Liber Amicorum

voor Nico Temme

Liber Amicorum voor Nico Temme

Liber Amicorum

voor Nico Temme

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Amsterdam

Uitgave	Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica, mei 2005 ©
Redactie	Jan Kok
Productie	Communicatie- en Publicatiedienst
Omslag	Tobias Baanders
Druk / layout	Jan Schipper, Jos van der Werf

Verantwoording

Dit Liber Amicorum voor Nico Temme, dat het CWI op 27 mei 2005 aan Nico meegeeft, is samengesteld uit bijdragen van collega's, oud-collega's, relaties, en vakgenoten van Nico. Daaraan zijn toegevoegd een in 2004 met Nico gehouden interview en papers die in meer of mindere mate behoren bij de voordrachten van het symposium "From Here to Infinity" op 27 mei.

We zijn niet bezweken voor de verleiding om dit boek ook als titel de titel van het symposium mee te geven. Gebleken is dat het geven van titels van het format "Van ... tot ..." een heel populaire bezigheid is.
Het thema van de boekenweek 2005 was *geschiedenis* en daarbij heette een van de gelegenheidsuitgaven "Van nul tot hier". "From Here to Eternity" is een welbekende Hollywoodfilm (1953) naar een gelijknamige roman, met een verhaal tegen de achtergrond van de Tweede Wereldoorlog in de Stille Oceaan. Weer een andere variant leverde de Britse wiskundige Ian Stewart (Warwick University) met zijn bestseller "From Here to Infinity" (1996); het is ook de titel van het afscheidssymposium.

In de wiskunde spelen overdekkingsstellingen een belangrijke rol. De in bovengenoemde titels voorkomende intervallen kunnen op elkaar aangesloten worden en ze vormen dan een gedeeltelijke overdekking van tijd en ruimte. In dit Liber voor Nico worden voorts nog meer stukjes overdekking geleverd voor heel andere dimensies. Hiervoor een Volledigheidsstelling formuleren lijkt niet haalbaar. Wel is het **Vermoeden** gerechtvaardigd dat de persoon Nico Temme zich niet in eindig veel dimensies laat vangen.

Dank aan allen die een bijdrage geleverd hebben. Bovenal ook dank aan hen die meegewerkt hebben aan het hele proces dat via vormgeving, tekstopmaak en -correctie, vervaardiging van de omslag en printen van het geheel tot dit Liber heeft geleid.

Nico, we wensen je veel kijk- en leesgenoegen.

Jan Kok, Nada Mitrovic, Ben Sommeijer, Jan Verwer

Inhoud

Interview

Symposium

Voorwoord

Nico Temme gaat het CWI verlaten, na een loopbaan van meer dan 37 jaar. Hij kwam op 1 januari 1968 in dienst en behoort daarmee tot de laatsten die het MC aan de Tweede Boerhaavestraat zijn binnengegaan om het CWI in de Watergraafsmeer te verlaten.

Wanneer Nico terugkijkt op die 37 jaar en wanneer anderen dat met hem doen, dan staat zijn wetenschappelijk werk centraal: onderzoek in de analyse, in het bijzonder naar speciale functies. Bij het ontwerpen van de eerste computers had men als primair doel het vergemakkelijken van ingewikkelde berekeningen voor ogen. En wat is dan een meer elementaire vraag dan de snelle en nauwkeurige berekening van wortels en logaritmen maar ook van waarden van bèta- en gammafuncties?

Toen de Rijksuniversiteit Groningen bij haar 350-jarig bestaan in 1964 haar nieuwe Telefunken-rekenautomaat aan den volke toonde, produceerde de regeldrukker voor mijn geïmponeerde gymnasiastenogen een oneindig lang vel papier vol waarden van Besselfuncties. Hoewel, het moet gezegd, op een paneel aan de wand kortste paden tussen Nederlandse provinciehoofdsteden verschenen, wellicht een vroege implementatie van de algoritme van Dijkstra en daarmee mijn eerste confrontatie met het werk van het MC.

Nico heeft van de speciale functies zijn specialiteit gemaakt. Hij is een van de grote experts ter wereld. Hij heeft een indrukwekkende productie van artikelen, boeken en promovendi op zijn naam staan en hij is redacteur van toonaangevende tijdschriften geweest. Zijn resultaten zijn verwerkt in standaardsoftware en blijven hun nut afwerpen. Zijn wetenschappelijk werk vindt een bekroning in de rol die hij nu speelt in een groot internationaal project dat gaat leiden tot een elektronische versie van het befaamde *Handbook of Mathematical Functions*, in wiskundige wandelgangen beter bekend als "Abramowitz & Stegun".

Nico onderzocht niet alleen speciale functies, hij verrichtte ook speciale functies. In de afdeling Toegepaste Wiskunde, die in deeltijd werd geleid door Hans Lauwerier, speelde hij een belangrijke rol, van 1974 to 1975 als waarnemend souschef en van 1978 tot 1989 als souschef. In 1977 was hij lid van de eerste Ondernemingsraad van het MC.

Hij was vanaf 1989 wetenschappelijk coördinator van het CWI. In die functie was hij lid van het eerste *Executive Committee* van ERCIM, het door CWI, GMD en INRIA opgerichte *European Research Consortium for Informatics and Mathematics*, vervulde hij vanaf 1993 een brugfunctie tussen de toenmalige algemeen directeur van het CWI en de wetenschappelijke staf, en was hij enkele perioden hoofd en waarnemend hoofd van de Bureaus van SMC en CWI. Vijftien jaar lang, van 1990 tot 2004, was hij lid van het bestuur van het Thomas Stieltjes Instituut, een van de Nederlandse onderzoekscholen in de wiskunde. Nog dit jaar reikte hij de helpende hand bij de voorbereiding van de zelfstudie van het CWI.

Bij het afscheid van mijn voorganger schreef Nico dat hij zich goed kon vinden in diens opzet van het CWI, met meer aandacht voor toegepast onderzoek en werving van externe fondsen, hoewel zijn eigen onderzoek zich daar niet zo toe leende, en dat hij daarom openstond voor verzoeken om dienstverlening binnen het instituut. Hij heeft die intentie meer dan waargemaakt en blijk gegeven van een enorme betrokkenheid bij het CWI en zijn omgeving.

Nico Temme verlaat het CWI na een voorbeeldige loopbaan van creativiteit en toewijding. Om dit moment te markeren wordt hem dit *liber amicorum* aangeboden. Ik wens hem en zijn vrouw nog vele goede jaren toe.

Jan Karel Lenstra
Algemeen directeur CWI

Deel I:
Liber amicorum

From a faraway Singapore

Krzysztof Apt

Beste Nico,

From a faraway Singapore I am observing with a dismay that more and more colleagues and friends from CWI retire. When one is away it strikes you more than when you are on the spot. When you told me last summer that you are approaching the magic barrier of 65 I was amazed: you look ten years younger.

Throughout several years we have interacted on various occasions. I remember for example that you, Lex and me edited the farewell book for Cor Baayen. Now and then we discussed the issues concerning the library and the organization of CWI.

On all these occasions I was very impressed by your quiet and elegant style coupled with reliability and efficiency. There is also some discrete warmth emanating from you and I thought to tell you this at least now.

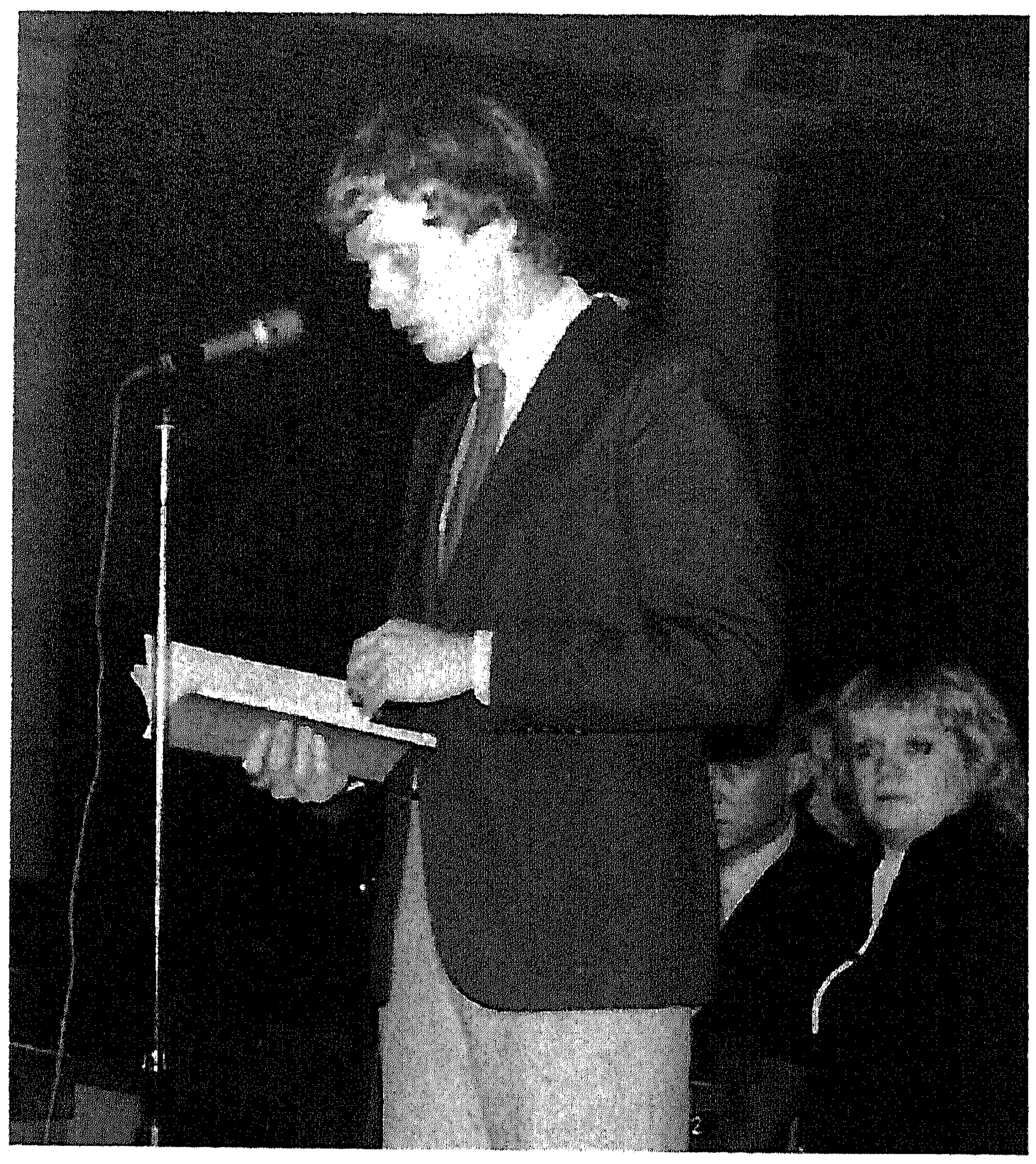
I also wanted to use this opportunity to thank you for introducing the great idea of CWI Scientific Meeting. This is the only event that brings people from various groups together. To make it work over the years you patiently approached your reluctant colleagues and asked them to contribute. The meeting turned out to be a big success and I am glad it continues. Let me mention at this occasion that I copied this idea at the ILLC, the Institute I am associated with at the UvA: two lectures of 30 minutes each on a Friday afternoon. Everybody congratulated with me this proposal. Well, the best ideas are the ones copied from others ...

Nico, het aller beste, and I hope to see you at CWI now and then —for example in the audience of a CWI Scientific Meeting.

Singapore, 25 February 2005

De laatste der functiespecialisten – Miente Bakker

Tja Nico, na 40 jaar *onvermoeibare arbeid* voor het CWI zit het er ook voor jou op. Als laatste expert in speciale functies – weet er nog iemand op het CWI wat dat zijn? – ruim je het veld, maar niet dan nadat je als co-editor van het nieuwe Handbook of Mathematical Functions *het enige echte* CWI wat extra naamsbekendheid hebt gegeven.



Ik kende je al voor ik bij het CWI kwam: je was een van Lauweriers medewerkers die zijn colleges trouw bijwoonden en ook bij werkcolleges assisteerden. Na mijn eigen indiensttreding als student-assistent leerde ik je uiteraard nog beter kennen. Toen al viel me de kalmte op waarmee je allerhande zaken tot hun juiste proporties wist terug te brengen, waar anderen (zoals ik bv.) wat geagiteerd van raakten. Na mijn overstap naar een andere afdeling raakten we elkaar een tijd uit het oog, zij het nooit geheel. We kwamen wel eens bij elkaar over de vloer en bij mijn promotie trad jij op als zaalopponent (zie foto).

Begin jaren 90 kreeg ik weer en nu pas goed met je te maken, toen ik als stafmedewerker werd aangesteld bij het pas opgerichte Bureau CWI, waar jij als wetenschappelijk beleidsmedewerker parttime werkzaam was. Ik heb onder jouw wakend oog aardig wat jaarverslagen, instituutsplannen, Quarterly's en anderssoortige documenten in elkaar gedraaid. Ook hier viel je kalmte op; die was hard nodig in het hectische, soms morbide sfeertje waarin het Bureau vaak verkeerde. Als tegengif voor het Bureauwerk kon je dan terugvallen op de wetenschap, zodat je vaker in de portakabins was te vinden dan in het gangetje bij de directie, waar je trouwens lange tijd helemaal geen eigen kamer had. Je bent in die tijd ook drie keer mijn chef geweest, eerst als interim toen je voorganger haastig het CWI verliet, de tweede keer toen het Bureau om duistere redenen in twee Bureaus werd gesplitst en last not least mocht je in 2000 even uit de wetenschap terugkeren als laatste hoofd Bureau vóór de fusie met de publicatiedienst.

Bij de Kanteling van 1996 zag je je kans schoon en werd je weer fulltime wetenschapper, waardoor je in de luwte van MAS als een soort CWI Fellow aan je oude hobby's – asymptotiek en speciale functies – kon werken. In die functie werd je ook aangezocht als editor van het nieuwe Handbook, iets wat waarschijnlijk niet gebeurd zou zijn als je voor de aandrang van het management en een visitatiecommissie was gezwicht om fulltime ondersteuner te worden.

Wat moet ik verder nog hieraan toevoegen? Je verlaat – mede dankzij je managementactiviteiten – het CWI als elderly statesman. Ik wens je veel geluk in je post-CWI-tijd en hoop je nog vaak binnen en buiten het CWI terug te zien.

Een impressie

Freek Barning

In de eerste plaats mijn dank voor de uitnodiging voor het leveren van een bijdrage in het ter gelegenheid van het afscheid van Nico Temme van het Centrum, hem aan te bieden Vriendenboek.

Laat ik hieraan proberen te voldoen door naar vermogen in kort bestek weer te geven hoe ik Nico heb ervaren in de tijd toen wij beiden deel uitmaakten van het personeel van het Centrum. Voor het vinden van stof was nog wel een zekere belemmering, dat bijvoorbeeld van een daadwerkelijk (werk) contact tussen ons geen sprake is geweest in verband met elkanders totaal verschillend arbeidsterrein. En ook voor het verhalen via een anekdotisch voorval, voor het doel zulks veelal geliefd, schiet mijn herinnering te kort.

Maar in een kleine behuizing die voor het Centrum altijd heeft gegolden, kom je elkaar natuurlijk vaak tegen en dan vormen zich al gauw bepaalde indrukken, bovendien als men bedenkt, dat de periode van samenvallend dienstverband zich over lange tijd heeft uitgestrekt. Voeg daar dan bij de informatie verkregen uit verslagen, publicaties e.d. ter zake van de afdeling TW, waartoe Nico behoorde als souschef, en er vormt zich een totaalbeeld, bruikbaar geacht om als impressie te dienen, globaal weliswaar en vanuit de zijlijn.

Wat in ieder geval dan samenvattend kan worden vastgesteld, is dat we in de persoon van Nico Temme te maken hebben gehad met een wetenschapper en goed wiskundige met veel hart voor de zaak waarvoor hij staat. Niet alleen de wiskunde die hem boeit, maar ook was en is hij iemand uit het goede hout gesneden, met open oog voor de omgeving, bij wie men ook altijd kan aankloppen en waarop men kan rekenen. Iemand ook die zich wist aan te passen, als bepaalde reorganisaties van de dienst zich voordeden, uit hoofde om “mee te gaan met de tijd”. In dit verband denk ik bijvoorbeeld aan de maatregelen, die zich op het Centrum voordeden om de wiskunde en de informatica wat betreft elkanders onderzoekingen meer met elkander in balans te brengen. Dit hield o.a. in dat genoemde afdeling TW met haar eigen specifieke dynamiek werd samengevoegd met die van ZW. Ingrijpend voor afdelingen, die al zo lang als zelfstandige eenheden functioneerden. Ook in latere jaren toen een beroep op hem werd gedaan het toenmalige Bureau te versterken in de beleidssfeer, toonde hij zich bereidwillig, daarmee de goede zaak dienende. Gevolg dat Nico twee functies enkele jaren naast elkaar vervulde, als project-medewerker annex co-afdelingsleiding enerzijds en als beleidsmedewerker anderzijds. (Tussen twee haakjes: mogelijk weerspiegelt zich in dit samengaan zijn getoonde bedrijvigheid bij wiskundig onderzoek op het gebied van speciale functies: een toepassing?)

Zijn ongetwijfeld groot rechtlijnig denken c.q. de vastberadenheid om een gesteld doel ook werkelijk te realiseren, blijkt naar mijn mening ondermeer ook uit het vermoeden, dat Nico er altijd stilzwijgend wel naar gestreefd moet hebben tot z'n 65ste door te gaan en niet voortijdig af te haken door gebruik te maken van een afvloeiingsregeling, zoals tegenwoordig door menigeen maar al te zeer wordt verkozen, bij het komen "op leeftijd". En dat is gelukt en nog wel bij één werkgever. Voorwaar geen kleinigheid om op 27-jarige leeftijd de instelling MC te betreden en die als CWI te verlaten op z'n 65ste, in onafgebroken dienstverband.

Hoe stipt verder alles ook door Nico in dit opzicht is geregeld moge blijken uit het feit, dat de afscheidsreceptie ook geen moment eerder plaatsvindt dan berekend, namelijk op de laatste werkdag voorafgaande aan z'n 65ste verjaardag en dan nog als sluitstuk die dag na een hem (in de werksfeer) aangeboden lezingencyclus.

Zou men mij nog vragen enkele andere kwalificaties op te sommen die bij Nico Temme passen dan zou ik uit eigen ervaring zeker nog willen noemen: productief en slagvaardig, vriendelijk en bescheiden, en niet te vergeten: uiterst correct in z'n optreden.

Beste Nico,

Ik wil het hierbij laten, ook al om me te houden aan de mij gegunde tekstruimte. Veel meer dan een gevoelen en het weergeven van een indruk, heeft mijn bijdrage niet kunnen zijn. Het zou me niet ongevallig zijn indien mijn inzichten in redelijke overeenstemming zijn met de werkelijkheid.

Gaarne wens ik je het allerbeste toe voor de toekomst, met je gezin en in goede gezondheid. Met zekerheid verwacht ik te kunnen uitspreken, dat je niet tot de categorie wiskundigen behoort, die het standpunt huldigt, dat een dag zonder mathematiek een verloren dag is. Er is namelijk toch nog zoveel meer en vooral ook zoveel meer minder inspannend en zeker ook niet minder ontspannend. En vooral wat dit laatste betreft vormt uiteraard de aangebroken pensioentijd een buitengewoon goede mogelijkheid om van gebruik te maken.

Ik besluit met de beste groeten en met je nogmaals alle goeds toe te wensen.

ANALYTIC OPERATORS

JAN A. VAN CASTEREN

This article is dedicated to Nico Temme at the occasion of his retirement

The following theorem is inspired by ideas in Nagy and Zemanek: see [9]. The result can also be found in the Ph.-D. thesis of Katilova: see [4], Theorem 8.9.

Theorem 1. *Let M be a bounded linear operator in a Banach space X. By definition the sub-space X_0 of X is the $\|\cdot\|$-closure of the vector sum of the range and zero-space of $I-M$: $X_0=\overline{R(I-M)+N(I-M)}^{\|\cdot\|}$. Suppose that the spectrum of M is contained in the open unit disc union $\{1\}$. The following assertions are equivalent:*

(i) $\sup_{|\lambda|<1}\left\|(1-\lambda)(I-\lambda M)^{-1}x\right\|<\infty$ *for every* $x\in X_0$;
(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|M^n x\|<\infty$ *and* $\sup_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\|M^n(I-M)x\|<\infty$ *for every* $x\in X_0$;
(iii) $\sup_{t>0}\left\|e^{t(M-I)}x\right\|<\infty$ *and* $\sup_{t>0}\left\|t(M-I)e^{t(M-I)}x\right\|<\infty$ *for* $\forall x\in X_0$;
(iv) *There exists* $\frac{1}{2}\pi<\alpha<\pi$ *such that for all* $x\in X_0$:

$$\sup\left\{|\lambda|\left\|(\lambda I-(M-I))^{-1}x\right\|:-\alpha<\arg(\lambda)<\alpha\right\}<\infty;$$

(v) *There exists* $\frac{1}{2}\pi<\alpha<\pi$ *such that for all* $x\in X_0$:

$$\sup\left\{\left\|(I-M)((\lambda+1)I-M)^{-1}x\right\|:-\alpha<\arg(\lambda)<\alpha\right\}<\infty;$$

(vi) *For every* $x\in X_0$ *the following limits exist*

$$Px:=\lim_{n\to\infty}M^n x \text{ and } (I-P)x=\lim_{\substack{re^{i\vartheta}\to 1\\ 0<r<1}}(I-M)\left(I-re^{i\vartheta}M\right)^{-1}x;$$

(vii) *For every* $x\in X_0$ *the following limit exists*

$$(I-P)x:=\lim_{\substack{re^{i\vartheta}\to 1\\ 0<r<1}}(I-M)\left(I-re^{i\vartheta}M\right)^{-1}x.$$

Moreover, if M satisfies one of the conditions (i) through (vii), then

$$X_0=\overline{R(I-M)}^{\|\cdot\|}+N(I-M).$$

Remark 1. *The Banach-Steinhaus theorem implies that in (i) through (v) in Theorem 1 the vector norms may be replaced with the operator norm restricted to X_0; i.e. the operator M must be restricted to X_0. These assertions (i) through (v) are also equivalent if X_0 is replaced with the space X. This fact will be used in Definition 1.*

Conditions (a) and (b) of the following corollary from [1] are satisfied, if the space X is reflexive. The closed range condition in (c) has been used by Lin in [5] and in [7]; in the latter reference he also tied it up with Doeblin's condition.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47D05; Secondary 47D07.

Corollary 1. *Let M be a bounded linear operator in a Banach space $(X, \|\cdot\|)$. As in Theorem 1 let X_0 be the closure in X of the sub-space $R(I-M)+N(I-M)$. Suppose that, for $0<\lambda<1$, the inverse operators $(I-\lambda M)^{-1}$ exist and are bounded, and that $\sup_{0<\lambda<1}(1-\lambda)\left\|(I-\lambda M)^{-1}\right\|<\infty$. If one of the following conditions:*

(a) *the zero space of the operator $(I-M)^{**}$, which is a sub-space of the bidual space X^{**} is in fact a subspace of X;*

(b) *the $\sigma(X^*, X)$-closure of $R((I-M)^*)$ coincides with its $\|\cdot\|$-closure;*

(c) *the range of $I-M$ is closed in X;*

is satisfied, then the space X_0 coincides with X, and hence all assertions in Theorem 1 are equivalent with X replacing X_0.

Remark 2. *If $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|M^n\|<\infty$, then $\sup_{0<\lambda<1}(1-\lambda)\left\|(I-\lambda M)^{-1}\right\|<\infty$.*

Definition 1. *An operator M which satisfies the equivalent conditions* (i) – (v) *of Theorem 1 with the space X replacing X_0 is called an analytic operator.*

Proof of Corollary 1. If the range of $I-M$ is closed, then by the closed range theorem, the range of $I-M$ is weak*-closed and hence (c) implies (b). We will prove that (a) as well as (b) implies $X_0=X$. First we assume (a) to be satisfied. Pick $x\in X$, and consider

$$x=(I-M)(I-\lambda M)^{-1}x+(1-\lambda)M(I-\lambda M)^{-1}x=x-x_\lambda+x_\lambda, \tag{1}$$

where $x_\lambda=(1-\lambda)M(I-\lambda M)^{-1}x$. Then $\sup_{0<\lambda<1}\|x_\lambda\|<\infty$, and consequently the family x_λ, $0<\lambda<1$, has a point of adherence x^{**} in X^{**}; i.e. x^{**} belongs to the $\sigma(X^{**}, X^*)$-closure of the subset $\{x_\lambda : 1-\eta<\lambda<1\}$, and this for every $0<\eta<1$. Fix $x^*\in X^*$. Then

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle(1-\lambda)M(I-\lambda M)^{-1}x,(I-M)^*x^*\right\rangle\right| \\
&=\left|\left\langle(1-\lambda)(I-M)(I-\lambda M)^{-1}x, M^*x^*\right\rangle\right| \\
&\le(1-\lambda)\left\|(I-M)(I-\lambda M)^{-1}x\right\|\,\|M^*x^*\|.
\end{aligned} \tag{2}$$

Since $\sup_{0<\lambda<1}(1-\lambda)\left\|(I-\lambda M)^{-1}\right\|<\infty$, the identity

$$(I-M)(I-\lambda M)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(I-(1-\lambda)(I-\lambda M)^{-1}\right)$$

yields that $\sup_{0<\lambda<1}\left\|(I-M)(I-\lambda M)^{-1}\right\|<\infty$. Consequently (2) implies

$$\begin{aligned}
&\langle x^{**},(I-M)^*x^*\rangle=\lim_{\lambda\uparrow 1}\langle x_\lambda,(I-M)^*x^*\rangle \\
&=\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\left\langle(I-M)(I-\lambda M)^{-1}x, M^*x^*\right\rangle=0.
\end{aligned}$$

Hence x^{**} annihilates $R((I-M)^*)$ and so it belongs to the zero space of the operator $(I-M)^{**}$. By assumption this zero space is a subspace of X. We infer that the vector x can be written as $x=x-x_1+x_1$, where x_1 is a member of $N(I-M)$, and where $x-x_1$ belongs to the weak closure of the range of $I-M$. However this weak closure is the same as the norm-closure of $R(I-M)$. Altogether this shows $X=X_0=\|\cdot\|$-closure of $R(I-M)+N(I-M)$.

Next we assume that (b) is satisfied. Let x_0^* be an element of X^* which annihilates X_0; i.e. which has the property that $\langle x, x_0^*\rangle=0$ for all $x\in X_0$. Then x_0^* annihilates $R(I-M)$, and hence it belongs to zero-space of $(I-M)^*$. Since x_0^* also annihilates the zero-space of $I-M$, it belongs to the weak*-closure of $R((I-M)^*)$. By assumption (b), we see that x_0^* is a member of its norm-closure; i.e. x_0^* belongs to the intersection $N((I-M)^*) \cap \overline{R((I-M)^*)}^{\|\cdot\|}$. We will show that $x_0^* = 0$. By the Hahn-Banach theorem [3] it then follows that $X_0 = X$. Since x_0^* belongs to the $\|\cdot\|$-closure of $R((I-M)^*)$, it follows that

$$x_0^* = \|\cdot\|\text{-}\lim_{\lambda \uparrow 1} (I-M)^* \left((I-\lambda M)^*\right)^{-1} x_0^*. \tag{3}$$

To see this we first suppose that $x_0^* = (I-M)^* x_1^*$. Then

$$\begin{aligned} &(I-M)^* x_1^* - (I-M)^* \left((I-\lambda M)^*\right)^{-1} (I-M)^* x_1^* \\ &= (1-\lambda) M^* \left((I-\lambda M)^*\right)^{-1} (I-M)^* x_1^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Since the family $M^* \left((I-\lambda M)^*\right)^{-1} (I-M)^* x_1^*$, $0 < \lambda < 1$, is bounded, we see that (3) is a consequence of (4) provided x_0^* belongs to the range of $(I-M)^*$. By the uniform boundedness of the family $(I-M)^* \left((I-\lambda M)^*\right)^{-1}$, $0 < \lambda < 1$, the same conclusion is true if x_0^* belongs to the closure of the range of $(I-M)^*$. Since, in addition, x_0^* is a member of $N((I-M)^*)$, it follows that $x_0^* = 0$. This proves Corollary 1. □

Proof of Theorem 1. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fix $0 < r < 1$. The following representations from Lyubich [8] are being used:

$$(n+1)M^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (1-\lambda)^2 (I-\lambda M)^{-2} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}(1-\lambda)^2}; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)M^n(I-M) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (1-\lambda)^2 (I-M)(I-\lambda M)^{-3} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}(1-\lambda)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (1-\lambda)^2 (I-\lambda M)^{-2} \frac{1}{\lambda^{n+2}(1-\lambda)^2} d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (1-\lambda)^3 (I-\lambda M)^{-3} \frac{1}{\lambda^{n+2}(1-\lambda)^2} d\lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

Put $C := \sup \left\{ \left\| (1-\lambda)(I-\lambda M)^{-1} |X_0 \right\| : |\lambda| < 1 \right\}$. From (5) we infer

$$(n+1)\|M^n\| \leq \frac{C^2}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-re^{i\vartheta}|^2} d\vartheta = \frac{C^2}{r^n} \frac{1}{1-r^2}. \tag{7}$$

The choice $r^2 = \dfrac{n}{n+2}$ yields

$$\|M^n|X_0\| \leq \frac{2}{3} e C^2. \tag{8}$$

In the same spirit from (6) we obtain

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\|M^n(M-I)|X_0\| \leq \left(C^2 + C^3\right) \frac{1}{r^{n+1}} \frac{1}{1-r^2}.$$

The choice $r^2 = \dfrac{n+1}{n+3}$ yields the inequality:

$$(n+1)\|M^n(M-I)|X_0\| \leq \frac{4e}{3}\left(C^2 + C^3\right).$$

This proves the implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). The representations (see Nagy and Zemanek [9])

$$e^{t(M-I)} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}M^k \quad \text{and} \quad t\,(M-I)\,e^{t(M-I)} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{k!}M^k\,(M-I)$$

show that (iii) is a consequence of (ii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). This is a (standard) result in analytic operator semigroup theory: see e.g. Van Casteren [10], Chapter 5, Theorem 5.1 .

(iv) $\Longrightarrow$ (v). The equality

$$(I-M)\left((\lambda+1)\,I-M\right)^{-1} = I-\lambda\left(\lambda I-(M-I)\right)^{-1}$$

shows the equivalence of (iv) and (v).

(v) $\Longrightarrow$ (i). Fix $x\in X_0$. The choice $\lambda = -1+e^{-i\vartheta} = -2i\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}$, $|\vartheta|\le 2\alpha$, yields the boundedness of the function

$$\vartheta \mapsto (I-M)\left(I-e^{i\vartheta}M\right)^{-1}x$$

on the interval $[-\alpha,\alpha]$. Since, for $|\lambda|=1$, $\lambda\neq 1$, the function

$$\lambda \mapsto (I-M)\,(I-\lambda M)^{-1}\,x$$

is continuous, it follows that this function is bounded on the unit circle. The maximum modulus theorem shows that this function is bounded on the unit disc, which is assertion (i).

(i) $\Longrightarrow$ (vi). Fix $x\in X_0$. For $0<r<1$ and $\vartheta\in\mathbb{R}$ we also have

$$\begin{aligned}
&\left(I-P\left(re^{i\vartheta}\right)\right)(I-M)\,x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-t)+r^2}\,(I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}(I-M)\,x\,dt\\
&= (I-M)\left(I-re^{i\vartheta}M\right)^{-1}(I-M)\,x. \qquad (9)
\end{aligned}$$

In (9) we use the continuity of the boundary function

$$e^{it}\mapsto (I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}(I-M)\,x \qquad (10)$$

to show that

$$\lim_{re^{i\vartheta}\to 1,\,0\le r<1}\left(I-P\left(re^{i\vartheta}\right)\right)(I-M)\,x = (I-P)\,(I-M)\,x = (I-M)\,x \qquad (11)$$

exists, and that $I-P$ is a bounded projection on X_0. From (i) it follows that the function $\lambda\mapsto(I-M)\,(I-\lambda M)^{-1}\,x$ is uniformly bounded on the unit disc, and hence that the limit in (11) exists for all y in the closure of $R(I-M)$. In addition, for such vectors y we have $(I-P)\,y=y$. The limit in (11) trivially exists for $x\in X$ such that $Mx=x$, we conclude that the limit in (i) exists for all $x\in X_0$, because $x=(I-P)x+Px$, where $(I-P)x$ belongs to the closure of the range of $I-M$ and where

$$Px = x-(I-P)x = x-\lim_{\lambda\uparrow 1}(I-M)\,(I-\lambda M)^{-1}\,x = \lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\,M\,(I-\lambda M)^{-1}\,x. \qquad (12)$$

From (12) it follows that $(I-M)\,Px=0$. In addition, from (ii), which is equivalent to (i), we see that $\lim_{n\to\infty}M^n y=0$ for all y in the range of $I-M$; here we use the boundedness of the sequence $(n+1)\,M^n\,(I-M)$, $n\in\mathbb{N}$. The boundedness of the sequence M^n, $n\in\mathbb{N}$, then yields $\lim_{n\to\infty} M^n y = 0$ for $y \in R(I-P)$, because the range of $I-M$ is dense in the range of $I-P$. An arbitrary $x \in X_0$ can be written as $x = (I-P)x + Px$. From the previous arguments it follows that $\lim_{n\to\infty} M^n x = Px$. Fix $x \in X_0$. Altogether this shows the implication (v) $\Longrightarrow$ (vi), provided we show the continuity of the function in (10) in the sense that $\lim_{t\to 0}(I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}(I-M)x = (I-M)x$. However, this follows from the identity

$$(I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}(I-M)x-(I-M)x=\left(e^{it}-1\right)(I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}Mx,$$

together with the uniform boundedness (in $0<|t|\le\pi$) of the family of operators:

$$(I-M)\left(I-e^{it}M\right)^{-1}.$$

In the latter we use the implication (v) $\Longrightarrow$ (i).

The implication (vi) $\Longrightarrow$ (vii) being trivial there remains to be shown that (vii) implies (i). For this purpose we fix $x \in X_0$ and we consider the continuous function on the closed unit disc, defined by

$$F(\lambda)x := \begin{cases} (I-M)(I-\lambda M)^{-1}x & \text{for } |\lambda|\le 1,\ \lambda\ne 1, \\ (I-P)x = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 1\\ |\lambda|<1}}(I-M)(I-\lambda M)^{-1}x & \text{for } \lambda = 1. \end{cases}$$

From (vii) it follows that the function $F(\lambda)x$ is well-defined and continuous. Hence it is bounded. The theorem of Banach-Steinhaus then implies (i). ☐

References

[1] Arendt W., Batty C., Hieber M. and Neubrander F., Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, Monographs in Mathematics, **96**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, p. 523.

[2] Blunck S., Analyticity and discrete maximal regularity on L_p-spaces, J. Funct. Anal., vol. 183, 2001, No.1, p. 211-230.

[3] Hahn W., Uber die Anwendung der Methode von Liapunov auf Differenzengleichungen, Math. Ann., **136**, p. 430-441.

[4] Katilova N., On ergodicity and stability properties of finite Markov chains and their financial interpretations, Ph.-D. thesis, Antwerp, March 2004.

[5] Lin M., On the uniform ergodic theorem, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 43, no. 2, 1974, 337-340.

[6] Lin M., On the uniform ergodic theorem II, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 46, no. 2, 1974, 217-225.

[7] Lin M., Quasi-compactness and uniform ergodicity of Markov operators, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. XI, no. 4, 1975, 345-354.

[8] Lyubich Y., Spectral localization, power boundedness and invariant subspaces under Ritt's type condition, Studia Mathematica, vol. 134, 1999, p. 153-167.

[9] Nagy B. and Zemanek J., A resolvent condition implying power boundedness, Studia Mathematica, vol. 134, 1999, No. 2.

[10] Van Casteren J.A., Generators of strongly continuous semigroups, Pitman Advanced Publishing Program, Research Notes in Mathematics 115, 1985.

Department of Mathematics and Computer Science, University of Antwerp (UA), Middelheimlaan 1, 2020 Antwerp, Belgium

E-mail address: jan.vancasteren@ua.ac.be

Je gaat weg

Susanne van Dam

Beste Nico,

Je gaat weg en dat is jammer. Voor mij. Want ik ken je als een lieve en vriendelijke collega. Geen stress, zogezegd. Een rustige denker, gegrond, en zo ogenschijnlijk laat je je niet snel meesleuren in de gekte van de dag. Toch heb je een tijd terug meegewerkt aan een beetje 'gek' interview in ons personeelsblad - wat overigens heel leuk is geworden - en waardoor ik mij uitgedaagd voel hier nu zelf de pen op te pakken.

Maar waar kan ik het over hebben, wat trof mij vooral aan jou de afgelopen jaren? Wel, als ik er zo over nadenk, vaak maakte je bij binnenkomst 's morgens een enigszins verwilderde indruk, MAAR, heb ik begrepen, dat komt omdat je regelmatig het hele stuk Abcoude - Watergraafsmeer fietst. (Met 'verwilderd' doel ik vooral op je enorme haardos, waaraan dan duidelijk te zien is van welke kant de wind of regen komt!)
Tjongejonge. Sportief is het zeker, maar is het leuk?
Ik woon in Amsterdam Zuidoost en heb die route al een paar keer gefietst, maar op een of andere manier verdwaal ik altijd tussen de flatgebouwen in de Bijlmer. Amsterdam Zuidoost moet op jouw fietsroute liggen. Geen richtingbordjes, wel heel veel fietspaden en geen mogelijkheid om mij goed te oriënteren vanwege die hoge flatgebouwen; ik doe over dat stuk minimaal anderhalf uur. En ik besef dat het vanaf mijn huis naar Abcoude nog zeker drie kwartier extra doortrappen is.
Dat is toch niet vol te houden. Hoe doe jij dat toch?
Tja, als wiskundige zal jij je - hoogst waarschijnlijk - eerst goed georiënteerd hebben en niet zomaar op de bonnefooi op pad gaan zoals ik dat doe.

Verleden week, op een mooie lentemiddag, waagde ik opnieuw een poging om al fietsend een slimme route naar huis te vinden. Maar weer verdwaalde ik in de Bijlmer; nu kwam ik na een uur fietsen uit bij een brug in Diemen?.. weer vlak bij het CWI. Nou ja. Maar vanaf dit punt had ik wel ineens de juiste route te pakken. Je gaat niet door de Bijlmer, maar via Diemen langs veel laagbouw (ik verbaasde mij over de hoeveelheid woonwijken) om vervolgens in de buurt van de Arena uit te komen. Een leukere en wat snellere route dus, maar ik bedacht me hoe deze omgeving voor jou veranderd moet zijn. Ik weet niet hoe lang je dit traject al fietsend aflegt, maar ik denk dat je in de loop der jaren wel veel groen hebt zien verdwijnen.
Eigenlijk wordt de route pas echt leuk als je na lang doortrappen in de buurt van Abcoude komt.

Wel Nico, ik hoop dat je de tijd zult vinden om vanuit je mooie dorp Abcoude ook de andere richtingen goed te verkennen, naar Maarssen of Bussum of 's-Graveland, noem maar op, lekker dwars door het Gooi. Wat je maar wilt, je kunt nu alle kanten uit.
Ik wens je heel veel plezier toe en wind mee!

Als souschef

Odo Diekmann

Beste Nico,

Als souschef van de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het MC in de jaren zeventig heb je, door je wijze, weloverwogen, rustige en vaderlijke stijl van leiding geven, een klimaat geschapen waarin het voor menig beginnend toegepast wiskundige, waaronder ikzelf, mogelijk was de wetenschappelijke wereld te verkennen, met volop aandacht voor de uitdagingen en toch een gevoel van steun in de rug.
De vele colloquia, werkgroepen en zomerstudieweken hielpen om de horizon te verbreden in een kameraadschappelijke sfeer. De ruimdenkendheid van Lauwerier werd door jou van een stevig organisatorisch skelet voorzien en zo werd TW een ideale plek om op te groeien.
De positieve ervaringen van die periode zijn voor mij en anderen van blijvende invloed geweest !

Met hartelijke dank en de wens dat deze nieuwe periode van je leven je veel geluk zal brengen.

Beste Nico,

Aan dit liber amicorum wil ik enkele verba amicae toevoegen.

Ook al heb je zo veel meer jaren aan het MC/CWI meegemaakt en ben ik helaas ten tijden van je afscheid afwezig, mag toch tenminste een brief niet ontbreken.

Ben ik dan de aangewezen persoon om iets zeggen over je lange MC/CWI-geschiedenis? ... maar ik ben er ook al meer dan 6 jaar aan het CWI, en meer dan 10 jaar in Nederland. Dus durf ik het aan om dit stuk in te sturen zonder het nog aan enig ingeboren Nederlands oog te laten zien – misschien wordt het op deze manier ook wel een soort document over mijn staat van inburgering?

Dus meer dan zes gemeenschappelijke jaren met Nico in MAS. In het begin hadden we nog meer gemeen: niet alleen dat we beide bij MAS1 hoorden, maar vooral dat we beide in de oude portacabins werkten, buiten bij de konijntjes en achter de enkelvoudige ramen (bij raamisolatie blijft mijn hart Duits slaan). De portacabins, het konijneneilandje buiten het hoofdgebouw, met daarin je keurig houten meubilair. Heeft die dan geen schade geleden? De vocht beziend die de ramen af droop, was ik al bang om mijn boeken! Maar je houten meubilair staat ook na de verhuizing terug naar het hoofdgebouw er weer keurig bij, zo ver ik heb kunnen zien.

In de portacabins was ik vooral bezig met mijn eerste medewerkers. Met Manuel Arrayás bestudeerde ik toen niet alleen ontladingen, maar raakte ook bij de eerste phytoplankton-studies betrokken. Grappig genoeg konden we toen de fasescheiding tussen bestaan en niet-bestaan van stationaire phytoplankton-populaties door het verdwijnen van Bessel-functies met zekere indices bij een zeker argument uitdrukken – en daardoor werd je buurmanschap in de portacabins niet alleen menselijk aangenaam, maar ook wetenschappelijk interessant. Bessel-functies voor de Life Sciences, die net aan het CWI opstartten, en een rustgevende invloed van een senior wetenschapper op de impulsieve Spanjaard Manuel – ik wist je invloed en bijdragen op iedere manier zeer te waarderen.

Überhaupt is dit mijn dominante indruk van jou: de uitstraling van rust, aardigheid en vaardigheid. En daarnaast de ontdekking, dat je vrouw blijkbaar aan je zijde een serieuze carriere heeft kunnen maken en toch dezelfde uitstraling van rust, aardigheid en vaardigheid heeft – bij een Nederlander van jouw generatie zeker geen vanzelfsprekendheid.

Zo ben ik nu eigenlijk ook niet bang, dat je je zult vervelen of met je gepensioneerd leven niets zou kunnen beginnen. Maar ik wil je wel nog meegeven, dat ik je als collega zeer zal missen.

Het ga je goed!

Leiden, Maart 2005

Ute Ebert

Bye Nico!

Jan van Eijck

When Jan Kok asked me to contribute to this volume, I realized that I knew next to nothing about Nico Temme's scientific work, so I borrowed his book on *Special Functions* from the CWI library, and I was duly impressed.

As a parting gift, I would like to offer Nico the following special function:

$$g(z) = \frac{66 + 121z + 101z^2 + 32z^3 + 78z^4 + 105z^5 + 99z^6 + 111z^7 + 33z^8 + 32z^9}{1 - z^{10}}.$$

What makes this function special, one may wonder. Does it belong to the toolbox of the applied mathematician, the physicist or the engineer? Well, no. But it does have at least one interesting property.

Nico, as the specialist of special functions, will have spotted immediately that this is a generating function for the sequence:

$$(66, 121, 101, 32, 78, 105, 99, 111, 33, 32)^+$$

To grasp the deeper meaning of this, one has give up the august mathematical perspective in favour of a more practical and down-to-earth computer science point of view. As any computer scientist sees immediately, this is the ASCII encoding of an infinite farewell banner:

Bye Nico! Bye Nico! Bye Nico! Bye Nico! ...

Bye Nico!

Haring in Tomatensaus

Wan Fokkink

Hoe komt een stukje voor een Liber Amicorum tot stand? Onderstaande email wisseling tussen Wan Fokkink, Dirk Temme (neef van Nico), en Riet Temme (schoonzus van Nico) geeft een kijkje in de keuken, en schetst tegelijkertijd een beeld van Nico.

```
   Date: Tue, 1 March 2005, 16:33:07
   From: Wan Fokkink <wanf@cs.vu.nl>
     To: Dirk Temme <dtemme@dds.nl>
Subject: ome Nico

Hoi Dirk!

Je oom Nico gaat afzwaaien op het CWI, en er komt een Liber Amicorum. Ik dacht,
misschien kan ik iets schrijven over dat ik jou ken van de wiskunde-studie, en
dat je vader wiskunde-leraar is. Heb jij nog een sappige anekdote?

Doeg,
Wan


   Date: Mon, 21 March 2005, 12:52:50
   From: Dirk Temme <dtemme@dds.nl>
     To: Wan Fokkink <wanf@cs.vu.nl>
Subject: Re: ome Nico

Hoi Wan,

Tja sappige anekdotes over ome Nico. Die zijn schaars vrees ik, en ik ken ze
zeker niet.

Voordat ik ging studeren ben ik wel een keer bij hem op het CWI langs geweest,
en hij is altijd heel geinteresseerd geweest in mijn (wiskunde-)loopbaan.
Tegenwoordig zijn ze erg reizerig, onder andere doordat hun zoons in Hongarije
en in de VS wonen. In Spanje lijkt Nico meer waardering te krijgen dan in
Nederland. Op het CWI is er 1 daggie maar in Spanje doen ze een hele week
voor hem heb ik begrepen. Ze zijn vaste klant op de Volkskrantdag van het
```

Filmfestival in Rotterdam, al heb ik ze daar dit jaar niet gezien. Ik zal ook mijn vader vragen of die nog iets leuks weet. Op gevaar af dat het al te laat is want jouw mail is ook al weer van 3 weken geleden...

Groeten, Dirk

Date: Mon, March 21 2005, 13:27:23
From: Dirk Temme <dtemme@dds.nl>
To: Chris Temme <ch.temme@hccnet.nl>
Subject: Fwd: ome Nico

Chris weet jij nog iets leuks over Nic te vertellen omtrent z'n wiskunde loopbaan? Hoe begon het? Concurrentie tussen jullie? Hoe was het bijna nog anders gelopen?

Dirk

Date: Mon, 21 March 2005, 19:31:55
From: Chris Temme <ch.temme@hccnet.nl>
To: Dirk Temme <dtemme@dds.nl>
Subject: Re: ome Nico

Hallo Dirk,

Chris weet niet zo veel, dus schrijf ik wat ik weet van vader Temme en zal het aan Chris laten lezen.

In ieder geval was er geen concurrentie tussen de twee broers. Ze gingen ieder hun eigen weg. Nic moest na de HBS in dienst. Hij vond het vrééééselijk. In die tijd zocht hij al de wiskundeboeken op om zich met iets voor hem interessants bezig te houden. Ook in de weekenden was hij daar mee bezig. Eenmaal uit dienst werd er eigenlijk op gerekend dat Nic ging werken, want het was hard nodig dat er een kostwinner bij kwam. Chris was na 3 HBS naar de kweekschool in Beverwijk, intern, dat moest op een katholieke kweekschool. Dat kostte veel. Nic maakte echter bekend dat hij wilde gaan studeren in Amsterdam. Hij kreeg een klein kamertje bij Mevrouw .... (ik ben de naam even kwijt). Zij was als een moeder voor hem en hij als een zoon voor haar. Heel zijn studietijd bleef hij bij deze hospita wonen. Wij zijn er in onze verkeringstijd ook nog wel eens geweest. We aten haring in tomatensaus op brood, daar was Nic gek op. De studie ging flitsend. Nog steeds werden ook de weekenden voor de studie gebruikt. Nic had eigenlijk altijd een boek bij zich. Wel was hij regelmatig in Hoogkarspel, want hij kreeg verkering met Gré die hij al van het Werenfriduslyceum kende. In de

tijd dat ik in Heiloo was ging Gré in Amsterdam werken. Ze kreeg een zo mogelijk nog kleiner optrekje aan de Van Eeghenstraat.
Nic sprak altijd met heel veel waardering over zijn professor, Lauwerier.
Hij heeft samen met hem zijn eerste boek geschreven.

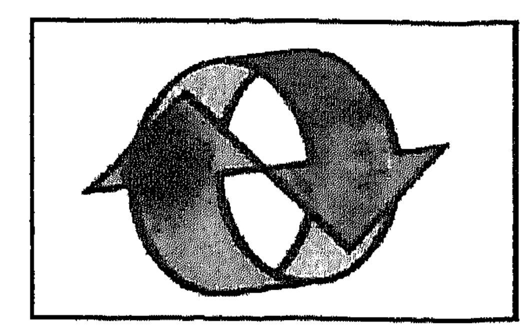
Een leuke anekdote rolt er niet uit, maar dit is hetgeen zo meteen boven kwam.

Groetjes hè voor jullie allemaal. Zijn er al Paasplannen (om eventueel hier te komen bijvoorbeeld)?
Chris en Riet

From Here to Eternity.

In de relatief korte periode dat ik bij het instituut werk, wordt dit mijn vierde bijdrage aan een vriendenboek. Een prachtige traditie die wij in ere moeten houden. Met veel plezier schrijf ik dan ook voor jou in dit boek. Het thema 'From Here to Infinity' van het symposium dat wordt gehouden ter ere van jouw afscheid, gaf mij direct een richting voor de titel van mijn bijdrage. Het verschil tussen 'Infinity' en 'Eternity' is gering maar wel significant.

Oneindig betekent zonder einde en veronderstelt een begin.



Met dat begin start ik dan ook maar.
Sinds 1992 kennen wij elkaar en onze relatie had vooral te maken met mijn verantwoordelijkheid voor de toenmalige Publicatiedienst. Van jouw wiskundig vakgebied weet ik te weinig om daarover iets te kunnen schrijven. Over het project waaraan je de laatste jaren hard werkt, hebben we af en toe gesproken. Niet alleen wordt het een herdruk over Mathematische Functies als boek, maar ook wordt het een publicatie op WEB en CD-Rom. Van zo'n project begrijp ik een heel klein beetje.
Naast je wetenschappelijke carrière in het instituut heb je lange tijd een rol gespeeld in ondersteunende processen van het instituut. Wij zaten bij elkaar in vergaderingen of aan tafel in jouw rol als beleidsmedewerker Bureau SMC, als interim hoofd Bureau SMC, als hoofd Bureau SMC, als adviseur directie voor o.a. ORA en andere beleidsdocumenten en als interim hoofd Bureau CWI. In deze laatste rol, die eindigde in januari 2001, zaten wij voor de laatste keer in dezelfde vergaderingen.
Als collega binnen het BGO (Beleidsgroep Ondersteuning), vooral toen je als hoofd Bureau (of interim) functioneerde, spraken wij elkaar regelmatig. Meestal zaten wij op één lijn als het ging om het zo goed mogelijk uitvoeren van ons werk. We spraken over het halen van deadlines, wat zo ontzettend moeilijk is in dit instituut, over mijn gemopper over dit feit omdat wij altijd als allerlaatste schakel in de keten moesten zien te redden wat er te redden viel. Veel en vaak wist je mijn soms ongebreidelde drift om iets tot stand te brengen te temperen. Jouw kennis en inzicht over de cultuur van dit instituut heeft mij vaak geholpen. De ondersteunende rol ambieerde je eigenlijk niet, je wilde je veel liever blijven richten op je wetenschappelijke werk. Toch deed je dat werk met veel aandacht, interesse en kennis

van zaken. Toen je definitief als collega uit het BGO verdween, heb ik dat altijd als een groot gemis beschouwd.

Het begin hebben we gehad, maar wat blijft nu zo oneindig in deze context ?
In ieder geval de altijd oneindige stroom van letters op papier, letters op een beeldscherm, formules, tekens op een schijf. Die letters blijven behoorlijk lang bestaan en onze moderne technologie zal er voor zorgen dat alle kennis op een goede manier bewaard zal blijven.
In ieder geval werd jouw bijdrage aan de wetenschap voor eeuwig vastgelegd.

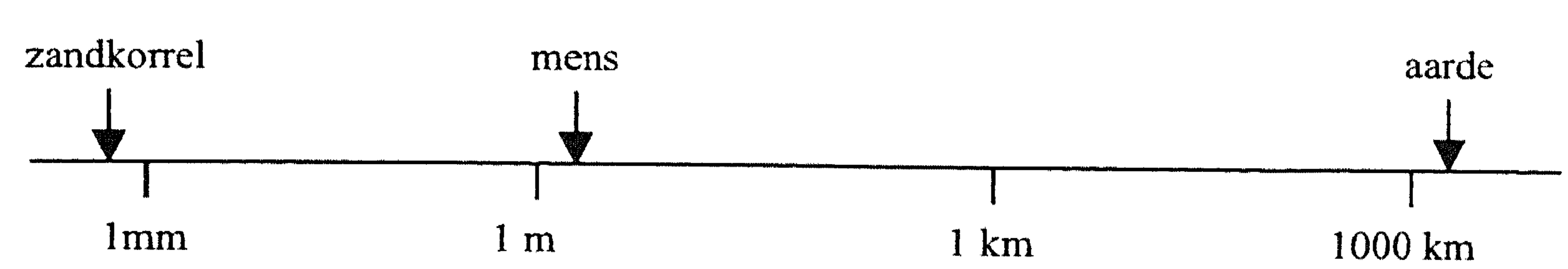
En wat eeuwig blijft bestaan is kennis om te vergaren en te verspreiden, woorden om te spreken, woorden om te horen, mensen om te ontmoeten, ideeën om te vormen, dingen die komen en gaan in een tijd die begin noch einde heeft. Er zijn natuurlijk nog veel meer dingen die het 'eeuwige leven' hebben. Herinneringen hebben ook zo'n eeuwigheidsaspect. Herinneringen aan ontmoetingen waarbij de ene mens de andere niet meet........... Mensen die je lang niet spreekt, dan opeens weer wel en het is of tijd niet heeft bestaan.

Behalve over publicaties en andere instituutszaken, spraken we over tal van andere zaken; over je zoons waarop je apetrots bent en niet te vergeten over je kleinkinderen die helaas wat ver weg wonen. Je luisterde met oprechte belangstelling naar de verdrietige en blijde gebeurtenissen in mijn persoonlijke leven. We spraken over het feit dat je samen met Gré wilt gaan genieten van je vrije tijd, alhoewel je het ook nog heerlijk vindt bezig te zijn met wetenschap. Je bent langzaam maar zeker steeds minder zichtbaar in het instituut geworden, de ontmoetingen zijn schaars geworden. Je hebt ons laten wennen aan het feit dat je met pensioen gaat. Ondanks dat gewenningsproces ga ik je missen en ik hoop dat er toch momenten zullen blijven dat wij elkaar af en toe opnieuw ontmoeten.

Ik wens je samen met Gré en je familie nog een fantastische tijd in goede gezondheid.
Francien Goudsbloem

Daarom gaat het leven sneller als je ouder wordt

Als je een persoon vraagt om het verschil in grootte tussen twee voorwerpen aan te geven dan zal deze een meetlat pakken en de voorwerpen opmeten. Onze hersens vormen zich graag een beeld daarvan, dus tekenen we op een A4 blad een as die begint in 0 met daarop twee punten die de diameter van de twee objecten voorstellen. Dit kan een probleem opleveren als de objecten van verschillende grootteorde zijn. Als het grote object binnen het blad valt, dan valt het kleine object samen met de oorsprong en andersom als je het kleine object iets van de oorsprong weg kiest dan valt het grote object buiten het papier. In ons hoofd hebben we daar een oplossing voor waarvan ik vermoed dat die dicht bij de logaritmische schaling ligt. Een voorbeeld: vergelijken we de grootte van onszelf met die van een zandkorrel en met de omvang van onze planeet aarde dan kunnen we inderdaad binnen dit blad papier blijven. Alles heeft zijn prijs: de waarde 0 zijn we nu wel kwijt geraakt!



Met afstanden in de tijd gaat het waarschijnlijk hetzelfde. Ik herinner me schema's over de evolutie van de mens met perioden als het Neolithicum. En ja hoor, in de Winkler Prins wordt de tijdas aangepast, maar op een slimme manier zodat de oorsprong niet buiten het papier valt. De oorsprong is het heden en de as loopt naar het verleden met achtereenvolgens drie trajecten van gelijke lengte op het papier: de eerste 10.000 jaar in stappen van 1000, het volgende traject van 10.000 tot 100.000 jaar terug in het verleden in stappen van 10.000 jaar en vervolgens het vroegste traject in stappen van 100.000 jaar. Midden in dit vroegste traject lezen we "*gebruik van vuur*" en in het tweede traject "*venusbeeldjes*". Zouden we in het laatste traject "*asymptotische ontwikkelingen*" willen plaatsen, dan moeten we dat toch weer helemaal in de oorsprong zien neer te krabbelen.

Hoe gaat met ons eigen leven? Lees het boek van Douwe Draaisma "Waarom het leven sneller gaat als je ouder wordt" met als belangrijke paragraaf "lang jong kort oud".

Iedereen reageert enthousiast op dit boek. Ik denk vooral vanwege de aha-belevingen. Hoe verklaren we de subjectieve tempoversnelling terwijl de vaart er juist uit zou gaan? Wel in de jonge jaren volgen gebeurtenissen elkaar in een korte periode op. Markeren wie die op een gewone lineaire tijdschaal, waarbij een leeftijd van 100 jaar binnen het A4 papier valt dan komen al die markeringen weer vrijwel in de oorsprong te liggen. Om al deze gebeurtenissen een eigen plaats te geven, gaan we de tijdas op een selectieve manier oprekken weer zo ongeveer logaritmisch. De gebeurtenissen van de oude dag komen dan dichter bij elkaar te liggen vergeleken met de werkelijkheid en, omdat we ons van die selectieve rek en krimp niet bewust zijn, vliegt de tijd voorbij . Dat is wat we zo voelen als ouderen.

Nico, voor jou zijn dit soort transformaties lichte kost. In je professionele leven ben je met zwaardere formules in de weer geweest. Je had altijd zichtbaar plezier in je onderzoek en ik zou me kunnen voorstellen dat je nog enkele open problemen tot een oplossing gaat brengen. Daar zul je dan genoeg tijd voor hebben neem ik aan. O nee toch niet, we hadden juist geconcludeerd dat het leven alsmaar sneller gaat! Hoe het ook moge zijn, ik wens je nog een aantal mooie jaren in gezondheid toe.

Johan Grasman

Easily understood by a statistician

Roelof Helmers

Nico heb ik leren kennen als een prominent aanwezig persoon op het MC/CWI. Vooral in de periode dat Baayen directeur was, heeft hij –naast zijn eigen onderzoek– veel werk verzet voor het wetenschappelijk management van het instituut. Ook was hij, in nu bijna vergeten tijden, souschef van de afdeling Toegepaste Wiskunde met Lauwerier als chef, terwijl ik souschef was van de afdeling Statistiek met Hemelrijk als chef. Verder maakten we allebei deel uit van de bibliotheekcommissie in de tijd dat de heer Thé nog bibliothecaris was.

Ik herinner mij een verhaal van Nico over een ongelukje met zijn voet –dat veel slechter had kunnen aflopen– dat hem overkwam tijdens een bezoek met een onvoorzichtige Indonesische gids aan het Dieng Plateau in midden Java. Nico had begin jaren negentig wetenschappelijke contacten met wiskundigen in Indonesië opgebouwd en bezocht de University of Indonesia in Jakarta en het ITB in Bandung. Enige tijd later ging ik zelf ook naar Indonesië en kreeg van Nico het adres van een aardig hotel in Jakarta, op Raden Saleh.

De eerste keer dat ik met Nico's wetenschappelijke werk in aanraking kwam was in 1984 toen ik deelnam aan een Oberwolfach-bijeenkomst, waar ook Henry Daniels –de 'vader' van de zadelpunt benadering in de statistiek– een lezing hield. In Daniels' voordracht kwamen Airy-functies ter sprake n.a.v. een statistisch probleem (het schatten van een monotone dichtheid), een klasse van speciale functies waaraan ook door Nico is gewerkt; een verslag van deze Oberwolfach-bijeenkomst is te vinden in CWI Quarterly, een tijdschrift waarvan Nico indertijd een der redacteuren was.
De tweede keer dat ik een publicatie van Nico tegenkwam was in 1995. Op bezoek bij collega Bing-Yi Jing zag ik Nico's artikel uit 1982 'The uniform asymptotic expansion of a class of integrals related to cumulative distribution functions' op zijn bureau liggen, naast het boek van N.G. de Bruijn 'Asymptotic Methods in Analysis'. Vele jaren later (in 2004) publiceerde ik met Jing en twee andere collega's een artikel over zadelpunt benaderingen voor het getrimde gemiddelde –een compromis tussen gemiddelde en mediaan– waarvoor nog geen zadelpunt-benadering was afgeleid; er is een extra truc nodig om dit voor elkaar te krijgen. Natuurlijk staat in ons artikel een verwijzing naar Temme (1982). Nico's artikel wordt uitvoerig besproken in het boek 'Saddlepoint Approximations' van J.L. Jensen; ook schrijft Jensen: 'Temme's paper is in a language that is easily understood by a statistician'.

Nico, ik wens je het allerbeste voor de toekomst en hoop je nog vaak op het CWI te zien.

Een collega waar je op kon rekenen

Ruim 40 jaar geleden, op een bewolkte middag in october 1964, hebben Nico en ik elkaar voor het eerst gezien. Zelf weet ik daar niets van, maar dat heeft Nico mij weleens verteld. Het moet op de tweede étage van het gebouw voor Theoretische Natuurkunde in de Valckenierstraat geweest zijn, want zoals Nico zich nog goed wist te herinneren, deden we die middag respectievelijk ons kandidaats- en doctoraal examen wiskunde, en die examens werden indertijd in de Valckenierstraat afgenomen. Vier jaar later deden we weer examen, respectievelijk doctoraal en doctoraat. Toen Nico vervolgens naar het (toenmalige) Mathematisch Centrum kwam om, evenals ik vier jaar eerder, bij de afdeling Toegepaste Wiskunde promotieonderzoek te gaan doen, toen pas heb ik Nico 'bewust' leren kennen.
Je zou kunnen zeggen dat onze wetenschappelijke loopbanen (kandidaats, doctoraal, doctoraat, leidinggevende functies) steeds vier jaar uit fase zijn geweest. Zo kon het ook niet uitblijven dat Nico nu, ongeveer vier jaar na mij, met pensioen gaat.

Nico, we zijn 32 jaar lang collega's geweest waarvan de eerste drie jaar in de afdeling Toegepaste Wiskunde. Daarna kwamen we in verschillende afdelingen terecht, zodat we een aantal jaren minder met elkaar te maken hebben gehad, maar ik heb je wetenschappelijke vorderingen wel gevolgd. Al snel verwierf je je een nationale en niet veel later een internationale reputatie op het gebied van de 'harde' analyse en van Speciale Functies. Je aandeel (ik meen als mede-editor) in de nieuwe editie van het Handbook of Mathematical Functions, een soort bijbel voor elke toegepast wiskundige, is daar slechts één van de bewijzen voor. Het heeft me dan ook altijd verbaasd dat je je zo vaak liet strikken voor minder wetenschappelijke, soms ronduit onaangename, 'klussen'. Toch heb ik je er nooit over horen klagen (misschien had je dat wat meer moeten doen). In elk geval heeft het instituut je leren kennen als iemand waar je altijd een beroep op kon doen en in het bijzonder heb *ik* dat vaak gedaan.

Regelmatig kwam ik bij je aankloppen voor hulp bij het beoordelen van artikeltjes voor de Letter Section van het tijdschrift Computational and Applied Mathematics (JCAM).

Begin tachtiger jaren nam Luc Wuytack, hoofdeditor van JCAM, hierover contact met ons op. Dat was niet toevallig, want enige tijd eerder had Arjen Sevenster, indertijd contactman voor North-Holland met JCAM, op het CWI gesprekken gevoerd over de diverse wiskundetijdschriften die North-Holland uitbracht. Hij was ook bij mij langs gegaan en in ons gesprek had ik geklaagd over de lange publicatietijd van artikelen, vaak omdat die artikelen zo lang bij referees bleven liggen. Ik opperde een apart tijdschrift voor korte artikelen die dan snel gepubliceerd moesten worden. Dat had ik niet moeten doen. Luc greep zijn kans, introduceerde in JCAM een aparte rubriek voor artikelen van twee à drie pagina's (Letters), waarvan hij snelle publicatie in het vooruitzicht stelde, en hij wist meteen wie hij daarmee kon belasten. Immers het CWI met zijn afdelingen Toegepaste en Numerieke Wiskunde had genoeg referees om de Letters over te verdelen. Ik kon moeilijk nee zeggen, maar ik moest me wel verzekeren van de medewerking van de souschef (de facto chef) van de afdeling Toegepaste Wiskunde. Nico, die medewerking heb ik meer dan voldoende van je gekregen! Het was niet direct te voorzien dat de meeste niet-numerieke Letters op jouw vakgebied zouden liggen, zodat bovendien nog heel veel op jouw bordje terecht kwam. Maar zonder uitzondering schreef je binnen een week over elk artikel waar ik mee aankwam een gedegen rapport, terwijl je toch ook nog betrokken was bij andere tijdschriften, waaronder een mede-editorschap bij het gerenommeerde Mathematics of Computation. Nico, het is er niet eerder van gekomen, maar bij deze gelegenheid wil ik je bedanken voor die samenwerking van bijna 20 jaar. Je was een collega waar je op kon rekenen.

Tot slot wil ik jou en Gré een fijne tijd toewensen nu je geen CWI-verplichtingen meer hebt. Als 'ervaringsdeskundige', zoals dat tegenwoordig heet, kan ik jullie verzekeren dat die grotere vrijheid veel voordelen biedt.

Piet van der Houwen
Maart 2005

Dank voor de tijd

Annette Kik

Beste Nico,

Dank voor de tijd dat je de vriendelijke interim chef van het Bureau was! Hoewel je hart vooral bij je onderzoek leek te liggen, zorgde je er plichtsgetrouw en bescheiden voor dat het afdelingswerk door kon gaan en dat we met vragen altijd bij je terecht konden.

We hebben genoten van het afdelingsetentje bij jullie thuis in Abcoude en waardeerden je belangstelling, ook voor persoonlijke zaken. Het is leuk om nog steeds op de hoogte te blijven van al jullie plannen en familie-omstandigheden!

Hartelijke groeten, ook van Pim en Lotte,

Annette Kik

Van hogere wiskunde

Aad van der Klaauw

Van hogere wiskunde heb ik geen kaas gegeten. Veel onderzoek moet toegepast zijn. Het lijkt me een grote uitdaging om toegepaste wiskunde als beroep te hebben. Een computer kan dan handig zijn. Maar pen, papier, en een goed schoolbord zijn ook vereist. Crashes van schoolborden zijn hoewel zeldzaam, erg luidruchtig. Tegenwoordig zijn er minischoolborden die je in je hand kan houden, waarop je met een pen zonder inkt kan schrijven, en rekenen. Voor de wiskundebeoefenaars van de toekomst is dit een geweldige integratieslag.

Vroeger werkten "computer gebruikers" achter terminals. Een GUI (Grafische User Interface) bestond nauwelijks, en muizen waren zeldzaam. Alle rekenkracht stond centraal in een computerruimte. Iedereen met uitzondering van een systeembeheerder werkte remote. Langzaamaan kwamen er echte werkstations en PC's. Niet iedereen had zo'n apparaat op het bureau staan. Veel CWI'ers wilden dat ook niet. Die apparaten waren luidruchtig en er was nog geen topkoeling. Een terminal was lange tijd populair.

Het viel me op dat in de jaren negentig bij het inhuizen in de eerste generatie portacabins er binnen de kortste keren een heel huiselijke sfeer heerste; zo ook op de kamer van Nico Temme. Ook merkte ik dat hij zich niet snel uit het veld laat slaan door falende servers of netwerken. Diverse verhuizingen, verbouwingen, zonder stroom, met defecte printers of ontregelde koffiemachines. Nico wist zich er, met stapels boeken, pen, papier, en computers als ze werkten, doorheen te slaan.

Als er gebruik gemaakt moest worden van een computer dan het liefst een doordacht apparaat dat niet te veel zoemt. Vanaf het prille begin tot op heden was dat meestal een Macintosh. Een zwaar werkstation was aan jou niet zo besteed. Als er rekenkracht aan te pas moest komen dan kon dat ook wel op afstand. Als oudgediende weet Nico dat zoiets prima gaat.

Veel desktop-leed en upgrades zijn je zo ontgaan. Geen wonder dat je zo een vriendelijke, aardige man bent gebleven!

Nico,

Ik wens je veel plezier!

Met respect,

Aad van der Klaauw

Een speciale relatie

Paul Klint

Bij het afscheid van Nico Temme van het Centrum voor Wiskunde en Informatica

Close encounter #1 (circa 1970)

Voor het college Speciale Functies van Prof. Hans Lauwerier heb ik hem indertijd aangeschaft, *de* Abramowitz en Stegun.[1] Een pil met de allure van het telefoonboek waarin de nummers van alle grote Nederlandse steden staan. In dit boek staat alles wat er te weten valt over speciale functies met formules, tabellen, en noem het maar op. Tentamen gedaan, boek in de kast, niet veel meer mee gedaan. In deze tijd was jij al ijverig bezig onderzoek te doen op dit gebied, onder leiding van dezelfde Lauwerier.

Close encounter #2 (2003)

Mark van den Brand is voor een jaar op sabbatical bij LORIA in Nancy en komt daar een project tegen om LaTeX documenten te parseren en om te zetten in MathML. Nu is het parseren van LaTex een lastig probleem en hij besluit om onze geavanceerde technieken (ach eventjes reclame op zijn tijd) daar op los te laten en met succes.[2] Pas na doorvragen kom ik er achter dat het gaat om een webversie van *de* Abramowitz en Stegun, en pas weer later kom ik erachter dat jij hier een cruciale rol in speelt. Over communicatie gesproken.

Afscheid

Inhoudelijk zijn we nooit dichter bij elkaar gekomen dan de hier genoemde close encounters. In de hoek van de *speciale functies* moeten we het dus niet zoeken.

Ik houd het dan maar op een *speciale relatie*: als senior CWI-er die op vele manieren betrokken was bij evaluaties, jaarplannen, jaarverslagen, colloquia, en themaleidersoverleg heb ik vrij veel met je te maken gehad. Ik vond je rustige, weloverwogen en zorgvuldige manier van werken altijd een rustpunt in hectische tijden.

Bij je afscheid wil ik je graag bedanken voor alles wat je voor het CWI gedaan hebt. Geniet van de extra vrije tijd en koester de speciale $\frac{\text{func}}{\text{rela}}$ties.

[1] Abramowitz and Stegun, I., 1966. Handbook of mathematical functions. Oxford, Dover Books.

[2] M.G.J. van den Brand and J. Stueber, Extracting Mathematical Semantics from LaTeX Documents, Workshop on Principles and Practice of Semantic Web Reasoning - PPSWR'2003, Mumbai, India, Dec. 2003, `http://www.loria.fr/publications/2003/A03-R-457/A03-R-457.ps`

Ongeveer halverwege negenenvijftig jaar MC / CWI

Jan Kok

Beste Nico,

Voor het ophalen van herinneringen wil ik me beperken tot een enkele gelegenheid, behorend bij een oude foto.
De helft van ruim negenenvijftig is dertig. Toen het MC dertig jaar bestond werd dat (op 11 februari 1976) gevierd met een wedstrijdendag op het MC, gevolgd door een en ander in de belendende Amstelkelder. Daar vond ook de uitreiking van enige prijzen plaats. Van Wijngaarden had taarten met voor elke wedstrijd toepasselijke taarttops, en een van die taarten was voor Nico. Ik kan er niet van maken welke van de wedstrijden door Nico is gewonnen.

Ik denk eigenlijk dat het niet het machtsspel is geweest, maar ik ben er niet zeker van. Dat was een spel waarbij punten werden gegeven voor veroverde informatie; daarbij mochten coalities en contracten met andere deelnemersgroepen worden gesloten, maar er was ook ruimte voor bluf en bedrog. In het laatste geval hadden de mensen echter niet rekening gehouden met de geheel eigen aanpak van deelnemer Van W. Hij benutte de overleggen met andere deelnemersgroepen om lessen in karakter te geven.

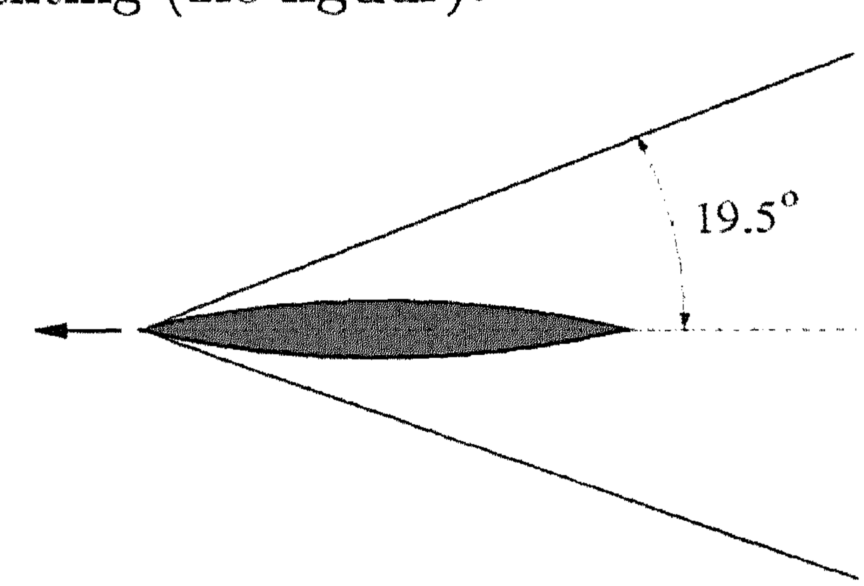
Ik vond het een leerzame dag. Maar dat gold voor heel erg veel MC-dagen. Nico zal dat wel kunnen beamen.

De fietser I

Barry Koren

In de Delftse groep waarin ik begin jaren '80 m'n afstudeerwerk deed, werd bij moeilijk rekenwerk wel eens om raad gevraagd bij wiskundigen buiten Delft. Je hoorde dan met ontzag spreken over oud-student Eckhaus in Utrecht of over wiskundigen bij het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Wie bij het MC werden geconsulteerd is me nooit duidelijk geworden. Omdat het meestal ging om speciale functies of om asymptotische methoden voor kleine verstoringsproblemen, lijkt me de kans groot dat Nico een van hen was.

De keren dat ik bij het CWI met Nico te maken heb gehad betrof het meestal geen asymptotiek of speciale functies, met uitzondering van twee jaar geleden. Promovendus Mervyn Lewis en ik waren bezig met een methode voor het berekenen van waterstromingen om zeeschepen, met speciale aandacht voor de watergolven die daarbij optreden. Een bijzonder fenomeen is dat schepen van verschillende vorm, grootte en vaarsnelheid (mits de laatste niet al te groot en de waterdiepte niet al te klein is) allemaal een wigvormig golfpatroon opwekken, waarvan de omhullende een hoek van 19.5° maakt met de vaarrichting (zie figuur).



Een mooie foto van deze wigvormige golfpatronen is te vinden op `http://www.galleryoffluidmechanics.com/waves/ksw.htm` .
Het betreft daar zeeschepen, maar je kunt de wiggen bijvoorbeeld ook al waarnemen bij eenden die in de sloot zwemmen. In de 19e eeuw is het verschijnsel verklaard door Lord Kelvin. Bij de analytische beschrijving van deze zogenaamde Kelvin-wig speelt een speciale functie, de Airy-functie, een belangrijke rol.

Wil je een waterstroming om een schip met numerieke methoden berekenen, dan moet die oplossing ook een Kelvin-wig met halve tophoek van 19.5° hebben. Bij Mervyns numerieke oplossing zat dit goed. Als beloning bezorgde Nico ons een uitnodiging tot illustratie van een krantenartikel over de digitale versie van Abramowitz & Stegun[1]. Erg leuk om te doen!

Met plezier denk ik ook terug aan de tijd waarin ik Nico heb meegemaakt in de redactie van *CWI Quarterly*, een destijds door het CWI uitgegeven wetenschappelijk tijdschrift; qua prijs-kwaliteitsverhouding een toptijdschrift! De hoeveelheid werk, die Nico hieraan lange tijd als hoofdredacteur heeft besteed, moet enorm zijn geweest. Het resultaat is te bewonderen in onze bibliotheek.

Een andere goede herinnering aan Nico is de visitatie van het CWI in 1999. Er moest, net als dit jaar, een zelfevaluatie worden geschreven. Gerard van Oortmerssen had een groepje CWI'ers gevraagd om dit document samen te stellen. Een moeilijk onderdeel, zo bleek, was de samenvatting. Diverse schrijfsels werden geproduceerd, alle niet geheel naar tevredenheid, ... totdat Nico ging schrijven. Als kenner bij uitstek van het CWI en zijn omgeving schreef hij in één keer een samenvatting die stond als een huis.

Jaren geleden, toen ik in Amsterdam-zuidoost woonde, zag ik Nico 's morgens vaak met gezwinde spoed van zijn huis in Abcoude naar het CWI fietsen (boekentas achterop), en 's avonds weer naar huis. Hij is dat tot en met dit jaar blijven doen, als ik het goed heb. Dit beeld, en dat van Nico's wiskundewerk, roepen bij mij een stukje tekst op uit een liedje van Boudewijn de Groot:

Hoe sterk is de eenzame fietser
die kromgebogen over zijn stuur
tegen de wind zichzelf een weg baant?

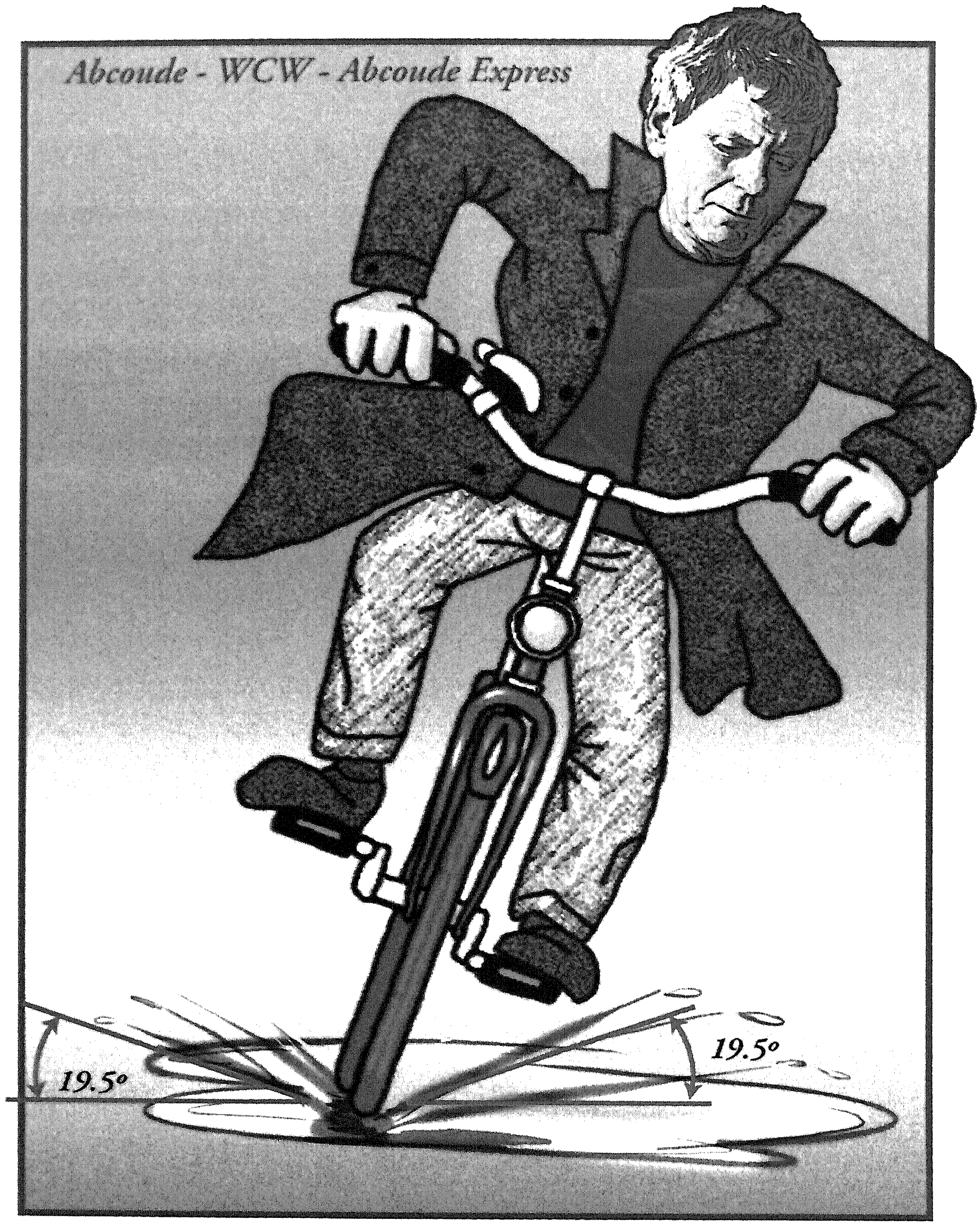
Heel sterk, zou ik zeggen!

Beste Nico, ik wil je hartelijk danken voor je collegialiteit bij de keren dat we hebben samengewerkt en wens je het allerbeste toe, samen met je vrouw en je kinderen. Het ga je goed!

[1] B. Mols, Abramowitz digitaal, *NRC Handelsblad*, p.36, 6 december 2003.

De Fietser II

Tobias Baanders



Nico & Gré, het gaat jullie goed en ik hoop dat jullie nog lang van HET CADEAU kunnen genieten.

Tobias

Nico:

Loyaal, ergo 37 jaar CWI.

Evenwichtig, ergo rots in de branding.

Teamplayer, ergo 1 + 1 = 3.

Charmant, ergo invloedrijk!

Aldus
Jose Koster, Miriam Gravemaker, Marja Hegt en Marlin van der Heijden
Personeelsdienst CWI

Kennismaking

Kees van der Laan

Nico en ik kennen elkaar vanuit de studietijd, nou ja Nico was al medewerker bij Lauwerier toen ik in 1968 assistent werd, op het MC wel te verstaan. Bij Lauwerier was het een gebruik dat er tijdens de pauze van zijn differentiaalvergelijkingencollege koffie gedronken werd in de assistentenkamer. Bovendien was het een gebruik dat de medewerkers aanwezig waren bij Lauweriers college en zo kwam de hele stoet dus bij ons, assistenten, op de koffie. Het koffiedrinken was informeel en zo hebben Nico en ik elkaar leren kennen.

Onze eerste samenwerking betrof een activiteit binnen de bond van wetenschappelijke arbeiders: auto's en uitlaatgassen.

Al gauw kwamen we bij elkaar over de vloer en leerden wij elkaars gezinnen kennen. Nico en Gre hadden 2 jongens en wij 2 meisjes. Ik vond jullie heel plezierig, gewoon en gedegen: tijdens je studie werkte Gre om de studie te bekostigen en toen jij een baan had kon Gre haar studie oppakken. Bijzonder!

Na mijn afstuderen ben ik van de toegepaste wiskunde de numerieke kant opgegaan en werd medewerker bij Prof. dr. Th. J. Dekker, gedeeltelijk op het MC en gedeeltelijk vanwege de UvA. Nico had inmiddels een werkgroep Speciale functies onder zijn hoede, waar ik ook aan deelnam. Na een paar jaar kreeg ik een aanstelling bij het RC van de RUG en verhuisde. De contacten bleven bestaan: ik bleef de werkgroep speciale functies trouw.

Toen ons huis klaar was in Garnwerd boden wij Nico en Gre aan er te logeren tijdens onze vakantie en zo Groningen wat beter te leren kennen. Nu dat leren kennen was meteen raak. Ze waren nog niet gearriveerd of hun Citroën Diana op de oprit kachelde zachtjes achteruit en jawel de weg over en, ... de sloot in. Wat te doen? Nico zag een boerderij en liep erheen voor hulp. Voor de deur was er spoedig natuurlijk een opstootje en werd de zoon van de buren erbij geroepen die zwaar materieel tot zijn beschikking had, lees een flinke tractor. Ondertussen was Nico bij de boerderij aangeland, dat geen boerderij bleek te zijn, en vond er niemand. Onverrichter zake keerde hij terug en zie de auto stond reeds op het droge. Zo hadden zij kennisgemaakt met het dorp en waren meteen geen vreemden meer.

Op afstand bleven wij samenwerken wat uitmondde in de CWI Tract 10 Calculation of special functions: the gamma function, the exponential integral and error-like functions. Er waren plannen voor een 2^{e} deel waar Nico's geliefde Besselfuncties aan de orde zouden komen. Helaas is het daar nooit van gekomen vanwege mijn veranderde werkzaamheden.

Een andere bijzondere ervaring was toen Nico mij vroeg als paranimf bij zijn promotie op te treden. Een eretaak, waarbij ik niet geacht werd ook maar op een vraag te reageren c.q. geconsulteerd te worden. Nico had alles onder de pet en de promotie verliep soepeltjes. Ik zei het al eerder: gedegen lui. De andere paranimf(e), met helemaal geen wiskundige achtergrond, regelde allerlei beslommeringen er omheen.

Nico ging gestaag door en werd betrokken bij het maken van de nieuwe, ICT-aangepaste, editie van het Handbook of Mathematical functions.

Inmiddels had ik mijn 2^e vrouw ontmoet en werd Nico uitgenodigd als getuige bij ons huwelijk, ook een eretaak.

Onze contacten zijn niet intensief maar wel langdurig gebleken. Eens was ik nodig als intermediair tussen Sander en Nico (en Gre). Zij waren en route, als ik mij goed herinner—in die tijd bestonden er nog geen internetcafés—en zij vroegen mij of ik Sander in de USA wilde contacten via internet. Zo zie je maar: geen intensieve vriendschap maar als je er moet zijn voor elkaar dan was je er!

Het afgelopen jaar kregen wij de kans wat langer intensief met elkaar om te gaan, toen Nico op werkbezoek was in Santander. Helaas was ik niet in een goede conditie, en kon een bezoek aan Nico en Gre in Baskenland niet waarmaken. Jammer.

Ik weet niet of onze contacten zich nog zullen intensiveren, ook al gezien dat zijn beide jongens bijzonder getrouwd zijn: de oudste met een Amerikaans en woont in de USA en de jongste met een Hongaarse en woont in Budapest. Twee tegengestelde culturen. Bezoeken aan de kinderen en kleinkinderen vragen in deze situatie extra veel tijd, en zoals Gre onlangs opmerkte: na haar ophouden met werken heeft zij het drukker dan voorheen.

Wij staan ervoor open de contacten wat aan te halen als jullie eenmaal gewend zijn aan jullie nieuwe levensritme.

Enne, ...op de valreep een ideetje: vinden jullie het leuk om te leren bridgen?

Garnwerd, April 05

Toen je zo'n anderhalf jaar geleden

Marie-Colette van Lieshout

Beste Nico,

Toen je zo'n anderhalf jaar geleden er de aandacht op begon te vestigen dat je pensionering niet zo heel ver in de toekomst meer lag, vond ik dat een vreemde gedachte. Misschien speelt mee dat je nog zo'n jeugdige en actieve indruk maakt. Maar bovenal, denk ik, is het moeilijk je het CWI zonder Nico Temme voor te stellen.

Toen ik als assistent op het CWI begon, was jij al een oudgediende. Ik heb er de oude jaarverslagen eens op nageslagen: je bent in 1966 als gast op het toenmalige Mathematisch Centrum gekomen en werd in 1968 als medewerker aangesteld bij de afdeling Toegepaste Wiskunde. Een half mensenleven geleden. Met jou verliest het CWI dus ook een deel van zijn geheugen.

In die eerste jaren hebben we niet veel met elkaar te maken gehad. Dat veranderde tijdens de kanteling, toen er onder leiding van Mike Keane een nieuw thema Signals and Images werd opgericht. Jij had even tevoren een STW project (*Wavelets: analysis of seismic signals*) in de wacht gesleept, en samen met Rob Zuidwijk, Patrick Oonincx en Paul de Zeeuw behoorde je tot de eerste medewerkers van PNA4. Ik volgde een paar maanden later. In die tijd heb ik je beter leren kennen als een degelijke wetenschapper, een loyale collega en een aimabel mens.

Toen het waveletproject ten einde liep, stapte je begin 2000 over naar MAS en trad daarnaast op als interim chef van het CWI Bureau waar ik inmiddels ook part-time was aangesteld. We hebben sindsdien intensief samengewerkt. Andere kwaliteiten, zoals tact, zorgzaamheid, geduld, en vooral je hart voor en kennis van het instituut, vielen nu op. In januari 2001 ging het Bureau op in de CPD zodat formeel jouw taak erop zat. Desalniettemin bleef je betrokken door, bijvoorbeeld, de Scientific Meetings te blijven organiseren, als secretaris het themaleidersoverleg in goede banen te leiden, het CWI te vertegenwoordigen in het overleg van de onderzoekscholen en door beschikbaar te blijven voor goede raad. Het afgelopen jaar bleef je zelfs vanuit Spanje, waar je op sabbatical was, actief meedenken met de voorbereidingscommissie ten behoeve van de evaluatie die eind deze maand zal plaatsvinden. Je ervaring, pragmatische instelling en oog voor het haalbare, zijn van onschatbare waarde geweest.

Nico, ik zal je vreselijk missen, maar wens jou, samen met je vrouw, je kinderen en kleinkinderen, een goede tijd toe, ook na je pensionering. Hopelijk zullen we je nog vaak op het CWI terug zien, om te werken aan je boek of om zomaar nog eens een praatje te maken.

Amsterdam, 10 maart 2005

Some experiments related to the zeros of Riemann's $\zeta(s)$

by

Jan van de Lune (j.vandelune@hccnet.nl)
Langebuorren 49, 9074 CH, Hallum, The Netherlands

Dear Nico,

Since there appears to be only limited space in this Album Amicorum, I will have to be very brief. Nevertheless, I will try to be sufficiently clear, although this is no easy task this time.
In the spring of 1997 I found (experimentally) a number of interesting formulae related to the *exact location* of the non-trivial zeros of Riemann's $\zeta(s)$, and it is my intention here to tell something about my findings. (You are still interested in special functions, right ?!). In doing so I am confident that you, and hopefully some of the other readers, are not entirely unfamiliar with the most common aspects of $\zeta(s)$: Its definition, its relation to the prime numbers, its analytic continuation, the functional equation, the critical line $\sigma = \frac{1}{2}$, the Riemann Hypothesis (RH, for short), the formula $\zeta(\frac{1}{2}+it) = Z(t)\, e^{-\vartheta(t)}$, the Riemann-Siegel formula for $Z(t)$, the asymptotic expansion of $\vartheta(t)$, etc. In this respect one may consult, for example, the well-known books by Edwards and Titchmarsh. However, I will recall some elementary but somewhat less generally known " facts " (mostly without proof).

It is known that on the critical line $\sigma = \frac{1}{2}$ the derivative $\zeta'(s)$ can only be = 0 if $\zeta(s)$ itself is = 0.
It is not known whether $\zeta'(s)$ is actually ever = 0 on the critical line. However, all numerical work so far on $\zeta(s)$ strongly suggests that all non-trivial zeros of $\zeta(s)$ (and these are the only zeros to be considered here) are simple, or, equivalently, that $\zeta'(s) \neq 0$ at these zeros. In parlance of the physicist: The speed of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ is never = 0. I only work with this hypothesis as far as the RH has been or will be verified . So, all pertinent zeros will be situated on the critical line and all these zeros will be simple. In essence this is kind of a very restricted form of the Riemann Hypothesis. I want to state clearly that it is not at all my intention here to try and prove the RH, nor to improve on existing fast procedures for separating the ζ-zeros (Wedeniwski, Odlyzko & Schönhage, Gourdon & Demichel). My goal will merely be to tell something about my (partly) experimental observations (previously unknown to me) concerning the exact location of the ζ-zeros $\rho_n := \frac{1}{2} + i\gamma_n$ with $\gamma_n > 0$.

There are "some of those things in mathematics", one of them being that the argument of a complex number is not unique (a thing that can often be overcome), and even worse, the argument of the complex number s = 0 is not even defined at all. Nevertheless, in the theory of $\zeta(s)$ one often encounters the notion "arg $\zeta(s)$" (when possible, of course). We will have a somewhat different look at the orbit of

$\zeta(s)$, thereby avoiding the troubles with the notion "arg" in case $\zeta(s) = 0$.
The orbit of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ is a smooth curve having a tangent everywhere, and at every point $s = \frac{1}{2}+it$ the orbit-point $\zeta(s)$ moves with non-zero velocity (if time t increases). So, the orbit of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ has a *forward direction* =: dir $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ at every point.
One may verify that dir $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ is always *perpendicular* to the (vector) $\zeta'(\frac{1}{2}+it)$. Since we assumed that $\zeta'(s) \neq 0$ we find the interesting and important relation

(1) $$\text{dir}\ \zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \tfrac{\pi}{2} + \arg \zeta'(\tfrac{1}{2}+it)$$

where dir $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and arg $\zeta'(\frac{1}{2}+it)$ have been chosen such that (now and in the sequel) both are *continuous for all* $t \in \mathbb{R}$.
Note that the notion " dir " does not suffer from any defects in case the underlying function is = 0 at some point.
While plotting the orbit of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ for $0 \leq t \leq 20$, say, we *observe* that (save for a small initial part) *the orbit curves* (with respect to its forward direction) *systematically to the right in a convex manner*. One may run a simple *Mathematica* program such as

```
(* Plot of initial part of the orbit of ζ(1/2+it) *)
ParametricPlot[{Re[Zeta[1/2 + i t]], Im[Zeta[1/2 + i t]]}, {t, 0, 20}]
```

Note that this is equivalent to saying that arg $\zeta'(\frac{1}{2}+it)$ is strictly decreasing. I do not know of any exception to this rule (for t not too small) and will therefore *assume* that this " *convexity to the right* " of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ will persist forever. By keeping a close eye on this orbit one will sooner or later discover that at the first zero $\rho_1 := \frac{1}{2}+i\gamma_1$ (with $\gamma_1 \approx 14.134\ 725\ 141\ 734\ 693\ 790\ 457\ 251\ 983\ 562\ 470\ 270\ 784\ 257\ 115\ 699$) we have the interesting *characteristic relation*

(2a) $$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi}\left(\vartheta(\gamma_1) + \arg \zeta'(\tfrac{1}{2}+i\gamma_1)\right) = 1.$$

This may be seen by observing that (at least for $|t| < \gamma_1$)
$$\alpha(t) := \arg \zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \pi - \vartheta(t)$$
and computing $\lim_{t\uparrow\gamma_1} \arg \zeta(\frac{1}{2}+it)$ in two different ways.
Note that (2a) may also be written as

(2b) $$\text{dir}\ \zeta(\tfrac{1}{2}+i\gamma_1) = -\vartheta(\gamma_1).$$

Once you will have convinced yourself of this you will easily come to the conclusion that, more generally, $t = \gamma_n$ is the (unique) solution of the equation

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta (t) + \arg \zeta' (\tfrac{1}{2} + it)) = n \in \mathbb{N}, \quad (t > 0)$$

$\arg \zeta' (\frac{1}{2} + it)$ has been given the starting value arg $= \pi$. This stands to reason since $\zeta' (\frac{1}{2}) < 0$.
ving a closer look at the LHS of equation (3) we encounter a ple experimental fact: Not only is $\arg \zeta' (\frac{1}{2} + it)$ *strictly* *ing* (i. e. $\zeta' (\frac{1}{2} + it)$ *rotates clockwise*) for $t \gtrsim 2.756\ 488$ 9, it also turns out that $\arg \zeta' (\frac{1}{2} + it)$ is even so strongly ing that it overwhelms $\vartheta(t)$, which is known to be strictly *ing* for $t \gtrsim 6.289\ 835\ 988\ 836\ 902\ 779\ 665\ 090\ 100\ 822$. In ords: The continuous function

$$(t) := \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta (t) + \arg \zeta' (\tfrac{1}{2} + it)) \quad \text{with} \quad \kappa(0) := -\frac{1}{2}$$

to be *strictly increasing* for $t \gtrsim 0.779\ 853\ 575$ with $\kappa(t \approx$ 35 988) = 0. Moreover, it turns out that $\kappa(t)$ increases suffi- fast in order to produce all γ_n (compare (3) and (4)). One d it interesting to know that $\kappa(t)$ can occasionally be very Indeed, one may verify that $\kappa'(1\ 239\ 587\ 702.547\ 487\ 092\ 560$ $\frac{1}{\pi} 154\ 818\ 579.027\ 278\ 937\ 671$.
ld also be noted that $\kappa(t)$ has an inverse function $\gamma(u)$ such ($u = n) = \gamma_n$, whereas the local extremes of $Z(t)$ are at $u = n$ o, one might say that $\gamma(u)$ linearizes the γ_n.
all this be tested / checked ?
recall that $\zeta (\frac{1}{2} + it) = Z (t) e^{-\vartheta (t)}$, differentiate this with to t (indeed, $Z(t)$ and $\vartheta(t)$ are analytic on $\mathbb{R}$) and obtain

$$i \zeta' (\tfrac{1}{2} + it) = (Z' (t) - i Z (t) \vartheta' (t)) e^{-\vartheta (t)} .$$

indeed)

$$\frac{\pi}{2} + \arg \zeta' (\tfrac{1}{2} + it) = - \vartheta(t) + \arg (Z'(t) - i Z(t)\vartheta'(t))$$

, for example,

$$\kappa(t) = -1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} (\frac{Z(t) \vartheta'(t)}{Z'(t)})$$

s may be computed quite comfortably by *Mathematica*.
sure that $\kappa(t)$ is continuous, though (with $\kappa(0) = -\frac{1}{2}$).
re various different expressions for $\kappa(t)$, another one being

$$\kappa(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta(t) + \mathrm{Re} \int_0^t \frac{\zeta'' (\frac{1}{2} + i u)}{\zeta' (\frac{1}{2} + i u)} du) .$$

even use some of these formulae to compute the γ_n to very ecision ! Please, check the negativity of (the real part of ntegrand in (6c).
interesting by-product I restrict myself to also mention that

$\kappa'(\gamma_n) = \frac{1}{\pi}\,\vartheta'(\gamma_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$.
These are some of my early findings. Somewhat later I found another, possibly somewhat more appealing approach. I will turn to this now.

In mathematics (especially in complex function theory) one encounters a form like $\frac{f'(z)}{f(z)}$ way more often than $\frac{f(z)}{f'(z)}$. Newton approximation being an exception, though. Nevertheless, I ventured to introduce the function

$$(7) \qquad Q(s) := \frac{\xi(s)}{\xi'(s)}$$

on a nbhd of the critical line.

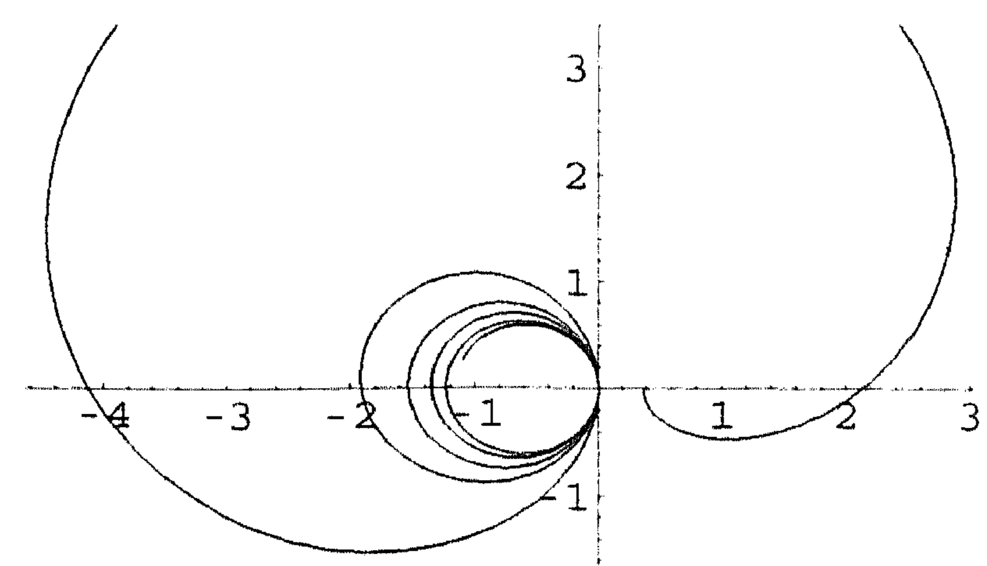
Without any assumption, $Q(s)$ is analytic on $\sigma = \frac{1}{2}$ and all its zeros there are simple. Ergo: $Q'(\frac{1}{2}+it) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$.
One may verify that $Q'(\frac{1}{2}) \approx -0.519\,311\,385\,861\,504\,134\,401$ so that the orbit of $Q(\frac{1}{2}+it)$ moves southwards at the start.
Let me (by way of exception) prove this. Consider the two cases
(i) $Z = 0$. In this case ξ has a zero of order ω, say. Then ξ' has a zero of order $\omega-1$, so that $Q = \frac{\xi}{\xi'}$ is analytic and has a zero of order $\omega-(\omega-1) = 1$. Hence $Q' \neq 0$, as claimed.
(ii) $Z \neq 0$. This is a bit more intricate. If $Z \neq 0$ then $\xi \neq 0$ so that also $\xi' \neq 0$, which is equivalent with $Z\,\vartheta' + i\,Z' \neq 0$.
Now we compute

$$(8) \quad Q' = \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)' = \frac{1}{i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\xi'\left(\frac{1}{2}+it\right)} = \frac{1}{i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{-Z}{Z\vartheta' + iZ'} = \frac{1}{i}\,\frac{Z^2\vartheta'' + i\,(Z Z' - (Z')^2)}{(Z\vartheta' + iZ')^2}\,.$$

If this would be $= 0$ then we must have $Z^2\vartheta'' + i\,(ZZ' - (Z')^2) = 0$, and hence (at least) $Z^2\vartheta'' = 0$. But this is a contradiction since $Z(t)$ was assumed to be $\neq 0$, and it is known that ϑ is strictly convex on all of $\mathbb{R}$ with $\vartheta'' > 0$. ■

At this junction I would advise the reader to make a plot of the orbit of $Q(\frac{1}{2}+it)$ for $0 \le t \le 35$, say. Here is a simple *Mathematica* program.

```
(*  Plot of an initial part of the orbit of Q(1/2+it)  *)
Q = Function[t, N[Zeta[1/2 + i t] / Zeta'[1/2 + i t]]];
ParametricPlot[{Re[Q[t]], Im[Q[t]]}, {t, 0, 35}, ImageSize→ {300, 150}]
```



In order to further analyze the orbit of $Q(\frac{1}{2}+it)$ I defined the real functions $u(t)$ and $v(t)$ implicitly by

(9) $$Q(\tfrac{1}{2}+it) = u(t) + i\,v(t).$$

I also defined

(10) $$\rho(t) = \frac{Z'(t)}{Z(t)} \quad \text{for} \quad t \neq \gamma_n.$$

Now we compute

(11) $$u(t) = -\frac{\vartheta'}{\rho^2 + (\vartheta')^2} \quad \text{and} \quad v(t) = \frac{\rho}{\rho^2 + (\vartheta')^2}.$$

Since it is known that $\vartheta'(t) > 0$ for all t not too small, it is clear that $u(t) < 0$ for all t ($\neq \gamma_n$) not too small. Now let the *quasi radius* $r(t) > 0$ of $Q(\frac{1}{2}+it)$ be defined for $t > a_\vartheta \simeq 6.289$ with $\vartheta(a_\vartheta) = 0$ by (draw a picture with $u < 0$)

(12) $$r := \text{distance}\ (\ (u,v)\ ,\ (-r,0)\ ) = \sqrt{(u+r)^2 + v^2}$$

so that

(13) $$r = -\frac{u^2+v^2}{2u}.$$

Using (11) it is now easily seen that $r = r(t) = \frac{1}{2\vartheta'(t)}$. From this we obtain the remarkable fact that $r(t)$ is strictly decreasing for $t > a_\vartheta \simeq 6.289$. In view of our plot of $Q(\frac{1}{2}+it)$ this means that eventually the orbit of $Q(\frac{1}{2}+it)$ is " *spiralling inwards* " and tends to 0. Has this charming property ever been shown / stated before ? It also follows that $Q(\frac{1}{2}+it)$ is tangent to the imaginary axis only for $t = \gamma_n$. The speed of $Q(\frac{1}{2}+it)$ at the points $t = \gamma_n$ can be shown to be always = 1.
Now I shift our Q-orbit to the right over a distance $r(t) = \frac{1}{2\vartheta'(t)}$. The equation for γ_n then obviously transforms into

(14) $\qquad \frac{1}{2\pi}\ \arg\left(\frac{1}{2\vartheta'(t)} + Q\left(\frac{1}{2} + it\right) \right) = n$

and, since $\vartheta'(t) > 0$ (for t not too small), one will find that this may just as well be written as

(15) $$\arg\left(1 - 2\,\vartheta'(t) \frac{Z(t)}{Z(t)\,\vartheta'(t) + i\,Z'(t)} \right) = n\ 2\pi$$

a formula also quite suitable for the determination of the γ_n (if speed is of no importance). Also compare the even *simpler formula* in the program below.
Note that the orbit of $Q(\frac{1}{2} + it)$, first shifted to the right by $r(t)$ and then multiplied by $2\,\vartheta'(t)$ is purely *circular* (!), and that this new curve *systematically encircles the origin anti-clockwise*. Its rotation-speed remains a mystery, though. Hence, the zeros of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ are now given by those t's for which this new orbit crosses $\mathbb{R}^+$ by moving from the fourth quadrant into the first one. Thus, γ_n must be the (unique) solution of (15).
Finally I present a *Mathematica* program for counting the number of zeros of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ by means of one of my most effective formulae.

```
(*  We may use the formula  2 * Arg[ϑ'[t]+ i Z'[t]/Z[t] ] = 0 ( mod 2 π )
  to approximately locate all zeros ρn of ζ(s) with  n ≤ 15000.  *)
Z = Function[ t , RiemannSiegelZ[t]] ; ϑ = Function[ t , RiemannSiegelTheta[t]];
a = Function[ t , 2 Arg[N[ ϑ'[t] + i Z'[t]/Z[t] ]]] ;
t0 = 7; n = 64; dt = 1/n; (*  The main problem here is to find the proper  n  in  dt  *)
(*  We need not take  dt  constant !  *)
nzeros = 0; ntest = nzeros; dntest = 10;  t = t0 - dt; olda = a[t];
While[0 == 0, t += dt; newa = a[t];
 If[ And[olda ≤ 0 , olda * newa ≤ 0], nzeros += 1]; If[nzeros > ntest,
  ntest += dntest; Print["t ≤ ", N[t], "        # zeros counted = ", nzeros ]];
 olda = newa]
(*  One may compare the results with te
  Riele' s Tables: Mathematical Centre Report NW 67 / 79.  *)

t ≤ 14.1406      # zeros counted = 1

t ≤ 52.9844      # zeros counted = 11

t ≤ 79.3438      # zeros counted = 21

t ≤ 103.734      # zeros counted = 31

t ≤ 124.266      # zeros counted = 41

t ≤ 146.016      # zeros counted = 51

t ≤ 165.547      # zeros counted = 61

t ≤ 184.875      # zeros counted = 71
```

I have to leave it here. I realize that my considerations are partly based upon some unproven assumptions. However, the Platonic flavor (

using parlance of Tom Koornwinder) of the above formulae seems to lend credence to the truth of the RH.
It would at least be very interesting to see how the above reasoning would break down if the RH were false.

I would appreciate to keep in touch. Nico, in any case, I truly wish you all possible luck in your new future !

Jan van de Lune

Afscheid hoeft geen vaarwel te zijn

Beste Nico,

Afgelopen jaar hebben wij al afscheid moeten nemen van een aantal mensen en dit jaar is het de beurt aan jou. Toen ik hier op het CWI kwam werken keek ik best wel vreemd op toen ik kennis maakte met de wetenschappers, vond ze nogal wereldvreemd, *out of this world* noemde ik ze.

Als ik mij niet vergis zat jij toen op de afdeling AM/ZW en ik vond de mensen daar toch het minst wereldvreemd.

Met regelmaat kwam je met, toen nog handgeschreven kopij, dat werd dan uitgetypt om te worden verwerkt tot een rapport of een tract die gepubliceerd werd bij een of andere uitgever. Linda, Josi en ikzelf werkte al via een terminal met Ditroff, LaTeX bestond nog niet eens, de andere dames mochten zich nog uitleven op die ouderwetse typemachines met bolletjes.

Later, toen had het CWI ook al last van ruimtegebrek, is de afdeling naar de portakabin verhuisd en die was absoluut niet zo *Datcha* als hij nu is, 's winters koud, was niet tegen aan te stoken, zomers bloedje heet en volgens mij wel eens last van ongewenste huisdieren zoals een wespennest en muizen of ratten. Heb ook een keer als afvang voor Nada gewerkt, die met zwangerschapsverlof was, het was hartje zomer, had niet echt veel te doen, iedereen was volgens mij toen met vakantie.

Samen met enkele andere dames van de typekamer en Miente aan de CWI Quarterly's gewerkt waar je heel lang tot eind 1999 een van de editors voor bent geweest. Ik ken jou als een rustige en altijd even vriendelijke persoon en heb altijd prettig samengewerkt, de laatste paar jaren hebben wij niet zoveel meer met elkaar te maken gehad, desondanks zal ik je missen en het zal mij vreemd zijn je niet meer met regelmaat op het CWI te zien.

Geniet van je vrije tijd en hopelijk zien we je zo nu en dan terug op het CWI.

ISSN 0922-5366

Met hartelijke groeten Minnie

Lof

Nada Mitrovic

We kennen elkaar al heel wat jaren. De tropenjaren in de Portakabines hebben we goed doorstaan. Jouw kamer vond ik daar altijd zo keurig opgeruimd. Het perzisch tapijtje en de geur van al die boeken maakten het naar mijn idee chique zo in die grote caravan.

Positieve gedachten passeren de revue. Ik heb je ervaren als een integer, vriendelijk, sociaal, weloverwogen mens. Kortom een en al lof! Ik dacht erover een mooie foto of een stilleven van een lof in te sturen. Maar ja, ik wil toch niet dat de eerste associatie uit gaat naar groente. Toen dacht ik aan het voorval van afgelopen december. Het was not-a-Nico-thing, maar je vooruitziende gave is hiermee tot uiting gekomen. En dat was nieuw voor mij.

Op een mooie dag begin december vertrokken Opa & Oma Temme met de auto naar Hongarije. Zij hadden hun auto volgeladen met kadootjes voor hun twee kleinkinderen. Inmiddels bevonden zij zich in Oostenrijk toen Oma Temme terloops naar Opa's paspoort vroeg. Verhip, het paspoort bevond zich veilig en wel, achter slot en grendel, niet hier maar daar 'thuis in Abcoude'.
Het was een vervelende situatie, het zag er even naar uit dat de grootouders terug moesten of dat iemand het document op zou moeten sturen of iets anders? Opa's gave kwam toen om de hoek kijken. Zij installeerden zich in een Oostenrijks Hotel. De volgende morgen belde Opa naar kantoor met de mededeling dat er ergens in zijn bureaulade een kopie van zijn paspoort moest liggen. Hij vertelde dat hij die kopie zomaar ooit eens heeft gemaakt voor het geval dat.
Dezelfde morgen is er actie ondernomen. De Hongaarse douane-autoriteiten accepteerden de kopie, wat behoorlijk exceptioneel was. En Opa en Oma Temme konden hun reis zonder probleem vervolgen.

Nico & Gré, het ga jullie goed. Geniet van jullie vrije tijd en alle activiteiten die jullie straks gaan ondernemen.

Liefs,
Nada

Ook gij, Nico?

Welkom in de Club 65+, die zich in Nederland nog altijd bevoorrecht mag noemen (bijna zoiets als de Club Méditerranée). Nu zal spoedig het Zwitserleven-gevoel over je komen, als je het al niet had. Maar wees gewaarschuwd: even spoedig krijg je het drukker dan ooit. Iedereen zegt dat, maar ik geloofde dat nooit echt, totdat het me zelf overkwam.

In mijn herinnering duikt je naam voor het eerst op toen ik in de jaren zeventig in Groningen iets uitzocht voor de lokale radio-astronomen (het was iets met speciale functies) en iemand (dat moet Cees van der Laan zijn geweest) me zei dat daar op het Amsterdamse MC wel wat over te vinden was. Ik kreeg toen enkele poepbruine publikaties toegestuurd, waar jouw naam ook op stond. Helaas bleek het over andere dingen te gaan.

Toen ik in 1986 op het CWI kwam werken was jij een van de vele geleerden met wie ik tot zaken moest komen, maar de contacten bleven de eerste jaren aan de periferie. Dat veranderde toen rond 1990 het door Jacques Bus nagelaten koninkrijkje (het Bureau) in ontbinding geraakte, en jij een brokstuk op je bordje kreeg. Je hebt die door jou nooit gedroomde speciale functie zonder morren aanvaard (tot tweemaal toe zelfs), en ik heb die tijd ervaren als een zeer soepele. Ik had zelfs de tijd zo af en toe een gedichtje te maken, zoals het onderstaande over de verbroedering der volkeren. Schijnbaar moeiteloos hield je de kudde bij elkaar, die kon rustig blijven grazen zolang zij maar voldoende wol en melk leverde. Achteraf snap ik nog steeds niet hoe je het klaarspeelde je wetenschappelijke activiteiten gewoon te laten doorgaan.

Natuurlijk heeft de laatste jaren ons beider band met Hongarije de contacten weer wat persoonlijker gemaakt. Al jaren geleden dook je met Gré plotseling op in Ipolydamásd, bij ons optrekje op het Hongaarse platteland (je was in Budapest voor de EMS conferentie, meen ik). Ik was alleen, jullie kregen slecht eten en een donderbui over je heen, gevolgd door een excursie door de dorpsmodder, waarover jullie heroïsch zeiden dat het je deed denken aan Grootebroek. Maar de dorpsfiguur Gorbi vergoedde veel. Later vernam ik dat het aan was tussen jullie zoon en een Hongaarse schone (had ik dat al niet eerder meegemaakt?). Dat heeft zich ontwikkeld tot een vast verblijf in Hongarije, waar de trotse grootouders inmiddels kind aan huis zijn. Dat betekent ook dat we elkaar niet uit het oog zullen verliezen, en we verheugen er ons nu al op ter plekke een goede fles Tokajer te ontkurken en te drinken op ons aller eeuwigdurende gezondheid naar lichaam en geest. Het ga jullie goed!

O ja, nou nog dat gedichtje, een beetje flauw, maar toch ...

Ich bin ein Liechtensteiner!
Lappen gappen
Noren storen
Denen lenen
Zweden vreten
Finnen dringen
Esten pesten
Letten smetten
Russen prutsen
Polen dolen
Tsjechen tergen
Moffen poffen
Schotten potten
Britten klitten
Ieren klieren
Friezen kniezen
Belgen zwelgen
Fransen schransen
Grieken rieken
Turken snurken
Jappen trappen (en gappen ook).

Nur die Liechtensteiner, vielleicht ...

Henk Nieland

Die ene dag in de week

Margreet Nool

Dag Nico,

Sinds het vertrek van Piet van der Houwen ben jij de oudste MAS-er. Eigenlijk sta ik daar nooit zo bij stil, maar bij meerdere gelegenheden maakte je mij daar op attent. Momenteel zijn er nog twee zestig-plussers in ons cluster, Piet en Jan. En alledrie zijn jullie nog zeer vitaal en kijken zeker niet uit naar de dag dat jullie eindelijk kunnen/mogen stoppen met werken. Langer doorwerken, zoals de regering wil, zou geen straf zijn voor de meeste MAS-ers.

Jij vindt het belangrijk om speciale aandacht te schenken aan iemands 60-ste verjaardag, bijvoorbeeld door een symposium te organiseren. Daarmee attendeer je de omgeving er op, dat zijn/haar wetenschappelijke carrière binnenkort zal eindigen. Op het CWI is het de gewoonte om uitgebreid stil te staan bij een 25-jarig jubileum, maar niet bij een 60-ste verjaardag. Vijf jaar geleden zijn we dus niet wakker geschud dat je nu het CWI gaat verlaten. Daarom zijn we er nog niet klaar voor. De vraag is: "Ben jij er zelf al klaar voor?". Afgelopen najaar ben je naar Santander geweest om te werken aan een eigentijdse update van het handboek van Abramowitz & Stegun. Door je enorme stuwmeer aan vrije dagen, hoefde je eigenlijk niet meer terug naar het CWI om nog te werken tot je afscheidssymposium. Toch zien we jou regelmatig rondlopen en heeft de directie je nog gestrikt voor het CWI-jaarverslag. Ik hoorde dat men nog één keer gebruik wilde maken van je kwaliteiten bij de totstandkoming van dit verslag.

Je bent geruime tijd interim hoofd van het Bureau geweest en hoewel je dat zeer professioneel deed, klonken er vaak geluiden dat er echt een opvolger moest komen, want Nico wilde weer terug naar de wetenschap en dat werd je van harte gegund. Je vertelde mij onlangs dat je nog wel eens overwogen hebt om een dag per week minder te gaan werken, parttime dus. Maar, legde je uit, dat zou betekenen, dat je juist die éne dag in de week, waarop je geen verplichtingen had, denk hierbij aan administratieve taken, het refereeën van rapporten, zou moeten inleveren. Dus er zou geen tijd overblijven om nu juist dat te doen, wat je het allerliefste doet op het CWI: wiskunde bedrijven.

Per 1 juni mag/moet je het CWI verlaten. Op je allerlaatste werkdag ga je gelukkig nog wel mee op het MAS-uitje, heb je beloofd. De vorige keren moest je verstek laten gaan en het zou wel heel zuur zijn als je er dit jaar niet bij zou kunnen zijn. Even was er sprake van dat het MAS-uitje op 1 juni zou vallen, en op de jou welbekende, zeer bescheiden manier, mailde je me, dat je dan niet meer in dienst zou zijn en dus buiten de boot zou vallen.

Als je dan toch eindelijk met pensioen gaat, zal je meer tijd met je vrouw kunnen doorbrengen en waarschijnlijk vaker op bezoek gaan bij je kinderen en kleinkinderen. Ik hoop dat er dan nog steeds tijd overblijft naast deze aangename *verplichtingen* om per week één dag vrij te maken voor het leuke werk dat wetenschap heet.

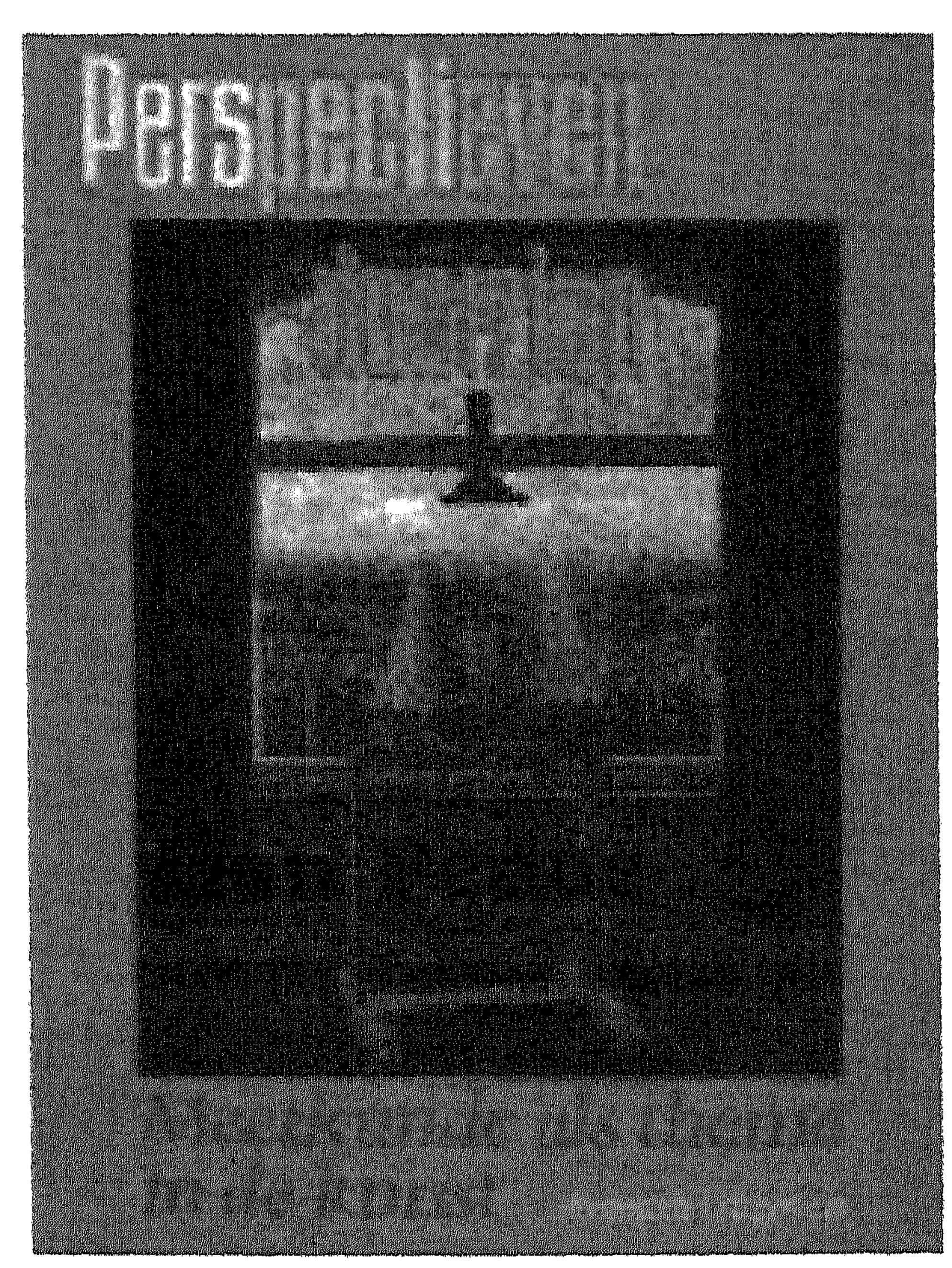
Nico, het ga je goed.

Bij het afscheid van Nico Temme

Bij dit afscheid door jou, Nico, van het CWI (ik bedoel het Centrum voor Wiskunde en Informatica en niet dat andere CWI, want Werk hoeft niet meer!!) in combinatie met het verzoek van de voorbereidingsgroep voor dit Vriendenboek om een bijdrage daarvoor te leveren gaan mijn gedachten terug naar de prettige contacten, die we steeds gehad hebben en naar vanzelfsprekend de eind 60-er jaren, toen jij, Maarten Coolen en ik, medewerkers van de afdeling Toegepaste Wiskunde de werkgroep Neutrixrekening vormden. De groep stond onder leiding van Prof. J.G. van der Corput, die daartoe tot adviseur van die afdeling werd benoemd. Je hebt, Nico, in het Vriendenboek 'Jan en Alleman' bij mijn afscheid van het CWI in 1991 de werkzaamheden van die werkgroep voortreffelijk beschreven. Beter dan jij toen kan ik het niet, dus doe ik ook geen poging daartoe!

Ik werd alweer een hele poos geleden ook net als nu aan de werkgroep herinnerd, toen ik de naam van Prof. Van der Corput tegenkwam in de voortreffelijke biografie over L.E.J. Brouwer van de hand van Dirk van Dalen. Voor diegenen die aan de Universiteit van Amsterdam wiskunde gestudeerd hebben is deze biografie extra interessant. Hoogleraren, bij wie onze generatie tentamen heeft gedaan, komen uitgebreid aan de orde. Ook het ontstaan van het Mathematisch Centrum, waarbij Van der Corput een belangrijke rol heeft gespeeld, wordt besproken, vanwege de tegengestelde opvattingen van Brouwer. Natuurlijk wordt meer dan in 'Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarloozen' dit ontstaan van het MC van de 'buitenkant' beschreven. Nu je hopelijk meer tijd krijgt voor ook andere zaken dan de wiskunde, kan ik je alleen maar aanraden te proberen dit boek te pakken te krijgen.

Er is overigens nog een andere bezigheid, waarin je goed bent, zoals je al een keer bewezen hebt. Men kent je van het onderzoek en de publikaties op het gebied van de speciale functies, de asymptotiek en aanverwante onderwerpen. Misschien is minder bekend, dat je het kostelijke boek van Dan Pedoe *Geometry and the Liberal Arts* in het Nederlands vertaald hebt. In dat *Perspectieven doorzien. Meetkunde als thema in de kunst* komen de meest interessante personen, meetkundige constructies en figuren voor. Wellicht doet zich nog eens een kans voor een vergelijkbaar interessant boek te vertalen!
Nico, het gaat jou en je gezin goed! Ik wens jullie het beste!



Jan Nuis

Beste Nico,

Het zal moeilijk zijn niet te vervallen in dezelfde bewoordingen als andere collega's. Het gaat vast bij iedereen over hoe aardig je bent. Hoe collegiaal je bent. Hoe verlegen af en toe. En hoe professioneel je bent.

Mijn eerste herinnering aan jou dateert uit 1997.

Vanaf mei van dat jaar was ik werkzaam als receptioniste. Na ongeveer 3 maanden kwam er een vacature voor secretaresse in de PortaCabins. Jij zat daar o.a. samen met Mike en jullie hadden ondersteuning nodig. Ik ben daar als secretaresse aangenomen. Vooral heb ik toen voor Mike gewerkt. Ik herinner me alleen dat ik samen met jou werkte aan de Nieuws Analyse.
Vanuit de PC ben ik voorzichtig het Bureau van Frans Snijders binnengeslopen. De taken die ik daar toebedeeld kreeg vielen later weer onder jouw leiding. Jij was toen als interim hoofd Bureau aangesteld. Ik herinner me uit die tijd vooral je (overigens terecht) kritische blik op de CWI Mededelingen.

Nico, ik wens je alle goeds voor jezelf en voor degenen die je lief zijn.

Wilmy

Beste Nico,

Een CWI zonder Nico! Aan deze gedachte kan ik moeilijk wennen. Na mei a.s. zal deze situatie realiteit zijn. Voor zover ik het kan beoordelen was je nooit te beroerd om je inzet te tonen. Natuurlijk in de eerste plaats op wetenschappelijk gebied, maar ook daarbuiten. Er werd herhaaldelijk een beroep op je gedaan als het toenmalige Bureau weer eens zonder hoofd was.

Ook voor de bibliotheek heb je veel gedaan. Zo lang ik mij kan herinneren heb jij je op de een of andere wijze altijd ingezet voor de bibliotheek: werkzaamheden voor de aanschaf van publicaties, het classificeren van de boeken, deelname aan de Bibliotheekcommissie enz. enz. Hiervoor wil ik je van harte bedanken.

Ook t.a.v. andere zaken hebben wij regelmatig contact gehad. Eén voorval is misschien wel leuk om nog in de herinnering terug te halen. Toen wij in 1992 toevallig samen in Parijs waren ter gelegenheid van het 1e European Congress of Mathematics, waar ik het onderdeel "mathematics libraries" had bijgewoond.

's Avonds zouden we op uitnodiging van Cor Baayen naar een restaurant gaan. Wat mij bij is gebleven is dat wij een tijd lang hebben lopen zoeken naar een restaurant dat door Krzysztof was aanbevolen, door de smalle straten en gangen van Parijs. Ik vraag mij af of je nog wist in welk gedeelte van Parijs wij waren. Nadat we eindelijk het restaurant hadden gevonden was het al zo goed als vol, maar dankzij de verenigde overredingskracht was het toch nog gelukt om een tafel te bemachtigen. Het eten had trouwens de moeite geloond.

Binnenkort mag je van een welverdiende rustige tijd gaan genieten en meer tijd besteden aan je gezin, en vooral de kleinkinderen – even gauw naar Budapest op en neer gaan is dan geen probleem. Ik zal de gesprekken met jou zeer missen, maar ergens heb ik het vermoeden en vooral de hoop dat je toch nog regelmatig op het CWI zal terugkomen vooral in verband met je werkzaamheden t.b.v. de Digital Library of Mathematical Functions (http://dlmf.nist.gov/). Je weet dat je dan meer dan welkom bent.

Het ga je goed!

Ay Ong

Naast een wetenschappelijke bijdrage

Patrick Ooninckx

Beste Nico,

Naast een wetenschappelijke bijdrage aan dit Liber wil ik ook een persoonlijk woord tot je richten. Immers veel in mijn huidige leven/werk heb ik mede door jouw handelen bereikt. Want was het niet zo, dat twee mensen begin jaren '90 met hetzelfde idee rondliepen: laten we vanuit wiskundig oogpunt iets aan wavelets gaan doen. Jij als wetenschapper in Amsterdam en ik als student in Eindhoven.

Jij sleepte het onderzoeksgeld binnen en haalde mij uit het zuiden weg om aan de golfjes te gaan rekenen. Zelf dook je weer snel in de oneindige reeksen en speciale functies. Echter toch kon ik je prikkelen, toen ik geheel onverwacht prolate functies en fractionele transformaties van stal haalde. Inmiddels had onze sponsor genoeg toepassingen gezien en mochten we hiermee onze gang gaan.

Al met al, 4 waardevolle jaren met jou als geweldige begeleider naar mijn promotie toe. In vervelende situaties bleef ik, door jou gesteund, het Amsterdamse trouw en door jouw bescheiden opstelling kon ik al vroeg mijn vleugels uitspreiden in academische vrijheid. Met name dit laatste heeft mij als persoon en wetenschapper goed gedaan en dat mag ik je wel als grootste pluim opsteken.

Ook de contacten buiten het CWI legde jij goed en gemakkelijk. Zij bleken goud waard voor het slagen van ons project. Maar ook in mijn huidige baan heb ik nog veel aan de weg die jij destijds naar 'gebruikers' plaveide. Partners van toen kom ik nu weer tegen bij mijn huidige werk. De wereld lijkt zo klein, maar jouw inbreng bleek van grote waarde.

Voordat ik als spreker een extra formulematige bijdrage lever, wil ik je een mooie 'troisième age' toewensen. Ik weet dat je met Gré nog veel plannen hebt, zeker met de (klein)kinderen ver hier vandaan. Geniet van je nog jonge oude dag en we komen elkaar nog wel tegen.

Nico Temme: een speciale functionaris!

In de periode dat ik als directeur bij het CWI gewerkt heb, van 1991 tot 2003, heb ik veel en intensief met Nico Temme samengewerkt. Nico heeft altijd grote bereidheid getoond om naast zijn wiskundig onderzoek werkzaamheden te verrichten op het gebied van beleid en voorbereiding van beleidsdocumenten en ik heb veelvuldig van die bereidheid gebruik gemaakt.

Onderstaand een – verre van volledige – opsomming:

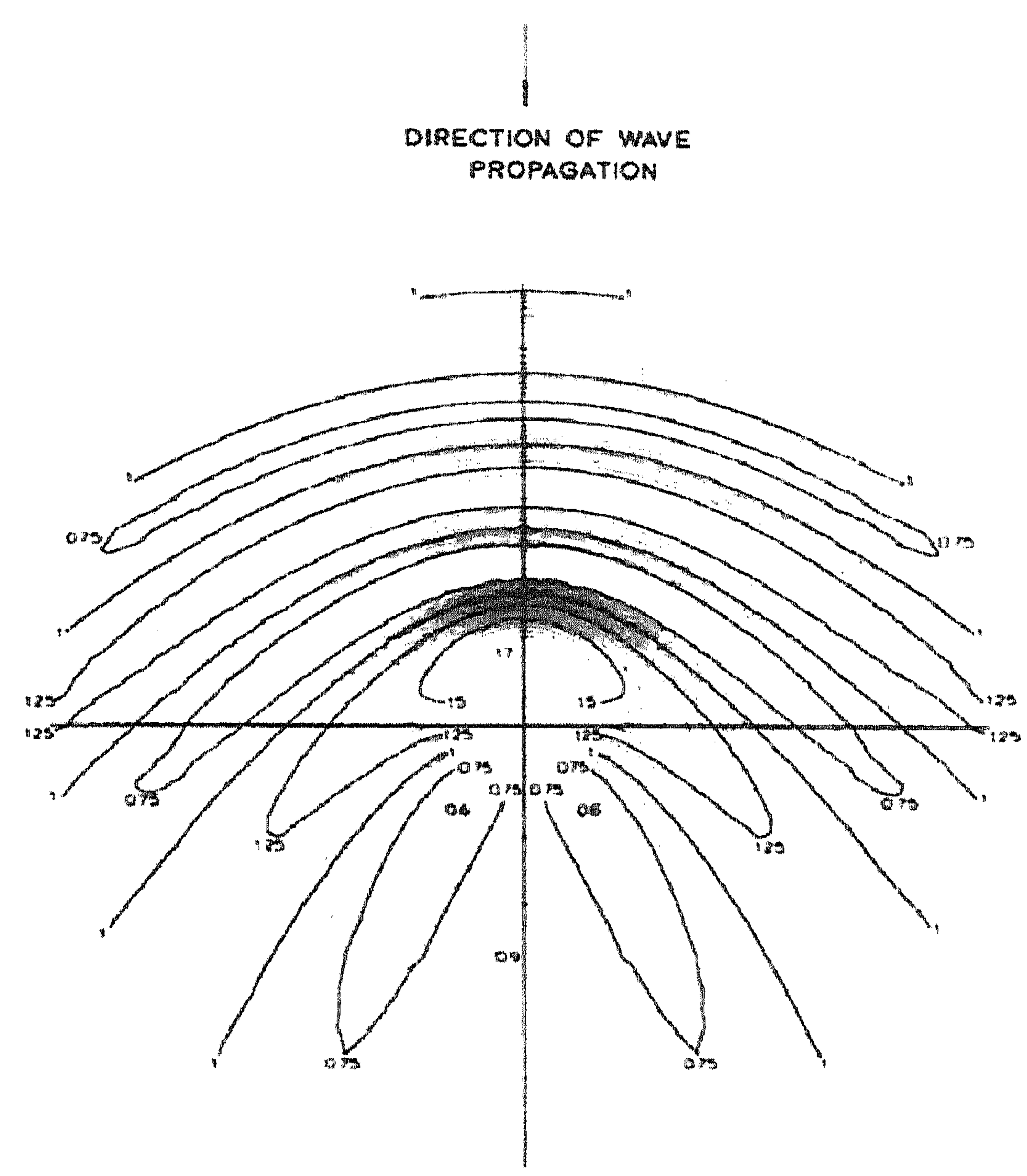
- voorbereiden van visitaties
- redigeren (en vaak ook schrijven van delen van) beleidsdocumenten, zoals meerjarenplannen, instituutsplannen, Overview Research Activities
- betrokkenheid bij acquisitieactiviteiten (het z.g. A-team)
- voorzitter van het bestuur van de stichting Wiskunde en Informatica Conferenties
- voorbereiding van de oprichting van onderzoeksscholen in de wiskunde
- CWI participatie in onderzoeksscholen in wiskunde en informatica
- bestuurslidmaatschap van het Stieltjes instituut
- voorbereiding van de oprichting van EURANDOM
- deelnemen aan en voorbereiden van directieoverleg
- voorbereiden van seniorenbijeenkomsten, later themaleidersbijeenkomsten
- voorbereiden van IR dagen

Nico was ook bereid om op cruciale momenten verantwoordelijkheid te dragen als manager: begin 1992 heeft Nico de dagelijkse leiding van het Stichtingsbureau op zich genomen, een functie, die hij daarna nog enkele malen heeft vervuld.

Als wiskundige hield Nico zich bezig met speciale functies. Recent was hij betrokken bij het digitaliseren van het bekende "Handbook of Mathematical Functions" van Abramowitz en Stegun. Dat boek doet mij terugdenken aan het begin van mijn eigen carrière als onderzoeker. Ik hield me toen onder meer bezig met het berekenen van golfpatronen rond een op zee geplaatste verticale cilinder. In de oplossing speelden allerlei Hankel- en Besselfuncties een rol, en voor de berekening daarvan raadpleegde ik veelvuldig het handboek van Abramowitz en Stegun. De figuur laat een computerplot zien van een uitgerekend golfpatroon.

Het berekenen van deze resultaten had nog heel wat voeten in de aarde. Ik herrinner me bijvoorbeeld dat ik gebruik moest maken van de "double precision" optie in Fortran om convergentie in de reeksontwikkeling van de speciale functies te verkrijgen. Sinds die tijd is er veel veranderd: het is ongelooflijk hoe gemakkelijk we tegenwoordig allerlei ingewikkelde processen op de computer kunnen simuleren en visualiseren. Dat gemak van numeriek rekenen verklaart waarschijnlijk ook de afgenomen interesse in het wiskundig onderzoek naar speciale functies.

Die afgenomen interesse en de toegenomen moeite om het onderzoek te "verkopen" heeft Nico niet gedemoraliseerd. Integendeel, hij bleef het onderzoek trouw maar was daarnaast altijd bereidwillig om op andere gebieden de mouwen op te stropen. Zijn rustige en verstandige persoonlijkheid en grote loyaliteit aan het instituut heeft ervoor gezorgd dat hij het vertrouwen genoot van zowel onderzoekers als ondersteuners op het CWI, en daarmee kon hij in roerige tijden zorgen voor de nodige stabiliteit. Ik denk met veel waardering terug aan mijn samenwerking met Nico.



Nico is voor het CWI van onschatbare waarde geweest. Zijn wiskundig onderzoek in speciale functies bewoog zich binnen een "niche" van het wetenschappelijk programma, maar heeft dankzij de kwaliteit bijgedragen aan het wetenschappelijk prestige van het CWI. Daarnaast heeft hij gedurende vele jaren een grote bijdrage geleverd aan de ondersteuning van het wetenschappelijk beleid. Die combinatie heeft hem tot een heel "speciale functionaris" van het CWI gemaakt.

Gerard van Oortmerssen

Graag benut ik deze gelegenheid

Herman te Riele

Amsterdam, 15 maart 2005

Beste Nico,

Graag benut ik deze gelegenheid om een bijdrage aan dit vriendenboek te leveren, bij gelegenheid van je afscheid van het CWI.
Wanneer wij elkaar voor het eerst op het CWI hebben ontmoet weet ik niet precies, maar zeker is dat wij vele jaren samen in de bibliotheekcommissie hebben gezeten. Ik was daar onder de indruk van je deskundigheid op bibliotheekgebied maar ook van je evenwichtige en wijze kijk op allerlei zaken die daar worden behartigd en behandeld.
In nog ruimere mate ben ik onder de indruk van je deskundigheid op het gebied van de speciale functies. Mooie bewijzen daarvan zijn je vele tijdschrift- publicaties en het boek dat jij hierover hebt geschreven, en het feit dat jij associate editor bent van het project: "Digital Library of Mathematical Functions", waarin een web-versie wordt ontwikkeld van de bijbel van de toegepaste wiskundigen: het Handbook of Mathematical Functions van Abramowitz en Stegun.

Verschillende malen heb ik een beroep gedaan op je kennis van de speciale functies, en steeds was dat niet tevergeefs.
De lastigste vraag – wat mij betreft, tenminste – heb ik je omstreeks 1978 gesteld, toen Jan van de Lune en ik samen met onze toenmalige gast Henryk Iwaniec onderzoek deden naar getaltheoretische zeefprocessen.
Daarbij stuitten we op een half-oneindige integraal over een integrand met een zwakke singulariteit in een van de eindpunten, en die zelf ook nog afhangt van een exponentiële integraal. Wij hadden daar numerieke problemen mee, maar met jouw deskundige analyse van het probleem slaagden wij erin om die integraal tot in grote nauwkeurigheid te berekenen. Dat heeft geleid tot een artikel in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen van 1980 waar we nog steeds een beetje trots op zijn. Zonder jou hadden wij dat artikel niet kunnen schrijven. De details van de numerieke berekeningen voor dat artikel staan in een CWI-rapport van augustus 1980 (NW 86/80).

Nico, jouw vertrek betekent een flinke wiskundige aderlating voor het CWI, maar na je lange en vruchtbare dienstverband verdien je het ten volle om nu met pensioen te gaan. Het ga je goed, en ik hoop dat we je nog regelmatig zullen terugzien, bv. bij het afscheid van een collega, of bij een andere gelegenheid. Je loopt dan wel de kans dat ik dan nog even een vraagje voor je heb over speciale functies!

Herman te Riele

Van bloeiende planten tot hypergeometrische functies

Jos Roerdink
Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Nico, in dit stukje haal ik een goede herinnering op uit de jaren 1985-1991 dat wij collega's waren op het CWI, eerst bij de afdeling Toegepaste Wiskunde en later bij de afdeling Analyse, Algebra en Meetkunde.

In mijn begintijd op het CWI werkte ik o.a. aan stochastische dynamische systemen in de biologie. Een heel aardig voorbeeld daarvan was een eenvoudig model voor de groei van planten in een fluctuerende omgeving, dat mij onverwacht leidde naar de wereld van de speciale functies, en dus naar jou.

Het ging om de groei van tweejarige planten, die bloeien in hun tweede levensjaar en daarna doodgaan. Deze planten doen in zoverre hun naam geen eer aan dat ze soms hun bloei uitstellen, en dus (veel) langer dan twee jaar leven. Het model bestond uit de volgende differentievergelijking voor de populatievector $n(t) = (x(t), y(t))$, met $x(t)$ en $y(t)$ het aantal planten van één jaar, resp. ouder dan één jaar, op tijdstip t:

$$n(t+1) = X(t)\, n(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} 0 & f\phi(t) \\ s & (1-f)\, s \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Hierin zijn s en f de overlevingsfractie, resp. de bloeifractie, van planten ouder dan één jaar. Tenslotte is $\phi(t)$ het aantal nakomelingen per bloeiende plant op tijdstip t. Het is vooral deze laatste grootheid die onder invloed van de omgeving grote fluctuaties kan vertonen. In het model werd dit verwerkt door aan te nemen dat $\{\phi(t)\}$ een onafhankelijk en identiek verdeelde stochastische reeks is, waarbij de verdeling van ϕ een gammadistributie is met dichtheid $p(\phi) = (k^a/\Gamma(a))\, \phi^{a-1} \exp(-k\, \phi)$, met a en k positieve constanten.

Biologen uit Leiden hadden in simulaties gevonden dat het voordelig kan zijn voor de plantenpopulatie om de bloei uit te stellen, vooral als de gemiddelde groeisnelheid laag is en de omgevingsfluctuaties groot zijn. De vraag was of dit ook uit een wiskundige analyse van het model volgt. Zoals onmiddellijk uit vergelijking (1) blijkt, is de populatievector op tijdstip t te vinden door een product van 2×2 matrices $X(t)X(t-1)\ldots X(1)$ toe te passen op de beginvector $n(0)$. Uit de theorie van producten van random niet-negatieve matrices volgt dat de totale populatie $||n(t)|| = x(t) + y(t)$ met kans 1 een asymptotische groeisnelheid γ heeft, d.w.z. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||n(t)|| = \gamma$. De interessante vraag was nu hoe de Lyapunov exponent γ afhangt van de bloeifractie f, vandaar dat we $\gamma(f)$ schrijven. Bepaling van de invariante leeftijdsverdeling leidde tot de volgende uitdrukking:

$$\gamma(f) = \ln(s(1-f)) + K^{-1} \int_0^\infty \ln(1+\tau)\, \tau^{a-1}\, (1+\tau)^{-a}\, e^{-z\tau}\, \mathrm{d}\tau, \qquad (2)$$

met $K = \int_0^\infty \tau^{a-1}\,(1+\tau)^{-a}\, e^{-z\tau}\, \mathrm{d}\tau$, en $z = k\, s\, (1-f)^2/f$.

Via numerieke berekeningen vond ik aanwijzingen dat $\gamma(f)$ een lokaal maximum heeft voor een waarde f^* van de bloeifractie kleiner dan 1, met een zeer steile negatieve helling bij $f = 1$, vooral als de omgevingsfluctuaties sterk zijn. (Dat betekent dus biologisch dat de populatie de asymptotische groeisnelheid kan maximaliseren door de bloei uit te stellen.) Naarmate de fluctuaties in sterkte afnamen verschoof de positie van dit lokale maximum naar een waarde van f^* die op het oog niet van 1 was te onderscheiden. Numeriek inzoomen op een klein interval rond $f = 1$ leverde telkens opnieuw een maximum voor een waarde $f^* < 1$. Maar dat was natuurlijk geen bewijs dat dit voor willekeurig kleine variabiliteit van de omgeving zo zou blijven.

Dat was het goede moment om jou te hulp te roepen, Nico. Het staat me nog helder voor de geest hoe je te werk ging. Op een wit vel papier schreef je eerst met vulpen in jouw karakteristieke handschrift de integralen uit formule (2). Je nam *Abramowitz & Stegun* ter hand en ging naar hoofdstuk 13 waar de confluente hypergeometrische functies worden besproken. Met een trefzekerheid die een jarenlange ervaring verried, transformeerde je de integraaluitdrukkingen naar oneindige sommen van (di)gammafuncties. En toen merkte je op dat ik nu zelf maar eens het gedrag van $\gamma(f)$ en zijn afgeleide bij $f = 1$ moest bekijken. Hoopvol, hoewel nog enigszins geïntimideerd door deze oneindige reeksen, toog ik daarmee aan de slag. En inderdaad, na stug doorrekenen vond ik dat

$$\gamma'(f) \sim -[\{2\ln(1-f)\}^2(1-f)]^{-1}\, \psi'(a), \quad f \to 1$$

(met ψ' de trigammafunctie), zodat $\gamma'(1) = -\infty$. Dit opmerkelijke resultaat hield in dat f^* inderdaad altijd strikt kleiner dan 1 is, hoewel het optimum natuurlijk willekeurig dicht bij $f = 1$ komt als de omgevingsfluctuaties naar nul gaan. Hiermee was de cirkel rond: de simulaties van de biologen, de numerieke berekening van de Lyapunov exponent van het wiskundige model en de asymptotische analyse klopten prachtig met elkaar.

Wat heb ik hierbij nu van jou geleerd, Nico? In elk geval dat je altijd *Abramowitz & Stegun* bij de hand moet hebben. Maar veel belangrijker natuurlijk was het aan den lijve te ervaren hoe jij met veel vakmanschap een wiskundig probleem analyseerde en mij daarmee verder hielp. En ook later, toen ik samen met Henk Heijmans een nieuw CWI-project op het gebied van beeldverwerking vorm mocht geven, ben je steeds een soort mentor voor me gebleven. Wat ik enorm waardeer is de belangeloosheid waarmee je altijd je adviezen hebt gegeven.

Nico, bedankt!

"De stille kracht"

Velen van u kennen wellicht de roman "De stille kracht" gepubliceerd in 1900 door de schrijver Louis Couperus. De roman is een beschrijving van de tegenstelling tussen het mystieke Oosten en het materialistisch nuchtere Westen zich afspelend op Java in het toenmalige Nederlands-Indië; een stille strijd tussen de Javaanse inlanders en het ambtelijk apparaat van het Nederlands bestuur.

Een citaat uit het boek:

"Hier op Java noemen ze het 'Dat waar je niet over spreekt'. En het is overal: Het schuilt in de grond, het sist in de vulkanen. Het komt aanwaaien met verre winden. Het ruist aan met de regen. Het rolt aan met de donder. Het zweeft van ver uit de horizon over de eindeloze zee... En het is vooral te zien in de ogen van de Javaan en het knaagt als een vergif van vijandschap aan lichaam, ziel en leven van de Europeaan. Stil bestrijdt het deze overwinnaar, heel langzaam sloopt het hem. Het laat hem verkwijnen en tenslotte sterven. Dat waar je niet over spreekt. Het is... de stille kracht."

Nico Temme was jarenlang een belangrijke factor op de achtergrond, steun en toeverlaat voor o.m. de verschillende CWI directies. Altijd bereid weer een lastige klus te klaren; het schrijven van een beleidsnotitie of een moeilijke brief, het kuisen en snoeien van instituutsplannen en jaarverslagen, het helpen voorbereiden van evaluaties etc. Bij diens afscheid van het CWI zou ik Nico daarom willen karakteriseren als de jarenlange "stille kracht" van het CWI. Niet in de negatieve zin van ondermijnende kracht, zoals in de roman van Couperus was bedoeld, maar juist als positieve kracht, ten dienste van het CWI, niet opvallend, maar altijd aanwezig.

Nico, het was altijd bijzonder prettig om met je samen te werken. Nu je het CWI gaat verlaten wens ik je het allerbeste voor de toekomst.

Frank A. Roos, Amsterdam, 15 maart 2005

Je hebt je rust natuurlijk wel verdiend

Jan Rutten

Beste Nico,

Je hebt je rust natuurlijk wel verdiend, maar het is jammer dat je ons gaat verlaten. Met jou raakt het CWI een bekwame wiskundige kwijt alsook een toegewijde en dienstbare beleidsmedewerker en, daarenboven, een heel plezierig mens. Wij hebben op twee manieren met een zekere regelmaat contact gehad: organisatorisch en wetenschappelijk. Het eerste betrof het TLO (themaleiders-overleg), waar jij de rol van secretaris vervulde en ik, sinds een paar jaar, de rol van voorzitter. In de praktijk betekende dit dat jij, inderdaad, de rol van secretaris vervulde en, informeel, ook nog de rol van voorzitter voor meer dan de helft voor je rekening nam. Ik doel hierbij op het feit dat je met veel mensen binnen de organisatie contact had, je oor goed te luister wist te leggen, en bijgevolg vaak verantwoordelijk was voor een groot deel van de inhoud van de agenda. Ook hebben we een aantal maal, samen met José Koster, een BGO/TLO-dag buitenshuis georganiseerd. Dit zijn altijd hele plezierige klussen geweest en voor al je constructieve bijdragen hieraan zeg ik je hartelijk dank.

Op wetenschappelijk terrein heb je mij meer dan eens geholpen met antwoorden op een aantal van mijn beginnersvragen over bijzondere getallen. Je nam daarvoor telkens alle tijd, luisterde op welwillende wijze naar mijn vaak verwarde verhaal, en gaf dan op de jou eigen, vriendelijke en rustige manier antwoord. Ik heb daar veel van geleerd en mijn eigen onderzoek heeft daar zeker ook profijt van gehad. Voor mij als onderzoeker in de theoretische informatica is de nabije aanwezigheid van goede en vriendelijke wiskundigen zoals jij van grote betekenis. Het is een van de omstandigheden die het CWI bijzonder maken.

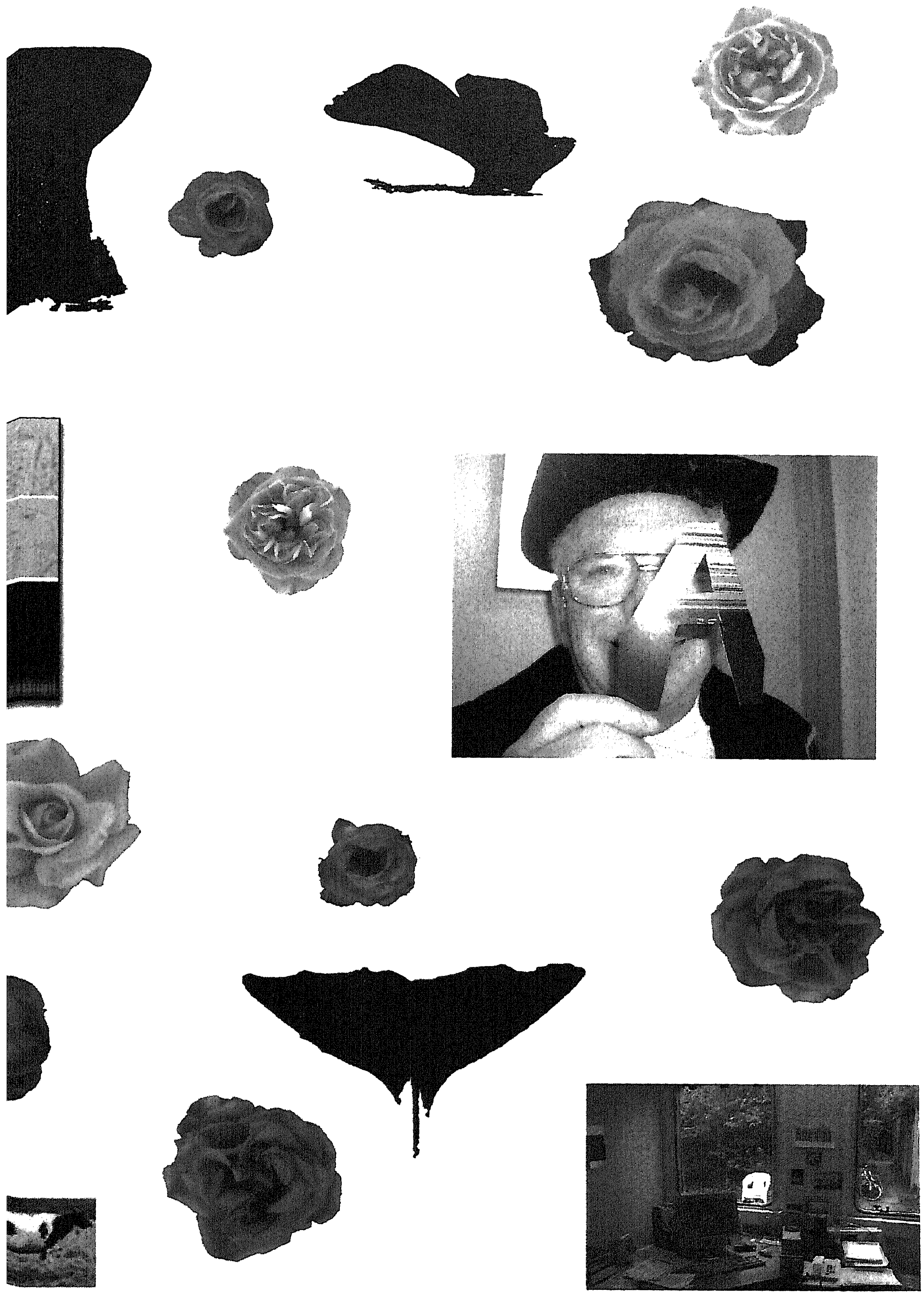
Tot besluit heb ik in *Figure 1* een tabelletje opgenomen met representaties van een aantal bijzondere getalreeksen in de vorm van zogeheten automaten met gewichten (*weighted automata*). Het vormt voor mij een herinnering aan de hulp die ik van jou heb gehad bij het ontstaan ervan, in de context van mijn eigen onderzoek aan coalgebra. Ik vind het verder ook gewoon een leuk plaatje. En tot slot kan het, met wat goede wil, ook nog worden gezien als een voorbeeld van een van de vele manieren waarop wiskunde (bijzondere getalreeksen) en informatica (automaten) elkaar raken.

Het ga je goed, Nico.

Amsterdam, maart 2005

automaton	represents
$q_0 \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \underline{q_1} \circlearrowright 1$	Fibonacci numbers
$\overset{\overset{1}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{2}{\circlearrowright}}{q_1} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{2}{\circlearrowright}}{q_2} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \cdots$	Catalan numbers
$\underline{q_0} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \underline{q_1} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \underline{q_2} \underset{3}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \cdots$	involutions
$\underline{q_{-1}} \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} q_0 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} q_1 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \cdots$	tangent numbers
$\underline{q_0} \xrightarrow{u} \underline{q_1} \xrightarrow{u+1} \underline{q_2} \xrightarrow{u+2} \cdots$	Stirling numbers (1st)
$\underline{q_0} \xrightarrow{1} \underline{q_1} \xrightarrow{2} \underline{q_2} \xrightarrow{3} \cdots$	factorial numbers ($u = 1$)
$\overset{\overset{u}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \underset{1}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{u+2}{\circlearrowright}}{q_1} \underset{2}{\overset{u+1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{u+4}{\circlearrowright}}{q_2} \underset{3}{\overset{u+2}{\rightleftarrows}} \cdots$	Stirling numbers (1st)
$\overset{\overset{1}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{3}{\circlearrowright}}{q_1} \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{5}{\circlearrowright}}{q_2} \underset{3}{\overset{3}{\rightleftarrows}} \cdots$	factorial numbers ($u = 1$)
$\overset{\overset{0}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \xrightarrow{u} \overset{\overset{1}{\circlearrowright}}{\underline{q_1}} \xrightarrow{u} \overset{\overset{2}{\circlearrowright}}{\underline{q_2}} \xrightarrow{u} \cdots$	Stirling numbers (2nd)
$\overset{\overset{0}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \xrightarrow{1} \overset{\overset{1}{\circlearrowright}}{\underline{q_1}} \xrightarrow{1} \overset{\overset{2}{\circlearrowright}}{\underline{q_2}} \xrightarrow{1} \cdots$	Bell numbers ($u = 1$)
$\overset{\overset{u}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \underset{1}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{u+1}{\circlearrowright}}{q_1} \underset{2}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{u+2}{\circlearrowright}}{q_2} \underset{3}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \cdots$	Stirling numbers (2nd)
$\overset{\overset{1}{\circlearrowright}}{\underline{q_0}} \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{2}{\circlearrowright}}{q_1} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \overset{\overset{3}{\circlearrowright}}{q_2} \underset{3}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \cdots$	Bell numbers ($u = 1$)

Figuur 1: Uit ieder van de automaten in deze tabel wordt het bijbehorende n-de bijzondere getal verkregen door te kijken naar alle paden van lengte n, beginnend in q_0 en eindigend in een van de onderstreepte toestanden, vervolgens de waarden van de labels van dat pad met elkaar te vermenigvuldigen, en tot slot alle uitkomsten van alle paden van lengte n bij elkaar op te tellen. Zie: J. Rutten. *Coinductive counting with weighted automata.* Journal of Automata, Languages and Combinatorics 8(2), 2003.



Rapport voor een Referee

Ben Sommeijer

Beste Nico,

Aangezien we beiden al heel wat jaren CWI-er zijn, kennen we elkaar al vrij lang. Maar het 'echte' contact begon na de kanteling toen we beiden in MAS werden ondergebracht. En onze samenwerking kwam echt goed op gang toen Piet van der Houwen met pensioen ging. Dat kwam zo: Piet is jarenlang de editor van de Letter Section van JCAM geweest en bij z'n vertrek zocht hij een opvolger. Hij informeerde bij jou of je daar trek in had, maar omdat je al een aantal editor-functies bekleedde, bedankte je hiervoor. Vervolgens kwam Piet bij mij en wetend dat ik jou – als ervaren editor – in de buurt had, durfde ik het wel aan.

Nu wil het geval dat JCAM traditiegetrouw relatief veel manuscripten op het gebied van speciale functies krijgt aangeboden voor de Letter Section. Met jou als expert binnen handbereik, kon ik het als editor niet beter treffen. Als er dan weer een manuscript op dit vakgebied was binnengekomen, liep ik meestal even je kamer binnen met de vraag of je geschikte referees wist. Je begon dan vaak te bladeren en noemde en passant wat namen van mogelijke referees, maar al lezend was meestal je eindopmerking: "Ach, ik kijk er zelf wel even naar". Met als resultaat dat ik meestal na een paar dagen, maar toch uiterlijk na een week, een gedegen referee-rapport van je kreeg. Hulde! Als meer referees zelfs maar een fractie van jouw snelheid aan de dag zouden leggen, dan zou het leven van editors een stuk prettiger worden en zou de totale doorlooptijd van het publicatieproces aanzienlijk bekort kunnen worden.

Ik wil je dan ook hartelijk bedanken voor de vele keren dat ik een beroep op je mocht doen. Ik heb daar dankbaar gebruik van gemaakt en – dat moet ik bekennen – ook wel eens misbruik. Maar ja, het ligt ook wel erg voor de hand jou als referee te vragen als er een manuscript binnenkomt met de titel "*The Temme's sum rule for confluent hypergeometric functions revisited*".

Nico, je gaat het CWI nu verlaten; jammer, ik zal je missen. Hopelijk komen we elkaar nog wel eens tegen. Ik wens je het allerbeste toe in de periode die nu voor je ligt.

Aan: Nico Temme

Leiderdorp, 11 maart 2005

Beste Nico,

Het is lastig me voor te stellen, het CWI zonder jou (wellicht zal dit ook helemaal niet gebeuren). In ieder geval markeert je 65ste verjaardag een opmerkelijke overgang, want je zult het CWI niet meer representeren zoals je dat tot nog toe gedaan hebt, zoals in het bestuur van de onderzoekschool Thomas Stieltjes Institute for Mathematics of in de begeleidingscommissie voor de citatieanalyse door het CWTS.

Zonder dat we ooit nauw samengewerkt hebben, hebben we zo in de loop van de tijd elkaar op allerlei manieren ontmoet. Die collegiale samenwerking heb ik altijd als heel plezierig ervaren. Je treedt niet veel op de voorgrond, maar je opmerkingen zijn gefundeerd en constructief, en als je iets op je neemt, dan gebeurt het ook goed. Daarom heeft het CWI je ook betrokken bij zijn interne organisatie en in de vertegenwoordiging naar buiten.

Over je wiskundige deskundigheid kan ik niet direct oordelen. Daarvoor liggen onze vakgebieden te ver uit elkaar. Maar ik heb er in lovende termen over horen spreken en ook begrepen dat je op jouw gebied aanspreekbaar was, voor wiskundigen en niet-wiskundigen.
Ook in dat opzicht heb je bijzonder verdienstelijk werk verricht voor de Nederlandse wiskundige gemeenschap.

Als directeur van het Stieltjes Instituut wil ik je in het bijzonder danken voor je inbreng in de bestuursvergaderingen. Je wist altijd de bijzondere, neutrale, positie van het CWI (en EURANDOM) in acht te nemen, maar dacht goed mee in ons streven de Nederlandse wiskundebeoefening en opleiding van onderzoekers op een hoger peil te brengen.

Graag zou ik je afscheidsfeest hebben bijgewoond, maar er is een ongelukkige traditie dat ik al buitenlandse verplichtingen heb op de data dat mensen uit mijn omgeving afscheid nemen.
Dat geldt helaas ook weer deze keer. Ik doe het dus maar op deze wijze. Ik wens je een heel gelukkige toekomst en hoop je nog vaak te ontmoeten en wellicht nog samen te werken in een of ander verband.

Met hartelijke groet,
Rob Tijdeman.

Beste Nico,

Het is lang geleden dat wij op de derde etage van de Boerhaavestraat 49 de kamer deelden aan het begin van de gang met uitzicht op de Amstel-brouwerij en de regelmatig over het dak langstrekkende bezoekers aan die brouwerij. Dat was vanaf 1 augustus 1975 tot en met 21 december 1977, toen je sous-chef werd van TW (Toegepaste Wiskunde; in die tijd had dat vakgebied nog die naam). Het pand aan de Boerhaavestraat met al die in-, uit- en aanbouwtjes werd rond half juni 1980 door het MC verlaten voor de nieuwbouw in de Watergraafsmeer.

Ik kende je eerder als een van de assistenten van de wiskundige kunstenaar / tovenaar professor Hans Lauwerier, die als een van de eersten gebruik maakte van de overhead-projector. Jullie (Tom Koornwinder, Gert-Jan Förch, Kees van der Laan en jij) kwamen altijd bij zijn colleges in de collegezaal van het MC op de derde etage opdraven en zaten dan gebroederlijk naast elkaar. Al als student-assistent op het MC in 1972-73 raakte ik betrokken bij de traditie van het asymptotische onderzoek zoals dat op het MC werd beoefend door Lauwerier, Johan Grasman en door jou. Dat aspect van de wiskunde heeft me ook nooit meer losgelaten. Als student-assistent mochten Odo Diekmann en ik de "Tract" (nr. 54) van Lauwerier "Asymptotic Analysis" onder jouw leiding controleren op schrijf- en zetfouten. Dat was uiterst leerzaam. En er waren meer opdrachten waardoor ik thuis raakte in de asymptotiek.

In 1975 startte ik mijn promotiestudie en al heel snel wist je mij voor een zacht prijsje te helpen aan het prachtige boek van Frank Olver "Asymptotics and Special Functions". Ik denk dat je me op die manier op het pad van de asymptotiek wilde zetten (als ik daar al niet was). Technieken uit dat boek heb ik gebruikt voor een onderdeel van mijn proefschrift en daarover heb ik destijds met jou op die kamer heel wat gediscussieerd. Olver's boek is nog steeds een bron van informatie voor tal van momenten in mijn wiskundige naspeuringen, net zoals jouw boek "Special Functions, An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics" een fraaie introductie geeft op het nog steeds intrigerende gebied van de speciale functies. Het was boeiend Olver persoonlijk te ontmoeten op jouw 25-jarig MC/CWI-jubileum op 8 januari 1993.

Als een van jouw belangrijkste karaktereigenschappen zou ik willen noemen de wijze waarop jij zonder al te veel ophef jouw taken regelt: rustig, gedegen en weloverwogen en bovendien heb je heel wat jongere wiskundigen belangeloos ter zijde gestaan en daarmee op subtiele wijze geholpen.

En via jou bezit ik nu het onwaarschijnlijk lage Erdős-getal van 3, omdat jij gepubliceerd hebt met L. Bruce Richmond (met Erdős-getal 1) !

Je gaat nu met pensioen maar gezien het aantal publicaties van jou in de laatste tijd neem ik aan dat dat niet betekent dat je met de wiskunde stopt.

Ik wens je nog een vruchtbare periode toe !

Ed Veling, maart 2005

CWI, Amsterdam, 2 maart 2005

Beste Nico,

Van 1968, het jaar waarin jij in dienst trad bij het Mathematisch Centrum, herinner ik me een aantal beeldbepalende gebeurtenissen. In het buitenland bijvoorbeeld is er de moord op Martin Luther King, in Parijs beginnen de eerste vredes-onderhandelingen rond de Vietnamoorlog, ook in Parijs gaat het hard tegen hard tussen opstandige studenten en de politie, en de Russen roepen Tsjechoslowakije bruut tot de orde. Bij ons in Nederland was het veel leuker. Wij zien de geboorte van Algol68, Gerard van het Reve wordt vrijgesproken van godslastering, de partij van boer Koekoek valt uiteen, de actiegroep man-vrouw-maatschappij wordt opgericht, Koningin Juliana opent de IJ-tunnel en, echter veel minder leuk, de mammoetwet treedt in werking. Maar de Maagdenhuisbezetting moet nog komen. Ik weet overigens niet of jij bij die revolte betrokken was.

Het lijken al met al gebeurtenissen uit een ver verleden, uit een volstrekt andere tijd. Maar ook een tijd waarin jij bij het Mathematisch Centrum je lange, vruchtbare wetenschappelijke carrière begon, aan de Boerhaavestraat, in dat oude schoolgebouw waar menigeen van ons zulke goede herinneringen aan heeft. Naar de huidige maatstaven was het er een oude troep, met in de zomer stikhete kamers en een frisse bierlucht van de brouwerij. Maar ik vond het er goed toeven. Wat ik me met name herinner was een keur aan interessante colloquia, studiegroepen en lezingen, waar vele collega's, studenten, gasten en bezoekers actief aan deelnamen. Wetenschappers werden toen nog niet zo op de huid gezeten als nu en begrippen als vraagarticulatie, kruisbestuiving, kennisdisseminatie, nulmetingen en regieorganen lijken nog lichtjaren verwijderd.

Toen ik begon, in 1973, was jij in feite al vijf jaar bezig en zoals ik me herinner toen al zeer deskundig op je onderzoeksterrein, de analyse van speciale functies en asymptotische ontwikkelingen met het keur van vernuftige numerieke algoritmen om hier nuttig aan te kunnen rekenen. Dat heb ik persoonlijk reeds ervaren in 1976 in mijn eerste werkcontact met jou, toen er een opdracht kwam van AMOLF, het FOM-instituut voor Atoom- en Molecuulfysica. Het ging hierbij om het analyseren en berekenen van een ruimtelading in een gas wat gemodelleerd werd met een integro-differentiaalvergelijking. Jij en Odo Diekmann deden de analyse en ik mocht, als jongste bediende, het numerieke deel uitvoeren. We hebben er ook nog een gezamenlijke publicatie aan overgehouden, het MC rapport TN 85/76 uit november '76.

Beste Nico, je hebt je in de loop der jaren ontwikkeld tot een internationaal erkende autoriteit op je vakgebied, getuige een constante stroom van in totaal zo'n honderdvijfentwintig tijdschriftartikelen en twee boeken, waarvan met name je Wiley boek uit 1996 met de titel 'Special Functions, An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics' als een juweeltje wordt gezien. Daarnaast was je in recente jaren editor van maar liefst zeven zeer belangrijke tijdschriften, heb je heel veel gereisd, congresuitnodigingen gekregen en werkbezoeken afgelegd. Wat me hierbij met name opvalt is dat je prestaties door de jaren heen constant zijn. De jaren schijnen op jou geen vat te hebben en zelfs nu, na je pensionering op 65-jarige leeftijd, moet er nog een nieuw boek geschreven worden uit te geven door SIAM. Zo'n constante lijn komt heel weinig voor. Bij vrijwel alle onderzoekers bespeur je toch een stagnatie naarmate de pensioenleeftijd nadert. Dit betekent wat mij betreft dat we jou mogen scharen in de rij der zeer sterken in wetenschapsland.

Het is daarom met enige schroom dat ik je nu ga zeggen dat met jouw vertrek feitelijk ook jouw vakgebied bij het CWI verdwijnt. Dit wist je natuurlijk al, maar ik wil het toch nog eens noemen omdat het los staat van jouw persoon en je vakgebied. Zoals je weet rammelen er steeds andere onderwerpen aan de poort. We hebben jouw plek nu nodig voor nieuwe reizen en avonturen in het prachtige land van de analyse, en wel om de nieuwe groep van Arjen Doelman op te stoten in de vaart der volkeren van de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen. Je zult het met me eens zijn dat dit brede onderwerp de laatste jaren tekort gekomen is, wat denk ik de gemaakte keuze rechtvaardigt.

Het nadeel is dat als het over speciale functies gaat wij vanaf nu ons echt zelf moeten behelpen, met bijvoorbeeld jouw boek uit 1996 of met het Handboek van Abramowitz en Stegun waarvan jij inmiddels ook al als co-auteur te boek staat. Maar we zullen natuurlijk altijd een werkplek beschikbaar hebben voor als je langs komt, al was het maar om weer eens in een tête-à-tête van je te kunnen horen hoe men die vervelende krengen van divergente reeksen nu moet afschatten.

Tenslotte wil ik je ook bedanken, namens vele collega's, voor al het werk dat je naast je eigen onderzoek op bestuurlijk en leidinggevend terrein verzet hebt. Er is zeer vaak een beroep op je gedaan en altijd was je bereid in te springen. Met je rustige, efficiënte en bovenal gezaghebbende wijze van optreden, heb je je hiermee in het gehele instituut een unieke reputatie verworven.

Beste Nico, ik wens Gré en jou, mede namens Tineke, een lang, mooi en vooral gezond pensioen toe.

Het ga jullie goed!

Hartelijke groet,

Jan Verwer
Hoofd Cluster Modelling, Analysis and Simulation

Nico heeft me geïntroduceerd

Raimundas Vidunas

Nico heeft me geïntroduceerd in de CWI-vrijdag-recepties, het rustige leven in de oude portacabins, het vlotte gezelschap op de tweede verdieping, en dan ook nog in de asymptotiek van speciale functies. En er was nog een aardige excursie door Amsterdam, op de fiets onderweg van het CWI naar de Vrije Universiteit.
Nico is net zo aardig en beleefd als Japanners. Groeten uit Fukuoka!

Raimundas

Bovenaan jouw naam en onderaan de mijne

Jan de Vries

Nico,

Bovenaan jouw naam en onderaan de mijne, daarmee ben ik begonnen, in de hoop dat de rest van dit stuk daar dan 'vanzelf' tussen komt. Die hoop is natuurlijk ijdel: ik zal het zelf moeten doen! Op dit moment schiet mij evenwel niet veel meer te binnen dan dat we op gezette tijden een babbel maakten bij de koffie-automaat (of in je kamer, wat bijna op hetzelfde neerkwam). Als we elkaar buiten werkverband tegenkwamen, op een afdelingsetentje of zoiets, dan vond ik steeds dat het toch wel jammer was dat we niet meer contact hadden. Maar ja, hoe gaat dat met wiskundigen die niet aangesteld zijn om sociaal te doen maar om wiskunde te produceren: dan vliegt de tijd, en goede voornemens sneeuwen onder (ik spreek nu alleen voor mijzelf).

Ik zal mijn eigen impressies over ons contact beschrijven. Hierbij ontkom ik er niet aan het meer over mezelf te hebben dan over jou, maar dat hindert niet. Die impressies heb ik overigens ook zelf uit mijn geheugen moeten opdiepen en of ze correct zijn weet ik niet zeker. Ik zal mijn best doen om zo eerlijk mogelijk te zijn, maar enige vertekening en verkleuring zal ik misschien niet kunnen vermijden.

Dat begint al met 'het begin'. Ik heb, als fpu'er thuis, geen jaarverslagen tot mijn beschikking en ik heb geen flauw idee wanneer je op het MC verscheen. Ik weet ternauwernood wanneer ik daar zelf begon: dat moet omstreeks 1969 geweest zijn, eerst voor 2 dagen per week. Meer kon niet, want anders verloor ik mijn onmisbaarheidsstatus bij het onderwijs (ik zat aan de VU) en moest ik in militaire dienst. Pas toen ik 30 werd kwam ik volledig op het MC. Of jij daar toen al zat weet ik niet, maar op een gegeven moment was je er.

Het contact tussen de diverse afdelingen was toen niet zo bijster groot en ik, op de afdeling Zuivere Wiskunde, had dan ook geen flauw idee wat voor soort onderzoek die mensen daar op de afdeling Toegepaste Wiskunde deden. Ja, er was iets met het Deltaplan, maar dat was toen al verleden tijd. Later heb ik dat wel wat bijgespijkerd (niet dat Deltaplan, maar mijn kennis van speciale functies, asymptotiek, biomathematica, manipulatie van beelden, ...) maar in mijn begintijd liep ik alsmaar rond met het vage gevoel dat 'zij daar' nuttige dingen deden, terwijl wij met ons hoofd in de wolken konden/mochten/bleven rondlopen.

Toch verscheen er op een gegeven ogenblik een TW'er (Odo) op een door de afdeling ZW georganiseerd colloquium (Dynamische Systemen). Later nam ikzelf deel, vaak actief, aan colloquia/cursussen waarin TW'ers een groot aandeel hadden. Er staat mij iets bij van het boek van Guckenheimer en Holmes, het boek van Devaney over Chaotic Dynamical Systems (en Hans Heesterbeeks talent om alle fouten daarin te vinden), Fractals Everywhere van Barnsley (idem) en ook nog iets over Wavelets. Maar of dit allemaal vóór de samenvoeging van ZW en TW plaats vond weet ik niet meer. Wat ik ook niet meer weet is, of jij bij al deze colloquia/cursussen aanwezig was. Ik denk het haast wel, maar van die Waveletcursus weet ik het zeker: je bent daarna diep dat vak ingedoken.

Gedurende de periode dat we beiden souschef waren, elk van onze eigen afdeling, zal ik je met enige regelmaat ontmoet hebben, maar onze contacten waren in dat verband niet zo diepgravend dat ik daarvan nog veel weet. Veel beter staat mij bij dat we samen in de Bibliotheekcommissie zaten. Niet dat ik daarvan nu onmiddellijk anekdotes of iets dergelijks bij de hand heb ...

Eigenlijk zijn er maar twee dingen die een diepe indruk op mij gemaakt hebben (naast je vriendelijkheid en grote werkkracht). Het eerste is dat je een van de weinigen was die de Macintosh trouw bleven. En het tweede is dat je vrouw psychologe is. Vroeger maakte ik een indeling van wiskundigen in twee groepen: schaakspelers en musici (en een verwaarloosbare restgroep). Tegenwoordig maak ik een andere indeling: degenen die samenwonen met een psycholoog/psychologe en zij die dat niet doen. Er zijn heel wat wiskundigen die tot de eerste groep gerekend kunnen worden. Jij en ik behoren daar ook bij: een goed tegenwicht tegen beroepsdeformatie!

Jan

De toekomst besTEMMEn

Nico Temme

Immer rustig maar ad rem en attent

Collega

Ontzettend leuke collega

Tijdloos hoofd

En goede humor

Met jou aan tafel was het gezellig

Mooie herinneringen, ik wens je

Een mooie toekomst!

Simone van der Wolff

A tribute to Nico Temme

R. Wong

I have known Nico Temme for more than 30 years. We probably entered our profession around the same time. The work of his that first impressed me was on uniform asymptotic expansions of the incomplete gamma functions [1,2,3]. For instance, he produced the beautiful result that the incomplete gamma functions

$$(1)\quad P(a,x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt, \qquad Q(a,x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$$

have the representations

$$(2)\qquad P(a,x) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(-\eta\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{2}}\right) - \mathrm{R_a}(\eta),$$

$$(3)\qquad Q(a,x) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\eta\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{2}}\right) + \mathrm{R_a}(\eta),$$

where erfc is the complementary error function and $R_a(\eta)$ has the asymptotic expansion

$$(4)\qquad R_a(\eta) \sim \frac{e^{-a\eta^2/2}}{\sqrt{2\pi a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(\eta)}{a^n} \qquad \text{as } a \to \infty.$$

The parameter η in (2) and (3) is defined by

$$\frac{1}{2}\eta^2 = \lambda - 1 - \ln\lambda, \qquad \lambda = x/a, \qquad \mathrm{sign}(\eta) = \mathrm{sign}(\lambda - 1).$$

All coefficients $C_n(\eta)$ in (4) are analytic at $\eta = 0$ (i.e., $x = a, \lambda = 1$). The first two coefficients in (4) are

$$C_0(\eta) = \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\eta},$$

$$C_1(\eta) = \frac{1}{\eta^3} - \frac{1}{(\lambda-1)^3} - \frac{1}{(\lambda-1)^2} - \frac{1}{12(\lambda-1)}.$$

The higher coefficients can be obtained through a recursion formula.

It was from Nico's work on Laguerre polynomials [4] that I got the idea of using parabolic cylinder functions as uniform asymptotic approximants for the Meixner polynomials; compare Figure 3 in Jin and Wong [5] with Figure 5.2 in [4]. Nico's joint work with Olde Daalhuis [6] also played an important role in my paper with Zhao [7], where we provided a simplification of Fields' uniform treatment of Darboux's method [8], a long standing problem first proposed in a survey article by Erdélyi [9, p.167] and later by Olver [10, pp.112-113].

Even my most recent work with Zhang [11] was triggered by Nico's paper on the Gauss hypergeometric function with large parameters [12]; compare Figure 4 in [11] with Figure 2 in [12].

All in all, Nico Temme's work in asymptotics has given me a lot of inspiration and motivation.

References

1. N. M. Temme, *Uniform asymptotic expansions of the incomplete gamma functions and the incomplete beta functions*, Math. Comp., **29** (1975), 1109-1114.

2. N. M. Temme, *The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions*, SIAM J. Math. Anal., **10** (1979), 757-766.

3. N. M. Temme, *Asymptotic inversion of incomplete gamma functions*, Math. Comp., **58** (1992), 755-764.

4. N. M. Temme, *Laguerre polynomials: asymptotics for large degree*, CWI Report AM-R8610.

5. X.-S. Jin and R. Wong, *Uniform asymptotic expansions for Meixner polynomials*, Constr. Approx., **14** (1998), 113-150.

6. A. B. Olde Daalhuis and N. M. Temme, *Uniform Airy-type expansions of integrals*, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994), 304-321.

7. R. Wong and Y.-Q. Zhao, *On a uniform treatment of Darboux's method*, Constr. Approx. **21** (2005), 225-255.

8. J. L. Fields, A uniform treatment of Darboux's method, Arch. Rational Mech. Anal., **27** (1968), 289-305.

9. A. Erdélyi, *Uniform asymptotic expansion of integrals*, in: *Analytic Methods in Mathematical Physics* (R. P. Gilbert, R. G. Newton, eds.) Gordon and Breach, New York, 1970, 149-168.

10. F. W. J. Olver, *Unsolved problems in the asymptotic estimation of special functions*, in: *Theory and Application of Special Functions* (R. Askey, ed.), Academic Press, New York, 1975, 99-142.

11. R. Wong and Wenjun Zhang, *Uniform asymptotics for Jacobi polynomials with varying large negative parameters - a Riemann-Hilbert approach*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

12. N. M. Temme, *Large parameter cases of the Gauss hypergeometric function*, J. Comput. Appl. Math., **153** (2003), 441-462.

Ik heb het genoegen gehad

Paul de Zeeuw

Ik heb het genoegen gehad enige tijd voor Nico te hebben gewerkt. Hij was daarbij altijd zo vriendelijk, belangstellend en beleefd dat ik er bijkans zenuwachtig van werd. Schiet ik tekort, kon je je dan ernstig afvragen. Heb ik misschien iets doms gezegd, schoot er door je heen. Maar neen, het is de houding waarmee hij mensen tegemoet treedt.

Een symbool voor Nico is de mooie vulpen die op zijn bureau ligt. Het is het schrijfinstrument dat zijn voorkeur geniet boven de balpen, of, erger nog, de tekstverwerker op de elektronische computer. Doortastend doch behoedzaam zie je het gouden pennetje over het papier glijden. Zo'n tafereel ademt rust en getuigt van aandacht voor het geschreven woord. De ouderwetse Grolsch reclame doet hier opgeld. Vakmanschap is meesterschap. De wiskundige en zijn speciale functie, hetgeen hier voor tweeërlei uitleg vatbaar is.

Het is dan ook niet verwonderlijk dat zijn naam zo nauw verbonden is geraakt aan het voor de oudere wiskundige zo bekende naslagwerk door Abramowitz & Stegun (1964) en het gereedmaken ervan voor de moderne wiskundige in de eenentwintigste eeuw.

Ik ben benieuwd waar de asymptotiek van het CWI toe leidt, zonder iemand als Nico.

Beste Nico, Waarde Collegae,

Hoe moet het nu verder met het CWI, daar wilde ik het vandaag even met u over hebben. Een begin à la Bop Niksaart leek me passend bij je afscheid vandaag. Het was, in die tijd, een onrustige periode waar het CWI in verkeerde met veel spanningen. Een reactie op deze spanning kwam in vele vormen, één ervan was Bop Niksaart, denk ik. Het was ook een vorm die zeker door jou in banen werd geleid, zoals je op een, jou eigen, manier iets in banen kon leiden en het tegelijkertijd alle ruimte en vrijheid kon geven.

Toen ik bij het CWI kwam, was je sous-chef van de afdeling TW. (In deze eeuw van acroniemen, laat ik alle TLA's maar onverklaard – acroniemen hebben duidelijk geleden aan zelf-marginalisatie: ze zijn leuk als hersengymnastiek voor de verveelde momenten.) Ik denk dat iedereen op de afdeling je toentertijd als de facto chef beschouwde, omdat je op een heel natuurlijke manier sturing gaf aan de afdeling en er voor zekere belangrijke dingen ook verantwoordelijkheid nam. Er veranderde wel iets toen we overgingen naar de afdeling AM, onder Michiel Hazewinkel. Er veranderde echter niets essentieels, of zoals Michiel het destijds omschreef: "Het is meer een cosmetische operatie". Jouw rol veranderde in deze tijd wel iets, maar wat niet veranderde is dat je de dagelijkse leiding van de afdeling bleef doen. Ik denk nog steeds met veel plezier terug aan de sturing die je aan ons gaf, de zogenaamde jongere garde, op een hele positieve manier, wat hopelijk heel duidelijk zal blijken aan de bijdragen van iedereen die jou op een dag als vandaag ten deel zullen vallen.

Een moment dat me nog duidelijk bijstaat was toen we als afdeling een zomercursus over fractals wilden organiseren, om zo te proberen het CWI "aan de man te brengen". Dit "aan de man brengen" lukte overigens aardig, gezien de grote hoeveelheid deelnemers aan deze zomercursus. (Ik ben de precieze aantallen vergeten, maar het zou me niet verbazen als we 70 deelnemers hadden.) Wat ik heel interessant vond is dat je hartelijk kon lachen om de scepsis van Nuis, die van te voren opmerkte dat deze zomercursus weer eens een initiatief van wiskundigen was, met het enige doel een gratis boek te krijgen. Jouw repliek was dat Nuis zelf toch ook een wiskundige was, en hij zou toch ook een boek krijgen. Het boek staat overigens nog steeds in mijn boekenkast – en ik neem aan ook nog in die van jou - dus ook dat doel van de zomercursus hebben we bereikt.

Hierna werd de sfeer op het CWI wat serieuzer, grimmiger soms misschien wel, toen het ging reorganiseren. De directie huurde een heuse consultant in. Je inschatting van het mogelijke belang van de ondernemingsraad in deze was ook belangrijk: je hebt twee mensen uit de afdeling gestimuleerd zitting te nemen in de raad, hetgeen weer een mogelijkheid opende om de toegenomen spanning te ontladen, te kanaliseren, zeg maar. Deze reorganisatie veroorzaakte veel onzekerheden en de al eerder genoemde spanningen voor veel personeelsleden. Enkele collega's namen ontslag bij het CWI.

Lang niet iedereen ging weg, en er kwam zelfs één persoon extra bij: Niksaart, juist, Bop Niksaart. Deze persoon ontbrak in het telefoonboek, ontbrak op de loonstroken, ontbrak in het systeem van de personeelsdienst, hij ontbrak in elk systeem dat enigszins officieel was, maar hij was op een pijnlijke manier aanwezig in het personeelsblad.

Ik herinner je me uit de tijd die ik bij het CWI was, als een positieve iemand, een iemand die mensen kon beïnvloeden en ze tegelijkertijd vrij laten. De woorden kanaliseren, vrijheid en sturen zijn enkele keren gevallen. Begrippen die goed passen bij de sfeer van varen. Nu staan er enkele zeemanstermen op Bops naam die op jou zeker van toepassing zijn: "Die willen varen, die worden nat, maar dat is nog geen reden niet uit te varen".

Om terug te komen op de vraag aan het begin, hoe het CWI nu verder moet zonder jou, daar heb ik geen antwoord op en dat antwoord is ook niet zo belangrijk. Ik denk echter dat Bop zowel het CWI, als jouzelf een veel belangrijker kreet toe zou hebben geroepen: "Een behouden vaart en veel stuurmanskunst".

Marcel Zwaan

Deel II: Interview

Interview

Susanne van Dam

Interview, verschenen in CWI Mededelingen 98, oktober 2004

Wat was je eerste baantje?

In de tuinbouw in de vakantie: piepers rooien bij Jan Bosman in Grootebroek.

Waar ben je het meest trots op in je carrière?

Toetreding tot de Board of Editors van het DLMF Project (Digital Library of Mathematical Functions), de complete revisie van het "Handbook of Mathematical Functions", dat in 1964 uitkwam met als editors Abramowitz en Stegun.

Waar denk je liever niet meer aan terug?

In de eindfase van mijn studietijd werd ik met Maarten Coolen (nu UvA) en Jan Nuis in een MC-werkgroep opgenomen waarin Prof. Van der Corput (toen inmiddels emeritus en pas terug uit Amerika) zijn zogenaamde Neutrixrekening zou overdragen op jonge onderzoekers. Achteraf bleek ons dat wiskundig Nederland dit werk van Van der Corput met een behoorlijke scepsis bekeek. Hoewel ik toen wel wat geleerd heb op het gebied van de asymptotiek, was het toch onverantwoord om zo'n groep met jonge onderzoekers op te starten. Binnen anderhalf jaar zouden er drie proefschriften klaar zijn, beloofde Van der Corput; de tijd die daar in Nederland doorgaans aan besteed werd vond hij veel te lang. De een na de ander haakte af, Jan hield het nog het langste vol. Toen deze het ook opgaf vertrok Van der Corput naar België en ging hij een detective schrijven.

Wat zou je doen als je dit werk niet deed?

Er zijn in mijn opleidingsfase enige keuzemomenten geweest waarbij een andere beslissing totaal anders uitgepakt zou hebben. Ik begon op de ULO, maar na een jaar ging ik naar het lyceum. Na mijn HBS wilde ik eigenlijk wel naar de HTS, omdat ik niet veel voor de universiteit voelde. Tijdens mijn militaire dienst kreeg ik van een beroepskeuzeadviesdienst (je pikte uit verveling graag al dat soort uitjes mee) sterk het advies om te gaan studeren. In dit opzicht kijk ik met genoegen terug op mijn militaire diensttijd.

Wie is de beste in jouw vakgebied?

Het werk aan asymptotiek in verband met speciale functies wordt voornamelijk gedaan via integralen (met als beste Roderick Wong uit Hong Kong) en via differentiaalvergelijkingen (met als kopstuk Frank Olver uit Maryland, nu werkend aan het DLMF project op het NIST (voorheen National Bureau of Standards), waar de eerste versie van het Handboek gemaakt werd. Met beiden heb ik vrij vroeg in mijn carrière vruchtbare contacten gekregen.

Wiens baan zou je –tijdelijk– willen?

Met ontzettend veel genoegen doe ik timmerwerk tijdens het klussen thuis en bij de inrichting van het nieuwe huis van mijn zoon in Hongarije. Zou mijn naam met "timmerman" te maken hebben?

Wiens baan zou je absoluut niet willen?

De baan van Minister voor Vreemdelingenzaken en Integratie.

Wat denk je dat je collega's van je vinden?

De consultant van een politicus zou deze geleerd hebben: vraag ze dat zelf maar. Op het CWI ben ik koning voor hen die blind zijn op het gebied van asymptotiek en speciale functies; ik denk dat ze dat prima vinden.

Naast wie zou je graag in het vliegtuig willen zitten en waarheen?

Als tweede keus: meestal de stewardess die in het andere gangpad helpt. Een reis naar Nieuw Zeeland is er nog nooit van gekomen; daar zou ik nog wel eens heen willen.

Wat is je lekkerste gerecht?

Tonijn met sojasaus. Het recept is afkomstig van mijn schoondochter Laura uit San Rafael (CA), en wordt gemodificeerd bijgeleverd. *Maak je dat zelf klaar?* Zou kunnen, maar meestal dat Gré dit.

Welke auteurs/boeken mogen in geen boekenkast ontbreken.

Literair: Mulisch (De Ontdekking van de Hemel), Marja Brouwers (Casino), Coetzee, Donna Tart, Paustovskij.

Detectives: René Appel, Thomas Ross, Michael Connelly.

Welk gedicht ken je uit je hoofd?

Ik vermaak me om leuke vondsten, maar behalve voor wat trivia en de bekende klassieke gedichten sta ik niet zo open voor literaire poëzie.

Vertel eens iets verrassends over jezelf.

Toen ik vorig jaar meer en meer liet weten aan collega's dat volgend jaar mijn CWI-tijd er op zal zitten, waren velen verrast.

Wie is de volgende?

Dit laat ik graag aan de redactie over; in geval van nood wende men zich tot de directie.

Deel III: Symposium 'From Here to Infinity'

Jacobi Polynomials with Large Negative Parameters

R. Wong

City University of Hong Kong

Abstract

In this lecture, we present an asymptotic expansion for the Jacobi polynomials $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(z)$, where $\alpha_n = -nA + a, \beta_n = -nB + b, A > 1, B > 1$, and a, b are constants. Our expansion holds uniformly in the upper half-plane $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{z : \text{Im } z \geq 0\}$. A corresponding expansion for the lower half-plane $\overline{\mathbb{C}}_- = \{z : \text{Im } z \leq 0\}$ can be obtained by taking complex conjugates. In particular, the two expansions are valid in regions containing the curve L, which is the support of the equilibrium measure associated with these polynomials.

Asymptotic expansions of integrals: simple ideas for solving difficult problems

José L. López[1]

[1] *Departamento de Matemática e Informática,*
Universidad Pública de Navarra, 31006-Pamplona, Spain.
e-mail: jl.lopez@unavarra.es.

Dedicated to Nico M. Temme on the occasion of his 65th birthday

ABSTRACT

I make an overview of my joint work with Nico since we started our cooperation in 1998. After all these years, the main idea I have learnt from him when working in asymptotics is the following: "the easiest your method is, the more useful your approximation will be". This paper briefly describe the way we have applied this maxima to several problems in asymptotics: (1) Approximation of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials, (2) a simplified version of the saddle point method and its applications to orthogonal polynomials and other special functions, (3) a generalization of Taylor expansions useful in asymptotics and (4) asymptotics of singular perturbation boundary value problems with discontinuous data. I introduce every one of these problems, the "state of the art" at the time we faced them and Nico's idea which has let us find an easy solution of the problem.

1. Introduction

Consider integrals of the form

$$F(z) \equiv \int_C f(z, w)dw,$$

where C is a path on the complex plane and z is a large real or complex variable. The main purpose of the theory of asymptotic expansions of integrals is the approximation of that integral for large z in terms of elementary functions of z or, at least, in terms of simpler functions than the function $F(z)$ itself.

There are several well established methods (Watson's Lemma, Laplace's method, Saddle points techniques, etc...) which face this problem. In general, these methods proceed as follows: reduce the integral to a standard form (by means of deformations of C, changes of variable,...), expand the integral at the relevant asymptotic point(s) of the integral (point(s) w at which, for large z, the integrand gives its mayor contribution to the integral), interchange sum and integral and prove the aysmptotic character of the resulting expansion. Usually, that reduction to a standard form translates into a very complicated form for the expansion. This complexity is more evident in the case of uniform asymptotic expansions.

In this paper we propose a different philosophy for tackling the problem of the asymptotic approximation of integrals. It just consists in skipping the hardest part of the classical methods: the reduction of the integral to a standard form. The philosophy is: identify the relevant asymptotic point(s) of the integral, expand the integrand at that point(s) in a suitable way and replace sum and integral. We show this idea in three specific and very important examples in applied mathematics: approximation of orthogonal polynomials in terms of orthogonal polynomials, approximation of integrals with saddle point(s) and approximations of solutions of singular perturbation problems. We show in these examples that the reduction to a standard form is not necessary for obtaining useful asymptotic expansions. Moreover, avoiding that reduction we obtain easier expansions than those obtained with standard methods; expansions which result more useful for applications.

2. Expansions of polynomials in terms of Hermite polynomials

It is well known that the Hermite polynomials

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

play a crucial role in certain limits of the classical orthogonal polynomials. For example, the Laguerre polynomials are defined by the generating function

$$(1-w)^{-\alpha-1}e^{-wx/(1-w)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, w^n, \quad \alpha, x \in \mathbb{C}, \quad |w| < 1. \tag{1}$$

They have the well-known limits

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n} L_n^{\alpha}(\alpha x) = \frac{(1-x)^n}{n!}, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} L_n^{\alpha}(x\sqrt{\alpha}+\alpha) = \frac{(-1)^n\, 2^{-n/2}}{n!}\, H_n(x/\sqrt{2}\,). \tag{3}$$

These limits give insight in the location of the zeros of the Laguerre polynomials for large values of the order α. The first limit shows that the zeros of the polynomials tend to α if the order α tends to infinity. The second limit is more interesting; it gives the relation with the Hermite polynomials if the order becomes large and the argument x is properly scaled.

In this paper we describe the asymptotics that governs the above limits with the Hermite polynomials. We consider large values of orders α and obtain asymptotic representations of Laguerre polynomials from which the above limits can be derived as special cases.

For large values of the degree n and fixed values of the order α the Laguerre polynomials are considered in [6] (see also [32]). In our present paper we keep n fixed, and we do not use the complicated analysis of uniform expansions. Our results are rather simple to derive, and can be considered as first approximations before considering uniform expansions.

We give the principles of the Hermite-type asymptotic approximations used in this paper and indicate how the same method can be used for many other classes of polynomials.

The Hermite polynomials follow from the generating function

$$e^{2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n, \quad x, w \in \mathbb{C},$$

which gives the Cauchy-type integral

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{2xz-z^2} z^{-n-1}\, dz,$$

where $\mathcal{C}$ is a circle around the origin and the integration is in positive direction.

Many special functions satisfy a relation in the form of a generating series, which usually has the form

$$F(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\, w^n, \tag{4}$$

F is a given function, which is analytic with respect to w in a domain that contains the origin, and p_n is independent of w. Examples are the generating functions given in (1).

The relation (4) gives for the special function p_n the Cauchy-type integral

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} F(x,w)\,\frac{dw}{w^{n+1}}, \tag{2.1}$$

where $\mathcal{C}$ is a circle around the origin inside the domain where F is analytic (as a function of w).

We write

$$F(x,w) = e^{Aw-Bw^2} f(x,w), \tag{2.2}$$

where A and B do not depend on w, and can be chosen arbitrarily. This gives

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} e^{Aw-Bw^2} f(x,w)\,\frac{dw}{w^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Because f is also analytic (as a function of w), we can expand

$$f(x,w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \tag{2.4}$$

and substitute this in (2.3). By (2.5), the result is the finite expansion

$$p_n(x) = z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k}\,\frac{H_{n-k}(\zeta)}{(n-k)!}, \quad z = \sqrt{B}, \quad \zeta = \frac{A}{2\sqrt{B}}, \tag{2.6}$$

because terms with $k > n$ do not contribute in the integral in (2.3). The quantities A and B may depend on x, and if B happens to be zero for a special x–value x_0, say, we write

$$p_n(x_0) = A^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{A^k\,(n-k)!}. \tag{2.7}$$

In the examples of the Laguerre polynomials and other polynomials (see [4]), the choice of A and B is based on our requirement that $c_1 = c_2 = 0$. This happens if we take

$$A = p_1(x), \quad B = \tfrac{1}{2}p_1^2(x) - p_2(x), \tag{2.8}$$

if we assume that $F(x,0) = p_0(x) = 1$ (which implies $c_0 = 1$). This is easily verified from (2.9) by writing

$$\ln[F(x,w)] = p_1(x)w + \left[p_2(x) - \tfrac{1}{2}p_1^2(x)\right] w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad w \to 0.$$

This choice of A and B makes the matching at the origin of the exponential function in (2.2) with $F(x,w)$ as best as possible.

We will show below for the case of the Laguerre polynomials that the finite sum in (2.6) gives the desired asymptotic representations, from which well-known limits can be derived. The special choice of A and B is crucial for obtaining asymptotic properties.

From

$$F(x,w) = (1+w)^{-\alpha-1} e^{wx/(1+w)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\, w^n, \tag{2.10}$$

with

$$p_n(x) = (-1)^n L_n^a(x). \tag{2.11}$$

We have

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x, \quad L_2^\alpha(x) = \tfrac{1}{2}[(\alpha+1)(\alpha+2) - 2(\alpha+2)x + x^2].$$

This gives

$$A = x - \alpha - 1, \quad B = x - \tfrac{1}{2}(\alpha+1).$$

Writing

$$f(x,w) = F(x,w)\, e^{-Aw+Bw^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \tag{5}$$

we obtain

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \tfrac{1}{3}(3x - \alpha - 1), \quad c_4 = \tfrac{1}{4}(-4x + \alpha + 1).$$

and the recursion relation

$$kc_k = -2(k-1)c_{k-1} - (k-2)c_{k-2} + (3x - \alpha - 1)c_{k-3} + (2x - \alpha - 1)c_{k-4}. \tag{6}$$

This relation follows from substituting the Maclaurin series of f into the differential equation

$$(1+w)^2 \frac{df}{dw} = [3x - \alpha - 1 + (2x - 1 - a)w]\, w^2 f.$$

It follows that

$$L_n^a(x) = (-1)^n z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \frac{H_{n-k}(\zeta)}{(n-k)!}, \tag{7}$$

where

$$z = \sqrt{x - (\alpha + 1)/2}, \quad \zeta = \frac{x - \alpha - 1}{2z}. \tag{8}$$

The representation in (7) holds for $n = 0, 1, 2, \ldots$ and all complex values of x and α. If $z = 0$ it is more convenient to write

$$L_n^\alpha(x_0) = x_0^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k c_k}{x_0^k (n-k)!},$$

where c_k follow from $L_n^\alpha(x)$ and (6), with $x = x_0 = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$.

The representation in (7) has an asymptotic character for large values of $|\alpha| + |x|$: the degree n should be fixed. To verify the asymptotic character, we write $\gamma = \alpha + 1, x = \gamma\xi$. We observe that the sequence $\{\Phi_k\}$ with $\Phi_k = c_k/z^k$ has the following asymptotic structure:

$$\Phi_k = \mathcal{O}\left[\gamma^{-\lfloor k/3 \rfloor - k/2}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

as $\gamma \to \infty$. The estimate (9) may be proved by induction by using the recursion (6). The successive Hermite polynomials $H_n(\zeta), H_{n-1}(\zeta), \ldots$, in (7) are of lower degree with respect to γ. This, together with (9), explains the asymptotic nature of the representation in (6) for large values of $|\alpha| + |x|$, with n fixed.

It is not difficult to verify that the limits given in (2) and (3) follow from (7).

Observe that our method is based on the availability of a generating function for the polynomials $p_n(x)$ and is different from the techniques described in [7], [8]. The method introduced in [7] is based on a connection problem and gives deeper information on the limit relations between classical discrete and classical continuous orthogonal polynomials in the Askey scheme. On the other hand, our method may be easily generalized to produce asymptotic expansions of polynomials situated at any level of the table in terms of polynomials located at lower levels [4]. Our method is also different from the sophisticated uniform methods considered for example in [12] or [30], where asymptotic expansions of the Meixner $M_n(nx, b, c)$ or Charlier $C_n^a(nx)$ polynomials respectively are given for large values of n and fixed a, b, c, x. In our method we keep the degree n fixed and let some parameter(s) of the polynomial go to infinity.

Most of the known limits between polynomials in the Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials [16] may be proved in this way. This method not only provide a limit but also an asymptotic expansion of polynomials in terms of polynomials. Asymptotic approximations of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials is described in [20], whereas the method to approximate orthogonal polynomials in terms of Laguerre polynomials is described in [23]. Based on those methods, asymptotic expansions of Laguerre and Jacobi polynomials in terms of Hermite polynomials are given in [20]. Asymptotic expansions of Meixner-Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials in terms of Laguerre polynomials are given in [23]. Moreover, asymptotic expansions in terms of Hermite polynomials of other polynomials not included in the Askey scheme, such as Tricomi-Carlitz and generalized Bernoulli, Euler, Bessel and Buchholz polynomials are given in [21] and [22]. Other expansions and limits in terms not only of Hermite and Laguerre, but also in terms of Charlier polynomials may be found in [4].

3. Two point Taylor expansions of analytic functions

In deriving uniform asymptotic expansions of a certain class of integrals one encounters the problem of expanding a function, that is analytic in some domain Ω of the complex plane, in two points. The first mention of the use of such expansions in asymptotics is given in [2], where Airy-type expansions are derived for integrals having two nearby (or coalescing) saddle points. This reference does not give further details about two-point Taylor expansions, because the coefficients in the Airy-type asymptotic expansion are derived in a different way.

To demonstrate the application in asymptotics we consider the integral

$$F_b(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\omega(\frac{1}{3}z^3 - b^2 z)} f(z)\, dz, \tag{10}$$

where ω is a large positive parameter and b is a parameter that may assume small values. The contour starts at $\infty e^{-i\pi/3}$ and terminates at $\infty e^{i\pi/3}$, and lies in a domain where the function f is analytic. In particular, f is analytic in a domain that contains the saddle points $\pm b$ of the exponent in the integrand. One method for obtaining an asymptotic expansion of $F_b(\omega)$ that holds uniformly for small values of b is based on expanding f at the two saddle points:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^2 - b^2)^n + z \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z^2 - b^2)^n, \tag{11}$$

and substitute this expansion into (10). When interchanging summation and integration, the result is a formal expansion in two series in terms of functions related with Airy functions.

In the next section we use expansions like (11) in order to derive convergent expansions for orthogonal polynomials that also have an asymptotic nature. The purpose of this section is to give details on the two-point Taylor expansion (11), in particular on the region of convergence and on representations in terms of Cauchy-type integrals of coefficients and remainders of these expansions. Some information on this type of expansions is also given in [31], p. 149, Exercise 24.

Without referring to applications in asymptotic analysis we include analogous properties of two-point Laurent expansions and of another related type, the two-point Taylor-Laurent expansion.

We consider the expansion (11) in a more symmetric form and give information on the coefficients and the remainder in the expansion.

3.1. Two-point Taylor expansions

Theorem 3.1. *Let $f(z)$ be an analytic function on an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ and $z_1, z_2 \in \Omega$ with $z_1 \neq z_2$. Then, $f(z)$ admits the two-point Taylor expansion*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[a_n(z_1,z_2)(z-z_1) + a_n(z_2,z_1)(z-z_2)\right](z-z_1)^n(z-z_2)^n + r_N(z_1,z_2;z), \tag{12}$$

where the coefficients $a_n(z_1,z_2)$ and $a_n(z_2,z_1)$ of the expansion are given by the Cauchy integral

$$a_n(z_1,z_2) \equiv \frac{1}{2\pi i(z_2-z_1)} \int_C \frac{f(w)\,dw}{(w-z_1)^n(w-z_2)^{n+1}}. \tag{13}$$

The remainder term $r_N(z_1,z_2;z)$ is given by the Cauchy integral

$$r_N(z_1,z_2;z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)\,dw}{(w-z_1)^N(w-z_2)^N(w-z)}(z-z_1)^N(z-z_2)^N. \tag{14}$$

The contour of integration C is a simple closed loop which encircles the points z_1 and z_2 (for a_n) and z, z_1 and z_2 (for r_N) in the counterclockwise direction and is contained in Ω.

The expansion (12) is convergent for z inside the Cassini oval

$$O_{z_1,z_2} \equiv \{z \in \Omega,\ \ |(z-z_1)(z-z_2)| < r\}$$

where

$$r \equiv \operatorname{Inf}_{w\in\mathbb{C}\setminus\Omega} \{|(w-z_1)(w-z_2)|\}.$$

In particular, if $f(z)$ is an entire function ($\Omega = \mathbb{C}$), then the expansion (12) converges $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Proof. By Cauchy's theorem,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)\,dw}{w-z}, \tag{15}$$

where $\mathcal{C}$ is the contour defined above. Now we write

$$\frac{1}{w-z} = \frac{z+w-z_1-z_2}{(w-z_1)(w-z_2)}\frac{1}{1-u}. \tag{16}$$

where

$$u \equiv \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(w-z_1)(w-z_2)}. \tag{17}$$

Now we introduce the expansion

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{N-1} u^n + \frac{u^N}{1-u} \tag{18}$$

in (16) and this in (15). After straightforward calculations we obtain (12)-(14).

For any $z \in O_{z_1,z_2}$, we can take a contour $\mathcal{C}$ in Ω such that $|(z-z_1)(z-z_2)| < |(w-z_1)(w-z_2)|\ \forall\ w \in \mathcal{C}$. In this contour $|f(w)|$ is bounded by some constant C: $|f(w)| \leq C$. Introducing these two bounds in (14) we see that $\lim_{N\to\infty} r_N(z_1, z_2; z) = 0$ and the proof follows. □

Definition (13) is not appropriate for numerical computations. A more practical formula to compute the coefficients of the above two-point Taylor expansion is given in the following proposition.

Proposition 3.2. *Coefficients $a_n(z_1, z_2)$ in the expansion (12) are also given by the formulas:*

$$a_0(z_1, z_2) = \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} \tag{19}$$

and, for $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$a_n(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{n+1} n f^{(n-k)}(z_2) + (-1)^k k f^{(n-k)}(z_1)}{n!(z_1-z_2)^{n+k+1}}. \tag{20}$$

Proof. We deform the contour of integration $\mathcal{C}$ in equation (13) to any contour of the form $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ also contained in Ω, where $\mathcal{C}_1$ ($\mathcal{C}_2$) is a simple closed loop which encircles the point z_1 (z_2) in the counterclockwise direction and does not contain the point z_2 (z_1) inside. Then,

$$\begin{aligned} a_n(z_1, z_2) =& \frac{1}{2\pi i(z_2-z_1)}\left\{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_2)^{n+1}}\frac{dw}{(w-z_1)^n} + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_1)^n}\frac{dw}{(w-z_2)^{n+1}}\right\} = \\ & \frac{1}{(z_2-z_1)}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}\left.\frac{f(w)}{(w-z_2)^{n+1}}\right|_{w=z_1} + \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dw^n}\left.\frac{f(w)}{(w-z_1)^n}\right|_{w=z_2}\right\}. \end{aligned}$$

From here, equations (19)-(20) follows after straightforward computations. □

3.2. Two-point Laurent expansions

In the standard theory for Taylor and Laurent expansions much analogy exists between the two types of expansions. For two-point expansions, we have a similar agreement in the representations of coefficients and remainders.

Theorem 3.3. *Let Ω_0 and Ω be closed and open sets, respectively, of the complex plane, and $\Omega_0 \subset \Omega \subset \mathbb{C}$. Let $f(z)$ be an analytic function on $\Omega \setminus \Omega_0$ and z_1, $z_2 \in \Omega_0$ with $z_1 \neq z_2$. Then, for any $z \in \Omega \setminus \Omega_0$, $f(z)$ admits the two-point Laurent expansion*

$$\begin{aligned} f(z) = &\sum_{n=0}^{N-1} \left[b_n(z_1,z_2)(z-z_1) + b_n(z_2,z_1)(z-z_2)\right](z-z_1)^n(z-z_2)^n + \\ &\sum_{n=0}^{N-1} \left[c_n(z_1,z_2)(z-z_1) + c_n(z_2,z_1)(z-z_2)\right](z-z_1)^{-n-1}(z-z_2)^{-n-1} + \\ &r_N(z_1,z_2;z), \end{aligned} \tag{21}$$

where the coefficients $b_n(z_1,z_2)$, $b_n(z_2,z_1)$, $c_n(z_1,z_2)$ and $c_n(z_2,z_1)$ of the expansion are given, respectively, by the Cauchy integrals

$$b_n(z_1,z_2) \equiv \frac{1}{2\pi i(z_2-z_1)} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_1)^n(w-z_2)^{n+1}} \tag{22}$$

and

$$c_n(z_1,z_2) \equiv \frac{1}{2\pi i(z_2-z_1)} \int_{\Gamma_2} (w-z_1)^{n+1}(w-z_2)^n f(w)\,dw. \tag{23}$$

The remainder term $r_N(z_1,z_2;z)$ is given by the Cauchy integrals

$$\begin{aligned} r_N(z_1,z_2;z) \equiv &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_1)^N(w-z_2)^N(w-z)}(z-z_1)^N(z-z_2)^N - \\ &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(w-z_1)^N(w-z_2)^N f(w)dw}{w-z} \frac{1}{(z-z_1)^N(z-z_2)^N}. \end{aligned} \tag{24}$$

In these integrals, the contours of integration Γ_1 and Γ_2 are simple closed loops contained in $\Omega \setminus \Omega_0$ which encircle the points z_1 and z_2 in the counterclockwise direction. Moreover, Γ_2 does not contain the point z inside, whereas Γ_1 encircles Γ_2 and the point z.

The expansion (21) is convergent for z inside the Cassini annulus

$$A_{z_1,z_2} \equiv \{z \in \Omega \setminus \Omega_0,\ \ r_2 < |(z-z_1)(z-z_2)| < r_1\} \tag{25}$$

where

$$r_1 \equiv \text{Inf}_{w\in \mathbb{C}\setminus\Omega}\left\{|(w-z_1)(w-z_2)|\right\}, \qquad r_2 \equiv \text{Sup}_{w\in\Omega_0}\left\{|(w-z_1)(w-z_2)|\right\}.$$

Proof. By Cauchy's theorem,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)\,dw}{w-z}, \tag{26}$$

where Γ_1 and Γ_2 are the contours defined above. We substitute (16)-(17) into the first integral above and

$$\frac{1}{w-z} = \frac{z_1+z_2-z-w}{(z-z_1)(z-z_2)}\frac{1}{1-u}, \qquad\qquad u \equiv \frac{(w-z_1)(w-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

into the second one. Now we introduce the expansion (18) of the factor $(1-u)^{-1}$ in both integrals in (26). After straightforward calculations we obtain (21)-(24).

For any z verifying (25), we can take simple closed loops Γ_1 and Γ_2 in $\Omega\setminus\Omega_0$ such that $|(z-z_1)(z-z_2)| < |(w-z_1)(w-z_2)|$ $\forall\ w \in \Gamma_1$ and $|(z-z_1)(z-z_2)| > |(w-z_1)(w-z_2)|$ $\forall\ w \in \Gamma_2$. On these contours $|f(w)|$ is bounded by some constant C: $|f(w)| \leq C$. Introducing these bounds in (24) we see that $\lim_{N\to\infty} r_N(z_1, z_2; z) = 0$ and the proof follows. □

3.3. Two-point Taylor-Laurent expansions

Theorem 3.4. *Let Ω_0 and Ω be closed and open sets, respectively, of the complex plane, and $\Omega_0 \subset \Omega \subset \mathbb{C}$. Let $f(z)$ be an analytic function on $\Omega\setminus\Omega_0$, $z_1 \in \Omega_0$ and $z_2 \in \Omega\setminus\Omega_0$. Then, for $z \in \Omega\setminus\Omega_0$, $f(z)$ admits the Taylor-Laurent expansion*

$$\begin{aligned} f(z) = &\sum_{n=0}^{N-1}\left[d_n(z_1,z_2)(z-z_1) + d_n(z_2,z_1)(z-z_2)\right](z-z_1)^n(z-z_2)^n + \\ &\sum_{n=0}^{N-1} e_n(z_1,z_2)(z-z_2)^n(z-z_1)^{-n-1} + r_N(z_1,z_2;z), \end{aligned} \tag{27}$$

where the coefficients $d_n(z_1,z_2)$, $d_n(z_2,z_1)$ and $e_n(z_1,z_2)$ of the expansion are given by the Cauchy integrals

$$d_n(z_1,z_2) \equiv \frac{1}{2\pi i(z_2-z_1)}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_1)^n(w-z_2)^{n+1}} \tag{28}$$

and

$$c_n(z_1, z_2) \equiv \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(w - z_1)^n}{(w - z_2)^{n+1}} f(w)\, dw. \tag{29}$$

The remainder term $r_N(z_1, z_2; z)$ is given by the Cauchy integrals

$$\begin{aligned} r_N(z_1, z_2; z) \equiv & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)\, dw}{(w - z_1)^N (w - z_2)^N (w - z)} (z - z_1)^N (z - z_2)^N - \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(w - z_1)^N f(w)\, dw}{(w - z_2)^N (w - z)} \frac{(z - z_2)^N}{(z - z_1)^N}. \end{aligned} \tag{30}$$

In these integrals, the contours of integration Γ_1 and Γ_2 are simple closed loops contained in $\Omega \setminus \Omega_0$ which encircle Ω_0 in the counterclockwise direction. Moreover, Γ_2 does not contain the points z and z_2 inside, whereas Γ_1 encircles Γ_2 and the points z and z_2.

The expansion (27) is convergent in the region

$$D_{z_1, z_2} \equiv \{z \in \Omega \setminus \Omega_0, \ |(z - z_1)(z - z_2)| < r_1 \ \text{ and } \ |z - z_2| < r_2 |z - z_1|\} \tag{31}$$

where $r_1 \equiv Inf_{w \in \mathcal{C} \setminus \Omega} \{|(w - z_1)(w - z_2)|\}$ and $r_2 \equiv Inf_{w \in \Omega_0} \left\{|(w - z_2)(w - z_1)^{-1}|\right\}$.

Proof. By Cauchy's theorem,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)\, dw}{w - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)\, dw}{w - z}, \tag{32}$$

where Γ_1 and Γ_2 are the contours defined above. We substitute (16)-(17) into the first integral above and

$$\frac{1}{w - z} = \frac{z_2 - z_1}{(z - z_1)(w - z_2)} \frac{1}{1 - u}, \qquad u \equiv \frac{(w - z_1)(z - z_2)}{(z - z_1)(w - z_2)} \tag{33}$$

into the second one. Now we introduce the expansion (18) of the factor $(1 - u)^{-1}$ in both integrals in (32). After straightforward calculations we obtain (27)-(30).

For any z verifying (31), we can take simple closed loops Γ_1 and Γ_2 in $\Omega \setminus \Omega_0$ such that $|(z - z_1)(z - z_2)| < |(w - z_1)(w - z_2)| \ \forall\, w \in \Gamma_1$ and $|(z - z_1)(w - z_2)| > |(w - z_1)(z - z_2)|$ $\forall\, w \in \Gamma_2$. On these contours $|f(w)|$ is bounded by some constant C: $|f(w)| \leq C$. Introducing these bounds in (30) we see that $\lim_{N \to \infty} r_N(z_1, z_2; z) = 0$ and the proof follows. $\square$

More details on these expansions may be found in [24]. The generalization of these type of expansion to several points may be found in [26].

4. A simplified version of the saddle point method

In the previous section we have studied the expansion of an analytic function at two finite points in the complex plane. The main motivation for that paper was to obtain the coefficients of asymptotic expansions of certain integrals. In the present section we give an example in which the expansion of an integral at two saddle points yields a convergent expansion that has an asymptotic property for large values of a parameter.

In the well-known methods for deriving asymptotic expansions of integrals a basic step is transforming the integral into a standard form, and the transformation usually gives a new integral in which the integrand contains implicitly defined functions that are difficult to handle. In the method of this section we avoid a transformation and, in addition, we derive convergent expansions.

We start with a simple example in which only one saddle point occurs, and in which a function is expanded at that saddle point. This gives an expansion for the Charlier polynomials.

In a second example (Laguerre polynomials) we take into account two saddle points, and again a convergent expansion can be constructed with the desired property. The approximants belong to the same class of polynomials as the original ones, but they are of a simpler type. The asymptotic property follows from recursion relations for functions appearing in the expansions. The convergence follows from the fact that an integral along a finite contour is expanded inside a domain of uniform convergence.

In the examples given in this section the contour integrals are based on Cauchy-type integrals obtained from generating functions. When the contour is finite a proof of the convergence is usually rather easy. For more general finite contours and more general integrals we expect that the method can be applied as well. For example, we can apply the method to the Gauss hypergeometric function and the incomplete gamma functions, with different integral representations [5].

Also, the methods of this paper can be generalized by considering Taylor expansions at more than two points given in [26].

Throughout this section we are concerned with finding asymptotic expansions of integrals of the form

$$F(n) \equiv \int_\Gamma f(w) e^{n g(w)} \frac{dw}{w^{n+1}}, \tag{34}$$

where $f(w)$ and $g(w)$ are analytic in a domain Ω of the complex plane that contains the origin; Γ is a circle with center at the origin and contained in Ω; n is a large positive integer. We assume, as it usually happens to be the case, that the asymptotic behavior of the integral $F(n)$ for large n is determined by contributions from the saddle points of $\varphi(w) = g(w) - \ln w$ [[32], Chap. 2, §4].

The standard saddle point method consists of

(i) deforming the contour of integration Γ into a new path that crosses one or some of the saddle points of $\varphi(w)$;

(ii) a suitable change of the variable of integration;

(iii) application of Watson's lemma or Laplace's method.

Instead of applying the standard saddle point method, we will proceed in a simpler way: just substitute a power series expansion at one or more saddle points of the function $f(w)$ in (34). If there is just one saddle point w_0, then that power series is its Taylor expansion at w_0:

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(w_0)}{k!}(w - w_0)^k, \tag{35}$$

which is uniformly convergent for w in a disk $D_r(w_0) \equiv \{w \in \Omega, \ |w - w_0| < r\}$ with center at w_0 and radius $r = \mathrm{Inf}_{w\in C\setminus\Omega}|w - w_0|$. If there are two saddle points w_1 and w_2, then that power series is its two-point Taylor series at w_1 and w_2:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(w - w_1) + a'_n(w - w_2)]\,(w - w_1)^n(w - w_2)^n, \tag{36}$$

where a_n and a'_n are given in section 3.

The expansion (36) is uniformly convergent for w in a Cassini oval

$$O_r(w_1, w_2) \equiv \{w \in \Omega, \ |w - w_1||w - w_2| < r\}$$

with foci at w_1 and w_2 and "radius" $r = \mathrm{Inf}_{w\in C\setminus\Omega}\{|w - w_1||w - w_2|\}$.

If we substitute now (35) or (36) in (34) and interchange summation and integration we obtain an expansion of $F(n)$. This is proved in the following two propositions.

Proposition 4.1. *Let the right-hand side of (35) converge uniformly to $f(w)$ for $w \in D_r(w_0)$ with $|w_0| < r$, then*

$$F(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(w_0)}{k!} \int_\Gamma (w - w_0)^k e^{n\varphi(w)} \frac{dw}{w}. \tag{37}$$

Proof. If $|w_0| < r$, then $0 \in D_r(w_0)$. Then we can choose a small enough circle Γ in (34) such that $\Gamma \in D_r(w_0)$. Therefore, expansion (35) is uniformly convergent for $w \in \Gamma$. Introducing (35) in (34) and interchanging summation and integration we obtain (37). □

Proposition 4.2. *Let the right-hand side of (36) converge uniformly to $f(w)$ for $w \in O_r(w_1, w_2)$ with $|w_1 w_2| < r$, then*

$$
\begin{aligned}
F(n) = & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_\Gamma (w - w_1)^{k+1} (w - w_2)^k e^{n\phi(w)} \frac{dw}{w} + \\
& \sum_{k=0}^{\infty} a'_k \int_\Gamma (w - w_1)^k (w - w_2)^{k+1} e^{n\phi(w)} \frac{dw}{w}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Proof. The proof is similar to that of Proposition 2.1. □

In the remaining part of this section we apply Proposition 4.2 to the specific example of integrals $F(n)$ representing Laguerre polynomials $L_n^\alpha(nx)$. In this way, we obtain and expansion of these polynomials for large values of n. We prove that the corresponding expansion (38) is convergent in a certain region of the variable x and that in fact, they have an asymptotic nature for large n, uniformly with respect to x in certain domains of the region of convergence.

The Laguerre polynomials can be defined by the generating function

$$
(1-t)^{-\alpha-1} e^{-tx/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad \alpha, x \in \mathbb{C}, \quad |t| < 1. \tag{39}
$$

and have the representation

$$
L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \tag{40}
$$

For deriving the asymptotic expansion we use the Cauchy integral that follows from (39):

$$
L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{xw/(w-1)} (1-w)^{-\alpha-1} \frac{dw}{w^{n+1}}, \tag{41}
$$

where Γ is a circle around the origin with radius < 1. The many-valued functions $(1-w)^\mu$ appearing here and in the theorem assume the principal branch that is equal to 1 at $w = 0$

The asymptotics for large n, fixed α, is considered in [6]. For real x two uniform expansions are given, one involving the J−Bessel function for x in an interval that contains the origin, and one in terms of the Airy function for x in an interval containing the transition near the largest zero of $L_n^\alpha(x)$. In this section we give an asymptotic expansion of $L_n^\alpha(nx)$ in terms of $L_n^{1/2}(nx)$, which in fact is an Hermite polynomial. We consider $x > 1$ and for these values the expansion is convergent and is in particular of interest because this is the interval that contains the large zeros and the transition point at $x = 4$.

In section 2 we have given an asymptotic representation for large α and n fixed in terms of Hermite polynomials. The approach in this section is quite different because we take α fixed and n large.

From (41) we obtain

$$L_n^{(\alpha)}(nx) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\frac{e^{n\varphi(x,w)}}{(1-w)^{3/2}}\frac{dw}{w}, \tag{42}$$

where

$$\varphi(x,w) \equiv \frac{xw}{w-1} - \log w, \quad f(w) \equiv (1-w)^{1/2-\alpha}. \tag{43}$$

The function $\varphi(x,w)$ has two conjugate saddle points:

$$w^\pm = 1 - \frac{x}{2} \pm \frac{i}{2}\xi, \quad \xi = \sqrt{x(4-x)}. \tag{44}$$

The square root defining ξ is positive for $0 < x < 4$; for $x \geq 4$ we define $\xi = i\sqrt{x(x-4)}$, again with positive square root. In the expansion of the Laguerre polynomials we allow that the saddle points coalesce.

The function $f(w)$ of (42) is analytic in $\Omega = \mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ and we can expand $f(w)$ in in a two-point Taylor expansion at the two saddle points $w^\pm$, using a slightly different form of (36),

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty}[A_k + B_k w](w-w^+)^k(w-w^-)^k. \tag{45}$$

After substituting expansion (45) in (42) and interchanging summation and integration we obtain

$$L_n^{(\alpha)}(xn) = \sum_{k=0}^{\infty}[A_k\Phi_k(x,n) + B_k\Psi_k(x,n)], \tag{46}$$

where

$$\Phi_k(x,n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (w-w^+)^k(w-w^-)^k\frac{e^{n\varphi(x,w)}}{(1-w)^{3/2}}\frac{dw}{w} \tag{47}$$

and

$$\Psi_k(x,n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (w-w^+)^k(w-w^-)^k\frac{e^{n\varphi(x,w)}}{(1-w)^{3/2}}dw. \tag{48}$$

We have

$$\Phi_0(x,n) \equiv L_n^{(1/2)}(nx) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n+1}\sqrt{nx}} H_{2n+1}\left(\sqrt{nx}\right),$$
$$\Psi_0(x,n) \equiv L_{n-1}^{(1/2)}(nx) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,2^{2n-1}\sqrt{nx}} H_{2n-1}\left(\sqrt{nx}\right), \tag{49}$$

d, for $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\Phi_k(x,n) \equiv \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} L_{n-k+j}^{(1/2-2j)}(nx), \quad \Psi_k(x,n) \equiv \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} L_{n-k+j-1}^{(1/2-2j)}(nx). \tag{50}$$

ie sequences $\{\Phi_k(x,n)\}$ and $\{\Psi_k(x,n)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, satisfy the recurrences

$$\Phi_k = \frac{1}{n - 2k + 3/2} \{a_1 \Phi_{k-1} + a_2 \Phi_{k-2} + b_1 \Psi_{k-1} + b_2 \Psi_{k-2}\}, \tag{51}$$

$$a_1 = (k-1)(x^2 - 2x - 2) - \frac{1}{2}, \quad a_2 = (k-1)x(2-x),$$
$$b_1 = (k-1)(2-3x) + \frac{1-x}{2}, \quad b_2 = (k-1)x(4x - x^2 - 2),$$

$$\Psi_k = \frac{1}{n - 2k + 1/2} \{c_0 \Phi_k + c_1 \Phi_{k-1} + c_2 \Phi_{k-2} + d_1 \Psi_{k-1} + d_2 \Psi_{k-2},\}, \tag{52}$$

$$c_0 = (2 - 3k)x + 2(k-1) + \frac{1-x}{2},$$
$$c_1 = (1-k)x^3 + 4(k-1)x^2 + kx + 2(1-k) + \frac{x-1}{2}, \quad c_2 = -b_2,$$
$$d_1 = (4k-3)x^2 + 2(4-5k)x + 2(k-1) + \frac{x^2 - 3x + 1}{2},$$
$$d_2 = (k-1)x(x^3 - 6x^2 + 9x - 2).$$

verify the recursions (51) and (52) we write

$$\Phi_k(x,n) = -\frac{1}{2\pi i\, n} \int_C (w - w^+)^{k-1} (w - w^-)^{k-1} \sqrt{1-w}\, \frac{\partial e^{n\varphi(x,w)}}{\partial w} dw, \tag{53}$$

$$\Psi_k(x,n) = -\frac{1}{2\pi i\, n} \int_C (w - w^+)^{k-1} (w - w^-)^{k-1} w \sqrt{1-w}\, \frac{\partial e^{n\varphi(x,w)}}{\partial w} dw, \tag{54}$$

$$\Psi_{k-1}(x,n) - w^+ \Phi_{k-1}(x,n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (w - w^+)^k (w - w^-)^{k-1} \frac{e^{n\varphi(x,w)}}{(1-w)^{3/2}} \frac{dw}{w} \tag{55}$$

d

$$\Psi_{k-1}(x,n) - w^- \Phi_{k-1}(x,n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (w - w^+)^{k-1} (w - w^-)^k \frac{e^{n\varphi(x,w)}}{(1-w)^{3/2}} \frac{dw}{w}. \tag{56}$$

Integrating by parts in (53) and (54), using (55) and (56) and after straightforward manipulations we obtain (51) and (52). Formulas (49)and (50) follow from (47) and (48) after simple calculations.

Theorem 4.5. *Expansion (46) is convergent, uniformly for $\alpha \in \mathbb{C}$ in compact sets, and $x \geq 1+\delta > 1$. Moreover, $\{\Phi_k(x,n)\}$ and $\{\Psi_k(x,n)\}$ are asymptotic sequences for large n:*

$$\begin{aligned} \Phi_k(x,n) =& \mathcal{O}\left(n^{-\lfloor (k+1)/2 \rfloor}\right) \left[|\Phi_0(x,n)| + |\Psi_0(x,n)|\right], \\ \Psi_k(x,n) =& \mathcal{O}\left(n^{-\lfloor (k+1)/2 \rfloor}\right) \left[|\Phi_0(x,n)| + |\Psi_0(x,n)|\right], \end{aligned} \tag{57}$$

as $n \to \infty$ and $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Proof. We apply Proposition 2.2. Expansion (45) is uniformly convergent for w inside the Cassini oval with foci w^+ and w^- and "radius" $r = |w_1 - w^+||w_1 - w^-|$, where $w_1 = 1$ is the singular point of f. Using (44) it follows that $r = x$. The points w are inside the Cassini oval if they satisfy $|w - w^+||w - w^-| < r = x$. Because $w^+ w^- = 1$, the origin $w = 0$ is inside the oval only if $x > 1$. Hence, the contour Γ of (42) can be taken completely inside the oval only if $x > 1$ (see also Figure 4.2). This proves the convergence of (46) for $x > 1$. The asymptotic behavior in (57) follows from (49) and the recursions (51) and (52). More detailed asymptotic information can be obtained from the integrals in (47) and (48). ◻

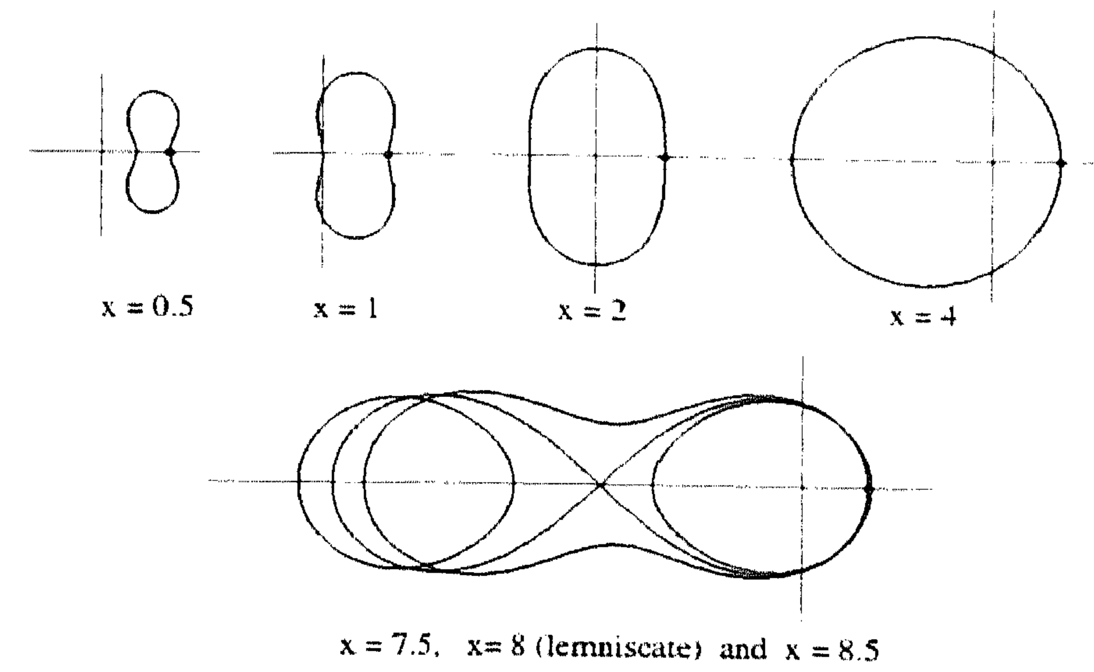


Figure 4.2. *Cassini ovals for the expansion (45) for several values of x. For w inside the ovals, the expansion is convergent. For $0 < x < 1$ the origin is outside the oval; for $x = 4$ it is a circle, for $x = 8$ a lemniscate. For $x > 8$ the oval splits up into two parts. All ovals go through the point $w = 1$, a singular point of $f(w)$.*

(a) (b)

Figure 4.3. *Numerical experiments on the approximation of Theorem 4.2 for large n and $x \in (0, 4]$. Continuous lines represent the Laguerre polynomial $L_n^{(4)}(nx)$ for (a) $n = 10$ and (b) $n = 20$. Dashed lines represent the first order approximation given by $A_0\Phi_0(x, n) + B_0\Psi_0(x, n)$. Both graphics are cut for extreme values of the polynomials.*

Remark 4.6. The expansion in (46) has a meaning for all complex x, and has for all fixed x an asymptotic meaning. The expansion is uniformly convergent for $|x| \geq 1 + \delta > 1$.

Other expansions of this type for Charlier, Jacobi, Bernoulli and Euler polynomials may be found in [22] and [25].

5. Asymptotics of singular perturbation problems

Mathematically speaking, a singularly perturbed convection-diffusion problem is a boundary value problem of second order in which the coefficients of the second order derivatives are small. In this section we focus our attention on two-dimensional linear elliptic problems of the form: find a function $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \bigcap \mathcal{D}^2(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta u + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = g(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P)$$

where ϵ is a small parameter and g represents the Dirichlet boundary conditions of the problem.

In order to analyze boundary layers originated by discontinuous boundary data, it is interesting to find the exact solution of a problem with a discontinuity in the boundary condition. Hedstrom and Osterheld [10] studied the problem $\epsilon\Delta u - \partial_y u = 0$ on the positive quarter plane with boundary conditions $u(x,0) = 0$ and $u(0,y) = 1$. They obtained the first two terms of the asymptotic expansion of u for $\epsilon \to 0$ from a Fourier integral representation of u. The first term of this expansion is an error function. A more detailed investigation on this subject has been developed by Temme [27]-[20]. The problem $\epsilon\Delta u - \partial_y u = 0$ on the positive quarter plane with boundary conditions $u(x,0) = 0$ and $u(0,y) = \phi(y)$ is analyzed in [27]. An integral representation for u is obtained from the associated Helmholtz equation. A complete asymptotic expansion of u for $\epsilon \to 0$ is derived from this integral representation for some particular cases of boundary conditions $\phi(y)$. The same problem, but in a generic sector, is considered in [21], where an integral representation for u is obtained from an integral representation of the solution of the associated Helmholtz equation. Different asymptotic expansions as $\epsilon \to 0$ are obtained depending on the angle of the sector and again the error function plays an important role in the analysis. A similar problem defined in the interior of a circle is analyzed in [20].

The role of the error function in problems with discontinuous boundary data has also been pointed out in [14], [15]. The exact solution of the problem $u_t - u_{xx} = 0$ in the quarter plane $x > 0$, $t > 0$, with initial condition $u(x,0) = c$ and boundary condition $u(0,t) = 0$ is an error function [[14], sec. 1.4.2]. The solution of the problem $\epsilon \triangle u = u_y$ in the unit square with discontinuous boundary data is approximated by error functions [[14], sec. 8.3.3]. The same conclusion is obtained in [[15], sec. 3.1] for a general elliptic equation with constant coefficients defined on a more general domain. Apart from discontinuities in the boundary condition, another source of error functions in the dominant part of the solution of convection-diffusion problems is a change of sign in the convection vector [[13], sec. 6.2.3].

In this section we try to shed light on the influence that the discontinuities of the boundary conditions have on the boundary or interior layers. For that purpose, we consider a more general problem than that considered in [21]. As in the references mentioned, the starting point is an integral representation for the solution. From this integral, we derive complete asymptotic expansions for the solution in the singular limit $\epsilon \longrightarrow 0^+$.

The investigation contained in this section is based on the ideas introduced by Temme in [28].

We use polar coordinates to describe an infinite sector $\bar{\Omega}$ of amplitude α in the plane with its corner point removed: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $(r,\phi) \in \bar{\Omega} \equiv (0,\infty) \times [0,\alpha]$. Its interior set is $\Omega \equiv (0,\infty) \times (0,\alpha)$ (see Fig. 5.1(a)).

We consider a singularly perturbed convection-diffusion problem defined on this sector with an "infinite source of contamination" located at one side of the sector:

$$\left\{\begin{array}{lr} U \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \bigcap \mathcal{D}^2(\Omega) \quad \text{and} & U \text{ bounded at } r = 0, \\ -\epsilon \triangle U + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} U = 0 & \text{in } \Omega, \\ U(r,0) = 0 \quad \text{and} \quad U(r,\alpha) = 1 & \text{for } r > 0, \end{array}\right. \tag{58}$$

where $\overrightarrow{v} \equiv (\cos\beta, \sin\beta)$ is a constant vector, $\epsilon > 0$ is a small parameter, $0 \le \beta < 2\pi$ and $0 < \alpha < 2\pi$. (Observe the discontinuous Dirichlet condition at the corner $r = 0$.) This problem is analized in [28] for the particular case $\beta = 0$.

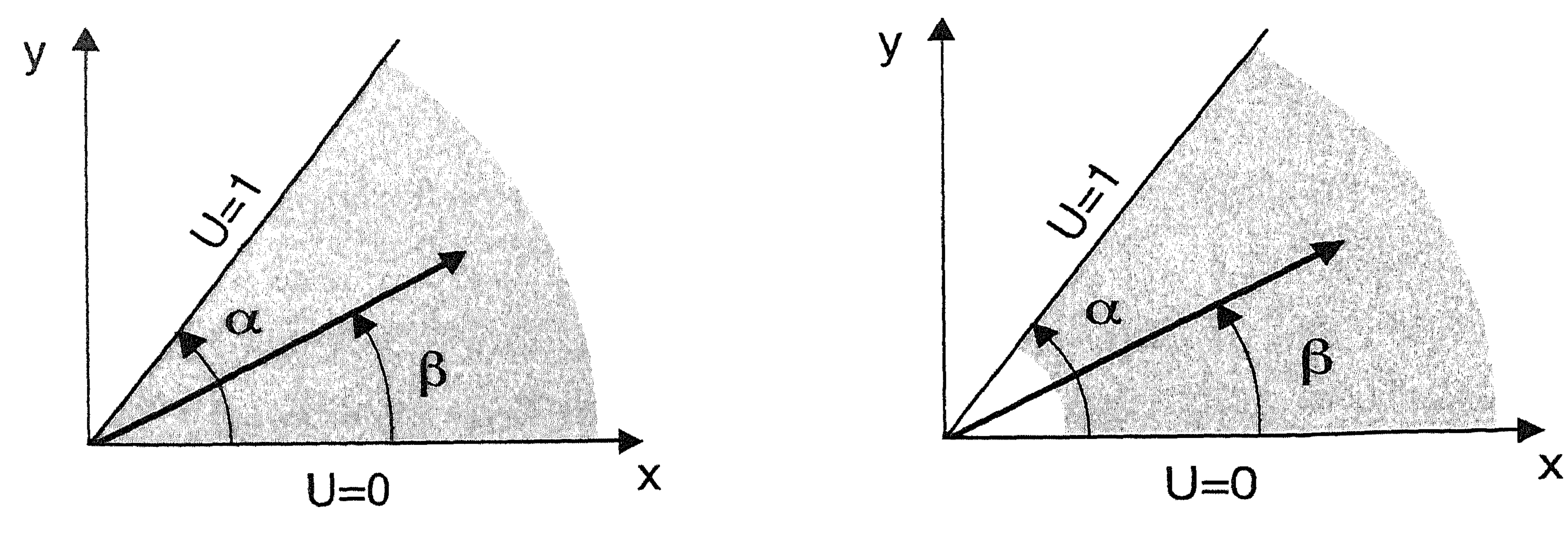
After the change of the unknown $U(r,\phi) = 1 - F(r,\phi)\exp(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}/(2\epsilon))$, where $\overrightarrow{r} \equiv (r\cos\phi, r\sin\phi)$, problem (58) is transformed into the Yukawa equation for $F(r,\phi)$:

$$\left\{\begin{array}{lr} F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \bigcap \mathcal{D}^2(\Omega) \quad \text{and} & F \text{ bounded at } r = 0, \\ \triangle F - w^2 F = 0 & \text{in } \Omega \\ F(r,0) = e^{-wr\cos\beta} \text{ and } F(r,\alpha) = 0 & \text{for } r > 0, \end{array}\right. \tag{59}$$

where $w \equiv 1/(2\epsilon)$.

We will obtain a solution of problem (59) and therefore of problem (58) in Proposition 5.3, but this solution may not be unique unless we impose a convenient condition upon $U(r,\phi)$ (or upon $F(r,\phi)$) concerning its growth at infinity. Then, we add a radiation condition to (58) and consider the following problem:

$$\left\{\begin{array}{lr} U \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \bigcap \mathcal{D}^2(\Omega) \quad \text{and} & U \text{ bounded at } r = 0, \\ -\epsilon \triangle U + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} U = 0 & \text{in } \Omega, \\ U(r,0) = 0 \quad \text{and} \quad U(r,\alpha) = 1 & \text{for } r > 0, \\ U(r,\phi) = \delta_{\phi,\pi+\beta} + o\left(\dfrac{e^{wr(1+\cos(\beta-\phi))}}{\sqrt{wr}}\right) & \text{as } r \to \infty \quad \text{and} \quad \phi \in (0,\alpha). \end{array}\right. \tag{P}$$



(a) (b)

Figure 5.1. (a) Domain $\bar{\Omega} \equiv (0, \infty) \times [0, \alpha]$ of problem (P). (b) Indented region $\Omega^* \equiv (r_0, \infty) \times (0, \alpha)$ in theorem 4.1.

In what follows, $\chi_A(x)$ represents the characteristic function of the set A and $\delta_{a,b}$ is the Kronecker delta:

$$\chi_A(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}, \qquad \delta_{a,b} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } \quad a = b \\ 0 & \text{if } \quad a \neq b \end{cases}.$$

It is worth to note that problem (P) has at most one solution [19].

In order to construct the unique solution of problem (P) we will need the following function defined by means of an integral:

Definition 5.1. *For $(r, \phi) \in \bar{\Omega}$, $\beta \in [0, 2\pi)$ and $\alpha \in (0, 2\pi)$, we define the function*

$$I_{\alpha,\beta}(r, \phi) \equiv \frac{e^{wr\cos(\beta-\phi)}}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wr\cosh t} \frac{\sin(\mu\phi)}{\cosh[\mu(t - i\beta)] - \cos(\mu\phi)}\, dt \tag{60}$$

where $\mu \equiv \dfrac{\pi}{\alpha}$. It must be implicitly understood in the above formula that, when $\phi = \pm\beta + 2k\alpha$ with $k \in \mathbb{Z}$, the following Cauchy principal value must be taken on the integral:

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(r, \pm\beta + 2k\alpha) \equiv \pm & \frac{e^{wr\cos(\beta\mp\beta-2k\alpha)}}{2\alpha} \\ & \times \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right\} \frac{\sin(\mu\beta) e^{-wr\cosh t}}{\cosh[\mu(t - i\beta)] - \cos(\mu\beta)}\, dt. \end{aligned} \tag{61}$$

In the following lemma proved in [19] we construct an explicit solution of problem (59) as a generalization of the solution derived in [21] for $\beta = \pi/2$. From this solution we will obtain the unique solution of problem (P) in proposition 5.3.

Lemma 5.2. *Let $\mu = \pi/\alpha$. The function*

$$F(r,\phi) = \begin{cases} e^{-wr\cos\beta} & \text{if} \quad \phi = 0 \\ \dfrac{1}{2\alpha}\displaystyle\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-wr\cosh t}\,\frac{\sin(\mu\phi)}{\cosh[\mu(t-i\beta)] - \cos(\mu\phi)}\,dt & \text{if} \quad \phi \in (0,\alpha] \end{cases} \tag{62}$$

is a solution of problem (59).

In the following proposition proved in [19] we obtain the explicit solution of problem (P) in a more tractable form than in Lemma 5.2. In what follows, empty sums must be understood as zero.

Proposition 5.3. *Let $w \equiv 1/(2\epsilon)$. Then, for $(r,\phi) \in \Omega$ and $\beta \in [0,2\pi)$, the solution $U_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ of problem (P) is:*

1. If $\beta = 0$,

$$U_{\alpha,0}(r,\phi) = 1 - I_{\alpha,0}(r,\phi); \tag{63}$$

2. If $0 < \beta < \alpha$,

$$U_{\alpha,\beta}(r,\phi) = \chi_{(\beta,\alpha]}(\phi) + \frac{1}{2}\,\delta_{\phi,\beta} - I_{\alpha,\beta}(r,\phi); \tag{64}$$

3. If $\beta = \alpha$,

$$U_{\alpha,\alpha}(r,\phi) = -I_{\alpha,\alpha}(r,\phi); \tag{65}$$

4. If $\alpha < \beta < \alpha + \pi$,

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta}(r,\phi) = e^{wr\cos(\beta-\phi)} \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{\left[\frac{\beta+\phi}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\beta+\phi-2k\alpha)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{\beta-\phi}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\beta-\phi-2k\alpha)} \\ & + \frac{1}{2}\,e^{-wr}\left(\delta_{\frac{\beta-\phi}{2\alpha},\left[\frac{\beta-\phi}{2\alpha}\right]} - \delta_{\frac{\beta+\phi}{2\alpha},\left[\frac{\beta+\phi}{2\alpha}\right]}\right)\Bigg\} - I_{\alpha,\beta}(r,\phi); \end{aligned} \tag{66}$$

5. If $\alpha + \pi \le \beta$,

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta}(r,\phi) = e^{wr\cos(\beta-\phi)} \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{\left[\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(-\phi+\beta+2k\alpha)} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\phi+\beta+2k\alpha)} \\ & + \frac{1}{2}\,e^{-wr}\left(\delta_{\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha},\left[\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha}\right]} - \delta_{\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha},\left[\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha}\right]}\right)\Bigg\} + 1 - I_{\alpha,\beta-2\pi}(r,\phi); \end{aligned} \tag{67}$$

where $I_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ is given in (60).

The solution of (P) cannot be written in terms of known functions. But, for $\epsilon \to 0^+$ and r away from 0, we can approximate $U_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ by an error function and elementary functions plus an asymptotic expansion in powers of ϵ. We denote by Ω^* the sector shaped domain indented at the point $r=0$ (see Fig. 5.1(b)): $\Omega^* \equiv (r_0,\infty)\times(0,\alpha)$, $r_0>0$.

The proof of the main theorem of this section uses the following definition and lemma shown in [19].

Definition 5.4. *We define the functions*

$$g(t,\phi,\alpha,\beta)\equiv\frac{\sin(\mu\phi)}{2\alpha[\cosh(\mu(t-i\beta))-\cos(\mu\phi)]};\qquad \mu=\frac{\pi}{\alpha}, \tag{68}$$

and

$$h(t,\theta)\equiv\frac{1}{4\pi i\sinh\frac{1}{2}(t-i\theta)}, \tag{69}$$

where θ is not an independent variable but a function of ϕ, α and β:

$$\theta(\phi,\alpha,\beta)\equiv\begin{cases}\beta-\operatorname{sign}(\beta)\left(\phi+2\alpha\left\lfloor\frac{|\beta|}{2\alpha}\right\rfloor\right) & \text{if}\quad \operatorname{Frac}\left(\frac{|\beta|}{2\alpha}\right)\le\frac{1}{2}\\ \beta+\operatorname{sign}(\beta)\left(\phi-2\alpha\left(\left\lfloor\frac{|\beta|}{2\alpha}\right\rfloor+1\right)\right) & \text{if}\quad \operatorname{Frac}\left(\frac{|\beta|}{2\alpha}\right)>\frac{1}{2}\end{cases} \tag{70}$$

with $\operatorname{sign}(0)=1$. *We define also*

$$\bar I(x,\phi,\alpha,\beta)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x\cosh t}f(t,\phi,\alpha,\beta)\,dt, \tag{71}$$

with

$$\begin{aligned}f(t,\phi,\alpha,\beta)\equiv{}&g(t,\phi,\alpha,\beta)+\operatorname{sign}(\beta)\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{Frac}\left(\frac{|\beta|}{2\alpha}\right)\right)\\&\times\left[h(t,\theta(\phi,\alpha,\beta))-\left[\delta_{\beta,0}+\delta_{\beta,\alpha}+\delta_{\beta,2\pi-\alpha}\right]h(t,-\theta(\phi,\alpha,\beta))\right].\end{aligned} \tag{72}$$

(Observe that $g(t,\phi,\alpha,\beta)$ is part of the integrand in (60)).

Lemma 5.5. *Let $(r,\phi)\in\Omega^*$, $\beta\in[0,2\pi)$, $\alpha\in(0,2\pi)$. Then, the function $\bar I(x,\phi,\alpha,\beta)$ given in Definition 5.4 has the following asymptotic expansion for large positive x:*

$$\bar I(x,\phi,\alpha,\beta)=\frac{e^{-x}}{2\sqrt{2x}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!\,(2x)^k}\,T^{(k)}(0,\phi,\alpha,\beta)+\tilde R_n(x,\phi,\alpha,\beta)\right] \tag{73}$$

where

$$T(u,\phi,\alpha,\beta)=\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}\,f(2\operatorname{arcsinh}u,\phi,\alpha,\beta) \tag{74}$$

and $T^{(k)}(u,\phi,\alpha,\beta)$ is the k-th derivative of the function $T(u,\phi,\alpha,\beta)$ with respect to u.

The remainder $\tilde{R}_n(x, \phi, \alpha, \beta)$ satisfies a bound of the form

$$|\tilde{R}_n(x, \phi, \alpha, \beta)| \leq \tilde{M} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{n!(2xd)^n} \tag{75}$$

for some positive constants $\tilde{M}$ and d.

Theorem 5.6. *Let $w \equiv 1/(2\epsilon)$, $(r, \phi) \in \Omega^*$, $\beta \in [0, 2\pi)$ and $\alpha \in (0, 2\pi)$. Then, the solution $U_{\alpha,\beta}(r, \phi)$ of problem (P) given in proposition 5.3 reads*

$$U_{\alpha,\beta}(r, \phi) = U^0_{\alpha,\beta}(r, \phi) + \frac{e^{wr(\cos(\beta-\phi)-1)}}{2\sqrt{2wr}} \, U^1_{\alpha,\beta}(r, \phi), \tag{76}$$

where:

1. If $\beta = 0$:

$$U^0_{\alpha,0}(r, \phi) = 1 - \operatorname{erfc}\sqrt{wr(1 - \cos\phi)}, \tag{77}$$

2. If $0 < \beta < \alpha$:

$$U^0_{\alpha,\beta}(r, \phi) = \chi_{(\beta,\alpha]}(\phi) + \frac{1}{2}\, \delta_{\phi,\beta} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\beta - \phi) \operatorname{erfc}\sqrt{wr(1 - \cos(\beta - \phi))}, \tag{78}$$

3. If $\beta = \alpha$:

$$U^0_{\alpha,\alpha}(r, \phi) = \operatorname{erfc}\sqrt{wr(1 - \cos(\alpha - \phi))}, \tag{79}$$

4. If $\alpha < \beta < \alpha + \pi$:

$$\begin{aligned} U^0_{\alpha,\beta}(r, \phi) = e^{wr\cos(\beta-\phi)} \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{\left[\frac{\beta+\phi}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\beta+\phi-2k\alpha)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{\beta-\phi}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\beta-\phi-2k\alpha)} \\ & + \frac{1}{2}\, e^{-wr} \left(\delta_{\frac{\beta-\phi}{2\alpha}, \left[\frac{\beta-\phi}{2\alpha}\right]} - \delta_{\frac{\beta+\phi}{2\alpha}, \left[\frac{\beta+\phi}{2\alpha}\right]} \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{80}$$

5. If $\alpha + \pi \leq \beta$:

$$\begin{aligned} U^0_{\alpha,\beta}(r, \phi) = e^{wr\cos(\beta-\phi)} \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{\left[\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(-\phi+\beta+2k\alpha)} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha}\right]} e^{-wr\cos(\phi+\beta+2k\alpha)} \\ & + \frac{1}{2}\, e^{-wr} \left(\delta_{\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha}, \left[\frac{2\pi-\phi-\beta}{2\alpha}\right]} - \delta_{\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha}, \left[\frac{2\pi+\phi-\beta}{2\alpha}\right]} \right) \Bigg\} + 1. \end{aligned} \tag{81}$$

The function $U^1_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ has an asymptotic expansion in powers of w^{-1}:

$$U^1_{\alpha,\beta}(r,\phi) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \frac{T^{(k)}(0,\phi,\alpha,\beta)}{(2wr)^k} + R_n(wr,\phi,\alpha,\beta), \tag{82}$$

where the coefficients $T^{(k)}(0,\phi,\alpha,\beta)$ are given in Lemma 5.5 and are regular functions of r and ϕ for $(r,\phi) \in \Omega^*$.

Proof. For large w and fixed r, the asymptotic features of the integral $I_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ defined in (60) are: (i) there is a saddle point at $t=0$. (ii) The poles are situated at $t_k^1 = i(\beta-\phi+2k\alpha)$ and $t_k^2 = i(\beta+\phi+2k\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$. Then, the saddle point coalesce with t_k^1 when $\phi \to \beta+2k\alpha$ or with t_k^2 when $\phi \to -(\beta+2k\alpha)$. Uniform asymptotic expansion of this kind of integrals are obtained by using the error function as the basic approximant [[32], chap. 7, sec. 2]. Therefore, we need to identify the poles in the integrand of $I_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ which are closest to the point $t=0$ (to the real axis). We distinguish several cases:

Case 1. $\beta = 0$.

In this case two poles, $t_0^1 = -i\phi$ and $t_0^2 = i\phi$, touch the real axis when ϕ runs from 0 to α. Therefore, we split off both poles from the integrand of $I_{\alpha,0}(r,\phi)$ if we use (70) and (72):

$$\theta = -\phi, \qquad g(t,\phi,\alpha,0) = h(t,\phi) - h(t,-\phi) + f(t,\phi,\alpha,0),$$

where the functions f, g and h are given in Definition 5.4.

Using the complementary error function representation [27]

$$e^{-r\cos\alpha}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{2r}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\cosh t}\frac{dt}{\sinh\frac{1}{2}(t-i\alpha)}, \qquad 0<\alpha<2\pi, \tag{83}$$

we obtain that the integral $I_{\alpha,0}(r,\phi)$ reads

$$I_{\alpha,0}(r,\phi) = \operatorname{erfc}\sqrt{wr(1-\cos\phi)} + e^{wr\cos(\beta-\phi)}\bar{I}(wr,\phi,\alpha,0), \tag{84}$$

where $\bar{I}(wr,\phi,\alpha,0)$ is defined in (71).

Therefore, from (63) we obtain (76) with $U^0_{\alpha,0}(r,\phi)$ given in (77) and $U^1_{\alpha,0}(r,\phi) = -2\sqrt{2wr}\,e^{wr}\bar{I}(wr,\phi,\alpha,0)$.

Case 2. $0<\beta<\alpha$.

In this case, the pole $t_0^1 = i(\beta-\phi)$ is the only one which crosses the real axis when ϕ runs from 0 to α. Therefore, we split off the pole of the integrand at t_0^1 if we use (70) and (72):

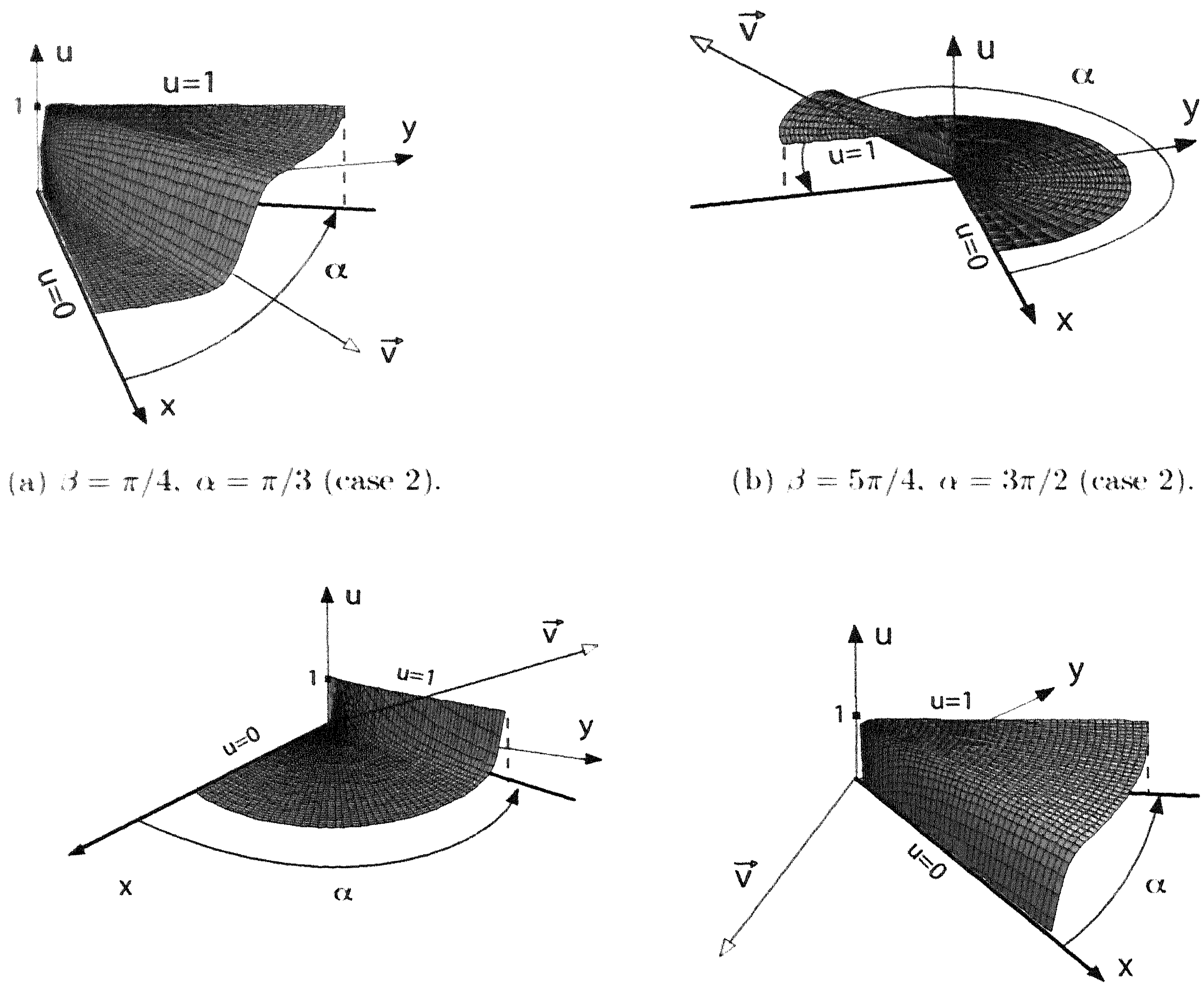
$$\theta = \beta-\phi, \qquad g(t,\phi,\alpha,\beta) = -h(t,\beta-\phi) + f(t,\phi,\alpha,\beta).$$

Using (83) we obtain that the integral $I_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ equals

$$I_{\alpha,\beta}(r,\phi) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(\beta-\phi)\,\mathrm{erfc}\sqrt{wr(1-\cos(\beta-\phi))} + e^{wr\cos(\beta-\phi)}\,I(wr,\phi,\alpha,\beta). \quad (85)$$

Therefore, from (64) we obtain (76) with $U^0_{\alpha,\beta}(r,\phi)$ given in (78) and $U^1_{\alpha,\beta}(r,\phi) = -2\sqrt{2wr}\,e^{wr}I(wr,\phi,\alpha,\beta)$.

The proof for the remaining case $\beta \geq \alpha$, is similar and may be found in [19]. □



(a) $\beta = \pi/4$, $\alpha = \pi/3$ (case 2).

(b) $\beta = 5\pi/4$, $\alpha = 3\pi/2$ (case 2).

(c) $\beta = 3\pi/4$, $\alpha = 5\pi/12$ (case 4).

(d) $\beta = 7\pi/4$, $\alpha = \pi/4$ (case 5).

Figure 5.2. *Graphs of the first order approximation, $U^0_{\alpha,\beta}(r,\phi)$, to the solution of problem (P) for different values of α and β and $\epsilon = 0.1$. The convection vector $\vec{v}$ "drags" the discontinuity of the boundary condition at $r = 0$ originating a parabolic layer of size $O(\sqrt{\epsilon})$ along $\vec{v}$ if it points into the sector. If $\vec{v}$ points out of the sector, it originates boundary layers of size $O(\epsilon)$ along the outflow boundary of the sector.*

Remark 5.7. From (76) and (82) we see that $U_{\alpha,\beta}(r,\phi) = U^0_{\alpha,\beta}(r,\phi) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ as $\epsilon \to 0^+$ away from the point $r = 0$. Then, the first order approximation to the solution of (P) is a linear combination of error functions and elementary functions. When $\overrightarrow{v}$ is inside the sector, the error function in (78) exhibits an interior layer of width $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ and parabolic level lines of equation $r(1 - \cos(\beta - \phi)) =$ constant. When $\overrightarrow{v}$ is parallel to one side of the sector, the error functions in (77) and (79) exhibit boundary layers of width $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ and the same level lines. When $\overrightarrow{v}$ is not in the sector, the exponential functions in (80) and (81) exhibit boundary layers of width $\mathcal{O}(\epsilon)$ (see Fig 5.2).

Other singular perturbation problems with discontinuous Dirichlet data defined over different domains are analyzed in [17] and [18] and are based on the dieas introduced by Temme in [27] and [29].

6. Acknowledgments

The *Sec. Est. Educ. y Univ., Programa Salvador de Madariaga, res. 28/03/03* is acknowledged by its financial support.

References

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions, *Dover, New York*, 1970.

[2] C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell, An extension of the method of steepest descent, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53** (1957) 599–611.

[3] T. M. Dunster, Uniform asymptotic expansion for Charlier polynomials. *J. Approx. Theor.* **112** (1994), 93-133.

[4] C. Ferreira, J. L. Lopez and E. Mainar, Asymptotic relations in the Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials, *Adv. Appl. Math.*, **31** (2003), 61–85.

[5] C. Ferreira, J. L. Lopez and E. Perez Sinusia, Incomplete gamma functions for large values of their variables, accepted in Adv. Appl. Math.

[6] C.L. Frenzen and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988), 1232–1248.

[7] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, On the limit relations between classical continuous and discrete orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **91** (1998) 97-105.

[8] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, Transverse limits in the Askey tableau, *J. Comp. Appl. Math.* **99** (1998) 327-335.

[9] W.M.Y. Goh, Plancherel-Rotach asymptotics for the Charlier polynomials. *Constructive Approximation* **14**(1998), 151-168.

[10] G. W. Hedstrom and A. Osterheld, The effect of cell Reynolds number on the computation of a boundary layer, *J. Comput. Phys.*, **37** (1980) 399-421.

[11] L.C. Hsu, Certain asymptotic expansions for Laguerre polynomials and Charlier polynomials. *Approx. Theory Appl. (N.S.)* **11** (1995), 94-104.

[12] Jin, X.-S., and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Meixner polynomials, *Constr. Approx.* **49** (1998) 113-150.

[13] E.M. DE JAGER AND J. FURU, The Theory of Singular Perturbations, *North-Holland, Amsterdam*, 1996.

[14] J. KEVORKIAN, Partial Differential Equations. Analytical Solution Techniques, *Springer-Verlag, New York*, 1990.

[15] J. KEVORKIAN, J.D. COLE, Multiple Scale and Singular Perturbation Methods *Springer-Verlag, New York*, 1996.

[16] R. KOEKOEK AND R. F. SWARTTOUW, Askey scheme or hypergeometric orthogonal polynomials, *http://aw.twi.tudelft.nl/koekoek/askey.*(1999)

[17] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSIA, Asymptotic analysis of two singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous data: the quarter plane and the infinite strip, *Stud. Appl. Math.* **113** (1) (2004) 57-89.

[18] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSIA, Analytic approximations for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a half-infinite strip, *Acta. Appl. Math.* **82** (1) (2004) 101-117.

[19] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSIA, Asymptotic approximations for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a sector, *To appear in J. Comp. Appl. Math.*

[20] J.L. LÓPEZ AND N. M. TEMME, Approximations of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials, *Meth. Appl. Anal.* **6** (1999) 131-146.

[21] J.L. LÓPEZ AND N. M. TEMME, Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel and Buchholz polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **239** (1999) 457-477.

[22] J.L. LÓPEZ AND N. M. TEMME, Uniform approximations of Bernoulli and Euler polynomials in terms of hyperbolic functions, *Stud. Appl. Math.* **103** (1999) 241-258.

[23] J.L. LÓPEZ AND N. M. TEMME, The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis, *J. Comp. Appl. Math.* **133** (2001) 623-633.

[24] J. L. LOPEZ AND N.M. TEMME. Two-point Taylor expansions of analytic functions. *Stud. Appl. Math.* **109** (2002). 297-311.

[25] J.L. LÓPEZ AND N. M. TEMME. Convergent asymptotic expansions of Charlier, Laguerre and Jacobi polynomials. *Proc. Roy. Soc. Edinb. A.* **134A** (2004) 537-555.

[26] JOSÉ L. LOPEZ AND NICO M. TEMME. Multi-point Taylor expansions of analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*. **356** (2004). 4323-4342.

[27] N.M. TEMME. Analytical methods for a singular perturbation problem. The quarter plane. *C.W.I. Report*. **125**. (1971).

[28] N.M. TEMME. Analytical methods for a singular perturbation problem in a sector. *SIAM J. Math. Anal.*. **5**. n. 6 (1974) 876-887.

[29] N.M. TEMME. Analytical methods for a selection of elliptic singular perturbation problems. *Recent advances in differential equations (Kunming, 1997), 131-148, Pitman Res. Notes Math. Ser., 386, Longman, Harlow, 1998.*

[30] B. RUI AND R. WONG. Uniform asymptotic expansions of Charlier polynomials. *Meth. Appl. Anal.* **1** (1994) 294-313.

[31] E.T. WHITTAKER AND G.N. WATSON. A course of modern analysis. *Cambridge University Press, London and New York*. 1927.

[32] R. WONG. Asymptotic Approximations of Integrals. *Academic Press, New York*. 1989.

Nico Temme, the Askey scheme and me, 1968–2005

Tom H. Koornwinder

In December 1968 I started working at the Mathematical Centre (MC) in Amsterdam, having freshly obtained my *doctorandus* degree in mathematics at the University of Leiden. I became the room mate of Nico Temme, at the third (upper) floor of the building at Tweede Boerhaavestraat. This was a former school building. The upper floor, with narrow corridor and tiny offices, had been put on top of the original school building. We were *aio's* (as we would now say in the Netherlands), i.e., PhD students, but in those days one was immediately appointed in such a position for indefinite time, without the strict requirement to finish the PhD thesis within, say, four years. Nico had studied mathematics at the University of Amsterdam (UvA). In the final stage of his study he had become a student assistant at the MC of prof. Hans Lauwerier, who was both professor at the UvA and head of the department of Applied Mathematics at the MC. After Nico had obtained his doctorandus degree, he had been appointed at the MC in a similar position as me.

Thus Nico knew a lot about people and habits at the MC. He was also quite experienced already in applied mathematics, special functions, asymptotics and numerical mathematics. For me everything at the MC was new, and I was also rather blank in the fields of mathematics just mentioned, since education in Leiden was very much biased to pure mathematics. Nico was very helpful in introducing me to all this.

Nico owned the original 1964 edition of the *Handbook of Mathematical Functions (with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables)*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun. This impressive volume was published by the Government Printing Office in the USA. Later I bought the (much less prestigious) softcover Dover edition of this handbook. However, for special functions I preferred the three volumes of *Higher Transcendental Functions*, edited by A. Erdélyi, because it was less aiming at a readership of physicists and engineers, and closer to pure mathematics.

In the academic year 1969–1970 a young professor from Madison (Wisconsin, USA) spent his sabbatical at the MC. His name was Dick Askey. He taught a marvellous introductory course on orthogonal polynomials. Quite a few of the young people attending his lectures were infected by his enthusiasm and started working on problems suggested by him. Dick Askey's lectures focused on the *classical orthogonal polynomials*, which we would now call *very classical*: the three families in the small *Askey scheme avant la lettre*, see Figure 1.

The MC had a very good library. In the tall library rooms at a lower floor of the school building the walls were packed with books and back volumes of journals, see Figure 2.

In 1975 I defended my PhD thesis at the UvA. Nico was one of my paranymphs, see Figure 3. In 1978 Nico defended his thesis at the UvA. I was asked to be an opponent "from the room" (a custom allowed at UvA; this opposition from the room precedes the regular opposition by the committee), see Figure 4.

Although employees of the MC could not be fired after they got their PhD, it could happen that the board of the MC advised them to look for a job elsewhere. But some of the young

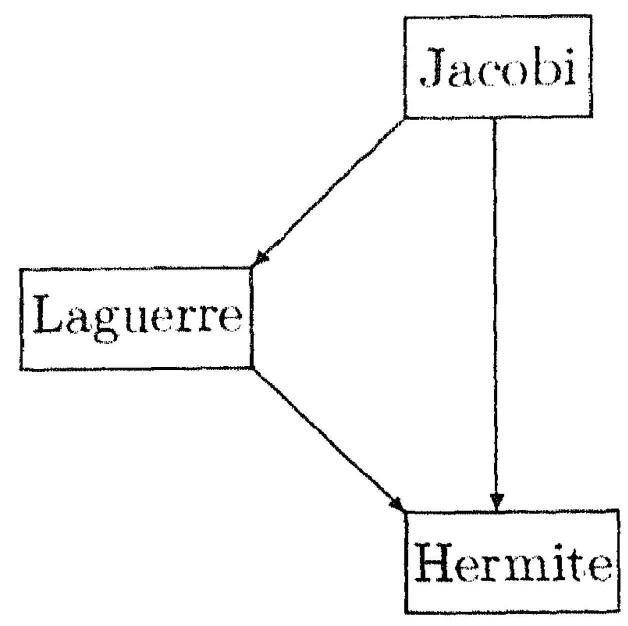


Figure 1: small Askey scheme avant la lettre

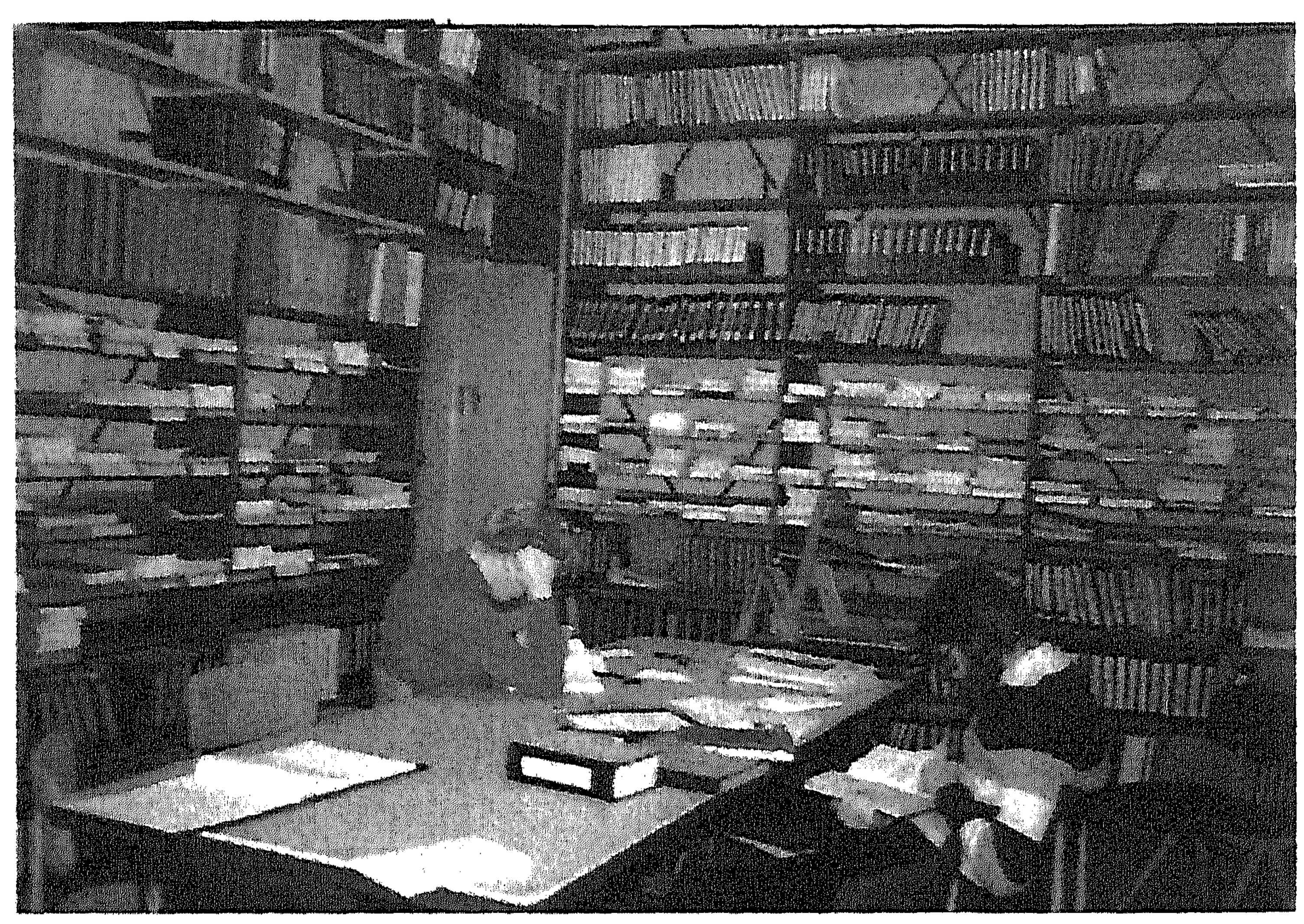


Figure 2: Nico and Tom sitting in the journals room of the MC library

PhD's got a perspective for making further scientific career at the MC. Nico and I belonged to this group. Our ways then diverged somewhat: Nico stayed at the Department of Applied Mathematics and became *souschef* of this department, for surveying the daily matters, while the final responsibility remained with the department head Hans Lauwerier, who was not present so often. I moved within the MC to the Department of Pure Mathematics, headed by prof. Cor Baayen.

Around 1980 many things changed. The new name of the institute became CWI. It got a new building further out from the city centre at Kruislaan. Cor Baayen became director of the CWI. The departments of Pure and Applied Mathematics merged into the department of Analysis, Algebra and Geometry (AAG), and got one new department head: Michiel Hazewinkel. Senior researchers as Nico and me got offices of their own. During the first years in the new building we had splendid offices near the director's office, from where we could often hear homeric laughter. Later we moved to smaller offices, and next we went into exile in portacabins (see Figure 5). Our offices were spacious, but altogether it felt and sounded like staying on a ship.

In the eighties the Askey scheme (see Figure 8 for the scheme, and see Askey lecturing on

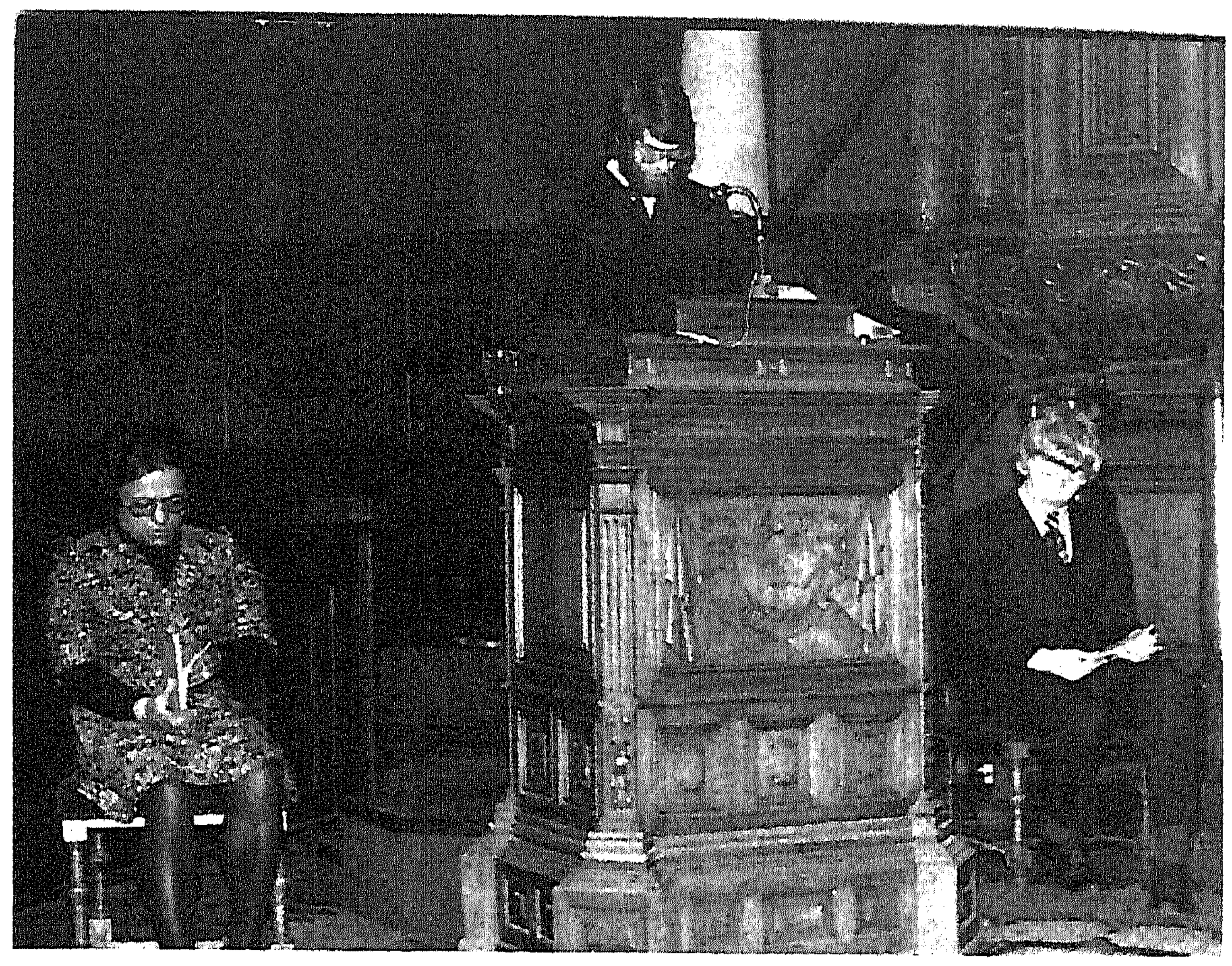


Figure 3: Nico as a paranymph at Tom's thesis defense

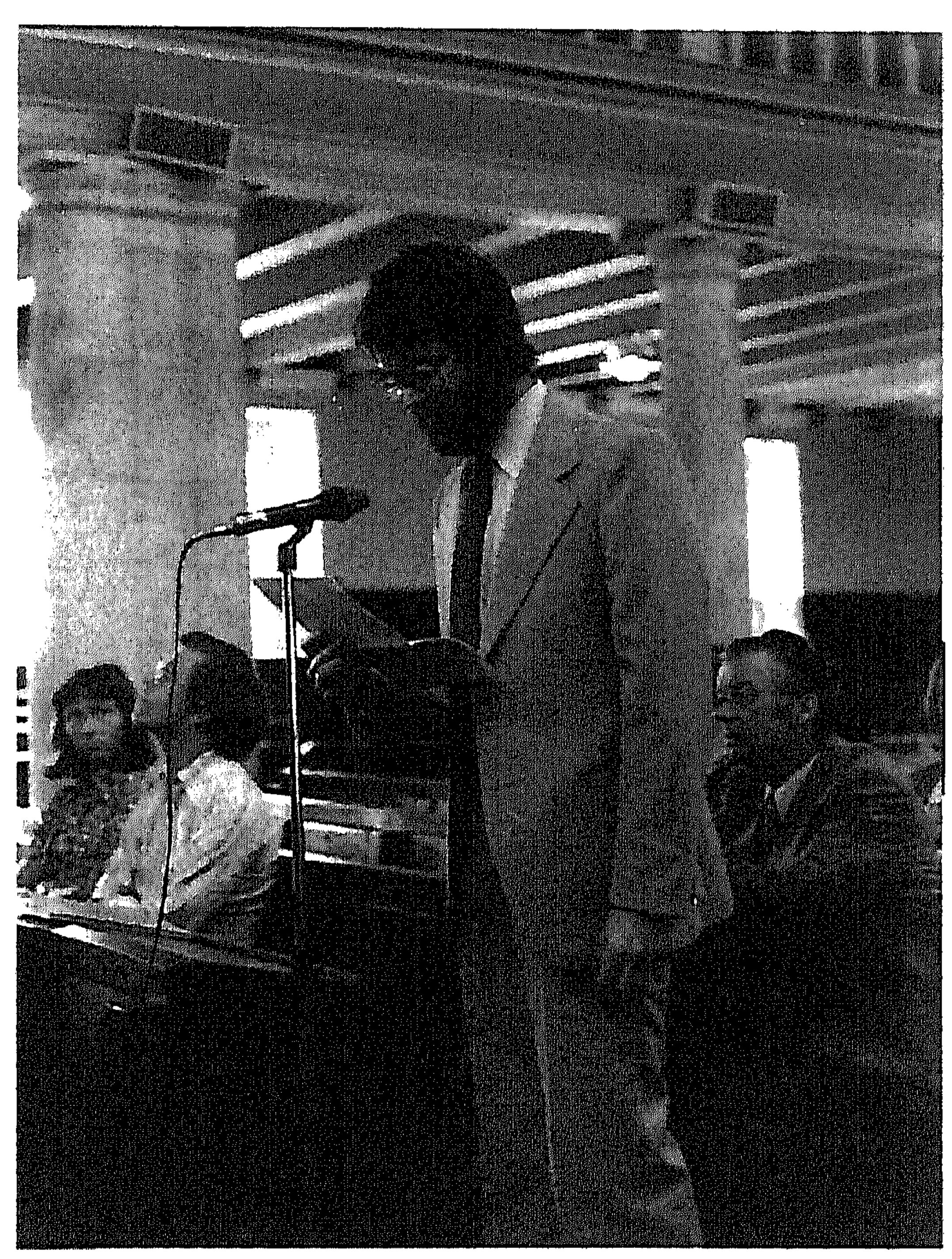


Figure 4: Tom as an opponent at Nico's thesis defense

some families from the scheme in Figure 6) became widely known as a convenient graphical way to see the hierarchy of hypergeometric orthogonal polynomials. The arrows denote limit

Figure 5: AAG department members in front of the portacabins

transitions. The families on top have 4 parameters. When you go down one level then you lose one parameter. In the bottom level (Hermite polynomials), no parameters are left.

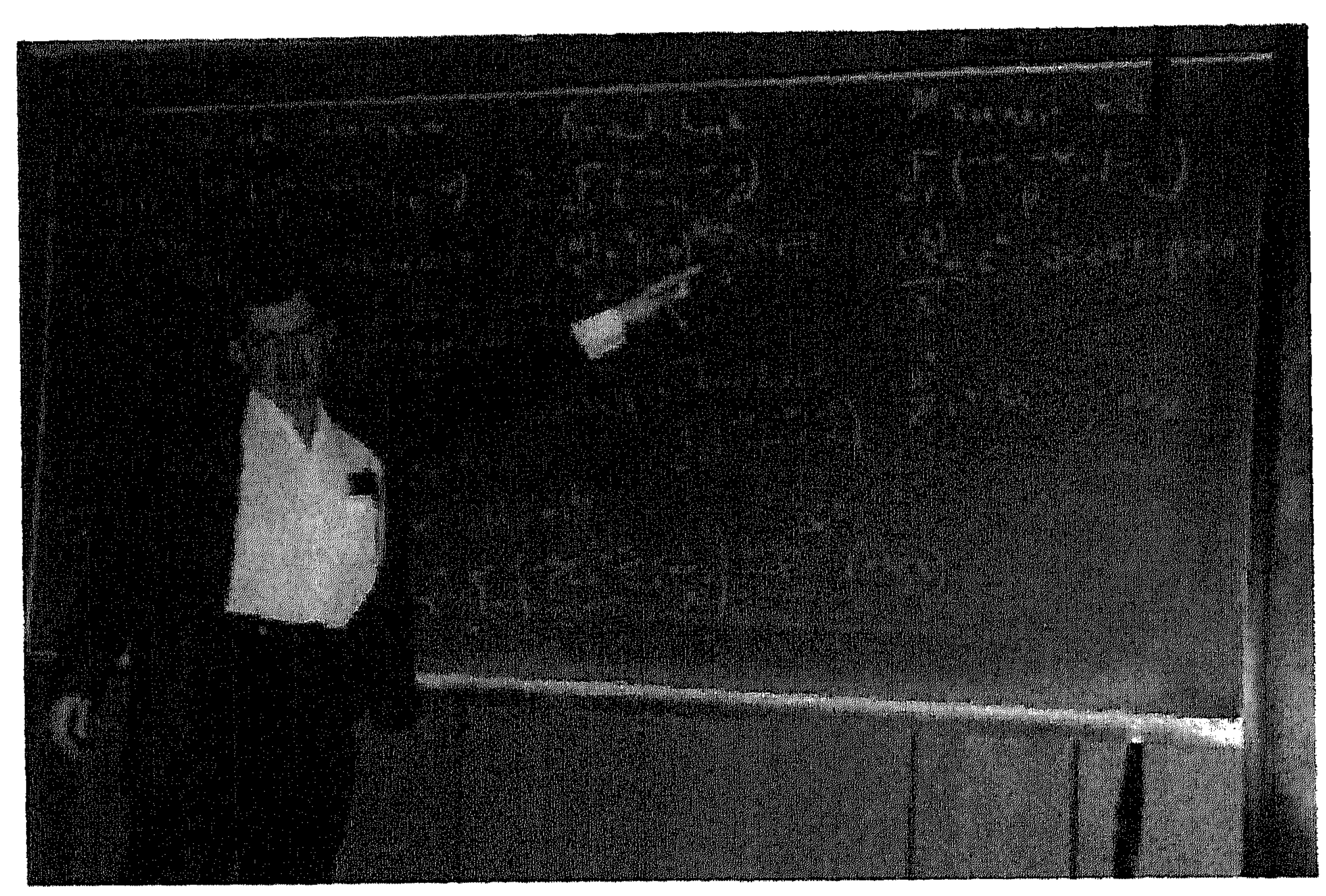


Figure 6: Dick Askey lecturing in Oberwolfach, 1983

In the second half of the eighties, both Nico and I bought an Apple Macintosh computer for usage at home, and we have both remained Apple fans since then. When Apple came out with the *HyperCard* easy programming environment, I made there an implementation of the Askey scheme, such that one could look locally which arrows start or end at a certain family. This implementation still runs under Apple system OS 9, see `http://www.science.uva.nl/~thk/art/software.html` for download.

The Askey scheme soon got a q-analogue, which was made possible by the discovery of the *Askey-Wilson polynomials*. The q-Askey scheme has the same qualitative features, but it

Figure 7: Our intensive PhD course at Twente University

contains many more families; it takes two pages to print it, see R. Koekoek & R. F. Swarttouw, *The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*. The q-scheme is lying in a complicated way above the classical scheme. There are $q \uparrow 1$ limit arrows from q-families to classical families, but often one q-family has limits to several classical families, and one classical family can be seen as limit family of several q-families.

Most (but not all) objects and formulas associated with a certain family in the scheme also admit limits following the arrows in the scheme. These limits may be rigorous or only formal.

Many families in the classical and q-scheme have also limits to transcendental functions, which generalized orthogonal systems outside the polynomial world. See for instance the Bessel functions as limits of Jacobi polynomials. Here the generalized orthogonal system is given by the Hankel transform pair.

Very spectacular were the developments starting in the second half of the eighties with Heckman and Opdam's introduction of *Jacobi polynomials associated with root systems* and Ian Macdonald's introduction of *Macdonald polynomials*, also associated with root systems. In subsequent work by many people, for root system BC_n a full analogue of the Askey scheme and the q-Askey scheme took gradually shape.

In 1991 I got a full professor's position at the UvA, while Nico remained at CWI. However, we remained in touch. Nico became co-promotor at UvA of two of his PhD students, with me as promotor: these were Adri Olde Daalhuis (on the left in Figure 7) and Patrick Ooninex. In an NWO sponsored project we together supervised postdoc Raimundas Vidunas. We also taught together an intensive course on special functions for Dutch PhD students at Twente University, see Figure 7.

All families of orthogonal polynomials satisfy a three-term recurrence relation, and conversely each three-term recurrence relation, with the coefficients satisfying a certain positivity condition, uniquely generates a system of orthogonal polynomials, although its orthogonality measure is not always unique. For all families in the Askey scheme the explicit recurrence relations of course have been written down. There is the converse problem: given an explicit three-term recurrence relation, does it generate a family in the Askey scheme, and, if so, with which parameters? For that, René Swarttouw and I together wrote a Maple procedure, `rec2ortho`, which could do this up to the two-parameter level of the Askey scheme. Already up to that level, the procedure was far from trivial. See again http://www.science.uva.nl/~thk/art/software.html for download.

A major project, in which we got both involved, started around 2001: the Digital Library of Mathematical Functions (DLMF), a full rewriting of the Handbook of Mathematical Functions by M. Abramowitz and I. A. Stegun. This project was coordinated by the institute NIST (Maryland, USA), in particular by Frank Olver and Dan Lozier. Nico became an associate editor of the project, and he wrote a number of chapters. I wrote, together with Roelof Koekoek, René Swarttouw and Roderick Wong, the chapter on Orthogonal Polynomials. For a while, I got hospitality at CWI during one day a week for working on this project, while I took refuge on that day from my administrative tasks as institute director at UvA. The book is not yet available, but work on it is near conclusion.

The Askey scheme, with its many limit transitions, of course invites to further asymptotic analysis. Nico also felt challenged by this, see for instance N. M. Temme & J. L. López, *The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis*, J. Comput. Appl. Math. 133 (2001), 623–633. I worked on this from another point of view, by considering the generic 4-parameter situation in the Askey scheme as a four-dimensional manifold, and considering families in lower levels of the scheme as being on the boundary of this manifold. More about this in my lecture on 27 May, 2005.

Sources of pictures

The pictures in Figures 2–6 are from the author's archive. The pictures in Figure 8 were obtained as follows:

Askey: http://www.math.wisc.edu/~askey/
Wilson: http://orion.math.iastate.edu/wilson/
Racah: http://www-personal.umich.edu/~szwetch/Stamps.of.Israel/62.html
Hahn: J. Math. Phys. Sci. 18 (1983/84), Special Issue
Meixner: Dr. Ing. Michael Meixner and Prof. Dr. Hubert Geller
Pollaczek: http://www2.uwindsor.ca/~hlynka/qhist.html
Jacobi, Laguerre and Hermite: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html
Krawtchouk: http://www.gulag.hu/links.htm
Charlier: http://www.phys-astro.sonoma.edu/BruceMedalists/Charlier/

T. H. Koornwinder, Korteweg-de Vries Institute, University of Amsterdam,
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, The Netherlands

email: thk@science.uva.nl

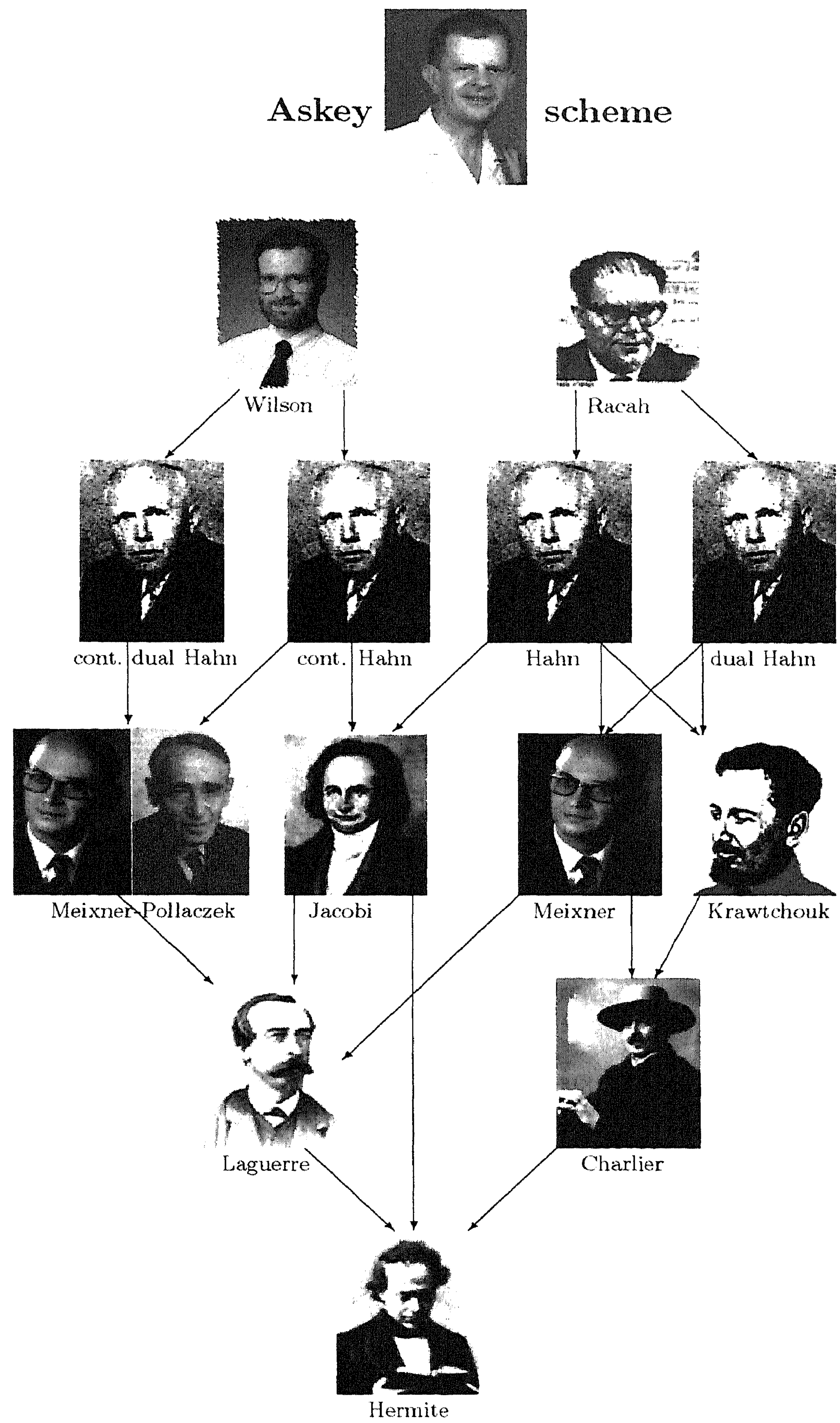


Figure 8: Askey scheme

Exponential asymptotics for nonlinear ODEs and PDEs

A. B. Olde Daalhuis

School of Mathematics, King's Buildings, University of Edinburgh, Edinburgh EH9 3JZ, UK. adri@maths.ed.ac.uk

ABSTRACT. Exponential asymptotics is well understood for linear ODEs. In the case of nonlinear ODEs there are several new phenomena. The Stokes phenomenon is slightly different. We will show that exponential asymptotics is needed to determine uniquely the solutions of the first Painlevé equation.

We will also show how the higher order Stokes phenomenon gives rise to the shock in Burgers' equation.

0. Introduction

This contribution is dedicated to Nico Temme, on the occasion of his 65th birthday. When I was Nico's PhD student, I started working in uniform asymptotics, and at some point I moved to exponential asymptotics. In this contribution I discuss the recent developments in exponential asymptotics. It is not Nico's main interest, but I finish with a challenge. In the final example, we obtain our results via exponential asymptotics. However, we had to escape into the complex plane to avoid a caustic. A uniform asymptotics approach should make it possible to obtain the same results, and that approach might be useful in more complicated cases.

1. Linear ODEs

In this section we will discuss some of the details of exponential asymptotics for linear ODEs. Proofs and more details are given in [6+9].

Let us consider the following second order linear differential equation with a singularity of rank one at infinity:

$$w''(z) + f(z)w'(z) + g(z)w(z) = 0. \tag{1.1}$$

This equation has unique solutions $w_1(z)$ and $w_2(z)$ such that

$$w_1(z) \sim e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}, \qquad |\mathrm{ph}\,(\lambda_2 - \lambda_1)z| < \tfrac{3}{2}\pi, \tag{1.2a}$$

$$w_2(z) \sim e^{\lambda_2 z} z^{\mu_2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s}{z^s}, \qquad |\mathrm{ph}\,(\lambda_1 - \lambda_2)z| < \tfrac{3}{2}\pi, \tag{1.2b}$$

as $|z| \to \infty$. The exponents λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, and the coefficients a_s, b_s, may be found by formal substitution of (1.2) into (1.1). Since these expansions are valid in bounded sectors we will also need the connection relations

$$w_1(z) = e^{2\pi i \mu_1} w_1\left(ze^{-2\pi i}\right) + K_1 w_2(z), \qquad w_2(z) = e^{-2\pi i \mu_2} w_2\left(ze^{2\pi i}\right) + K_2 w_1(z). \tag{1.3}$$

The constants K_1 and K_2 are the so-called Stokes multipliers, and in general they are not known. Below we will show how these constants can be computed numerically.

The first connection relation shows us that

$$w_1(z) \sim e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s} + K_1 e^{\lambda_2 z} z^{\mu_2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s}{z^s}, \qquad \tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{ph}(\lambda_2 - \lambda_1)z < \tfrac{5}{2}\pi, \tag{1.4}$$

as $|z| \to \infty$. When we compare this asymptotic expansion with (1.2a) we observe that when the Stokes line $(\lambda_2 - \lambda_1)z = re^{i\pi}$, $r > 0$, is crossed a constant times the subdominant solution is 'switched on'. This is the Stokes phenomenon for linear ODEs. The divergence of the asymptotic expansions (1.2) is directly related to the Stokes phenomenon. The optimal number of terms in (1.2) is an integer N such that

$$N - |(\lambda_2 - \lambda_1)z| = \mathcal{O}(1), \qquad \text{as } |z| \to \infty. \tag{1.5}$$

We can re-expand the divergent series in (1.2a) as follows:

$$w_1(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{a_s}{z^s} + R_N^{(1)}(z), \tag{1.6a}$$

$$R_N^{(1)}(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1+1-N} \frac{K_1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{m-1} b_s F^{(1)}\left(z; \begin{matrix} N + \mu_2 - \mu_1 - s \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{matrix}\right) + R_{m,N}^{(1)}(z), \tag{1.6b}$$

where N satisfies (1.5), m is a fixed positive integer,

$$R_{m,N}^{(1)}(z) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(e^{\lambda_1 z - |\lambda_2 - \lambda_1||z|} z^{\mu_2 - m}\right), & |\operatorname{ph}(\lambda_2 - \lambda_1)z| \leqslant \pi, \\ \mathcal{O}\left(e^{\lambda_2 z} z^{\mu_2 - m}\right), & \pi \leqslant |\operatorname{ph}(\lambda_2 - \lambda_1)z| < \tfrac{5}{2}\pi, \end{cases} \tag{1.7}$$

and where the first hyperterminant in terms of the generalised exponential integral is

$$F^{(1)}\left(z; \begin{matrix} N \\ \lambda \end{matrix}\right) = -\frac{\Gamma(N)}{(\lambda e^{-\pi i})^{N-1}} e^{\lambda z} E_N(\lambda z). \tag{1.8}$$

Note that this is the simplest function incorporating a Stokes phenomenon.

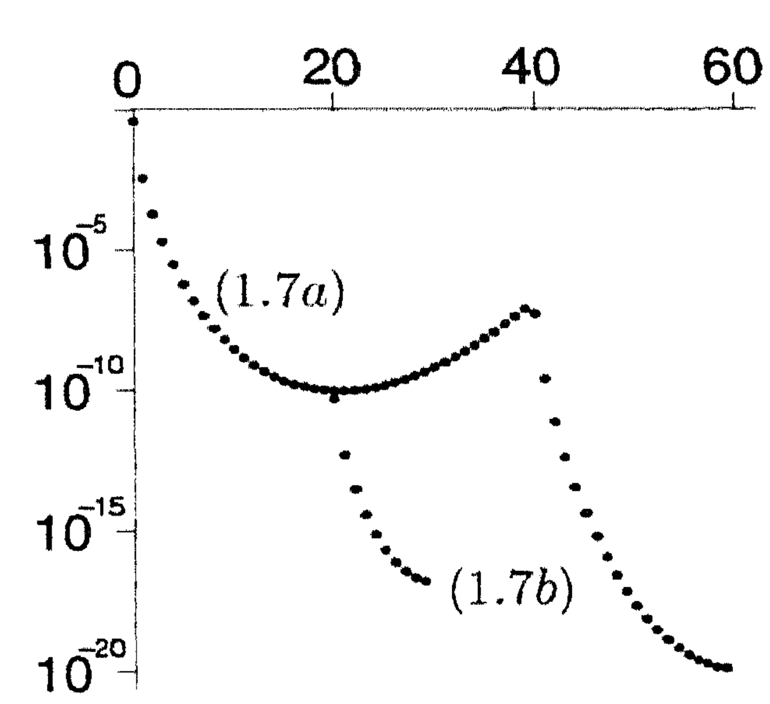


Figure 1. The size of the terms in (1.6) in the case $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ and $z = 20$.

We can now make the following observations. The optimally truncated and re-expanded asymptotic expansion (1.6) is valid in a much larger sector than the original Poincaré asymptotic expansion (1.2a). Hence, it incorporates the Stokes phenomenon. The coefficients in the re-expansion (1.6b) could have been very complicated, but since we use the hyperterminant functions, these coefficients are just the coefficients of (1.2b), that are, the coefficients of the object that is switched on when the Stokes lines are crossed. The only 'unknown' in (1.6b) is the Stokes multiplier K_1. Below we will show how this constant can be computed from (1.6) itself! Finally, in Figure 1 we illustrate that (1.6) is really an optimally truncated and then re-expanded asymptotic expansion. In this Figure it is illustrated that we could obtain a better approximation by taking twice the optimal number of terms in (1.6a), and then re-expand. From this Figure it is also obvious that the re-expansion is again divergent. This process of optimal truncation and re-expansion can be repeated, and this would give us a hyperasymptotic expansion.

We substitute (1.6b) into the equation $a_N = e^{\lambda_1 z} z^{N+\mu_1}\left\{R_N^{(1)}(z) - R_{N+1}^{(1)}(z)\right\}$, and obtain

$$a_N \sim \frac{K_1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{\Gamma(N+\mu_2-\mu_1-s)}{(\lambda_1-\lambda_2)^{N+\mu_2-\mu_1-s}}, \tag{1.9}$$

as $N \to \infty$. This result contains resurgence: the asymptotics of the late coefficients of one of the solutions of (1.1) is in terms of the early coefficients of one of the other solutions. Note that (1.9) can be used to compute K_1 numerically. The optimal number of terms in the divergent asymptotic expansion in (1.9) is $N/2$.

2. Nonlinear ODEs: the first Painlevé equation

The following results are from [8]. The first Painlevé differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x \tag{2.1}$$

has solutions such that $y(x) \sim \pm i\sqrt{x/6}$ as $|x| \to \infty$. From an asymptotics point of view it makes sense to use the Boutroux transformation (see [1]) $y(x) = i\sqrt{x/6}\,u(z)$, where $z = -\frac{48}{5}\left(-\frac{1}{6}x\right)^{5/4}$, which converts (2.1) to

$$u'' + \frac{u'}{z} - \tfrac{3}{2}\left(u^2-1\right) - \frac{4u}{25z^2} = 0. \tag{2.2}$$

This equation has solutions with asymptotic expansions

$$u(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_{s0} z^{-s} \tag{2.3}$$

as $|z| \to \infty$, where the coefficients are defined via

$$\begin{aligned} &a_{00}^2 = 1, \qquad a_{20} = -\tfrac{4}{75}, \qquad a_{00}a_{40} = -\tfrac{392}{5625}, \qquad a_{2m+1,0} = 0, \qquad m = 0,1,2,\cdots, \\ &3a_{00}a_{2m,0} = 4(m-1)^2 a_{2m-2,0} - \tfrac{3}{2}\sum_{p=2}^{m-2} a_{2p,0}a_{2(m-p),0}, \qquad m = 2,3,4,\cdots. \end{aligned} \tag{2.4}$$

There are no free parameters in these coefficients. The solutions having asymptotic expansion (2.3) have one free parameter which will show up, below, in the transseries.

3. Painlevé: transseries expansions

In the case of the linear ODE in §1 it was the connection formula that led to the Stokes phenomenon, which was the switching on of an exponentially small term when a Stokes line is crossed. This exponentially small term was also a solution of the linear ODE. This cannot be the case in nonlinear problems.

First we need to determine what the exponentially small terms are for (2.2). We write $u(z) = u_0(z) + Cu_1(z)$, where $u_0(z)$ is a solution of (2.2), $u_1(z)$ is supposed to be an exponentially small term.

and C is a (free) constant. We substitute this function into (2.2), ignore the term $-\frac{3}{2}C^2u_1(z)^2$, and we obtain for $u_1(z)$ the linear homogeneous ODE

$$u_1'' + \frac{u_1'}{z} - \left(3u_0 + \frac{4}{25z^2}\right)u_1 = 0. \tag{3.1}$$

Instead of focussing on the solutions of this equation we first observe that we still have a problem with the term $-\frac{3}{2}C^2u_1(z)^2$. Trying to incorporate this terms leads automatically to an expansion of the form

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C^n u_n(z), \tag{3.2}$$

where $u_{n+1}(z)$ is supposed to be exponentially small compared with $u_n(z)$. We obtain for these functions

$$u_n'' + \frac{u_n'}{z} - \left(3u_0 + \frac{4}{25z^2}\right)u_n = \tfrac{3}{2}\sum_{p=1}^{n-1} u_p u_{n-p}, \qquad n \geqslant 1. \tag{3.3}$$

There are two direction that we should consider: $\Re z \to \pm\infty$. When we focus our attention to $\Re z \to +\infty$ we obtain from (2.2) and (3.3) that for $n \geqslant 0$

$$u_n(z) \sim \tilde{u}_n(z) := e^{-n\sqrt{3}z}\sum_{s=0}^{\infty} a_{sn}z^{-s-(n/2)}, \tag{3.4}$$

where the coefficients a_{s0} are given in (2.4). We will now take $a_{00} = 1$. All the other coefficients can be found by formal substitution of (3.4) into (3.3) The only freedom that we have is the choice of a_{01}. We set it to unity and put that freedom of choice in constant C.

For the case $\Re z \to -\infty$ we obtain

$$u_n(z) \sim \check{v}_n(z) := e^{n\sqrt{3}z}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s a_{sn}z^{-s-(n/2)}. \tag{3.5}$$

So far we have obtained the following two formal transseries expansions

$$u(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_1^n \tilde{u}_n(z), \quad \Re z \to +\infty, \qquad \text{and} \qquad u(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_2^n \check{v}_n(z), \quad \Re z \to -\infty, \tag{3.6a, b}$$

where C_1 and C_2 are free constants. When we start in the sector $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{ph} z < 0$ with a solution of our nonlinear ODE (2.2) such that $u(z) \sim 1$ in this sector, then there is a unique constant C_1 such that (3.6a) is its corresponding transseries expansion. The positive real z-axis is the Stokes line for this solution. The effect of crossing this line is the switching on of exponentially small terms and this results into the transseries expansion

$$u(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 + K_1)^n \tilde{u}_n(z), \qquad \Re z \to +\infty, \tag{3.7}$$

for $0 < \operatorname{ph} z < \frac{1}{2}\pi$. The Stokes multiplier K_1 is independent of C_1. Hence, the Stokes phenomenon for nonlinear ODEs is the change of constant in the transseries representations of our solutions. When $C_1 \neq 0$ and $C_1 \neq -K_1$ then these transseries representations live in the sector $|\operatorname{ph} z| < \frac{1}{2}\pi$, and the effect of the Stokes phenomenon is always exponentially small. Hyperasymptotics is needed to make the Stokes phenomenon visible, or a study of the location of the singularities near the boundaries $\operatorname{ph} z = \pm\frac{1}{2}\pi$, see [3].

Similarly, when (3.6b) is the transseries representation of a solution of (2.2) in the sector $-\pi <$ ph $z < -\frac{1}{2}\pi$, then in the sector $-\frac{3}{2}\pi <$ ph $z < -\pi$ it will have the transseries representation

$$u(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (C_2 + K_2)^n \, \tilde{v}_n(z), \qquad \Re z \to -\infty. \tag{3.8}$$

Finally, the only solutions of (2.2) that are uniquely determined by $u(z) \sim 1$, are the ones for which the constant in the transseries representation is zero, that is, $u(z) = u_0(z)$. In the case of the first Painlevé equation these are the so-called tritronquée solutions. For more details see [5]. For these special solutions we have transseries representations

$$\begin{aligned} u_0(z) &\sim \sum_{p=0}^{\infty} (K_1)^p \, \tilde{u}_p(z), && 0 < \operatorname{ph} z < \tfrac{1}{2}\pi, \\ &\sim \tilde{u}_0(z), && -\pi < \operatorname{ph} z < 0, \\ &\sim \sum_{p=0}^{\infty} (K_2)^p \, \tilde{v}_p(z), && -\tfrac{3}{2}\pi < \operatorname{ph} z < -\pi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Each of the functions $u_n(z)$ have their own transseries expansions, and we could go much further with our analysis. We are not going to do this since our final goal in this example is the level-1 hyperasymptotic expansion, and for that we have all the information that is needed. Like in the case of the linear ODE, the only unknowns are the Stokes multipliers K_1 and K_2. We will now determine these constants.

4. Painlevé: the Stokes multipliers

Like in the linear example in §1, the Stokes multipliers can be computed via an asymptotic expansion for the late coefficients. From connection relation (3.9) we obtain

$$a_{p0} \sim \frac{K_1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s1} \Gamma\left(p - s - \frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^{p-s-\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{2\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s a_{s1} \Gamma\left(p - s - \frac{1}{2}\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^{p-s-\frac{1}{2}}}, \tag{4.1}$$

as $p \to \infty$. Since $a_{2p+1,0} = 0$ it follows that $K_1 = iK_2$, and hence

$$a_{2p,0} \sim \frac{K_2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s1} \Gamma\left(2p - s - \frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^{2p-s-\frac{1}{2}}}, \tag{4.2}$$

as $p \to \infty$. In (4.2) the optimal number of terms on the right-hand side is p; see [7]. Taking $p = 32$ and 32 terms on the right-hand side of (4.2), we obtain $K_2 = -0.46960787703009925108 6$. In this approximation all the digits are correct. In [10] the Stokes multiplier is computed via the isomonodromic deformations of linear equations associated with them and its exact value is found to be $K_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}\sqrt{3}/\pi}$.

5. Painlevé: the hyperasymptotic expansions

Let the function $u_0(z)$ be the unique solution of (2.2) with the property that $u_0(z) \sim 1$ as $|z| \to \infty$ in the sector $-\frac{3}{2}\pi <$ ph $z < \frac{1}{2}\pi$. The optimal number of terms in its asymptotic expansion $\tilde{u}_0(z)$ is integer $N := \sqrt{3}|z| + \mathcal{O}(1)$. We refer to [6] for the optimal number of terms at each level, and for remainder estimates.

Level 0. This level is just the optimally truncated version of the asymptotic expansion (2.3):

$$u_0(z) = \sum_{s=0}^{N-1} a_{s0} z^{-s} + e^{-\sqrt{3}|z|} |z|^{1/2} \mathcal{O}(1), \tag{5.1}$$

as $z \to \infty$ in the sector $-\pi < \operatorname{ph} z < 0$.

Level 1. Now we re-expand the remainder. The only results that we need are the transseries expansions in (3.9).

$$\begin{aligned} u_0(z) = \sum_{s=0}^{2N-1} a_{s0} z^{-s} + z^{1-2N} \frac{K_{0,-1}}{2\pi i} \sum_{s=0}^{N-1} a_{s1} F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} \end{matrix} \right) \\ + z^{1-2N} \frac{K_{0,1}}{2\pi i} \sum_{s=0}^{N-1} (-1)^s a_{s1} F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right) + e^{-2\sqrt{3}|z|} |z| \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{5.2}$$

as $z \to \infty$ in the sector $-\pi < \operatorname{ph} z < 0$.

The reader might only be interested in asymptotics for $z \to +\infty$, and expect that the only information that is needed for the exponentially-improved asymptotic expansion is the transseries expansion for $\Re z \to +\infty$. Unfortunately, this is not enough. We need to know all possible transseries expansions. In this example there are only two possible transseries expansions, and this results in two level-1 re-expansions in (5.2). In [8] it is shown that in other examples the transseries expansions in other directions could dominate the level-1 re-expansions.

6. Painlevé: real solutions on the real line

So far, the main solution of (2.2) is $u_0(z)$. From an asymptotics point of view this solution is very special, since it is uniquely determined by its asymptotic behaviour in a large sector. All the coefficients in the Poincaré asymptotic expansion (2.3) are real. However, this function is not real on the positive real axis. This is a direct consequence of the Stokes phenomenon that takes place when crossing the positive real axis. To obtain the imaginary part of $u_0(z)$ on the positive real axis we use the level-1 hyperasymptotic expansion (5.2), and the fact that for $z > 0$ we have the identities

$$\Im \left(F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} \end{matrix} \right) \right) = \pi e^{-\sqrt{3}z} z^{2N-s-3/2} \qquad \Re \left(F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right) \right) = 0. \tag{6.1}$$

Since K_1/i and K_2 are real we have

$$\Im \left(u_0(z) \right) \sim \frac{K_1}{2i} e^{-\sqrt{3}z} z^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} a_{s1} z^{-s}, \qquad \text{as } z \to +\infty. \tag{6.2}$$

To obtain a solution that is real on the real axis we have to choose a special value for C in (3.2). The value of C that cancels the imaginary part of $u_0(z)$ is of course $C = A - \frac{1}{2}K_1$, where A is any real number. Thus the function

$$u(z, A - \frac{1}{2}K_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A - \tfrac{1}{2}K_1\right)^n u_n(z) \tag{6.3}$$

is real on the positive real axis. On the positive real axis the solution $u(z, A - \frac{1}{2}K_1)$ is uniquely determined by its level-1 hyperasymptotic expansion:

$$\begin{aligned} u(z, A - \frac{1}{2}K_1) = \sum_{s=0}^{2N-1} a_{s0} z^{-s} + z^{1-2N} \frac{K_1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{N-1} a_{s1} F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} \end{matrix} \right) \\ + z^{1-2N} \frac{K_2}{2\pi i} \sum_{s=0}^{N-1} (-1)^s a_{s1} F^{(1)} \left(z; \begin{matrix} 2N - s - \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right) \\ + \left(A - \tfrac{1}{2}K_1\right) e^{-\sqrt{3}z} z^{-1/2} \sum_{s=0}^{N-1} a_{s1} z^{-s} + e^{-2\sqrt{3}z} z \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{6.4}$$

as $z \to +\infty$, where $X - \sqrt{3}z = O(1)$.

7. Nonlinear PDEs: Burgers' equation

We consider Burgers' equation

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{C}, \quad t > 0, \quad \varepsilon \downarrow 0 \tag{7.1}$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \text{and} \quad u \to 0 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty. \tag{7.2}$$

We seek a formal solution of the form

$$u(x, t; \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} u_s(x, t)\varepsilon^s, \tag{7.3}$$

where $u_0(x, t)$ satisfies the inviscid Burgers' equation

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \qquad u_0(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{7.4}$$

Solving this equation by the method of characteristics gives $u_0 =$ constant on the characteristics $dx/dt = u_0$. Thus the solution in parametric form is $x = \xi + \frac{t}{1+\xi^2}$, where ξ is the (possibly complex) value of x at $t = 0$. There are three solutions for ξ, corresponding to three rays (characteristics) of (7.4) through each point (x, t). We label these values of ξ as x_0, x_1 and x_2, so that

$$u_0 = u_0(x_j) = \frac{1}{1 + x_j^2}, \qquad j = 0, 1, 2, \tag{7.5}$$

on the rays

$$x = x_j + u_0(x_j)t, \qquad j = 0, 1, 2, \tag{7.6}$$

where here and henceforth, we have abbreviated $u_0(x_j, 0)$ to $u_0(x_j)$.

The families of rays generated by the x_j are tangential at caustics which simultaneously satisfy (7.6) and

$$0 = 1 + \frac{du_0(x_j)}{dx_j}t, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{7.7}$$

For the chosen initial conditions the caustics are given by

$$t = \tfrac{2}{27}\left(x(x^2 + 9) \pm (x^2 - 3)^{3/2}\right). \tag{7.8}$$

For real x and t these curves are shown in Figure 2.

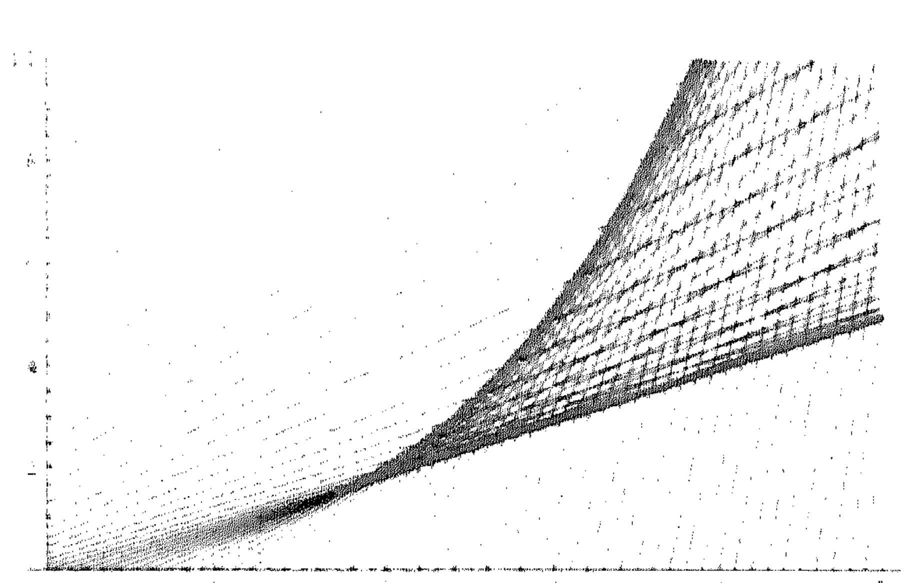


Figure 2. Rays and caustics for Burgers' equation with initial data (7.2) for $x, t \geqslant 0$.

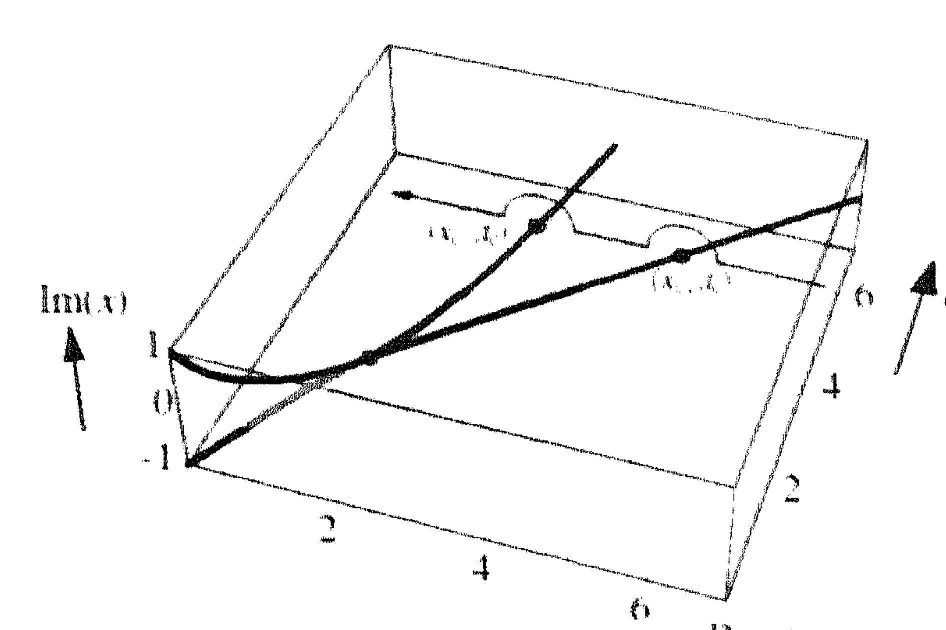


Figure 3. Caustics in complex x-space for real t and the path over them.

The caustics separate the (x,t)-plane into two regions. On the "outside" of the caustics there is one real ray through each point. Let us label the starting point of this ray x_0. Dismissing the rays originating at complex values of x_j as unphysical, this gives the unique solution for a_0 as $a_0(x_0(x,t))$. On the other hand, on the "inside" of the caustics all three rays are real, giving three possible solutions for a_0. This multivaluedness is usually eliminated by using the theory of matched asymptotic expansions and introducing a "shock" into the solution, that is, a region in which the solution u is rapidly varying and the expansion (7.3) is no longer valid.

To perform our exponential asymptotic analysis we will need to analytically continue the solution to complex values of x. In principle we could also complexify t, but for simplicity and ease of exposition we restrict ourselves to $t > 0$. Since caustics are objects of codimension 2, in the space of complex x and real t caustics are one-dimensional curves. If we now look at the caustics (7.8) in this higher-dimensional space we find that in addition to the two real caustics there are two complex caustics; See Figure 3.

At $t = 0$ these caustics correspond to two isolated turning points in the complex x-plane, located at $x = \pm i$. As t increases the complex caustics approach each other, before coalescing at $(x,t) = (\sqrt{3}, 8/\sqrt{27})$, and becoming real for $t > 8/\sqrt{27}$. Since the caustics are objects of codimension-2, they do not divide this three-dimensional space into an "inside" and an "outside". Now there are three rays through every point of space; it just happens that for real values of x between the two real caustics all three rays originate at real points, whereas for real values of x outside the two real caustics x_1 and x_2 are complex, and the rays originating from them lie in the complex (x,t)-space, only intersecting real space at the point (x,t) under consideration.

For large x and t bounded only the ray originating at x_0 does not lead to unbounded growth in the solution. In this limit $x_1 \to +i$ and $x_2 \to -i$ (say), the intersection points of the complex branches of the caustics with the complex plane $t = 0$, so that the corresponding $a_0(x_j) = 1/(1 + x_j^2)$ diverge. Thus we can at least say that the only ray which contributes for large x is that originating at x_0.

With this choice of x_j, on the branch of the complex caustic with $\Im x > 0$, x_0 coalesces with x_1. Therefore we label this branch of the caustic $\mathcal{C}_{01}$. On the branch of the complex caustic with $\Im x < 0$, x_0 coalesces with x_2. Correspondingly this branch is labelled $\mathcal{C}_{02}$. The real caustics are labelled $\mathcal{C}_R$.

8. Burgers' equation: Exponential asymptotics

In this section we just mention the results that are obtained in [2]. The derivation in that publication uses only the divergent expansions and the recurrence relations for all the coefficients. Hence, the Cole-Hopf transformation is not used. However, the ray coordinates x_j play a crucial role.

We substitute the transseries expansion

$$u(x,t;\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C^n u^{(n)}(x,t;\varepsilon) \tag{8.1}$$

where

$$u^{(0)}(x,t;\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(x,t)\varepsilon^r \quad \text{and} \quad u^{(n)}(x,t;\varepsilon) \sim e^{-nf(x,t)/\varepsilon} \sum_{r=0}^{\infty} a_r^{(n)}(x,t)\varepsilon^r, \qquad n = 1,2,3,\cdots, \tag{8.2}$$

and obtain for the functions $u^{(n)}(x,t;\varepsilon)$, $n \geqslant 1$, linear differential equations, and the exponential function $f(x,t)$ satisfies the first order nonlinear equation

$$f_t + a_0 f_x + f_x^2 = 0. \tag{8.3}$$

Note that the a_0 appearing in (8.3) is identical to the choice of a_0 in the leading order behaviour u_0 in (8.2). It is therefore $a_0(x_0(x,t))$, which is completely determined by (7.4), where $x_0(x,t)$ is the real solution of (7.6).

At the complex caustics $\mathcal{C}_{01}$ and $\mathcal{C}_{02}$ the function $a_0(x_0)$ has a cube root singularity. However the solution of our Burgers' equation is analytic near the caustics $\mathcal{C}_{01}$ and $\mathcal{C}_{02}$ for $t > 0$. This paradox can be resolved by consideration of the exponential correction terms on the right hand side of (8.1). These terms can be used to cancel the apparent leading order singularity. For that to happen we require that (at the very least) the exponents $f(x,t)$ must vanish on the complex caustics so that the exponential correction terms are there of the same order as the first series in (8.1). Since there are two such caustics we therefore deduce that there are two possible solutions f_j of (8.3) satisfying

$$f_j(x,t) = 0 \qquad \text{on} \quad \mathcal{C}_{0j}, \quad j = 1,2. \tag{8.4}$$

Using the ray coordinates x_j it is not difficult to show that

$$f_j(x(x_0,x_j), t(x_0,x_j)) = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_j} a_0(z)dz - \tfrac{1}{4}\big(a_0(x_0) + a_0(x_j)\big)(x_j - x_0), \tag{8.5}$$

$j = 1,2$. Recall that on the real caustics $\mathcal{C}_R$, x_1 and x_2 coalesce. From (8.5) we may thus deduce that $f_1(x,t) = f_2(x,t)$ on $\mathcal{C}_R$.

We walk along a path illustrated in Figure 3. For x to the right of the two real caustics we know that the free constant C in the transseries (8.1) must be zero, since the initial data does not contain exponentially small terms. When we walk along a semicircle in the complex x plane, avoiding the first real caustic, we first cross a Stokes line, and then a higher order Stokes line. Back in real x-space we have $0 < f_1 < f_2$. Thus the dominant transseries is the one for which $f = f_1$, and taking in each of the divergent series in (8.2) only the first term we obtain

$$u(x,t;\varepsilon) = a_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} K_1^n e^{-nf_1(x,t)/\varepsilon} a_0^{(n)}(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{8.6}$$

as $\varepsilon \downarrow 0$. The reader might ask why exponentially small terms are present before the $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in (8.6). This is because we are now in a region where $f_1(x,t)$ may decrease to zero. There is thus the possibility that these exponentially small terms can grow to $\mathcal{O}(1)$ and interact with $a_0(x,t)$ both in size and effect. In fact it is not difficult to show that $a_0^{(n)} = \left(a_0^{(1)}\right)^n \left(-2\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^{1-n}$, and when we use this result in (8.6) we obtain

$$u(x,t;\varepsilon) = a_0(x,t) + \frac{2K_1 a_0^{(1)}(x,t)\frac{\partial f_1}{\partial x}e^{-f_1/\varepsilon}}{2\frac{\partial f_1}{\partial x} + K_1 a_0^{(1)}(x,t)e^{-f_1/\varepsilon}} + O(\varepsilon), \tag{8.7}$$

as $\varepsilon \downarrow 0$. This result is now valid for all x between the two real caustics. Hence, it incorporates the smooth shock near $f_1 = 0$.

In the analysis above we skipped many details. The crucial role of the higher order Stokes phenomenon, especially, is not discussed. For more details on the higher order Stokes phenomenon in general the reader is referred to [4]. When we first walked along the semicircle, a Stokes phenomenon happened, in which all the terms of exponential order $\exp(-nf_1/\varepsilon)$ in (8.1) were switched on, and when we approached the region of the smooth shock, that is where $f_1 = 0$, from the right, all of these terms became of the same order as the dominant term $u^{(0)}$. Normally, this should have led to $u^{(0)}$ having a singularity at $f_1 = 0$, like the $a_0(x_0)$ having a cube root singularity at the complex caustics. The effect of the higher order Stokes phenomenon is that the terms in, for example, (8.6) are completely independent, and that these terms can be summed to produce (8.7).

Finally, we like to give the reader the following challenge. When we walked on the special path above, we went into complex x-space to avoid the real caustic. It should also be possible to obtain the same results by using a uniform asymptotics approach near the real caustics, or even a uniform asymptotics approach near the point $(x,t) = (\sqrt{3}, 8/\sqrt{27})$ where all the caustics meet each other.

References

1. P. Boutroux, *Recherches sur les transcendents de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre*, Ann. École Norm. Sup., Paris Sér 3 **30** (1913), 255–375.
2. Unpublished work by S. J. Chapman, C. J. Howls, J. R. King, A. B. Olde Daalhuis and R. H. Tew.
3. O. Costin and R. D. Costin, *On the formation of singularities of solutions of nonlinear differential systems in antistokes directions*, Invent. Math. **145**, 425–485.
4. C. J. Howls, P. J. Langman and A. B. Olde Daalhuis, *On the higher order Stokes phenomenon*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A**460** (2004), 2285–2303.
5. N. Joshi and A. V. Kitaev, *On Boutroux's tritronquée solutions of the first Painlevé equation*, Stud. Appl. Math. **107** (2001), 253–291.
6. A. B. Olde Daalhuis, *Hyperasymptotic solutions of higher order linear differential equations with a singularity of rank one*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A**454** (1998), 1–29.
7. ———, *On the computation of Stokes multipliers via hyperasymptotics*, Surikaisekikenkyusho Kôkyûroku **1088** (1999), 68–78.
8. ———, *Hyperasymptotics for nonlinear ODEs II: The first Painlevé equation and a second order Riccati equation*, to appear in Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. (2005).
9. A. B. Olde Daalhuis and F. W. J. Olver, *Exponentially improved asymptotic solutions of ordinary differential equations. II. Irregular singularities of rank one*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A**445** (1994), 39–56.
10. Y. Takei, *On the connection formula for the first Painlevé equation*, Surikaisekikenkyûsho Kôkyuroku **931** (1995), 70–99.

On numerical algorithms for special function evaluation

Amparo Gil & Javier Segura

Depto. de Matemáticas, Estadística y Computación. Universidad de Cantabria. 39005-Santander. Spain. e-mail: amparo.gil@unican.es, javier.segura@unican.es

Abstract

We consider the numerical solution of differential equations $y''(x) + A(x)y(x) = 0$, with $A(x) = x^m(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ and $m = 0, -1, -2$ and conclude that much work is needed in order to solve completely and satisfactorily the whole problem, in particular for large parameter values.

Introduction

In this short paper, we review the state of the art in the numerical solution of second order ODEs of the form

$$y''(x) + x^m(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)y(x) = 0\,,\, m = 0, -1, -2 \tag{1}$$

Our aim is not to review all the references available for the computation of this family of special functions (see the excellent review by Lozier and Olver [15]). Instead, our intention is to analyze what remains to be done in order to satisfactorily solve the problem.

We will restrict to real variables and parameters. Furthermore we will consider that $x \geq 0$ (which is no restriction given that we consider unrestricted real parameters).

When two independent solutions $y_1(x)$ and $y_2(x)$ and their first derivatives can be computed and they are numerically satisfactory in the sense described by Miller [16], we can claim that the problem has been satisfactorily solved. If, in addition, these solutions can be computed for (almost) unrestricted values of the argument and the parameters (probably by factoring out a "trivial" elementary function), we could say that the problem is **completely solved**.

In collaboration with Nico, in the last few years we have solved (almost) completely and accurately some of these problems (and we enjoyed a lot doing so!).

First, let us notice that not all the differential equations proposed are independent among them.

1 Some Liouville-Green transformations

First, let us recall that given a second order ODE

$$y''(x) + B(x)y'(x) + A(x)y(x) = 0 \tag{2}$$

$Y(x) = exp\left(\frac{1}{2}\int^{x} B(x)\right) y(x)$ satisfies

$$Y''(x) + [A(x) - B'(x)/2 - B(x)^2/4]Y(x) = 0. \tag{3}$$

Therefore, the normal form (without first derivative term) is not a significant restriction. The true restriction is in the form of $A(x)$, $A(x) = x^m(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.

On the other hand, if $y(x)$ is a solution of $y''(x) + A(x)y(x) = 0$ then $Y(x(z))$ given by $Y(x) = \sqrt{z'(x)}y(x)$ is a solution of $\ddot{Y}(z) + \Omega(x(z))Y(z) = 0$, where

$$\Omega(z(x)) = \frac{1}{z'(x)^2}\left[A(x) + \frac{3d'(x)^2}{4d(x)^2} - \frac{d''(x)}{2d(x)}\right] \tag{4}$$

This is a Liouville-Green transformation. Some of the $A(x)$ functions considered here can be related between them by applying a change of variable $z(x) = x^k/k$, $k \neq 0$, and then transforming to normal form. With such changes of variable we find

$$\Omega(z) = \frac{1}{k^2z^2}\left[(kz)^{2/k}A(x(z)) + \frac{k^2-1}{4}\right] \tag{5}$$

and in order to stay within the same family of ODEs

$$(kz)^{2/k}A(x(z)) = a_2k^2z^2 + a_1kz + a_0 \tag{6}$$

and then

$$A(x) = \frac{1}{x^2}\left(a_2x^{2k} + a_1x^k + a_0\right) \tag{7}$$

which, again, should stay in the same family, but with respect to the x variable. Then, there is not much choice for k, namely (excluding the trivial cases $k = \pm 1$):

1. When $k = 1/2$ ($z(x) = 2\sqrt{x}$) and taking $a_1 = 0$ we have:

$$A(x) = \frac{a_2}{x} + \frac{a_0}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \Omega(z) = a_2 + \frac{16a_0 - 3}{4z^2} \tag{8}$$

2. When $k = 3/2$ ($z(x) = \frac{3}{2}x^{3/2}$) and taking $a_1 = a_0 = 0$:

$$A(x) = a_2 x \quad \Rightarrow \quad \Omega(z) = a_2 + \frac{5}{36z^2} \tag{9}$$

3. When $k = 2$ ($z(x) = \frac{1}{2}x^2$) and taking $a_2 = 0$:

$$A(x) = a_1 + \frac{a_0}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \Omega(z) = \frac{a_1}{2z} + \frac{4a_0 + 3}{16z^2} \tag{10}$$

4. When $k = 2$ ($z(x) = \frac{1}{2}x^2$) and taking $a_0 = 0$:

$$A(x) = a_2 x^2 + a_1 \quad \Rightarrow \quad \Omega(z) = a_2 + \frac{a_1}{2z} + \frac{3}{16z^2} \tag{11}$$

2 The three cases $m = 0, -1, -2$ and their numerical solution

Many different names are given to the special functions which solve our problem differential equations, in some cases, different names represent almost the same function, in other cases some functions are a subset of other functions. Functions like Kummer functions, Whittaker functions, Laguerre polynomials, confluent hypergeometric functions, Bessel functions, Coulomb functions, Parabolic Cylinder Functions and Hermite polynomials are part of the solutions involved. The largest set is that of complex Whittaker or Coulomb wave functions, which includes the rest except one (if the authors didn't miss a point here), namely

$$A(x) = \alpha x + \beta + \gamma/x \tag{12}$$

with $\alpha\gamma \neq 0$. Are the corresponding solutions special functions?. Yes, why not?.

Let us consider separately the cases $m = 0, -1, -2$.

2.1 Case I (m=0): $A(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

2.1.1 Subcase I.a: $\alpha = 0$

With a linear change of variable, it is evident that for $\beta \neq 0$ solving the equation $y''(x) + A(x)y(x) = 0$, $x \geq 0$, is equivalent to solving

$$y''(x) + \text{sign}(\beta) x y(x) = 0\,,\, x \geq 0 \tag{13}$$

or equivalently
$$y''(x) - xy(x) = 0\,,\, x \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Of course, the second equation when positive and negative values of x are allowed solves both (13) and (14). This is the standard notation and therefore we refer to (14) as the Airy equation.

Using the change of variables $z(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$, equation (13) transforms to

$$\ddot{Y}(z) + \left[\mathrm{sign}(\beta) + \frac{5}{36z^2}\right] Y(z) = 0\,,\, z > 0 \tag{15}$$

which is a special case of the Bessel equation when $\beta > 0$ and the modified Bessel equation when $\beta < 0$. Or, if we let $x \in \mathbb{R}$ (14) and z complex we can write
$$\ddot{Y}(z) + \left[-1 + \frac{5}{36z^2}\right] Y(z) = 0\,,\, z \in \mathbb{C}\,, \tag{16}$$
where the case $\beta > 0$ in Eq. (13) corresponds to $\Im(z) = 0$ and $\beta < 0$ to $\Re(z) = 0$.

The solutions of the Airy equation are one of the very few examples for which there is a satisfactory, complete and accurate numerical solution *in the complex plane*. Different approaches to the numerical solution of this problem, with distinct advantages can be found. For instance in [2] the relation with complex Bessel functions (Eq (15)) is used. This approach suffers from mild instabilities (due to partial cancellations) which are avoided by our algorithms [5, 6] and those in [12, 13]. For real variable, a more efficient approach for fixed precision comes from the use of Chebyshev approximations [14].

Airy functions are important functions appearing in many branches in applied science; in particular, they can be used as approximants to differential equations with one turning point (being the Airy equation the simplest possible equation of this type).

Let us briefly illustrate the concepts of numerically satisfactory pair and exponentially scaled functions using Airy functions as an example. From Eq. (16) it is easy to see that as $|z| \to +\infty$ $Y(z) \sim e^{\pm z}$ and solutions of (14) for $x \in \mathbb{R}$ exist which satisfy

$$y(x) \sim x^{1/4} \exp(\pm\frac{2}{3}x^{3/2})\,, |x| \to +\infty\,. \tag{17}$$

Therefore, for any complex value of x with $\Re(x) > 0$ we expect exponentially increasing solutions and one exponentially decreasing solution. A problem is satisfactorily solved if a pair of independent solutions is available which includes the recessive solution at infinity (if it exists).

On the other hand, if possible, it is always interesting to compute first scaled functions by factoring out the dominant factors and then multiply by the dominant exponential factors when plain functions are needed. In this way the main sources of overflow/underflow limitations and bad conditioning in the evaluation of the functions is confined to the evaluation of an elementary function of large argument ($\exp\left(\pm\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$ in the case of Airy functions) with the exception of the computation near the zeros of the function, where the computation is unavoidably bad conditioned.

In [6] we computed Airy functions in the complex plane by applying Maclaurin series for small $|z|$, quadrature methods for intermediate $|z|$ and asymptotic expansions for large $|z|$. The dominant exponential factor can be factored out exactly in the integral representations and, of course, from the asymptotic expansions too.

For this ODE, also the inhomogeneous problem

$$y(z)'' - zy(z) = K \tag{18}$$

has been also (almost) completely solved. Particular solutions of the homogeneous equation are the Scorer functions $\mathrm{Gi}(z)$, $\mathrm{Hi}(z)$. Numerically stable quadrature methods were developed in [3] which are particularly useful for intermediate values of $|z|$. These quadrature methods, together with Maclaurin series and asymptotic expansions, were implemented in [7].

2.1.2 Subcase I.b: $\alpha \neq 0$

Writing $A(x) = \alpha(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$ it is clear that, with a linear change of variable, these equations can be transformed into one of the following two equations:

$$y''(x) - \left(\frac{x^2}{4} + a\right) y(x) = 0\,, \text{when } \alpha < 0 \tag{19}$$

or

$$y''(x) + \left(\frac{x^2}{4} - a\right) y(x) = 0\,, \text{when } \alpha > 0\,. \tag{20}$$

In both cases, due to the symmetry of the differential equation, it is sufficient to consider $x \geq 0$.

For the first differential equation, a numerically satisfactory pair for $x \geq 0$ and $a \in \mathbb{R}$ is formed by the parabolic cylinder functions $U(a,x)$ and $V(a,x)$ [1]. Recently, we have studied a variety of methods in order to (almost) completely solve the problem: the methods include Maclaurin series, numerical quadrature [8], Poincaré and uniform asymptotic expansions [9]. The numerical solution of this differential equation was implemented in [10]. In our opinion (we hope it will be shared by the referees), the algorithm solves completely and accurately the problem.

The dominant exponential factors nicely factor out from the integral representations as well as from the uniform asymptotic expansions. This allowed us to scale them out exactly for moderate and large values of the parameters. These factors can be taken as $F(a,x)$ for $V(a,x)$ and its derivative and $F(a,x)^{-1}$ for $U(a,x)$ and its derivative, where $F(a,x) = |f(a,x)|$ and

$$f(a,x) = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + a}\right)^a \exp\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4} + a} - \frac{a}{2}\right). \qquad (21)$$

For the second type of differential equation (20), let us notice that by making the replacement $a \to ia$, $x \to e^{-i\pi/4}x$ in the first parabolic equation (19) we obtain the second equation. It is not surprising that the standard solutions $W(a,x)$ and $W(a,-x)$, can be related to $U(ia, e^{-i\pi/4}x)$ (see [1], Eqs. 19.17.6 and 19.17.9). This is the starting point of the non-oscillating integral representations considered in [8].

Needless to say, if one solves completely and satisfactorily (19) for complex variables then (20) is automatically solve. However, the qualitative behavior for real parameters is very different in each of these equations and the numerical solution needs also special treatment.

We expect that, similarly as done for Eq. (19), a combination of methods, one of them being the integral representations in [8], will lead to an (almost) complete and satisfactory numerical solution.

Therefore, it seems that in collaboration with Nico we are on the way to solve completely case I. Good!

2.2 Case II (m=-1): $A(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)/x$

When $\gamma = 0$ we are back to case I and when $\alpha = 0$ the equation is of type III.

However, when $\alpha\gamma \neq 0$, we have a type of function which, to our knowledge, does not lie within a "family of functions with a name". Are these special functions? Yes, why not?

2.3 Case III (m=-2): $A(x) = \alpha + \beta/x + \gamma/x^2$

The case $\alpha = 0$, as discussed before, can be transformed with the change $z(x) = 2\sqrt{x}$ to a case with $\beta = 0$ (Bessel functions), that we are next discussing.

2.3.1 Subcase: $\beta = 0$ (Bessel functions)

The case $\beta = 0$ corresponds to Bessel functions, which is an important subset with many applications. We start with the equation

$$y''(x) + \left[1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right] y(x) = 0. \tag{22}$$

A pair of numerically satisfactory solutions is $y_1(x) = \sqrt{x}J_\nu(x)$, $y_2(x) = \sqrt{x}Y_\nu(x)$, being $J_\nu(x)$ and $Y_\nu(x)$ Bessel functions [1]. The solutions of this differential equation are also called Ricatti-Bessel functions. By making the replacement $x \to ix$, we obtain the equation

$$y''(x) + \left[-1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right] y(x) = 0. \tag{23}$$

being a numerically satisfactory pair $y_1(x) = \sqrt{x}I_\nu(x)$ and $y_2(x) = \sqrt{x}K_\nu(x)$. The functions $I_\nu(x)$ and $K_\nu(x)$ are called Modified Bessel functions.

Several published algorithms exist which compute Bessel and modified Bessel functions. Probably the most complete one, apart from the code for Coulomb functions which, as a subset, includes Bessel functions is the code by Amos [2], which can be used to compute Bessel functions of complex argument and real positive order. This code can be used to compute both the Bessel functions $J_\nu(x)$ and $Y_\nu(x)$ as well as the modified Bessel functions $K_\nu(x)$ and $I_\nu(x)$; also, as commented, complex Airy functions can be computed by using this code. Amos code is a satisfactory solution although not totally complete, in the sense before described: indeed, the functions are only scaled in the x variable, but not on ν. It would be desirable to build algorithms with all dominant exponential factors scaled out, as is the case we discuss next.

When making the replacement $\nu \to ia$ in (23), we obtain the equation satisfied by $\sqrt{x}K_{ia}(x)$ and $\sqrt{x}I_{ia}(x)$, namely

$$y''(x) + \left[-1 + \frac{a^2 + 1/4}{x^2}\right] y(x) = 0. \tag{24}$$

A better choice of accompanying solution to $K_{ia}(x)$ is $L_{ia}(x) = (I_{ia}(x) + I_{-ia}(x))/2$, which is real for real values of a and x. $K_{ia}(x)$, $I_{ia}(x)$ constitute a numerically satisfactory pair of solutions.

In [4] non-oscillating integral representations were obtained for this functions which show explicitly the dominant exponential factor. This factor can be scaled out in order to enlarge the range of computation. Therefore, the problem is solved satisfactorily and completely (or almost completely).

Eqs. (23) together with (24) can be used to completely solve any equation of the type

$$y''(x) + \left[\alpha + \frac{\gamma}{x^2}\right] y(x) = 0\,, \alpha < 0 \tag{25}$$

for any $\gamma \in \mathbb{R}$.

We observe that the same is not true for $\alpha > 0$. We would need algorithms to compute the functions $J_{ia}(x)$ and $Y_{ia}(x)$ or related functions. As far as we know, the only algorithm which is in principle capable of performing such computation is the code for the computation of Coulomb wave functions [20] that we are discussing in the next section.

In any case, the existing codes can be improved by enlarging the range of computation by scaling in a more effective way, except in the case of $K_{ia}(x)$ and $L_{ia}(x)$, where such factorization has been considered already.

2.3.2 General case

Coulomb wave functions are solutions of the differential equation

$$y''(x) + \left[1 - \frac{2\eta}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] y(x) = 0\,. \tag{26}$$

The solutions reduce to Ricatti-Bessel functions for $\eta = 0$. Several codes are available for real arguments and parameters. Also, methods for the computation for complex values of the argument and the parameter are described in [21], and an explicit Fortran program is given in [20]. Some scaling is provided, although it only depends on the variable x, and it is therefore expected to fail for large values of the parameters.

Notice that for real parameters, the Coulomb equation can be used to solve any equation

$$y''(x) + \left[\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}\right] y(x) = 0 \tag{27}$$

with $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in (-\infty, 1/4)$. But when considering complex arguments and parameters, no restrictions appear on the possible values of the real parameters. However, one should study whether the same pair of solutions is always a satisfactory pair as any of the three arguments becomes large; also, finding appropriate scaling factors for three complex parameters seems difficult.

For these reasons, among others, it is necessary to study more restrictive and simple cases, even if they reduce to Coulomb wave functions. Notice, indeed, that any of the equations studied so far reduces to the Coulomb equation of complex argument and parameters, also parabolic cylinder functions. Indeed, rewriting slightly the parabolic cylinder equations as

$$y''(x) + (\pm x^2 + a)y(x) = 0 \tag{28}$$

with the change $z(x) = x^2/2$, the Liouville-Green transformed equation reads

$$y''(x) + \left[\pm 1 + \frac{a}{2x} + \frac{3}{16x^2}\right] y(x) = 0 \tag{29}$$

which, for the plus sign (corresponding to $W(a, \pm x)$) is the equation for Coulomb wave functions for $\eta = -a/4$ and $l = -1/4$, while for the minus sign it corresponds to Coulomb wave functions of imaginary arguments.

Regarding the relation of Coulomb functions with Bessel functions of imaginary orders, comparison with the code for the computation of the $K_{ia}(x)$ and $L_{ia}(x)$ showed that, as expected, the computation via complex Coulomb functions [20] was far more restricted that the more specific computation [11].

Needless to say, Thompson & Barnett code is a serious and powerful algorithm when not too large values of the parameters are required. However, if possible, it would be interesting to design methods with less restrictions on the parameter values, at least for some important cases.

Also, because it is aimed to compute functions with three complex arguments, an intensive testing against algorithms with certified precision is desirable. This will be the subject of further research.

Acknowledgments

We acknowledge the most enjoyable collaboration with Nico Temme through all these years.

References

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun (editors). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[2] D.E. Amos. Algorithm 644: a portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order. *ACM Trans. Math. Software* **12** (1986) 265–273.

[3] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. On nonoscillating integrals for computing inhomogeneous Airy functions. Math. Comp. **70** (2001) 1183–1194.

[4] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Evaluation of the modified Bessel function of the third kind of imaginary orders. J. Comput. Phys. **175** (2002) 398–411.

[5] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Computing complex Airy functions by numerical quadrature. Numer. Algorithms **30** (2002) 11–23.

[6] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Algorithm 819: AIZ, BIZ: two Fortran 77 routines for the computation of complex Airy functions. *ACM Trans. Math. Software* **28** (2002) 325–336.

[7] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Algorithm 822: GIZ, HIZ: two Fortran 77 routines for the computation of complex scorer functions. ACM Trans. Math. Software **28** (2002) 436–447.

[8] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Integral representations for computing real parabolic cylinder functions. Numer. Math. **98** (2004) 105–134.

[9] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Computing The Real Parabolic Cylinder Functions $U(a,x)$, $V(a,x)$. *ACM Trans. Math. Software*, submitted.

[10] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Algorithm: Real Parabolic Cylinder functions $U(a,x)$, $V(a,x)$. *ACM Trans. Math. Software*, submitted.

[11] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Algorithm 831: modified Bessel functions of imaginary order and positive argument. ACM Trans. Math. Software **30** (2004) 159–164.

[12] B. R. Fabijonas, D. W. Lozier and F. W. J. Olver. Computation of Complex Airy Functions and their Zeros using Asymptotics and the Differential Equation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **30** 2004 471–490

[13] B. R. Fabijonas. Algorithm 838: Airy Functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **30** (2004) 491–501.

[14] L.W. Fullerton. Portable special function routines. Lecture Notes in Computer Science 57 (1977) 452–483. W. R. Cowell (Ed.), Portability of numerical software (Oak Brook, Illinois, 1976), Berlin: Springer-Verlag.

[15] D.W. Lozier, F.W.J. Olver. Numerical evaluation of special functions, in Mathematics of Computation 1943–1993: a half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993). Proc. Sympos. Appl. Math. **48** (1994) 79–125.

[16] J. C. P. Miller. On the choice of standard solutions for a homogeneous linear differential equation of the second order. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **3** (1950) 225–235.

[17] F.W.J. Olver. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions. J. Res. NBS **63B** (1959) 131-169.

[18] F. W. J. Olver. Asymptotics and special functions. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[19] N.M. Temme. Numerical and asymptotic aspects of parabolic cylinder functions. J. Comput. Appl. Math. **121** (2000) 221–246.

[20] I.J. Thompson, A.R. Barnett. COULCC: A continued-fraction algorithm for Coulomb functions of complex order with complex arguments. Comput. Phys. Comm. **36** (1985) 363–372.

[21] I.J. Thompson, A.R. Barnett. Coulomb and Bessel functions of complex arguments and order. J. Comput. Phys. **64** (1986) 490–509.

Gabor Atomic Decompositions in Underwater Acoustics

Patrick Oonincx
Royal Netherlands Naval College
P.O. Box 10000, 1780 CA Den Helder

The topic of this paper combines Nico Temme's interests on series expansions, the sidekick Nico made in the late nineties and the author's own interests in the field of harmonic analysis and acoustics.

1. Introduction

Joint time-frequency transformations on signals have been a topic of interest for many researchers in the past century. Amongst them, some Nobel prize winners can be found, namely E. Wigner (1963) and D. Gabor (1971). The first one introduced a bilinear transformation in quantum mechanics [9], representing the distribution in position and momentum variables. Later J. Ville introduced the transformation as a tool for signal analysis. Nowadays, after N. de Bruijn [1] had shown some interesting features of the transform, it has become a common tool for representing energy contents of a signal in both time and frequency, reading

$$\mathcal{W}[s](t,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t+u/2)\, s^*(t-u/2)\, e^{-iuf}\, du, \tag{1}$$

for any $s \in L^2(I\!R)$.

The Gabor transform is a special case of the more general windowed or short-time Fourier transform(STFT), given by

$$\mathcal{F}_h[s](t,f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\, h^*(u-t) e^{-iuf}\, du. \tag{2}$$

Here h^* denotes the complex conjugate of a sliding window function $h \in L^2(I\!R)$. In fact within a window h centered around time t the STFT computes frequencies f by means of the Fourier transform. The Gabor transform appears when using a Gaussian window $h_\sigma(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}\, e^{-t^2/2\sigma^2}$, with $\sigma > 0$ a parameter to adapt the window size.

In the eighties, analysis by means of scales instead of frequencies was introduced. Moreover, replacing the Fourier transform component (e^{-iuf}) in (2) by a scaling operator yields a transformation that became well-known as the continuous wavelet transform (CWT)

$$\mathcal{W}_\psi[s](t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\, \psi^* \left(\frac{u-t}{a}\right)\, du, \tag{3}$$

with $\psi \in L^2(I\!R)$ a wavelet function [2].

In an attempt to keep the best of both worlds, S. Mallat et al. [6] discovered a way of representing signals in terms of functions that depend on both scaling and frequency modulation: atomic decomposition using the Matching Pursuit algorithm.

2. Matching Pursuit

The Matching Pursuit (MP) algorithm is an adaptive time-frequency transform that more or less combines the STFT and the CWT. The algorithm projects a signal $s(t)$ on a redundant set of functions (atoms) generated by scaling, time shifting and frequency modulation of one given window function h, i.e.,

$$h_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, h\left(\frac{u-t}{a}\right) e^{-iuf}, \quad \gamma = (a,t,f) \in I\!R^+ \times I\!R^2. \tag{4}$$

As for the STFT we suppose $h(u)$ to be normalized in energy ($\|h\|_2 = 1$). As a special case, we consider the Gabor atom h which is used in the Gabor transform. Particularly we take $h(u) = 2^{1/4}\, e^{-\pi u^2}$, i.e., the Gaussian window function with $\sigma^2 = 1/2\pi$.

B. Torrésani showed [8], that any signal $s \in L^2(I\!R)$ can be represented by an appropriate countable subset of such Gabor atoms $h_{\gamma_n}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ with $\gamma_n = (a_n, t_n, f_n)$ by means of a series expansion

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, h_{\gamma_n}.$$

We briefly discuss how to obtain the series expansion for which surprisingly also a kind of Parseval's relation holds

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2. \tag{5}$$

Note that, although we can show that via MP this relation can be achieved, the set of all h_{γ_n} is not necessarily an orthonormal system. It will turn out, that Relation (5) is the outcome of the pursuit projection algorithm and not of mathematical properties of the atoms.

We start the Matching Pursuit algorithm by taking an appropriate countable subset of Gabor atoms h_{γ_n}, e.g. by means of a tiling in the scale-time-frequency place (atf). Then, using a cost function, the algorithm is able to find an atom, say h_{γ_0}, that matches best with s by means of the L^2-inner product, i.e.,

$$|< s, h_{\gamma_0} >| \geq |< s, h_{\gamma_n} >|, \; n > 0.$$

The signal s is then decomposed into

$$s =< s, h_{\gamma_0} > h_{\gamma_0} + R_1 s, \tag{6}$$

with $R_1 s$ a residual. We observe, that this is not an obvious way of decomposing functions in terms of a frame or basis, because no dual frame or a basis is involved in the MP algorithm. However, by using this decomposition straightforwardly we get $< R_1 s, h_{\gamma_0} >= 0$ and therefore

$$\|s\|^2 = |< s, h_{\gamma_0} >|^2 + \|R_1 s\|^2. \tag{7}$$

The next step in the algorithm is to decompose $R_1 s$ in a similar way, namely by finding the best matching atom h_{γ_1}, i.e.,

$$|< R_1 s, h_{\gamma_1} >| \geq |< R_1 s, h_{\gamma_n} >|, \; n > 1.$$

This yields the next step in the decomposition scheme

$$R_1 s = < R_1 s, h_{\gamma_1} > h_{\gamma_1} + R_2 s,$$

and in an analogous way

$$\|R_1 s\|^2 = | < s, h_{\gamma_1} > |^2 + \|R_2 s\|^2.$$

By iteration we end up with the atomic decomposition

$$s = \sum_{n=0}^{N-1} < R_n s, h_{\gamma_n} > h_{\gamma_n} + R_N s, \tag{8}$$

with $R_0 s = s$ by definition. Furthermore, we have

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} | < R_n s, h_{\gamma_n} > |^2 + \|R_N s\|^2, \tag{9}$$

Convergence of the projection pursuit algorithms was conjectured by P. Huber [4] and later proved by L. Jones in [5]. Owing to his result, taking $N \to \infty$ in (8) and (9) yields

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} < R_n s, h_{\gamma_n} > h_{\gamma_n}, \tag{10}$$

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} | < R_n s, h_{\gamma_n} > |^2. \tag{11}$$

Concluding, we established a nonlinear decomposition of a signal s into a sum of atoms with some desirable physical signature. Moreover, although the decomposition is nonlinear we maintain an energy conservation law as if it was a linear orthogonal decomposition.

3. Gabor Atoms for the Geoacoustic Inversion Problem

We consider the problem of resolving parameters in acoustic wave equations, describing the propagation of acoustic waves in a shallow water environment. These equations are partial differential equations (Helmholtz-type) with boundary conditions at the sea bottom and the water surface. Amongst others, parameters that play a role in this set of equations are local water depth, local sound speed, density and attenuation of a bottom clay layer and sound speed in the silt bottom. Note that these parameters are dependent on position.

To get information on the bottom parameters we conduct experiments to get Green's functions for these PDE. Once Green's functions are known one may retrieve the bottom parameters using inversion techniques. In these experiments a sonar beam is transmitted under water and at several ranges and depths the propagated (and reflected) signals are received at a hydrophone. This impulse response can be translated into a Green's function for that particular situation. The more experiments one conducts the more information is obtained, to be used for inversion.

Atomic decomposition with time-frequency atoms is a useful tool for geoacoustic inversion, because at several ranges and depths the impulse responses can be very well approximated by only a few Gabor atoms, each representing different physical properties. As a result, the inversion problem can be simplified by using the sparse approximation with a limited number of atoms. These atoms will cover the main features of the signal. Here we will not go into further details, but we want to emphasize that a limited number of atoms in the decomposition already gives a nice approximation of the real impulse response in the time-frequency plane.

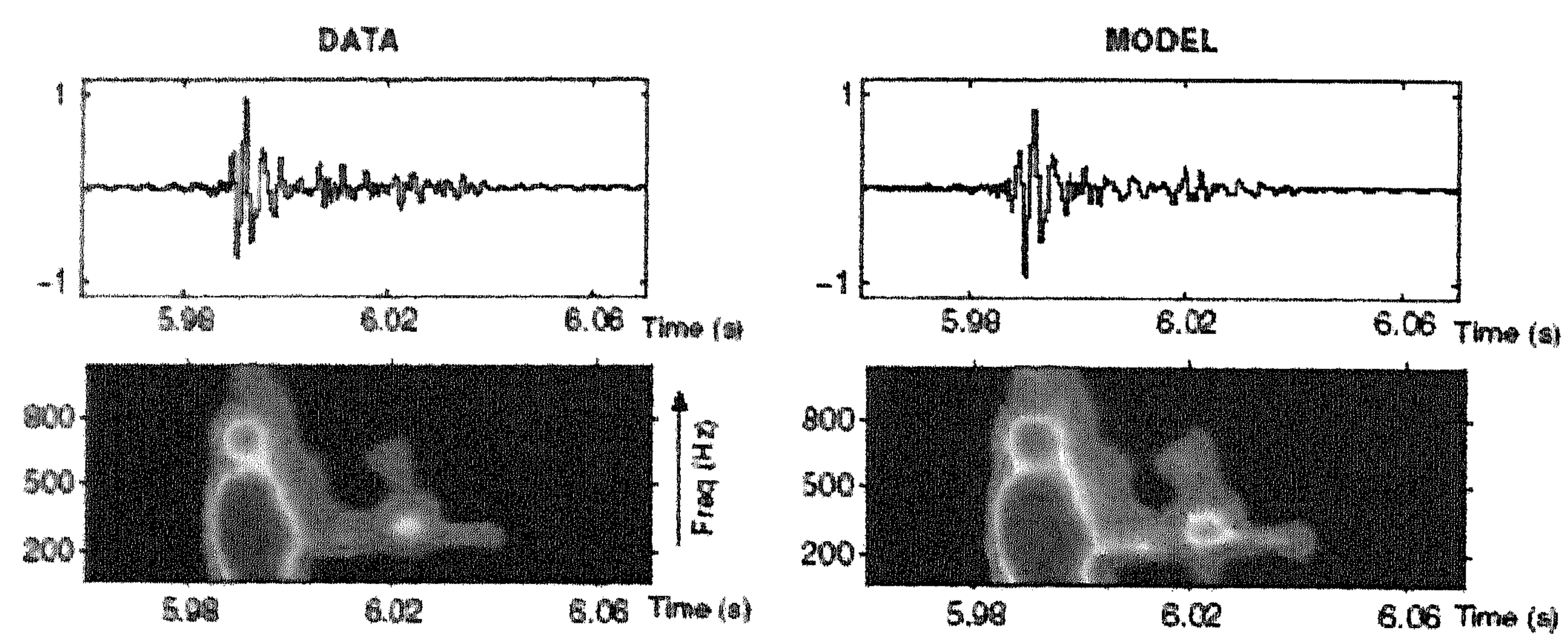


Figure 1: Measured vs. modeled data and their representations in the time-frequency domain using an approximation of 15 Gabor atoms. The coloring indicates the amount of energy (from -40 dB dark blue to -3 dB dark red).

Figure 1 shows an example of a measured impulse response (left) and the corresponding modeled impulse response (right). The modeled data were obtained directly from the PDE system using a good-fitting set of bottom geo-acoustic parameters. For both data, Matching Pursuit was used up to 15 Gabor atoms. This finite series expansion is depicted in the lower plots in the time frequency domain using a STFT. Obviously the limited number of Gabor atoms already give a good match between measured and modeled data. This means that the most important physical features are captured in a relatively small number of functions in the series expansion. Other measurements showed a similar behavior, indicating that MP is an appropriate tool for using within geoacoustic inversion problems. For more information on the experiment and its set-up we refer to [3,7].

4. The Energy Conservation Law for Range Detection

Not only for inversion problems MP seems to be a powerful tool. Preliminary results also indicate a direct relation between changes in the parameters and the 'quality' of the approximation by a limited series expansion. If one is able to indicate locations where bottom parameters are changing, it is possible to split the PDE system into parts covering different regions of the sea bottom, with locally almost constant parameters. This type of segmentation will decrease the complexity of the inversion problem.

Information on the changing bottom structure is obtained by means of the same experiment as in the previous section. However, now the hydrophone was located under a drifting buoy, passing several segments of a shallow water area. At a fixed time rate impulse responses were registrated at the hydrophone as it passed areas of different sediment and water depth.

To measure the relation between changing bottom parameters and the atomic decomposition, we introduce the energy ratio

$$E_s(N) = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |< s, h_{\gamma_n} >|^2}}{\|s\|}, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Owing to the results of Section 2 we have

$$\begin{aligned} &0 < E_s(N) \leq 1, \quad N = 1, 2, \ldots \\ &E_s(N) < E_s(N+1), \quad N = 1, 2, \ldots \\ &E_s(N) \to 1, \quad N \to \infty. \end{aligned}$$

Now, the idea is that for a fixed small number N the value of $E_{s_i}(N)$ will decrease when bottom parameters change, i.e., when more atoms are needed to approximate the measured impulse responses s_i, $i = 1, 2, \ldots$, with high accuracy. Figure 2 shows, for one particular experiment, the values of $E_{s_i}(N)$ for different measured impulse responses with index $i = 1, \ldots, 255$, and for a different number of atoms $N = 1, \ldots, 20$. The coloring indicates the value of $E_s(N)$ between 0.6 (blue) and 1 (red). Clearly there is a substantial difference in the structure of the decomposition as the buoy drifts from one area into an other. For example, more atoms are needed for $i = 55$ to $i = 110$ for covering the same amount of energy as in the neighboring areas, indicating a change of the parameters.

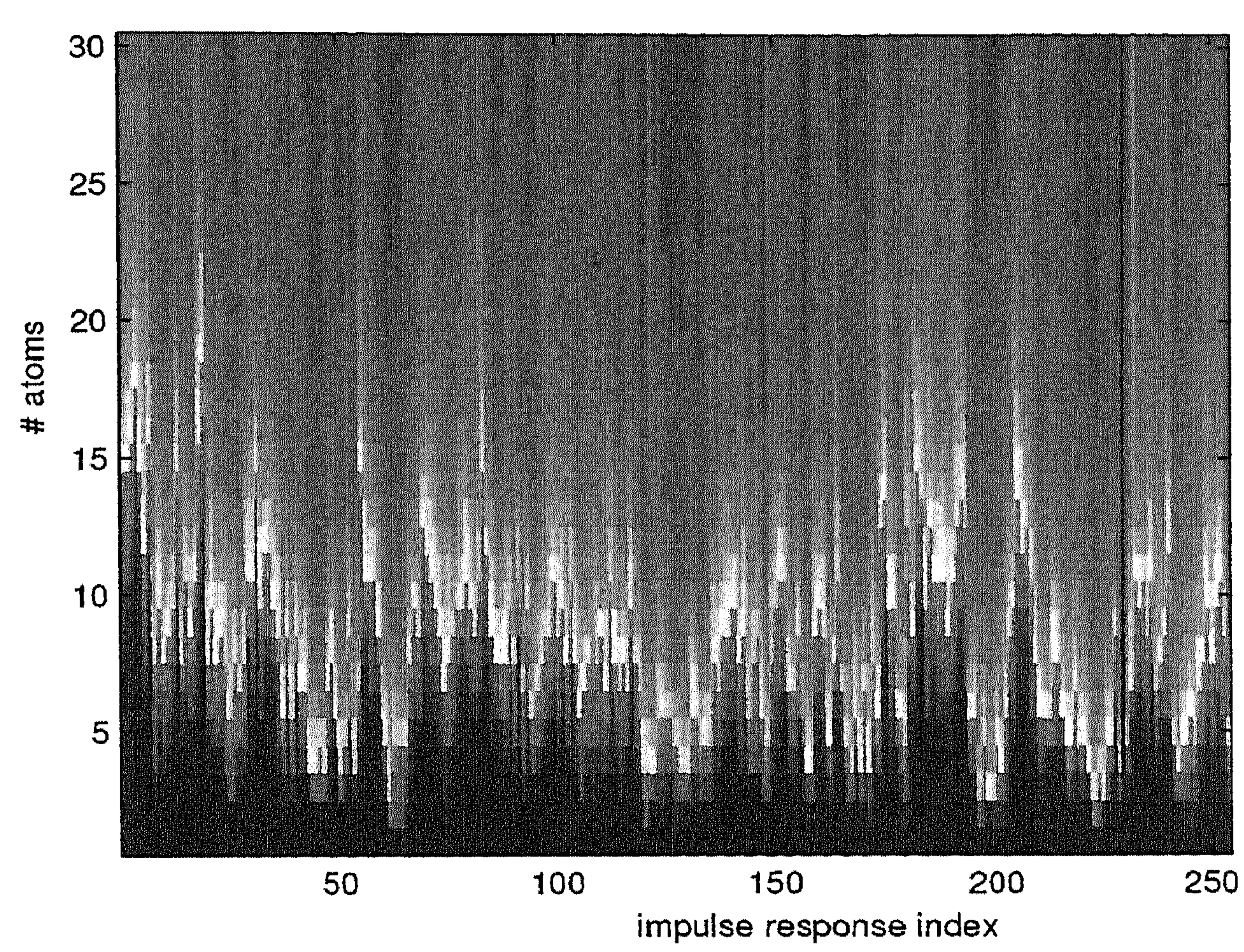


Figure 2: Value of $E_{s_i}(N)$ plotted against the index i of the impulse response s_i on the x-axis and the number of atoms N on the y-axis .

5. Conclusions

In this paper we have shown how pursuit algorithms can decompose signals into functions that may be physically closely related to the signals themselves, while the functions do not have to constitute a basis or a frame. Moreover, decomposing signals using pursuit algorithms leads to energy conservation within the decomposition.

Two examples of applications of pursuit algorithms in underwater acoustics showed how powerful these mathematical tools can be in physics. By not giving up the physical signature of the approximation functions we are able to get a sparse representation of physical data. Furthermore, some kind of mathematical structure is guaranteed by an energy conservation law, which directly results from the pursuit algorithm scheme.

References

[1] N.G. de Bruijn, "A theory of generalized functions, with applications to Wigner distributions and Weyl correspondence", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3) 21, 205-280, 1973.

[2] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[3] J.-P. Hermand, "Broad-band geoacoustic inversion in shallow water from waveguide impulse response measurements on a single hydrophone: Theory and experimental Results", *IEEE J. Oceanic Eng.*, 24(1), 41-66, 1999.

[4] P.J. Huber, "Projection pursuit", *Ann. Stat.*, 13(2), 435-475, 1985.

[5] L.K. Jones, "On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression", *Ann. Stat.*, 15(2), 880-882, 1987.

[6] S.G. Mallat, Z. Zhang, "Matching pursuit with time-frequency dictionaries", *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 41(12), 3397-3415, 1993.

[7] P.J. Oonincx, J.-P. Hermand, E.Hoekstra, "Time-frequency approach to geoacoustic inversion", *Proc. 7th European Conf. on Underwater Acoustics 2004*, 709-714, Delft, The Netherlands, 2004.

[8] B. Torresani, "Wavelets associated with representations of the affine Weyl-Heisenberg group", *J. Math. Phys.*, vol. 32, 1273-1279, 1991.

[9] E.P. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Review*, 40, 749-759, 1932.