De begrippen axioma en axiomatiek in de wis-en natuurkunde.

Voordracht te houden door
Prof.Dr.H.Freudenthal op 23 Aug.1948
om 15.30 u.n.m.

In de klassieke philosophische terminologie is axioma een stelling, die niet bewezen kan worden,maar ook niet bewezen behoeft te worden, omdat zijzelf grondslag en veronderstelling van elk bewijs en duidelijker,noodwendiger,evidenter en algemener is dan al hetgeen met behulp ervan moet worden bewezen.

Bij Euclides komt het woord axioma niet voor.In het begin van de Elementen vindt men

1) ὅροι (definitiones,bepalingen),
2) αἰτήματα (postulata,eisen)
3) κοιναὶ ἔννοιαι (communes animi conceptiones,algemene inzichten).

Voorbeelden. 1) een punt is,wat geen deel heeft;een stompe hoek is groter dan een rechte.2)Laat geeist zijn,"van elk punt naar elk een rechte lijn te trekken","een beeindigde rechte samenhangend in rechte lijn te verlengen","dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel beschreven wordt", "dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn", "het parallelenpostulaat".3)dingen,gelijk aan hetzelfde,zijn ook gelijk aan elkaar;het geheel is groter dan het deel,dingen,die op elkaar passen,zijn gelijk.- Traditie over deze indeling is niet eenstemmig. Mogelijk is de gehele indeling en het stel opschriften niet van Euclides afkomstig.De term ἀξίωμα (dignitas,axioma) wordt later(?) gebruikelijk voor groep 3 van Euclides.

De logische functie,die Euclides aan de groepen (1),(2),(3) toekende,is onbekend en ook op grond van de philosophische literatuur (Aristoteles) en de commentaren (Proklos) niet te achterhalen.

Practisch alle wijsgeren en natuurphilosophen tot in de 19e eeuw gebruiken axioma als term voor een evidente waarheid; zij denken daarbij meestal aan groep (3) of aan nog abstractere beginselen,zoals het "tertium non datur".Soms weliswaar ook aan het parallelenpostulaat. Met het inzicht in de mogelijkheid van niet-euclidische meetkunde wint aanvankelijk een terminologie veld,waarbij de meetkundige grondstellingen "postulaten" worden genoemd (blijkbaar om hun niet-evidentie te onderstrepen).Hilbert e.a. spreken echter van axioma's.Hun gezag heeft tenslotte de doorslag gegeven:het woord "axioma" heeft,eerst in de wiskunde,dan ook in de philosophie de betekenis "evidente waarheid" verloren.

Het oorspronkelijke begrip axioma houdt verband met een primitieve wetenschapsleer,die nog geen rekening kon houden en behoefde te houden met de wetenschappen,zoals die zich ondertussen in feite hebben ontwikkeld.Deze wetenschapsleer (die in philosophische kringen veelal

ook nog thans wordt aangehangen -zie bv.de Weense school) meent,dat men de werkelijkheid kan analyseren,door stelselmatig recursief te definieren en recursief naar reden of oorzaak te vragen,dat men hierbij terecht zou komen bij zekere ἀρχαί (principia,beginselen),bestaande uit definities en axioma's,en dat men omgekeerd hier beginnende de werkelijkheid kon opbouwen.De enige natuurwetenschap,waar dit is mogelijk gebleken (althans tot op zekere hoogte) is die,waarvan de meetkunde het mathematisch aftreksel is.Voor andere wetenschappen is dat een illusie.De feitelijke wetenschappen werken met impliciete definities.De eerste,die hierop de aandacht vestigt,is Gergonne.De moderne opvatting is dan ook die,dat de meetkundige axioma's de hierin vervatte begrippen impliciet definiëren.

Voorbeeld. Een stelsel bestaande uit twee verschillende soorten dingen (punten en rechten) en één relatie (incidentie) heet een projectieve meetkunde,wanneer voldaan is aan:1)Bij twee punten is er één rechte die met beide incideert.2)Bij twee rechten is er één punt,dat met beide incideert.3)Bij elke rechte zijn er minstens drie punten,die ermee incideren.4)Bij elk punt zijn er minstens drie rechten,die ermee incideren.(Evtl.nog meer eisen.)Punt,rechte,incidentie zijn ongedefinieerde begrippen en kunnen veelvuldig worden geinterpreteerd.Bv.

punt = lid van gezin Pieterse (A)
rechte = vacantiedag. (a)
incidentie = A neemt op de dag a deel aan uitstapje met de auto van het gezin Pieterse.

Dit interpreteren is het zelfde,wat men ook noemt "isomorph afbeelden".Door niet expliciet te zeggen,wat punten enz.zijn houdt men ruimer armslag.De interpretatie-mogelijkheden van het axioma-stelsel verhogen zijn practische betekenis.Bv.is "groep" oorspronkelijk een verzameling van permutaties;de groep-operatie is het achter elkaar uitvoeren van permutaties; met betrekking tot deze operatie moet het stelsel gesloten zijn.Langzamerhand krijgt men met stelsels te maken,die niet uit permutaties bestaan,maar overigens de essentiële kenmerken van een groep vertonen.Dan geeft men een axiomatische definitie.

Een niet lege verzameling heet groep,wanneer in deze verzameling door een operatie (vermenigvuldiging genaamd) aan een geordend paar elementen een derde element is toegevoegd (ab = c),zo dat 1) (ab)c = = a(bc), 2) een e aanwezig is met ea = a voor alle a, 3)bij elke a een a^{-1} aanwezig is met $a^{-1}a = e$. - Hierdoor worden de begrippen groepelement en groepoperatie (niet het begrip groep) impliciet gedefinieerd.

Van deze methode zijn er tal van voorbeelden in de moderne wiskunde. (Ringen,lichamen,topologische ruimten,lineaire ruimten enz.)

Onaangename kant van deze methode.Er behoeft niets te bestaan,wat de in een stel impliciete definities geeiste eigenschappen bezit,bv.

doordat de axioma's met elkaar strijdig zijn.Klassieke methode,om het existentie-bewijs te voeren voor iets wat aan de meetkundige axioma's voldoet:men wijst zekere analytische objecten aan,waarvoor de axioma's gelden. - Analoge methode bij alle axiomatieken,die onderdelen van de wiskunde betreffen.

Men heeft getracht,op dezelfde wijze de gehele wiskunde op te bouwen.Moeilijkheid. Bij het analyseren van de wiskundige methode en bij het werken met een uit deze analyse voortgekomen axioma-stelsel treedt de wiskundige methode als object èn als middel van onderzoek op.Is hier een zuivere scheiding mogelijk,en zo ja,kan men dan tot niet-triviale resultaten komen?De oplossing werd gezocht in die richting,dat het geanalyseerde mathematische object is het conventionele mathematische spel,en dat de taak van de axiomaticus erin bestaat,die spelregels te onderzoeken en op grond van dat onderzoek de uitkomsten te voorspellen,waartoe de spelende mathematici kunnen komen.Dit programma is tot nu toe geen succes beschoren geweest, vermoedelijk omdat het mathematische spel nooit empirisch is ontleed.

Het intuitionisme erkent de splitsing in beredeneerde en redenerende wiskunde niet.Voorbeeld. de hoofdstelling over finiete verzamelingen.

Signifiese beschouwingen over de grondslagen van de wiskunde.

Voordracht te houden door
Johan J.de Iongh op 24 Augustus 1948
om 15.30 u.n.m.

Een grove afbakening van de Significa kan als volgt misschien worden gegeven: Significa is die techniese, toegepaste wetenschap, welke de symboliese beinvloeding (verstandhouding) tussen mensen onderzoekt.

Bij toepassing van de signifiese methoden op een eenvoudige wiskundige uitspraak 2 x 3 = 6 zal op de vraag, welke gedachten bij hem opkomen, wanneer hij dit hoort, door de eerste proefpersoon mogelijk geantwoord worden: 1 x 3 = 3 , 2 x 3 = 6 , 3 x 3 = 9 enz., en deze zal aan het dreunen van een schoolklas denken. De tweede zal zich twee rijtjes van drie knikkers voorstellen en die tezamen aftellen; 1,2,3; 4,5,6. De derde zal misschien opmerken dat knikkers of stoelen of andere aan de externe ervaring ontleende voorstellingen er niets toe doen, maar dat hij zich abstracte psychiese eenheden kan denken en daar van twee drietallen tot een zestal samenvatten.

Zo worden drie soorten gedachten opgewekt door deze eenvoudige uitspraak: 2 x 3 = 6, gedachten aan andere dergelijke woordverbindingen en uiteindelijk aan de samenhang van het gehele mathematiese taalsysteem, waarin deze uitspraak past, gedachten aan eigenschappen van dingen uit de buitenwereld en gedachten die op eigenschappen van introspectief gegeven psychiese constructies betrekking hebben.

En ook op de vraag, waarom de proefpersoon deze uitspraak 2 x 3 = 6 waar vindt, zijn dezelfde antwoordtypen te onderscheiden. De eerste leidt de uitspraak volgens vaste regels af uit andere uitspraken en zegt, dat de waarheid van een wiskundige uitspraak alleen betekenis heeft ten opzichte van een systeem van afspraken en taalregels, de tweede zal weer op zijn knikkers wijzen, terwijl de derde zal zeggen, dat de mathematiese constructie in zijn bewustzijn, waartoe hij door deze uitspraak gebracht werd, slaagde.

Al treden de drie genoemde typen van associaties bij de meeste proefpersonen gemengd op, de wijsgeren en de wiskundigen, die de grondslagen van hun wetenschap onderzochten, hebben veeltijds in één dezer typen het wezenlijk wiskundige menen te moeten onderkennen. Wiskunde is òf in wezen een symbolensysteem, waaraan pas later bij eventuele toepassingen een betekenis toegekend wordt (R.Carnap) òf een wetenschap over bepaalde allereenvoudigste eigenschappen van dingen in de buitenwereld (M.Pasch) of een zuiver geestelijke activiteit, die pas later en op voor de eigenlijke wiskunde onwezenlijke wijze door een taalsysteem beschreven wordt. (L.E.J.Brouwer).

De significus merkt nu op dat deze onderscheidingen slechts in eerste benadering houdbaar zijn.

Het verschil tussen knikkers en onze herinneringen,waarnemingen of verwachtingen van knikkers berust slechts op een andere wijze van uitdrukken.Abstracte psychiese eenheden zijn niet in de directe introspectie gegeven,maar worden in gedachte en bij benadering geconstrueerd door van gegeven meestal wel aan dingen in de buitenwereld verbonden voorstellingen de onderscheidende qualiteiten weg te denken.Het werken met een taalsysteem zelf onderstelt al in ons bewustzijn een onderscheiden van symbolen en een samenvatten van deze symbolen in groepen dus al precies datgene,wat de intuitionist onder wiskunde verstaat.

Ook naar de andere zijde blijkt deze scheiding tussen de geestelijke constructieactiviteit van de intuitieve wiskunde,en het taalsysteem waardoor deze beschreven wordt,niet feilloos scherp te volvoeren,al is zij tot in zekere benadering mogelijk.Bij het tellen zelf reeds en de eenvoudigste bewerkingen met grotere natuurlijke getallen speelt de wiskundige taal een regulariserende en de mathematiese constructie pas mogelijk makende rol.

De vraag naar de grondslagen van de zekerheid van de wiskunde is hier nog niet mee beantwoord.Waarop ook teruggevoerd,steeds weer rijst de nieuwe vraag naar de juistheid van de terugvoering en de zekerheid van de nieuwe grondslagen.Maar deze vraag dreigt een schijnvraag te worden, want ook de begrippen "waar" en "juist" betekenen in het gewone spraakgebruik "in overeenstemming met bepaalde standaardgrondslagen" en de vraag naar de waarheid van die standaard schijnt dus niet in redelijkheid gesteld te kunnen worden.Tot zover luidt het antwoord,de zekerheid der wiskunde er speciaal van de uitspraak 2 x 2 = 4 is zo zeker als twee maal twee vier is.

Maar ook deze reductie tot een schijnproobleem is slechts in eerste benadering geldig,daar hier de wiskundige uitspraken op zichzelf beschouwd zijn of in verband met van de denkende wiskundige losgedachte andere uitspraken,elementen uit de buitenwereld of uit het bewustzijn. Wordt deze scheiding tussen wiskunde en wiskundige opgeheven,dan krijgt de vraag naar de waarheid en de dan daarmee vrijwel samenvallende schoonheid van de wiskunde een nieuwe,niet meer mathematiese,maar nog wel redelijke,intersubjectieve,nu wijsgerig-religieuze zin.

Literatuur.

L.E.J.Brouwer: Wissenschaft,Mathematik und Sprache.
Monatsh. Math.und Physik 36 (1939).

D.van Dantzig: General procedures of empirical science.
Synthese 5 (1947) 441-455.

A.Heyting: Mathematische Grundlagenforschung.
Intuitionismus,Beweistheorie.Berlin.Springer 1934.

G.Mannoury: Mathesis en Mystiek.
Amsterdam 1925.

Die signifischen Grundlagen der Mathematik.
Erkenntnis 4 (1934)

De schoonheid der wiskunde als signifies probleem.
Synthese (1937).

Voordracht te houden op
Dinsdag 24 Augustus om 10 u.v.m.

Materiele logica. Formele logica. Symbolische formele logica of logistiek.

De propositie-of oordeelslogica staat aan de aanvang der logistiek. Het volgende axiomastelsel voor de klassieke propositie-logica is dat van Russell en Whitehead (enigszins uitgebreid door toevoeging der axioma's V en VI).

Elementaire proposities of -formules: $A, B, \ldots; A_1, B_1, \ldots; A_n, \ldots$ Samengestelde proposities ontstaan uit elementaire proposities of reeds eerder gevormde samengestelde proposities met behulp van relatie-tekens. Ongedefinieerde grondrelaties: komplement van (') , de disjunctie (+).

Inzettingsregel $\mathfrak{J}$ (1e deel). Uit een formule of propositie ontstaat een nieuwe door een in haar voorkomende grote latijnse letter op alle plaatsen, waar ze voorkomt, door eenzelfde formule of propositie te vervangen. Daarbij zullen met $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ ook $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ en $\mathfrak{B}'$ formules zijn; bovendien ook nog λ en ν.

Definitie. De implicatie $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ is een andere schrijfwijze voor $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$

Definitie. Een uitdrukking, bestaand uit een propositie of formule gevolgd door een modaliteitsteken $\doteq \bar{\nu}$ of $\doteq \bar{\lambda}$, en ontstaan door eindig veel malen axioma's, inzettingsregel I, afleidingsregel A of een der definities te gebruiken, is een theorema.

Definitie. Is $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}]$ een theorema, zo ook $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}]$ en omgekeerd.

Inzettingsregel $\mathfrak{J}$ (2e deel). Is $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ een theorema, en $\mathfrak{B}$ een uit $\mathfrak{A}$ met het eerste deel van deze regel ontstane formule, zo is ook $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ een theorema.

Axioma I. $(\mathfrak{X}+\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X} \doteq \bar{\nu}$; Axioma II. $\mathfrak{X} \to (\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}) \doteq \bar{\nu}$; Axioma III. $(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}) \to (\mathfrak{Y}+\mathfrak{X}) \doteq \bar{\nu}$; Axioma IV. $(\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}) \to \{(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}) \to (\mathfrak{X}+\mathfrak{Z})\} \doteq \bar{\nu}$
Axioma V. $\lambda \to \mathfrak{X} \doteq \bar{\nu}$; Axioma VI. $\mathfrak{X} \to \nu \doteq \bar{\nu}$

Afleidingsschema A. Zijn $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ en $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ theorema's, zo is ook $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ een theorema.

I. Dit axiomastelsel is vrij van tegenspraak, d.w.z. $\mathfrak{X} \doteq \bar{\nu}$ is er niet mee afleidbaar.

Opmerkingen. 1°. Het axiomastelsel is 2^n-waardig (n een natuurlijk getal). 2°. Het is te interpreteren als propositie-logica van een elementaire waarschijnlijkheidsrekening.

II. De axioma's en de beide regels zijn van elkaar onafhankelijk.

III. Het axiomastelsel is volledig: 1° in den zin dat voor alle proposities $\mathfrak{A}$, die bij de interpretatie, waarop het bewijs van I rust, "waar" genoemd worden, $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ een theorema is, en dat voor alle proposities $\mathfrak{B}$, welke bij die interpretatie "onwaar" zijn, $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$ een theorema is; 2° in den zin, dat, zo $\mathfrak{C} \doteq \bar{\nu}$ zich niet met het stelsel laat afleiden, toevoeging van $\mathfrak{C} \doteq \bar{\nu}$ tot de axioma's $\mathfrak{X} \doteq \bar{\nu}$ afleidbaar maakt.

Bespreking van axiomastelsels.Dualiteitsprincipe.

Alleen voor een 2-waardige interpretatie is het axiomastelsel volledig (ook wel:vol) in den zin,dat alle bij die interpretatie mogelijke functies van een eindig aantal variabele elementaire proposities zich door middel van de grondrelaties van het stelsel laten voorstellen.

Verband van klassieke propositie-logica en algebra van Boole.

De propositie-logica van Strict Implication (Lewis) ontstaat uit de klassieke propositie-logica door toevoeging van een door N aan te duiden eenledige relatie (te interpreteren als noodzakelijk waar); $\mathfrak{A}$ impliceert $\mathfrak{B}$ strict is dan voor te stellen door $N(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}')'$.Naast de axioma's I-VI, Inzettingsregel $\mathfrak{J}$ (aan het eind voege men $N\mathfrak{R}, N\mathfrak{V}$ toe) en Afleidingsschema A zal het nieuwe stelsel bevatten:

Axioma VII. $(N\mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{X} \doteq \bar{v}$; Axioma VIII. $\{N(\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y})\} \rightarrow \{(N\mathfrak{X}) \rightarrow (N\mathfrak{Y})\} \doteq \bar{v}$; Axioma IX. $(N\mathfrak{X}) \rightarrow \{N(N\mathfrak{X})\} \doteq \bar{v}$;en de afleidingsregel B:Is $\mathfrak{A} \doteq \bar{v}$ een theorema,zo ook $N\mathfrak{A} \doteq \bar{v}$

Dualiteitsprincipe.Vrij van tegenspraak;2^n-waardig;interpretatie als logica van een elementaire waarschijnlijkheidsrekening.

Schets van de ontwikkeling der 3-waardige logica van Lukasiewicz en Slupecki.

De propositie-logica van het intuïtionnisme werd door Heyting geformaliseerd.Bewijs van Gödel voor de metologische beweringeen volledige interpretatie van de intuïtionistische propositie-logica door middel van een eindig aantal waarden is onmogelijk.

Verhouding der verschillende stelsels van propositie-logica.

Engere praedicatenlogica of praedicatenlogica van de eerste trap.

Praedicaten zullen worden voorgesteld door functietekens met één of meer lege plaatsen:

$F(.), G(.), F_1(.), G_1(.), ---, F_n(.), G_n(.).---$

$F(.,.), G(.,.), F_1(.,.), ---$

$F(.,.,.), ----$

$-----$

De door punten aangegeven lege plaatsen zullen door tekens voor dingen, variabelen,die tot zekere klassen zullen behoren,kunnen worden opgevuld; notatie voor variabelen:

$x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, \ldots\ldots, w_1, x_2, \ldots\ldots, w_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$

Quantificatoren of operatoren zijn van tweeërlei aard: $\Pi_{(.)}$, de al-operator,en $\Sigma_{(.)}$,de existentie-operator.Zo betekent $\Pi_{(x)} F(x)$ alle subjecten x hebben de door het praedicaat F uitgedrukte eigenschap; $\Sigma_{(x)} F(x)$ er bestaat een individuele x,welke de door F uitgedrukte eigenschap heeft; $\Pi_{(x)} \Pi_{(y)} F(x,y)$ tussen iedere x en iedere y bestaat de relatie F; $\Sigma_{(x)} \Sigma_{(y)} F(x,y)$ er bestaat een x en een y,waartussen de

relatie F bestaat; $\Pi_{(x)}\Sigma_{(y)}F(x,y)$ bij iedere x is er een y met de relatie F tussen beiden; etc.

In $\Pi_{(x)}F(x)$, $\Sigma_{(x)}F(x)$, $\Pi_{(x)}F(x,y)$, $\Sigma_{(x)}F(x,y)$, F(y) heet de variabele x, voor zover ze voorkomt, gebonden, de variabele y, voorzover ze voorkomt, vrij.

Een axiomatische opbouw aansluitend bij de hier voor de klassieke propositie-logica gegeveneis de volgende:

Elementaire proposities: $A, B, \ldots, A_1, \ldots, A_n, \ldots$

Variabelen voor individuen en praedicaten (zie boven).

Ongedefinieerde grondrelaties: $+, /, \Pi_{(.)}, \Sigma_{(,)}$.

<u>Inzettingsregel $\mathfrak{J}$ (1e deel).</u> Proposities of formules zijn:

1° de elementaire proposities;

2° λ en ν ;

3° variabelen voor praedicaten, in welke de lege, door punten aangegeven plaatsen door variabelen voor individuen zijn opgevuld;

4° wanneer $\mathfrak{A}(x)$ een formule is, in welke (o.m. of alleen) x als vrije veranderlijke voorkomt, ook $\Pi_{(x)}\mathfrak{A}(x)$ en $\Sigma_{(x)}\mathfrak{A}(x)$;

5° met $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{T}$ ook $\mathfrak{R}+\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{T}'$; daarbij mag het niet voorkomen, dat eenzelfde veranderlijke voor individuen in de ene formule vrij, in de andere gebonden voorkomt.

De laatst genoemde eis zal ook in iedere formule vervuld moeten zijn.

De definitie van implicatie en die betreffende de theorema's $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ zijn soortgelijk aan die in de propositie-logica.

<u>Inzettingsregel $\mathfrak{J}$ (2e deel).</u> Is $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ een theorema, en $\mathfrak{B}$ een uit $\mathfrak{A}$ met het 1e deel van deze regel ontstane formule, zo is ook $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ een theorema.

<u>Regel W</u> betreffende wijziging in de benoeming van gebonden variabelen in theorema's.

<u>Axioma's I - VI</u> en <u>regel A</u> als in de propositie-logica.

<u>Axioma VII.</u> $\Pi_{(x)}F(x) \rightarrow F(y) \doteq \bar{\nu}$

<u>Axioma VIII.</u> $F(y) \rightarrow \Sigma_{(x)}F(x) \doteq \bar{\nu}$

<u>Afleidingsregel Σ</u> Is $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ een theorema, waarbij x alleen in $\mathfrak{A}$ voorkomt, zo is ook $\Sigma_{(x)}\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ een theorema.

<u>Afleidingsregel Π</u> Is $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x) \doteq \bar{\nu}$, waarbij x alleen in $\mathfrak{B}$ voorkomt, een theorema, zo ook $\mathfrak{A} \rightarrow \Pi_{(x)}\mathfrak{B}(x) \doteq \bar{\nu}$

Dit stelsel is weer vrij van tegenspraak, 2^n-waardig en als praedicatenlogica van een elementaire waarschijnlijkheidsrekening te interpreteren.

Summiere beschouwingen over volledigheidskwesties en hogere praedicatenlogica.

De moderne Wiskunde en het Menselijk Denken.

Voordracht te houden door Prof.C.H.v.Os
op Woensdag 25 Aug.te 14 u.

Bij de bespreking van het verband tussen de moderne wiskunde en het menselijk denken zullen wij uitgaan van een conceptie van de menselijke evolutie,die in hoofdtrekken overeenstemt met het in de Bijbel getekende beeld,maar die ook in verschillende andere leringen kan worden herkend.Volgens deze leefde de mens oorspronkelijk in een Paradijstoestand;door den Val heeft hij dezen verlaten en door de Verlossing wordt hij opgeheven tot een staat,die den oorspronkelijken nog te boven gaat.De Val ontstaat,doordat de mens gehoor geeft aan de woorden van den Verleider:"Gij zult als God zijn,kennende het goed en het kwaad".Met Kuyper nemen wij aan,dat "kennen" hier in Kantiaansen zin moet worden opgevat,als een zelf bepalen wat goed en kwaad is.Met Dacqué nemen wij aan,dat deze gedachten daarom zulk een weerklank in het gemoed van den mens konden vinden,omdat zij de ware bestemming van den mens tot uitdrukking brengen,namelijk om Gods mede-arbeider,ja mede-schepper te worden.Na den Val ontving de mens wetten om zijn gedrag te richten; deze maakten echter op den duur het kwaad nog erger.Door de Verlossing wordt een einde gemaakt aan de slavernij der wet;de mens,die met den Heiligen Geest vervuld is,komt in een geheel nieuwe vrijheid.Aldus wordt de Paradijsbelofte toch vervuld.

Met de drie genoemde stadiën corresponderen nu drie kennistheoretische standpunten:het rationalisme, het empirisme en het kriticisme. Het rationalisme neemt aan,dat de mens "aangeboren ideeën"bezit en dus in zekeren zin nog in den Paradijstoestand leeft.Het empirisme neemt aan,dat de mens onderworpen is aan hetgeen van buiten,door de zintuigen,tot hem komt,zoals de gevallen mens onderworpen is aan de wet. Het kriticisme leert,dat de mens zelf zijn wereld schept,maar niet volgens bandeloze willekeur;dit komt overeen met den staat van den mens,die door den Geest gedreven wordt.

Kant leert,dat het denken te werk gaat volgens volkomen onwrikbare wetten,die hij samenvat als de aanschouwingsvormen,de categorieën en de regulatieve ideeën. Voor de wereld der dingen,waarmede wij in het dagelijks leven te maken hebben,kunnen wij dit schema laten gelden.De rangschikking der hemellichamen en die der atomen in de ruimte zijn echter niet door de aanschouwing gegeven.Sommige wijsgeren voeren hypothetische wezens in,waarvoor deze rangschikking wel aanschouwelijk gegeven zou zijn;dit impliceert echter,dat de natuurverschijnselen invariant zijn bij gelijkvormigheidstransformaties,hetgeen in strijd is met de resultaten der moderne physica.Wij moeten deze rangschikking niet als een aanschouwingsvorm,maar als een categorie,ja als een regulatieve idee opvatten.De "ruimte"wordt dan een abstract schema.

Nu levert de moderne wiskunde ons verscheidene dergelijke schema's: de Euclidische en Niet-Euclidische meetkunden. Welk schema men kiest, zal er bijv. van afhangen, of men meer voelt voor een geocentrische of een niet-geocentrische wereldbeschouwing, of voor een eindig of een oneindig heelal. Zo kan een ieder een wereld construeren, die met zijn diepste behoeften overeenstemt; en de vraag, welke de "ware" wereld is, is zinloos. Zo kunnen verschillende mensen, door denzelfden Geest gedreven, verschillende waarheden zien, zonder dat van zondige willekeur sprake behoeft te zijn.