orde van tien milliard lichtjaren, d. i. een tiende quadriljoen kilometer zou zijn. Dit is nog steeds circa 40000 maal de afstand tot de verste tot dusverre bekende spiraallevels.

Een aanschouwelijker beeld van zulk een gesloten wereld krijgen we, wanneer we dezen afstand tot enkele tientallen of honderdtallen meters verkleind denken, zonder (hetgeen natuurlijk een inconsequentie is) onze eigen afmetingen naar rato te verminderen.

Men zou dan door steeds volgens een rechte lijn voorwaarts te gaan, tenslotte weer op zijn uitgangspunt terugkeeren, evenals het geval is, wanneer men zich op de *aardoppervlakte* volgens een zoo recht mogelijke lijn (b.v. langs een meridiaan) voortbeweegt. Door recht vooruit te kijken zoudt gij niet slechts alles zien wat vóór U, maar ook alles wat achter U is; indien er geen enkel ondoorzichtig voorwerp recht voor of achter U was, zoudt ge uw eigen achterhoofd zien! Een geoefend balspeler zou door een bal over zijn hoofd naar achteren te werpen zichzelf tegen het voorhoofd kunnen treffen. Bijzonder gevaarlijk ware het duelleeren: richt ge Uw revolver recht vooruit, dan behoeft Uw tegenstander slechts te bukken en ge treft Uzelf in het achterhoofd! ¹⁾

Bijzonder groote moeilijkheden zouden de architecten onder vinden. Daar namelijk de som van de hoeken van een driehoek steeds grooter dan 180° , dus van een vierhoek grooter dan 360° ware, zouden ze geen kamers met vier rechte hoeken kunnen bouwen. Een andere moeilijkheid zouden ze met alle andere ingenieurs en constructeurs moeten deelen. Daar er namelijk geen gelijkvormige figuren zouden bestaan, zouden ze (tenzij ze bereid waren, iedere constructie door *berekening* in plaats van door teekening te vinden) de ontwerpen van hun schepen, fabrieken en kanalen op ware grootte moeten teekenen!

In een Riemannsche ruimte van onveranderlijken omvang, een

¹⁾ Hierbij is natuurlijk afgezien van de kromming van de kogelbaan tengevolge van de zwaartekracht.

zoogenaamd Einsteinsch heelal, (en wel, naar we onderstellen, van het elliptische type) zou een vlak scherm, aan één zijde van een lamp geplaatst, geen schaduw werpen; de van de lamp afgewende zijde zou namelijk verlicht worden door stralen die in tegengestelde richting één keer de ruimte rondgelopen waren. Door de zelfde oorzaak ware er ook geen verschil tusschen dag en nacht (maar wel tusschen zomer en winter!). Verduisteringsproeven waren vrijwel onmogelijk. Daartoe ware namelijk noodig, dat alle lichtbronnen volledig „ingekapseld”, dus aan alle zijden door een ondoorschijnend scherm omgeven waren, zon, maan en sterren inclus! ¹⁾ En zelfs dit ware nog niet voldoende, daar ook het licht dat vóór het begin der proef uit de hulsels was ontsnapt storing zou veroorzaken.

Noemen we namelijk den tijd dien het licht noodig heeft om één keer rond de ruimte te loopen een „kosmisch jaar,” dan zou ieder lichtgevend voorwerp na telkens één, twee, drie, enz. kosmische jaren precies op dezelfde plaats ²⁾ een schijnbeeld („reëel beeld”) veroorzaken, dat althans voor het oog niet van het voorwerp zelf te onderscheiden ware. Zelfs al waren alle lampen gebluscht en alle hemellichamen omhuld, dan zouden dus nog de schijnbeelden van de lampen die vóór een kosmisch jaar gebrand hadden de duisternis breken.

Deze schijnbeelden zouden ook overigens een ware spokenwereld doen ontstaan. Zoo zou het bijvoorbeeld kunnen gebeuren, dat ge, na één kosmisch jaar op een bepaalde plaats terugkeerend, daar Uw eigen schijnbeeld ontmoette, min of meer op de wijze zooals dit door Gustav Meyrink beschreven is. ³⁾ Een soortgelijke ontmoeting heeft overigens ook de onlangs overleden Amsterdamsche amateur-dadaïst S. Präger eens op de volgende wijze geschilderd.

„Nu moet je hooren, wat me vanmorgen is overkomen. Ik loop op den Dam; op eens kom ik mezelf tegen. Ik neem mijn

¹⁾ Indien de omhulsels behalve niet-doorlatend ook niet-reflecteerend waren, zouden iets meer dan half-bolvormige schermen voldoende zijn om althans gedeeltelijke schaduw te veroorzaken, afgezien althans van den invloed der schijnbeelden.

²⁾ In een Einsteinsch heelal bestaat namelijk een absolute plaatsbepaling.

³⁾ G. Meyrink, der Golem. Het ware een aardige opgave, eens de talrijke inconsequenties na te gaan, die dergelijke schijnbeeldverhalen bevatten.

hoed af; ik neem ook mijn hoed af. Ik zeg „Goeden morgen”; ik zeg ook „Goeden morgen”. Ik kijk mezelf eens goed aan; ik kijk mezelf óók eens goed aan. En wat denk je? We hadden allebei den verkeerden voor!”

Uithoofde van verschillende overwegingen is het Einsteinsche heelal voor de beschrijving der natuurverschijnselen niet geschikt. Men geeft daarom aan het „heelal” van Friedmann en Lemaître de voorkeur, dat eveneens gesloten is, maar waarin geen schijnbeelden voorkomen. We zijn daarmee dus eindelijk niet slechts van de spookbeelden, maar ook van de „oneindige ruimte” af, waarvoor reeds Blaise Pascal terugdeinsde: „Le silence des espaces infinis m’effraie” luidt een zijner Pensées. ¹⁾

En dat is als een groot voordeel te beschouwen, al verliest dan ook Prägers demonstratie van de relativiteit der Ikheid tevens hare actualiteit.

Immers de oneindigheid van de ruimte is geen natuurkundige eigenschap: wij kunnen geen enkele waarneming bedenken, die ons omtrent haar al of niet bestaan uitsluitel zou kunnen geven. „Die Fragen über das Unmessbare sind für die Naturerklärung müßige Fragen”, zeide Riemann dan ook reeds.

Al dergelijke filosofische uitspraken: de ondenkbaarheid, onvoorstelbaarheid, onwerkelijkheid der nieuwere meetkenden, de oneindigheid, onbegrenstheid, ononderbrokenheid van de ruimte berusten op zoogenaamde *uitsluitingsnegaties*: ²⁾ ze zeggen alleen dat een bepaald kenmerk ontbreekt, maar niet, welk kenmerk dan wèl geldt. Ze zeggen, dat het zóó niet is, maar niet, hoe het dan wèl is. En dit „wel” kan soms bijna onmerkbaar weinig van het „niet” verschillen, zooals Mr. Marchant zoo duidelijk gedemonstreerd heeft met zijn uitspraak: „Niet zoo, maar zó!”

Wenden we thans den blik van de nevelvlekken en „heelallen” naar de kleinste deeltjes waaruit de materie is samengesteld. Wanneer we ons de door ijzerdraadjes verbonden gekleurde houten balletjes in herinnering brengen, waardoor in onze kinderjaren de atomen werden voorgesteld, begrijpen we H. G.

¹⁾ Pensées, III 306.

²⁾ G. Mannoury, Die signifikanten Grundlagen der Mathematik, Erkenntnis 4, p. 288—309, 317—345; speciaal p. 333.

Wells' verzuchting: „In my . . . childhood I read of atoms and molecules almost as kindly and human as Dutch cheeses.”¹⁾ Maar hoe anders het beeld sindsdien is geworden wordt wel heel duidelijk gemaakt door een passage bij Thomas Mann.

„. . . . Denn das Molekül setzte sich ja aus Atomen zusammen, und das Atom war bei weitem nicht mehr gross genug um auch nur als ausserordentlich klein bezeichnet werden zu können. Es war dermassen klein, eine derart winzige, frühe und Übergängliche Ballung des Unstofflichen, des noch nicht Stofflichen, aber schon Stoffähnlichen, der Energie, dass es kaum schon oder kaum noch als materiell, vielmehr als Mittel und Grenzpunkt zwischen dem Materiellen und dem Immateriellen gedacht werden musste. . . . Aber angelangt beim „nicht einmal mehr klein“, entglitt der Masstab; „nicht einmal mehr klein,“ das galt bereits soviel wie „ungeheuer gross“; und der Schritt zum Atom erwies sich als im höchsten Grade verhängnisvoll. Denn im Augenblick letzter Zerteilung und Verwinzigung tat sich plötzlich der astronomische Kosmos auf.”²⁾

Het is natuurlijk slechts bij wijze van spreken, dat Thomas Mann, die hier op het atoommodel van Niels Bohr zinspeelt, het atoom „ungeheuer gross” noemt. Maar vragen we, *hoe* groot nu eigenlijk een atoom of een electron is, dan stuiten we op geheel nieuwe en eigenaardige moeilijkheden. Voor de middellijn van een electron vindt men veelal eenige billioenste millimeter opgegeven. Maar wat beteekent dit? Om lengten en dikten te meten heeft men vaste lichamen of lichtstralen noodig. Maar het kleinste vaste lichaam bevat zelf nog millioenen electronen en ook de golflengte van de hardste stralen is nog veel te groot. En te zeggen dat een rij van een biljoen electronen, precies tegen elkaar gelegd, eenige centimeters lang zou wezen, gaat in het geheel niet op, want electronen *zijn* nu eenmaal geen Edammer kazen die men netjes op rijtjes kan leggen.

In den meest directen zin dus „entgleitet uns der Masstab”: in zóó kleine gebieden hebben we geen enkel middel meer om afstanden te meten. Het pleit wel voor de zeldzame genialiteit van Riemann, dat hij dit in 1854 reeds begrepen heeft: „Nun

¹⁾ H. G. Wells, *The world of William Clifford* (1926), I § 8, p. 54.

²⁾ Th. Mann, *Der Zauberberg* (1924), Kap. 5, Forschungen.

scheinen aber die empirischen Begriffe in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen."

Hiermede nu staan we voor een geheel nieuwe situatie. Het probleem is nu niet meer, een *keuze* te doen tusschen de verschillende meetkunden, daar toch het verschil tusschen Euklidische en niet-Euklidische meetkunde geheel in het niet zinkt, waar geenerlei afstandsmeting meer mogelijk is, doch de atomistische verschijnselen zonder gebruikmaken van *eenigerlei* meetkunde (in het klein althans) in natuurwetten samen te vatten. De meetkunde, voor zooverre zij physische realiteit bezit, heeft een karakter, volkomen analoog aan dat van de thermodynamica. „Afstand", evenals „temperatuur" en „druk", heeft alleen beteekenis wanneer men over een *groot aantal* elementaire deeltjes spreekt, en moet dan ook als een soort gemiddelde of som van andere grootheden voor den dag komen, die wèl voor de afzonderlijke partikels bestaan.

Dit probleem nu is nog in geenen deele opgelost. Wèl is het gelukt, aan te toonen, dat groote deelen van de leer van het electromagnetisme evenals van de thermodynamica ¹⁾ onafhankelijk van meetkunde kunnen worden geformuleerd. Met betrekking tot de quantummechanica is dat echter nog niet het geval. En vooral de vraag, hoe de makroskopische meetkunde uit de mikroskopische physica verkregen kan worden is nog geenszins opgehelderd.

Er is echter nog een tweede en verderstrekkend probleem dan de uitbanning van de meetkunde uit de mikrophysica, waartoe ons de atomistische structuur der materie leidt. Vooral ook, wanneer we bedenken, dat volgens de moderne opvattingen ook

¹⁾ D. van Dantzig, Electromagnetism independent of metrical geometry I—V. Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen 37 p. 521—525, 526—531, 643—652, 825—836 (1934), 39 p. 126—131 (1936).
D. van Dantzig, On thermodynamics of moving matter. (Verschijnt in de Proceedings van de Royal Society).

licht- en warmtestraling deze atomistische structuur bezitten en uit kleinste partikeltjes, photonen genaamd, zijn opgebouwd. Immers daardoor wordt ons bewust, dat zelfs het „absoluut leege” glas steeds nog met zulke photonen gevuld is, en dat we van „zuivere”, dat is *absoluut* absoluut-leege ruimte eerst zouden kunnen spreken, als ook deze photonen verwijderd waren. Dit is echter bij geen enkele werkelijk voorkomende, d. i. positieve temperatuur mogelijk. De vraag, hoe een ruimte er uit zou zien als zij in het gehéél geen materie of straling zou bevatten, is dus van denzelfden aard als de vraag of wij, als de hemel op aarde viel, inderdáád alle leeuwerikken zouden vangen; dat wil zeggen ze is een schijnprobleem. Daarmede echter verliest de ruimte, waarvan toch Newton zeide, dat zij *zonder betrekking tot iets uiterlijks*, dus ook tot photonen, steeds zichzelf gelijk moest blijven, ook haar laatste restant van physische beteekenis. En daarmede worden we voor de vraag gesteld, niet slechts de meetkunde, maar ook de ruimte zelve uit onze atoomphysische theorieën te verbannen. Of precieser gezegd, de natuurwetten zoodanig te formuleeren, dat daarbij alleen over materie en straling, alleen over partikels en photonen dus, gesproken wordt, zonder bovendien nog een „ruimte” te onderstellen, „waarin” deze zich bewegen. Van het standpunt der veldtheorie beschouwd wil dit zeggen, dat niet meer de veldwaarden in een willekeurig punt der *ruimte*, maar alleen die in een willekeurig *partikel* zinvol zijn.¹⁾ Het is wel merkwaardig, dat Riemann ook de mogelijkheid eener dergelijke atomistische structuur der ruimte zelf reeds in zijne genoemde rede van 1854 aangeduid heeft.

Onze resultaten met betrekking tot het ruimteprobleem samenvattende kunnen we dus vaststellen:

1e. Voor de beschrijving van normale, zonder speciale instrumenten waarneembare verschijnselen is de Euklidische meetkunde, voor verschijnselen die alleen door sterke telescopen kunnen worden waargenomen waarschijnlijk een gesloten ruimte-model van Riemann het doelmatigste. Voor atomistische verschijnselen daarentegen is een theorie gewenscht, die geenerlei meetkunde vooronderstelt.

¹⁾ Voor de mathematische uitwerking van zulk een theorie zal van de „structures” en „lattices” van Oystein Ore en Garrett Birkhoff of van de „diskrete Räume” van Paul Alexandroff gebruik gemaakt moeten worden.

2e. Uitspraken, inhoudende dat de ruimte, bedoeld als abstract substraat van materie en straling, onbewegelijk, oneindig, onbegrensd en onafgebroken zou zijn, hebben geen fysische beteekenis. Indien echter de ruimte geïdentificeerd wordt met de waarneembare materie en straling is zij nòch onbewegelijk, nòch onafgebroken, terwijl de oneindigheid en de onbegrensdheid ook dan nog geen zin verkrijgen. Woorden als „oneindig” e. d. kunnen slechts het somtijds alles overheerschend karakter van zekere menselijke *emoties* tot uitdrukking brengen.

Met betrekking tot het *tijdprobleem* kan en moet ik aanzienlijk korter zijn. Vooreerst zij er aan herinnerd dat het tijdprobleem tengevolge van het relativiteitsbeginsel van Lorentz ten nauwste aan het ruimteprobleem gekoppeld is. Anderzijds echter moeten we wel opmerken, dat de relativiteitstheorie op een meetkundigen grondslag berust en dientengevolge voor de onderdeelen van een atoom haar beteekenis verliest. Bovendien is deze koppeling alleen voor ruimte en tijd in hun geheel vastgelegd, en houdt zij met de atomistische structuur der materie geen rekening.

Teneinde de relativiteitstheorie met de quantummechanica te kunnen vereenigen heeft Dirac dan ook in 1932 de noodzakelijkheid ingezien, aan ieder afzonderlijk partikel niet alleen zijn eigen plaatsbepalende coördinaten, maar ook zijn eigen *tijd-coördinaat* toe te kennen. De natuurkundige wetten worden daardoor niet meer uitgesproken voor de toestanden der deeltjes op één bepaald oogenblik, maar voor afzonderlijke gebeurtenissen in de „levens” der verschillende deeltjes, nog door geen enkele gelijktijdigheidsbetrekking gecorreleerd. Ons gewone tijdbegrip ontstaat dan als een *gemiddelde* over de afzonderlijke aan de deeltjes toegevoegde tijden, met behulp van de onderstelling dat de afwijkingen van het gemiddelde te verwaarloozen zijn. Daarmede is dus niet meer het op een bepaald moment beschouwde partikel, maar het afzonderlijke *verschijnsel* (of, om een door A. N. Whitehead in 1919 ingevoerden term te gebruiken, een *event*) tot eigenlijke bouwsteen der physica geworden.

De consequentie van dezen gedachtengang eischt nu, dat men thans ook de onbeperkte deelbaarheid van den tijd prijs geeft, en de hypothese opstelt, dat de materie niet alleen ruimtelijk, maar ook naar den *tijd* atomistische structuur heeft, dat dus de

levensgeschiedenis van een enkel deeltje, een electron of photon bij voorbeeld, niet uit een continue opeenvolging van toestanden, maar uit een reeks van afzonderlijke verschijnselen zou bestaan, waarvoor ik onlangs het Engelsche woord „flashes”, ons „flitsen” dus, heb voorgesteld.¹⁾ Dat deze hypothese met de empirische continuïteit in de beweging van makroskopische lichamen niet in tegenspraak is, blijkt uit iedere bioscoopvoorstelling en is bovendien volkomen analoog met de vereenigbaarheid van de gewone atoomtheorie met de empirische ruimtelijke continuïteit der materie. Men kan dan ook den eisch stellen, de natuurwetten uitsluitend in combinaties van flitsen uit te drukken, zonder bovendien nog een „gelijkmatig stroomende tijd” te onderstellen, „waarin” de flitsen geschieden. Zij leidt dus tot een volledige uitbanning van het ruimte-tijd-continuum, of, wat op hetzelfde neerkomt, op identificeering van ruimte en tijd met materie en straling, en toekenning van een consequente atomistische structuur aan beide.²⁾

Deze hypothese, die nog geenszins voldoende gepreciseerd is om tot direct waarneembare conclusies te leiden, biedt desondanks verschillende veelbelovende aspecten.

Vooreerst bevrijdt zij ons van de uitsluitingsnegatie die in de onderstelling der onbeperkte deelbaarheid van den tijd gelegen is.³⁾

Vervolgens laat zij in de thermodynamica de quantitative preciseering toe, dat iedere „flash” met één actiequantum van Planck correspondeert. Dan stelt (afgezien van een constanten factor) de druk van een ideaal gas de gemiddelde dichtheid voor, waarmede de flashes in den ruimte-tijd verdeeld zijn, terwijl de absolute temperatuur met het gemiddeld aantal flashes per molecule per secunde evenredig is. Deze betrekkingen kunnen onafhankelijk van meetkundige onderstellingen worden geformuleerd. Bij kamertemperatuur zou dit beteekenen, dat een molecule uit gemiddeld dertig biljoen flitsen per secunde zou bestaan.

¹⁾ D. van Dantzig, Some possibilities of the future development of the notions of space and time, *Erkenntnis* 7, 1938, p. 142—146.

²⁾ Als *relaties* tusschen flitsen behouden ruimte en tijd nog een zekere betekenis.

³⁾ Daardoor is zij in zekeren zin een voortzetting van ideeën van Leibniz en pater Boscovitch. Vgl. W. Gent, l.c. I, p. 170—200.

Ook voor de quantumtheorie belooft de flitsenhypothese meerdere helderheid te brengen. Vooreerst ligt het voor de hand, aan te nemen, dat de in de thermodynamica beschouwde flitsen niet enkelvoudig zijn, maar zelf weer zijn opgebouwd uit een eindig aantal flitsen van verschillenden aard, evenals een molecule nog uit een eindig aantal kwalitatief verschillende deeltjes bestaat. Met behulp van een dergelijke onderstelling kan men het gelijktijdig ontstaan van een electron en een positron door wederzijdsche vernietiging van twee photonen, evenals het omgekeerde proces, als volkomen gelijksoortig met de botsing van een positron of electron met een photon beschouwen. Een brok materie of een electronen- of photonengas e. d., gedurende eenigen tijd beschouwd, krijgt min of meer het karakter van een vierdimensionaal ruimte-tijd-kristal. Daardoor wordt het duidelijk, dat, evenals de verdeeling van een kristal in moleculereeksen niet ondubbelzinnig vastgelegd is, ook de verdeeling van het vierdimensionale flash-kristal in afzonderlijke partikels niet eenduidig bepaald behoeft te zijn. Dat wil dus zeggen, dat onder bepaalde omstandigheden de individualiteit van de afzonderlijke deeltjes verloren kan gaan, hetgeen inderdaad een karakteristiek resultaat van de moderne physica is. Tenslotte zouden wellicht de paradoxale eigenschappen, die de quantumtheorie aan een electron toekent, zooals *ondanks zijn ondeelbaarheid* gelijktijdig door verschillende spleten van een rooster te kunnen gaan, en wel met verschillende waarschijnlijkheden, een meer ongedwongen interpretatie kunnen krijgen, door te onderstellen, dat in elk der spleten een gedeelte van het aantal flitsen plaatsvindt waaruit het electron bestaat, en wel zoo dat de flitsenaantallen met de waarschijnlijkheden evenredig zijn.

Hoewel hiermede zeer zeker niet ieder mysterie uit de quantumtheorie verdwenen is, en bij voorbeeld de vraag, waarom verhoudingen van flitsenaantallen als relatieve waarschijnlijkheden waargenomen zouden worden, onopgehelderd blijft, terwijl er ook niet binnen korten tijd directe voordeelen van onze beschouwingen te wachten zijn, schijnt de flitsenhypothese toch voldoende vruchtbaarheid te bezitten om haar in de aandacht van mathematici en physici te mogen aanbevelen.

Onze beschouwingen samenvattend kunnen we als onze verwachting uitspreken, dat de reeds door verschillende quantum-

theoretici¹⁾ bij herhaling gewenschte en door enkelen beproefde grondige herziening van onze ruimte- en tijd-voorstellingen zich in den zin van het volgende programma zal voltrekken.

1e. Eliminatie van alle metrische relaties uit de mikrophysica en reductie van de makrophysische metriek tot een functie van elementaire fysieke grootheden.

2e. Vervanging van de hypothese van het continue voortbestaan der materiele deeltjes en photonen in den tijd door de (nader te preciseeren) flitsenhypothese.

3e. Eliminatie van het ruimte-tijd-continuüm door invoering van een discrete ruimte en tijd, en identificatie daarvan met het flash-systeem.

Tot slot zij het mij vergund, nog enkele woorden te zeggen over den mathematischen denkvorm, waarvan ik U in het voorgaande een voorbeeld en toepassing heb gegeven. Een voorbeeld, dat, gezien het karakter van deze plechtigheid, op mijn eigen studiegebied behoorde te liggen en dat dientengevolge van vrij abstracten aard was. Evenwel laat deze zelfde denkvorm, deze zelfde aard van begrippenanalyse zich ook op talloze andere gebieden toepassen die met de onmiddellijke realiteit van ons dagelijksch leven in rechtstreeksch verband staan. En zulk een ruimere toepassing van den mathematischen denkvorm komt mij voor van het hoogste belang te zijn.

Immers de weergalooze ontwikkeling van de techniek in engeren zin, van de *technische* techniek zou men kunnen zeggen, is gevolgd door een nauwelijks minder belangrijke ontwikkeling van de *psychologische* techniek, van de reclametechniek, advertentietechniek, propagandatechniek, kortom van de middelen, invloed op andere mensen uit te oefenen. Verzuimd hebben wij echter, onze afweermiddelen tegen overtuigings- en suggestiepogingen van anderen te versterken door verbetering van onze *denktechniek*.

Onophoudelijk worden wij door pers, film en radio van alle zijden gebombardeerd met woorden, groote en zware woorden, brisantwoorden en gifwoorden, maar ook liefelijke en schoon-schijnende narcosewoorden. Maar waar zijn onze pantserplaten

¹⁾ O. a. Schrödinger, Pauli, Flint, March.

en antidota daartegen? Een nuance in woordenkeuze of intonatie van spreker of schrijver brengt ons en miljoenen anderen tot wanhoop of woede, tot enthousiasme, tot afschuw, haat of mededooogen. En welken blijvenden invloed hebben al die woorden op ons? Dènken wij nog zoals wij vroeger dachten? En willen wij nog wat wij vroeger wilden? En hoe zullen wij in de toekomst denken en willen? Zullen wij dan denken zoals wij thans *wenschen* te zullen denken? En zullen wij dan willen wat wij thans *willen* willen?

In dit warnet van vragen en schijnvragen kunnen wij in de begrippenanalyse, gedemonstreerd in den wiskundigen denkvorm, een gids vinden. Tegen al deze geweten en ongeweten psychische invloeden kunnen wij in *verbetering van onze denktechniek* een wapen smeden. En dat een dergelijke wapening van onzen geest noodig, dringend noodig is, is mijn diepste overtuiging.

Zeer gewaardeerde toehoorders.

Bij de aanvaarding van mijn ambt als buitengewoon hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool past het mij, in de eerste plaats mijn eerbiedigen dank te brengen aan Hare Majesteit de Koningin voor het feit dat Zij mij wel tot dit ambt heeft willen benoemen.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren.

Het feit dat Gij, mij en mijn werk kennende, mij tot de benoeming voor dit ambt hebt willen voordragen, stemt mij tot groote erkentelijkheid. Ook voor de wijze waarop Gij mij bij herhaling gesteund hebt ben ik U tot grooten dank verplicht. Door een voortdurend streven, de belangen van het onderwijs aan de Technische Hoogeschool te dienen hoop ik mij het door U betoonde vertrouwen waardig te maken en ook in de toekomst Uw welwillenden steun te mogen behouden. Ook U, *Mijnheer de Secretaris van het College van Curatoren*, te danken voor Uwe steeds even bereidwillige tegemoetkomendheid, is mij een aangename plicht.

Hooggeleerde Heeren Professoren.

Het is mij een groot voorrecht, thans in Uw midden te worden opgenomen, temeer daar ik reeds herhaalde malen van verschil-

lenden van U blijken van waardeering en vriendschap mocht ontvangen. Ik zal er steeds naar streven, mij de eer, tot Uwen kring te behooren, waardig te betoonen. Ik ben er van overtuigd, dat onze besprekingen in het belang van de Technische Hoogeschool evenals tot dusverre steeds op de aangenaamste wijze zullen verlopen.

Hooggeleerde Heeren Ambtgenooten van de Afdeeling der Algemeene Wetenschappen, in het bijzonder van de Onderafdeeling der Wiskunde.

Het is voor mij een vereerend en verheugend feit, dat Gij den wensch geuit hebt, mijn positie als lector aan de Technische Hoogeschool in een met de Uwe gelijkwaardige om te zetten, een feit dat mij met dankbaarheid jegens U vervult. Ik dank U voor de aangename wijze waarop Gij mij steeds in Uwe meerdere ervaring hebt doen deelen en vertrouw dat Gij zulks ook in de toekomst zult willen blijven doen.

Hooggeleerde Schouten, Zeer Vereerde Mentor.

Het zou mij zeer zeker niet mogelijk geweest zijn, ook slechts een fractie van het werk dat ik op het gebied der meetkunde en der mathematische physica heb kunnen doen, te verrichten, wanneer Gij mij niet zoo ten volle had laten deelen in den onvergelykelijken schat van kennis dien Gij U hebt verworven. Ook na de jaren, waarin ik het niet hoog genoeg te waardeeren voorrecht genoot, Uw assistent te mogen zijn, zijn Uw aansporing en aanmoediging, Uw steeds doeltreffende en steeds opbouwende kritiek, Uw bezielende geestdrift, en Uw zeldzame kennis van de meetkunde en hare toepassingen voor mij van onschatbare waarde gebleven. Aanvaard hiervoor, en niet minder voor de persoonlijke belangstelling en vriendschap die Gij mij zoo herhaaldelijk hebt betoond, mijn innigsten dank.

Hooggeleerde Mannoury, Zeer Vereerde Leermeester.

Het verheugt mij in hooge mate, dat Gij door mijne rede te willen bijwonen, mij de gelegenheid hebt geschonken, U althans éénmaal openlijk te zeggen, dat het voor mij een onschatbaar

voorrecht is, Uw leerling te zijn geweest en nog te zijn. Sinds het eerste college dat ik van U hoorde heb ik met steeds stijgende belangstelling en bewondering er naar gestreefd, Uw diepdoor-dachte opvattingen op wijsgeerig gebied te begrijpen en ze mij eigen te maken. Door de talrijke discussies en debatten die ik reeds zoo vele jaren met U mocht voeren is het mij mogelijk geworden, eerst recht de beteekenis en het belang van Uw werk te leeren kennen. Ik ben er van overtuigd, dat dit werk pioniers-werk is, dat eerst in de toekomst ten volle naar waarde zal worden geschat.

Sta mij toe, in U hier tevens de vertegenwoordiger te zien van mijn Alma Mater en tegenover U tevens mijn dank uit te spreken jegens mijn andere Leermeesters, Hoogleeraren der Amsterdamsche Universiteit, in het bijzonder jegens Professor Brouwer, van wiens werk en van wiens invloed op mijn werk ik de beteekenis in den loop der jaren steeds hooger ben gaan waardeeren.

Zeergeleerde Helwig.

Gij zijt het die gedurende mijn H. B. S.-jaren den grondslag hebt gelegd voor mijn latere mathematische studie. Aanvaard voor Uw steeds even voortreffelijke en steeds even boeiende lessen mijn oprechten dank.

Mijne Heeren Lectoren en Privaatdocenten.

U dank ik voor Uw collegialen omgang gedurende de laatste zes jaren.

Dames en Heeren Assistenten.

Ik hoop in de toekomst evenals tot dusverre op Uw steeds aangename en zeer gewaardeerde medewerking te mogen rekenen.

Dames en Heeren Studenten.

De taak, U in het bezit te stellen van de mathematische kennis en techniek die noodig zijn om Uwe technische studie tot een goed einde te kunnen brengen, is een gemeenschappelijke taak voor U en mij. Ik zal er steeds naar streven, deze taak zoo goed

DEPOT 08418

mogelijk te volbrengen, maar hoop daarbij ook op Uw medewerking te kunnen rekenen, Uwe *passieve* medewerking door mij Uwe aandacht te verleen bij mijne lessen, en Uwe *actieve* medewerking door mij Uw eigen meening en waar noodig Uw kritiek mede te deelen.

Van het woordenbombardement waarvan ik sprak is Uwe generatie een der strategische doelen. Want Gij zijt de bouwers van de toekomst. Weest U van deze verantwoordelijkheid bewust door steeds te bedenken, *wat* Gij zult bouwen en *hoe* Gij zult bouwen. Fabrieken of motoren, schepen, mijngangen of bruggen, eiwitmoleculen of wellicht zelfs flash-kristallen, *hoe* deze te bouwen zult Gij hier leeren. En bij Uw streven dit *goed* te doen zal de wiskunde, de wiskundige techniek dus, U een onontbeerlijk hulpmiddel zijn.

Maar *wat* Gij zult gaan bouwen kan geen wiskundige techniek U leeren. De wiskundige *denkwijze* echter kan U wellicht helpen, voortdurend Uwe voortbrengselen met Uwe idealen te confronteren. Moge derhalve Uw kritiek steeds opbouwend en scherp-geslepen zijn tegen daden en welwillend tegen personen. Maar moge zij ook *nóóit* verslappen. Ook niet tegen de geweten en ongeweten invloeden. Maar *óók* niet tegen Uw eigen resultaten.

Ik heb gezegd.