stichting
mathematisch
centrum

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 2/71 MEI

G. DE LEVE en J.C. VAN DALEN

INLEIDING IN DE BESLISKUNDE, deel 1

Syllabus van het college voor economie-studenten aan de Universiteit van Amsterdam

Tweede (ongewijzigde) druk

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

INLEIDING BESLISKUNDE

INHOUDSOPGAVE DEEL I

1. MODELLEN EN BESLISSINGEN.

1.1 Inleiding

Het zal slechts weinigen zijn ontgaan dat er situaties bestaan waarin beslissingen moeten worden genomen. Van een groot aantal beslissingen zijn wij ons evenwel niet bewust, omdat, gezien onze instelling en ervaring, de te nemen beslissingen zo vanzelfsprekend of van zo'n ondergeschikt belang zijn, dat zij zonder enig nadenken kunnen worden genomen.

Er bestaan echter ook situaties waarin wij niet zonder gevoelens van twijfel een keuze maken uit de verschillende mogelijkheden. Naarmate de situatie waarin men moet beslissen ingewikkelder wordt van structuur en naarmate de tijd beschikbaar om tot een beslissing te komen korter wordt, ontstaat de behoefte aan een minder intuïtieve werkwijze.
In dit hoofdstuk wordt nagegaan in hoeverre de besliskunde aan deze behoefte kan voldoen.

In de meeste beslissingssituaties kan de te nemen beslissing, met een beetje goede wil, gezien worden als een poging om een verandering aan te brengen in een ongewenste toestand of ontwikkeling. Om een keuze te kunnen maken uit de collectie van mogelijke beslissingen, is het dikwijls noodzakelijk dat men zowel de toestand waarin de beslissing moet worden genomen, als de - uit deze beslissing voortvloeiende - ontwikkeling op één of andere wijze kan aangeven.
In de natuurwetenschappen probeert men, dikwijls met veel succes, de waargenomen verschijnselen te beschrijven met behulp van wiskundige begrippen. Een groot deel van het instrumentarium van de wiskundige wordt dan dienstbaar gemaakt om de waargenomen of hypothetische samenhang tussen de verschijnselen aan te duiden. Uit onze middelbare-schooljaren herinneren wij onz nog wel de relaties:

$$\frac{PV}{T} = R = \text{constant} \quad \text{(wet van Boyle-Gay Lussac).}$$

in woorden: druk (P) maal volume (V) is evenredig met de temperatuur (T),

en

$$V = ir \quad \text{(wet van Ohm)}$$

in woorden: spanningsverschil (V) is stroomsterkte (i) maal weerstand (r).

Verder kennen wij de uitspraak (1st wet van Keppler) "de baan van een planeet om de zon kan worden beschreven met behulp van een ellips met de zon in een van de brandpunten".

Relaties van dit type en andere wiskundige uitdrukkingen vormen tezamen het zg. mathematisch model van het beschouwde fenomeen. In tegenstelling tot andere modellen (beschrijvingsvormen van een situatie), zoals etalagepoppen en maquettes, mist het mathematisch model de fysische gelijkenis met haar object.

Gelijk in elk ander model krijgt alleen dat wat de waarnemer op een bepaald moment karakteristiek vindt, zijn plaats in het mathematisch model. In de wet van Boyle-Gay Lussac wordt niet gesproken over de vorm van het volume. In de eerste wet van Keppler wordt de - voor aardse begrippen redelijke - omvang van de zon samengeperst in een punt zonder afmetingen. Verder zal de waarnemer zijn gebrek aan kennis dikwijls aanvullen met veronderstellingen die niet vervuld behoeven te zijn. In de hiervoor gegeven voorbeelden vindt men deze veronderstellingen terug in de vorm van de wiskundige relaties (b.v. de ellipsvormige baan).

Het mathematisch model geeft dus in principe een onvolledig en misschien zelfs een onjuist "wiskundig" beeld van de beschouwde situatie. Het gebeurt dan ook vaak dat het gangbare mathematisch model na het verkrijgen van meer informatie vervangen dient te worden. Dit laatste geschiedde bij het model van Boyle-Gay Lussac. Een aantal gassen vertoonden bij hoge druk belangrijke afwijkingen van de gelijknamige wet.

Van der Waals verkoos voor die gevallen het iets afwijkende model

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

waarbij a, b en R constanten zijn. De gemaakte veronderstelling PV = RT bleek dus niet houdbaar.

Met behulp van een mathematisch model kunnen wij hypothesen toetsen, voorspellingen doen en, zoals wij straks zullen zien, beslissingen aanwijzen.

Ook in vele niet-natuurwetenschappen kan deze werkwijze nut afwerpen. De toepassingen in de Psychologie en de Economie hebben geleid tot de jonge wetenschappen: Psychometrie en Econometrie.

Ook in situaties waarin beslissingen genomen moeten worden kan dikwijls de samenhang tussen de relevante factoren op een wiskundige wijze worden uitgebeeld. Dit impliceert dat de wiskunde in die situaties een taal aanbiedt waarin kan worden uitgedrukt:

a) welke beslissingen in aanmerking komen

b) wat de gevolgen van die beslissingen zijn, en

c) hoe deze gevolgen moeten worden gewaardeerd

Een dergelijke aanpak leidt tot de invoering van een mathematisch model van de beslissingssituatie, en derhalve tot <u>een vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig probleem</u> en wel een wiskundig optimum probleem. De oplossing van het wiskundig probleem geeft na terugvertalen een aanwijzing hoe het oorspronkelijke beslissingsprobleem moet worden opgelost. Men dient zich er echter van bewust te zijn dat de gevonden beslissing uiteindelijk afhangt van de keuze van het mathematisch model. Daar komt nog bij dat deze keuze dikwijls geleid wordt door de wens om na vertaling een wiskundig optimumprobleem te verkrijgen dat oplosbaar is.

Wij zullen nu onder <u>Besliskunde</u> die studie verstaan welke zich bezighoudt met het streven om beslissingsproblemen op deze wijze op te lossen:

dwz. door eerst een mathematisch model van de beslissingssituatie te maken, door vervolgens het- uit het beslissingsprobleem voortgekomen-wiskundig optimumprobleem op te lossen en door tenslotte de gevonden oplossing terug te vertalen in de taal van de beslissingssituatie.

De meeste toepassingen van de besliskunde vindt men in de bedrijfs-economische sector. Dit neemt echter niet weg dat ook in andere gebieden van het menselijk handelen de besliskunde haar bijdrage kan leveren. Enige van de eerste toepassingen van de besliskunde lagen b.v. op militair terrein.

Een practisch besliskundig onderzoek zal in het algemeen een bundeling zijn van uiteenlopende activiteiten, zoals marktonderzoek, tijdstudies, toetsen van veronderstellingen, wiskundige research, etc. Het onderscheidt zich van ieder ander onderzoek doordat men gebruik maakt van mathematische modellen en streeft naar een wiskundig optimumprobleem. De theorie welke zich, binnen het mathematisch model, bezig houdt met dit type van optimumproblemen zullen wij in het vervolg aanduiden met <u>Mathematische Besliskunde</u>.

Uiteraard bestaan er ook beslissingssituaties die beschreven kunnen worden door een niet wiskundig model. In de volgende paragraaf wordt eerst een model opgesteld van een beslissingssituatie, zonder gebruik te maken van de taal der wiskunde. Daarna wordt, uitgaande van dezelfde veronderstellingen, het beslissingsprobleem wiskundig geformuleerd. De modelvorming geschiedt in beide gevallen op identieke wijze; zij is karakteristiek voor de besliskunde.

1.2 Modelvorming bij beslissingssituaties

Het is zinvol om, bij het gebruik van modellen in beslissingssituaties drie verschillende fasen te onderscheiden.
In de eerste fase houdt men zich bezig met het analyseren van de beslissingssituatie. Deze analyse leidt tot een beschrijving van toegelaten beslissingen, van de gevolgen van de te nemen beslissingen, etc. In deze fase wordt ook gezocht naar een criterium voor het vergelijken van beslissingen. Bij de beschrijving wordt gebruik gemaakt van de kennis die, hetzij door de basiswetenschappen zoals economie en psychologie wordt verschaft, hetzij uit de beschikbare gegevens wordt gedistilleerd of uit experimenten wordt verkregen. Het criterium en de gebruikte relaties berusten bovendien op veronderstellingen die op het eerste gezicht redelijk lijken en niet op grond van de zojuist genoemde kennis behoeven te worden verworpen. Dit samenspel van relaties en veronderstellingen vormt het model van de beslissingssituatie.

Wij zullen nu de eerste fase van de modelvorming demonstreren aan een variant op een klassiek voorbeeld. ж)

Beschouwen wij het beslissingsprobleem rond de optimale vestigingsplaats van de vierde Technische Hogeschool. Laten wij eens aannemen dat op een enkele uitzondering na de studenten afkomstig zullen zijn uit het noordwesten van ons land (modelveronderstelling). Een vestigingsplaats wordt optimaal genoemd als het door de studenten in totaal af te leggen aantal kilometers van het ouderlijk huis naar de T.H. minimaal is (criterium). Nu zou men kunnen stellen dat door het dichte wegennet in Noordwest-Nederland de afstanden van woonhuis tot T.H. evenredig zijn met die, welke hemelsbreed worden gemeten (modelveronderstelling). Verder zou men kunnen aannemen dat het percentage van de middelbare scholieren die een T.H. willen bezoeken in alle woongebieden van Noordwest-Nederland gelijk is. (modelveronderstelling).

ж) In zijn boek "Induction and analogy in mathematics" wordt door G. POLYA reeds een dergelijk probleem behandeld op een wijze, zoals ook hier geschiedt.

Een uiterst belangrijk onderdeel van de modelvorming bestaat uit het toetsen van deze modelveronderstellingen. Wanneer zij niet behoeven te worden verworpen, dan kunnen wij met behulp van een kaart van Noordwest-Nederland, die zorgvuldig op een plankje is geplakt, een model van de beslissingssituatie maken.
Alhoewel Noordwest-Nederland een stukje is van een bolvormig oppervlak, kan door de geringe afmetingen van ons vaderland deze bolvormigheid worden verwaarloosd (modelvereenvoudiging). Men boort nu gaatjes in het plankje op de plaatsen waarop volgens de kaart de centra van de woongebieden liggen. Van een van te voren gereedgelegde kluwen touw knippen wij evenveel stukken als er woongebieden zijn. Wij knopen nu deze touwtjes aan elkaar en wel zodanig dat alle touwtjes slechts één gemeenschappelijk knooppunt en één vrij uiteinde hebben. Het op deze wijze verkregen handwerk vertoont veel overeenkomst met een spin. Door ieder gaatje in het plankje doen we één poot van de spin en wel zo dat de centrale knoop op het plankje rust. Tenslotte bevestigen wij aan de vrije uiteinden onder het plankje gewichtjes, die evenredig zijn met de aantallen middelbare scholieren in de bij de touwtjes behorende woongebieden. In het te construeren model wonen alle aspirant-studenten in de centra van de woongebieden (modelvereenvoudiging). Het knooppunt boven het plankje stelt de T.H. voor. De door de gewichten gespannen stukjes touw, die van het knooppunt naar de gaatjes lopen, corresponderen met de door de studenten af te leggen afstanden. De gewichten zijn de vertalingen van de aantallen aspirant-studenten in de verschillende woongebieden. Indien wij het knooppunt boven op het plankje met een punaise vast maken, dan wordt voor de keuze van de vestigingsplaats, die we kunnen aflezen op de opgeplakte landkaart, een model van het studentenvervoer gevormd door (1) het plankje met de gaatjes, (2) de gespannen stukjes touw met het gemeenschappelijke knooppunt, (3) de gewichten en (4) de gemaakte veronderstellingen. Men kan gemakkelijk laten zien dat door vertaling de vraag naar de optimale vestigingsplaats van de T.H. herleid is tot de vraag: "Waar ligt het evenwichtspunt van het zojuist geconstrueerde gewichtensysteem?" Het beslissingsprobleem is dus vertaald in de terminologie van het model.

Merk op dat in dit model stilzwijgend wordt aangenomen, dat overal in Noordwest-Nederland een T.H. gevestigd kan worden.

In de <u>tweede</u> fase zal men trachten het probleem dat na de invoering van het model uit het beslissingsprobleem is voortgekomen op te lossen. Om het zojuist geschetste beslissingsprobleem rond de optimale vestigingsplaats van de vierde T.H. te kunnen oplossen, moet men dus het evenwichtspunt van het gewichtensysteem bepalen. Dit punt kan op eenvoudige wijze worden verkregen en wel door het plankje horizontaal te houden en de punaise te verwijderen. Zodra het gewichtensysteem tot rust komt, bevindt het knooppunt zich boven het evenwichtspunt.

In de <u>derde</u> fase gaan wij de verkregen oplossing terug vertalen in de oorspronkelijke terminologie van het beslissingsprobleem. In ons beslissingsprobleem is dit heel eenvoudig. Immers met behulp van de kaart van Nederland, welke op het plankje is geplakt, kunnen wij direct aflezen in welke gemeente het evenwichtspunt ligt. In dezelfde fase gaan wij ook na wat de consequenties zijn van de gevonden beslissing. Zijn deze consequenties onaanvaardbaar dan deugt het model niet, en men zal dan uiteraard moeten proberen een beter model te construeren.

Omdat de wiskunde niet gebruikt is als "beschrijvingstaal" mag, volgens de in de inleiding gegeven definitie van besliskunde, de geschetste aanpak <u>niet als besliskundig</u> worden aangemerkt. Het een en ander neemt niet weg dat ook een besliskundige benadering deze drie fasen in de modelvorming kent.

Wij zullen nu, uitgaande van dezelfde modelveronderstellingen en vereenvoudigingen een mathematisch model van de beslissingssituatie opstellen. Daartoe projecteren we, in gedachten, een orthogonaal assenstelsel op de kaart van Noordwest-Nederland. We nummeren de betreffende woongebieden van 1 tot en met n; de coördinaten van het centrum van woongebied i worden aangegeven door (a_{i1}, a_{i2}).

Aan de, nu nog onbekende, vestigingsplaats van de vierde T.H. kennen we de coördinaten (x_1, x_2) toe. De afstand van een willekeurig woongebied i (i = 1, 2, ..., n) tot de vestigingsplaats wordt gegeven door (Pythagoras):

$$\sqrt{(x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2}$$

Aan ieder woongebied i kennen we bovendien nog een getal c_i toe, dat het aantal aspirant-studenten uit dat woongebied aangeeft. (dit komt overeen met de gewichten).

Nu krijgen we voor de door de studenten in totaal afteleggen afstand y:

$$y = c_1\sqrt{(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2} + c_2\sqrt{(x_1 - a_{21})^2 + (x_2 - a_{22})^2} + \\ + \ldots\ldots + c_n\sqrt{(x_1 - a_{n1})^2 + (x_2 - a_{n2})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\sqrt{(x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2} \qquad (1.1)$$

De vertaling van ons probleem luidt nu: minimaliseer (1.1) als functie van x_1 en x_2.

Zijn de optimale coördinaten $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ gevonden, dan kan wederom de oplossing van de kaart worden afgelezen.

1.3 Welke beschrijvingstaal ?

In de vorige paragraaf hebben wij twee verschillende talen ontmoet voor het beschrijven van één en dezelfde beslissingssituatie. Het behoeft echter geen betoog dat omgekeerd één uniforme beschrijvingstaal voor verschillende beslissingssituaties voordelen biedt.
In deze paragraaf introduceren wij een aantal begrippen die onontbeerlijk zijn bij het analyseren van beslissingssituaties en derhalve bij het opstellen van modellen. Met behulp van een vijftal voorbeelden wordt getracht enerzijds inhoud te geven aan die begrippen, anderzijds vasttestellen aan welke eisen een uniforme beschrijvingstaal moet voldoen opdat met deze begrippen kan worden gewerkt.

Onder de nu te formuleren problemen is er slechts één, welke op een ondubbelzinnige wijze kan worden opgelost. De overige problemen geven nog ruimte tot het stellen van vragen. In paragraaf 1.5 zullen wij trachten door het maken van veronderstellingen deze leemten optevullen.

Voorbeeld 1.1

Een fabrikant wil een veevoeder op de markt brengen dat verkregen wordt door een aantal grondstoffen in een geschikte verhouding te mengen.
In tabel 1.1 vindt men behalve de - gedeeltelijke - samenstelling van de grondstoffen ook hun prijzen vermeld. Aan de samenstelling van het veevoeder worden enkele eisen gesteld, die zijn aangegeven in tabel 1.2

Tabel 1.1

Gegevens over beschikbare grondstoffen op 7-4-1955

%	vocht	verteerbaar ruw eiwit	eiwit	ruw vet	zetmeel	ruwe celstof	prijs in guldens/ 100 kg.
rogge	9,5	6,6	7,9	1,2	49,7	1,7	22,75
milocorn	8,5	5,7	7,4	2,3	52,1	2,4	22,35
paardebonen	10	15,4	17,5	1	46,9	5,6	30,25
sojaschroot	8,1	29,8	33	0,6	48,9	4,5	38,25
cocoskoeken	7,1	11,8	14	7	54,7	11,5	32,50
palmpitschroot	8,1	12,7	13,2	1,8	43	18	26,50
negerzaad schilfers	7,3	20,2	22,8	3,6	41,7	12,2	32,50

Tabel 1.2

Eisen opgelegd aan de samenstelling van het veevoeder

ingrediënten	maximaal %	minimaal %
rogge	20	
milocorn	15	
paardebonen	7	
sojaschroot		5
cocoskoeken		2
palmpitschroot		8
negerzaadschilfers	10	
eiwit		14,7
verteerbaar ruw eiwit		12
vocht	8,6	
zetmeel		42
ruwe celstof	8,4	
ruw vet		1,8

De mengverhouding zal nu zo moeten worden gekozen dat bijv. het totale eiwitgehalte, resulterend uit de diverse bijdragen, minimaal 14,7% is. Op overeenkomstige wijze zullen ook de overige eisen aan de samenstelling van het veevoeder (tabel 1.2) beperkingen opleggen. Uiteraard zal men trachten het produkt met de hiervoor aangegeven eigenschappen zo goedkoop mogelijk te produceren. De ondernemer wil, rekening houdend met de prijzen der grondstoffen, die mengverhouding kiezen, waarbij tegen zo laag mogelijke totale kosten aan grondstoffen een produkt met de vereiste eigenschappen wordt verkregen. Heeft hij dit probleem opgelost en blijven zowel de samenstellingen als de prijzen van de grondstoffen constant, dan weet hij voor eens en voor altijd in welke gewichtsverhouding hij zijn grondstoffen zal moeten inkopen. Zijn de prijzen en/of de samenstellingen van de grondstoffen aan wijzigingen onderhevig dan zal de mengverhouding steeds moeten worden aangepast.

<u>Voorbeeld 1.2</u>

Een automobilist heeft een schadeverzekering afgesloten. In de bijbehorende polis worden o.a. de volgende voorwaarden vermeld:

1) De looptijd van de verzekering is één jaar. Aan het eind van ieder jaar kan zij worden verlengd. De premie moet aan het begin van ieder premie-jaar worden voldaan.
2) De premie bedraagt f. 320,-- tenzij
   a) in de voorafgaande periode van één jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f. 280,--, tenzij
   b) in de voorafgaande periode van twee jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f. 240,--, tenzij
   c) in de voorafgaande periode van drie jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f. 220,--.
3) Indien men een schade wil claimen dient dit onmiddellijk te geschieden. Slechts het verschil tussen de schade en een vast bedrag van f. 80,--, het zg. eigen risico, wordt door de verzekering uitbetaald.

Gevraagd wordt voor elk tijdstip aan te geven welke schaden geclaimd moeten worden.

Het is duidelijk dat de automobilist nooit een schade van minder dan f. 80,-- zal claimen. Het is ook duidelijk, dat hij, als nog geen schade is geclaimd dat jaar, met het oog op de premie-reducties voor schadevrij rijden geen schaden zal claimen, welke slechts een weinig hoger zijn dan het eigen risico. De vraag is nu waar precies de grens ligt tussen de schaden die wel en die niet moeten worden geclaimd. Het behoeft geen betoog, dat de grenswaarden zullen afhangen van de hoogte van de laatst betaalde premie en van het tijdstip van de schade in het premiejaar.

Voorbeeld 1.3

Een fabriek kan hoogstens drie gelijke machines inschakelen bij de vervaardiging van één produkt. De produktiesnelheden van deze machines afzonderlijk laten zich niet regelen. Voor het produkt geldt dat de gemiddelde vraag per tijdseenheid kleiner is dan de gezamenlijke produktie van drie machines per tijdseenheid. De voorraadcapaciteit is beperkt en bedraagt m eenheden. De voorraadkosten per tijdseenheid zijn evenredig met de grootte van de voorraad. De produktiekosten per tijdseenheid worden mede bepaald door het aantal ingeschakelde machines. Het omschakelen naar hogere of lagere produktiesnelheden brengt extra kosten met zich mee, die afhangen van de volgorde van het betreffende tweetal produktiesnelheden. Indien de voorraad niet toereikend is dan worden de gevraagde goederen geleverd via een zusterfabriek. De tussen beide fabrieken overeengekomen verrekeningsprijs ligt hoger dan de gemiddelde kostprijs. Gevraagd wordt voor iedere produktiesnelheid (0, 1, 2 of 3 lopende machines), na te gaan bij welke voorraden men moet omschakelen en waarheen.

Voorbeeld 1.4

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat alleen dit najaar naar Parijs om zijn collectie samen te stellen. Deze hoedjes worden dan het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht.

Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli) worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten op de eerste dag van de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.
In Parijs wordt door de inkoper beslist welke modellen en hoeveel van elk moet worden ingekocht. De inkoop- en verkoopprijzen zijn hem bekend.

Voorbeeld 1.5

Een meisje hoopt op een uitnodiging voor een studentenbal in het onmiddellijke verschiet. Op een morgen op weg naar college beseft ze dat het er die dag om zal gaan. Zo direct zal ze Peter ontmoeten, een haar zeer toegewijde jongen. Zij geeft zichzelf een grote kans dat hij haar zal uitnodigen. Hij is echter een beetje gierig en zal haar vermoedelijk ter gelegenheid van het bal een corsage van slechts twee gulden aanbieden. Tijdens de lunch zal ze Frank ontmoeten. Als Frank haar vraagt dan komt hij zeker met een corsage van vier gulden voor de dag. In de loop van de middag zal zij op het sportveld René zien. René is tamelijk royaal en zal zeker met een corsage van vijf gulden komen opdraven. De kans dat hij haar vraagt is echter niet zo groot. Eerst 's avonds, evenwel ontmoet zij haar idool, Rob. Deze is erg gul heeft voor het meisje met wie hij uitgaat wel een corsage van acht gulden over. Helaas heeft hij nog veel andere interessen onder de meisjes en de kans op een uitnodiging is zeer gering. Het meisje begrijpt dat zij bij een eventuele uitnodiging direct moet beslissen en dat zij op een aanvaarding niet mag terugkomen. Ze vraagt zich nu af wat zij die dag moet doen als zij niet alleen naar het bal wil, maar ook zo mooi mogelijk wil verschijnen.

Wanneer men deze voorbeelden met elkaar vergelijkt vertonen zij op het eerste gezicht weinig punten van overeenkomst. Immers het eerste voorbeeld is een mengprobleem, het tweede een verzekeringsprobleem, het derde een produktieprobleem, terwijl het vierde en het vijfde resp. een inkoop- en een "bal"-probleem voorstellen.

De vijf problemen zijn inderdaad qua uiterlijke vorm verschillend, maar dit betekent nog niet dat de wijzen van oplossen verschillend zijn. Een indeling van de beslissingsproblemen in transport-, produktie-, vervangingsproblemen, etc. leidt in het algemeen niet tot groepen van beslissingsproblemen met identieke oplossingsmethoden. Inzicht in de structuur van de beslissingssituatie verkrijgt men dikwijls door het gestelde probleem te formuleren zonder gebruik te maken van begrippen als voorraad, machine, haven etc. Door de invoering van begrippen die een meer uniforme karakterisering van het beslissingsprobleem mogelijk maken, onderkent men identieke oplossingsmogelijkheden voor problemen, die in hun oorspronkelijke vorm weinig gelijkenis vertonen.

Wij zullen een aantal begrippen invoeren, die een meer uniforme beschrijving van een groot aantal beslissingsproblemen toestaan.

Allereerst maken wij een onderscheid tussen twee typen van beslissingsproblemen, t.w. één-stapsbeslissingsproblemen en meer-stapsbeslissingsproblemen. In een één-stapsbeslissingsprobleem behoeft de beslisser slechts één enkele beslissing te nemen. In een meerstapsbeslissingsprobleem wordt van hem verwacht dat hij in een tijdsbestek een reeks van beslissingen neemt, die niet los van elkander gezien kunnen worden. Is dit laatste wel het geval dan is er slechts sprake van een veelvoud van één-stapsbeslissingsproblemen. De oplossing van het één-stapsbeslissingsprobleem wijst één beslissing X aan, terwijl in het meer-stapsbeslissingsprobleem de oplossing meestal wordt gegeven in de vorm van een strategie. Een strategie z is een beslissingsvoorschrift, dat in elke situatie aangeeft welke beslissing X moet worden genomen. Het eerste en het vierde voorbeeld zijn bedoeld als één-stapsbeslissingsproblemen, de overige drie zijn meer-stapsbeslissingsproblemen.

Laten we het object in onze beschouwing steeds aanduiden met de naam systeem. In voorbeeld 1.1 is het systeem "de produktie van veevoeder". Wij bedoelen met "de produktie van veevoeder" de gehele bedrijvigheid die zich rond het mengen afspeelt.

In voorbeeld 1.3 wordt het systeem gevormd door produktie en voorraad tesamen. In de voorbeelden 1.2, 1.4 en 1.5 beschouwen wij resp. de systemen "verzekering", "hoedencollectie" en "bal".
Op ieder tijdstip beschikt de beslisser over een hoeveelheid informatie over zijn systeem. Een deel van deze informatie is karakteristiek voor het beschouwde moment. Aan deze informatie denken wij bij de invoering van het tweede begrip: de <u>toestand van het systeem</u>. In wiskundige beschrijvingen zullen we de letter S, evt. geindiceerd S_i, hiervoor reserveren. Zoals uit de voorbeelden blijkt, zal de te nemen beslissing mede afhangen van de toestand waarin het systeem zich op het moment van beslissen bevindt. Ook de kosten en de opbrengsten hangen dikwijls af van de - door het systeem - doorlopen toestanden. Uit de formulering van het beslissingsprobleem kan veelal opgemaakt worden welke factoren voor het vaststellen van die toestand relevant zijn. Het is vaak een zaak van persoonlijke smaak welke factoren wèl en welke niet relevant worden geacht om voor ieder tijdstip de toestand van het systeem te beschrijven (modelkeuze!). Om tot een eenvoudige formulering van het probleem te geraken, wil men wel eens een gegeven in de toestand van het systeem opnemen, dat strikt genomen gemist kan worden. Zo ook in de hieronder te geven voorbeelden.

In voorbeeld 1.1 heeft de modelbouwer de prijzen en de samenstelling van de grondstoffen in de toestand van het systeem opgenomen, omdat zodra b.v. de prijzen veranderen een nieuw beslissingspobleem moet worden opgelost. Dit laatste is echter niet het geval in voorbeeld 1.4. In dit voorbeeld wordt het succes van de beslissing geheel bepaald door het verloop van de voorraden hoedjes. Vandaar dat de toestand van het systeem voor ieder tijdstip slechts een specificatie van deze voorraden geeft.

In voorbeeld 1.1 behoeven in de toestand van het systeem de kwaliteitseisen (tabel 1.2) niet te worden verwerkt. Deze eisen zijn niet kenmerkend voor een bepaald moment; zij worden eens voor altijd gesteld.

De toestand van het systeem in voorbeeld 1.2 wordt volgens de modelbouwer bepaald door

1) de laatst betaalde premie;
2) het tijdstip in het premiejaar;
3) het eventueel te claimen bedrag;
4) de omstandigheid of de verzekerde dat jaar al eerder een schade heeft geclaimd.

In de toestand van het systeem wordt door hem geen plaats ingeruimd voor de in de polis genoemde premiebedragen en het eigen risico. Noch wordt vastgesteld dat men na het claimen van een schade het daarop volgende jaar weer de hoogste premie moet betalen. Deze gegevens zijn, volgens hem, niet kenmerkend voor het beschouwde tijdstip. Zij liggen voor eens en altijd vast.

De toestand van het systeem in voorbeeld 1.3 wordt wellicht gegeven door

1) de voorraad;
2) de produktiesnelheid.

Voor het beslissingsprobleem in voorbeeld 1.5 wordt de toestand getypeerd door:

1) de ontmoeting (Peter, Frank, René of Rob);
2) de omstandigheid of zij bij deze ontmoeting wordt uitgenodigd;
3) de omstandigheid of zij reeds een uitnodiging heeft aanvaard en zo ja, van wie.

De prijzen van de corsages waren reeds bekend en komen dus in de toestand van het systeem niet voor.
Het derde begrip dat wij zullen gebruiken heet ontwikkeling in de toestand van het systeem . Bij zeer veel beslissingsproblemen wijzigt zich de toestand van het systeem in de loop van de tijd. De wijze waarop dit geschiedt zal mede de keuze van de te nemen beslissing bepalen. In voorbeeld 1.3 brengen produktie en verkoop voorraadwijzigingen, en dus toestandsveranderingen, teweeg.

Schaden en uitnodigingen brengen in voorbeeld 1.2 resp. voorbeeld 1.5 droeve en welkome veranderingen in de toestand van het systeem.
De tot dusver geschetste ontwikkelingen in de toestand van het systeem voltrekken zich min of meer buiten de wil van de beslisser om. Er bestaan echter ook toestandsveranderingen die een direct gevolg zijn van de activiteiten van de beslisser. Zo zal in voorbeeld 1.3 de beslissing die het omschakelen van de produktie ten gevolge heeft uiteraard de toestand van het systeem doen veranderen. Ook in de overige voorbeelden kan men zien hoe beslissingen veranderingen aanbrengen in de toestand van het systeem.
De toestand van het systeem op het moment van beslissing beperkt meestal de keuze van de beslissingen (men spreekt van <u>toegelaten beslissingen</u>)

Tegenover al deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem staat de beslisser niet geheel onverschillig. Wij komen nu tot het volgende aspect van het beslissingsprobleem. De beslisser zal in het algemeen aan deze ontwikkelingen <u>waarderingen</u> toekennen en wel meestal in de vorm van kosten.

Bij sommige één-stapsbeslissingsproblemen (voorb. 1.4) en bij de meeste meer-stapsbeslissingsproblemen kan de beslisser door het doen van één of meer <u>beslissingen</u> de ontwikkelingen in de toestand van het systeem beinvloeden. Zijn beslissingen zullen er dan ook op gericht zijn om door het teweegbrengen van toestandsveranderingen ongunstige ontwikkelingen tegen te gaan. Rekening zal moeten worden gehouden met het feit dat ook aan de beslissing zelf kosten verbonden zijn; deze hangen veelal af van de toestand waarin het systeem zich op het moment van beslissen bevindt.
Er zijn één-stapsbeslissingsproblemen, waarin de ontwikkeling van de toestand van het systeem niet zo'n belangrijke rol speelt. Indien de fabrikant in voorbeeld 1.1 geen voorraden kan houden en dus altijd evenveel inkoopt als hij in een week kan verkopen, dan zullen zijn beslissingen slechts worden bepaald door de toestand van het systeem op het moment van beslissen.

De ontwikkeling in de toestand van het systeem is in voorbeeld 1.1 dan pas interessant als om speculatieve redenen een voorraad grondstoffen kan worden aangehouden. Het voorbeeld moet dan echter als een meer-stapsbeslissingsprobleem worden beschouwd. Ook zal het begrip toestand dan meer informatie moeten bieden.

Indien men nu zoekt naar algemene beschrijvingsvormen, dan zullen de gedachten uitgaan naar die, welke

1) de aanwezige of nog in te winnen informatie over de toestand van het systeem in een te hanteren vorm kunnen uitdrukken;
2) de aanwezige of nog in te winnen informatie over toekomstige ontwikkelingen in de toestand van het systeem op een overzichtelijke wijze kunnen beschrijven;
3) voor iedere toestand de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze kunnen aangeven;
4) voor één-stapsbeslissingsproblemen waarderingen kunnen vastleggen, die zijn toegekend aan de beslissingen;
5) voor meer-stapsbeslissingsproblemen waarderingen kunnen vastleggen, die zijn toegekend aan ontwikkelingen in de toestand van het systeem, en daardoor ook aan de strategieën, die mede tot deze ontwikkelingen hebben bijgedragen;
6) de beslisser in staat stellen voor de toestand waarin het systeem verkeert (één-stapsbeslissingsproblemen), of voor alle toestanden waarin het kan komen te verkeren (meer-stapsbeslissingsproblemen), de optimale beslissing aan te wijzen.

Merk op dat wij zoeken naar beschrijvingsvormen en <u>niet</u> naar methoden die ons b.v. een antwoord geven op de vraag hoe een bepaalde beslissing moet worden gewaardeerd. Het antwoord op die vraag moet worden geleverd door de minister, de bedrijfsleider, de publieke opinie, etc.. De beslískundige zal zonodig slechts de vraag stellen.

Opgaven.

1.1 Een aannemer van grondwerken heeft een bulldozer in gebruik, die een levensduur van 3 jaar heeft. Ieder jaar op 1 april beslist de aannemer of hij de bulldozer het komende jaar weer zal gebruiken, dan wel zal vervangen. Als hij tot vervanging overgaat heeft de aannemer de keuze tussen een nieuwe of een tweede hands bulldozer (van verschillende leeftijden), waarvan de prijzen bekend zijn. Bij iedere vervanging ruilt de aannemer zijn oude exemplaar in, tegen een vastgestelde inruilprijs.

Gevraagd: welke grootheid(heden) kan(kunnen) gebruikt worden bij de beschrijving van de toestand van het systeem?

1.2 Des nachts worden door de N.S. de bij de stations aanwezige vrachtwagons ingedeeld naar de plaatsen waar behoefte is aan die wagons. Op een bepaalde avond staan in de plaatsen A, B, C, D en E resp. a, b, c, d en e gereed, terwijl in de plaatsen W, X, Y en Z een behoefte aan wagons is van resp. w, x, y en z. De vervoerskosten worden geacht evenredig te zijn met de afstanden tussen de plaatsen en men wil uiteindelijk de totale vervoerskosten minimaliseren.

Gevraagd: welke grootheden kunnen gebruikt worden bij de beschrijving van de toestand van het systeem?

1.4 De wiskunde als beschrijvingstaal.

Gelijk wij reeds eerder opmerkten laat een niet-wiskundig gebeuren zich wel eens beschrijven met behulp van een wiskundige taal. De vraag rijst nu of de wiskunde ook over de benodigde instrumenten beschikt om aan de zojuist geformuleerde wensen te kunnen voldoen. Wij zullen dit nagaan aan de hand van de - in de vorige paragraaf gegeven - vijf voorbeelden.

Eerste wens

In de toelichting op het begrip "toestand van het systeem" werd verondersteld dat de toestand van het systeem in voorbeeld 1.3 kon worden gegeven door de voorraad en de produktiesnelheid. Beide toestandsgrootheden zijn kwantitatief. Indien wij een assenstelsel invoeren van twee onderling loodrecht op elkaar staande assen (zie figuur 1.1) , dan kunnen wij de toestand van het systeem op elk tijdstip aangeven met een punt S in het coördinatenvlak. Voor het geval de voorraad 200 stuks bedraagt en twee machines zijn ingeschakeld in de produktie wordt de toestand van het systeem aangegeven door het punt S_0 in figuur 1.1.

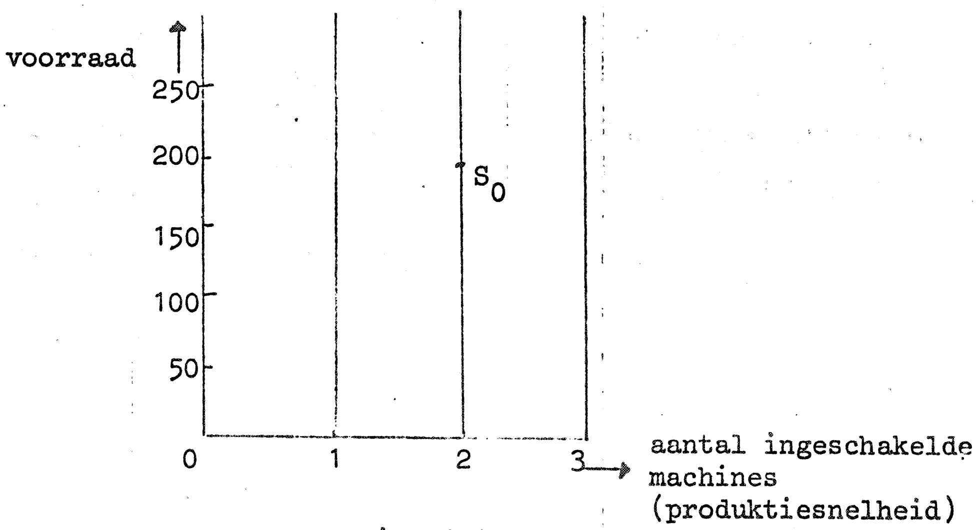


fig. 1.1

Toestandsruimte behorende bij voorbeeld 1.3

Uit deze beschouwing volgt dat de toestand van het systeem in voorbeeld 1.3 steeds kan worden geïdentificeerd met een punt in een vlak.
De toestandsgrootheden van voorbeeld 1.2 worden gegeven door
1) de laatst betaalde premie;
2) het tijdstip in het premiejaar;
3) de eventueel te claimen schade;
4) de omstandigheid of er al eerder in het premiejaar een schade is geclaimd of niet.

Zoals in figuur 1.2 is aangegeven hebben de eerste vier intervallen op de horizontale as betrekking op situaties waarin reeds eerder

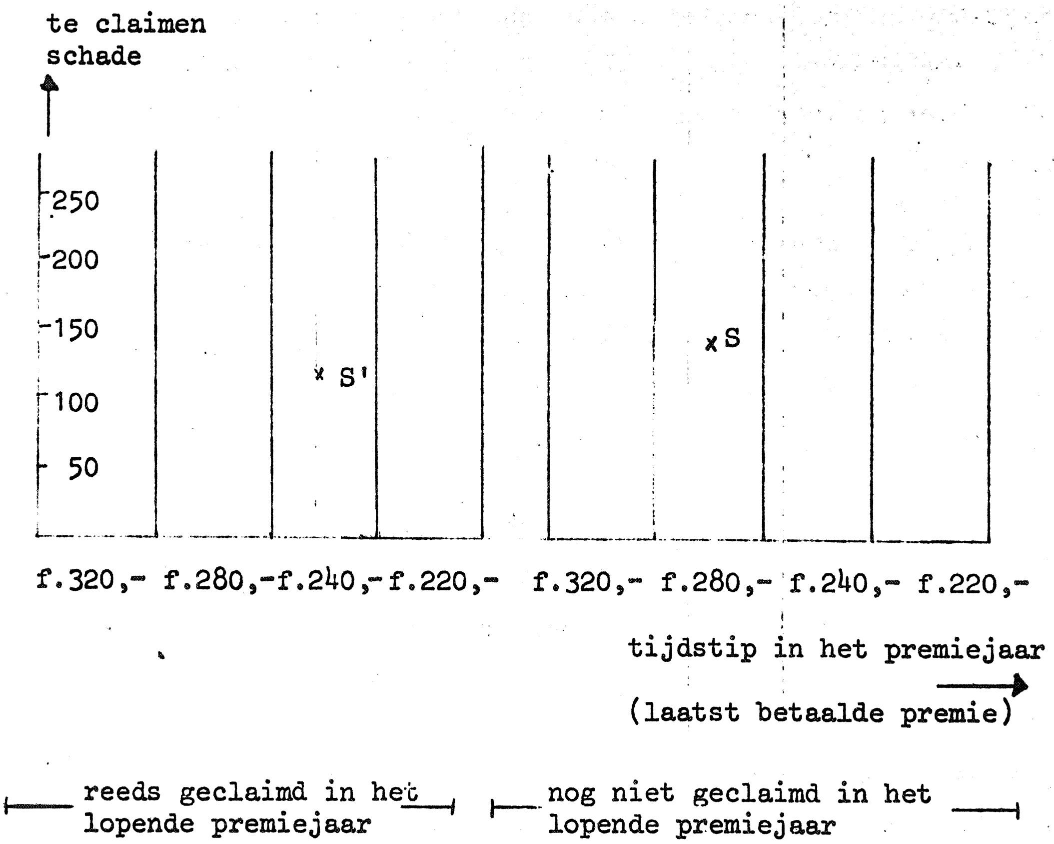


fig. 1.2

Toestandsruimte behorende bij voorbeeld 1.2

in het premiejaar een schade werd geclaimd. Voor de overige intervallen geldt dat, althans in de ogen van de verzekeringsmaatschappij, de automobilist schadevrij heeft gereden. Elk interval geeft aan welke premie het laatst werd betaald en hoeveel tijd sindsdien is verstreken. Op de vertikale as wordt de te claimen schade uitgezet.

Het punt S in figuur 1.2 geeft de toestand van het systeem aan $7\frac{1}{2}$ maand na de betaling van een premie van f. 280,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f. 140,-, terwijl in het toen lopende premiejaar nog geen schade was geclaimd. Het punt S' geeft de toestand van het systeem aan $6\frac{1}{2}$ maand na de betaling van een premie van f. 240,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f. 112,-, terwijl in het toen lopende premiejaar reeds een schade was geclaimd.
Ook voor de overige voorbeelden kan men een passende toestandsruimte construeren.

In een wiskundige formulering zal voor elk tijdstip de toestand van het systeem worden aangegeven met een punt in een één of meerdimensionale Cartesische ruimte $\mathcal{S}$. Deze ruimte wordt steeds de toestandsruimte genoemd. De coördinaten van het toestandspunt S, mits in de goede volgorde geplaatst, vormen de toestandsvector S.

Tweede wens

De ontwikkelingen in de toestand van het systeem manifesteren zich in de wiskundige beschrijving door "wandelingen" en "sprongen" van het systeem in de toestandsruimte.

Wij hebben reeds opgemerkt dat de wijze waarop de toestand van het systeem zich in de toekomst al of niet zal wijzigen dikwijls van invloed is op de nu te nemen beslissing.
Als de ontwikkelingen in de toestand van het systeem deterministisch van aard zijn dan kan men dikwijls gedeelten van de wandeling in de toestandsruimte beschrijven met behulp van "bewegingsvergelijkingen".

Indien bijv. op het tijdstip t_0 een voorraad $s(t_0)$eenheden groot is en als gedurende het tijdsinterval (t_0, t_1) een constante goederenstroom van α eenheden per tijdseenheid de voorraad verlaat, dan wordt de voorraad op een tijdstip t in het tijdsinterval (t_0, t_1) gegeven door

(1.2) $$s(t) = s(t_0) - \alpha(t-t_0).$$

Als de voorraad de enige factor is die de toestand van het systeem karakteriseert, dan geeft (1.2) de wandeling aan in $\mathcal{S}$ voor de tijdsperiode (t_0, t_1).
Indien echter de ontwikkelingen in de toestand van het systeem stochastisch x) van aard zijn, dan maakt het systeem een "verrassingsrit" door de toestandsruimte $\mathcal{S}$. In voorbeeld 1.3 (zie figuur 1.1) beklimt het systeem gestadig één van de vertikale lijnstukken. Telkens als er een klant binnenkomt valt het weer een stuk terug. Indien de behoefte van de klant van tevoren niet bekend is, dan maakt het een val van stochastische lengte. Op het tijdstip t_0 verkeert de beslisser nog in het onzekere omtrent de toestand $S(t)$ waarin hij het systeem op $t(t \geqq t_0)$ zal aantreffen. Een stochastische ontwikkeling in de toestand van het systeem heet dan en slechts dan beschreven als voor ieder tijdstip t_0 en voor iedere wandeling tot en met t_0 de kansverdeling van de toestand $S(t)$ met $t \geqq t_0$ is gegeven.

In de waarschijnlijkheidsrekening en wel in het bijzonder in de theorie van de stochastische processen weet men dikwijls wel raad met stochastische wandelingen en sprongen van dit type. Bijgevolg geschiedt de wiskundige beschrijving van deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem met behulp van aan deze theorie ontleende begrippen.

x) stochastisch gebruiken we hier als tegengestelde van deterministisch en wordt geïnterpreteerd als "van het toeval afhankelijk".

Derde wens

Als derde wens hebben wij geformuleerd de mogelijkheid om de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze aan te duiden. In voorbeeld 1.1 wordt de beslissing gegeven door de gekozen percentages van de verschillende grondstoffen in het mengsel. Het percentage rogge in het mengsel zullen wij aangeven met x_1 en dat van milocorn, paardebonen, sojaschroot, cocoskoeken, palmpitschroot en negerzaadschilfers resp. met x_2 t/m x_7. In de wiskundige formulering van het beslissingsprobleem kan men de beslissing doorgaans aangeven met een rij van getallen.

Indien men maar twee grondstoffen tot zijn beschikking had, dan zou een beslissing gegeven kunnen worden door twee getallen x_1' en x_2'. Een beslissing $X' = (x_1', x_2')$ kan dan worden geidentificeerd met een punt in een twee-dimensionale Cartesische ruimte (zie fig. 1.3)

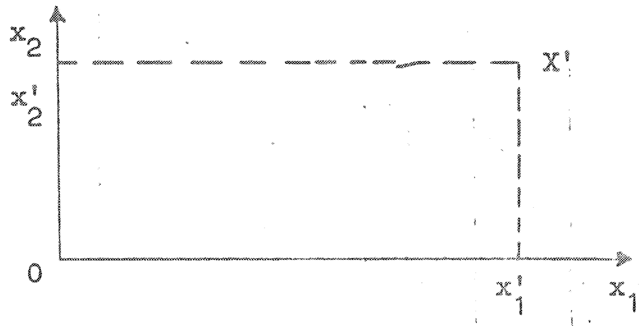


fig. 1.3

Een 2-dimensionale beslissingsruimte x

In het onderhavige voorbeeld bestaat behoefte aan ruimte van meer dimensies (7) om een beslissing te kunnen vastleggen. Zo'n ruimte wordt een beslissingsruimte x, genoemd. De coördinaten van het beslissingspunt X, mits in de goede volgorde geplaatst, vormen de beslissingsvector X. Uit tabel 1.2 in voorbeeld 1.1 volgt dat de beslissingsvariabelen x_i niet vrij gekozen mogen worden. Zij moeten aan de volgende ongelijkheden voldoen:

$$(1.3) \quad \begin{array}{ll} x_1 \leqq 20 & x_5 \geqq 2 \\ x_2 \leqq 15 & x_6 \geqq 8 \\ x_3 \leqq 7 & x_7 \leqq 10 \\ x_4 \geqq 5 & \end{array}$$

Aangezien het eiwit-gehalte minimaal 14,7% moet bedragen, vinden wij bovendien als voorwaarde (zie ook tabel 1.1):

$$(1.4) \quad 7{,}9x_1 + 7{,}4x_2 + 17{,}5x_3 + 33x_4 + 14x_5 + 13{,}2x_6 + 22{,}8x_7 \geqq 14{,}7.$$

Verder gelden voor verteerbaar ruw eiwit, vocht, zetmeel, ruwe vezels en vet analoge ongelijkheden.
Laten wij om de gedachten te bepalen terugkeren tot het geval waarin een beslissing kan worden vastgelegd met behulp van 2 beslissingsgrootheden x_1 en x_2 (zie figuur 1.3) . Stel vervolgens dat uit de probleemstelling volgt:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ x_1 &\geqq 0 \\ x_2 &\geqq 0 \,. \end{aligned}$$

De toegelaten beslissingen (x_1, x_2) liggen nu in het gearceerde gedeelte van de beslissingsruimte (figuur 1.4). Immers alleen voor punten (x_1, x_2) in dit gebied gelden alle ongelijkheden.

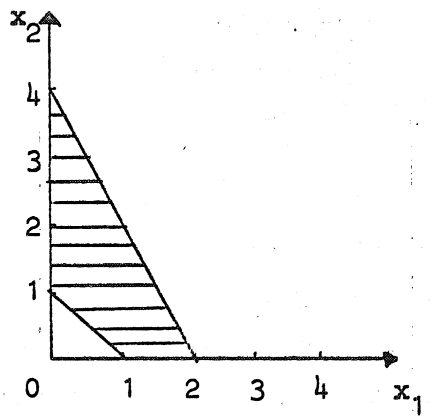


fig. 1.4

Een voorbeeld van een gebied van toegelaten beslissingen in de beslissingsruimte

Evenzo correspondeert met de ongelijkheden in het veevoederprobleem een gebied in de bij dat probleem behorende beslissingsruimte χ. Zo'n gebied wordt een <u>verzameling van toegelaten beslissingen</u> genoemd. Wij merken op dat de getallen 7,9 , 7,4 etc. in (1.4) componenten zijn van de toestand S. Immers zij geven de huidige samenstelling van de grondstoffen aan. Aangezien (1.4) mede het gebied van de toegelaten beslissingen bepaalt, zal de vorm van dit gebied afhangen van de toestand S van het systeem. In de besliskunde kent men ook verzamelingen van een ingewikkelder structuur. Steeds echter wordt aangenomen dat de verzameling van toegelaten beslissingen, aangegeven met $\chi(S)$, mede bepaald wordt door de toestand S van het systeem op het beslissingstijdstip.

De oplossing van het één-stapsbeslissingsprobleem wijst in de gegeven toestand S een beslissingsvector $X \in \chi(S)$ aan, terwijl in het meer-stapsbeslissingsprobleem de oplossing meestal gegeven wordt in de vorm van een <u>strategie</u>. *) Een strategie z is, in dit en de navolgende hoofdstukken, een <u>beslissingsvoorschrift</u>, dat aan <u>elke</u> toestand S een beslissing(svector) $X \in \chi(S)$ toevoegt; de wiskundige notatie hiervoor is $X = z(S)$. We merken op dat er strategieën denkbaar zijn, die beslissingen aanwijzen, niet alleen op grond van de toestand van het systeem op het betreffende moment, maar deze ook baseren op daaraan voorafgaande toestanden. (Wij zullen ons echter niet met deze soort strategieën bezighouden).

<u>Vierde wens</u> (één-stapsbeslissingsproblemen)
Voor één-stapsbeslissingsproblemen wordt het criterium voor de optimale beslissing gegeven in de vorm van een reële X-functie $y(S_0;X)$, criteriumfunctie geheten, waarin S_0 de toestand aangeeft op het moment van beslissen en X de beslissing. Als de gevolgen van een beslissing van te voren bekend zijn, stelt $y(S_0;X)$ meestal de totale te maken kosten of opbrengsten voor. Indien de gevolgen op het moment van beslissen nog onbekend zijn, geeft $y(S_0;X)$ de verwachting van deze kosten (of opbrengsten) aan.

*) het symbool $\in$ betekent: behoort tot.

Als wij voor een hoeveelheid veevoeder resp. $x_1, x_2, \ldots, x_7$ (in 100 kg.) van de ingrediënten gebruiken, dan wordt in het probleem van voorbeeld 1.1 de X-functie $y(S_0; X)$ gegeven door

$$(1.6) \quad y = 22{,}75x_1 + 22{,}35x_2 + 30{,}25x_3 + 38{,}25x_4 + 32{,}50x_5 + \\ + 26{,}50x_6 + 32{,}50x_7.$$

Uit (1.6) volgt dat y inderdaad een functie is van $X = (x_1, x_2, \ldots, x_7)$ en dat de gedaante van deze functie mede bepaald wordt door de toestand S_0 van het systeem. Immers de prijzen van rogge, etc., die in (1.6) voorkomen, zijn componenten van de toestand S_0.

Vijfde wens. (meer-stapsbelsissingsproblemen)
Bij meer-stapsbeslissingsproblemen worden waarderingen aan strategieën toegekend. Het criterium dat men hier hanteert om toegelaten strategieën te vergelijken is een reële z-functie $y(S_0; z)$, waarbij S_0 de begintoestand en z de toegepaste strategie voorstelt.

Wanneer een optimale strategie moet worden ontworpen voor een onbegrensde tijdsperiode, dan zullen veelal, onverschillig de gebruikte strategie, de totale kosten onbegrensd hoog zijn. Bijgevolg kunnen deze kosten niet dienen als criterium. Zowel voor stochastische als deterministische ontwikkelingen in de toestand van het systeem kan men nu de kosten gaan verdisconteren (zie de hoofdstukken over meer-stapsbeslissingsproblemen). Dit wil zeggen dat men op een voorgeschreven wijze aan kosten in het verre verschiet minder gewicht toekent dan aan kosten van gelijke omvang in de nabije toekomst. Voor een dergelijke handelwijze kan een economische rechtvaardiging bestaan. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem stochastisch is, zal men als criterium kiezen de verwachting van de totale verdisconteerde kosten. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem deterministisch is, kiest men de verdisconteerde kosten zelf als criterium. In een aantal situaties kunnen echter ook de - over de gehele wandeling - gemiddelde kosten per tijdseenheid als criterium worden gekozen.

Voor die situaties kan men bewijzen, dat hoe de ontwikkeling in toestand van het systeem zich ook moge realiseren, de gemiddelde kosten per tijdseenheid "met kans 1" steeds dezelfde zijn. Dit gemiddelde kan zonder "te middelen" op een eenvoudige wijze worden bepaald. (Zie de hoofdstukken over meer-stapsbeslissingsproblemen).

Zesde wens

In de inleiding hebben wij gezegd dat ieder besliskundig onderzoek gericht is op de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimumprobleem. Het beslissingsproblemen uit voorbeeld 1.1 kan men vertalen in het volgende optimumprobleem: "Bepaal het minimum van (1.6) onder de bijvoorwaarden (1.3), (1.4), etc.". In zijn algemene vorm luidt het mathematische één-stapsbeslissingsprobleem als volgt: "Bepaal het minimum (of maximum) van $y(S_0;\, X)$ onder de bijvoorwaarden $X \in \chi(S_0)$."

Bij de bespreking van de vijfde wens is gebleken dat het waarderen van strategiën op meer dan één wijze kan geschieden. In zijn meest algemene vorm luidt het mathematische meer-stapsbeslissingsprobleem: "Bepaal het minimum (of maximum) van de reële z-functie $y(S_0;\, z)$ onder de bijvoorwaarden $X = z(S) \in \chi(S)$ voor elke $S \in \mathcal{S}$."

Zowel voor het bepalen van de extreme waarden van de X-functie $y(S_0;\, X)$ als voor de z-functie $y(S_0;\, z)$ bestaan een aantal wiskundige technieken.

Tot besluit van deze paragraaf laten wij zien dat een strategie soms op een aanschouwelijke wijze kan worden uitgebeeld. In voorbeeld 1.2 zal men zodra een schade zich voordoet moeten beslissen of deze schade zal worden geclaimd of niet. In fig. 1.5 hebben wij een strategie aangegeven, die de beslisser adviseert geen schade te claimen wanneer het systeem vanwege die schade een toestand aanneemt in het gearceerde gebied, tenzij reeds eerder in het premiejaar een schade is geclaimd. Uit het voorgaande volgt dat de oplossing van het beslissingsprobleem uit voorbeeld 1.2, besliskundig gezien, een keuze is uit de verzameling van alle mogelijke gearceerde gebieden.

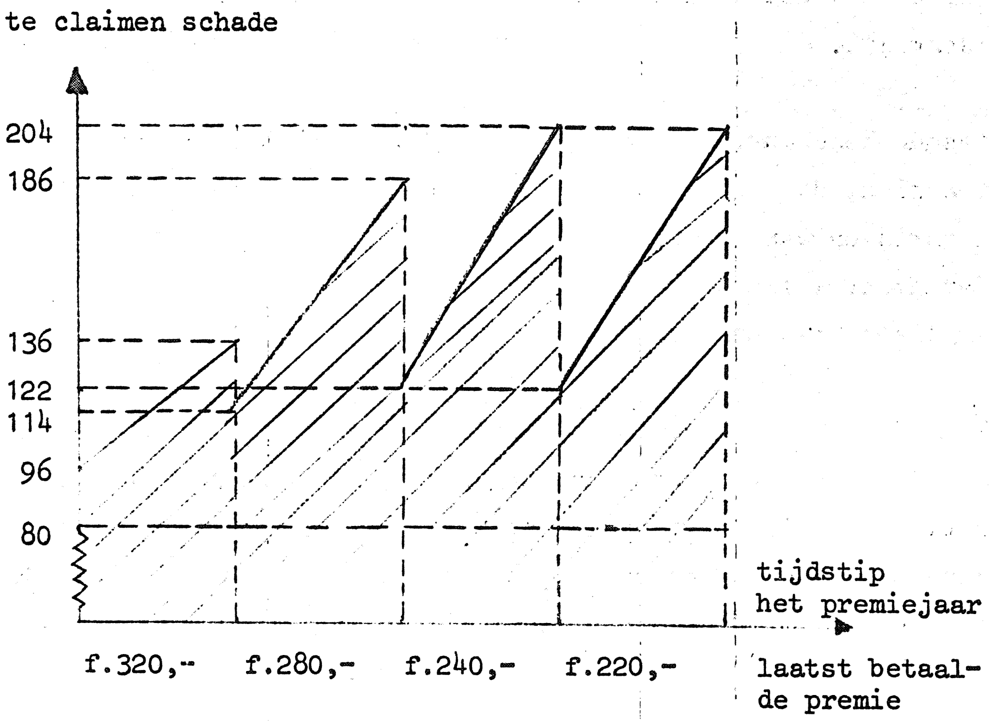


fig. 1.5

Toestandsruimte met aangegeven strategie behorende bij voorbeeld 1.2

Voor het probleem uit voorbeeld 1.3 wordt in fig. 1.6 een strategie uitgebeeld. Zodra het systeem een toestand aanneemt, welke correspondeert met een punt van een dikgetrokken lijnstuk, dan wordt de produktiesnelheid op de aangegeven wijze veranderd.

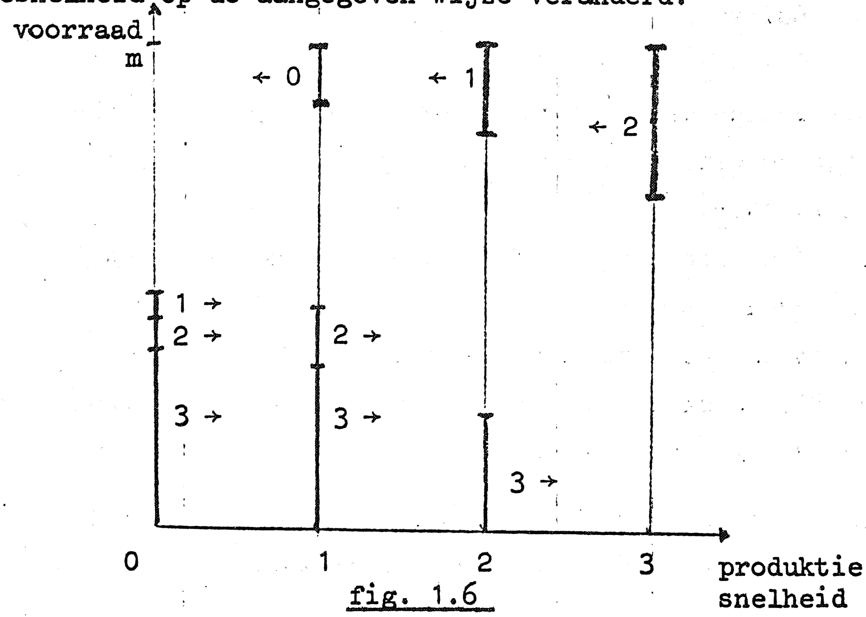


fig. 1.6

Toestandsruimte met strategie behorende bij voorbeeld 1.3 .

Uiteraard is er ook een strategie denkbaar die een omschakeling van $3 \longrightarrow 1$ voorschrijft.

In bovenstaande beschouwingen hebben wij aan de hand van zes concrete wensen laten zien, dat de wiskunde over de instrumenten beschikt, die bij het beschrijven van beslissingsproblemen van nut kunnen zijn. In de volgende paragraaf zullen wij laten zien, dat een wiskundige beschrijvingstaal alleen niet tot een mathematisch model leidt.

Opgaven. x)

1.3. In een fabriek voor elektrische apparaten worden o.a. tachometers gemaakt. De fabricage hiervan geschiedt in 3 verschillende bedrijfsafdelingen, t.w. de fabricage-, de montage- en de ijkafdeling. Men maakt 3 verschillende typen tachometers, die ieder een andere bewerkingstijd in de diverse afdelingen hebben.

type \ afdeling	fabricage	montage	ijken
I	0	0,6	0,2
II	0	0,5	0,3
III	0,8	0,4	0,4

bewerkingstijden in uren.

De maximaal beschikbare capaciteit in uren is voor de fabricageafdeling 160, voor de montageafdeling 400 en voor de ijkenafdeling 320.

Verder is bekend dat de verschillende metertypen de volgende bijdragen tot de winst leveren: type I f. 6,- , type II f. 7,- en type III f. 10,-.

a) Door welke grootheden laat de toestand van het systeem zich beschrijven?

b) Wat zijn de beslissingsvariabelen?

c) Beschrijf (wiskundig!) de verzameling toegelaten beslissingen.

d) Bepaal de kriteriumfunctie.

x) De in de opgaven weergegeven situaties zijn sterk gesimplificeerd en niet representatief voor in de praktijk optredende problemen.

1.4. Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat naat Londen om een assortiment hoedjes te bestellen. De inkoper wenst van 5 basis modellen resp. 150, 100, 50, 250 en 200 stuks te kopen. De drie fabrikanten die hem deze hoedjes kunnen leveren hebben resp. de beschikking over een capaciteit van 300, 200 en 250 stuks, ongeacht het model. De winst die de speciaalzaak op een hoedje maakt is afhankelijk van het model én van de fabrikant die ze levert, alsvolgt:

model / fabrikant	A	B	C	D	E
1	15	35	40	20	20
2	30	30	37	15	10
3	15	35	47	20	12

Beantwoord voor deze opgave dezelfde vragen die ook bij opgave 1.3 gesteld werden.

1.5. Een fabrikant maakt de produkten A en B, en wil zijn winst op die produkten maximaliseren. De fabricage van A en B geschiedt in twee fasen:

1. de hoofdbewerking, die plaatsvindt in werkplaats I en
2. de nabewerking, die, voor beide produkten, zowel in werkplaats II als in werkplaats III plaats kan vinden.

Door het verschil in outillage in de werkplaatsen II en III treedt een verschil op in bewerkingstijden én in de bijdrage die het gereed produkt tot de winst levert. In werkplaats II is er ook nog de mogelijkheid tot overwerk, wat alleen invloed heeft op de bijdrage tot de winst; de bewerkingstijden blijven uiteraard gelijk.
In onderstaande tabel 1 zijn de bewerkingstijden per eenheid produkt vermeld. In de laatste kolom van deze tabel is de maximale capaciteit van iedere afdeling opgenomen. In tabel 2 zijn de bijdragen tot de winst per eenheid gereed produkt per produktiecombinatie vermeld.

tabel 1. bewerkingstijden en maximale capaciteiten.

bewerking	werkplaats	bewerkingstijden per eenheid A	B	maximale capaciteit normaal	overwerk
voorbewerking	I	0.5	0.8	1000	-
nabewerking	II	0.3	0.5	850	250
	III	0.4	0.7	1100	-

tabel 2. bijdragen tot de winst per eenheid produkt

produktiemethode (werkplaatscombinatie)	produkt A	B
I & II	f. 15,-	f. 8,50
I & III	13,25	7,25
I & overwerk in II	9,80	7,50

a) Wat zijn de beslissingsvariabelen?

b) Beschrijf (wiskundig) de verzameling toegelaten beslissingen.

c) Bepaal de kriteriumfunctie.

1.6 In een fabriek maakt men afwisselend twee produkten X en Y op één machine M. De produktiesnelheid van de machine is constant en zodanig dat aan de gemiddelde vraag naar beide produkten kan worden voldaan. De voorraadcapaciteit is voor beide produkten beperkt en bedraagt resp. x^* en y^* eenheden. De voorraadkosten per tijdseenheid c_x en c_y zijn evenredig met de voorraadgrootte. De produktiekosten p_x en p_y zijn voor beide produkten per eenheid constant. Daarboven kent men nog omschakelkosten voor produktiewisseling van het ene produkt op het andere. Aan- en uitschakelen brengt geen extra kosten met zich mee. Indien een gevraagd produkt niet aanwezig is wordt een noodinkoop buiten het eigen bedrijf verricht tegen hogere kosten.

Gevraagd: a) wat kiest U als beslissingsvariabelen

b) maak een tekening van de toestandsruimte

c) maak een tekening van een beslissingsruimte.

1.7 Een transporteur heeft een truck AFY 13 in gebruik en breekt zich zich het hoofd over de vraag hoe hij een strategie voor de vervanging (door een zelfde type) moet opstellen. De kosten - in guldens per 1000 km - die hij voor het gebruik van de auto in rekening brengt zijn:
(1) brandstof c_1, (2) onderhoud $c_2x + c_3$, x is het aantal kilometers dat de auto in gebruik is; (3) afschrijving $\alpha^x a$, a is de aanschafprijs en α een getal tussen 0 en 1 (x als bij (2)). De waarde van de truck na aftrek van de afschrijvingen is gelijk aan de restwaarde.
Beantwoord voor deze opgave dezelfde vragen als bij 1.6.

1.8 Een rederij, die tijdens het toeristen-seizoen rondvaarten verzorgt, heeft de beschikking over 6 boten met gelijke capaciteiten van c passagiers. De rondvaarten duren 50 minuten en geschieden in ieder geval eenmaal per uur. De resterende 10 minuten zijn nodig voor in- en uitstappen. Afhankelijk van het aantal aankomende passagiers kunnen door het inzetten van meer rondvaartboten meer afvaarten per uur plaatsvinden. Kan de rederij met die 6 boten het aanbod van de passagiers niet verwerken dan verwijst men naar een naburige-rederij. De kosten en opbrengsten, die aan de rondvaarten verbonden zijn, zijn de reder bekend.
Beantwoord ook voor deze opgave de vragen zoals die bij 1.6 gesteld zijn.

1.5 Mathematische veronderstellingen.

Aangezien de besliskunde gekozen heeft voor de wiskunde als beschrijvingstaal zullen wij in het vervolg alleen mathematische modellen van beslissingssituaties beschouwen. Alvorens een dergelijk model kan worden opgesteld, dient eerst op een groot aantal structuële vragen een wiskundig antwoord te zijn gegeven. Op dit moment zijn wij eigenlijk alleen maar in staat voor de situatie geschetst in voorbeeld 1.1 een mathematisch model op te stellen. En slechts alleen dan nog wanneer stilzwijgend wordt aangenomen dat

a) geen andere grondstoffen in aanmerking komen;
b) geen prijsredukties worden gegeven voor grote partijen grondstoffen;
c) de hoeveelheden verteerbaar eiwit, vet etc. evenredig toenemen met de hoeveelheden grondstoffen in het mengsel (dus geen interacties!).

In de beslissingssituatie beschreven in beslissingsprobleem 1.4 is het daarentegen niet helemaal duidelijk hoe het verkoopproces precies verloopt. Zo kan men zich b.v. afvragen wat de klanten zullen doen als hun favoriet model is uitverkocht. Wie van hen verlaat teleurgesteld de winkel en wie koopt vrolijk een ander model?
Beperken wij ons tot één maat, dan is het voor de beslisser zeer verleidelijk om te veronderstellen dat het in werkelijkheid optredende verkoopproces equivalent is met een hieronder te formuleren verkoopproces.
De klanten staan nu buiten de winkel opgesteld in een oneindige lange rij. Met behulp van een kansmechanisme, b.v. een urn met briefjes, heeft iedere klant op een aselecte wijze bepaald hoeveel tijd zij na haar voorganger de winkel zal binnen gaan. Het aankomstproces van de klanten voor de periode 1 februari - 1 juli is hierdoor volledig gegeven. Een tweede kansmechanisme bepaalt voor iedere klant òf het te kopen model òf stelt vast dat zij de winkel onverrichter zake zal verlaten. Zodra een model is uitverkocht, wordt het tweede kansmechanisme vervangen door een ander en wel door één dat geen uitverkochte modellen aanwijst.

Indien voor <u>iedere</u> combinatie van uitverkochte modellen beide kansmechanismen zijn vastgesteld, dan is het tweede verkoopproces voor de periode 1 februari - 1 juli vastgelegd. Aangezien de wiskunde kansmechanismen met grote nauwkeurigheid kan beschrijven en de "verkoop" in ieder tijdsinterval direct uit de uitkomsten van beide kansmechanismen volgt, levert de wiskundige beschrijving van dit verkoopproces geen enkel probleem op.

Natuurlijk kan men tegenwerpen dat de hierboven gegeven voorstelling niet in overeenstemming is met de werkelijkheid. De kernvraag is echter of de man die via de boekhouding kennis neemt van de verkoop op grond van zijn ervaring een eventuele verwisseling van beide processen kan ontdekken.

Het gebruik van het eerste kansmechanisme is dan en slechts dan gerechtvaardigd, wanneer men onderstelt dat

a) eindig veel klanten aankomen in een eindig tijdsinterval;
b) elke klant afzonderlijk binnen komt;
c) de kansverdeling van het aantal binnenkomsten in een tijdsinterval niet afhangt van het aantal binnenkomsten in een disjunct tijdsinterval;
d) de kansverdeling van het aantal binnenkomsten in een tijdsinterval alléén afhangt van de lengte van dat tijdsinterval en dus bv. niet van het begintijdstip.

Men kan bewijzen dat uitgaande van deze vier veronderstellingen en een gegeven aantal verwachte binnenkomsten per tijdseenheid het eerste kansmechanisme wiskundig volledig bepaald is. [x]) Indien de beslisser over voldoende gegevens uit het verleden beschikt dan dient hij, gebruik makende van statistische technieken, te onderzoeken of bovenstaande veronderstellingen m.b.t. het verleden niet moeten worden verworpen. Een aanwijzing hiervoor zou bv. kunnen zijn een piek in de verkoop rond Pasen (veronderstelling c).

[x]) De uitkomsten $\underline{\tau}$ van het eerste kansmechanisme zijn negatief exponentiëel verdeeld. Als λ de verwachtings gelijke aantal klanten per tijseenheid voorstelt, dan geldt:

$$\text{kans}\left[\underline{\tau} \leqq \tau\right] = \tau - e^{-\lambda\tau}$$

Tot een verwerping van het model zal eveneens worden besloten als blijkt dat de smaak van het publiek verandert in de loop van het jaar. Immers het tweede kansmechanisme houdt daar geen rekening mee. Indien de beslisser niet bereid is voor iedere deel collectie een marktonderzoek te laten verrichten, dan kan men ook door het maken van aanvullende veronderstellingen tot een ondubbelzinnige "afstelling" van het tweede kansmechanisme geraken **) Extra veronderstellingen vragen echter extra onderzoek.
Het is duidelijk dat de beslissingssituatie geschetst in voorbeeld 1.2 een beschrijving behoeft van de wijze waarop ongelukken ontstaan. Ook nu kunnen wij gebruik maken van twee kansmechanismen. Het eerste zal, gelijk in het voorgaande voorbeeld, aselect de tijdstippen aangeven waarop wat gebeurt. Het tweede kansmechanisme wijst aselect de omvang van de schaden aan. De uitkomsten van beide kansmechanismen geven tesamen een ondubbelzinnige realisering van het schadeproces. Uit de wijze waarop deze realisering tot stand komt, volgt dat op elk tijdstip de reeds verkregen premieredukties, de in het verleden opgelopen schaden etc. voor het verdere verloop van het schadeproces van geen enkele betekenis zijn. Zij, die geloven dat ook een automobilist door ervaringen wijzer wordt, zullen ongetwijfeld protest aantekenen tegen deze veronderstellingen. Indien uit een toetsing blijkt dat dit veronderstelde onafhankelijke gedrag van het schadeproces niet kan worden verworpen, dan is voor iedere strategie de stochastische ontwikkeling in de toestand van het systeem gedefinieërd. Uit beide voorbeelden volgt zonneklaar dat een model voor een groot deel bepaald wordt door zijn veronderstellingen.

**) Men kan b.v. de kansen van de nog niet verkochte modellen evenredig ophogen en wel zo dat de som van die kansen gelijk wordt aan 1.

1.9 Geef een mathematische beschrijving van het proces volgens hetwelk de vraag naar de produkten X en Y in opgave 1.6 verloopt. Doe dit eveneens voor de aankomende passagiers in opgave 1.8. Vermeld bij deze beschrijvingen welke veronderstellingen U maakt.

1.10 Stel dat in opgave 1.8 niet alle aankomende passagiers blijven wachten totdat een boot arriveert, maar dat een aantal besluit weg te gaan als de rij wachtenden naar hun zin te lang is. Geef ook nu een beschrijving en vermeld de veronderstellingen.

1.6 Mathematische vereenvoudigingen

In paragraaf 1.2 hebben wij aangegeven waar in het model voor de optimale vestigingsplaats van de vierde T.H. modelvereenvoudigingen zijn aangebracht.
Modelveronderstellingen dienen om leemten in onze kennis op te vullen; modelvereenvoudigingen dienen enerzijds om te voorkomen dat een te uitgebreide kennis leidt tot onhandelbare modellen anderzijds ervoor te zorgen dat het beslissingsprobleem met de nu bekende technieken kan worden opgelost.
Modelvereenvoudigingen worden niet getoetst. Wel wordt zoveel mogelijk nagegaan of zij het eindresultaat te ernstig beïnvloeden.
Om de gedachten te bepalen beschouwen wij de volgende situatie:
"Een fabriek maakt op een beperkt aantal machines een groot aantal zeer verschillende produkten. Om aan de vraag te kunnen voldoen, wordt iedere week een produktieprogramma opgesteld. Opdat de wisselende vraag niet te snel zal leiden tot een groot aantal produktiewijzigingen in een korte tijd is een voorraad aangelegd die dienst moet doen als buffer. Indien men een nagenoeg constante produktie als hoogste goed beschouwt, dan zal men genoegen moeten nemen met voorraden die zeer omvangrijk kunnen worden. Omgekeerd kunnen voorraden, en dus ook voorraadkosten, binnen zekere grenzen worden gehouden als veranderingen in de produktiesnelheid periodiek worden toegestaan.
Dit laatste kan b.v. worden bereikt door meer of minder arbeiders te betrekken in het productieproces.Ook werktijdverlengingen en verkortingen geven dikwijls de verlangde vermeerdering resp. vermindering van de produktie. Het is duidelijk dat tegenover een op deze wijze verkregen besparing in de voorraadkosten een toename staat van de kosten welke betrekking hebben op:

a) de produktieverhoging (technisch); door de verhoging van de produktie (1) moet vaker worden gecontroleerd, (2) ontstaan meer machinestoringen, (3) moeten af- en aanvoer op een andere en dikwijls duurdere wijze worden geregeld, (4) is minder aandacht voor zuinig materiaal verbruik, etc.

b) <u>het toe- en afvloeien van extra personeel</u>; (1) nieuwe ploegen moeten worden gevormd en geïnstrueerd, (2) gebrek aan ervaringen geeft meer storingen en materiaal verlies, etc.

c) <u>de verkorting en verlenging van de arbeidstijd</u>; (1) overwerk tegen een hoger tarief werkt kosten verhogend, evenals (2) het verstrekken van maaltijden en het voorzien van nachtelijk vervoer, etc.

d) <u>de nalevering</u>; Bij niet toereikende voorraden moet worden nageleverd. Behalve het verlies aan Goodwill brengen naleveringen ook allerlei andere extra kosten met zich mee.

Uiteraard zoekt de directie naar dat evenwicht tussen vooraad en produktie waarvoor de kosten minimaal zijn. Indien voor een periode van 12 maanden de vraag naar artikelen redelijk nauwkeurig bekend is, dan ligt het voor de hand dat men voor diezelfde periode gaarne over een produktie én personeelsplanning wil beschikken.

Kiezen wij nu de volgende notatie:

P_t = de totale produktie in de $t^{\underline{de}}$ maand
W_t = de totale personeelsbezetting in de $t^{\underline{de}}$ maand
J_t = de totale voorraad in de $t^{\underline{de}}$ maand.
S_t = de totale vraag te voldoen aan het begin van de $t^{\underline{de}}$ maand.

Holt e.a. beschouwden voor de $t^{\underline{de}}$ maand de volgende typen kostenfuncties: x)

normale loonkosten: $C_1 W_t + C_{13}$ (1.7)

extra loonkosten vanwege

a) toe-én afvloeing: $C_2(W_t - W_{t-1} - C_{11})^2$ (1.8)

b) overwerk, etc.: $C_3(P_t - C_4 W_t)^2 + C_5 P_t + - C_6 W_t + C_{12} P_t W_t$ (1.9)

voorraad- en naleveringskosten: $C_7(J_t - C_8 - C_9 \cdot S_t)^2$ (1.10)

x) Holt, Modigliani, Muth and Simon: Planning production, inventories and workforce; Prentice-Hall Inc, 1960 p. 47 e.v.

waarbij C_i nog uit de gegevens te schatten constanten voorstellen. Aan een aantal van deze constanten kan een economische betekenis worden toegekend. Zo geeft C_1 het gemiddelde maand inkomen (incl. sociale lasten, etc.) weer, terwijl C_4 de produktie per werknemer uitdrukt.

De totale kosten voor een periode van 12 maanden worden gegeven door:

$$\sum_{t=1}^{12} \Big[C_1 W_t + C_{13} + C_2(W_t - W_{t-1} - C_{11})^2 + C_3(P_t - C_4 W_t)^2 + C_5 P_t + - C_6 W_t + C_{12} P_t W_t + C_7(J_t - C_8 - C_9 S_t)^2\Big] \quad , \qquad (1.11)$$

waarbij de voorraad J_t uiteraard moet voldoen aan

$$I_t = I_{t-1} + P_{t-1} - S_t . \qquad (1.12)$$

Indien na substitutie van (1.12) in (1.11) de totale kosten worden geminimaliseerd als functie van W_t en P_t dan vindt men voor de optimale produktie P_t^* en personeelsbezetting W_t^* in de $t^{\underline{de}}$ maand:

$$P_t^* = \sum_{i=t}^{t+11} \alpha_i S_i + \beta_1 W_{t-1}^* + \beta_2 J_{t-1} + \beta_3 \qquad (1.13)$$

$$W_t^* = \sum_{i=t}^{t+11} \gamma_i S_i + \delta_1 W_{t-1}^* + \delta_2 J_{t-1} + \delta_3 \qquad (1.14)$$

waarbij de constanten α_i, γ_i, β_j en δ_j ondubbelzinnig door de geschatte C_i worden bepaald.

Met behulp van (1.13) en (1.14) kan men op een eenvoudige wijze voor een periode van een jaar de maandelijkse (totaal) produktie en het benodigde aantal werkkrachten berekenen. Met behulp van deze uitkomsten kunnen wellicht geen produktie schema's voor de individuële produkten worden opgesteld, maar misschien wel algemene beleidsvragen worden beantwoord.

In dit voorbeeld ontmoetten wij twee verschillende soorten modelvereenvoudigingen. Een modelvereenvoudiging van het eerste soort was het onder één noemer brengen van een groot aantal produkten.

Ondanks het feit dat de produkten noch op een identieke wijze worden geproduceerd, noch even arbeidsintensief zijn, werd zowel produktie als vraag tesamen genomen. Verder werd geen onderscheid gemaakt tussen de verschillende bekwaamheden van het personeel. Het is voor het model voldoende om de totale personeelsbezetting te kennen. Deze aanpak vloeit voort uit de overweging dat een volledige specificatie van produkten en vaklieden tot een te omvangrijk model zal leiden.
Van het tweede soort zijn die vereenvoudigingen welke de kwadratische kostenfuncties voortbrengen. De gekozen kostenfuncties zijn wel is waar niet onlogisch maar de rechtvaardiging berust toch wel voornamelijk op de eenvoud van de uiteindelijke beslisregels (1.13) en (1.14).

1.7 Mathematische criteria.

Voor het bepalen van een optimale beslissing of strategie is een enkelvoudig kriterium, waarmee beslissingen of strategieën kunnen worden vergeleken, onmisbaar. In de meeste beslissingssituaties is echter het opstellen van een optimaliteits-kriterium één van de moeilijkste opgaven. Dit komt omdat de beslisser dikwijls een aantal tegenstrijdige verlangens koestert en derhalve over meerdere kriteria beschikt. Wanneer hij gedwongen wordt om òf zijn verlangens onder één noemer te samen te brengen òf daaruit een ondubbelzinnige keuze te maken, ontstaan de moeilijkheden.

Het onder één noemer brengen van tegengestelde wensen behoeft niet altijd tot onoverkomelijke moeilijkheden te leiden. Zo hebben wij in par. 6 gezien dat tegengestelde verlangens m.b.t. voorraad en produktie konden worden gecombineerd; zij lieten zich uitdrukken in één en dezelfde (geld) eenheid.

Het meisje uit voorbeeld 1.5 heeft het echter heel wat moeilijker. Zij wil wel graag naar het bal maar het liefst met een corsage, die enig opzien baart. Hoe brengt zij nu deze tegenstelde wensjes onder één noemer? Wanneer het deel nemen aan het bal haar f. 100,- waard is en als zij bovendien de prijs van de corsage als een opbrengst ervaart, dan zou zij als kriterium de verwachting van de totale opbrengst kunnen kiezen. Beter kan zij wellicht de kans op het gaan naar het bal als kriterium kiezen en daaraan eventueel toevoegen de restrictie "geen corsage beneden f. 3,-". Bij deze aanpak is het tweede kriterium, prijs van corsage, omgebouwd tot een restrictie (bijvoorwaarde).

Wij zullen deze verschillende werkwijzen met een extra voorbeeld toelichten. Stel dat voor het oplossen van een verkeersprobleem een aantal verkeersvoorzieningen in aanmerking komen en stel vervolgens dat de beslisser zich bij de keuze moet laten leiden door de criteria kosten en te verwachten aantal slachtoffers per jaar. Het is duidelijk dat de bijbehorende verlangens naar veiligheid en zuinigheid tegengesteld zijn. Dit verkeersprobleem kan op drie verschillende manieren worden benaderd. In elk van deze drie benaderingen hebben wij maar één criterium.

Men kan n.l. tot een enkelvoudig criterium komen door òf het maximale bedrag vast te stellen dat de gemeenschap bereid is te betalen om de dood van een weggebruiker te voorkomen òf het maximale bedrag aan te geven dat voor een verkeersvoorziening mag worden uitgetrokken òf de overleveringskans te schatten die bij het verrichten van andere waagstukken nog net acceptabel wordt geacht. In de eerste benadering stelt de prijs die men voor het leven van een weggebruiker wil betalen ons instaat om het te verwachten aantal slachtoffers en de jaarlijkse kosten onder één noemer te brengen. De gezochte verkeersvoorziening is dan die voorziening waarvoor de totaal te verwachten jaarlijks uit te geven kosten (dus inclusief mensenlevens) het laagst zijn. In de tweede benadering doet het maximale bedrag dat een verkeersvoorziening mag kosten ons een middel aan de hand om dure voorzieningen geruisloos te laten vallen en uit het restant naar eer en geweten de veiligste te kiezen. Tenslotte geeft in de derde benadering de minimale overleveringskans ons een maatstaf om de minst veilige voorzieningen te schrappen en vervolgens uit de overblijvende de goedkoopste te kiezen x) Voor tal beslissingssituaties met meer dan één kriterium en waarin emotionele kwesties als de waarde van een mensenleven geen rol spelen, biedt de laatste aanpak een uitkomst: het kriterium met de hoogste prioriteit wordt optimaliteitskriterium; de overige kriteria worden omgezet in restricties.

In de laatste jaren is bij sommigen twijfel gerezen aan de waarde van een kriteriumfunctie die op een zo gekunstelde wijze wordt verkregen. In vele beslissingssituaties, zo beweren deze critici, bezit de beslisser reeds een helder beeld van dat wat een optimale ontwikkeling genoemd kan worden. Op grond van dat beeld kunnen een aantal <u>normen</u> worden opgesteld waaraan een goede beslissing of strategie moet voldoen.

x) De beide laatste benaderingen zullen misschien minder weerstand oproepen dan de eerste. Maar niemand kan een voorstander van de eerste benadering verhinderen om uit te zoeken welke prijs voor een mensenleven tot dezelfde beslissing leidt. Hij zal de bezwaarden ongetwijfeld voorhouden, dat dit de prijs is die zij wensen te betalen.

De oplossing van het beslissingprobleem zou dan ook niet moeten volgen uit het bepalen van een optimale strategie of beslissing met behulp van een criterium, maar uit de constructie van een strategie of beslissing die aan een gegeven aantal normen voldoet. Deze uitspraak berust mede op de hieronder te geven overwegingen.

Als de beslisser in staat is de ontwikkeling in de toestand van het systeem te beschrijven, dan moet hij de plaats van de "natuur" kunnen innemen en met behulp van een rekenautomaat in versneld tempo zo'n ontwikkeling kunnen nabootsen. Op grond van een redelijk aantal van deze nabootsingen is hij zeker in staat om na te gaan of de te testen strategie of beslissing aan de gestelde normen voldoet. Bij een eventueel falen kan hij uit de nabootsingen afleiden welke veranderingen in het beslissingsvoorschrift mogelijkerwijs tot een verbetering zullen leiden. Deze veranderingen brengt hij aan en gaat net zo lang door met "sleutelen en testen" totdat een strategie of beslissing wordt verkregen die de gewenste eigenschappen bezit.
In het hoofdstuk "Simulatie" zullen wij op deze aanpak terugkomen. Met betrekking tot de hierboven gesignaleerde controverse nemen wij wanneer het gaat om het oplossen van praktische problemen, een opportunistisch standpunt in.
Strikt genomen mag, volgens de definitie gegeven in par. 1.1, de zojuist geschetste aanpak niet als besliskundig worden aangemerkt. Dit laatste behoeft natuurlijk niet een bezwaar te zijn.

1.8 Is een besliskundige benadering zinvol?

Alhoewel de tot dusver gegeven voorbeelden niet de pretentie hebben representatief te zijn voor de grote klasse van beslissingsproblemen waarvoor een nieuwe benadering wordt gezocht, zal een kritische beschouwing die zich beperkt tot deze voorbeelden toch een indruk kunnen geven van de omstandigheden waarin een besliskundige aanpak zinvol is.
In het probleem van de optimale vestigingsplaats van de vierde T.H. werd niet gesproken over kosten. Toch mag bekend worden verondersteld dat de aan dit project verbonden bouwkosten b.v. mede afhangen van de grondprijs, het beschikbaar grondoppervlak, de bouwvoorschriften en de eventueel te saneren stadsgedeelten. De bouwkosten zijn daarom dan ook van plaats tot plaats verschillend. Ook de omstandigheid dat in de huisvesting van een groot aantal studenten kan worden voorzien, maakt een candidaat - vestigingsplaats aantrekkelijk. Dit zijn allemaal factoren die bij de selectie van vestigingsplaatsen niet over het hoofd mogen worden gezien. Het is dan ook te billijken dat een minister een oplossing, waarin geen rekening gehouden wordt met kosten, met enige reserve tegemoet treedt. De voorgestelde benadering was echter oorspronkelijk niet ontworpen voor het bepalen van de optimale vestigingsplaats voor de 4$^{\underline{de}}$ T.H. maar voor de locatie van een centraalmagazijn van een middelgrootbedrijf. Vanuit dat magazijn moet de bevoorrading plaatsvinden van een groot aantal verkooppunten. In verhouding tot de 4$^{\underline{de}}$ T.H. is het benodigde grondoppervlak gering. Men verwacht dan ook geen moeilijkheden met het vinden van een geschikt terrein, wanneer de optimale vestigingsplaats eenmaal is vastgesteld. Op grond van jaarcijfers wordt gezocht naar die vestigingsplaats waarvoor het aantal ton-kilometers minimaal is.
De hierboven geopperde bezwaren gelden niet, of althans in mindere mate, voor het centraalmagazijn. Indien men zich beperkt tot afstanden en geen kosten in de beschouwingen betrekt, dan zijn wiskundig gezien beide transport-problemen identiek. Het is heel goed voorstelbaar dat de geschetste benadering voor het centrale magazijn probleem <u>wel</u> aanvaardbaar is.

Overigens bestaan er een aantal, waaronder zeer geavanceerde, technieken voor het oplossen van dit type problemen.

Het is natuurlijk niet zo dat de gelaakte oplossing van het T.H. probleem geen informatie bevat. Het tegendeel is waar! Zonder kennis van dit antwoord is het werkelijke probleem zelfs niet op een bevredigende wijze op te lossen.

Wanneer het terrein voor de 4$^{\underline{de}}$ T.H. gekozen is, dan kunnen zelfde technieken worden toegepast om de optimale plaats van de bibliotheek, kantine, aula etc. vast te stellen.

In de meeste beslissingssituaties leidt een besliskundig onderzoek niet direct tot een uiteindelijke beslissing of strategie. Wel weet zij de aanwezige informatie dikwijls zo te bundelen dat met betrekking tot een aantal facetten van het beslissingsprobleem een helder inzicht kan worden verkregen. Dit geschiedt meestal via het oplossen van een aantal deelproblemen. Het inschakelen van besliskundigen in het onderzoek naar de optimale vestigingsplaats is dus zeker nuttig. Maar men mag echter niet verwachten dat zij het probleem alleen kunnen oplossen.

Het beslissingsprobleem geschetst in voorbeeld 1.1 is natuurlijk niet het echte probleem. Doordat men in werkelijkheid niet elke week evenveel inkoopt als voor de produktie nodig is, mag het mengprobleem niet losgezien worden van een inkoopprobleem. Een beschrijving die meer aansluit bij de werkelijkheid brengt ons waarschijnlijk bij een meerstapsbeslissingsprobleem dat zeer moeilijk is op te lossen. Niet alleen moeilijk omdat de vereiste wiskundige technieken ontbreken, maar voornamelijk omdat er geen door gegevens ondersteunde visie over het toekomstig prijsverloop bestaat. Ook nu geldt dat het antwoord op het beslissingsprobleem 1.1 de beslisser een hoop nuttige informatie verschaft. Ondertussen blijft het zoeken naar wetmatigheden in het prijsverloop een nuttige bezigheid.

Zoals wij in par. 1.5 hebben gezien berust het model behorende bij het autoverzekeringsprobleem op een aantal nogal betwistbare onderstellingen.

Deze waren ingevoerd om het schadeproces, dat de ongelukken "veroorzaakt", geheel onafhankelijk te laten verlopen van de toegepaste strategie.
Het is duidelijk dat een eventuele wisselwerking tussen schadeproces en strategie voor de modelbouwer noodlottig is. Immers hij zal zo'n wisselwerking dan moeten kunnen beschrijven en wel voor iedere mogelijke strategie. Voor een strategie die in het verleden wel eens werd toegepast zijn de verzamelde gegevens misschien wel omvangrijk genoeg om een relatie te kunnen vastleggen. Maar laat de gevonden relatie zich ook zinvol interpreteren voor de overige strategieën? In het autoverzekeringsprobleem is de ondersteIde onafhankelijkheid wel aanwezig indien de eigenaar de auto niet zelf gebruikt maar verhuurt aan vreemden. Immers zijn klanten zullen zich doorgaans niet op de hoogte stellen van de levensloop van de gehuurde auto en zijn polis.

De hierboven geschetste moeilijkheden zijn karakteristiek voor tal van beslissingssituaties. In deze beslissingssituaties is, misschien na enige moeite, een basis-proces te onderkennen dat zich ook zonder de actieve begeleiding van de beslisser voltrekt. Wij denken hierbij aan het schadeproces in het autoverzekeringsprobleem, aan het aankomstproces van de "hoedjes koopsters" etc.
De uiteindelijke ontwikkeling in de toestand van het systeem wordt door dit basisproces en de toe te passen strategie bepaald.
Wanneer men mag aannemen dat het basisproces zich niet stoort aan de toe te passen strategie dan volgt uit de wiskundige beschrijving van het basisproces en die van de strategie op een eenvoudige maar ondubbelzinnige wijze de formulering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem.
Volgt uit een statistisch onderzoek dat basisproces en strategie hoogst waarschijnlijk afhankelijk zijn dan vereist de voortzetting van het besliskundig onderzoek een grote dosis optimisme.
Hier wreekt zich namelijk het feit dat besliskundigen in tegenstelling tot physici weinig gelegenheid hebben tot experimenteren. Onze conclusie is dat besliskundige modellen omvangrijk mogen zijn, hun structuur daarentegen moet zeer eenvoudig blijven.

In voorbeeld 1.4 is het beschrijven van het verkoopproces van dameshoedjes een moeilijke opgave en wel omdat men niet weet hoe de klanten zullen reageren op de aanwezige collectie. In par. 1.5 hebben wij gesuggereerd dat een marktonderzoek vooraf misschien daarover uitsluitend kan geven. Een dergelijk onderzoek is kostbaar en daardoor misschien niet uitvoerbaar.
Wiskundig gezien blijft het probleem onveranderd als in plaats van hoedjes b.v. vacantiereizen worden verkocht. Voor een reisbureau echter zou een marktonderzoek wel lonend kunnen zijn. In het hoedjesprobleem spreekt men niet over het verlies aan Goodwill, dat door het uitverkocht zijn van een model kan worden geleden. Omdat er geen methoden bestaan voor het meten van dit verlies, is het moeilijk in de berekeningen op te nemen. In hoofdstuk 3 zullen wij een vereenvoudigde versie van dit voorbeeld aantreffen. In deze versie beperken wij ons tot één model. Voor verschillende getalwaarden van het verlies aan goodwill wordt de optimale inkoopgrootte en de verwachte winst uitgerekend. Een besliskundige benadering levert dan wel is waar niet <u>de</u> optimale inkoopgrootte maar geeft het verband alleen tussen de optimale inkoopgrootte en het verlies aan Goodwill. Een uiterst nuttige informatie!

Het behoeft geen betoog dat van alle in par. 1.2 genoemde beslissingssituaties die van het meisje en haar corsage ons het meest heeft getroffen. De vraag rijst of wij haar hulp van besliskundige aard kunnen aanbieden. Er is reeds gewezen op het feit dat zij nog niet over een kriterium beschikt voor het vergelijken van mogelijke strategieën. Een aantal suggesties om in deze leemte te voorzien, werden reeds in par. 1.6 gedaan. Bij de beschrijving van de ontwikkeling in de toestand van het systeem doen zich helaas onoverkomelijke moeilijkheden voor.
Om deze ontwikkeling kanstheoretisch te kunnen aangeven zou men voor iedere ontmoeting de kans op een uitnodiging moeten kennen. Hoe zou men deze kans kunnen schatten? Alleen een eeuwig-studente met een even eeuwig jeugdig voorkomen, die haar vriendjes naar aanhankelijkheid en gulheid in groepjes heeft ingedeeld zou misschien genoeg waarnemingen kunnen verzamelen om met behulp van een statistische analyse tot schattingen te komen.

Er zijn misschien "besliskundigen" die de onbekende kans gelijk willen stellen aan de fractie van haar vriendinnen die, daarnaar gevraagd, zeggen in de desbetreffende uitnodiging te geloven. Deze kundigen hadden even zo goed ieder van de vriendinnen de vraag kunnen stellen hoe groot zij de kans schat op een uitnodiging. Het gemiddelde van deze kansen zou dan de gevraagde onbekende kans geven. Wie deze beide schattingen als onzin kwalificeert, kan helaas niet op aller instemming rekenen. Het enige aanvaardbare wat naar onze smaak een geconsulteerde besliskundige kan doen is een alternatief voor de besteding van de avond voorstellen.

2. SIMULATIE.

2.1. Nabootsing van de natuur.

Bij de introduktie van het begrip "ontwikkeling in de toestand van het systeem" is opgemerkt dat ook zonder het nemen van beslissingen een ontwikkeling kan optreden. Dit brengt ons tot het onderscheiden van twee processen, die aan een ontwikkeling ten grondslag (kunnen) liggen: het natuurlijk proces en het beslissingsproces. Zoals men, terecht, zal vermoeden is het eerste proces dat, wat optreedt als de beslisser zich afzijdig houdt. In het tweede proces gebeurt dat niet en beïnvloedt de beslisser mede de ontwikkelingen. Indien het model van de beschouwde situatie met voldoende nauwkeurigheid is beschreven, dan volgt het beslissingsproces ondubbelzinnig uit het natuurlijk proces en de toegepaste strategie. Zijn binnen het model alle veronderstellingen op wiskundige en volledige wijze geformuleerd, dan kunnen we met behulp daarvan het natuurlijk proces nabootsen. Ook kunnen we zekere beslissingen of strategieën in aanmerking nemen en de daarbij behorende beslissingsprocessen nabootsen. Wij noemen dit simulatie. Simulatie is een begrip dat in de techniek reeds lang bekend is, men denke b.v. aan een vluchtsimulator bij de opleiding van piloten en aan de proefnemingen, die gedaan worden in het waterloopkundig laboratorium.

Door de resultaten van de onderscheiden gesimuleerde beslissingsprocessen te vergelijken kan men tot optimaliteit, of althans tot een aanvaardbare benadering van optimaliteit van een beslissing of strategie concluderen. Merk op dat de optimaliteit alleen betrekking heeft op de groep van onderzochte strategieën of beslissingen.

Aan de hand van het hoedjesprobleem uit hoofdstuk 1 zullen we één en ander toelichten. We nemen de veronderstellingen, die in de loop van hoofdstuk 1 omtrent het klantengedrag gemaakt zijn, over. Dit houdt in:

(1) een kansverdeling van het tijdsinterval $\underline{x}$ tussen twee aankomsten van een klant, met kansdichtheid $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$;

(2) een kansverdeling met behulp waarvan het te kopen model wordt bepaald.

Verder nemen we aan dat het gaat om 3 modellen hoedjes.

Uit oude waarnemingen wordt nu een schatting gedaan voor λ, dat is de verwachting van het aantal klanten dat per tijdseenheid (zeg per minuut)de winkel binnenkomt. Ook worden de kansen op de verkoop van een bepaald hoedje geschat. Laten we aannemen, dat geschat is $\lambda = \frac{1}{15}$ en voor de "koopkansen" de volgende tabel:

	model:	1	2	3	geen
kans op koop indien:	alle modellen aanwezig	0,3	0,4	0,2	0,1
	model 1 uitverkocht	---	0,6	0,3	0,1
	model 2 uitverkocht	0,4	---	0,3	0,3
	model 3 uitverkocht	0,4	0,4	---	0,2
	model 1 & 2 uitverkocht	---	---	0,6	0,4
	model 2 & 3 uitverkocht	0,7	---	---	0,3
	model 1 & 3 uitverkocht	---	0,5	---	0,5

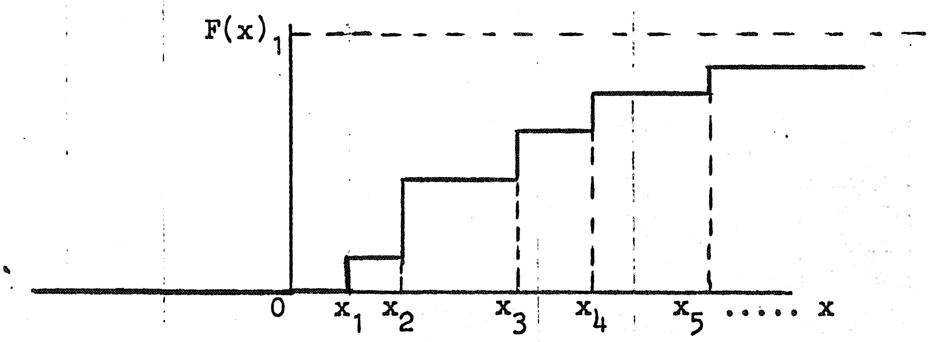
Met behulp van deze verdeling kunnen we de ontwikkelingen in de toestand van het systeem "hoedencollectie" simuleren. We verrichten daartoe aselecte trekkingen uit de gegeven verdelingen. Hierbij gaan we uit van aselecte trekkingen uit een homogene (0,1) verdeling (zie appendix B) en we proberen bij ieder zo verkregen aselect getal y een getal x te vinden dat voldoet aan $F(x) = y$. Daar een verdelingsfunctie van een continu verdeelde grootheid x een monotone functie is, kunnen we steeds een x vinden, die voldoet aan $F(x) = y$. Wanneer de functie $F(x)$ streng monotoon is, dan bestaat de eenwaardige inverse $F^{-1}(y) = x$ en ligt het voor de hand om te proberen langs deze weg x te bepalen. Voor de exponentiele verdeling is dat eenvoudig:

$$y = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{en}$$
$$x = F^{-1}(y) = - ({}^{e}\log(1-y))/\lambda = - (2{,}303\,{}^{10}\log(1-y))/\lambda.$$

Trekken we nu 10 aselecte getallen $y_0, y_1, \ldots, y_9$ (resp. 0,186; 0,048; 0,155; 0,302; 0,785; 0,515; 0,592; 0,303; 0,735; 0,292) dan krijgen we in ons voorbeeld voor 10 intervallen tussen twee opeenvolgende binnenkomsten in de hoedjeswinkel (afgerond en in minuten):

3; 0,7; 2,5; 5,4; 23,2; 10,9; 13,4; 5,4; 19,8; 5,2.

Bij discrete verdelingen, zoals die, welke gegeven zijn voor de keuze van het te kopen model hoedje, heeft men niet te maken met een streng monotone functie, maar met een trapfunctie, d.w.z. de waarde van de functie is steeds over een intervalletje constant, en verandert alleen bij gegeven vaste <u>springpunten</u>.



De verdelingsfunctie luidt hier

$$F(x) = \sum_{x_n \leq x} P(\underline{x}=x_n) \qquad P(\underline{x}=x_n) = p_n > 0$$

waarin x_n de springpunten zijn.
De procedure die nu gevolgd wordt verloopt als volgt: trek een aselect getal y uit een homogene (0,1) verdeling en zoek het kleinste springpunt x waarvoor geldt

$$y < F(x) = \sum_{x_n \leq x} P(\underline{x}=x_n)$$

We illustreren dit aan de verdeling van de te kopen hoedjes (wanneer alle modellen nog voorradig zijn).

notatie: model 1 = 1 model 2 = 2
model 3 = 3 geen model = 0

$P(\underline{x}=0) = 0,1$ $P(\underline{x}=1) = 0,3$ $P(\underline{x}=2) = 0,4$
$P(\underline{x}=3) = 0,2$

en dus voor de verdelingsfunctie:

$F(0) = 0,1$ $F(1) = 0,4$ $F(2) = 0,8$ $F(3) = 1$

We trekken weer 10 aselecte getallen:
0,898; 0,539; 0,426; 0,785; 0,249; 0,582; 0,771; 0,620; 0,746; 0,453
en we zoeken hierbij de kleinste x, die voldoet aan $y < F(x)$. Dat geeft ons voor 10 klanten de volgende keuzen:

nr. klant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gekozen model	3	2	2	2	1	2	2	2	2	2

In het algemeen, wanneer zich dus ook situaties kunnen voordoen waarin één of meer modellen zijn uitverkocht, is het mogelijk hoedjes te laten kiezen volgens onderstaande tabel.

	model dat wordt gekozen als y in het interval ligt			
	geen	1	2	3
alle modellen aanwezig	[0.0,0.1)	[0.1,0.4)	[0.4,0.8)	[0.8,1.0)
model 1 uitverkocht	[0.0,0.1)	-	[0.1,0.7)	[0.7,1.0)
model 2 uitverkocht	[0.0,0.3)	[0.3,0.7)	-	[0.7,1.0)
model 3 uitverkocht	[0.0,0.2)	[0.2,0.6)	[0.6,1.0)	-
model 1 & 2 uitverkocht	[0.0,0.4)	-	-	[0.4,1.0)
model 2 & 3 uitverkocht	[0.0,0.3)	[0.3,1.0)	-	-
model 1 & 3 uitverkocht	[0.0,0.5)	-	[0.5,1.0)	-

Met de twee, hier gedemonstreerde, mogelijkheden om aselecte trekkingen uit gegeven verdelingen te verrichten, hebben we zeker niet alle mogelijkheden getoond. We noemen nog het geval, waarbij de verdelingsfunctie F(x) niet in formulevorm gegeven is, maar wordt geschat uit verrichte waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. De waarnemingen worden geordend naar grootte en in volgorde hernummerd. Wordt nu een aselect getal getrokken, dan zoeken we daarbij een getal j, zo dat geldt

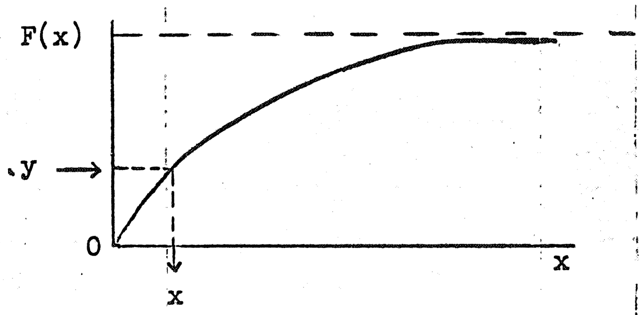
$$(j-1)/n < y \leq j/n$$

en voor de waarde van x wordt gekozen $x = x_j$.

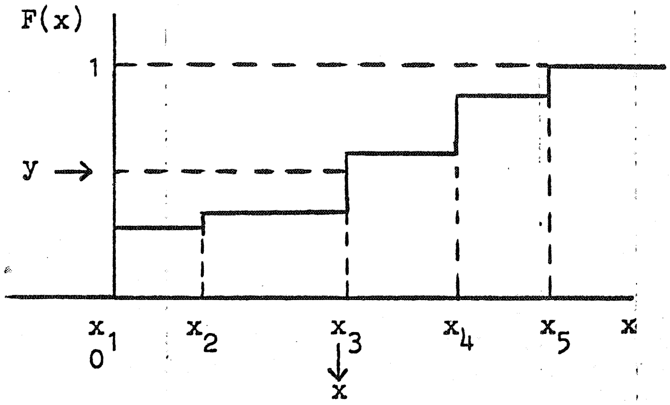
De hiervoor vermelde methoden zijn ook grafisch uitvoerbaar. Wanneer men zorgvuldig genoeg een grafiek maakt van de gegeven verdelingsfunctie, dan kan men - een uit de tekening voortvloeiende onnauwkeurigheid daargelaten - bij ieder aselect getal y hierin de bijbehorende x vinden.

Voorbeelden:

1. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.



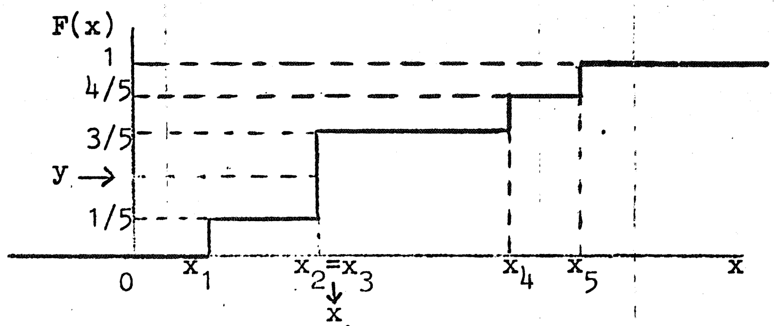
2. $F(x) = \sum_{x_n \leq x} P(\underline{x}=x_n)$ n = 5



In tabelvorm:

als y behoort tot	dan krijgt x de waarde	
$[0,p_1)$	x_1	$P(\underline{x}=x_i) = p_i$
$[p_1,q_2)$	x_2	
$[q_2,q_3)$	x_3	$\sum_{i=1}^{n} p_i = q_n$
$[q_3,q_4)$	x_4	
$[q_4,q_5)$	x_5	

3. Geordende waarnemingen x_1, x_2, ..., x_n $\qquad$ n = 5.



Keren we terug naar ons hoedjesvoorbeeld. We nemen aan dat het eerste getrokken interval de tijd voorstelt, die verloopt vanaf het opengaan van de winkel om 9 uur 's morgens, op de eerste dag van het seizoen, tot de binnenkomst van de eerste klant. In onderstaande tabel is het gedrag van de eerste 10 klanten weergegeven.

nr. van de klant	1	2	3	4	5	6	7	8
tijdstip binnenkomst*)	9.03	9.04	9.06	9.12	9.35	9.46	9.59	10.05
gekocht model	3	2	2	2	1	2	2	2

vervolg tabel:

nr. van de klant	9	10
tijdstip binnenkomst*)	10.24	10.30
gekocht model	2	2

*) afgerond op minuten.

Stelt men dat de te testen inkooppolitiek wordt weergegeven door de beginvoorraad $n = (n_1, n_2, n_3)$ van de drie modellen voordat de winkel op de eerste dag van het seizoen opengaat, dan kan men het verloop van de voorraad op de hierboven geschetste wijze simuleren. Het zal voor een ieder duidelijk zijn dat de hier weergegeven 90 minuten zeker ontoereikend zijn als basis voor de keuze van een inkoopstrategie. In de praktijk simuleert men dan ook op een rekenautomaat in "runs" met grote aantallen trekkingen (mutaties).

2.2. Nauwkeurigheid van simulatieresultaten.

Uit het voorgaande zal duidelijk geworden zijn dat men met behulp van simulatie nooit een exact antwoord op een gesteld probleem kan bereiken. Ter illustratie het volgende voorbeeld. Schrijven 10 mensen onafhankelijk ieder 100 aselecte cijfers y_i op en nemen ze daarvan het gemiddelde $\bar{y}$, dan zal zeer vermoedelijk het resultaat 10 verschillende antwoorden omvatten. Op grond van de wet van de grote aantallen mogen we verwachten, dat die antwoorden allemaal niet ver van 4,5 ($=\mathcal{E}\underline{y}$) afliggen, en bovendien (maar dat niet alleen op grond van de wet van de grote aantallen) dat de antwoorden bij benadering normaal verdeeld zijn. De populatievariantie (van de populatie aselecte getallen) $\sigma^2(\underline{y}) = \mathcal{E}\underline{y}^2 - (\mathcal{E}\underline{y})^2 = 28,5 - 20,25 = 8,25$. Uit de steekproeftheorie is bekend dat de steekproefvariantie σ_s^2 van een steekproef van n waarnemingen gelijk is aan σ^2/n, als σ^2 de populatievariantie is. In ons geval is dus $\sigma_s^2 = 0,0825$ en $\sigma_s = \sqrt{0,0825} = 0,29$. Men kan dus b.v. stellen dat: behoudens een kans van 0,05 zal een antwoord liggen tussen $4,5 - 2.0,29$ en $4,5 + 2.0,29$. We noemen het interval $(4,5 - 0,58,\ 4,5 + 0,58)$ een voorspellingsinterval voor $\bar{y}$. Door het aantal trekkingen te vergroten kan men de lengte van dit interval verkleinen. We hanteren als vuistregel: wordt het aantal trekkingen n maal zo groot, dan wordt de standaardafwijking door $\sqrt{n}$ gedeeld. Dat wil dus zeggen dat voor een 10 maal zo nauwkeurig antwoord 100 maal zoveel trekkingen vereist zijn. In ons voorbeeld wordt het interval rond het antwoord voor één persoon, die nu 10.000 trekkingen verricht:

$$(4,5 - 2.0,029\ ,\ 4,5 + 2.0,029)$$

Deze wijze van opvoeren van de nauwkeurigheid noodzaakt ons een reken-automaat te hulp te roepen, die in een redelijke tijd een groot aantal trekkingen kan uitvoeren.

Ter illustratie geven we een probleem, dat met behulp van een reken-automaat is opgelost. Daar we ook in staat zijn dit probleem analytisch op te lossen - waar we in het hoofdstuk over Markov-programmering op terug komen - is het mogelijk simulatie en analytische methoden te vergelijken.

Bij het scheepvaartbedrijf v.h. Jacob Baay te A zijn moeilijkheden gerezen tussen de drie vennoten Pieter, Dirk en Thijs Baay. Zoals iedere ingewijde weet, onderhoudt dit scheepvaartbedrijf met haar enige schip, de "Trijntje Jacoba", ongeregelde vrachtdiensten tussen de plaatsen A, B en C. Elk transport (A → B, C → B, B → C, etc.) kost inclusief in- en uitladen precies één dag. 's Avonds en 's nachts wordt er niet gevaren. Zowel in A als in B en C worden iedere morgen om 7 uur - en op geen ander tijdstip - vrachten aangeboden. Het is niet altijd zeker of hier vrachten voor de Trijntje Jacoba bij zijn. In tabel 2.1 zijn de kansen op bepaalde vrachten gegeven.

Tabel 2.1

van \ naar	A	B	C	zowel A als B	zowel A als C	zowel B als C
A	1/8	1/2	1/4	-	-	1/8
B	1/2	1/4	1/8	-	1/8	-
C	1/6	1/6	1/2	1/6	-	-

Met een transport A → A (of B → B, C → C) wordt aangeduid dat de Trijntje Jacoba een dag in die plaats moet overblijven.

Het schip kan slechts één vracht tegelijk aan boord nemen, zodat bij de situaties die door de laatste drie kolommen in de tabel weergegeven worden, een keuze probleem bestaat. De winsten op de transporten ("vaarwinsten") zijn bekend en zijn - in honderden guldens - vermeld in tabel 2.2. Een dag stilliggen in een plaats levert verlies op (minteken).

Tabel 2.2

van \ naar	A	B	C
A	-1	2	4
B	2	-1	3
C	4	3	-2

De drie vennoten willen gezamelijk voor de drie keuze-gevallen een richtlijn opstellen voor de schipper van de Trijntje Jacoba en het beraad hierover geeft aanleiding tot grote moeilijkheden. Zowel Pieter als Dirk en Thijs blijken namelijk ieder een eigen richtlijn voor te staan, die zij onder geen beding voor één van de andere twee willen laten varen. Die richtlijnen zijn:

Pieter: "Nooit naar C, liever een dag wachten in A of in B."
Dirk: "Alleen naar C als er geen ander aanbod is, en vanuit C liever naar A dan naar B."
Thijs: "Elk aanbod naar C aanvaarden en vanuit C liever naar B dan naar A."

Een ondernemend neefje heeft lucht gekregen van de onverkwikkelijkheden, en besluit met behulp van simulatie uit te zoeken wie van zijn ooms de meest lucratieve richtlijn heeft bedacht. Wij zullen hem hierin volgen.

Allereerst bepalen wij het tijdstip waarop wij iedere keer de toestand van het systeem bekijken en wel 's ochtends tegen 7 uur voordat het aanbod van vrachten bekend wordt. We gaan vervolgens voor de drie strategieën (= richtlijnen) de overgangskansen, dat zijn de kansen op een vaart van een vertrekplaats naar een bestemming, bepalen (ga dat na).

Pieter:

van \ naar	A	B	C
A	3/8	5/8	0
B	5/8	3/8	0
C	0	0	0

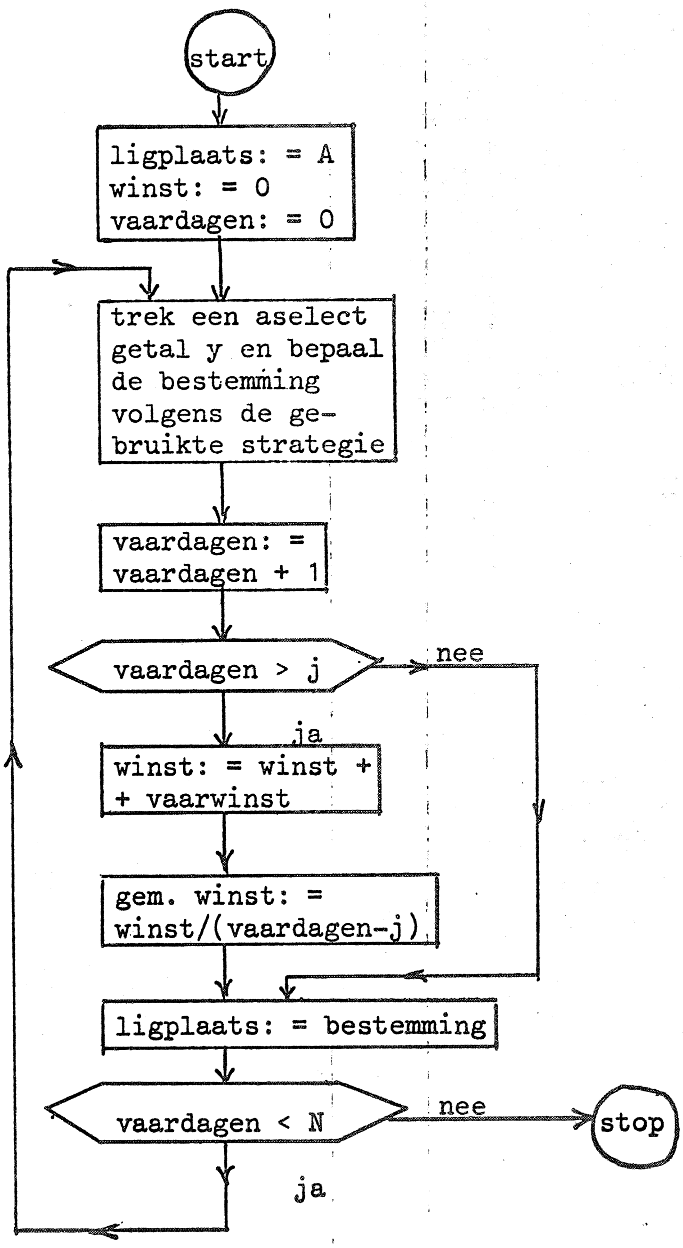
Dirk:

van \ naar	A	B	C
A	1/8	5/8	1/4
B	5/8	1/4	1/8
C	1/3	1/6	1/2

Thijs:

van \ naar	A	B	C
A	1/8	1/2	3/8
B	1/2	1/4	1/4
C	1/6	1/3	1/2

Nemen we de strategie van Thijs dan kan men zich voorstellen, dat een simulatie van het beslissingsproces als volgt verloopt: start in A en trek een aselect getal y; is $0 \leq y < 0{,}125$ dan blijft de Trijntje Jacoba die dag in A, is $0{,}125 \leq y < 0{,}625$ dan vaart ze naar B en is $0{,}625 \leq y < 1$ dan vaart ze naar C. In de bestemmingsplaats op de eerste dag (toestand van het systeem) wordt weer een aselect getal getrokken en de volgende bestemming bepaald, enzovoort. Met behulp van een rekenautomaat wordt dit in versneld tempo gedaan en kunnen we over een groot aantal dagen een beeld krijgen van het beslissingsproces. Een aspect van simulatieproblemen, waar we bij dit voorbeeld niet mee te maken hebben, dat echter bij de simulatie van andere systemen wel van belang kan zijn, is de invloed van de gekozen begintoestand. Wanneer men wil bereiken dat de (aselect getrokken) toestanden in een simulatieserie onafhankelijk zijn van de begintoestand, dan laat men in de regel die serie voorafgaan door een <u>inloop</u>. Een inloop is een beginstuk van een simulatie, dat men buiten beschouwing laat bij de berekening van het resultaat. Overigens is het verstandig geen zeldzame toestanden als begintoestand te kiezen. Een globaal stroomschema van de te volgen procedure is hieronder geschetst (ter illustratie met een inloop van j dagen; lengte van de simulatieserie N dagen).



In tabel 2.3 zij een drietal simulatieseries weergegeven - voor iedere strategie één - van 5000 trekkingen (vaardagen), die, om vergelijking goed mogelijk te maken, voor iedere serie dezelfde zijn.

De exacte resultaten (gemiddelde winsten) zijn: voor Pieter 0.875, voor Dirk 1,467 en voor Thijs 1,450. Zoals men ziet is nog wel enige afwijking te constateren.

Tabel 2.3

	gemiddelde winst		
vaardagen	strategie Pieter	strategie Dirk	strategie Thijs
20	1,400	1,450	1,150
40	0,950	1,350	1,175
60	0.900	1,383	0,867
80	1,063	1,200	0,950
100	1,010	1,350	1,080
200	0,965	1,655	1,255
400	0,920	1,583	1,263
600	0,900	1,568	1,263
800	0,909	1,493	1,369
1000	0,944	1,421	1,386
1800	0,927	1,506	1,377
2600	0,910	1,477	1,403
3400	0,903	1,482	1,417
4200	0,916	1,498	1,410
5000	0,928	1,490	1,400

Reeds lang heeft men naar methoden gezocht om de nauwkeurigheid van simulatieresultaten (gemiddelden), gemeten aan hun variaties, te verbeteren,zonder dat dit noodzakelijk gepaard gaat met een, mogelijk tot astronomische bedragen, oplopend aantal vereiste trekkingen. Deze methoden staan bekend onder de naam variantie-reduktie technieken of Monte Carlo technieken. Wij zullen die hier niet behandelen, daartoe zij verwezen naar de literatuur die op dit gebied bestaat; we noemen echter één van die methoden:

Antithetische variabelen; men kan hierbij als volgt te werk gaan: eerst wordt een beslissingsproces op de gebruikelijke wijze gesimuleerd, en de aselecte getallen y_i worden onthouden. Daarna wordt de simulatie van het proces herhaald, echter nu met de aselecte getallen $y_i^* = (1-y_i)$. Het gemiddelde resultaat van beide series samen geeft nu het eindresultaat.

2.3. Werken en wachten.

In de vorige paragrafen hebben we eerst een systeem ("hoedencollectie") ontmoet, waarbij één trekking van een aselect getal voldoende was om het tijdstip te bepalen, waarop de toestand van het systeem veranderde en daarna één ("scheepvaartbedrijf"), waar de veranderingen op equidistante tijdstippen plaatsvonden. Simulatie is in deze gevallen eenvoudig uit te voeren en er is weinig verwarring omtrent de tijdstippen mogelijk. Wij zullen nu echter gevallen bespreken, waarin meerdere activiteiten (voorgesteld door trekkingen) het tijdstip bepalen, waarop de toestand van het systeem zich wijzigt. Veel van dit soort problemen liggen op het terrein van de wachttijdtheorie. Aan de hand van een voorbeeld lichten we een en ander toe.

In het havenplaatsje Zeedorp heeft men voor het lossen (en overladen) van graanschepen een elevator in gebruik. Onregelmatig komen zeeschepen de haven binnen en moeten dan gelost worden. De elevator kan bij de aankomst van een schip echter bezet zijn, met gevolg dat zich een rij wachtende schepen vormt. Men wil nu nagaan wat de gemiddelde (verwachte) wachttijd van een schip is.

We nemen aan dat uit een waarneming is gebleken dat het aankomstinterval $\underline{t}_a$, dat is de tijd, die verstrijkt tussen twee opeenvolgengende aankomsten, exponentieel verdeeld is met parameter λ

$$P(\underline{t}_a \leq t) = F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Zoals gezegd, de elevator kan "bezet" of "vrij" zijn. Zodra hij bezet raakt wordt een trekking verricht voor de lostijd $\underline{t}_l$, waarvan de verdeling bekend is.

$$P(\underline{t}_l \leq t) = F_2(t).$$

De toestand van het systeem wordt weergegeven door de lengte van de rij wachtende schepen (r). Om nu goed te kunnen werken met de mechanismen, die de tijdstippen van de toestandsverandering bepalen, voeren we het begrip <u>klok</u> in *). Een klok is een(theoretisch) mechanisme, waarvan de werking goed te vergelijken is met die van een gewone wekker. Bij de oplossing van bovenstaand voorbeeld maken we gebruik van een klok die de gesimuleerde tijd aangeeft en van twee "wekkers": één voor de aankomsttijd en één voor de lostijd. Stel dat op een zeker moment de volgende situatie zich voordoet:

(1) de aankomsttijdwekker is juist afgelopen; d.w.z. er is een schip aangekomen;
(2) de klok staat op 540 (minuten);
(3) de lostijdwekker loopt op 552 af;
(4) de rij wachtende schepen (r) is 3 schepen lang (incl. het nieuw aangekomen schip en het schip dat gelost wordt).

Het eerste wat we nu moeten doen is een trekking verrichten uit de exponentiele verdeling voor een nieuwe aankomsttijd. Laat gegeven zijn $\lambda = 1$ (d.w.z. het verwachte aantal binnenvarende schepen is 1 per uur), een een aselect getal (0,118), dan krijgen we voor het nieuwe aankomstinterval $t_a = 2{,}15$ u. ofwel 129 min. en de aankomsttijdwekker loopt nu wwer af op $540 + 129 = 669$. Het eerstvolgende tijdstip, waarop een wijziging in de toestand van het systeem optreedt is 552: het lossen van het eerste schip uit de wachtrij is beëindigd en zijn plaats kan worden ingenomen door het tweede schip uit de rij. We trekken dan een nieuwe lostijd; laat dat 50 min. zijn. We kunnen een overzichtelijk beeld van deze simulatie verkrijgen door de gegevens in tabelvorm op te schrijven:

---

*) bij de meeste simulatievraagstukken maakt men gebruik van een klok, zij het dan niet altijd expliciet, zoals hier.

klok	chronologische lijst	elevator *)	rijlengte	toelichting
540	L = 552, A: = 669	bezet	3	L = lostijd-
552	L: = 602, A = 669	bezet	2	wekker
602	A = 669, L: = 670	bezet	1	A = aankomst-
669	L = 670, A: = 750	bezet	2	tijdwekker
670	L: = 738, A = 750	bezet	1	: = betekent:
738	A = 750	vrij	0	hiervoor is
750	L: = 812, A:= 827	bezet	1	aselect
				getrokken.

etc.

In de chronologische lijst staan in chronologische volgorde de "afloop-tijden" van de wekker vermeld. De klok wordt telkens verzet naar de af-looptijd van de eerste wekker op de chronologische lijst. Om nu de ge-middelde wachttijd na te gaan, moet aantekening worden gehouden van:

(1) het totaal aantal aangekomen schepen;
(2) de totale wachttijd van die schepen.

Men kan dit doen door een tweetal kolommen aan de bovenstaande tabel toe te voegen waarin deze gegevens vermeld worden.

*) Deze kolom kan gemist worden: de rijlengte geeft de toestand van de elevator reeds aan.

Opgaven.

2.1. Gegeven zijn de aselecte getallen y_i: 0,503; 0,309; 0,765; 0,437; 0,912; 0,837; 0,058; 0,561; 0,272; 0,519. Bepaal m.b.v. deze getallen aselecte trekkingen uit:

a) de discrete verdeling met de volgende kansen
$P(\underline{x}=0) = 0{,}1$; $P(\underline{x}=2) = 0{,}3$; $P(\underline{x}=4) = 0{,}2$; $P(\underline{x}=5) = 0{,}1$;
$P(\underline{x}=7) = 0{,}3$;

b) de waarnemingen: 15, 33, 45, 28, 36, 13, 26, 22, 32, 30, 33, 45, 18, 23, 40, 38, 27, 25, 18, 22;

c) de logarithmen van de getallen $(1-y_i)$ zijn resp. (∿)
- 0,304; - 0,161; - 0,628; - 0,249; - 1,056; - 0,788; - 0,026; - 0,358; - 0,102; - 0,318. Bepaal met behulp hiervan aselecte trekkingen uit de exponentiële verdeling met $\lambda = 3$.

2.2. Een autohandelaar, die alleen zeer exclusieve auto's van het merk "Starlight" verkoopt, heeft in zijn showroom (en verder nergens) ruimte voor 5 van die auto's. De handelaar kan iedere week op maandag bij de fabriek bestellingen doen; het gevraagde aantal auto's wordt dan de volgende week 's maandagsochtends vroeg bij hem afgeleverd. De wekelijkse vraag naar deze auto's is bekend en als volgt verdeeld:

$P(\underline{v}=0) = 0{,}3$	$P(\underline{v}=1) = 0{,}2$	$P(\underline{v}=2) = 0{,}2$
$P(\underline{v}=3) = 0{,}1$	$P(\underline{v}=4) = 0{,}1$	$P(\underline{v}=5) = 0{,}1$

De inkooppolitiek is als volgt: "is de voorraad kleiner dan 3 auto's, dan aanvullen tot 5."

Gevraagd wordt nu de ontwikkeling in de toestand van het systeem na te bootsen:

a) in geval geen nalevering mogelijk is, en geen noodinkopen gedaan kunnen worden;

b) in geval nalevering wel mogelijk is, maar geen noodinkopen gedaan kunnen worden.

De volgende aselecte getallen kunnen gebruikt worden: 0,139; 0,496; 0,556; 0,389; 0,216; 0,052; 0,700; 0,654; 0,355; 0,510; 0,093; 0,193; 0,667; 0,700; 0,851; 0,056; 0,886; 0,478; 0,158; 0,288.

2.3. De Eerste Amsterdamse Aardolie Mij. (EAAM) gaat een grote serie proefboringen verrichten. De daarbij te gebruiken boor heeft een beperkte levensduur. De prijs van een nieuwe boor bedraagt ƒ 20.000,-. Wanneer tijdens een boring een boor breekt moet deze worden vervangen door een nieuwe en dit brengt - wegens stagnatie, etc. - extra kosten met zich mee ten bedrage van ƒ 60.000,- . Tijdens een boring kan hoogstens éénmaal een boor breken; de vervangende boor blijft heel gedurende het resterende deel van die boring. De leeftijd van een boor is gelijk aan het aantal (geheel of gedeeltelijk) overleefde proefboringen (aan het einde van een boring waarbij een boor vervangen is heeft de vervangende boor dus leeftijd 1). In onderstaande tabel wordt de kans op boorbreuk gegeven voor de verschillende leeftijden van een boor.

leeftijd	kans op boorbreuk bij eerstvolgende boring
0	1/16
1	1/8
2	1/2
3	1

Bij de eerste proefboring begint men met een nieuwe boor. Bij alle daarop volgende boringen vraagt men zich af of het verstandig is om ook dan met een nieuwe boor te beginnen.
Gevraagd wordt de volgende strategieën m.b.v. simulatie te vergelijken.

a) iedere 2 jaar oude boor door een nieuwe vervangen;
b) iedere 3 jaar oude boor door een nieuwe vervangen.

Gegeven zijn de volgende aselecte getallen: 0,042; 0,843; 0,494; 0,522; 0,426; 0,964; 0,453; 0,582; 0,946; 0,066; 0,172; 0,613; 0,461; 0,247; 0,472; 0,985; 0,252; 0,470; 0,888; 0,609.

2.4. Vervolg op 2.3: pas op de vorige opgave de methode der antithetische variabelen toe.

2.5. Voor een zeker artikel is hieronder de verdeling van de dagelijkse vraag gegeven:

gevraagd aantal σ	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(\underline{\sigma}=\sigma)$	1/4	1/4	1/8	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16

De winkelier, die dit artikel verkoopt, kan iedere dag bijbestellen; en het bestelde aantal wordt enige dagen later (de <u>levertijd</u> l) afgeleverd. De verdeling van de levertijd is gegeven.

levertijd l in dagen	$P(\underline{l}=l)$
1	1/4
2	1/2
3	1/4

Vergelijk de volgende twee inkooppolitieken m.b.v. simulatie.

a) aanvullen tot 9 als de voorraad minder dan 6 is;
b) aanvullen tot 7 als de voorraad minder dan 4 is.

Aan het voorraadhouden zijn kosten verbonden, en wel ƒ 2.50 per stuk per dag over de voorraad aan het einde van van een dag. Voorts zijn er bestelkosten ƒ 5.- per bestelling. De kosten van neen-verkoop bedragen ƒ 10.- per stuk.

Gegeven zijn de aselecte getallen: 0,012; 0,868; 0,669; 0,345; 0,530; 0,094; 0,937; 0,397; 0,384; 0,162; 0,226; 0,336; 0,961; 0,970; 0,104; 0,153; 0,288; 0,913; 0,315; 0,830; 0,220; 0,151; 0,302; 0,512; 0,993.

2.6. Een klein postkantoor heeft twee loketten; bij beide kon men in het verleden voor alle gebruikelijke verrichtingen terecht. Sinds kort is dat echter veranderd. De beheerder van het postkantoor heeft namelijk een week geleden, op aandrang van beide lokettisten, besloten, dat vanaf die datum aan één van de twee loketten alleen geldzaken (als spaarbank- en girobetalingen) behandeld mogen worden. Aan het andere loket mogen geen geldzaken ter behandeling aangenomen worden. Het tijdsinterval tussen de aankomsten van twee, na elkaar, binnenkomende klanten is exponentieel verdeeld met $\lambda = 1/2$. De kans, dat een binnenkomende klant een geldelijke transactie wenst te verrichten bedraagt 1/4. De helptijden h (in minuten)zijn als volgt verdeeld:

h	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
$P(\underline{h} \leq h)$ voor geldzaken	0	0	0,1	0,3	0,5	0,8	0,9	1
$P(\underline{h} \leq h)$ voor overige verrichtingen	0,1	0,3	0,5	0,6	0,75	0,9	1	1

Gevraagd wordt m.b.v. simulatie de gemiddelde wachttijd en helptijd te berekenen in de oude en in de nieuwe situatie (maak daarbij de nodige veronderstellingen omtrent het aankomstpatroon). Neem hiervoor een serie van 20 klanten.

3. EEN-STAPSBESLISSINGSPROBLEMEN 1; ENKELE VOORBEELDEN.

Wij zullen in dit hoofdstuk aan de hand van een aantal voorbeelden het oplossen demonstreren van eenvoudige één-stapsbeslissingsproblemen, waarbij geen gebruik gemaakt wordt van speciale wiskundige technieken. Juist omdat geen speciale technieken gebruikt worden komt bij deze oplossingen de nadruk te liggen op de modelvorming.

Voorbeeld 3.1

Een fabriek heeft voor een speciale opdracht een grote hoeveelheid entabogeen nodig. Entabogeen kan ter plaatse op elk tijdstip worden ingekocht in iedere gewenste hoeveelheid à f. 5000,-- per kilo. Men kan ook jaarlijks op 1 juli entabogeen inkopen in Centraal Afrika en deze per boot laten verzenden naar de fabriek. Indien men een hoeveelheid van x kg. inkoopt, dan komen de totale kosten (in guldens), inclusief vervoer, op

$$3000x + 20x^2$$

(De verklaring van deze formule luidt als volgt: verspreid over grote gebieden wordt entabogeen in kleine hoeveelheden gevonden. Grote hoeveelheden kunnen slechts ten koste van veel inspanning worden verkregen. Vandaar dat de gemiddelde inkoopkosten per eenheid 3000 + 20x monotoon toenemen als functie van de omvang x van de bestelling).

Verder is gegeven dat

a) de fabriek het benodigde geld moet lenen à 8% per jaar;

b) met het werk direct na aankomst van de grondstoffen uit Afrika wordt begonnen;

c) het werk 9 maanden zal duren;

d) het verbruik van entabogeen constant zal zijn en dat men in totaal 60 kg. nodig heeft;

e) de opdrachtgever zal betalen zodra het project wordt opgeleverd.

Gevraagd: "Hoeveel kg. entabogeen moet in Afrika en hoeveel moet ter plaatse worden ingekocht?"

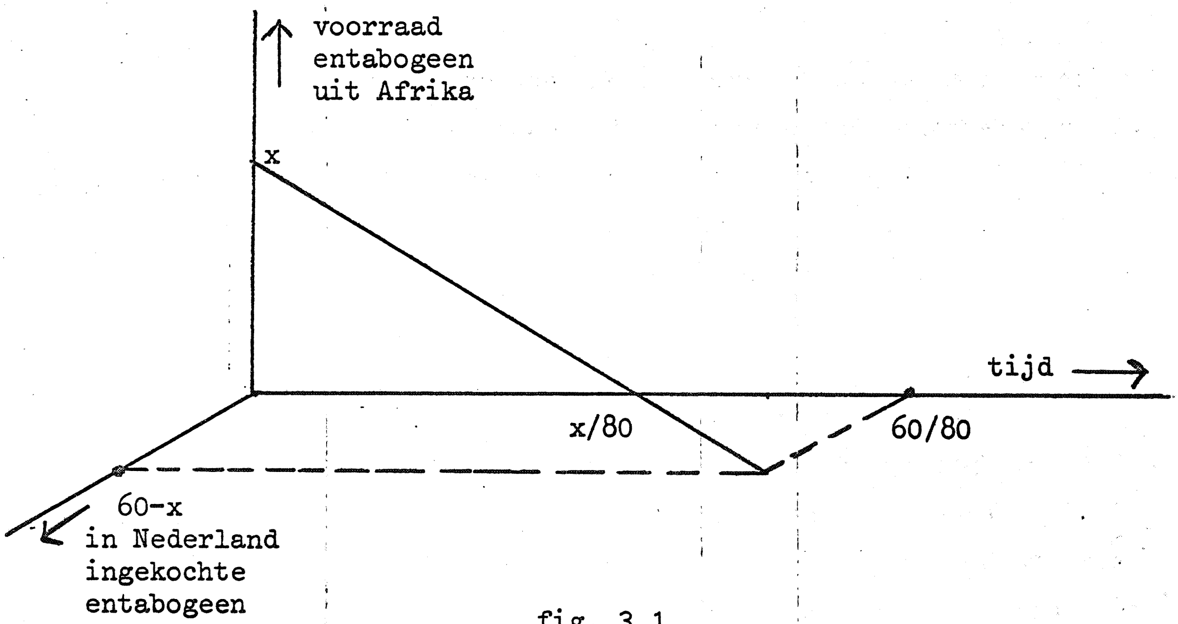


fig. 3.1

Ontwikkeling in de toestand van het systeem.

Oplossing.

In dit probleem zullen wij aannemen dat de toestand van het systeem gegeven wordt door de volgende twee toestandsgrootheden:

1) de hoeveelheid entabogeen uit Afrika nog in voorraad, en
2) de hoeveelheid entabogeen reeds gekocht op de plaatselijke markt

De toestandsruimt S is dus een twee-dimensionale ruimte.

Als de beslissing x de in Afrika te kopen hoeveelheid entabogeen voorstelt en als in Nederland slechts entabogeen wordt ingekocht voor onmiddellijk gebruik (geen voorraadvorming), dan wordt in fig. 3.1 de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven.

De toetekennen waardering aan deze ontwikkeling van het systeem (inclusief beslissingskosten) wordt gevormd door:

1) inkoopkosten $3000x + 20x^2$ (Afrika)

$+ (60 - x) \cdot 5000$ (Nederland)

2) <u>rente</u>

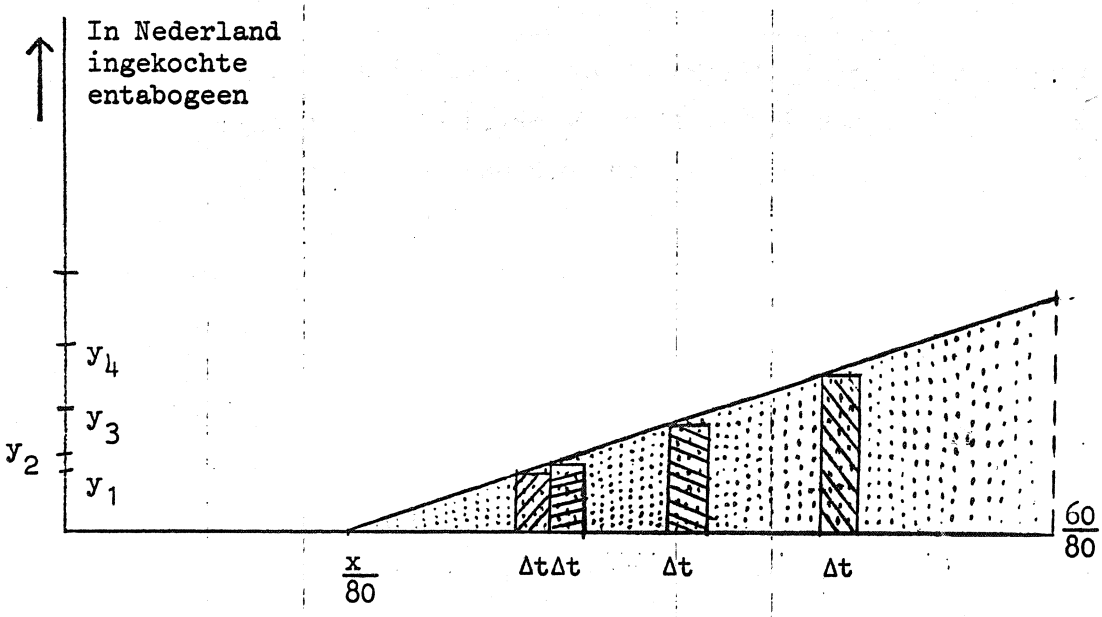
a) te betalen aan de bank wegens de financiering van de in Afrika ingekochte hoeveelheid entabogeen

$$(60/80).\ 0{,}08\ .\ (3000x + 20x^2)\ ;$$
(tijd) (rente)

b) te betalen aan de bank wegens de financiering van de continue inkoop van entabogeen in Holland (zie fig. 3.1 en de toelichting).

$$(1/2).((60 - x)/80).0{,}08\ .\ (60 - x)\ .\ 5000.$$

Wij zullen nu de renteberekening in punt 2b nader toelichten.



<u>fig. 3.2</u>

De renten verschuldigd over de perioden met lengten Δt worden in eerste benadering gegeven door

$$0{,}08\ .\ \Delta t\ .\ y_i\ .\ 5000$$
(rente; tijd; hoeveelheid; prijs)

of in andere woorden door 0,08 . 5000 maal het oppervlak van het bijbehorende gearceerde gebied. Men kan nu eenvoudig inzien dat de rente over het gehele tijdsinterval (x/80, 60/80) gegeven wordt door 0,08 . 5000 maal het oppervlak van het gestippelde gebied, en dus door

$$(1/2).((60 - x)/80).\ (60 - x)\ .\ 0{,}08\ .\ 5000.$$

De toetekennen waardering wordt nu gelijk gekozen aan de totale kosten

$$(1 + (9/12) . 0{,}08)(3000x + 20x^2) + ((1 + (1/2).((60 - x)/80).0{,}08) .$$
$$. (60 - x) . 5000 =$$
$$= 23{,}7(x - 44{,}7257)^2 + 261590{,}7987.$$

Het criterium voor de optimale beslissing, de x-functie $y(S_0; x)$, wordt nu gegeven door

$$y(S_0; x) = 23{,}7(x - 44{,}7257)^2 + 261590{,}7987$$

Men kan eenvoudig nagaan dat $y(S_0; x)$ minimaal is, wanneer x gelijk gekozen wordt aan 44,7257.

Veronderstel nu dat men in Afrika alleen partijen kan inkopen welke groter dan of gelijk aan 50 kg. zijn. De verzameling van toegelaten beslissingen $\chi(S_0)$ bestaat dan uit de volgende beslissingen:

$$x = 0 \text{ en } x \geq 50$$

Uit de criteriumfunctie volgt, dat, vanwege de term $23{,}7(x - 44{,}7257)^2$, de keuze moet vallen op die toegelaten waarde van x welke het minst "ver" van 44,7257 verwijderd is. Bijgevolg wordt onder deze bijvoorwaarde de optimale beslissing gegeven door $x = 50$.

Voorbeeld 3.2

Dit voorbeeld is een iets vereenvoudigde versie van het vierde voorbeeld uit hoofdstuk 1 (par. 1.3).

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat alleen dit najaar naar Parijs om hoedjes van één type te bestellen. Deze hoedjes worden het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht. Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli) worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten op de eerste dag van de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.

In dit najaar moet de inkoper dus beslissen hoeveel hoedjes hij zal bestellen. Zijn keuze zal afhangen van de volgende gegevens:

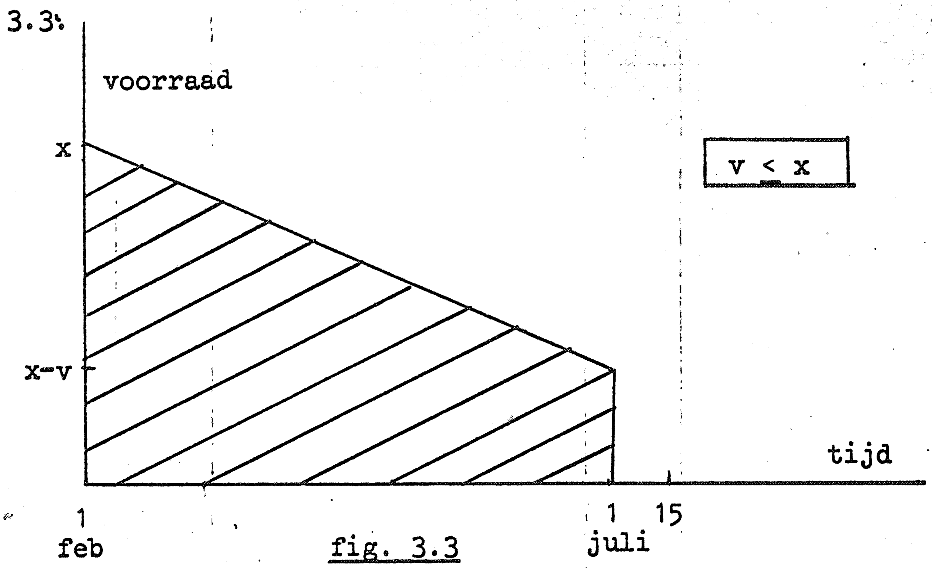
a) de inkoopkosten: $\phi(x)$ voor een partij van de omvang x;
b) de verkoopprijs in de <u>normale</u> verkoop: a_1 per hoedje;
c) de verkoopprijs in de <u>uitverkoop</u>: a_2 per hoedje;
d) de voorraadkosten: b voor ieder hoedje, dat een geheel seizoen in de voorraad is (wij denken hierbij in de eerste plaats <u>niet</u> aan rentederving, maar aan huur voorraadruimte, enz.);
e) de schade aan good-will, welke het modehuis door "neen-verkoop" lijdt: c per hoedje;
f) de kansverdeling van de vraag <u>v</u>, die gegeven wordt door de (continue) verdelingsdichtheid f(v).

De verdelingsdichtheid f(v) geeft uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

<u>Oplossing</u>.
Laten wij ons beperken tot één toestandsgrootheid en wel die, welke aangeeft hoeveel hoedjes van het bewuste type nog in voorraad zijn. Uitgaande van de <u>modelveronderstelling</u> dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is verspreid zullen wij de volgende twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen:

1) <u>In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien ($v \leq x$)</u>.

Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli v bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in fig. 3.3:



<u>fig. 3.3</u>

<u>Ontwikkeling in de toestand van het systeem</u>

Indien wij de voorraadkosten voor de uitverkoop-periode verwaarlozen en indien wij de voorraadkosten steeds berekenen over de restant-voorraad, dan zijn de kosten evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied (vgl. ook fig. 3.2 met toelichting); dit is $(x + (x - v))/2$, als de lengte van de periode 1 februari - 1 juli gelijk aan 1 gekozen wordt. Derhalve worden de voorraadkosten gegeven door

$$b \cdot (x + (x - v))/2 = (x-v/2) \cdot b.$$

De inkoopkosten bedragen $\phi(x)$, terwijl de inkomsten gegeven worden door

$$a_1v + a_2(x - v).$$

Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$a_1v + a_2(x - v) - \phi(x) - (x - v/2)b.$$

2) <u>In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien.</u> $(v > x)$.
Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli wederom v bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in fig. 3.4.

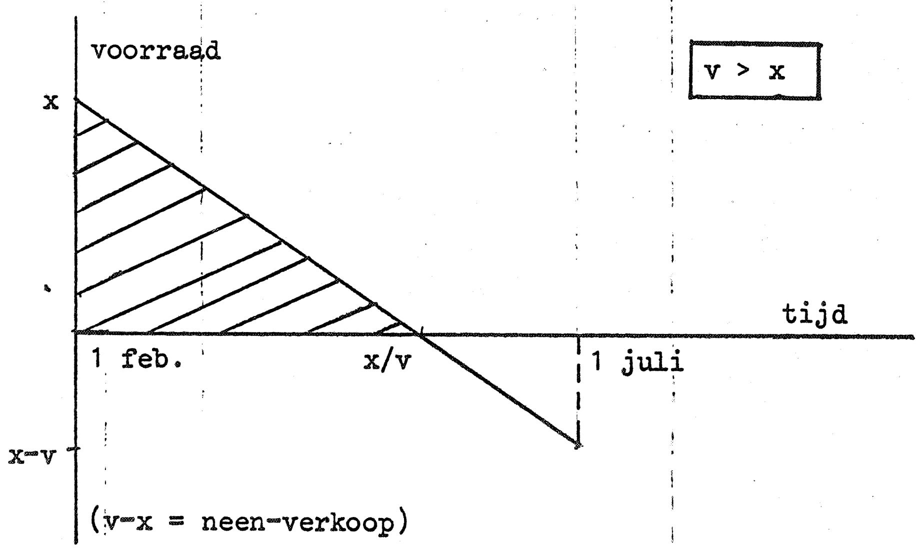


fig. 3.4

Ontwikkeling in de toestand van het systeem.

De voorraadkosten zijn ook nu evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied; dit is $(1/2) \cdot x \cdot (x/v) = x^2/2v$. Bijgevolg worden de voorraadkosten gegeven door $bx^2/2v$. De inkoopkosten bedragen $\phi(x)$, terwijl het verlies aan good-will gegeven wordt door $c(v - x)$. Voor de inkomsten vinden wij a_1x.

Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$a_1x - \phi(x) - bx^2/2v - c(v - x).$$

Samenvattende: als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli v bedraagt dan wordt de toe te kennen waardering aan een realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem gegeven door

$$\begin{aligned} &a_1v + a_2(x - v) - \phi(x) - (x - v/2)b, && \text{als } v \leq x \\ &a_1x - \phi(x) - bx^2/2v - c(v - x), && \text{als } v \geq x \end{aligned}$$

Aangezien de vraag $\underline{v}$ stochastisch is, is ook de ontwikkeling in de toestand van het systeem van te voren niet bekend. Het ligt voor de hand om aan deze stochastische ontwikkeling de <u>verwachting</u> van de winst als waardering toe te kennen. Wij vinden dan voor de waardering

$$\int_0^x \{a_1v + a_2(x - v) - \phi(x) - b(x - v/2)\} f(v)dv +$$

$$+ \int_x^\infty \{a_1x - \phi(x) - bx^2/2v - c(v - x)\} f(v)dv.$$

Het kritèrium voor de optimale beslissing wordt nu gegeven door

$$y(S_0; x) = \int_0^x \{a_1v + a_2(x - v) - \phi(x) - b(x - v/2)\} f(v)dv +$$

$$+ \int_x^\infty \{a_1x - \phi(x) - bx^2/2v - c(v - x)\} f(v)dv =$$

$$= a_2x - \phi(x) - bx + (a_1 - a_2 + \tfrac{b}{2})\mathcal{E}\underline{v} + \int_x^\infty \{\tfrac{b}{2v} x^2 +$$

$$+ (a_2 - a_1 - b - c)x + (a_1 - a_2 + \tfrac{b}{2} + c)v\} f(v)dv.$$

Het wiskundige optimum-probleem luidt nu: "Bepaal het maximum van $y(S_0;\ x)$".

Met behulp van de differentiaalrekening kan men aantonen dat voor de gezochte waarde van x moet gelden

$$\frac{dy(S_0;\ x)}{dx} = 0.$$

of $$a_2 - b + \int_x^{\infty} (a_1 + c - bx/v - a_2 + b)\ f(v)dv - \phi'(x) = 0.$$

Van het bovenstaande resultaat zullen wij thans een concrete toepassing bespreken. Wij gaan uit van de volgende gegevens:

a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt f. 30,--, m.a.w. $\phi(x) = 30x$;

b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt f. 50,--, m.a.w. $a_1 = 50$;

c) de verkoopprijs in de uitverkoop is f. 20,--, m.a.w. $a_2 = 20$;

d) de voorraadkosten bedragen f. 5,-- per seizoen per hoedje, dus $b = 5$;

e) het verlies c aan good-will voor ieder hoedje te weinig in voorraad, wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0, 5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden;

f) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door de gammaverdeling

$$f(v) = (0{,}02)^2\ ve^{-0{,}02v}$$

(de verwachte vraag is dus 100 hoedjes).

Substitueren we deze gegevens in $\dfrac{dy(S_0;\ x)}{dx} = 0$:

$$(35 + c) \int_x^{\infty} (0{,}02)^2\ ve^{-0{,}02v}\ dv - 5x \int_x^{\infty} (0{,}02)^2\ e^{-0{,}02v}\ dv = 15.$$

Na enig rekenwerk gaat dit over in

$$(0{,}6 + 0{,}02c)xe^{-0{,}02x} + (35 + c)e^{-0{,}02x} = 15.$$

Indien wij deze vergelijking oplossen naar de bestelgrootte.x, dan vinden wij het in tabel 3.1 vermelde resultaat.

tabel 3.1

Invloed van het verlies aan good-will op de optimale bestelgrootte

verlies aan good-will in guldens	optimale bestelgrootte
0	88
5	99
10	109
15	117
20	124
25	130
30	136

Voorbeeld 3.3

In dit laatste voorbeeld behandelen we een probleem dat zowel op de hieronder aangegeven wijze kan worden opgelost als m.b.v. dynamische programmering (zie het eerste hoofdstuk dat daaraan gewijd is). Het wordt nu aan de lezer overgelaten de opvolgende stappen in de modelvorming en de oplossing te onderscheiden.

Een chemische industrie heeft een contract afgesloten met één van zijn cliënten. In het contract staat, dat a) de fabriek zich verplicht tot levering van: d_1 kg. abaraat op 1 februari a.s.
en daaropvolgend d_2 kg. abaraat op 1 maart, en d_3 kg. abaraat op 1 april;
b) de fabriek op de hierboven genoemde tijdstippen ook het duurdere benesol mag leveren, maar dan tegen de vóor abaraat vastgestelde prijs.
Benesol is altijd in voorraad, maar abaraat zal speciaal voor de cliënt moeten worden gefabriceerd. Het produktieniveau van abaraat kan alleen aan het begin van iedere maand worden veranderd. Elke verandering van het produktieniveau brengt kosten met zich mee. Wordt het produktieniveau omgeschakeld van P' naar P'', dan worden de bijbehorende kosten gegeven door

$$a_1(P' - P'')^2.$$

Op de afleveringstijdstippen kunnen zich nu de volgende situaties voordoen:

1) de vraag naar abaraat is groter dan de aanwezige hoeveelheid. Dit betekent dat het duurdere benesol voor het verschil van V tussen de gevraagde en de aanwezige hoeveelheid moet worden bijgeleverd.
2) de vraag naar abaraat is kleiner dan de aanwezige hoeveelheid. Er blijft dus een hoeveelheid abaraat, ter grootte van het verschil -V tussen gevraagde en aanwezige hoeveelheid, over.

Als de vraag en de produktie niet aan elkaar gelijk zijn, dan zullen er extra kosten gemaakt worden. In situatie 1) worden deze extra kosten veroorzaakt door de aflevering van het duurdere benesol, terwijl in situatie 2) door de beperkte houdbaarheid van abaraat het restant moet worden vernietigd. Aangenomen wordt nu dat de kosten in beide situaties kunnen worden weergegeven door één kostenfunctie

$$a_2V^2.$$

Gevraagd: een produktieprogramma op te stellen, waarvoor de extra kosten minimaal zijn. Het produktieniveau van abaraat op 1 januari is gelijk aan nul.

Oplossing.

We nemen als beslissingsvariabelen de produktieniveau's in de maanden januari, februari en maart, stellen die resp. x_1, x_2 en x_3 en bepalen de optimale beslissingsvector (x_1^*, x_2^*, x_3^*).

De totale kosten ("waardering") bedragen

$$a_1(x_1 - 0)^2 + a_2(x_1 - d_1)^2 + a_1(x_1 - x_2)^2 + a_2(x_2 - d_2)^2 +$$
$$+ a_1(x_2 - x_3)^2 + a_2(x_3 - d_3)^2$$

als we de beslissing $x = (x_1, x_2, x_3)$ nemen. Dit is nu onze criteriumfunctie $y(S_0; x) = y(S_0; (x_1, x_2, x_3))$. Met behulp van de differentiaalrekening kan worden aangetoond dat deze (kwadratische) functie $y(S_0; x)$ slechts één uiterste waarde heeft en wel een minimum. We vinden dit minimum door de partiële afgeleiden

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3),\ f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \text{ en } f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)$$

alle gelijk aan nul te stellen.

Dit leidt tot de volgende betrekkingen

$$f'_{x_1} = 2a_1x_1 + 2a_2(x_1 - d_1) + 2a_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$f'_{x_2} = -2a_1(x_1 - x_2) + 2a_2(x_2 - d_2) + 2a_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$f'_{x_3} = -2a_1(x_2 - x_3) + 2a_2(x_3 - d_3) = 0.$$

Dit stelsel vergelijkingen laat zich op eenvoudige wijze omvormen tot

$$\begin{array}{rcrcrcl} (2a_1 + a_2)x_1 & & - a_1x_2 & & & = & a_2d_1 \\ - a_1x_1 & + & (2a_1 + a_2)x_2 & & - a_1x_3 & = & a_2d_2 \\ & & - a_1x_2 & + & (a_1 + a_2)x_3 & = & a_2d_3 \end{array} \qquad (3.1)$$

en hieruit zijn x_1, x_2, en x_3 als functies van a_1, a_2, en d_1, d_2, d_3 op te lossen. Nemen we nu aan dat a_1 en a_2 resp. de waarden 2 en 3 hebben dan worden de vergelijkingen (3.1) als volgt

$$\begin{array}{rcrcrcl} 7x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3d_1 \\ - 2x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 3d_2 \\ & & - 2x_2 & + & 5x_3 & = & 3d_3 \end{array}$$

en de oplossing hiervan luidt

$$x_1^* = (93d_1 + 30d_2 + 12d_3)/197$$

$$x_2^* = (30d_1 + 105d_2 + 42d_3)/197$$

$$x_3^* = (12d_1 + 42d_2 + 135d_3)/197$$

waarmee we op optimale waarden van x_1, x_2 en x_3 gevonden hebben. Substitueren we de optimale waarden in $y(S_0; x)$, dan vinden we voor de minimale kosten

$$(61464/38809)d_1^2 + (54372/38809)d_2^2 + (36645/38809)d_3^2 +$$

$$- (35460/38809)d_1d_2 - (14184/38809)d_1d_3 - (49644/38809)d_2d_3.$$

De totale produktie bedraagt dus

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = (135d_1 + 177d_2 + 189d_3)/197 < d_1 + d_2 + d_3 ,$$

waaruit volgt dat de totale produktie kleiner is dan de totale vraag.

Tellen we de 3 vergelijkingen van het stelsel (3.1) op, dan vinden we

$$(a_1 + a_2)x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 = a_2(d_1 + d_2 + d_3);$$

De oplossing $(x_1^{*}, x_2^{*}, x_3^{*})$ van het stelsel (3.1) moet ook hieraan voldoen; substitutie van deze oplossing levert

$$x_1^{*} + x_2^{*} + x_3^{*} = d_1 + d_2 + d_3 - (a_1/a_2)x_1^{*}$$

waaruit volgt dat ook in het algemene geval de totale produktie nooit groter is dan de totale vraag.
Ga na of deze uitspraak ook geldig blijft wanneer het produktieniveau van abaraat op 1 januari p_0 bedraagt!

Opgaven.

3.1 In de maanden juli en augustus meert iedere avond om 7 uur in het havenplaatsje Zeedorp een rondvaartboot. De plaatselijke ijscohandelaar staat dan bij aankomst te wachten. In zijn karretje is plaats voor een voorraad van maximaal 6 decaliter ijs. Zijn produktiekosten bedragen f. 10,-- per decaliter. De verkoopprijs bedraagt per decaliter f. 25,--. Wanneer niet alle ijs verkocht kan worden aan de toeristen van de rondvaartboot, dan wordt het restant (helemaal) à f. 5,-- per decaliter uitverkocht aan de plaatselijke jeugd. De vraag naar ijs door de toeristen ($\underline{y}$) heeft de volgende kansdichtheid

$$f(y) = \begin{cases} 1/6 & 0 \leq y \leq 6 \\ 0 & y > 6 \text{ of } y < 0 \end{cases}$$

Gevraagd: a) de verwachting van de winst van de ijscoman, wanneer hij x decaliter (x < 6) ijs in zijn karretje heeft op het moment vlak voordat de boot aankomt, en b) de hoeveelheid ijs, die de ijscoman op dat moment in zijn karretje in voorraad moet hebben opdat de verwachte winst maximaal is. Voor de aankomst van de boot verkoopt hij geen ijs.

3.2 In een bepaalde computer van de Eerste Nederlandse Rekenautomatenfabriek zijn 100 schakelunits van het type [illegible]R 15539 verwerkt. Deze units hebben een levensduur van maximaal 500 bedrijfsuren en verder geldt nog de volgende overlevingstabel.

Bedrijfsuren sinds ingebruikneming	100	200	300	400	500
percentage units dat na die tijd nog niet defect is	94	78	48	12	0

Wanneer een unit defect is moet het direct worden vervangen. Bovendien kan men periodiek, na iedere 100 bedrijfsuren, alle units vervangen. Het vervangen van alle units tegelijk kost f. 2000,--, het vervangen van één unit apart kost f. 80,--.

Gevraagd: a) bereken de voordeligste periode voor het vervangen van alle units tegelijk; b) welke oplossing is voordeliger: per stuk vervangen of periodiek volgens a).

3.3 Een internationale smokkelkoning heeft beslag weten te leggen op een partij van 1000 kg. koffie. Een groepje handlangers zal deze hoeveelheid in een aantal ritten over de Belgisch-Nederlandse grens trachten te brengen. Aan iedere smokkelrit zijn de volgende kosten verbonden:

1- f. 50,-- transportkosten;

2- f. 100,-- boete voor iedere handlanger die wordt gesnapt (per transport één handlanger);

3- f. 3,-- voor iedere kg. koffie die door de douane in beslag wordt genomen. Wordt een transport gesnapt dan wordt de gehele getransporteerde hoeveelheid in beslag genomen.

Als ervaren smokkelaar is hem bekend dat de kans p op een succesvolle smokkelrit

$$p = 100/(100 + x)$$

bedraagt, waarbij x de te transporteren hoeveelheid voorstelt. Indien de smokkelaar de verwachting van zijn totale kosten wil minimaliseren, met hoeveel kg. koffie moet hij dan een handlanger per smokkelrit de grens oversturen?

3.4 De Onderlinge Luchtvracht Mij. N.V., voert regelmatig een vrachtdienst uit tussen de plaatsen A en C met een vliegtuig van het type XB 13. Bij dit vliegtuig kan de hoeveelheid te vervoeren vracht geregeld worden door meer of minder brandstof mee te nemen. De hoeveelheid brandstof, die de XB 13 mee kan nemen is begrensd en wel zo dat minimaal 1000 en maximaal 2000 liter meegenomen wordt. De tussenliggende hoeveelheden komen slechts in aanmerking voorzover het veelvouden zijn van 250 liter.

De hoeveelheid brandstof $\underline{v}$, die de XB 13 nodig heeft voor een vlucht van A naar C varieert o.a. ten gevolge van de weersomstandigheden en heeft de volgende verdeling

v	1000	1250	1500	1750	2000
$P(\underline{v} \leq v)$	1/2	3/4	7/8	15/16	1

Het kan dus voorkomen dat, wanneer v(< 2000) liter brandstof in A getankt wordt, onderweg een tussenlanding gemaakt moet worden, omdat de hoeveelheid brandstof niet toereikend is. Tussen de plaatsen A en C ligt halverwege de plaats B, waar evt. een landing om brandstof bij te vullen mogelijk is. Zodra de XB 13 boven B komt is bekend hoeveel liter benzine in totaal nodig is voor de vlucht van A naar C. In de volgende tabel is aangegeven wat de kosten zijn voor een landing in B, en wat het verlies aan inkomsten bedraagt t.g.v. het niet vervoeren van de maximale hoeveelheid vracht, wanneer meer dan 1000 liter benzine getankt wordt.

liters benzine	1000	1250	1500	1750	2000
extra kosten landing in B	f. 1120,--				
verlies inkomsten in f.	-,-	200,-	350,-	700,-	1000,-

Gevraagd: bepaal wat de voor de Onderlinge Luchtvracht Mij. meest gunstige, in A te tanken, hoeveelheid brandstof is.

4. EEN-STAPSBESLISSINGSPROBLEMEN 2: LINEAIRE PROGRAMMERING.

4.1. Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen wij ons bezig houden met een speciale klasse van één-staps beslissingsproblemen, namelijk die, waarbij zowel de criteriumfunctie $y(S_0; x)$ als de beslissingsruimte $X(S_0)$ beschreven kunnen worden door lineaire functies van de beslissingsvariabelen. Wanneer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de, niet-negatieve, beslissingsvariabelen zijn, die samen de vector x vormen, dan ziet zo'n probleem in z'n wiskundige vorm er alsvolgt uit:

$$\text{maximaliseer (of minimaliseer) } y(S_0; x) =$$
$$= y(S_0; (x_1,x_2,\ldots,x_n)) = c_1x_1+c_2x_2+ \ldots\ldots +c_nx_n$$

onder de bijvoorwaarden

$$X(S_0)=\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i & (i = 1,2,\ldots,m_1) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i & (i = m_1+1,m_1+2,\ldots,m_2) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = m_2+1,m_2+2,\ldots,m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

waarbij c_{ij}, a_{ij} en b_i gegeven constanten zijn (de beschrijving van S_0). We zullen aannemen dat $b_i \geq 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Voordat we op de oplossingstechniek ingaan zullen we een aantal lineaire programmeringsproblemen (afgekort l.p. problemen) de revue laten passeren.

probleem 4.1. De Buizerdfabrieken N.V. beschikken over vier bedrijfsmachines: de M.G. 11, de Zodax, de Bim X en de Velox mix. Met behulp van deze machines kunnen drie verschillende produkten worden gemaakt, t.w. Buizerd super, Buizerd ideaal en Buizerd de luxe. Voor de produktie van Buizerd super wordt gebruik gemaakt van de M.G. 11 en de Zodax, voor Buizerd ideaal wordt gebruik gemaakt van de Zodax en de Velox mix en voor Buizerd de luxe wordt gebruik gemaakt van de M.G. 11, de Bim X en de Velox mix.

Wij zullen thans proberen dit produktieprobleem te vertalen in een wiskundig optimum-probleem.

Stel de beslissingsvariabele x is een vector (x_1,x_2,x_3) waarvan de componenten x_1, x_2, x_3 de te kiezen produktieniveau's van de drie produkten voorstellen. De criteriumfunctie wordt dan gegeven door

$$y(S_0;x) = y(S_0;(x_1,x_2,x_3)) = 50x_1 + 60x_2 + 70x_3;$$

dit is de totale winst die gemaximaliseerd moet worden.
De bijvoorwaarden geven de restricties die aan de keuze van x worden opgelegd. Deze zijn van tweeërlei aard:

1. capaciteitsvoorwaarden, die aan tabel 4.1 ontleend worden t.w.

voor de M.G. 11	$(x_1/4000) + (x_3/2000) \leq 1$
voor de Zodax	$(x_1/3500) + (x_2/2500) \leq 1$
voor de Bim X	$(x_3/3000) \leq 1$
voor de Velox mix	$(x_2/1500) + (x_3/2000) \leq 1$

Ter verduidelijking geven we voor de M.G. 11 een verklaring van de voorwaarde: maakt men x_1 eenheden van Buizerd Super dan legt men een beslag op de produktiecapaciteit van de M.G. 11 ter grootte van een fractie $x_1/4000$ van de totale capaciteit. Evenzo voor x_3 eenheden voor Buizerd de Luxe $x_3/2000$ van de totale capaciteit van de M.G. 11. Daar de totale capaciteit niet overschreden mag worden moet aan de gegeven voorwaarden voldaan worden.

2. minimale en maximale produktie eisen, die aan tabel 4.2 ontleend worden, t.w.:

voor Buizerd Super	$1500 \leq x_1 \leq 2200$
voor Buizerd Ideaal	$1000 \leq x_2 \leq 1750$
voor Buizerd de Luxe	$500 \leq x_3 \leq 1500$

Het wiskundig optimumprobleem luidt dus: "bepaal het maximum van $y(S_0;x)$ onder de bijvoorwaarden 1 en 2."

In tabel 4.1 wordt aangegeven hoeveel eenheden van een bepaald produkt de machines maximaal kunnen verwerken, als zij gedurende een maand alleen voor de vervaardiging van dat produkt zijn ingeschakeld.

Tabel 4.1

Produktie-capaciteit

	M.G. 11	Zodax	Bim X	Velox mix
Buizerd Super	4000	3500	-	-
Buizerd Ideaal	-	2500	-	1500
Buizerd de Luxe	2000	-	3000	2000

Voor de eenvoud zullen wij aannemen dat bij het omschakelen van produktie geen capaciteit verloren gaat.

In tabel 4.2. vindt men voor ieder produkt de minimale en de maximale vraag per maand, berekend op grond van contractuele verplichtingen en de marktonderzoekingen. Daarnaast is voor ieder produkt aangegeven hoeveel de winst per eenheid bedraagt.

Tabel 4.2

Produktie-eisen en winsten

	Min. Prod.	Max. prod.	winst per eenheid
Buizerd Super	1500	2200	ƒ. 50,-
Buizerd Ideaal	1000	1750	ƒ. 60,-
Buizerd de Luxe	500	1500	ƒ. 70,-

Gevraagd wordt nu vast te stellen hoeveel eenheden van ieder produkt maandelijks moeten worden vervaardigd opdat de totale winst maximaal is.

februari 1966 stellen we voor door d_i $(i=1,2,\ldots\ldots,12)$

De criteriumfunctie $y(S_0;x)$ die we willen minimaliseren zal de totale kosten moeten omvatten die te splitsen zijn in:

1. voorraad kosten, die we aan punt c) en d) ontlenen. De grootte van de voorraad aan het eind van maand i is:

$$2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} d_j \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

De totale voorraadkosten over de 12 maanden bedragen dus:

$$25 \sum_{i=1}^{12} \left(2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} d_j\right)$$

2. kosten van wisseling van produktieniveau. Teneinde deze te berekenen voeren we twee nieuwe variabelen in:

$$x_i^{*} = \begin{cases} x_i - x_{i-1} & \text{als } x_i \geq x_{i-1} \\ 0 & \text{als } x_i < x_{i-1} \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

$$x_i^{**} = \begin{cases} x_{i-1} - x_i & \text{als } x_i \leq x_{i-1} \\ 0 & \text{als } x_i > x_{i-1} \end{cases}$$

x_0 (produktie januari 1965) ontlenen we aan punt e): $x_0 = 2500$
Men merke op dat $x_i^{*} \geq 0$, $x_i^{**} \geq 0$, voor $i = 1, 2, \ldots\ldots, 12$.
Eenvoudig zijn nu de kosten van een produktieniveau wisseling te bepalen:

$$\sum_{i=1}^{12} (100x_i^{*} + 40x_i^{**})$$

Daar we verder met x_i^{*} en x_i^{**} zullen werken moeten we de voorraadkosten omwerken. Men vindt:

probleem 4.2. De ijzergiet- en walserij "De Eendracht" heeft voor de komende maanden de behoefte van de walserij aan blokken staal als volgt gespecificeerd:

Tabel 4.3

Behoefte aan blokken staal

maand	mrt. 1965	april	mei	juni	juli	aug.	sept.	okt.	nov.	dec.	jan. 1966	feb.
blokken	4000	3500	3200	2500	4500	3500	3800	3600	2000	2500	2800	2400

De in tabel 4.3 beschreven aantallen blokken dienen op de eerste dag van de desbetreffende maand aanwezig te zijn en zullen derhalve in de voorafgaande maanden moeten worden gegoten.

Verder is gegeven dat

a) het ƒ 100,- kost om de maand-produktie aan het begin van de maand met één blok te verhogen;

b) het ƒ 40,- kost om de maand-produktie aan het begin van de maand met één blok te verlagen;

c) ƒ 25,- schade wordt geleden wanneer één blok één maand onnodig in voorraad is;

d) de voorraad op 1 februari 1965 2000 blokken groot zal zijn;

e) de giet-produktie in januari 1965 2500 blokken bedraagt;

f) de maximale voorraad-capaciteit 8000 blokken is.

Gevraagd wordt: "hoeveel blokken moeten er in de maanden februari 1965 t/m januari 1966 worden gegoten, opdat aan alle behoefte kan worden voldaan en tevens de totale kosten minimaal zijn?"

De vertaling van dit probleem kan als volgt luiden:

De beslissingsvariabele x vatten we op als een vector $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{12})$ waarvan de componenten x_i $(i=1,2,\ldots\ldots,12)$ de produktieniveau's van de maanden februari 1965 t/m januari 1966 voorstellen. De behoefte aan blokken voor de maanden maart 1965 t/m met x_k^* en x_k^{**}:

$$2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)\ (x_k^* - x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j \leq 8000$$

$$(i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

3. voorwaarden, voortvloeiend uit de invoering van x_k^* en x_k^{**}

a) $x_k^*,\ x_k^{**} \geq 0$

b) Daar $x_j \geq 0$ volgt uit $x_j = x_0 + \sum_{k=1}^{j} x_k^* - \sum_{k=1}^{j} x_k^{**}$

$$2500 + \sum_{k=1}^{j} x_k^* - \sum_{k=1}^{j} x_k^{**} \geq 0 \qquad \text{en dus}$$

$$\sum_{k=1}^{j} x_k^{**} - \sum_{k=1}^{j} x_k^* \leq 2500$$

Het mathematisch optimumprobleem luidt nu: "bepaal het minimum van $y(S_0;x)$ onder de bijvoorwaarden 1, 2 en 3."

probleem 4.3. Als derde voorbeeld kiezen we voorbeeld 1.1 uit hoofdstuk 1. We vertalen dat als volgt:

De beslissingsvariabele x is de vector $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_7)$ waarvan de componenten $x_i(i=1,2,\ldots\ldots,7)$ het percentage voorstellen volgens hetwelk de ingrediënten (rogge, milocorn, paardebonen, etc.) deel van het mengsel uitmaken.

De criteriumfunctie $y(S_0;x)$ stelt nu de kosten in guldens per kg. voor die we willen minimaliseren:

$$y(S_0;x) = 0{,}2275x_1 + 0{,}2235x_2 + 0{,}3025x_3 + 0{,}3825x_4 + 0{,}3250x_5 + \\ + 0{,}2650x_6 + 0{,}3250x_7.$$

$$x_j = x_0 + \sum_{k=1}^{j} x_k^{*} - \sum_{k=1}^{j} x_k^{**} \qquad (j=1,2,\ldots\ldots,12)$$

Voor $\sum_{j=1}^{i} x_j$ wordt dat (verifieer dat):

$$\sum_{j=1}^{i} x_j = ix_0 + \sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} (x_k^{*}-x_k^{**}) = ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)\,(x_k^{*}-x_k^{**})$$

Nu gaan de voorraadkosten over in:

$$25 \sum_{i=1}^{12} (2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)\,(x_k^{*}-x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j)$$

en de criteriumfunctie wordt:

$$y(S_0;x) = \sum_{i=1}^{12} (100x_i^{*} + 40x_i^{**}) +$$

$$+ 25 \sum_{i=1}^{12} (2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)\,(x_k^{*}-x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j)$$

De bijvoorwaarden zijn:

1. behoefte-eisen; die we aan tabel 4.3 ontlenen, t.w.

$$2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j \geq \sum_{j=1}^{i} d_j \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

voeren we weer x_k^{*} en x_k^{**} in:

$$2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)\,(x_k^{*}-x_k^{**}) \geq \sum_{j=1}^{i} d_j$$

$$(i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

2. maximale voorraadcapaciteit, die we ontlenen aan punt f), t.w.

$$2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} d_j \leq 8000 \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,12)$$

De voorwaarden zijn de volgende:

1. de compleetheid van het mengsel: samen moeten de percentages tot 100 sommeren:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 100$$

2. eisen v.w.b. de samenstelling uit de grondstoffen die we ontlenen aan tabel 1.2, t.w.

$$0 \leq x_1 \leq 20 \qquad 2 \leq x_5$$
$$0 \leq x_2 \leq 15 \qquad 8 \leq x_6$$
$$0 \leq x_3 \leq \ 7 \qquad 0 \leq x_7 \leq 10$$
$$5 \leq x_4$$

3. eisen v.w.b. de samenstellende voedingsstoffen (eiwit, vet, etc.) die we ontlenen aan tabel 1.1 en tabel 1.2, t.w.

$$0{,}095x_1+0{,}085x_2+0{,}100x_3+0{,}081x_4+0{,}071x_5+0{,}081x_6+0{,}073x_7 \leq 8{,}6$$
$$0{,}066x_1+0{,}057x_2+0{,}154x_3+0{,}298x_4+0{,}118x_5+0{,}127x_6+0{,}202x_7 \geq 12$$
$$0{,}079x_1+0{,}074x_2+0{,}175x_3+0{,}330x_4+0{,}140x_5+0{,}132x_6+0{,}228x_7 \geq 14{,}7$$
$$0{,}012x_1+0{,}023x_2+0{,}010x_3+0{,}006x_4+0{,}070x_5+0{,}018x_6+0{,}036x_7 \geq 1{,}8$$
$$0{,}497x_1+0{,}521x_2+0{,}469x_3+0{,}486x_4+0{,}547x_5+0{,}430x_6+0{,}417x_7 \geq 42$$
$$0{,}017x_1+0{,}024x_2+0{,}056x_3+0{,}045x_4+0{,}115x_5+0{,}180x_6+0{,}122x_7 \leq 8{,}4$$

De lezer zal eenvoudig de formulering van het mathematisch optimum-probleem vinden.

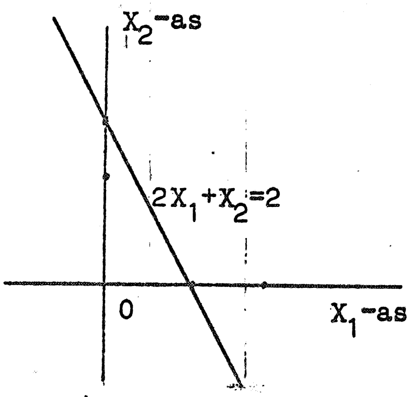
4.2. Wiskundige achterhrond van de simplex-methode.

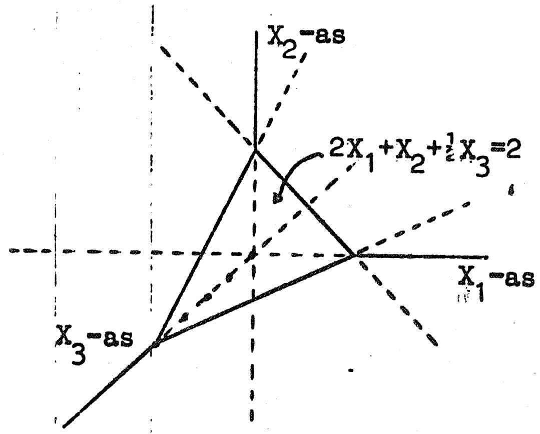
We voeren aan de hand van een eenvoudige meetkundige voorstelling enige begrippen in, die we hanteren bij de beschouwing van de simplex-methode. De simplex-methode zelf is een rekentechniek*) die ons in staat stelt om op simpele wijze l.p.-problemen op te lossen.

Allereerst onderwerpen we de beschrijving van de beslissingsruimte $\chi(S_0)$ (ook de verzameling van toegelaten beslissingen of de verzameling beslissingspunten genoemd) aan een nader onderzoek.
Een meetkundige voorstelling van de voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

kan men zich met behulp van een assenstelsel eenvoudig maken: een rechte lijn in een plat vlak. Dit vlak noemen we een 2-dimensionale beslissingsruimte.





de M.P. van punten die voldoen aan lineaire relaties.

Analoog weten we dat

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$

een plat vlak (dus een 2-dim. ruimte) in een 3-dimensionale beslissings-

---

*) een veel gebruikt synoniem voor rekentechniek is <u>algorithme</u>.

ruimte voorstelt. Generaliseren we dat, dan krijgen we de voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

Dit heet een (n-1)-dim. <u>hypervlak</u> in een n-dim. beslissingsruimte. Men kan zich stellig goed voorstellen dat zo'n hypervlak de ruimte waar het in ligt in twee deelruimte's verdeelt (er "boven" en er "onder").

De voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leq b_i$$

is samengesteld uit twee voorwaarden, t.w.

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j < b_i \quad \text{en} \quad \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = b_i$$

Van de tweede voorwaarde hebben we ons al een voorstelling gemaakt; van de eerste is die ook eenvoudig te verkrijgen: we geven daarmee aan het gehele oppervlak dat aan één zijde van de lijn $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ligt, b.v. het deel van het oppervlak dat de oorsprong van het assenstelsel bevat, exclusief die lijn zelf. De samengestelde voorwaarde stelt datzelfde oppervlak voor, nu echter inclusief de lijn $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. We noemen dit laatste oppervlak, incl. de begrenzende lijn, een <u>halfvlak</u>. Ook deze voorwaarde wordt gegeneraliseerd, en men kan zich nu voorstellen dat met de voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

bedoeld wordt de ruimte, die aan één zijde van het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

ligt, inclusief dat hypervlak zelf. We noemen zo'n ruimte een <u>halfruimte</u>. Als $b_i \geq 0$ dan behoort de oorsprong tot deze halfruimte.

Het behoeft geen betoog dat de voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

ook een halfruimte voorstelt, nu echter aan de andere zijde van het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i .$$

Zoals gezegd geven de voorwaarden samen de beslissingsruimte $\chi(S_0)$ en in fig. 4.1 is een beeld gegeven van een vlak $\chi(S_0)$ in een 2-dim. ruimte. De voorwaarden in dit voorbeeld zijn:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

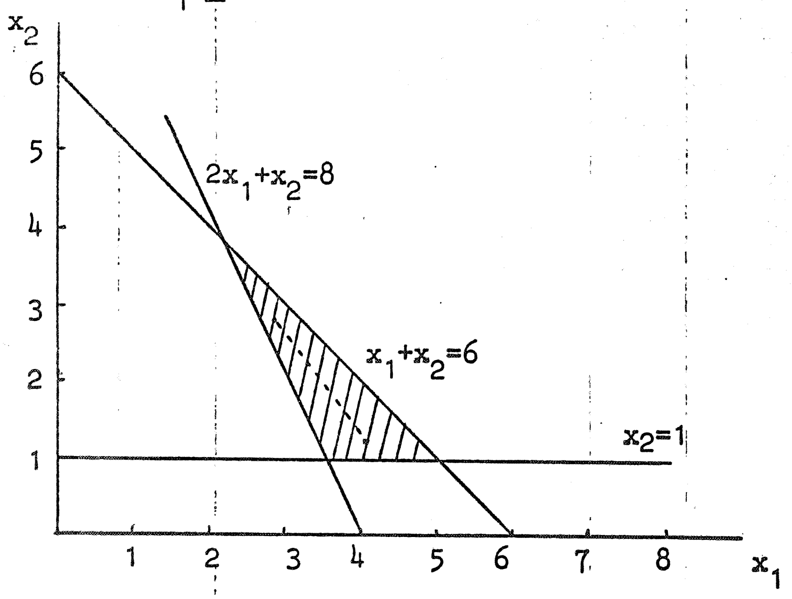


fig. 4.1

2-dim. beslissingsruimte $\chi(S_0)$: gearceerd gebied

In fig. 4.2 is een voorstelling gemaakt van een 3-dim. beslissingsruimte; de begrenzingen van de - gearceerde - beslissingsruimte (S_0) zijn dikgetrokken, de resterende gedeelten van de snijlijnen zijn gestippeld getekend.

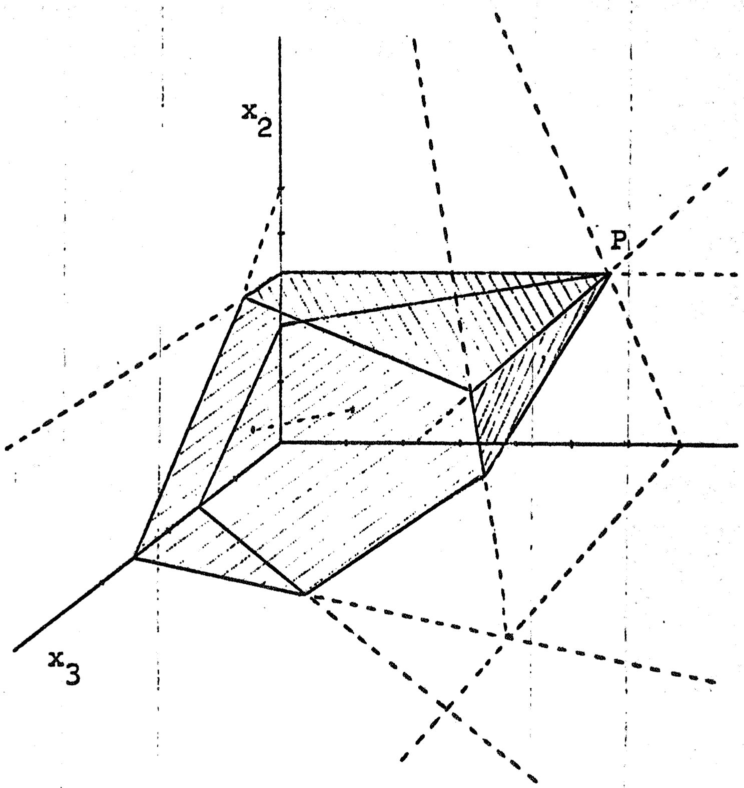


fig. 4.2

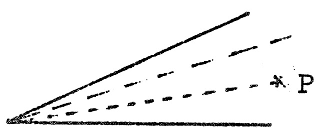
3-dim. beslissingsruimte (S_0)

In fig. 4.1 ziet men dat de begrenzingen van het gebied $\chi(S_0)$ gegeven worden door lijnen en punten. In die punten snijden twee lijnen elkaar. Het is ook denkbaar dat meer dan twee lijnen elkaar in zo'n punt snijden. Stel b.v. dat i.p.v. de voorwaarde $x_1 \geq 0$ de voorwaarde $x_1 \geq 2$ was voorgeschreven, dan hadden in het punt $(x_1,x_2) = (2,4)$ drie lijnen elkaar gesneden. In fig. 4.2 vindt men iets dergelijks voor een 3-dim. beslissingsruimte. Men ziet hier dat het gebied $\chi(S_0)$ wordt begrensd door vlakken, lijnen en punten. Om een lijn te verkrijgen heeft men minstens twee vlakken nodig en voor een punt zijn minstens drie snijdende vlakken vereist. Door het punt P in fig. 4.2 gaan b.v. vier vlakken (ga dat na).

In het algemeen geldt voor een n-dim. beslissingsruimte, dat voor het verkrijgen van een (snij)lijn minstens n-1 snijdende hypervlakken nodig zijn, en voor een (snij)punt minstens n snijdende hypervlakken. Zo'n snijlijn noemen we een ribbe en zo'n snijpunt een hoekpunt. Daar er minstens n hypervlakken door een hoekpunt gaan, snijden ook minstens n ribben elkaar in dat punt (immers alle groepjes van n-1 van deze n hypervlakken snijden elkaar volgens een ribbe die door het hoekpunt gaat). In de figuren 4.1 en 4.2 is dat eenvoudig na te gaan.

Beschouwen we nogmaals fig. 4.1, dan zal iedere lezer zeker opmerken, dat de verbindingslijn tussen iedere twee willekeurige punten x' en x'' in het gebied $\chi(S_0)$ zelf ook tot dat gebied $\chi(S_0)$ behoort. Ook in fig. 4.2 is dat het geval.

Opmerking 1. In het bijzonder stellen wij vast dat een verbindingslijn tussen een hoekpunt en een willekeurig toegelaten punt geheel binnen de ruimte ligt die door de ribben, welke in het hoekpunt samenkomen, worden opgespannen.



De criteriumfunctie $y(S_0;x)$ stelt voor iedere criteriumwaarde z een hypervlak

$$y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z$$

voor. De criteriumfunctie is derhalve, voor een gegeven waarde z, te omschrijven als de meetkundige plaats van alle beslissingspunten met gelijke criteriumwaarde z. Wijzigt men de waarde z, dan houdt dat in dat het hypervlak evenwijdig aan zichzelf wordt verschoven. In een 2-dim. beslissingsruimte is dat eenvoudig na te gaan, hetgeen gedemonstreerd wordt in fig. 4.3, waar we de criteriumfunctie $y(S_0;x) = 2x_1 + 3x_2$ achtereenvolgens de waarden $z_1 = 4$, $z_2 = 6$ en $z_3 = 12$ laten aannemen.

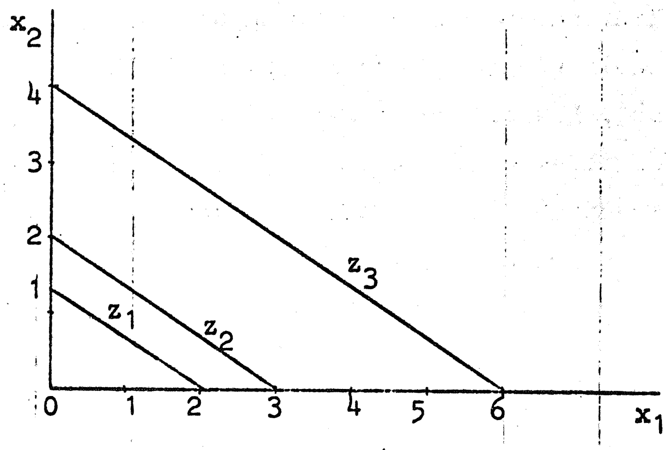


fig. 4.3

De criteriumfunctie $y(S_0;x) = 2x_1 + 3x_2$

Combineren we nu fig. 4.1 en 4.3 dan krijgen we het beeld dat in fig. 4.4 geschetst is.

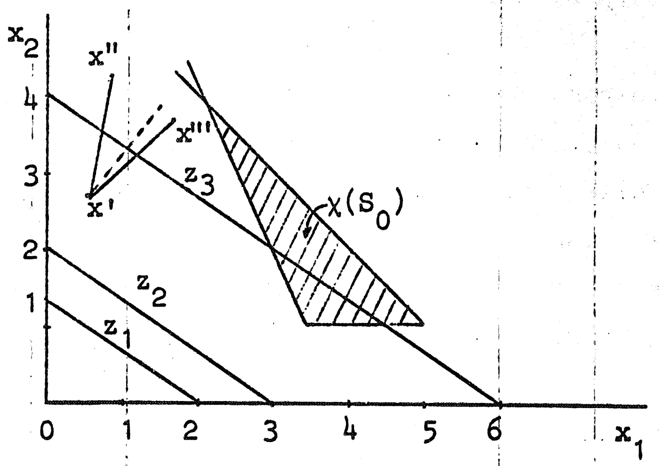


fig. 4.4

We zien hierin dat in de eerste stand van de criteriumlijn $2x_1 + 3x_2 = 4$ alle punten van het gebied $\chi(S_0)$ boven die lijn liggen. Door de lijn $y(S_0;x)$ te verschuiven in de richting welke correspondeert met een verhoging van de criteriumwaarde ($z_3 > z_2 > z_1$) komen we in het gebied $\chi(S_0)$ terecht. Schuiven we nog enige tijd in die richting door, dan zal op een zeker moment het laatste punt $(x_1,x_2) = (2,4)$ van $\chi(S_0)$ bereikt worden. Wanneer we daarna nog verder doorschuiven, dan geraakt men in de situatie, waarin alle punten van $\chi(S_0)$ onder de lijn $y(S_0;x)$ liggen.

We nemen nu twee willekeurige punten x' en x" in de beslissingsruimte (evt., maar niet noodzakelijk, in $\chi(S_0)$) en trekken daartussen het verbindingslijnstuk l(x',x"). Bewegen we ons vervolgens, d.w.z. laten we een beslissingspunt zich bewegen, langs dat lijnstuk in een bepaalde richting. Wat de waarde van de criteriumfunctie betreft kunnen zich hierbij drie mogelijkheden voordoen, t.w.

1. de criteriumwaarde neemt toe met een constant bedrag per afgelegde lengte-eenheid (= constante toenamesnelheid);
2. de criteriumwaarde neemt af met een constant bedrag per afgelegde de lengte-eenheid (= constante afnamesnelheid);
3. de criteriumwaarde blijft gelijk.

Het zal niet veel moeite kosten om te ontdekken dat in het laatste geval alle punten van het lijnstuk l(x',x") in een criteriumhypervlak liggen (vgl. het tweedimensionale geval: l(x',x") en de criteriumlijn $y(S_0;x)$ vallen dan samen). In de andere twee gevallen maakt l(x',x") een hoek ($\neq 0$) met het criteriumhypervlak.

Het zal evenzo weinig inspanning vergen om tot de conclusie te komen dat de toenamesnelheid van de criteriumwaarde het grootst is, wanneer we ons bewegen langs een lijn die loodrecht op het criteriumhypervlak staat (uiteraard in de richting van toenemende $y(S_0;x)$). Die lijn noemen we de <u>normaal</u>. Voor de eenvoud van het betoog beperken wij ons hier tot maximalisatieproblemen, hetgeen niets aan de algemeenheid afdoet.

Beschouw de lijnstukken l(x',x") en l(x',x"') (zie fig. 4.4) en stel dat voor <u>beide</u> lijnstukken geldt dat bij een verplaatsing vanuit het snijpunt de criteriumwaarde <u>niet afneemt</u> (niet toeneemt). Men kan nu bewijzen dat voor iedere lijn, getrokken vanuit het snijpunt en binnen de hoek van de eerder genoemde lijnstukken, geldt dat bij een verplaatsing vanuit het snijpunt de criteriumwaarde niet afneemt (niet toeneemt).

<u>Opmerking 2</u>. In het bijzonder stellen wij vast dat, als voor een hoekpunt geldt dat een verplaatsing langs elke ribbe geen toename van de criteriumwaarde geeft, langs geen enkele lijn, vanuit dat hoekpunt en binnen $\chi(S_0)$ getrokken, een verbetering te verwachten is.

Beide opmerkingen suggereren de volgende werkwijze: ga, langs de ribben van het toegelaten gebied $\chi(S_0)$, van hoekpunt naar hoekpunt "omhoog", d.w.z. in de richting van een toenemende $y(S_0;x)$ (het liefst kiezen wij die ribbe, waarlangs de toenamesnelheid het grootst is, d.w.z. de ribbe met de kleinste hoek met de normaal). Omdat er slechts eindig veel hoekpunten zijn komen wij uiteindelijk terecht in een situatie, zoals beschreven in opmerking 2. De bewering is nu dat wij "gestrand" zijn in het optimale punt van $\chi(S_0)$.

Stel dat voor een ander punt $x \in \chi(S_0)$ geldt "$y(S_0;x)$ maximaal", dan bestaan er twee mogelijkheden:

a) deze veronderstelling is onjuist. Dit houdt in dat het hoekpunt het optimale punt is.

b) deze veronderstelling is juist. Dit laatste betekent dat het verbindingslijnstuk van dat andere punt x met het hoekpunt de volgende eigenschappen bezit:

   1 - de criteriumwaarde neemt niet af bij een verplaatsing vanuit het hoekpunt langs het lijnstuk (eigenschap optimaal punt),

   2 - het verbindingslijnstuk ligt in de ruimte, die opgespannen wordt door de ribben behorende bij het gevonden hoekpunt (opmerking 1),

   3 - de criteriumwaarde neemt bij een verplaatsing vanuit het hoekpunt langs het lijnstuk niet toe (opmerking 2).

Uit de eigenschappen 1 en 3 volgt dat bij een verplaatsing langs het verbindingslijnstuk de criteriumwaarde constant blijft. Bijgevolg is de criteriumwaarde voor hoekpunt en ander punt gelijk. Zowel uit mogelijkheid a) als uit mogelijkheid b) volgt dat het hoekpunt optimaal punt is. Alleen mogelijkheid b) laat in het midden of het het <u>enige</u> optimale punt is.

We illustreren een en ander aan het voorbeeld behorende bij fig. 4.4:

$$\max y(S_0;x) = 2x_1 + 3x_2$$

onder de bijvoorwaarden

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 8$$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 1$

We beginnen in het hoekpunt $(x_1,x_2) = (3\frac{1}{2},1)$. De criteriumwaarde is hier $z_1 = 10$. De ribbe, die beschreven wordt door $2x_1 + x_2 = 8$, maakt de kleinste hoek met de normaal. Daarlangs gaan we omhoog naar het punt $(x_1,x_2) = (2,4)$. De criteriumwaarde is hier $z_2 = 16$. Nu liggen alle punten van $\chi(S_0)$ onder de lijn $2x_1 + 3x_2 = 16$ en we zijn dus in het maximum aangekomen.

4.3. De simplex-methode.

De simplex-methode voor l.p.problemen is een algorithme, waarbij men stapsgewijs - en selectief - de hoekpunten van het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ afzoekt. In het uitgangshoekpunt wordt die ribbe gekozen, waarlangs de criteriumwaarde het snelst stijgt. Een verplaatsing langs deze ribbe brengt ons in een volgend hoekpunt.

We beperken ons in eerste aanleg tot het volgende l.p.probleem:

$$\text{maximaliseer } y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\leq b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \\ x_j &\geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \\ b_i &\geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \end{aligned}$$

Hoewel dit niet noodzakelijk is, zullen we stilzwijgend van de veronderstelling uitgaan dat het probleem wezenlijk verandert, wanneer we één van de bijvoorwaarden weglaten.

De ongelijkheden $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ gaan we nu m.b.v. zogenaamde verschil- of slackvariabelen x_{n+i} omvormen tot gelijkheden:

$$(4.2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ x_{n+i} \geq 0. \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Omdat $x_{n+i} \geq 0$ volgt uit (4.2) dat x_j moet voldoen aan (4.1). De mededelingen (4.1) en (4.2) zijn daarom identiek. Voor ieder punt x met coördinaten x_j $(j=1,\ldots,n)$ kunnen wij nu nieuwe coördinaten x_{n+i} berekenen $(x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)$. Op een normering na geeft de coördinaat x_{n+i} de afstand aan tot het hypervlak $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, dat wij dus ook kunnen aangeven met $x_{n+i} = 0$.
Merk op dat de coördinaten x_j ook afstanden zijn en wel tot de coördinaatvlakken (-assen) $x_j = 0$. De coördinaten x_j en x_{n+i} spelen dus in het probleem dezelfde rol en wij zullen daarom geen onderscheid tussen hen maken. Met behulp van n van de n+m coördinaten x_j $(j=1,2,\ldots,n+m)$ kan een punt worden vastgelegd. (Zie fig. 4.5, waarbij α de - bekende - normeringsconstante is).

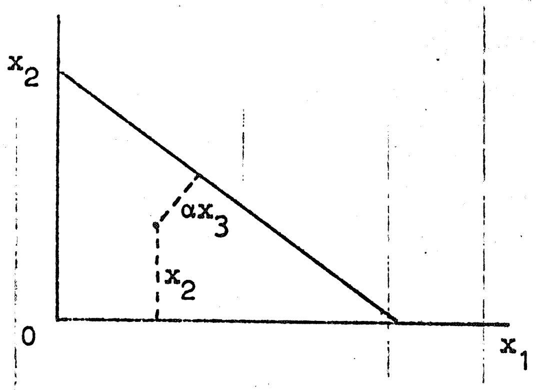


fig. 4.5

Coördinaten van een punt in een beslissingsruimte.

We formuleren nu het gegeven l.p. probleem als

$$\max y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n+m} c_jx_j,\ c_{n+i} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

onder de bijvoorwaarden

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n+m)$$
$$b_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

en we noemen dit het <u>standaardprobleem</u>.

Zojuist hebben we vastgesteld dat het punt $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in het hypervlak $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ ligt, wanneer voor dat punt geldt $x_{n+i} = 0$. Voor de hoekpunten van het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ geldt dus dat minstens n coördinaatgetallen x_i $(i=1,2,\ldots,n+m)$ gelijk aan nul zijn (er gaan immers minstens n hypervlakken door dat punt). Van nu aan beschouwen we alleen hoekpunten en we delen daartoe de variabelen x_i $(i=1,2,\ldots,n+m)$ in twee klassen in. De eerste klasse (de <u>h-klasse</u>) bevat n variabelen x_i, die de waarde nul hebben. We zullen dat de <u>h-variabelen</u> noemen (h van hoekpunt). De overige m variabelen, de <u>b-variabelen</u>, worden in de tweede klasse (de <u>b-klasse</u>) ondergebracht (b van basis). Zij hebben in de gelijkheden de coëfficient +1, en komen ieder in precies één gelijkheid voor. Onder die b-variabelen kunnen er nog voorkomen die de waarde nul bezitten. Doet dit laatste zich voor, dan houdt dit meestal in dat meer dan n hypervlakken door het betrokken hoekpunt gaan, en dat meerdere schrijfwijzen voor dat hoekpunt mogelijk zijn (nl. de onderscheiden h-klassen).
Naast elkaar hebben we nu twee beschrijvingsvormen van het standaardprobleem: één in meetkundige termen met hoekpunten en ribben en één in klassen van variabelen. Het is steeds mogelijk de ene beschrijving in de andere te "vertalen".

We spreken af dat een oplossing van een l.p. probleem wordt weergegeven door de b-variabelen met de aan hen toegekende waarden. Een oplossing heet <u>ontaard</u> als de b-klasse inderdaad variabelen met de waarde nul bevat. De eerste-triviale-oplossing wordt gegeven door de b-klasse gevuld met de variabelen $x_{n+i} = b_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$. Vanuit deze oplossing gaan we verder zoeken naar een tweede - verbeterde - oplossing. We pakken daartoe één van de h-variabelen, zeg x_k, en laten de waarde daarvan monotoon toenemen, terwijl we de waarden van de overige h-variabelen nul laten. In de meetkundige voorstelling betekent dit dat wij het uitgangshoekpunt verlaten langs de ribbe, die gevormd wordt door de n-1 snijdende hypervlakken

$$x_j = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n).$$

Geven we x_k de waarde ρ, dan moeten noodzakelijkerwijs (er moet immers aan de bijvoorwaarden voldaan zijn) de b-variabelen x_{n+i} $(i=1,2,\ldots,m)$ gewijzigd worden met ρa_{ik}: een afname indien $a_{ik} > 0$ of een toename indien $a_{ik} < 0$. Voor de criteriumfunctie heeft dit tot gevolg dat de criteriumwaarde afneemt met

$$(4.3) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\rho c_{n+i} - c_k\rho = \rho\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} - c_k\right)$$

We hebben aan het begin van deze paragraaf opgemerkt, dat we het liefst die ribbe nemen (en overeenkomstig: die h-variabele pakken) welke de grootste toenamesnelheid van de criteriumwaarde oplevert. Anderzijds is het zo, dat het maximum van de criteriumfunctie bereikt is wanneer in geen enkele richting meer een toename van de criteriumwaarde verkregen kan worden. Dit wil zeggen dat de afname (4.3) voor iedere k niet-negatief is:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} - c_k\right) \geq 0.$$

Is het maximum nog niet bereikt, dan kiezen wij de ribbe (= die b-variabele), waarvoor

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} - c_k$$

minimaal is. Stel dat dit het geval is voor k = h.

Bij een verplaatsing langs de gekozen ribbe dienen we goed in het oog te houden, dat deze binnen het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ van het standaardprobleem moet plaatsvinden. We zijn derhalve beperkt in de keuze van de grootte van ρ, dat is de waarde die we toekennen aan de h-variabele x_h, of anders gezegd: de lengte van de stap, die we langs de gekozen ribbe maken. Uit de gelijkheden

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

volgt

$$x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

Op de ribbe geldt voorts

$$x_h = \rho,\ x_j = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,h-1,h+1,\dots,n)$$

We krijgen bijgevolg als resultaat

$$x_{n+i} = b_i - a_{ih}\rho.$$

Bij toename van ρ moet er nu voor gezorgd worden dat x_{n+i} <u>niet</u> negatief wordt (punten met $x_{n+i} < 0$ liggen buiten $\chi(S_0)$).

Geldt voor elke index i dat $a_{ih} \leq 0$, dan betekent dat dat ρ onbeperkt mag toenemen en het maximum van de criteriumfunctie, dat onbegrensd groot is, wordt bereikt voor

$$x_h = \infty,\ x_i = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,h-1,h+1,\dots,n).$$

Is er echter precies één index i, waarvoor $a_{ih} > 0$, dan is de grootste waarde die ρ mag aannemen

$$\rho = b_i/a_{ih}.$$

Zijn er meer indices i, waarvoor $a_{ih} > 0$, zeg een indexverzameling I, dan kiezen we

$$\rho = \min_{i \in I} (b_i/a_{ih})$$

Laat dit minimum bereikt worden voor $i = r$. De variabele x_h, die we uit de h-klasse genomen hebben, krijgt dus de waarde b_r/a_{rh} en hij wordt in de b-klasse ondergebracht. In de b-klasse vinden we de variabele x_{n+r}, die door deze toekenning de waarde nul heeft gekregen (immers $x_{n+r} = b_r - a_{rh}.b_r/a_{rh} = 0$). x_{n+r} wordt nu overgebracht naar de h-klasse, die hierdoor weer n variabelen bevat. Het is overigens zeer goed mogelijk dat niet alleen x_{n+r} nul wordt, maar ook één of meer andere variabelen uit de b-klasse. Dit geschiedt wanneer het minimum van b_i/a_{ih} voor meer dan één index i wordt bereikt. We hebben dan een ontaarde oplossing gevonden. Voor de eenvoud van het betoog maken we twee veronderstellingen, die het voorkomen van deze situatie onmogelijk maken.

1. het minimum van b_i/a_{ih} voor $i \in I$ is positief, d.w.z. $b_i > 0$ en $\rho > 0$;
2. het minimum van b_i/a_{ih} voor $i \in I$ wordt slechts voor één index $i = r \in I$ bereikt.

Wij geven nu in het kort de meetkundige interpretatie van de omwisseling van de twee variabelen x_h en x_{n+r}. Wij hebben ons hierbij vanuit het uitgangshoekpunt verplaatst langs de gekozen ribbe*) over een lengte b_r/a_{rh}, en zijn toen in een punt aangekomen waar

$$x_{n+r} = 0$$

ofwel het snijpunt van de gekozen ribbe met het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j = b_r .$$

Dit snijpunt is uiteraard een (nieuw) hoekpunt. Een grotere verplaatsing, dan is uitgevoerd, zou ons buiten het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ brengen. De veronderstellingen sluiten uit dat er meer dan n hypervlakken door het nieuwe hoekpunt gaan. Bij de verplaatsing van het uitgangshoekpunt naar het nieuwe hoekpunt neemt de waarde van de criteriumfunctie toe.

*) dat is de ribbe, waarvoor geldt $x_j = 0$ $(j=1,2,\ldots,h-1,h+1,\ldots,n)$.

We illustreren het voorgaande met een voorbeeld:

$$\max\ y(S_0;x) = 2x_1 + x_2$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

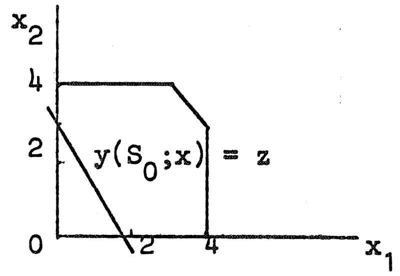
In de vorm van het standaardprobleem wordt dit:

$$\max\ y(S_0;x) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7 \\ x_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,5) \end{array}$$

De meetkundige voorstelling is:



We gaan nu het hierboven gegeven standaardprobleem schematisch opschrijven in een tableau, alsvolgt:

c_j			0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
0	x_3	4	1	0	0	1	0
0	x_4	4	0	1	0	0	1
0	x_5	7	0	0	1	1	1

Zoals men ziet wordt in de eerste drie kolommen van dit schema de b-klasse weergegeven: in de B-kolom vindt men de b-variabelen, in de C-kolom de c-waarden van die b-variabelen en in de x_0-kolom de waarden die aan de b-variabelen zijn toegekend (b_i). Vervolgens vindt men, v.l.n.r. gaande, de kolommen van de verschilvariabelen, die tevens b-variabelen zijn. In die kolommen staan de coëfficienten a_{ij} vermeld, evenals in de hierop volgende kolommen van de h-variabelen. Boven het tableau zijn per kolom gegeven c-waarden van de respectieve variabelen vermeld.

Onder aan het schema voegen we nu een regel toe, waarop onder iedere kolom het getal $\sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} - c_k$ geschreven wordt. Het is algemeen gebruik om z_k voor $\sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i}$ te schrijven. Op de onderste regel staan dus de $z_k - c_k$.

	c_j	0	0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
0	x_3	4	1	0	0	1	0
0	x_4	4	0	1	0	0	1
0	x_5	7	0	0	1	1	1
$z_k - c_k$		0	0	0	0	-2	-1

Ter toelichting dienen we nog te vermelden, dat we voor de c-waarde van x_0 invoeren $c_0 = 0$. Derhalve komt op de $(z_k - c_k)$-regel onder de x_0-kolom de waarde van $y(S_0;x)$ te staan, want voor $z_0 - c_0$ vinden we

$$z_0 - c_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_{n+i} - 0.$$

We zoeken nu het minimum van $z_k - c_k$ (voorzover dat kleiner dan nul is). Dat is hier (onder de x_1-kolom):

$$\min_k (z_k - c_k) = -2 \qquad \text{voor } k = 1$$

Het gevolg hiervan is dat we x_1 uit de h-klasse nemen en overbrengen naar de b-klasse. Vervolgens moeten we de waarde van $\rho = \min_i (b_i/a_{i1})\ (a_{i1} > 0)$ bepalen en de index waarvoor dat minimum bereikt wordt:

$$\rho = \min_i (b_i/a_{ij}) = 4 \qquad \text{voor } i = 1$$

Dit heeft tot gevolg dat we $x_{2+1} = x_3$ uit de b-klasse nemen en overbrengen naar de h-klasse. x_1 en x_3 zijn dus van plaats verwisseld. In meetkundige termen heet dit dat we een stap ter lengte 4 langs de x_1-as gemaakt hebben en terecht zijn gekomen in het hoekpunt $(x_1,x_2) = (4,0)$.

De omwisseling van de variabelen x_h (x_1) en x_{n+r} (x_3) moet nu nog gerealiseerd worden in het gelijkhedenstelsel (4.2), want voor de variabelen in de b-klasse is voorgeschreven dat ze met coëfficiënt +1 in het stelsel voorkomen, en wel ieder in precies één gelijkheid. We behandelen dit eerst voor het standaardprobleem in het algemeen en gaan daarna door met het voorbeeld. Om te beginnen delen we de r^e bijvoorwaarde door a_{rh}:

$$\text{(4.4)} \qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n} x_j a_{rj}/a_{rh} + x_h + x_{n+r}/a_{rh} = b_r/a_{rh}$$

Er moet nu zorg voor worden gedragen dat x_h uit de overige gelijkheden verdwijnt. Dat gebeurt door (4.4) met a_{ih} te vermenigvuldigen en vervolgens van de $i^e (i\neq r; 1\leq i\leq m)$ gelijkheid af te trekken. Het resultaat luidt:

$$x_{n+i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n} (a_{ij}-a_{ih}a_{rj}/a_{rh})x_j - x_{n+r}a_{ih}/a_{rh} = b_i - b_r a_{ih}/a_{rh}$$

Voor het gemak voeren we nieuwe coëfficienten a'_{ij} en b'_i in, die gedefinieerd zijn als

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ih}a_{rj}/a_{rh} \qquad (j \neq h;\ 1 \leq j \leq n;\ i \neq r;\ 1 \leq i \leq m)$$

$$a'_{rj} = a_{rj}/a_{rh} \qquad (j \neq h;\ 1 \leq j \leq n)$$

$$a'_{i\ n+r} = -a_{ih}/a_{rh} \qquad (i \neq r;\ 1 \leq i \leq m)$$

$$a'_{r\ n+r} = 1/a_{rh}$$

$$b'_i = b_i - b_r a_{ih}/a_{rh} \qquad (i \neq r;\ 1 \leq i \leq m)$$

$$b'_r = b_r/a_{rh}$$

De gelijkheden (bijvoorwaarden) worden nu:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n} a'_{ij}.x_j + a'_{i\ n+r}x_{n+r} + x_{n+i} = b'_i \qquad (i \neq r)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n} a'_{rj}.x_j + a'_{r\ n+r}x_{n+r} + x_h = b'_r$$

Samen met de voorwaarde $x_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq n+m)$ beschrijven deze gelijkheden weer het gebied $\chi(S_0)$ van het standaardprobleem. **)

**) Men kan zich - meetkundig - de voorstelling maken, dat hier het n-dim. coördinatenstelsel is getranformeerd. In het oude coördinatenstelsel lag de oorsprong in het hoekpunt $x_j = 0$ $(1 \leq j \leq n)$, en langs de assen waren de variabelen x_j $(1 \leq j \leq n)$ afgezet. In het nieuwe coördinatenstelsel ligt de oorsprong in het hoekpunt $x_j = 0$ $(1 \leq j \leq n; j \neq h)$ en $x_{n+r} = 0$ en langs de assen zijn nu x_j $(1 \leq j \leq n; j \neq h)$ en x_{n+r} afgezet. Het hoekpunt waarvan de coördinaten in de oude situatie

$$\{x_j = 0\ (1 \leq j \leq n; j \neq h),\ x_h = b_r/a_{rh}\}$$

luidden, wordt nu weergegeven door

$$\{x_i = 0\ (1 \leq j \leq n; j \neq h),\ x_{n+r} = 0\}$$

en is de oorsprong van het nieuwe assenstelsel.

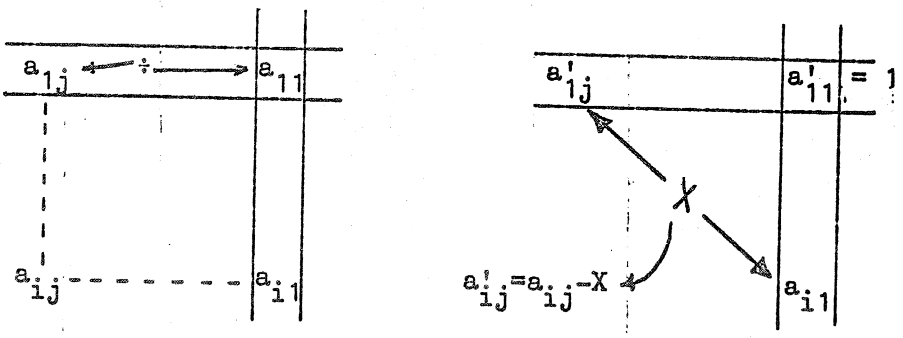
We gaan het bovenstaande weer toepassen op het voorbeeld. We hadden gevonden dat x_3 en x_1 omgewisseld moeten worden. Op de eerste regel van het tableau delen we nu alle getallen $\{b_1, a_{1j}\}$ door $a_{11} = 1$. Dat geeft ons het volgende beeld:

	c_j	0	0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
2	x_1	4	1	0	0	1	0
0	x_4						
0	x_5						
$z_j - c_j$							

Vervolgens gaan we de overige coëfficienten a_{ij} en b_i bepalen. Van de b-variabelen weten we dat ze maar eenmaal met een coëfficient +1 voorkomen. In het schema komt die +1 op het kruispunt van de rij en de kolom van de betrokken b-variabele, d.w.z. $a_{11} = 1$, $a_{24} = 1$, $a_{35} = 1$, en alle overige a_{ij} zijn in de x_1-, x_4- en x_5-kolom gelijk aan nul. Verder kan men eenvoudig afleiden dat voor b-variabelen ook de coëfficienten $z_j - c_j$ gelijk aan nul zijn. Met deze wetenschap gewapend kunnen we het schema verder invullen:

	c_j	0	0	0	0	2	1
c	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_1
2	x_1	4	1	0	0	1	0
0	x_4			1	0	0	
0	x_5			0	1	0	
$z_j - c_j$				0	0	0	

Rest ons nog de bepaling van de overige coëfficienten. Volgens de gegeven resgels moeten we van iedere oude coëfficient een zeker bedrag aftrekken. We kunnen dat schematisch weergeven:



In het vierkant - in het oude tableau! - gevormd door de coëfficienten a_{ij}, die men opnieuw wil berekenen, en a_{11}, a_{1j} en a_{i1}, vermenigvuldigt men dus de aan a_{ij} aanliggende coëfficienten a_{1j} en a_{i1} en deelt het produkt door a_{11}. We trekken dit resultaat van a_{ij} af en hebben de nieuwe coëfficient. In het schema vinden we dan

	c_j	0	0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
2	x_1	4	1	0	0	1	0
0	x_4	4	0	2	0	0	1
0	x_5	3	-1	0	1	0	1
$z_j - c_j$		8	2	0	0	0	-1

De $z_j - c_j$ hebben we ook volgens de hierboven geschetste wijze berekend.*)

---

*) Dat deze berekeningen zo gerechtvaardigt zijn, blijkt uit het onderstaande:

$$z_j' - c_j = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq r}}^{m} a_{ij}'c_{n+i} + a_{rj}'c_h - c_j =$$

$$= \sum_{i\neq r} (a_{ij}-a_{ih}a_{rj}/a_{rh})c_{n+i} + c_h a_{rj}/a_{rh} - c_j =$$

$$= z_j - c_j - \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ih}c_{n+i} - c_h\right)a_{rj}/a_{rh} =$$

$$= z_j - c_j - (z_h - c_h)a_{rj}/a_{rh}$$

Daar in het zojuist verkregen tableau nog een negatieve $z_j - c_j$ voorkomt weten we dat het optimum nog niet is bereikt. We kunnen dus nog een stap verder gaan. Het minimum van $z_j - c_j$ (<0) is snel gevonden:

$$\min_j (z_j - c_j) = -1 \qquad j = 2$$

Evenzo het minimum van b_i/a_{i2} $(a_{i2}>0)$

$$\min_i (b_i/a_{i2}) = 3 \qquad \text{voor } i = 3$$

In de volgende stap van het algorithme moeten dus x_2 en x_5 van plaats verwisselen. We geven dat aan door pijltjes bij de rij en de kolom te plaatsen (zie het laatste tableau).
In het schema krijgen we achtereenvolgens (eerst de b-variabelen en dan het restant)

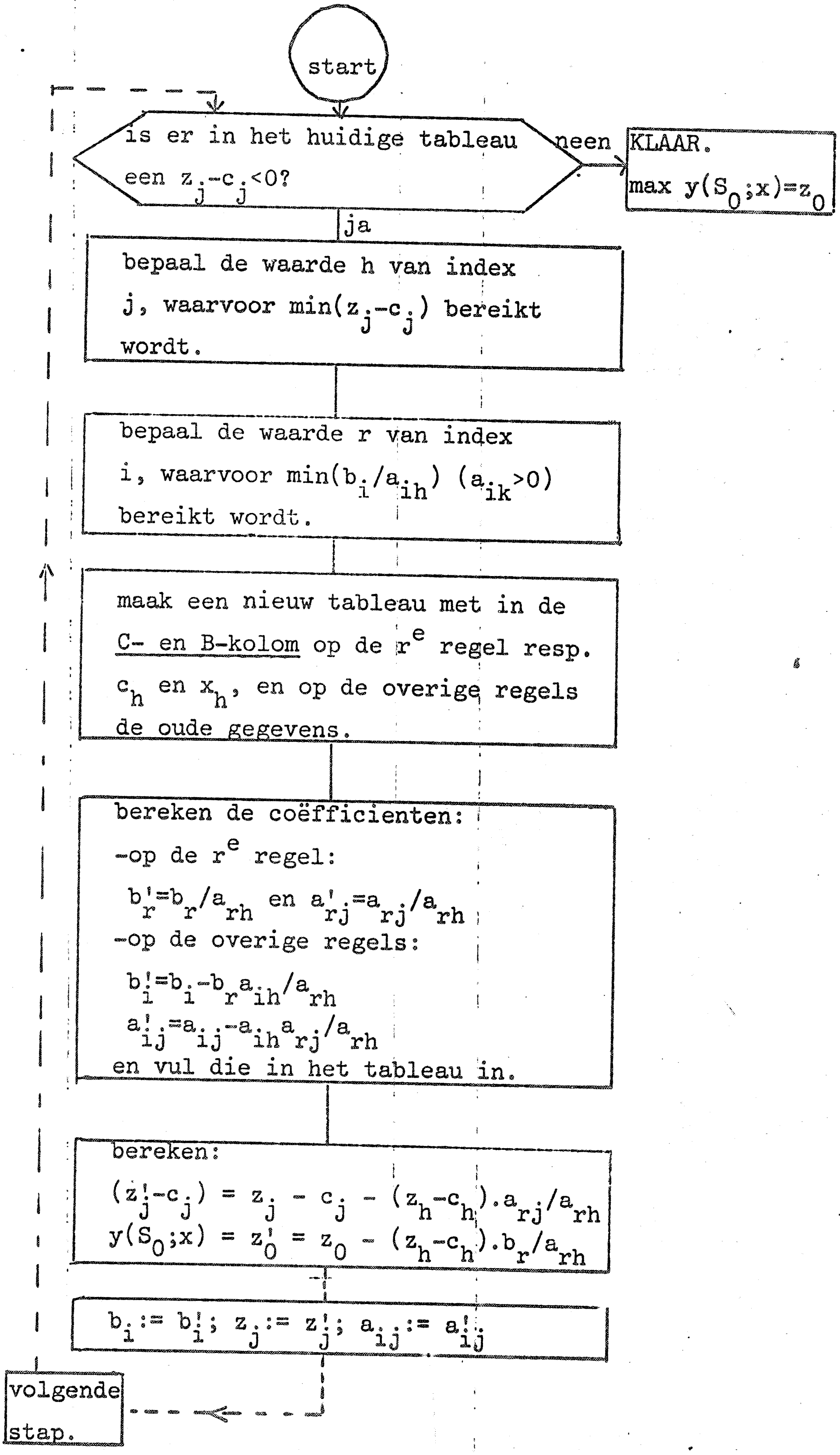
	c_j	0	0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
2	x_1			0		1	0
0	x_4			1		0	0
1	x_2	3	-1	0	1	0	1
$z_j - c_j$				0		0	0

en

	c_j	0	0	0	0	2	1
C	B	x_0	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
2	x_1	4	1	0	0	1	0
0	x_4	1	1	1	-1	0	0
1	x_2	3	-1	0	1	0	1
$z_j - c_j$		11	1	0	1	0	0

Nu zijn wel alle $z_j - c_j$ niet-negatief, zodat we het optimum bereikt hebben voor $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; x_3, $x_5 = 0$; $x_4 = 1$.

De hier gegeven oplossingstechniek noemt men de simplexmethode. Het tableau dat we steeds gebruiken heet analoog het simplextableau. Resumerend geven we onderstaand schema als schets van de gang van zaken bij een stap van de simplexmethode.



In tegenstelling tot het standaardprobleem waarvan we zijn uitgegaan luidt het algemene l.p. probleem

$$\max y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$(4.5) \quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & &(i = 1,2,\ldots,m_1) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & &(i = m_1+1,\ldots,m_2) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & &(i = m_2+1,\ldots,m) \\ &x_j \geq 0 & &(j = 1,2,\ldots,n) \end{aligned}$$

Zonder dat dit enige beperking oplevert mag men blijven veronderstellen

$$b_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

(ga dat na.)

We voegen aan dit algemene l.p. probleem ook weer verschilvariabelen toe, zodat de bijvoorwaarden worden:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i & &(i = 1,\ldots,m_1) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i & &(i = m_1+1,\ldots,m_2) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \phantom{- x_{n+i}} = b_i & &(i = m_{2+1},\ldots,m) \\ &x_j \geq 0 & &(j = 1,2,\ldots,n) \\ &x_{n+i} \geq 0 & &(i = 1,\ldots,m_2) \end{aligned}$$

en we definieren

$$c_{n+i} = 0 \qquad (i = 1,\dots,m_2)$$

De criteriumfunctie wordt nu

$$y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m_2} c_{n+i} x_{n+i}$$

Bij vergelijking met het standaardprobleem valt direct op, dat hier niet in elke gelijkheid een variabele x_{n+i} voorkomt met coefficient +1, m.a.w. we hebben nog geen complete b-klasse. Om dit te bereiken voeren we variabelen u_i (<u>artificials</u>) in en formuleren het l.p. probleem alsvolgt

$$\max y(S_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m_2} c_{n+i} x_{n+i} - M \sum_{j=m_1+1}^{m} u_j$$

$$c_{n+i} = 0 \quad (i = 1,\dots,m_2) \quad M \text{ zeer groot.}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i = 1,\dots,m_1)$$

(4.6)
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + u_i = b_i \qquad (i = m_1+1,\dots,m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i = b_i \qquad (i = m_2+1,\dots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

$$x_{n+i} \geq 0 \qquad (i = 1,\dots,m_2)$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i = m_1+1,\dots,m)$$

Het algemene l.p. probleem is nu van de vorm van het standaardprobleem en we kunnen het dus op de gegeven wijze oplossen. Daar we M onbegrensd groot kiezen zal, als het oorspronkelijke probleem (4.5) een oplossing bezit, in het optimum gelden:

$$u_i = 0 \qquad (i = m_1+1,\ldots,m)$$

Merk op dat iedere oplossing van het oorspronkelijke probleem (4.5), aangevuld met $u_i = 0$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$, een oplossing geeft van het gewijzigde probleem (4.6). Omgekeerd volgt uit iedere oplossing van het gewijzigde probleem (4.6), met $u_i = 0$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$, door weglating van die $u_i = 0$ een oplossing van het oorspronkelijke probleem. De criteriumwaarde is voor deze paren van oplossingen gelijk. Bijgevolg geldt dat de optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem (4.5) gegeven wordt door die van het gewijzigde probleem (4.6) na weglating van $u_i = 0$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$. (Ga na, dat een ontkenning van deze uitspraak leidt tot een tegenspraak!)

We zullen nu nog in een tweetal voorbeelden m.b.v. de simplexmethode l.p. problemen oplossen.

Als eerste voorbeeld nemen we opgave 1.3, waar we geconfronteerd worden met de problemen van een fabriek voor elektrische apparaten. We schrijven eerst het lineaire model op en brengen dat in een vorm, waarin het geschikt is om m.b.v. de simplexmethode opgelost te worden.

$$\max y(S_0;x) = 6x_1 + 7x_2 + 10x_3$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} 0{,}8x_3 &\leq 160 \\ 0{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3 &\leq 400 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 &\leq 320 \end{aligned}$$

Na toevoeging van de verschilvariabelen wordt dit

$$\max 6x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} 0{,}8x_3 + x_4 \quad &= 160 \\ 0{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3 \quad + x_5 \quad &= 400 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 \quad + x_6 &= 320 \end{aligned}$$

Het eerste simplex-tableau (de triviale oplossing):

c_j		0	0	0	0	6	7	10	
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	
0	x_4	160	1	0	0	0	0	0,8	←
0	x_5	400	0	1	0	0,6	0,5	0,4	
0	x_6	320	0	0	1	0,2	0,3	0,4	
$z_j - c_j$		0	0	0	0	-6	-7	-10	
								↑	

We kiezen de laatste kolom ($x_3;z_3-c_3= -10$) en de eerste rij ($x_4;b_1/a_{13}=200$), en we geven dat aan met pijltjes rechts en onder

Het tweede tableau voor de eerste verbeterde oplossing:

c_j		0	0	0	0	6	7	10	
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	
10	x_3	200	5/4	0	0	0	0	1	
0	x_5	320	-1/2	1	0	0,6	0,5	0	←
0	x_6	240	-1/2	0	1	0,2	0,3	0	
$z_j - c_j$		2400	12,5	0	0	-6	-7	0	
							↑		

We kiezen nu de op één na laatste kolom en de tweede rij. De tweede verbeterde oplossing wordt:

	c_j	0	0	0	0	6	7	10
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
10	x_3	200	5/4	0	0	0	0	1
7	x_2	640	-1	2	0	6/5	1	0
0	x_6	48	-0,2	0,6	1	-8/50	0	0
$z_j - c_j$		6480	5,5	14	0	2,4	0	0

Daar op de $z_j - c_j$-regel geen negatieve getallen meer voorkomen hebben we een optimale oplossing bereikt voor $x_1 = 0$; $x_2 = 640$; $x_3 = 200$, en de waarde van de criteriumfunctie bedraagt 6480.

Het tweede voorbeeld formuleren we direct als wiskundig probleem:

$$\max y(S_0;x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{array}{rl}
x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = -10 \\
3x_2 - 5x_3 & \leqq -4 \\
4x_1 - x_2 - 2x_3 & \geqq -6 \\
x_1 + x_2 & \geqq 2 \\
x_2 + x_3 + x_4 & \leqq 4 \\
x_j \geqq 0 & \qquad (j = 1,2,3,4)
\end{array}$$

We moeten er nu eerst voor zorgen dat de constanten b_i positief zijn. Dat doen we door in de eerste drie bijvoorwaarden rechter- en linkerlid van plaats te laten verwisselen. Daarna voegen we verschilvariabelen x_{n+i} en artificials u_i toe. De bijvoorwaarden luiden dan alsvolgt (ga dat na):

$$
\begin{array}{rcl}
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad\qquad + u_1 & = & 10 \\
-3x_2 + 5x_3 - x_5 \qquad\qquad + u_2 & = & 4 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_6 & = & 6 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_7 \qquad + u_3 & = & 2 \\
x_2 + x_3 + x_4 \qquad + x_8 & = & 4
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,8)$$

$$u_i \geqq 0 \qquad (i = 1,2,3).$$

De criteriumfunctie $y(S_0;x)$ luidt nu:

$$y(S_0;x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + - M(u_1+u_2+u_3).$$

In zes stappen wordt de optimale oplossing bereikt.

1. Het eerste tableau (de triviale oplossing):

c_j		0	-M	-M	0	-M	0	2	3	-1	0	0	0
C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
-M	u_1	10	1	0	0	0	0	-1	2	3	-1	0	0
-M	u_2	4	0	1	0	0	0	0	-3	5	0	-1	0
0	x_6	6	0	0	1	0	0	-4	1	2	0	0	0
-M	u_3	2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	-1
0	x_8	4	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
z_j-c_j		-16M	0	0	0	0	0	-2	-3	-8M+1	M	M	M

2. De eerste verbeterde oplossing:

c_j		0	-M	-M	0	-M	0	2	3	-1	0	0	0
C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
-M	u_1	7,6	1	-0,6	0	0	0	-1	3,8	0	-1	0,6	0
-1	x_3	0,8	0	0,2	0	0	0	0	-0,6	1	0	-0,2	0
0	x_6	4,4	0	-0,4	1	0	0	-4	2,2	0	0	0,4	0
-M	u_3	2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	-1
0	x_8	3,2	0	-0,2	0	0	1	0	1,6	0	1	0,2	0
z_j-c_j		-9,6M -0,8	0	1,6M -0,2	0	0	0	-2	-4,8M -2,4	0	M	-0,6M +0,2	M

Wij stuiten hier op een ontaarding, omdat niet ondubbelzinnig de rij i kan worden aangewezen waarvoor min b_i/a_{ih} bereikt wordt; immers 7,6/3,8 = 4,4/2,2 = 2/1 = 3,2/1,6 = 2. In de praktijk kiest men dan die rij waarvoor a_{ih} maximaal is. Dit heeft tot gevolg dat de invloed van afrondingsfouten verkleind wordt.We kiezen dus de aangegeven rij.

3. De tweede verbeterde oplossing:

c_j		0	-M	-M	0	-M	0	2	3	-1	0	0	0
C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0,263	-0,158	0	0	0	-0,263	1	0	-0,263	0,158	0
-1	x_3	2	0,158	0,105	0	0	0	-0,158	0	1	-0,158	-0,105	0
0	x_6	0	0,579	-0,052	1	0	0	-3,421	0	0	0,579	0,052	0
-M	u_3	0	-0,263	0,158	0	1	0	1,263	0	0	0,263	-0,158	-1
0	x_8	0	-0,421	0,053	0	0	1	0,421	0	0	1,421	-0,053	0
z_j-c_j		4	1,262M +0,631	+0,842M -0,579	0	0	0	-1,262M -2,631	0	0	-0,262M -0,631	0,158M +0,579	M

Ook hier hebben we weer een geval van ontaarding.

4. De derde verbeterde oplossing:

c_j		0	−M	−M	0	−M	0	2	3	−1	0	0	0
C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2			0		0	0	1	0	-0,208	0,125	-0,208
−1	x_3	2			0		0	0	0	1	-0,125	-0,125	-0,125
0	x_6	0			1		0	0	0	0	1,291	-0,376	-2,709
2	x_1	0	-0,208	0,125	0	0,792	0	1	0	0	0,208	-0,125	-0,792
0	x_8	0			0		1	0	0	0	1,333	0	0,333
z_j-c_j		4	M-0,084	M-0,25	0	M+2,08	0	0	0	0	-0,083	0,25	-2,084

Het is nu eenvoudig in te zien dat in de $z_j - c_j$ vakjes van de u_i kolommen slechts positieve getallen blijven staan. We mogen die kolommen nu dan ook zonder enig bezwaar weglaten.

5. De vierde verbeterde oplossing:

c_j		0	0	0	2	3	−1	0	0	
C	B	x_0	x_6	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0	0	0	1	0	-0,208	0,125	-0,208
−1	x_3	2	0	0	0	0	1	-0,125	-0,125	-0,125
0	x_6	0	1	0	0	0	0	1,291	-0,375	-2,709
2	x_1	0	0	0	1	0	0	0,208	-0,125	-0,792
0	x_8	0	0	1	0	0	0	1,333	0	0,333
z_j-c_j		4	0	0	0	0	0	-0,083	0,25	-2,084

6. De vijfde en laatste verbeterde oplossing:

c_j		0	0	0	2	3	-1	0	0	0
C	B	x_0	x_6	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0	0,625	0	1	0	0,625	0,125	0
-1	x_3	2	0	0,375	0	0	1	0,375	-0,125	0
0	x_6	0	1	8,127	0	0	0	12,127	-0,375	0
2	x_1	0	0	2,375	1	0	0	3,376	-0,125	0
0	x_7	0	0	3	0	0	0	4	0	1
z_j-c_j		4	0	6,250	0	0	0	8,25	0,25	0

(Ga na dat dit de optimale oplossing is en bepaal die oplossing).

4.4. Het transportprobleem.

Laten in m havens - de opslaghavens - resp. a_1, a_2, ..., a_m eenheden van een bepaald (homogeen) goed aanwezig zijn. Stel dat er bovendien n havens - de bestemmingshavens - zijn, waar een behoefte bestaat aan resp. b_1, b_2, ..., b_n eenheden van dat goed. We veronderstellen voorlopig dat de totale gevraagde en aanwezige hoeveelheden aan elkaar gelijk zijn:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

De kosten, verbonden aan de verscheping van één eenheid van haven i naar haven j (route $i \to j$) bedragen c_{ij}. Wanneer men nu de totale transportkosten wil minimaliseren, dan luidt het l.p. probleem:

$$\min y(S_0;x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$$

$$a_i, b_j > 0$$

waarin x_{ij} de, langs route $i \to j$, te verschepen eenheden van het goed voorstellen. In de regel is x_{ij} een variabele, die alleen geheeltallige waarden kan aannemen.

Men kan dit probleem m.b.v. de simplex-methode oplossen; er is echter een eenvoudiger methode, die we hier zullen behandelen.

In paragraaf 4.3 is gebleken dat in een te construeren optimale oplossing het aantal b-variabelen ongelijk aan nul hoogstens gelijk is aan het aantal gelijkheden in de bijvoorwaarden (de voorwaarden $x_j \geqq 0$ en $b_i > 0$ worden niet meegeteld). Bij het transportprobleem wordt echter inbreuk gemaakt op de veronderstelling dat geen van de vergelijkingen gemist kan worden, zonder dat het probleem wezenlijk verandert. Het aantal strikt noodzakelijke voorwaarden is één minder dan het aantal dat hierboven is opgeschreven. Daarom is het aantal b-variabelen - met waarden ongelijk aan nul! - hoogstens $m+n-1$. Zijn één of meer b-variabelen in een oplossing gelijk aan nul, dan spreken we ook hier van een ontaarde oplossing. We merken op - zonder bewijs - dat, indien de a_i en b_j gehele getallen zijn, in de oplossing van het transportprobleem ook alleen gehele getallen als uitkomsten voorkomen.

Ook bij de specifieke oplossing van het transportprobleem gaan we stapsgewijs te werk. We beginnen met de constructie van een begin-oplossing, die plaats vindt volgens het onderstaande recept:

1. zoek indices I en J waarvoor c_{ij} minimaal is; dat geeft een route $I \to J$;
2. verzend zoveel mogelijk eenheden x_{IJ} langs $I \to J$ ($x_{IJ} \leq a_I$ & $x_{IJ} \leq b_J$);
3. bepaal welke van de twee havens (I en J) niet is uitgeschakeld (d.w.z. waar nog voorraad of nog behoefte is):

3.1. is dit de opslaghaven I (d.w.z. $x_{IJ}=b_J$)? zo ja, zoek dan een route $I \to j$ ($j \neq J$), waarlangs (zoveel mogelijk van) het restant opgeslagen eenheden zo goedkoop mogelijk verscheept kan worden en ga verder bij punt 4;

3.2. is dit de bestemmingshaven (d.w.z. $x_{IJ} = a_I$)? zo ja, zoek dan een route $i \to J$ ($i \neq I$), waarlangs (zoveel mogelijk van) het restant gevraagde eenheden zo goedkoop mogelijk verscheept kan worden en ga verder bij punt 4;

3.3. beide havens zijn uitgeschakeld; bepaal de route $i \to J$ ($i \neq I$) waarlangs zo goedkoop mogelijk verscheept kan worden en geef X_{iJ} de waarde nul;

4. ga op boven beschreven wijze door tot alle havens uitgeschakeld zijn.

Op deze wijze vinden we een beginoplossing, die een hoekpunt van het toegelaten gebied weergeeft.

Wij demonstreren deze procedure aan een voorbeeld: In de havens A, B en C liggen resp. 7, 6 en 6 ton van een goed opgeslagen. In de havens D, E, F en G is een behoefte aan dat goed van resp. 5, 9, 2 en 3 ton. De kosten van het vervoer zijn vermeld in onderstaande matrix.

van \ naar	D	E	F	G
A	5	3	1	0
B	4	3	-1	2
C	8	4	2	1

De negatieve kosten voor route B $\to$ F geven aan dat men voor vervoer daarlangs een premie ontvangt. De nul voor traject A $\to$ G kan b.v. aanduiden dat haven A en G één en dezelfde haven zijn. We geven de havens A, B en C resp. aan met de indices (i=) 1, 2 en 3 en de havens D, E, F en G met (j=) 1, 2, 3 en 4. De formulering van de bijvoorwaarden luidt derhalve

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 7 \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 6 \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 5 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 9 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 2 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 3 .$$

We bepalen nu een beginoplossing. Daartoe maken we gebruik van de zogenaamde verschepingstabel, waarin de te verzenden hoeveelheden worden ingevuld:

i \ j	1	2	3	4	totaal (a_i)
1	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{2}$	6
3	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal (b_j)	5	9	2	3	19

<u>verschepingstabel</u>

Zoals men stellig zal opmerken zijn in de rechter bovenhoek van ieder vakje, dat een route i $\to$ j voorstelt, de kosten c_{ij} vermeld.

De goedkoopste route (min c_{ij}) is hier 2 $\to$ 3 (ofwel B$\to$F). We verzenden daarlangs nu zoveel mogelijk, d.w.z. $x_{23} = 2$. Opslaghaven 2 is nog niet uitgeschakeld en we zoeken dus in rij 2 van de verschepingstabel naar de op één na goedkoopste route. Dit blijkt 2 $\to$ 4 (ofwel B$\to$G) te zijn Hierlangs verzenden we $x_{24} = 3$ eenheden. Nog steeds is opslaghaven 2 niet uitgeschakeld en we zoeken weer verder naar de goedkoopste - nog niet gebruikte - route op rij 2. We vinden 2 → 2 en $x_{22} = 1$. Opslaghaven 2 is nu uitgeschakeld en we vervolgen derhalve met - de nog niet uitgeschakelde - bestemmingshaven 2 (E). Hiervoor vinden we achtereenvolgens de route's 1 → 2 en 3 → 2 met $x_{12} = 7$ en $x_{32} = 1$. Tenslotte volgt route 3 → 1 (opslaghaven 3 was nog niet uitgeschakeld) met $x_{31} = 5$. Wij hebben nu een hoekpunt van het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ gevonden, dat beschreven wordt door de h-klasse ($x_{11}=x_{13}=x_{14}=$ $=x_{21}=x_{33}=x_{34}=0$). De b-klasse bevat overige $m + n - 1 = 6$ variabelen. In de verschepingstabel vinden we:

i \ j	1	2	3	4	tot.
1	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 7	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 3	6
3	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
tot.	5	9	2	3	19

Met behulp van horizontale en verticale lijnstukken kunnen wij de vakjes, waarin de waarden van de b-variabelen zijn vermeld, verbinden. Voor het voorbeeld is dit in onderstaande verschepingstabel gedaan (gemakshalve zijn i.p.v. de getallen x_{ij} punten - de zogenaamde oplossingspunten - in de vakjes gezet).

i \ j	1	2	3	4	tot.
1		•			7
2		•	•	•	6
3	•	•			6
tot.	5	9	3	2	19

In het algemeen noemen we een verzameling punten, die door lijnstukken worden verbonden een graaf. Met betrekking tot de verschepingstabel en de daarin gegeven oplossingspunten van een transportprobleem zullen we spreken van oplossingsgrafen. We maken onderscheid tussen twee soorten oplossingsgrafen:

1. oplossingsgrafen zonder rondgang(en), oplossingsbomen geheten

en

2. oplossingsgrafen met rondgang(en).

In bovenstaande tekening is een voorbeeld gegeven van een oplossingsboom. Karakteristiek voor een oplossingsboom is dat ieder punt ervan langs één weg vanuit een ander punt bereikt kan worden. Een voorbeeld van de tweede soort geven we hieronder.

i \ j	1	2	3	4	tot.
1		•			7
2	•	•	•	•	6
3	•	•			6
tot.	5	9	3	2	19

Zoals men ziet zijn er in deze graaf punten, die langs verschillende wegen vanuit andere punten bereikt kunnen worden (vgl. de wegen tussen de punten (2,1) en (3,2): (2,1),(2,2),(3,2) en (2,1),(3,1),(3,2)).

Het is bewezen dat in een verschepingstabel met een oplossing, die correspondeert met een hoekpunt (met dus m+n-1 b-variabelen en m·n-m-n+1 h-variabelen), alleen een oplossingsboom met m + n - 1 punten voorkomt; m.a.w. rondgangen zijn hier uitgesloten. Omgekeerd is met iedere oplossingsboom met m + n - 1 punten in een verschepingstabel een oplossing verbonden, die correspondeert met een hoekpunt.

Keren we nu terug naar ons voorbeeld. De totale kosten, die aan het hierboven gegeven vervoersprogramma zijn verbonden bedragen 72. Wij vragen ons af of dit het optimale vervoersprogramma is, en, als het dat niet is, of het optimale programma dan uit deze oplossing geconstrueerd kan worden. Bij de simplex-methode konden we dat zien aan het teken van $z_j - c_j$. Bij het transportprobleem doen wij precies hetzelfde. Alleen worden de waarden $z_j - c_j$ op een andere wijze bepaald.

Stel dat we een nieuwe route opnemen, en wel A → G, en daarlangs 1 ton verzenden. Dan moeten enige andere verschepingen gewijzigd worden, b.v. 1 ton minder langs A → E, 1 ton meer langs B → E en weer 1 ton minder langs B → G. Deze veranderingen hebben een wijziging van de totale kosten tot gevolg, tot een bedrag van

$$- c_{12} + c_{22} - c_{24} + c_{14} = -2$$

en het is dus voordelig om ze uit te voeren. Wij noemen c_{14} de <u>directe kosten</u> van het vervoer langs A → G en $z_{14} = + c_{12} - c_{22} + c_{24}$, d.w.z. de kosten van vervoer langs de route's, die A → G vervangen, de <u>indirecte kosten</u>. De indirecte kosten z_{ij} hebben dezelfde betekenis als de, bij de simplex-methode gebruikte, getallen z_j.

Uit het bovenstaande zal duidelijk zijn dat het invoeren van een nog niet gebruikte route de totale kosten kan doen dalen. Teneinde zo'n route te vinden berekenen we nu systematisch de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ en zoeken van de nog niet in gebruik zijnde routes die met de kleinste $c_{ij} - z_{ij}$ (dat geeft de gunstigste kostenverandering). De berekening geschiedt als volgt. Aan iedere route kennen wij twee soorten kosten toe: rij- en kolomkosten, resp. r_i en k_j, en wel zodanig dat voor de $m + n - 1$ in gebruik zijnde routes $i \to j$ (bij ontaarde oplossingen ook die routes waarvoor de b-variabele $x_{ij} = 0$ gesteld is) geldt

$$c_{ij} = r_i + k_j.$$

We krijgen dan $m + n - 1$ vergelijkingen met $m + n$ onbekenden, en daarvoor kunnen we altijd een oplossing vinden. In één van de $m + n - 1$

vergelijkingen stellen we dan één r_i of één k_j (maar niet beide) gelijk aan nul en we lossen vervolgens de vergelijkingen op. Men bedenke dat de waarden van r_i en k_j afhangen van het hoekpunt waarin men verkeert. Voor verschillende oplossingen zal men dus i.h.a. verschillende waarden vinden.

In ons voorbeeld zijn er 6 vergelijkingen met 7 onbekenden:

$$r_1 + k_2 = 3 \qquad r_2 + k_4 = 2$$
$$r_2 + k_2 = 3 \qquad r_3 + k_1 = 8$$
$$r_2 + k_3 = -1 \qquad r_3 + k_2 = 4$$

Stellen we $r_1 = 0$, dan vinden we achtereenvolgens $k_2 = 3$, $r_2 = 0$, $k_3 = -1$, $k_4 = 2$, $r_3 = 1$ en $k_1 = 7$. Voor een willekeurige route $i \to j$ vinden we nu de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ door te berekenen $c_{ij} - k_j - r_i$. Bijvoorbeeld:

$$c_{11} - z_{11} = 5 - 0 - 7 = -2$$
$$c_{33} - z_{33} = 2 - 1 - (-1) = 2$$

In de verschepingstabel omcirkelen we nu gemakshalve de hoeveelheden van de beginoplossing en in de lege vakjes $(i \to j)$ (= niet gebruikte routes) schrijven we de getallen $c_{ij} - z_{ij}$.

r_i \ k_j	7	3	-1	2	totaal
0	$\boxed{5}$ -2	$\boxed{3}$ 7	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{0}$ -2	7
0	$\boxed{4}$ $\boxed{-3}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 3	6
1	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{1}$ -2	6
totaal	5	9	2	3	19

Nu blijkt min $(c_{ij}-z_{ij}) = -3$ voor $i \to j = B \to D = 2 \to 1$. Wij moeten vervolgens bepalen hoeveel eenheden er langs $B \to D$ vervoerd kunnen worden en ten kosten van welke routes dat gaat. Daartoe omcirkelen we ook het getal -3 en bepalen in rij $i = 2$ een vakje $(i \to k) = (2 \to k)$ met een omcirkeld getal, dat als eigenschap heeft, dat in de kolom k nog een vakje met een omcirkeld getal voorkomt. In die kolom k bepalen we dan weer een "omcirkeld" vakje $(k \to 1)$ met als eigenschap dat in rij 1 ook een "omcirkeld" vakje voorkomt. Zo gaan wij voort door beurtelings in een kolom en een rij een "omcirkeld" vakje te zoeken, totdat we weer in ons uitgangspunt zijn teruggekeerd. Met andere woorden: we maken van de oplossingsboom een oplossingsgraaf met een rondgang. In die rondgang wijzigen we de te verschepen hoeveelheden zó, dat we een nieuwe oplossingsboom verkrijgen. Passen we dit toe op ons voorbeeld, dan vinden we een (gesloten) rondgang over de vakjes $(2 \to 1)$, $(2 \to 2)$, $(3 \to 2)$ en $(3 \to 1)$. Hierin kunnen we nu de te verschepen hoeveelheden wijzigen, en wel:

langs $2 \to 1$: 1 ton meer
langs $2 \to 2$: 1 ton minder
langs $3 \to 2$: 1 ton meer
langs $3 \to 1$: 1 ton minder.

Het nieuwe transportprogramma (de eerste verbeterde oplossing) is in onderstaande tabel vermeld.

r_i \ k_j					totaal
	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 7	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{3}$	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 3	6
	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Opnieuw bepalen we nu r_i en k_j en vervolgens de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ teneinde, wanneer er een $c_{ij} - z_{ij} < 0$ voorkomt, een nieuwe oplossing te bepalen. Zijn alle $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$, dan is een optimum bereikt. Wij hebben daarvoor in ons voorbeeld nog twee stappen nodig.

Tweede verbeterde oplossing:

r_i \ k_j	7	3	2	0	totaal
0	$\boxed{5}$ $\boxed{-2}$	$\boxed{3}$ 7	$\boxed{1}$ −1	$\boxed{0}$ 0	7
−3	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 5	6
1	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{1}$ 3	6
totaal	5	9	2	3	19

Derde verbeterde oplossing:

r_i \ k_j	7	3	0	0	totaal
0	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{3}$ 6	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{0}$ 0	7
−1	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 3	6
1	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{1}$ 3	6
totaal	5	9	2	3	19

Uit de laatste tabel kan men aflezen dat een optimale oplossing bereikt is; er zijn immers geen $c_{ij} - z_{ij} < 0$ meer. Bovendien kan men eruit aflezen dat nog een andere optimale oplossing mogelijk is: in het vakje (1→4) staat een nul, en dat wil zeggen dat men zonder kostenverhoging of -verlaging de route 1 → 4 mag invoeren. In de onderstaande tabel is die route toegevoegd. Men merke op dat de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$

gelijk zijn gebleven.

$r_i \backslash k_j$	5	3	0	0	totaal
0	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{1}$ ← 1	$\boxed{0}$ 3	7
-1	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{-1}$ 2	$\boxed{2}$ 3	6
1	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{4}$ 6	$\boxed{2}$ 1 →	$\boxed{1}$ 0	6
totaal	5	9	2	3	19

Daar er verder geen nullen in de tabel voorkomen, kan men alle optimale oplossingen van dit transportprobleem schrijven als een lineaire combinatie van de twee, hierboven gegeven, optimale oplossingen. Geven wij de hoeveelheden in die laatste twee oplossingen aan met resp. $x_{ij}^{(1)}$ en $x_{ij}^{(2)}$, dan wordt een willekeurige optimale oplossing geschreven als

$$x_{ij} = ax_{ij}^{(1)} + (1-a)x_{ij}^{(2)} \qquad 0 \leq a \leq 1$$

Voor a = 1/3 krijgt men b.v.

	D	E	F	G	totaal
A	1	4		2	7
B	4		2		6
C		5		1	6
totaal	5	9	2	3	19

Waren er meer nullen in de tabel van de eindoplossing, en dus meer alternatieve optimale oplossingen $x_{i,j}^{(k)}$, zeg n, dan had men alle optimale oplossingen kunnen schrijven als de lineaire combinatie

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{ij}^{(k)} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$$

Bij het transportprobleem kunnen zich ontaardingen voordoen in het geval dat een aantal ($<m$) opslaghavens precies kan voorzien in de behoeften van een aantal ($<n$) bestemmingshavens. Bij de constructie van een beginoplossing brengt dit geen moeilijkheden met zich mee: hierin voorziet het recept. Doet de ontaarding zich in een latere stap van de transportalgorithme voor dan voeren we analoog een route $i \rightarrow j$ in, waarlangs nul eenheden vervoerd worden. We illustreren dit aan het in deze paragraaf gegeven voorbeeld. Stel dat we de onderstaande oplossing bereikt hebben

r_i \ k_j	7	3	1	2	totaal
0	$\boxed{5}$ -2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{0}$ -2	7
0	$\boxed{4}$ -3	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{-1}$ +2	$\boxed{2}$ 3	6
1	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{1}$ -2	6
totaal	5	9	2	3	- 19

We nemen nu - in strijd met de hiervoor gegeven regels - route A → D (= 1→1) op. De nieuwe oplossing, met slechts 5 b-variabelen $x_{ij} \neq 0$, is de onderstaande.

r_i \ k_j					totaal
	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{0}$	7
	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{-1}$	$\boxed{2}$ 3	6
	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$ 6	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

(Merk op dat het niet mogelijk is om alleen m.b.v. horizontale en verticale lijnstukken de oplossingspunten met elkaar te verbinden.)

Eén van de twee vervallen route's (C→D en A→E) laten we nu voortbestaan, en wel die met de laagste kosten (A→E) met nul eenheden te vervoeren. De r_i en de k_j zijn daardoor wel te berekenen en we kunnen het probleem op de normale wijze oplossen (ga dat na).

Een eenvoudig op te lossen probleem doet zich voor in het geval

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Stel dat $\sum a_i > \sum b_j$. In dat geval voeren we een "dummy" bestemmingshaven n + 1 in met $c_{i\ n+1} = 0$ voor alle i, en lossen het transportprobleem op de bekende wijze op. Bij $\sum a_i < \sum b_j$ wordt analoog gehandeld.

Hoewel de naam dit misschien niet doet vermoeden, is de hier behandelde oplossingmethode toepasbaar op ieder probleem, ongeacht of het om transporten gaat of niet, dat zich, <u>mathematisch</u>, laat formuleren als het transportprobleem.

<u>Opgaven</u>.

4.1. Het reisbureau Quo Vadis organiseert doorlopend weekendcruises. Men heeft de beschikking over een schip dat per cruise accomodatie biedt aan ten hoogste 1000 personen (bedienden daarbij inbegrepen). Op het schip komen alleen éénpersoonshutten voor. Er zijn twee tarieven, t.w. voor 1e klas passagiers ƒ 500,-- p.p. per cruise, en voor 2e klas passagiers ƒ 400,-- p.p. per cruise. Het verschil tussen de klassen wordt veroorzaakt door verschil in bediening en accomodatie. Voor de 1e klas is minstens een bediende per 2 passagiers beschikbaar en voor de 2e klas minstens een bediende per 4 passagiers. Wat de

accomodatie betreft: er zijn op het schip 300 1e klas hutten en 700 2e klas hutten aanwezig.
Iedere bediende wordt een 2e klas hut toegewezen. De overige 2e klas hutten zijn voor 2e klas passagiers beschikbaar, evenals onbezette 1e klas hutten.
Een bediende kost het reisbureau ƒ 300,-- per cruise.

Gevraagd: Stel een model op voor dit probleem en bereken het aantal gasten voor de cruise per klasse, waarbij de netto opbrengst per cruise voor het reisbureau maximaal is.

(tentamen 1968)

4.2. In een verffabriekje met 15 man personeel maakt men sneldrogende verven in de kwaliteit snelfa 1, snelfa 2 en supersnel. Voor de fabricage zijn o.a. de grondstoffen A en B nodig, waarvan per week resp. ten hoogste 9000 en 11.000 kilogram gebruikt kan worden.
Voor de fabricage van 10.000 kg snelfa 1 is 2000 kg A nodig, voor 10.000 kg snelfa 2 3000kg A en 2000 kg B en voor 10.000 kg supersnel 5000 kg B.
V.w.b. de bewerkingstijden geldt het volgende: met de bereiding van 10.000 kg snelfa 1 zijn 4 mannen 1 week bezig, terwijl 3 mannen per week nodig zijn voor 10.000 kg snelfa 2, en 5 voor 10.000 kg supersnel.
De opbrengst per kilo verf is ƒ 3,-- voor snelfa 1, ƒ 5,-- voor snelfa 2 en ƒ 4,-- voor supersnel.
Bereken het produktieprogramma met de gunstigste opbrengst (op loonkosten kan overigens niet bespaard worden).

4.3. Een loondraaierij produceert voor een combinatie van scheepswerven schroefassen, krukassen en drijfstangen.
De loondraaierij beschikt over 4 afdelingen t.w. een "draaierij", en afdeling "frezen", een "schaverij" en een afdeling "boren". Deze vier afdelingen hebben resp. een maximale capaciteit van 400, 120, 155 en

300 uren per week. De bewerkingstijden in uren voor de drie produkten in de vier afdelingen zijn gegeven in onderstaande tabel.

Bewerkingstijden in uren (incl. eventuele toeslagen):

Afd.	Draaierij	Frezen	Schaverij	Boren
Produkt:				
Schroefas	20	-	5	6
Krukas	16	8	1	4
Drijfstang	2	-	3	2

Voor het gebruik van iedere afdeling geldt een uurtarief, resp. ƒ 30,--, ƒ 30,--, ƒ 50,-- en ƒ 25,--. De verkoopprijs van een schroefas bedraagt ƒ 1100,--, van een krukas ƒ 990,-- en van een drijfstang ƒ 300,--.

a) Hoeveel produkten moet de loondraaierij van de onderscheiden soorten produkten in een week maken om een maximale winst te verkrijgen? (alleen verkoopprijs en uurtarief spelen een rol)

(tentamen 1969)

4.4. In paragraaf 4.3. is alleen gesproken over maximalisatieproblemen. Hoe zou u een minimalisatieprobleem oplossen?

4.5. In verband met de verzwaring van tentameneisen besluiten studenten op vier plaatsen in een universiteitsstad tegelijkertijd protestacties te beginnen.
De politie heeft op het moment van het begin van de acties bij 3 verschillende bureaus(Hoofdbureau, bureau I, bureau II) resp. 6, 2 en 7 overvalwagens beschikbaar en is van oordeel dat ter plaatste van de acties (Roeterseiland, Oudemanhuispoort, Wilhelminagasthuis, Maagdenhuis) resp. 3, 3, 4 en 5 overvalwagens nodig zijn.

De tijd in minuten om van de verschillende bureaus met de wagens ter plaatse te zijn is:

naar: \ van:	Hoofdbureau	Bureau I	Bureau II
Roeterseiland	20	13	12
Oudemanhuispoort	15	12	15
Wilhelminagasthuis	11	14	18
Maagdenhuis	13	17	18

Gevraagd wordt nu de wagens zo te laten uitrukken dat de som van de tijden nodig om de actieplaatsen te bereiken minimaal is.

(tentamen 1968)

4.6. Geef voor opgave 1.4. de optimale order-verdeling (maximale winst). Los het probleem ook op met als respectieve capaciteiten 250, 300 en 300 stuks in plaats van de gegeven 300, 200 en 250 stuks.

4.7. Een aannemer van grondwerken heeft bij de aanleg van een grote autoweg vier egalisatieprojecten onder handen. Hierbij moet o.a. zand vervoerd worden met vrachtwagens. Bij enige autoverhuurmaatschappijen kan hij vier soorten vrachtwagens huren. De wagens zijn ieder voor zich bijzonder geschikt voor een speciale terreingesteldheid, hetgeen o.a. tot uitdrukking komt in het verschil in prijs per rit (d.i. huurkosten, brandstof e.d.). De prijzen per rit (in guldens) zijn gegeven in onderstaande tabel

soort auto \ project	1	2	3	4
Truck M	25	30	25	40
Sandboss	33	46	20	25
F.A.D.	18	35	20	36
International	20	45	30	36

Per dag moeten bij de onderscheiden projecten resp. 16, 20, 25 en 14 ladingen vervoerd worden. Bij de verhuurmaatschappijen zijn van de vier soorten resp. de volgende aantallen auto's beschikbaar: 25, 10, 50 en 12. Iedere auto kan slechts eenmaal per dag een lading vervoeren (1 rit p. dag) Alle auto's hebben dezelfde genormaliseerde laadbakinhoud.

Bepaal het aantal auto's dat de aannemer moet huren van ieder soort, zó dat hij zijn kosten minimaliseert.

(tentamen 1969)

4.5 Bijzondere onderwerpen

In deze paragraaf laten we, zonder volledigheid te willen nastreven, enige aan de lineaire programmering verwante onderwerpen de revue passeren. Een uitgebreide behandeling wordt hier achterwege gelaten.

1. Dualiteit.

Naast het l.p. probleem, dat we nu het oorspronkelijke noemen,

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots\ldots,n) , \qquad (4.7)$$

bestaat het duale probleem

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq c_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (4.8)$$

Dit duale probleem heeft een belangrijke economische betekenis, wat we met het volgende voorbeeld zullen verduidelijken.

Fabrikant A vervaardigt n produkten op m machines. Voor de fabricage van één eenheid van produkt j zijn a_{ij} eenheden van de capaciteit b_i van machine i nodig. De winst per eenheid van produkt j bedraagt c_j. Streeft de fabrikant naar maximale winst, dan betekent dat, dat hij het l.p. probleem (4.7) moet oplossen.

Stellen we ons voor dat een concurrent (B) van fabrikant A gebrek heeft aan produktiecapaciteit. Hij kan nu capaciteit huren bij A (dat is technisch mogelijk) en vraagt zich af wat hij daarvoor per eenheid zal moeten bieden.

Laat u_i de prijs per eenheid capaciteit van machine i zijn, die de concurrent aan A voorstelt. A heeft dan de keuze uit de volgende mogelijkheden:

1) één eenheid van produkt j produceren: winst c_j
2) de voor één eenheid van produkt j benodigde capaciteit verhuren aan B: opbrengst $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i$.

Duidelijk is dat A voor verhuur zal kiezen als

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i \geq c_j$$

Als de concurrent B de totale capaciteit van A wil huren, ziet hij zich gesteld voor het (duale) l.p. probleem

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i\, u_i \qquad (4.8)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i \geq c_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

De waarden u_i van een eenheid van de diverse capaciteiten - de zogenaamde <u>schaduwprijzen</u> - worden bepaald door de oplossing van (4.8).

Eenvoudig kan men nu ook afleiden, dat, wanneer één of meer machines i van fabrikant A volbezet zijn, de prijs, die fabrikant A nog bereid zal zijn te betalen voor de toevoeging van één eenheid capaciteit aan b_i gelijk is aan u_i. Voor de niet volbezette machines is A uiteraard niet bereid eenheden tegen betaling toe te voegen en de prijs u_i luidt in dat geval nul.

Men zal opmerken dat het algemene l.p. probleem, zoals gegeven in paragraaf 4.1, veel uitgebreider dan (4.7) is. Ieder l.p. probleem is echter zonder bezwaar te herleiden tot de vorm van (4.7), wanneer men de volgende regels in acht neemt:

1) min z komt overeen met max (-z)

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i$ komt overeen met $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq -b_i$

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$ komt overeen met $\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \leq b_i \quad \text{en} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \end{array}\right.$

Lost men het duale probleem als maximaliseringsprobleem op m.b.v. de simplex-methode, d.w.z.

$$\max -Z = -\sum_{i=1}^{m} b_i\, u_i$$

onder de bekende bijvoorwaarden, dan vindt men in het laatste tableau, met een optimale oplossing, de waarden van x_j van een optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem, en wel op de laatste regel onder de kolom van u_{m+j}. De waarden van de verschilvariabelen x_{n+i} kunnen eveneens op die laatste regel gevonden worden en wel onder de kolom van u_i.

Evenzo kan de optimale oplossing van het duale probleem worden afgelezen uit het "optimale" tableau van het oorspronkelijke probleem. Op de laatste regel onder de kolom van x_{n+i} vindt men de waarde van u_i en onder de kolom van x_j de waarde van de verschilvariabele u_{m+j}.

Bijgevolg geldt:

$$u_i = z_{n+i} - c_{n+i}$$

$$u_{m+j} = z_j - c_j$$

Het is dan ook niet verwonderlijk dat aan de variabelen u_i een economische interpretatie kon worden gegeven.

Aan de hand van een voorbeeld zullen wij een en ander toelichten.

Gaan we weer uit van opgave 1.3, waarvan we de optimale oplossing, die op blz. 118 was gegeven, hier nogmaals weergeven:

c_j		0	0	0	0	6	7	10
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
10	x_3	200	1,25	0	0	0	0	1
7	x_2	640	-1	2	0	1,2	1	0
0	x_6	48	-0,2	-0,6	1	0,16	0	0
$z_j - c_j$		6480	5,5	14	0	2,4	0	0
			$\Uparrow$ u_1	$\Uparrow$ u_2	$\Uparrow$ u_3	$\Uparrow$ u_4	$\Uparrow$ u_5	$\Uparrow$ u_6

Het duale probleem luidt:

$$\min Z = 160u_1 + 400u_2 + 320u_3$$

onder de bijvoorwaarden

$$0{,}6u_2 + 0{,}2u_3 \geq 6$$
$$0{,}5u_2 + 0{,}3u_3 \geq 7$$
$$0{,}8u_1 + 0{,}4u_2 + 0{,}4u_3 \geq 10$$
$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,3)$$

We lossen dit nu als maximalisatieprobleem op.
Het eerste tableau wordt:

c_j		0	-M	-M	-M	-160	-400	-320	0	0	0
C	B	u_0	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
-M	y_1	6	1	0	0	0	0,6	0,2	-1	0	0
-M	y_2	7	0	1	0	0	0,5	0,3	0	-1	0
-M	y_3	10	0	0	1	0,8	0,4	0,4	0	0	-1
$z_j - c_j$		-23M	0	0	0	-0,81M +160	-1,57M +400	-0,9M +320	M	M	M

en de optimale oplossing luidt:

c_j		0	-M	-M	-M	-160	-400	-320	0	0	0
C	B	u_0	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
-400	u_2	14	0	2	0	0	1	0,6	0	-2	0
0	u_4	2,4	-1	1,2	0	0	0	0,16	1	-1,2	0
-160	u_1	5,5	0	-1	1,25	1	0	0,2	0	1	-1,25
$z_j - c_j$		-6480	M	M+ -640	M+ -200	0	0	48	0	640	200
						$\uparrow x_4$	$\uparrow x_5$	$\uparrow x_6$	$\uparrow x_1$	$\uparrow x_2$	$\uparrow x_3$

Zoals men ziet zijn de waarden van u_i en x_j inderdaad op de onderste regel van de respectieve eindtableaux te vinden. Bovendien ziet men dat de eindopbrengst Z_0 van het duale probleem gelijk is aan de eindopbrengst z_0 van het oorspronkelijke probleem. Het min-teken in het duale geval is een gevolg van het feit dat we max(-Z) inplaats van min(Z) geschreven hebben. Overigens blijkt ook uit de uitkomsten dat, wanneer x_j b-variabele is, u_{m+j} geen b-variabele is en dus de waarde nul heeft. Dit is een algemeen resultaat, dat we formuleren als

$$u_{m+j}.x_j = 0 \quad \text{en}$$

$$u_i.x_{n+i} = 0$$

d.w.z. zeker één van beiden (u_{m+j} of x_j resp. u_i of x_{n+i}) is nul.

We merken verder op dat, zolang geen optimale oplossing van (4.7) verkregen is, de oplossingen van het duale probleem (4.8) op de laatste regel van het bijbehorende tableau niet toegelaten zijn: er is dan immers nog een $u_i = z_{n+i} - c_{n+i}$ (of een $u_{n+j} = z_j - c_j$) met een waarde kleiner dan nul.

Daar het aantal stappen, nodig om een optimale oplossing van een l.p. probleem te verkrijgen sterk afhankelijk is van het aantal bijvoorwaarden, levert het voordeel op voor de berekeningen om bij problemen met relatief veel bijvoorwaarden en weinig beslissingsvariabelen i.p.v. het oorspronkelijke probleem het duale op te lossen. De oplossing van het oorspronkelijke l.p. probleem is dan eenvoudig terug te vinden.

Ook van het transportprobleem

$$\min y(S_0;\ x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)\ ,$$

waarbij we aangenomen hebben $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, kunnen we het duale probleem formuleren:

$$\max Y(S_0;\ u,\ v) = \sum_{i=1}^{m} a_i\ u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\ v_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

$$u_i,\ v_j \geq 0$$

Herschrijven we de bijvoorwaarden als

$$u_i + v_j + w_{ij} = c_{ij}\ , \quad (w_{ij} \geq 0)$$

en bedenken we - zoals we zojuist gevonden hebbeb - dat

$$w_{ij}\ x_{ij} = 0\ ,$$

dan hebben we een interpretatie gevonden voor de r_i en k_j, die we bij het oplossen van een transportprobleem steeds moeten berekenen. De w_{ij} zijn de getallen die we invullen in de cellen van de niet gebruikte route's en hebben de betekenis van <u>relatieve</u> opbrengsten $z_{ij} - c_{ij}$.

2. Discrete en gemengde l.p. problemen.

In de vorige paragrafen zijn we er vaak van uitgegaan dat de beslissingsvariabelen x_j alle reële waarden in $\chi(S_0)$ mogen aannemen. Er zijn echter in de praktijk veel problemen waarbij dat niet is toegestaan en waarbij enkele of alle variabelen alleen gehele waarden mogen of kunnen aannemen; we denken hierbij bijv. aan de ondeelbaarheid van bepaalde goederen. Wordt van alle variabelen geeist dat ze geheeltallig zijn dan spreken we van een discreet l.p. probleem (eng. all-integer problem); behoeven niet alle variabelen geheeltallig te zijn dan noemen we zo'n probleem een gemengd l.p. probleem (eng. mixed-integer problem).

Om bij de oplossing aan de eis van de geheeltalligheid te voldoen zijn er drie mogelijkheden:

a) Afronden op het naastliggende gehele getal. Deze methode kan alleen dan een gunstig resultaat opleveren wanneer de afrondingen t.o.v. de getallen die afgerond worden zeer klein zijn. Is dat niet het geval dan kunnen de afrondingen tot ernstige afwijkingen van het optimale resultaat leiden, of ook tot een niet toegelaten oplossing.
b) Om aan de onvolmaaktheden, die aan het afronden verbonden zijn tegemoet te komen heeft men gezocht naar een algemeen toepasbaar algorithme, en men heeft dat gevonden in snedemethoden waarbij een deel (echter zo weinig mogelijk) van het toegelaten gebied $\chi(S_0)$ wordt afgesneden, zodat men uiteindelijk in de (nieuwe) hoekpunten gehele waarden voor de beslissingsvariabelen verkrijgt. Bekend is de snedemethode van R. GOMORY.
c) Het ontwerpen van speciale, meer probleemgerichte, algorithmen, zoals die, welke we nog zullen ontmoeten in hoofdstuk 5 bij de branch-and-bound technieken.

Wij geven nu een voorbeeld van een gemengd l.p. probleem, en bij de oplossing daarvan zullen we een beknopte toelichting op de snedemethode van GOMORY geven.

$$\max. \quad z = cx_1 + cx_2$$

onder de bijvoorwaarden

$$x_1 + 6x_2 \leq 24 \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 16{,}5 \qquad\qquad x_1, x_2 \text{ geheel}$$
$$x_1 \leq 4$$

We lossen dit probleem eerst op alsof het een gewoon l.p. probleem is: m.b.v. de simplex methode. Daartoe herformuleren we het probleem als volgt:

$$\text{max.} \quad z = cx_1 + cx_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 24 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 16{,}5 \qquad x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

In twee stappen vindt men vanuit de eerste - triviale - oplossing de optimale oplossing van het gewone l.p. probleem. Het laatste tableau geven we hieronder:

c_B	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	3	0	0	1	-2	1/3
c	x_2	2,83	0	1	0	1/3	-2/3
c	x_1	4	1	0	0	0	1
		6,83c	0	0	0	c/3	c/3

In deze oplossing is x_2 niet geheel, de waarde is 2,83.

Op de regel van x_2 staat nu de voorwaarde

$$x_2 + (1/3)x_4 + (-2/3)x_5 = 2{,}83$$

De coëfficiënten in deze voorwaarde gaan we schrijven als de som van een geheel getal en een positief getal tussen 0 en 1:

$$(1 + 0)x_2 + (0 + 1/3)x_4 + (-1 + 1/3)x_5 = 2 + 0{,}83$$

Het linker- en rechterlid worden herschreven als

$$(1/3)x_4 + (1/3)x_5 = 0{,}83 + (2 + x_5 - x_2);$$

het linkerlid is zeker niet-negatief - vanwege de voorwaarde $x_4, x_5 \geq 0$ - en we mogen dus zeggen dat elke, niet negatieve, oplossing van het gemengde l.p. probleem moet voldoen aan:

$$(1/3)x_4 + (1/3)x_5 \geq 0{,}83. \tag{4.9}$$

Dit is de snede die we in het gebied $\chi(S_0)$ aanbrengen. In fig. 4.6 is dit in beeld gebracht. Men ziet hier direct in dat nu een optimale oplossing voor het gemengde l.p. probleem gevonden wordt in het hoekpunt (4,2).

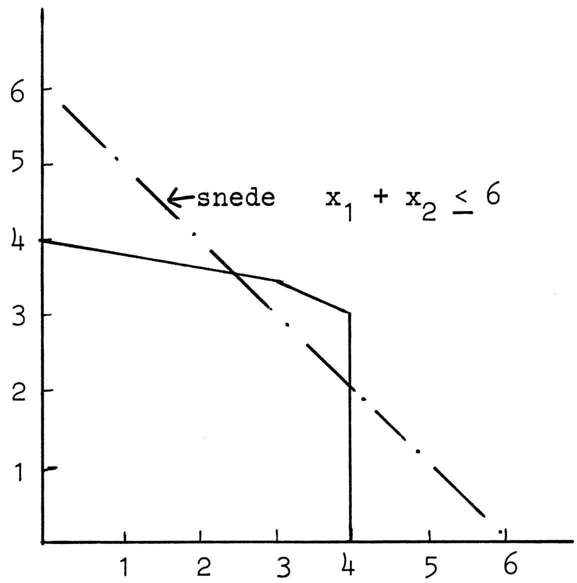


fig. 4.6

Oplossing van een gemengd l.p. probleem m.b.v. een snede.

De snede geformuleerd als afhankelijk van x_1 en x_2 verkrijgen we door in (4.9) te substitueren

$$x_4 = 16,5 - 2x_1 - 3x_2$$
$$x_5 = 4 - x_1$$

hetgeen we uit de voorwaarden van het probleem kunnen halen.

Door de snede als extra voorwaarde aan het simplex tableau toe te voegen kunnen we hieruit, met een andere dan de simplex-methode, een nieuwe oplossing vinden. Levert de eerste snede geen toegelaten oplossing voor het gemengde l.p. probleem dan wordt weer een nieuwe snede toegepast, op dezelfde wijze als hierboven is geschetst. Dit wordt voortgezet totdat een toegelaten en optimale oplossing bereikt is.

Men merke overigens op dat afronding van $x_2 = 2,83$ naar het naast gelegen getal $x_2 = 3$ tot een niet toegelaten oplossing leidt.

3. Kwadratische programmering.

Zoals al meermalen is opgemerkt hebben we ons tot nu toe alleen bezig gehouden met problemen, waarvan criteriumfunctie en bijvoorwaarden als lineaire functies van de beslissingsvariabelen te schrijven zijn. Er zijn uiteraard nog zeer veel één-stapsbeslissingsproblemen buiten dit gebied, die men veelal aanduidt met niet-lineaire programmeringsproblemen. Op dit gebied is tamelijk veel aandacht gewijd aan problemen met lineaire bijvoorwaarden en een niet-lineaire criteriumfunctie. Wij kunnen die schrijven als

$$\max \text{ (of min)} \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

We beschouwen in het volgende gemakshalve - zonder dat dit aan de algemeenheid afdoet - alleen maximalisatieproblemen.

Een speciale klasse uit de bovenstaande verzameling problemen vormen de <u>kwadratische programmeringsproblemen</u>

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, x_i\, x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

Wanneer men speciale eisen stelt aan de criteriumfunctie, in het bijzonder aan het kwadratische deel, dan kan men het probleem oplossen op een op de simplex methode gelijkende wijze. Een belangrijke rol spelen hierbij de zogenaamde KUHN-TUCKER voorwaarden, die, wanneer ze voor het kwadratisch programmeringsprobleem geformuleerd worden, voor een aantal lineaire bijvoorwaarden zorgen.

Een bekend algorithme voor kwadratische programmeringsproblemen, dat op de Kuhn-Tucker voorwaarden is gebaseerd, is van P. WOLFE.

4. Gevoeligheidsanalyse

Bij het oplossen van l.p. problemen in de praktijk is men veelal niet geheel zeker omtrent de waarden van de coëfficiënten c_j, b_i en a_{ij} (ook wel de parameters van een l.p. probleem genoemd). Het is daarom nuttig de invloed van veranderingen van de waarden van die coëfficiënten op het (optimale) resultaat te onderzoeken. Dit onderzoek noemt men gevoeligheidsanalyse. We zullen hier aan de analyse m.b.t. veranderingen van de coëfficiënten c_j en b_i enige aandacht wijden. Vanwege de ingewikkeldheid van de berekeningen, die bij het analyseren van veranderingen van de a_{ij} nodig zijn, laten we een nadere beschouwing daarvan achterwege.

a) veranderingen van c_j (c_j wordt vervangen door $c'_j \neq c_j$). We onderscheiden hierbij twee gevallen:

a.1) x_j is geen b-variabele. De enige verandering die hierbij van belang is, is de vervanging van $(z_j - c_j)$ door $(z_j - c'_j)$. Zolang $(c'_j - c_j) \leq (z_j - c_j)$ blijft de oude oplossing optimaal. Is daarentegen $(c'_j - c_j) > (z_j - c_j)$, dan wordt $(z_j - c'_j) < 0$ en moet x_j b-variabele worden. We moeten dan de simplex-methode voortzetten tot een nieuwe optimale oplossing is gevonden.

a.2) x_j is een b-variabele. Nu verandert niet $(z_j - c_j)$, maar wel kunnen de overige z_k $(k \neq j)$ een andere waarde z'_k krijgen. We moeten dus de nieuwe waarden $(z'_k - c_k)$ berekenen en nagaan of geldt $(z'_k - c_k) < 0$ voor een k $(\neq j)$. Doet dat geval zich voor dan moet de simplex-methode wederom toegepast worden tot een optimale oplossing gevonden wordt. We lichten dit toe aan de hand van het voorbeeld, dat in paragraaf 4.3 behandeld is (opgave 1.3). We wijzigen daar in de optimale oplossing de waarde van c_2 in 4 (was 7). Het eindtableau wordt dan (vgl. blz. 118)

	c_j	0	0	0	0	6	4	10
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
10	x_3	200	1,25	0	0	0	0	1
4	x_2	640	-1	2	0	1,2	1	0
0	x_6	48	-0,2	-0,6	1	-8/50	0	0
$z_j - c_j$		4560	8,5	8		-1,2	0	0

We moeten nu weer de simplex-methode toepassen, en vinden in één stap de volgende oplossing:

	c_j	0	0	0	0	6	4	10
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
10	x_3	200	1,25	0	0	0	0	1
6	x_1	533	-0,83	1,66	0	1	0,83	0
0	x_6	133	-1/3	17/15	1	0	2/15	0
$z_j - c_j$		5200	7,5	10	0	0	1	0

b) veranderingen van b_i (b_i wordt vervangen door $b_i' \neq b_i$). Dit houdt in dat de i^e voorwaarde wordt verscherpt of verzwakt, al naar gelang het teken van $(b_i' - b_i)$. Men zal begrijpen - naar aanleiding van hetgeen opgemerkt is bij de behandeling van het duale probleem - dat dit inkrimping of uitbreiding van capaciteit(en) betekent, en we zullen ons derhalve moeten realiseren wat de "kosten" hiervan zijn. M.a.w. het gaat erom of de oplossing van het duale probleem nog optimaal is.

In het eindtableau van het oorspronkelijke l.p. probleem is de verandering van b_i alleen merkbaar in de x_0 kolom, wat inhoudt dat de b-variabelen nieuwe waarden krijgen. Daar deze waarden ook negatief kunnen worden, is het mogelijk dat een niet-toegelaten oplossing ontstaat. We weten dat dan de oplossing van het duale probleem niet meer optimaal is en we moeten een nieuwe optimale oplossing bepalen. Blijven daarentegen de waarden van de b-variabelen in het oorspronkelijke probleem niet-negatief dan is de reeds gevonden oplossing nog steeds optimaal (er is immers niets aan de $(z_j - c_j)$ veranderd).

Bij de eerste - triviale - oplossing komt in vergelijking i naast b_i één verschilvariabele x_{n+i} voor. Kijken we nu naar de laatste - optimale - oplossing en laat daar in de k^e gelijkheid $a^*_{k\ n+i}$ de waarde van de coëfficient van x_{n+i} zijn.

Dan vinden we voor de laatste waarde b_k^* van b_k

$$b_k^* = \sum_{i=1}^{m} a_{k\ n+i}^* \ b_i \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

We moeten bij de wijziging van b_i naar b_i' derhalve $a_{k\ n+i}^*(b_i' - b_i)$ optellen bij de laatste waarde b_k^* van b_k, voor $k=1,2,\ldots,m$.

Laat in het hiervoor gebruikte voorbeeld b.v. b_2 de waarde 480 krijgen (was 400), dan worden de nieuwe waarden b_k^* van b_k:

$$b_1^* = 200 + 0(480 - 400) = 200$$

$$b_2^* = 640 + 2(480 - 400) = 800$$

$$b_3^* = 48 + (-0,6)(480 - 400) = 0$$

Het eindtableau wordt dan:

	c_j	0	0	0	0	6	7	10
C	B	x_0	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
10	x_3	200	5/4	0	0	0	0	1
7	x_2	800	-1	2	0	6/5	1	0
0	x_6	0	-0,2	-0,6	1	-8/50	0	0
$z_j - c_j$		7600	5,5	14	0	2,4	0	0

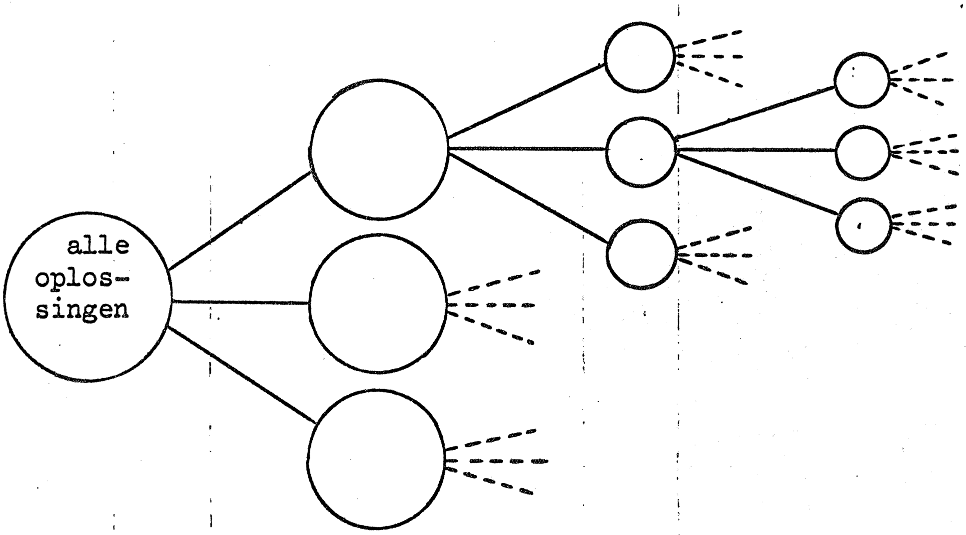
en deze oplossing is nog toegelaten en dus optimaal.

5. BRANCH-AND-BOUND TECHNIEKEN.

5.1. Inleiding.

Stel dat het volgende probleem moet worden opgelost: "bepaal het minimum van $f(x) = y(S_0;x)$ onder de bijvoorwaarde $x \in \chi$", waarbij de verzameling $\chi = \chi(S_0)$ van alle toegelaten oplossingen x gegeven is.

In een branch-and-bound-(afgekort b&b)-aanpak wordt de verzameling χ stapsgewijs in disjuncte deelverzamelingen X' opgesplitst. Een dergelijke splitsing kan men als volgt aangeven



χ X' X" X''' etc.

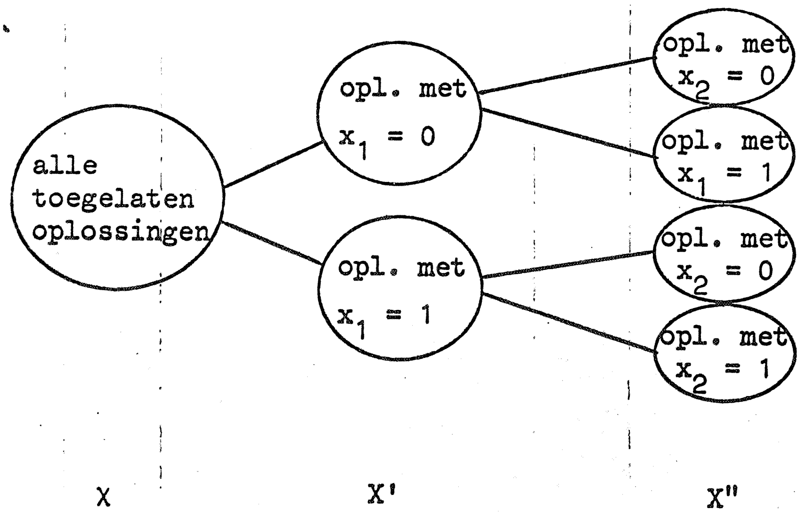
De hierboven getekende figuur wordt een "boom" genoemd (vgl. de terminologie, die bij het transportprobleem is geïntroduceerd op blz. [illegible]7). Uit iedere (deel)-verzameling ontspringen één of meer "takken". Hoe de opsplitsing verloopt is voor veel problemen verschillend; meestal wordt zij door de probleemstelling wel gesuggereerd. Zoals uit de figuur blijkt is het splitsingsvoorschrift ook van toepassing op reeds verkregen deelverzamelingen. Bijgevolg krijgt men een steeds groter aantal deelverzamelingen met steeds minder elementen. De grondgedachte bij een b&b-aanpak is nu, dat, na een eindig aantal splitsingen, het bepalen van het minimum van f(x) voor iedere deelverzameling afzonderlijk een eenvoudige zaak wordt. Dit laatste is uiteraard het geval, wanneer de verzameling χ bestaat uit een eindig aantal elementen. Immers dan houdt men na een eindig aantal splitsingen deelverzamelingen over met slechts één element. Maar ook wanneer de verzameling χ niet eindig is, kan men langs deze weg tot eenvoudiger op te lossen problemen komen. Wij zullen dat demonstreren aan een zogenaamd gemengd l.p. probleem (zie blz. 145)

$$\min f(x) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i & (i = 1,2,\dots,m) & \\ x_j \geqq 0 & (j = 3,4,\dots,n) & (5.1) \\ x_j = 0 \text{ of } 1 & (j = 1,2) & \end{array}$$

De verzameling van alle toegelaten oplossingen wordt eerst gesplitst in een verzameling met oplossingen, waarvoor geldt $x_1 = 0$, en een verzameling met oplossingen, waarvoor $x_1 = 1$. Daarna worden de beide deelverzamelingen ieder voor zich weer gesplitst in twee deelverzamelingen, en wel één met $x_2 = 0$, en één met $x_2 = 1$.



Voor de laatste vier deelverzamelingen is het gestelde probleem, na substitutie van de waarden van x_1 en x_2, een gewoon l.p.probleem. Het bovenstaande voorbeeld is een treffende illustratie van de bewering, dat het splitsingsvoorschrift kan worden gesuggereerd door het probleem; bovendien kunnen we vaststellen dat na een eindig aantal splitsingen dit probleem overgaat in een aantal eenvoudiger problemen, en wel standaard l.p.problemen.

Zoals men wellicht reeds geconcludeerd zal hebben, is een keerzijde van de b&b-aanpak dat <u>één</u> moeilijk probleem wordt vervangen door een <u>groot aantal</u> eenvoudiger problemen. Straks zullen wij evenwel zien dat het splitsen in deelverzamelingen drastisch kan worden beperkt. Tot zover het "branch", oftewel het "vertakkings" gedeelte van de b&b-technieken.

Een tweede aspect van de b&b-technieken is het "bound" gedeelte van die technieken, dat we hieronder bespreken.

Bij de b&b-aanpak gaat men er van uit dat, wanneer voor een deelverzameling X' niet op eenvoudige wijze het minimum van f(x) kan worden bepaald, voor deze verzameling wel een ondergrens $\phi(X')$ van het minimum f(x) $(x \in X')$ kan worden vastgesteld. M.a.w.

$$\phi(X') \leq \min_{x \in X'} f(x).$$

Hoe deze ondergrens moet worden verkregen hangt wederom - evenals het splitsingsvoorschrift - van het probleem af. Het kan trouwens dikwijls op meer dan één wijze gebeuren (wat in voorbeeld 5.1 gedemonstreerd zal worden). Aan de hand van het gemengde l.p. probleem (5.1) zullen we nu een voorbeeld geven van zo'n ondergrensbepaling.

Indien in het probleem (5.1) de voorwaarden

$$x_1 = 0 \quad \text{of} \quad 1$$

$$x_2 = 0 \quad \text{of} \quad 1$$

worden weggelaten, dan blijft een gewoon l.p. probleem over. Vanwege het geringere aantal bijvoorwaarden geeft de oplossing van dit gewone l.p. probleem een ondergrens van het werkelijke minimum van $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ voor de verzameling van alle toegelaten oplossingen. Ook voor de overige (deel-)verzamelingen kan men door weglating van de resterende integervoorwaarden ondergrenzen vinden voor het werkelijke minimum. Voor alle verzamelingen X' en X" in dit probleem kunnen dus m.b.v. de gewone simplex-methode ondergrenzen $\phi(X')$ en $\phi(X'')$ worden bepaald.

Het is duidelijk dat, als men de minima bepaalt van f(x) op een rij inkrimpende verzamelingen (X', X", etc.), d.w.z. elkaar opvolgende verzamelingen, waarvan iedere verzameling bevat is in zijn voorganger (de voorganger bevat dus zeker dezelfde elementen, maar kan er ook meer bevatten; schrijfwijze: $X''\subset X'$ als X' aan X" voorafgaat), deze minima niet zullen afnemen. Immers het aantal in aanmerking komende oplossingen neemt voortdurend af. Deze eigenschap wordt nu ook opgelegd aan de te kiezen ondergrens $\phi(X')$. M.a.w. voor $X''\subset X'$ geldt

$$\phi(X'') \geq \phi(X').$$

Tenslotte wordt verondersteld dat de bepaling van de ondergrens op een zodanige wijze geschiedt dat na een eindig aantal splitsingen deelverzamelingen $\bar{X}$ worden verkregen, waarvoor geldt:

$$\phi(\bar{X}) = \min_{x\in\bar{X}} f(x).$$

Wanneer de ondergrensbepaling het ons ook mogelijk maakt vast te stellen voor welke oplossing $x\in\bar{X}$ dit minimum wordt bereikt, dan hoeft de verzameling $\bar{X}$ niet verder te worden gesplitst. Men kan eenvoudig nagaan dat de ondergrensbepaling bij het gemengde l.p. probleem (5.1) aan deze eigenschappen voldoet. Na drie splitsingen worden reeds deelverzamelingen gevonden, waarvoor geldt dat de ondergrensbepaling identiek is aan de bepaling van het minimum van $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Samenvatting:

Bij een b&b-aanpak van een minimalisatieprobleem *) heeft men als "gereedschap" nodig:

1. een splitsingsvoorschrift voor het verkrijgen van deelverzamelingen;
2. een procedure voor het bepalen van ondergrenzen $\phi(X')$ met de volgende eigenschappen:
   a) $\phi(X') \leqq \min_{x \in X'} f(x)$
   b) $\phi(X'') \geqq \phi(X')$ als $X'' \subset X'$
   c) $\phi(\bar{X}) = \min_{x \in \bar{X}} f(x)$, waarbij $\bar{X}$ een deelverzameling voorstelt, die na een voldoend, maar eindig, aantal splitsingen is ontstaan.

Deze eigenschappen van de ondergrens maken het ons mogelijk het splitsen van deelverzamelingen drastisch te beperken. Wij zullen dit nu toelichten. Volledigheidshalve zij hier opgemerkt, dat er ook andere splitsingsmethoden bestaan, die we hier echter niet te berde zullen brengen.

In de te beschrijven werkwijze splitst men achtereenvolgens die, en alleen die, deelverzameling(en), welke op het moment van splitsen de

---

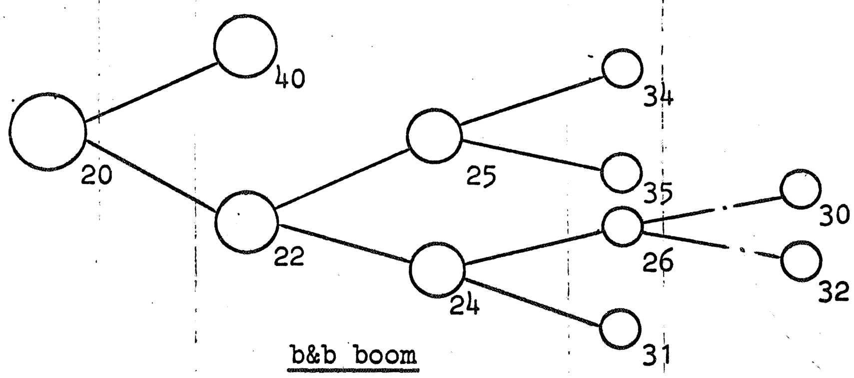
*) Om geen verwarring te stichten spreken wij in deze paragraaf alleen over minimalisatieproblemen. We vermelden echter in het kort in deze voetnoot waar men rekening mee moet houden bij maximalisatieproblemen. Het splitsingsprincipe blijft onverminderd gehandhaafd; alleen bij de berekening van de bovengrens $\psi(X')$ van de waarde van de criteriumfunctie $f(x)$ treden nu enige verschillen op. Voor deze bovengrens gelden n.l. de volgende eigenschappen:

a) $\psi(X') \geqq \max_{x \in X'} f(x)$

b) $\psi(X'') \leqq \psi(X')$ als $X'' \subset X'$

c) $\psi(\bar{X}) = \max_{x \in \bar{X}} f(x)$, waarbij $\bar{X}$ een deelverzameling voorstelt, die na een voldoend, maar eindig, aantal splitsingen is ontstaan.

laagste ondergrens bezit(ten). Zodra een verzameling $\bar{X}$ (zie eigenschap 2c) wordt gevonden, waarvoor het minimum van $f(x)$ kan worden berekend en waar bovendien geldt dat dit minimum niet hoger is dan de, tot dan toe, gevonden ondergrenzen $\phi(X')$ van de nog niet gesplitste deelverzamelingen, dan is de optimale oplossing bereikt. Deze conclusie volgt onmiddellijk uit de eigenschappen van de ondergrens. Immers, uit eigenschap b) volgt dat een verdere splitsing van de nog niet volledig gesplitste deelverzamelingen geen lagere ondergrens oplevert, en uit eigenschap a) volgt dat de oplossingen in die deelverzamelingen geen lagere waarde voor $f(x)$ kunnen bezitten. Het resultaat van deze werkwijze wordt m.b.v. een boom vastgelegd. In de knooppunten (cirkels) wordt aangegeven om welke deelverzamelingen het gaat. Rechts onder de cirkel wordt de waarde van de ondergrens genoteerd.



b&b boom

Voorbeeld 5.1

De firma J. Bakker & Zn. heeft een drietal zaagmachines (z_1, z_2, z_3) kunnen overnemen. Het ligt in de bedoeling in elk van de drie werkplaatsen die het bedrijf telt één zaagmachine te plaatsen. Aan de installatie zijn plaatsingskosten c_{ij} verbonden, die in de onderstaande tabel zijn vermeld.

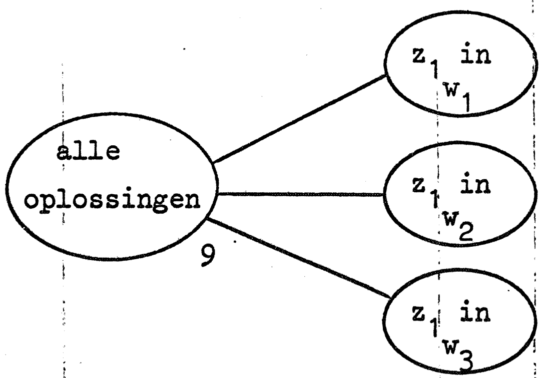
machine: \ werkplaats:	w_1	w_2	w_3
z_1	5	2	3,5
z_2	8	6	3
z_3	8	7	4

plaatsingskosten per machine

Het is duidelijk dat dit probleem kan worden opgelost als een transportprobleem. Wij zullen hier echter een b&b-aanpak volgen.

1. het splitsingsvoorschrift.

Deelverzamelingen worden verkregen door achtereenvolgens een machine toe te wijzen aan een werkplaats. Wij beginnen derhalve als volgt:



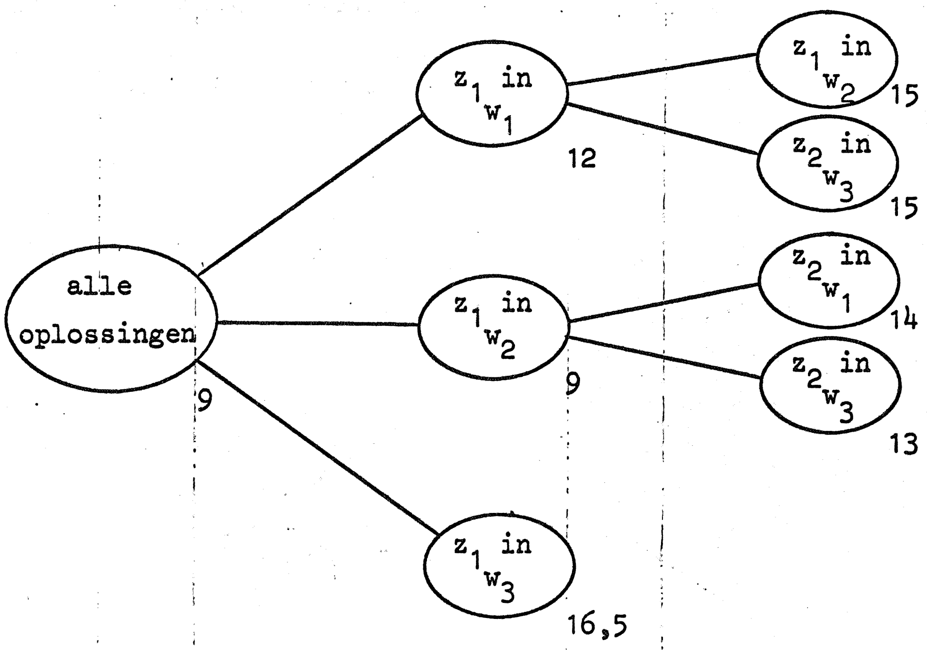
2. de ondergrens.

Wij krijgen voor de verzameling van alle oplossingen een ondergrens voor de minimale kosten door de voorwaarde "in iedere werkplaats precies één machine" te laten vallen. De ondergrens wordt dan gelijk aan de som van de regelminima; dus $\phi(\chi) = \min(5{,}2{,}3{,}5) + \min(8{,}6{,}3) + \min(8{,}7{,}4) = 9$. Merk op dat hiermee aan werkplaats w_1 geen zaagmachine wordt toegewezen en aan w_3 twee zaagmachines (z_2 en z_3). Voor de eerste "generatie" deelverzamelingen krijgen wij een ondergrens door voor de <u>tweede</u> en <u>derde</u> machine onderling de voorwaarde "in elke werkplaats precies één machine" te laten vallen. De ondergrenzen worden dan gegeven door:

z_1 in w_1: $\phi(X') = 5 + \min(6{,}3) + \min(7{,}4) = 12$

z_1 in w_2: $\phi(X') = 2 + \min(8{,}3) + \min(8{,}4) = 9$

z_1 in w_3: $\phi(X') = 3{,}5 + \min(8{,}6) + \min(8{,}7) = 16{,}5$



3. de werkwijze.

De eerste splitsing is onder 1. besproken en de bijbehorende ondergrenzen zijn bij 2. berekend. Vanaf het nu bereikte punt zetten wij de b&b-methode voort. De verzameling (z_1 in w_2) met de (laagste) ondergrens 9 wordt verder gesplitst in twee deelverzamelingen met de volgende ondergrenzen:

z_2 in w_1 (en dus z_3 in w_3): $\phi(X'') = 2 + 8 + 4 = 14$

z_2 in w_3 (en dus z_3 in w_1): $\phi(X'') = 2 + 3 + 8 = 13$

Merk op dat de ondergrenzen voor deze deelverzamelingen gelijk zijn aan de werkelijke minima (eigenschap 2c)! Op dit moment zijn wij er nog niet zeker van of de optimale oplossing al is bereikt. Immers er is nog een deelverzameling met een lagere ondergrens dan 13. Wij splitsen [illegible] ook de verzameling met ondergrens 12 verder uit en vinden:

z_2 in w_2 (en dus z_3 in w_3): $\phi(X'') = 5 + 6 + 4 = 15$

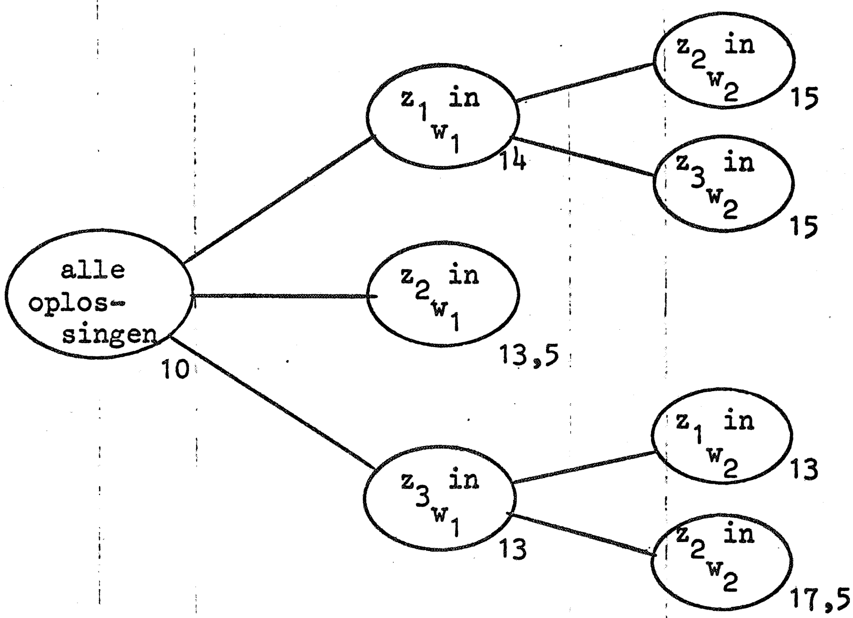
z_2 in w_3 (en dus z_3 in w_2): $\phi(X'') = 5 + 3 + 7 = 15$

Na deze laatste berekeningen kunnen we vaststellen dat de oplossing:

$$z_1 \text{ in } w_2;\ z_2 \text{ in } w_3;\ z_3 \text{ in } w_1;\ \text{met kosten } 13,$$

optimaal is.

Indien wij de verzameling van oplossingen niet per machine gesplitst hadden naar werkplaats, maar per werkplaats naar machine, dan hadden we de volgende boom gekregen (ga na!).



4. een alternatieve berekening van de ondergrenzen.
De berekening van een ondergrens kan hier op meer dan één wijze geschieden. Beschouwen we nogmaals de tabel van de plaatsingskosten

	w_1	w_2	w_3	minimale kosten
z_1	5	2	3,5	2
z_2	8	6	3	3
z_3	8	7	4	4
				$\sum=9$

Aangezien alle machines geplaatst moeten worden is het duidelijk dat de totale kosten minstens 9 bedragen. Het maakt dan ook niets uit voor de indeling of alle kosten voor machine z_1 met 2 worden verminderd, voor z_2 met 3 en voor z_3 met 4. Deze operatie noemt men de <u>reductie</u> van de rijenkosten. Wij krijgen dan de volgende tabel.

	w_1	w_2	w_3	
z_1	3	0	1,5	
z_2	5	3	0	
z_3	4	3	0	
minimale kosten	3	0	0	$\sum = 3+9 = 12$

Evenzo kan men voor de werkplaatsen stellen dat iedere werkplaats voorzien moet worden. Voor een plaatsing in werkplaats w_1 zullen b.v. de kosten nu altijd minstens 3 bedragen. Een analoge reductie van de kolommenkosten levert de waarde 3 op. De totale kosten zullen dus minstens 9 + 3 = 12 bedragen. Reductie van kolommen- en rijenkosten samen levert de volgende tabel op.

	w_1	w_2	w_3	
z_1	0	0	1,5	
z_2	2	3	0	
z_3	1	3	0	
				$12 = \phi(\chi)$

Als ondergrens voor de verzameling van alle oplossingen vinden wij dus de waarde 12, en deze grens is scherper dan die, welke we m.b.v. de vorige methode gevonden hebben.

Het splitsen van de deelverzamelingen geschiedt per machine naar werkplaats. Voor de drie deelverzamelingen worden de ondergrenzen als volgt bepaald:

Na de keuze "z_1 in w_1" wordt de kostentabel:

	w_2	w_3	min. kosten
z_2	3	0	0
z_3	3	0	0
min. kosten	3	0	3

Reductie van de kolommenkosten geeft als ondergrens: 12 + 3 = 15 voor de verzameling (z_1 in w_1).

Na de keuze "z_1 in w_2" wordt de kostentabel:

	w_1	w_2	min. kosten
z_2	2	0	0
z_3	1	0	0
min. kosten	1	0	1

Reductie van de kolommenkosten geeft als ondergrens 12 + 1 = 13 voor de verzameling (z_1 in w_2).

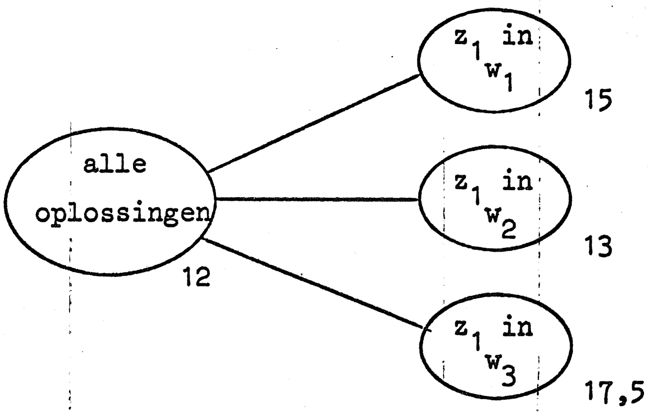
De keuze "z_1 in w_3" levert aan kosten 1,5 op; na deze keuze wordt de kostentabel:

	w_1	w_2	min. kosten
z_2	2	3	2
z_3	1	3	1
min. kosten	1	3	4

Reductie van achtereenvolgens rijen- en kolommenkosten levert ons de volgende kostentabel:

	w_1	w_2	
z_2	0	0	
z_3	0	1	
			4

De ondergrens voor de verzameling (z_1 in w_3) wordt nu 12 + 1,5 + 4 = 17,5.
De b&b-boom komt er dus als volgt uit te zien:



Uiteraard gaan we verder met de verzameling met ondergrens 13. De kostentabel ziet er na reductie uit als volgt:

	w_1	w_3	
z_2	1	0	
z_3	0	0	
			1

De keuze "z_2 in w_1" levert aan kosten 1 op. Na deze keuze wordt de kostentabel:

	w_3
z_3	0

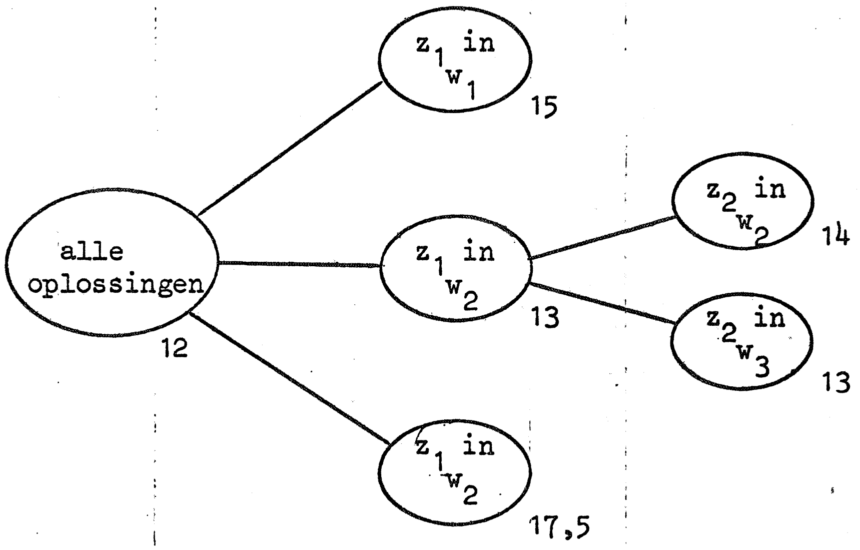
De ondergrens wordt dus 13 + 1 = 14.

De keuze "z_2 in w_3" levert geen kosten meer op. Na deze keuze wordt de kostentabel:

	w_1
z_3	0

en de ondergrens blijft 13.

Na deze laatste splitsing vinden wij de boom



De optimale oplossing is bereikt. Wij zien dat een scherpere ondergrensbepaling leidt tot een geringer aantal splitsingen. Een b&b-aanpak valt en staat dan ook met de ondergrensbepaling. Hoe scherper deze bepaling is, des te geringer is het aantal takken in de boom dat moet worden afgezocht. In het meest ideale geval is de ondergrens gelijk aan het minimum; de splitsingen leiden dan regelrecht tot de "optimale" verzameling $\bar{X}$.

Wij hebben in deze paragraaf een toelichting gegeven op de werkwijze, die gevolgd wordt bij b&b-technieken. In de volgende paragrafen zullen wij een en ander aan de hand van enige - inmiddels klassieke - voorbeelden verder toelichten.

5.2. Het knapsack-probleem.

Onder knapsack-problemen vat men een klasse van problemen samen, die zich wiskundig laten beschrijven als:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \leq G \tag{5.2}$$

$$x_i = 0 \text{ of } 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Men kan eenvoudig een voorbeeld bedenken dat zo geformuleerd wordt: stel men heeft n ondeelbare goederen van vrij geringe afmetingen. Ieder goed i heeft een waarde w_i en een gewicht g_i. Men wil nu deze goederen m.b.v. een vrachtschip vervoeren, en wel zo dat de totale te vervoeren waarde maximaal is, terwijl het totale gewicht het bedrag G niet overschrijdt. Of, om een ander voorbeeld te noemen, men kan zich voorstellen dat een reiziger, die te voet een grote trektocht gaat maken, in zijn rugzak (knapsack) hoogstens voor een bepaald gewicht G aan kleine artikelen, zoals trekkers die plegen te gebruiken (bijv. voedsel, scheergerei, een kompas en een veldkijker), wil meenemen. De reiziger zal de totale - subjectieve - waarde van de artikelen, die hij in z'n rugzak doet, willen maximaliseren.

Voordat we tot de behandeling van de b&b-oplossingsmethode overgaan, merken we op dat de x_i geheeltallige variabelen zijn, die de waarde 0 of 1 kunnen aannemen - we noemen ze dan ook (0,1)-variabelen - zodat een behandeling als discreet l.p. probleem ook mogelijk is (zie par. 4.5).

Bij de b&b-methode gaan we allereerst de waarden w_i "op één noemer brengen", d.w.z. de waarde per gewichtseenheid bepalen. We krijgen dan een rij

$$(w_1/g_1,\ w_2/g_2,\ \ldots,\ w_n/g_n).$$

Nu gaan we de volgorde in deze rij veranderen (= permuteren), en wel zo dat de w_i/g_i naar afdalende grootte gerangschikt worden. Dit geeft ons de rij

$$(w_{i_1}/g_{i_1},\ w_{i_2}/g_{i_2},\ \ldots,\ w_{i_n}/g_{i_n})$$

met

$$w_{i_g}/g_{i_j} \geq w_{i_{j+1}}/g_{i_{j+1}} .$$

Daar we in het vervolg alleen met de laatste volgorde zullen werken, hernummeren we de goederen zo, dat geldt

$$w_j/g_j \geq w_{j+1}/g_{j+1} \qquad (j = 1,2,\ldots,n-1).$$

We illustreren dit met het volgende voorbeeld: gegeven zijn 8 artikelen, met de onderstaande gewichten en waarden.

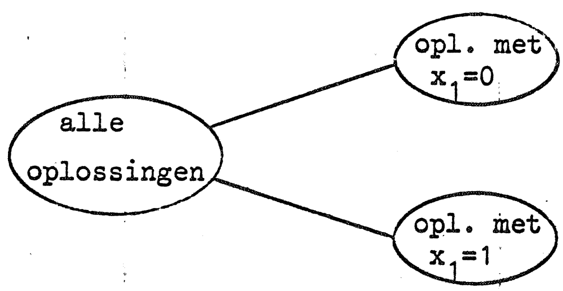
art. nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	
gewicht	30	20	30	40	20	10	10	70	G = 100
waarde	30	50	40	60	50	30	20	10	

herordening geeft hier

nieuw art. nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
oud art. nr.	6	5	2	7	4	3	1	8
w_i/g_i	3	2,5	2,5	2	1,5	$1\frac{1}{3}$	1	0,14

De nieuwe artikelnummering wordt nu verder aangehouden.

Het splitsingsmechanisme werkt als volgt. Uitgaande van de verzameling van alle toegelaten oplossingen worden allereerst twee deelverzamelingen uitgesplitst: één waarin x_1 de waarde 1 krijgt (d.w.z. artikel 1 wordt geaccepteerd) en één waarin x_1 de waarde nul krijgt.



Wij maken hier direct een opmerking bij de deelverzameling met $x_1 = 1$. Het is n.l. zeer goed mogelijk, dat oplossingen met $x_1 = 1$ niet toegelaten zijn, en wel in het geval dat $g_1 > G$. De deelverzameling met $x_1 = 1$ wordt dan verder buiten beschouwing gelaten, en men voegt bij numerieke berekeningen aan die verzameling ook wel de bovengrens -1 toe.

Een ander geval, dat leidt tot de triviale oplossing $x_i = 1$ $(i=1,2,\dots,n)$ doet zich voor wanneer

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \leq G$$

en dan is, zoals ieder zal begrijpen, verdere berekening geheel overbodig.

Daar we met een maximalisatieprobleem te maken hebben moeten we die deelverzameling verder splitsen, welke de hoogste bovengrens heeft.

Voor het bepalen van de bovengrens $\psi(X')$ $(\geq \max_{x \in X'} f(x))$ beschouwen we het volgende probleem (een continue versie van het originele knapsackprobleem (5.2)):

$$\max \hat{z} = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{x}_i$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \hat{x}_i = G \qquad {}^{*)} \tag{5.3}$$

$$0 \leq \hat{x}_i \leq 1 \qquad (i = 1,2,\dots,n).$$

Daar de voorwaarden voor dit probleem minder stringent zijn dan voor het originele (immers $x_i = 0$ of 1 is vervangen door $0 \leq \hat{x}_i \leq 1$), is

---

*) We zien hier verder af van de mogelijkheid dat $\sum g_i \leq G$.

het maximum van $\hat{z}$ zeker niet kleiner dan het maximum van z. We mogen dan ook zonder bezwaar max $\hat{z}$ als bovengrens voor max z gebruiken. De bovengrens $\psi(\chi)$ van max z voor de verzameling van alle oplossingen bepalen we nu door de variabelen $\hat{x}_i$ in volgorde van hun nummering de maximale waarde toe te kennen. Op het voorbeeld toegepast, houdt dit in dat de goederen 1 t/m 5 volledig worden geaccepteerd, waarna het toegelaten maximum gewicht van 100 bereikt is. Dus

$$\psi(\chi) = 30 + 50 + 50 + 20 + 60 = 210, \text{ met}$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 1 \text{ en}$$

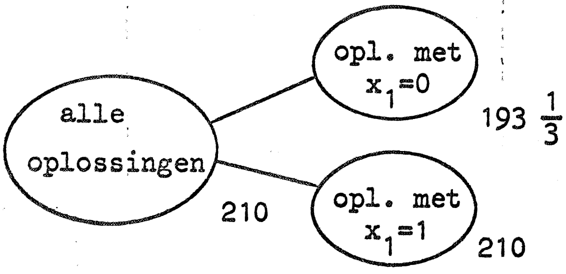
$$\hat{x}_6 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0.$$

De eerste splitsing wordt nu verricht. We kiezen achtereenvolgens $x_1 = \hat{x}_1 = 0$ en $x_1 = \hat{x}_1 = 1$. De bovengrenzen voor deze beide verzamelingen worden berekend door het probleem (5.3) aan te vullen met de voorwaarden $\hat{x}_1 = 0$ resp. $\hat{x}_1 = 1$, en we krijgen dan:

$x_1 = \hat{x}_1 = 0$: $\psi(X') = 50 + 50 + 20 + 60 + 40/3 = 193\ 1/3$
met $\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 1$, $\hat{x}_6 = 1/3$,
$\hat{x}_1 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0$.

$x_1 = \hat{x}_1 = 1$: $\psi(X') = 30 + 50 + 50 + 20 + 60 = 210$,
met dezelfde waarden voor de $\hat{x}_i$ als bij de bovengrens $\psi(\chi)$.

De b&b-boom, waarvan we hiervoor al het begin gegeven hebben, kunnen we nu aanvullen met deze bovengrenzen:

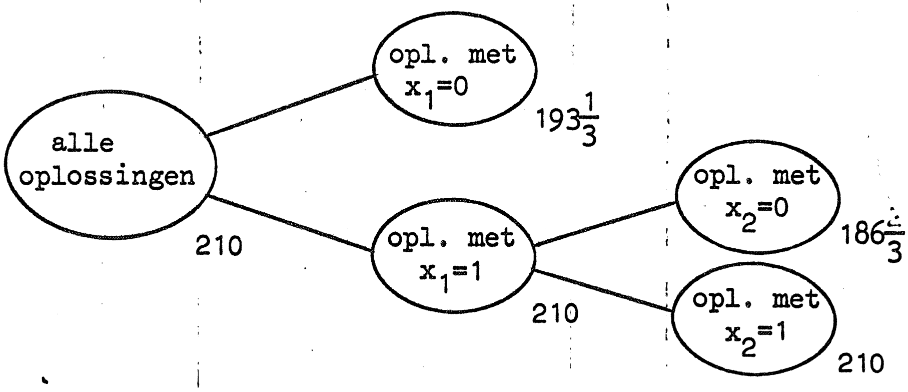


Bij de volgende splitsing, die nu uitgevoerd moet worden, gaan we uit van de deelverzameling met de hoogste bovengrens; we kiezen dus de verzameling met $x_1 = 1$. Nu wordt gesplitst naar het tweede artikel, d.w.z. we kiezen achtereenvolgens $x_2 = \hat{x}_2 = 0$ en $x_2 = \hat{x}_2 = 1$. Door deze keuzen weer als extra voorwaarden aan het probleem (5.3) toe te voegen vinden we de volgende bovengrenzen.

$x_2 = \hat{x}_2 = 0$: $\psi(X'') = 30 + 59 + 20 + 60 + 80/3 = 186\ 2/3$,
met $\hat{x}_1 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 1$, $\hat{x}_6 = 2/3$,
$\hat{x}_2 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0$

$x_2 = \hat{x}_2 = 1$: $\psi(X'') = 210$, met dezelfde waarden voor de $\hat{x}_i$ als bij de bovengrens $\psi(\chi)$.

Ook nu geven we weer de voortzetting van de b&b-boom in onderstaande tekening.



We zetten de splitsing voort vanuit de verzameling met de bovengrens $\psi(X') = 210$. Daar het werken met accenten voor de deelverzamelingen op den duur aanleiding kan geven tot verwarring, gaan we er toe over de deelverzamelingen te nummeren in volgorde van hun ontstaan. De verzameling van alle oplossingen krijgt het nummer 0, de eerste deelverzameling (met $x_1 = 0$) het nummer 1, de tweede deelverzameling (met $x_1 = 1$) het nummer 2, en zo voort. Voor de bovengrenzen lezen we derhalve:

$x_1 = 0, \quad \psi(1) = 193\ 1/3$
$x_1 = 1, \quad \psi(2) = 210$
$x_2 = 0, \quad \psi(3) = 186\ 2/3$
$x_2 = 1, \quad \psi(4) = 210.$

Zoals gezegd gaan we verder splitsen vanuit deelverzameling 4, naar artikel 3.

$x_3 = \hat{x}_3 = 0$: $\psi(5) = 30 + 50 + 20 + 60 + 80/3 = 186\ 2/3$
met $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 1, \quad \hat{x}_6 = 2/3$
$\hat{x}_3 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0.$

$x_3 = \hat{x}_3 = 1$: $\psi(6) = 210$, met dezelfde waarden voor de $\hat{x}_i$ als bij $\psi(0)$.

De eerstvolgende splitsing geschiedt vanuit de deelverzameling met bovengrens 210. We splitsen naar artikel 4.

$x_4 = \hat{x}_4 = 0$: $\psi(7) = 30 + 50 + 50 + 60 + 40/3 = 203\ 1/3$, met
$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_5 = 1, \quad \hat{x}_6 = 1/3,$
$\hat{x}_4 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0.$

$x_4 = \hat{x}_4 = 1$: $\psi(8) = 210$, met dezelfde waarden voor de $\hat{x}_i$ als bij $\psi(0)$.

We splitsen nu vanuit deelverzameling 8 verder naar artikel 5.

$x_5 = \hat{x}_5 = 0$: $\psi(9) = 30 + 50 + 50 + 20 + 40 + 10 = 200$
met $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_6 = 1, \quad \hat{x}_7 = 1/3,$
$\hat{x}_5 = \hat{x}_8 = 0.$

$x_5 = \hat{x}_5 = 1$: $\psi(10) = 210$, met dezelfde waarden voor de $\hat{x}_i$ als bij $\psi(0)$.

We splitsen hierna verder vanuit deelverzameling 10 naar artikel 6.

$x_6 = \hat{x}_6 = 0$: $\psi(11) = 30 + 50 + 50 + 20 + 60 = 210$,
met $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 1$, $\hat{x}_6 = \hat{x}_7 = \hat{x}_8 = 0$

$x_6 = \hat{x}_6 = 1$: $\psi(12) = -1$, de oplossingen uit deze deelverzameling zijn niet toegelaten, want het toegestane gewicht 100 wordt overschreden.

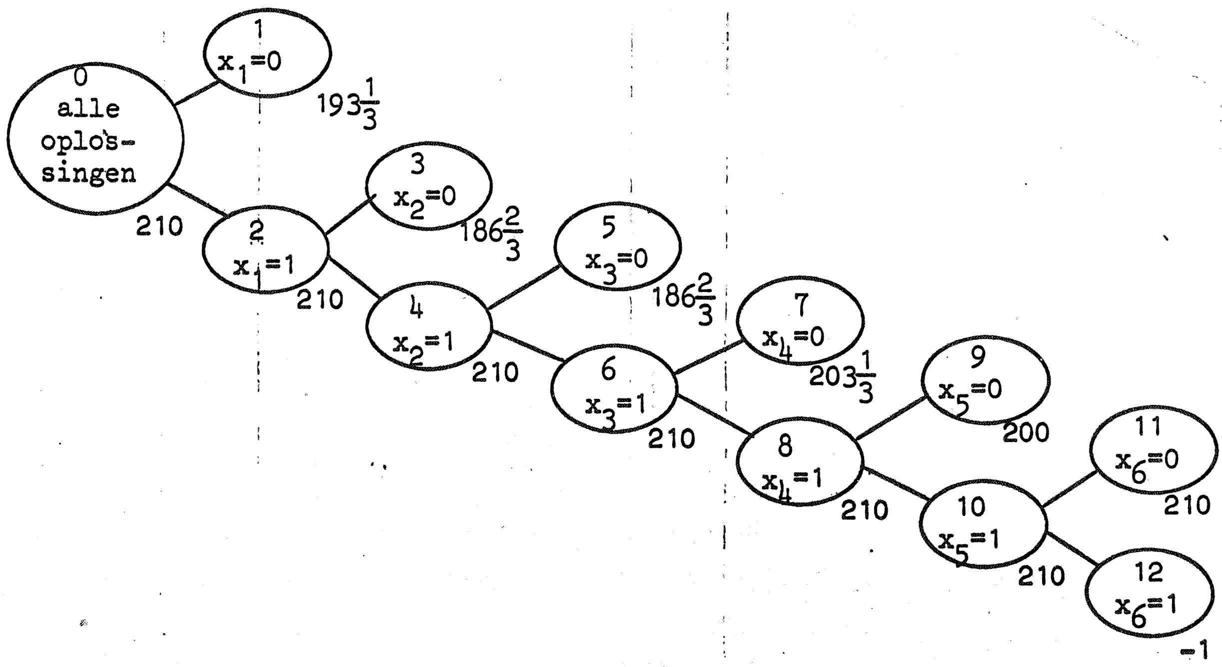
Verder splitsen is nu niet meer nodig. We weten dat voor $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ ten hoogste de totale waarde 210 bereikt kan worden en dat het totale gewicht van de artiekelen 1 t/m 5 100 bedraagt. We constateren dus:

$$\psi(11) = \max_{x \in (11)} f(x).$$

Met deze bovengrens kunnen we ook direct de optimale oplossing vaststellen:

$$x_i = 1 \qquad (i = 1,2,\dots,5)$$
$$x_i = 0 \qquad (i = 6,7,8).$$

Hieronder is de b&b-boom van deze oplossing geschetst.



5.3. Het handelsreizigersprobleem.

Een handelsreiziger wil, nadat hij van huis is vertrokken, n-1 plaatsen bezoeken en tenslotte weer naar huis terugkeren. Hij wil iedere plaats maar eenmaal aandoen en een zo kort mogelijke afstand afleggen. Anders geformuleerd: gegeven n plaatsen met bij elk geordend paar plaatsen hun onderlinge afstand, bepaal dan een volgorde (permutatie) van die plaatsen, beginnend en eindigend in plaats 1 (een zogenaamde cyclische permutatie), met een minimale totale afstand. Voor afstand mogen we zonder bezwaar tijd of kosten lezen, dit doet aan de essentie van het probleem niets af.

Gegeven is bij dit probleem derhalve een matrix A (tabel) met als elementen de afstanden a(i,j) van plaats i naar plaats j (het traject $i \rightarrow j$), en we bepalen een cyclische permutatie van de getallen 1,2,...,n (de nummers van de plaatsen), zo dat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_{ij}$$

minimaal is, onder de bijvoorwaarden dat

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + \ldots + x_{i_r i_1} = r-1 \qquad (r = 2,3,\ldots,n-1)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ of } 1 \qquad (i \neq j)$$

$$x_{ii} = 0$$

Men zal wellicht de overeenkomst ontdekken tussen dit probleem en het transportprobleem (met n invoer- en n uitvoerhavens), dat in hoofdstuk 4 behandeld werd:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

Een toegelaten oplossing van het handelsreizigersprobleem vindt men door uit iedere kolom en uit iedere rij precies één element (afstand) te nemen; door die gevonden elementen bij elkaar op te tellen vindt men de totale afstand. Wij illustreren dat aan het volgende voorbeeld. Een handelsreiziger, die in Amsterdam woont, wil de volgende plaatsen bezoeken: Rotterdam, Utrecht, Arnhem en Den Bosch. De afstanden tussen de plaatsen zijn gegeven:

	1	2	3	4	5
1. Amsterdam	0	76	40	94	89
2. Rotterdam	76	0	54	110	79
3. Utrecht	40	54	0	63	53
4. Arnhem	94	110	63	0	65
5. Den Bosch	89	79	53	65	0

Een toegelaten oplossing is b.v. de volgende route

Amsterdam - Rotterdam (element uit rij 1 en kolom 2) afstand 76
Rotterdam - Den Bosch (element uit rij 2 en kolom 5) afstand 79
Den Bosch - Utrecht (element uit rij 5 en kolom 3) afstand 53
Utrecht - Arnhem (element uit rij 3 en kolom 4) afstand 63
Arnhem - Amsterdam (element uit rij 4 en kolom 1) afstand 94

De totale af te leggen afstand bedraagt voor deze route 365 km.

Het is eenvoudig na te gaan dat, wanneer wij ieder element uit een rij of een kolom met een bepaald bedrag vermeerderen of verminderen, de totale afstand ook met dat bedrag wordt vermeerderd of verminderd. Nemen we de rijen, dan zal het duidelijk zijn dat een reiziger vanuit Amsterdam altijd minstens 40 km. zal moeten afleggen. Evenzo zal een reiziger vanuit Rotterdam altijd minstens 54 km. moeten afleggen. Op deze wijze kunnen we, net zoals in de inleiding bij voorbeeld 5.1 is gedaan, een gereduceerde tabel afleiden door reductie naar de rijen toe te passen. Omdat het in een plaats overblijven niet toegestaan is, vervangen we de nullen in de oorspronkelijke tabel door ∞.

	1	2	3	4	5
1. Amsterdam	∞	36	0	54	49
2. Rotterdam	22	∞	0	56	25
3. Utrecht	0	14	∞	23	13
4. Arnhem	31	47	0	∞	2
5. Den Bosch	36	26	0	12	∞

De som van de minimale afstanden, die we nu afgetrokken hebben bedraagt 250 km., en hiermee hebben we al een ondergrens voor de verzameling van alle routes gevonden. Er is echter ook nog reductie naar de kolommen mogelijk: een reiziger naar Arnhem zal nu b.v. altijd minstens 12 km. moeten afleggen. De naar rijen en kolommen gereduceerde tabel ziet er er dan tenslotte als volgt uit:

	1	2	3	4	5
1	∞	22	0	42	47
2	22	∞	0	44	23
3	0	0	∞	11	11
4	31	33	0	∞	0
5	36	12	0	0	∞

In totaal is 278 km. aan afstanden afgetrokken en dit is een verbeterde ondergrens voor de verzameling van alle routes.

We moeten nu het splitsingsvoorschrift vinden. We bepalen eerst het kortste traject, dat, wanneer het weggelaten zou worden ten gunste van het eerstvolgende kortste traject, de grootste verlenging van de totale afstand teweeg zou brengen. Vervolgens splitsen we in twee deelverzamelingen van routes, n.l. die, welke het betrokken traject wel bevatten en die welke dat traject niet bevatten.

Bij ieder element $a(i,j)$ met waarde nul in de gereduceerde tabel, zoeken we de kleinste elementen $a(i,l)$ en $a(k,j)$ voor $l \neq j$ en $k \neq i$. Die twee afstanden $a(i,l)$ en $a(k,j)$ tellen we paarsgewijs op, wat resulteert in de som $s(i,j)$. Deze som stelt nu de afstand voor, die we zeker extra zullen moeten afleggen wanneer we traject $i \to j$ niet in de route opnemen. Van al de sommen $s(i,j)$, die we op deze manier berekenen, nemen we de grootste en de bijbehorende route $i \to j$ is de route waarnaar we gaan splitsen. In het voorbeeld wordt dit:

trajecten met afstand 0: $3 \to 1$; $3 \to 2$; $1 \to 3$; $2 \to 3$; $4 \to 3$; $5 \to 3$; $5 \to 4$; $4 \to 5$.

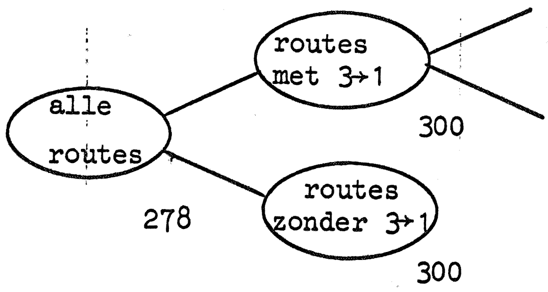
voor de sommen $s(i,j)$ vinden we:

$s(3,1) = 22$ $s(3,2) = 12$ $s(1,3) = 22$
$s(2,3) = 22$ $s(4,3) = 0$ $s(5,3) = 0$
$s(5,4) = 11$ $s(4,5) = 11$

Het maximum van $s(i,j)$ bedraagt 22 en wordt voor drie trajecten bereikt: $3 \to 1$; $1 \to 3$; $2 \to 3$. We kiezen (willekeurig) $3 \to 1$ en splitsen de verzameling van alle routes in een deelverzameling, die het traject $3 \to 1$ bevat en een deelverzameling die $3 \to 1$ niet bevat.
Daar we nu $3 \to 1$ gekozen hebben moeten alle andere trajecten vanuit 3 verboden worden, wat we doen door de derde rij uit de tabel te verwijderen. Om dezelfde reden verwijderen we ook kolom 1 uit de tabel. Bovendien moeten we traject $1 \to 3$ verbieden omdat terugkeer naar 3, voordat de gehele cyclus doorlopen is, niet toegestaan is. Zodoende verkrijgen we de volgende nieuwe tabel

	2	3	4	5
1	22	∞	42	47
2	∞	0	44	23
4	33	0	∞	0
5	12	0	0	∞

Deze tabel is verder te reduceren, en we doen dat naar rijen: van de eerste rij kunnen we alleen 22 aftrekken. De ondergrens van de deelverzameling met de routes, die 3 → 1 bevatten is derhalve 278 + 22 = 300 km. De ondergrens van de deelverzameling van de routes, die 3 → 1 niet bevatten is 278 + s(3,1) = 300. Het is nu onverschillig hoe we verder splitsen en we kiezen als uitgangsverzameling die met de routes, die 3 → 1 wel bevatten. De b&b-boom wordt



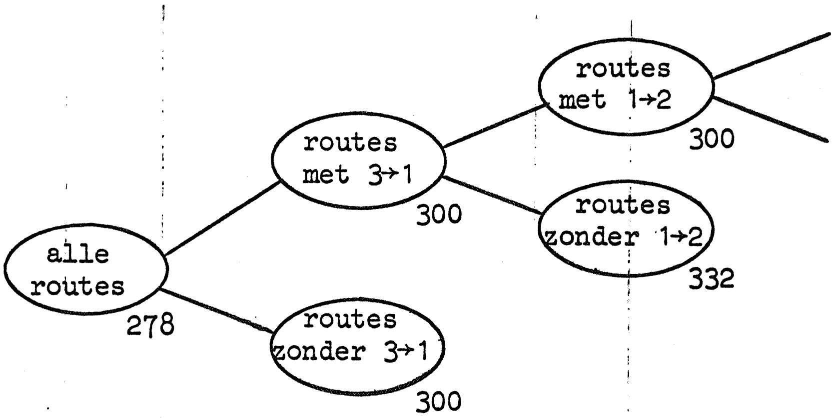
Op precies dezelfde wijze waarop we de eerste splitsing hebben uitgevoerd wordt voor de tweede maal gesplitst. Eerst bepalen we weer de sommen s(i,j) voor de trajecten met nul-afstanden. Dat zijn:

$$s(1,2) = 32 \quad s(2,3) = 23 \quad s(4,3) = 0$$
$$s(5,3) = 0 \quad s(5,4) = 20 \quad s(4,5) = 23$$

Het maximum 32 wordt bereikt voor het traject 1 → 2, en we splitsen nu in een deelverzameling met traject 1 → 2 en één zonder dat traject. Door op de hiervoor beschreven wijze weer trajecten te verbieden komen wij bij de volgende tabel voor de deelverzameling met 1 → 2.

	3	4	5
2	0	44	23
4	0	∞	0
5	0	0	∞

Deze tabel is niet verder te reduceren; de ondergrens voor de deelverzameling met 1 → 2 is derhalve 300. Voor de deelverzameling zonder het traject 1 → 2 krijgen we als ondergrens 300 + s(1,2) = 332. De b&b-boom kunnen we nu aanvullen:



We splitsen de deelverzameling met de laagste ondergrens, d.w.z. die met het traject 1 → 2. Eerst weer de sommen s(i,j) berekenen:

s(2,3) = 23   s(4,3) = 0   s(5,3) = 0
s(5,4) = 44   s(4,5) = 23

We moeten traject 5 → 4 kiezen voor de volgende splitsing. De nieuwe tabel wordt

	3	5
2	0	23
4	0	∞

De tweede kolom van deze tabel is nog te reduceren: we kunnen er 23 van aftrekken. De gereduceerde tabel wordt

	3	5
2	0	0
4	0	∞

en de ondergrenzen luiden: voor de deelverzameling met 5 → 4 : 323
voor de deelverzameling zonder 5 → 4: 344

In de b&b-boom komt nu een deelverzameling voor, n.l. die zonder 3 → 1, met een ondergrens 300. Daar dit de laagste, in de boom voorkomende, ondergrens is moeten we van hieruit verder gaan. Bij deze verzameling hoort een gereduceerde afstandstabel, waarin 3 ↛ 1 verboden is:

	1	2	3	4	5
1	∞	22	0	42	47
2	22	∞	0	44	23
3	∞	0	∞	11	11
4	31	33	0	∞	0
5	36	12	0	0	∞

We kunnen deze tabel verder reduceren naar de kolommen, en dan komen we op de ondergrens 300, die in de b&b-boom gegeven is. In de gereduceerde tabel berekenen we de sommen s(i,j):

s(2,1) = 9   s(3,2) = 23   s(1,3) = 22
s(2,3) = 0   s(4,3) = 0   s(5,3) = 0
s(5,4) = 11   s(4,5) = 11

De eerstvolgende splitsing vindt plaats naar traject 3 → 2. Voor de deelverzameling met 3 → 2 vinden de volgende afstandstabel:

	1	3	4	5
1	∞	0	42	47
2	0	∞	44	23
4	9	0	∞	0
5	14	0	0	∞

Deze tabel is niet meer te reduceren; de bijbehorende ondergrens luidt dus 300. Voor de deelverzameling zonder 3 → 2 vinden we als ondergrens 300 + s(3,2) = 323.

We splitsen weer verder vanuit de deelverzameling met 3 → 2. De sommen s(i,j) luiden:

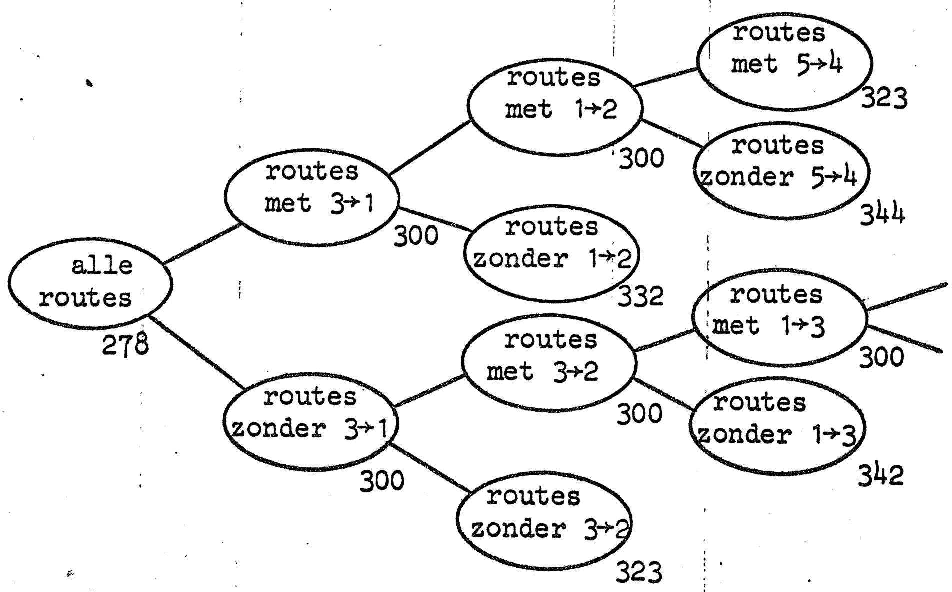
s(2,1) = 32	s(1,3) = 42	s(4,3) = 0
s(5,3) = 0	s(5,4) = 42	s(4,5) = 23

We kiezen het traject 1 → 3. De nieuwe afstandstabel wordt:

	1	4	5
2	0	44	23
4	9	∞	0
5	14	0	∞

Deze afstandstabel is ook niet verder te reduceren en de ondergrens luidt derhalve 300. De ondergrens voor de deelverzameling zonder 1 → 3 is 300 + s(1,3) = 342.

De b&b-boom zoals die inmiddels gegroeid is ziet er als volgt uit.



Voortgezette splitsing vanuit de deelverzameling met 1 → 3 levert ons het volgende op:

$$s(2,1) = 32 \quad s(5,4) = 58 \quad s(4,5) = 32;$$

we kiezen dus traject 5 → 4. De nieuwe tabel wordt:

	1	5
2	0	23
4	9	∞

De ondergrens voor deze verzameling is, na verdere reductie (23 van de tweede kolom aftrekken), 323. De ondergrens voor de verzameling zonder 5 → 4 is 358.

We splitsen nu vanuit de laatst verkregen deelverzameling met 5 → 4. De waarden van s(i,j) zijn:

$$s(2,1) = 9 \quad s(2,5) = \infty.$$

Het traject 2 → 5 wordt nu gekozen en de afstandstabel wordt zoals hieronder is aangegeven. Het is triviaal dat als laatste traject 4 → 1 gekozen moet worden, waarmee we dan op een ondergrens (= het werkelijke minimum) van 332 km. komen.

	1
4	9

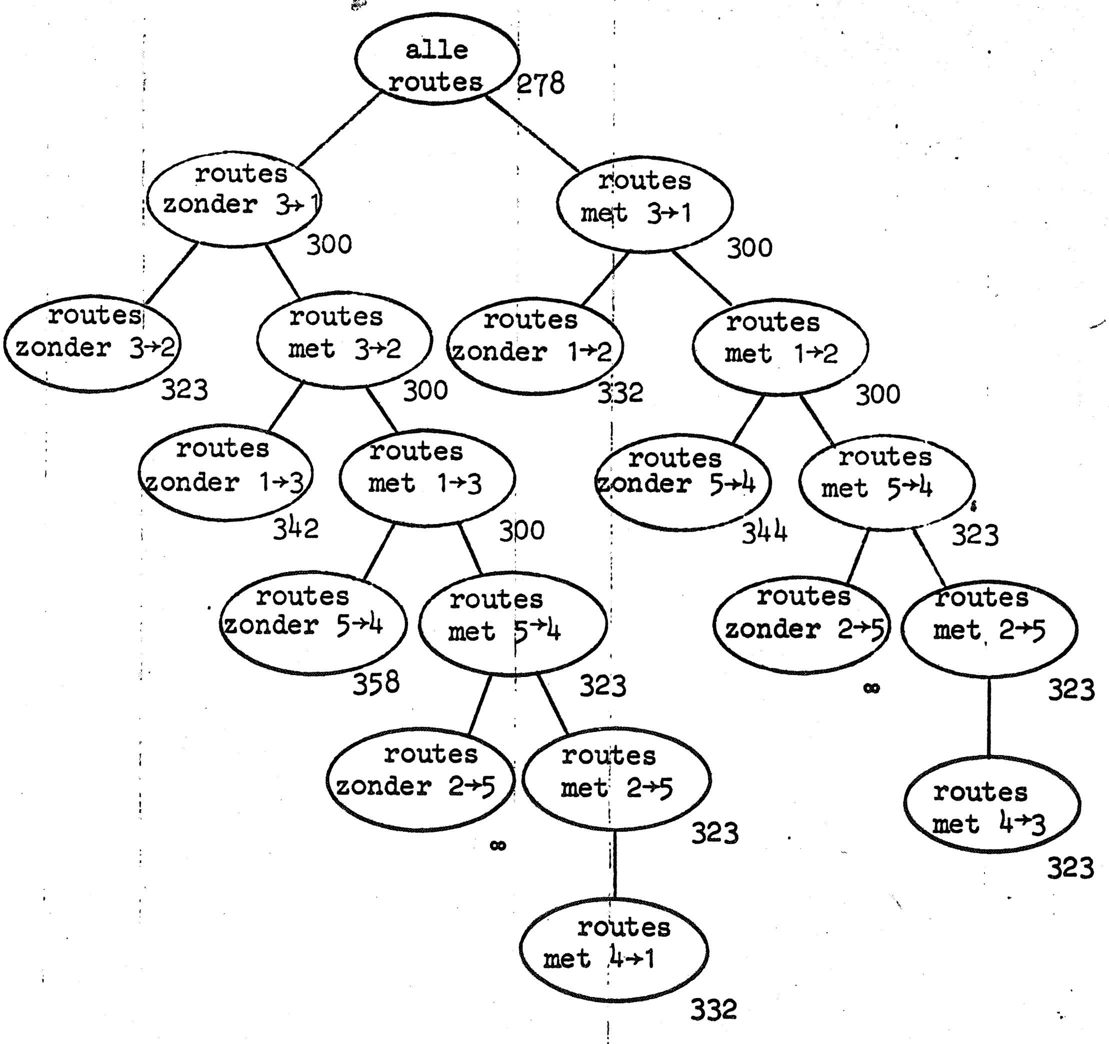
Zoeken we nu nog de b&b-boom af, dan vinden we bij de nog niet gesplitste deelverzameling van de routes met traject 5 → 4 de ondergrens 323, zodat we dus nog verder moeten splitsen vanuit deze deelverzameling. De gereduceerde afstandstabel, die bij deze deelverzameling behoort, luidde:

	3	5
2	0	0
4	0	∞

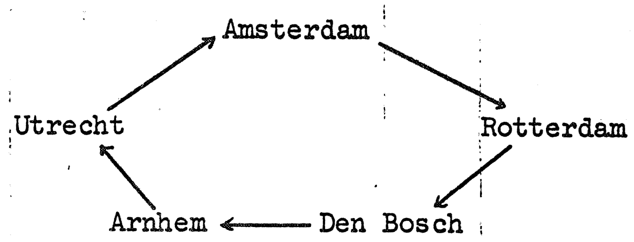
Men ziet nu direct, ook zonder de sommen s(i,j) te berekenen, welke trajecten achtereenvolgens gekozen moeten worden:

$$2 \rightarrow 5 \quad \text{en} \quad 4 \rightarrow 3.$$

De ondergrenzen van de opvolgende deelverzamelingen blijven 323 km. en hiermee is dus een route gevonden met de minimale totale afstand. De volledige b&b-boom ziet er tenslotte als volgt uit:



In onderstaande figuur is de gevonden "minimale" route schematisch weergegeven.



We merken tot slot op dat het totaal aantal mogelijke routes van dit probleem 4! = 24 bedraagt. Van die 24 hebben wij er slechts 9 onderzocht, hetgeen enigszins een indruk geeft van de winst aan rekenwerk (en tijd) die met behulp van deze b&b-methode wordt verkregen.

5.4. Een Job-shop scheduling probleem.

Wij behandelen hier één type van de job-shop scheduling problemen. Het probleem kan als volgt beschreven worden. Gegeven m karweien (jobs), die genummerd zijn van 1 t/m m en n machines, die genummerd zijn van 1 t/m n. Ieder karwei moet bewerkt worden in één en dezelfde, gegeven, volgorde van de machines ("routing"), d.w.z. karwei k kan pas dan op machine l worden toegelaten, als de bewerking van k op machine l-1 beeindigd is. De bewerkingstijden t_{kl}, van karwei k op machine l, zijn eveneens gegeven; we schrijven dat als de matrix T met niet negatieve elementen t_{kl}.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Een oplossing van dit probleem wordt gegeven door een aantal rijtjes, om precies te zijn n, waarin aangegeven wordt in welke volgorde de karweien op de machines 1, 2, ..., n bewerkt moeten worden.

Zo'n oplossing geven we weer m.b.v. een matrix Q, waarvan de elementen q_{kl} het nummer aangeven van het karwei dat als k^{de} karwei op machine l uitgevoerd wordt.

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix}$$

De r^{de} kolom (het r^{de} rijtje) van de matrix Q:

$$q_{1r},\ q_{2r},\ \ldots,\ q_{mr}$$

stelt dus de volgorde voor, waarin de m karweien op machine r worden uitgevoerd en is derhalve een permutatie van de getallen 1, 2, ...,m.

Bij iedere oplossing Q kunnen we de tijd V(Q) uitrekenen, die nodig is om alle karweien uit te voeren in de volgordes, die door Q worden gegeven. We hanteren nu de tijd V(Q) als criterium en zullen een oplossing zoeken, waarbij V(Q) minimaal is.

Wanneer men zich realiseert dat er m! verschillende mogelijkheden zijn om de m karweien op machine 1 te bewerken, en evenzo m! verschillende mogelijkheden voor machine 2, enzovoort tot en met machine n, dan zal men concluderen dat van $(m!)^n$ verschillende oplossingen de beste bepaald moet worden. Voor het geval van 5 karweien en 5 machines moet dus uit $(5.4.3.2)^5 \cong 2{,}61.10^{10}$ oplossingen die gezocht worden, waarvan V(Q) minimaal is. Het zal duidelijk zijn dat men, ook bij intensief gebruik van een rekenautomaat, bij niet zeer kleine aantallen machines (vooral de invloed van het aantal machines is groot, vanwege de exponent; in mindere mate is het aantal karweien van belang) voor een te omvangrijk probleem geplaatst is.

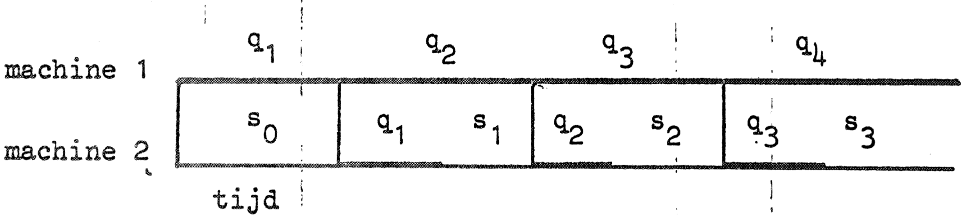
Een vermindering van het hierboven genoemde zoekwerk geeft ons het gebruik van een stelling van B. ROY.

Volgens deze stelling behoeft men slechts die oplossingen te onderzoeken, die een paarsgewijze identieke bewerkingsvolgorde hebben op de machines 1 en 2 en n en n-1. Er blijven dan nog $(m!)^{n-2}$ oplossingen over om te onderzoeken, hetgeen overigens alleen bij kleine aantallen machines een verlichting van het zoekwerk geeft.

Voordat we overgaan tot de behandeling van een b&b-oplossingsmethode voor job-shop scheduling problemen met drie machines, laten we een eenvoudige oplossingsmethode zien voor het twee-machine probleem, die gevonden is door S.M. JOHNSON (1965). Hierbij worden de karweien op een handige wijze geordend.

Uit de hiervoor genoemde stelling van ROY volgt dat we bij het twee-machine probleem alleen maar naar oplossingen behoeven te kijken waarbij de bewerkingsvolgorden op de eerste en de tweede machine gelijk zijn. We schrijven nu voor een oplossing in plaats van de matrix Q, waarin in dit geval $q_{i1} = q_{i2}$, alleen het rijtje $q_1, q_2, \ldots, q_m$, dat zijn de nummers van de achtereenvolgens te bewerken karweien.

Wanneer we een diagram maken van zo'n oplossing, dan krijgen we het volgende te zien

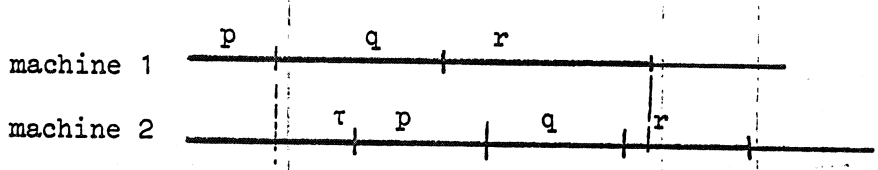


Op de tijdas zijn dikgetrokken de karweien met hun tijdsduur afgezet. De in dit diagram vermelde variabelen s_i zijn speelruimte's (in tijd) tussen de opeenvolgende bewerkingen van de karweien op de tweede machine. Om nu die oplossing te vinden waarbij V(Q) minimaal is, leiden we een beslissingsregel af, waaruit de algorithme direct volgt.

Stel, dat we op een zeker moment met karwei nummer p bezig zijn op machine 1 en dat we moeten kiezen of de daarop volgende karweien q en r in de volgorde (q,r) dan wel (r,q) bewerkt moeten worden.

We gaan nu bepalen in welke volgorde we het snelst klaar zijn.

Laat op het moment dat p op machine 1 klaar is machine 2 nog een tijd τ bezet zijn. Voor de volgorde (p,q,r) is nu de tijd T_1 om geheel klaar te komen als volgt (vgl. met de tekening):



$$T_1 = \max\{\max(\tau+t_{p2}, t_{q1}) + t_{q2},\ t_{q1} + t_{r1}\} + t_{r2} =$$

$$= \max\{\max(\tau+t_{p2}+t_{q2},\ t_{q1}+t_{q2}),\ t_{q1}+t_{r1}\} + t_{r2} = \qquad {}^{**})$$

Evenzo is de tijd T_2 om met de volgorde (p,r,q) klaar te komen

$$T_2 = \max\{\max(\tau+t_{p2}+t_{r2},\ t_{r1}+t_{r2}),\ t_{r1} + t_{q1}\} + t_{q2}$$

Zoals ieder duidelijk zal zijn handhaven we de volgorde (p,q,r) als $T_1 \leq T_2$. Dus:

$$\max\{\max(\tau+t_{p2}+t_{q2},\ t_{q1}+t_{q2}),\ t_{q1} + t_{r1}\} + t_{r2} \leq$$

$$\leq \max\{\max(\tau+t_{p2}+t_{r2},\ t_{r1}+t_{r2}),\ t_{r1} + t_{q1}\} + t_{q2}$$

$$\Rightarrow \max\{\max(\tau+ t_{p2}+t_{q2},\ t_{q1}+t_{q2}),\ t_{q1} + t_{r1}\} - t_{q2} \leq$$

$$\leq \max\{\max(\tau+t_{p2}+t_{r2},\ t_{r1}+t_{r2}),\ t_{r1} + t_{q1}\} - t_{r2}$$

$$\Rightarrow \max\{\tau+t_{p2}+t_{q2}-t_{q2},\ t_{q1}+t_{q2}-t_{q2},\ t_{q1}+t_{r1}-t_{q2}\} \leq$$

$$\leq \max\{\tau+t_{p2}+t_{r2}-t_{r2},\ t_{r1}+t_{r2}-t_{r2},\ t_{r1}+t_{q1}-t_{r2}\}$$

$$\Rightarrow \max\{t_{q1},\ t_{q1}+t_{r1}-t_{q2}\} \leq \max\{t_{r1},\ t_{r1}+t_{q1}-t_{r2}\}$$

**) max(a,b) + c = max(a+c, b+c)

Trek van beide zijden $t_{q1} + t_{r1}$ af:

$$\max\{-t_{r1}, -t_{q2}\} \leq \max\{-t_{q1}, -t_{r2}\}$$

$$\Rightarrow \min\{t_{q1}, t_{r2}\} \leq \min\{t_{r1}, t_{q2}\}$$

Of, in de algemene notatie:

als $\min\{t_{q_j1}, t_{q_{j+1}2}\} \leq \min\{t_{q_{j+1}1}, t_{q_j2}\}$

dan gaat q_j aan q_{j+1} vooraf. Hieruit is eenvoudig de algorithme voor dit probleem af te leiden:

1. zoek het karwei j met de kleinste bewerkingstijd $\min(t_{j1}, t_{j2})$;*)
2. is $\min(t_{j1}, t_{j2}) = t_{j1}$ bewerk dan karwei j als eerste op machine 1 en machine 2;
3. is $\min(t_{j1}, t_{j2}) = t_{j2}$ bewerk dan karwei j als laatste op machine 1 en machine 2;
4. laat karwei j weg en herhaal voor de resterende karweien hetgeen vermeld is onder de punten 1, 2 en 3.

Een voorbeeld van een twee-machine probleem:

karwei i	1	2	3	4	5	6
tijd t_{i1}	4	5	7	6	15	8
tijd t_{i2}	13	2	15	8	7	5

De kleinste bewerkingstijd is 2 en wordt bereikt voor karwei 2 op de tweede machine. We bewerken dus karwei 2 als laatste. De eerstvolgende kleinste bewerkingstijd is 4 en wordt bereikt voor karwei 1 op machine 1. Het karwei nummer 1 wordt dus als eerste bewerkt. Tot zover kunnen we de gevonden ordening als volgt weergeven

$$(1, ., ., ., ., 2)$$

---

*) Zijn er meer karweien met dezelfde kleinste bewerkingstijd, dan nemen we die met het laagste nummer.

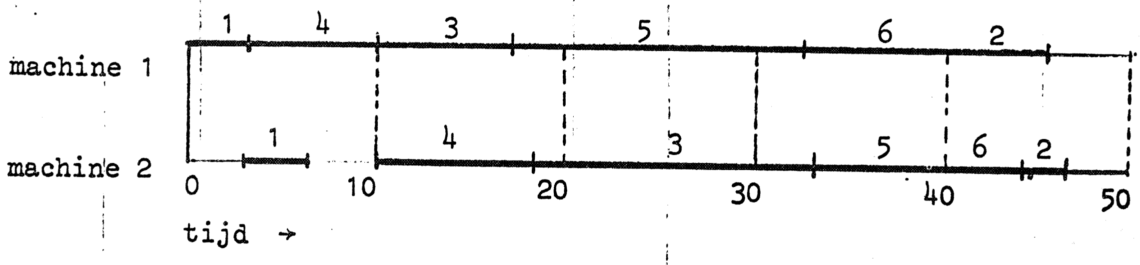
De eerstvolgende kleinste bewerkingstijd (het probleem dat we nu beschouwen telt 4 karweien: karwei 2 en 1 zijn inmiddels achtervolgens weggelaten) is 5 en wordt bereikt voor karwei 6 op machine 2, zodat we voor dit probleem karwei 6 als laatste bewerken.
De ordening wordt nu:

$$(1, ., ., ., 6, 2)$$

Vervolgens vinden we als kleinste bewerkingstijd 6 voor karwei 4 op machine 1. Daarna is de kleinste bewerkingstijd 7 voor de karweien 3 en 5, resp. op machine 1 en 2. We nemen derhalve karwei 3 eerst en daarna karwei 5. De uiteindelijke ordening wordt nu:

$$(1, 4, 3, 5, 6, 2).$$

Een schematische weergave van deze oplossing geeft het volgende resultaat te zien:



Het drie-machine probleem kan, wegens de stelling van ROY, eveneens worden teruggebracht tot het zoeken van één ordening van de m karweien voor drie machines. We schrijven als oplossing dan ook weer alleen het rijtje

$$q_1, q_2, \ldots, q_m$$

voor de nummers van de achtereenvolgens te bewerken karweien.

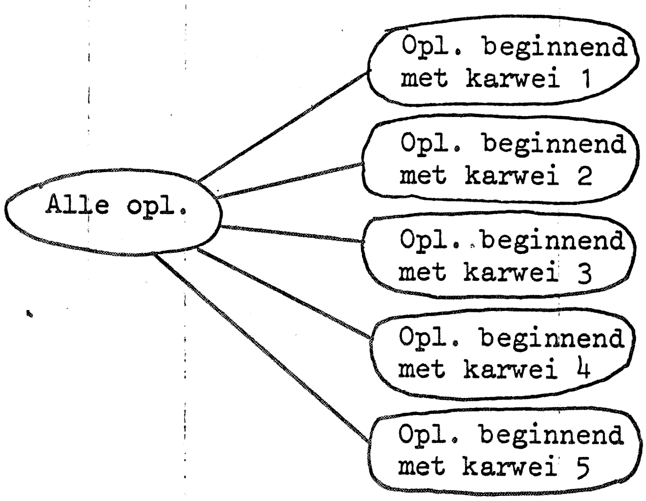
We zullen bij de oplossing van dit probleem een b&b-methode hanteren. Het splitsen verloopt daarbij als volgt: de verzameling van alle toegelaten oplossingen bevat m! oplossingen en deze wordt in de eerste stap gesplitst in m deelverzamelingen X': de k^{de} deelverzameling bevat die oplossingen, welke beginnen met karwei k.

Voor ieder van die m deelverzamelingen wordt een ondergrens $\phi(X')$ voor de totale bewerkingstijdsduur $V(Q)$ berekend en de deelverzameling met de kleinste ondergrens wordt verder gesplitst in m-1 deelverzamelingen X''. Wanneer b.v. de oplossingen in de deelverzameling X' met de kleinste ondergrens $\phi(X')$ alle beginnen met karwei j, dan beginnen de oplossingen in de m-1 deelverzamelingen X'' achtereenvolgens met de karweien j en 1, j en 2, ..., j en j-1, j en j+1, ..., j en m. Wederom worden, nu voor de deelverzamelingen X'', ondergrenzen $\phi(X'')$ voor $V(Q)$ berekend, en het splitsingsproces herhaalt zich.

Laten als voorbeeld de volgende karweien gegeven zijn:

karwei i	1	2	3	4	5	$\sum_i t_{ij}$
tijd t_{i1}	3	10	2	5	8	28
tijd t_{i2}	6	2	4	13	10	35
tijd t_{i3}	7	3	6	9	12	37

Het eerste gedeelte van de b&b-boom ziet er dan als volgt uit:



Voordat we onze aandacht wijden aan de keuze van de ondergrenzen, zullen we de zogenaamde vroegste tijdstippen $v(q_i, 1)$ introduceren, dat zijn de tijdstippen, waarop de bewerking van karwei q_i op machine 1 reeds kan zijn beeindigd. Zoals men stellig zal inzien geldt

$$v(q_i, 1) = \max \{v(q_i, 1-1), v(q_{i-1}, 1)\} + t_{q_i 1}$$

d.w.z. het vroegste tijdstip, waarop karwei q_i op machine 1 klaar kan zijn is gelijk aan het vroegste tijdstip waarop de bewerking van q_i op machine 1-1 kan zijn beeindigd plus zijn eigen bewerkingstijd $t_{q_i 1}$ of, zo dit een later tijdstip is, het vroegste tijdstip waarop de bewerking van het voorgaande karwei q_{i-1} op machine 1 kan zijn beeindigd, eveneens vermeerderd met de bewerkingstijd $t_{q_i 1}$. Met behulp van deze vroegste tijdstippen $v(q_i, 1)$ gaan we drie ondergrenzen ϕ', ϕ'' en ϕ''' construeren, waarvan we de grootste kiezen als de uiteindelijke ondergrens ϕ, die dient als maatstaf voor het al of niet verder splitsen van een deelverzameling (deze werkwijze is afkomstig van Z.A. LOMNICKI). Nemen we aan dat er op een zeker moment k karweien zijn ingedeeld, dan luiden die grenzen als volgt:

$$\phi' = v(q_k, 3) + \sum_{i=k+1}^{m} t_{q_i 3}$$

d.i. de tijd, die zeker nodig is om de eerste k karweien op alle drie de machines te bewerken, plus de tijd, die nodig is om de resterende karweien alleen op de laatste machine te bewerken.

$$\phi'' = v(q_k, 2) + \sum_{i=k+1}^{m} t_{q_i 2} + \min_{i > k} t_{q_i 3}$$

d.i. de tijd, die zeker nodig is om de eerste k karweien te bewerken op machine 1 en 2, plus de tijd, nodig om het restant op machine 2 te bewerken, plus de bewerkingstijd van het laatste karwei op de laatste machine (daar het meestal niet bekend is welk karwei het laatste is nemen we de kleinste bewerkingstijd).

$$\phi''' = \sum_{i=1}^{m} t_{i1} + \min_{i > k} (t_{q_i 2} + t_{q_i 3})$$

d.i. de tijd, die nodig is voor de bewerking van alle karweien op de eerste machine, plus de bewerkingstijd van het laatste karwei op machine 2 en 3 (ook hier: neem de kleinste bewerkingstijd, omdat de laatste karweien onbekend zijn).

De ondergrens ϕ, waar we bij de splitsing mee werken is nu

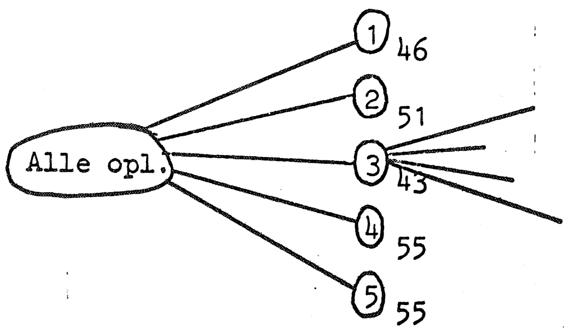
$$\phi = \max(\phi', \phi'', \phi'''),$$

Aan de hand van het hiervoor gebruikte voorbeeld zullen we dit toelichten. We nummeren hier de deelverzamelingen door aan iedere deelverzameling als nummer het getal toe te kennen dat gevormd wordt door de opeenvolgende nummers van de karweien, die, in vaste volgorde, het begin vormen van iedere oplossing uit die deelverzameling. $\phi(135)$ is b.v. de ondergrens van de deelverzameling, waarin iedere oplossing begint met de karweien 1, 3 en 5.

In de eerste stap splitsen we de verzameling χ in 5 deelverzamelingen:

nr.deel-verz. q_1	$v(q_1,1)$	$v(q_1,2)$	$v(q_1,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
1	3	9	16	16+30=46	9+29+3=41	28+5=33	46
2	10	12	15	15+34=49	12+33+6=51	28+10=38	51
3	2	6	12	12+31=43	6+31+3=40	28+5=33	43
4	5	18	27	27+28=55	18+22+3=43	28+5=33	55
5	8	18	30	30+25=55	18+25+3=46	28+5=33	55

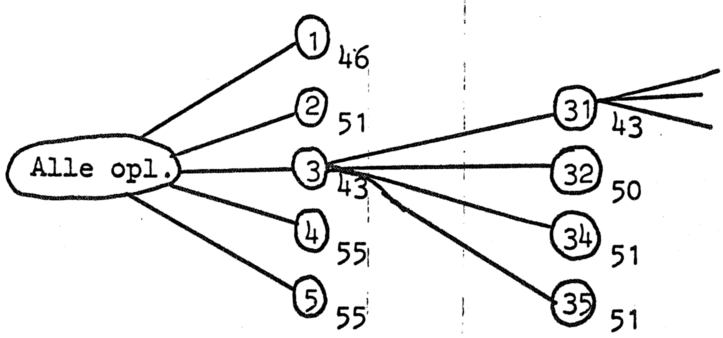
In de b&b-boom ingevuld geeft dat het volgende beeld



We gaan nu verder vanuit deelverzameling 3:

nr. deel-verz. $3q_2$	$v(q_2,1)$	$v(q_2,2)$	$v(q_2,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
31	5	12	19	19+24=43	12+25+ 3=30	28+ 5=33	43
32	12	14	17	17+28=45	14+29+ 7=50	28+13=41	50
34	7	20	29	29+22=51	20+18+ 3=41	28+ 5=33	51
35	10	20	32	32+19=51	20+21+ 3=44	28+ 5=33	51

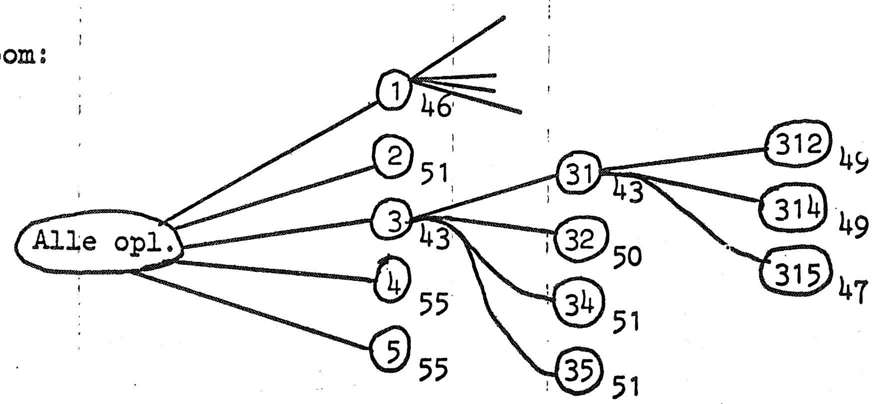
In de b&b-boom geeft dat het volgende resultaat:



De volgende splitsing geschiedt vanuit deelverzameling 31.

nr. deel-verz. $31q_3$	$v(q_3,1)$	$v(q_3,2)$	$v(q_3,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
312	15	17	22	22+21=43	17+23+ 9=49	28+21=49	49
314	10	25	34	34+15=49	25+12+ 3=40	28+ 5=33	49
315	13	23	35	35+12=47	23+15+ 3=41	28+ 5=33	47

In de b&b-boom:



De ondergrens van deelverzameling 1 is nu de laagste in de b&b-boom en we splitsen in de vierde stap dus verder vanuit 1

nr.deel-verz. $1q_2$	$v(q_2,1)$	$v(q_2,2)$	$v(q_2,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
12	13	15	19	19+27=46	15+27+ 6=48	28+10=38	48
13	5	13	22	22+24=46	13+25+ 3=41	28+ 5=33	46
14	8	22	31	31+21=52	22+16+ 3=41	28+ 5=33	52
15	11	21	33	33+18=51	21+19+ 3=43	28+ 5=33	51

De volgende stap vindt plaats vanuit deelverzameling 13 en geeft het volgende resultaat:

nr.deel-verz. $13q_3$	$v(q_3,1)$	$v(q_3,2)$	$v(q_3,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
132	15	17	25	25+21=46	17+23+ 9=49	28+22=50	50
134	10	26	35	35+15=50	26+12+ 3=41	28+ 5=33	50
135	13	23	35	35+12=47	23+15+ 3=41	28+ 5=33	47

In de zesde stap wordt nu deelverzameling 135 verder gesplitst.

nr.deel-verz. $135q_4$	$v(q_4,1)$	$v(q_4,2)$	$v(q_4,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
1352	23	25	38	38+ 9=47	25+13+ 9=47	28+22=50	50
1354	18	36	45	45+ 3=48	36+ 2+ 3=41	28+ 5=33	48

We hebben nu een oplossing gevonden met een totale bewerkingsduur V(Q) van 48, die wordt weergegeven door de volgende volgorde:

$$(1, 3, 5, 4, 2)$$

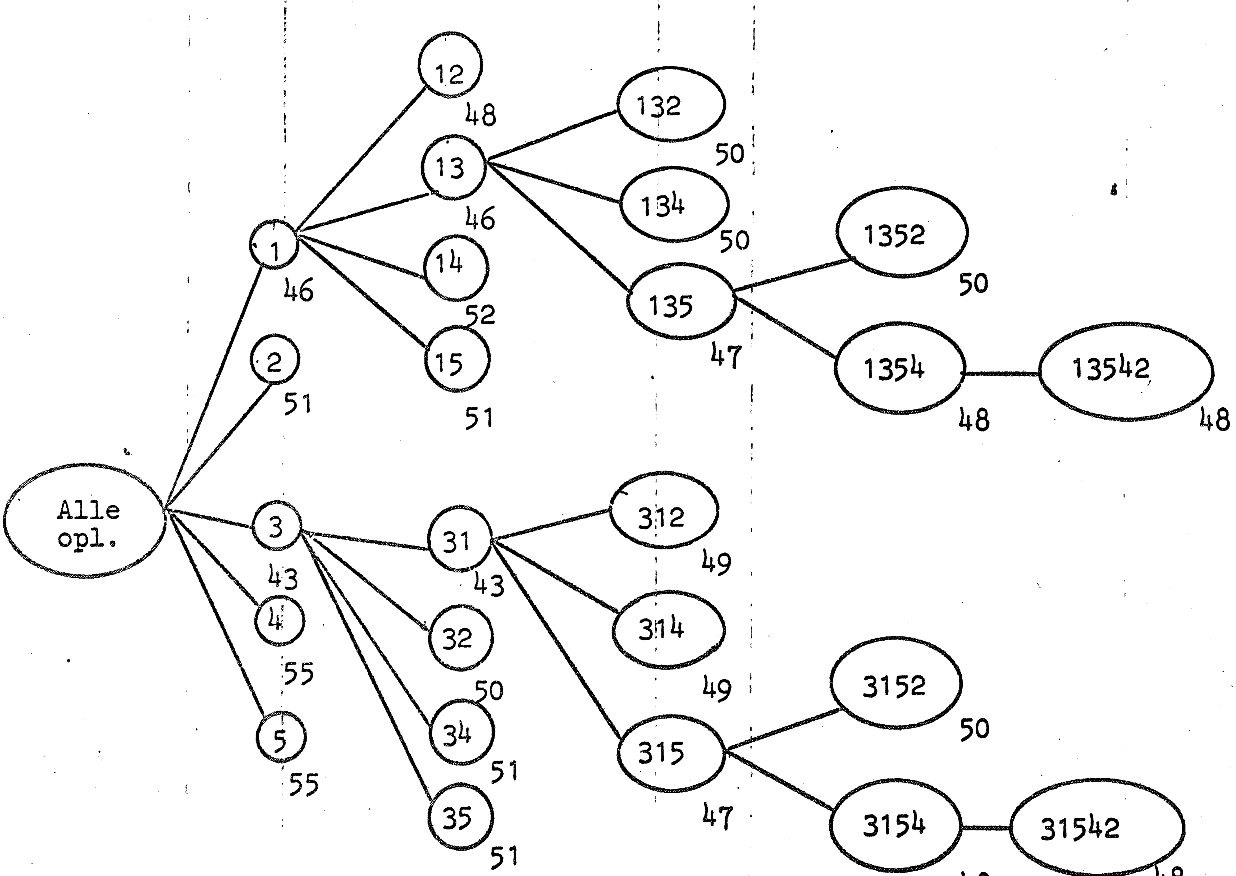
In de b&b-boom komt nu nog een deelverzameling voor met een lagere ondergrens ϕ, en wel deelverzameling 315. We moeten derhalve eerst nog deze deelverzameling onderzoeken alvorens te kunnen concluderen of we de optimale oplossing al gevonden hebben.

nr. deel-verz. $315q_4$	$v(q_4,1)$	$v(q_4,2)$	$v(q_4,3)$	ϕ'	ϕ''	ϕ'''	ϕ
3152	23	25	38	38+ 9=47	25+13+ 9=47	28+22=50	50
3154	18	36	45	45+ 3=48	36+ 2+ 3=41	28+ 5=33	48

Hiermee is een tweede oplossing gevonden met een totale bewerkingsduur $V(Q) = 48$, die wordt weergegeven door

$$(3,\ 1,\ 5,\ 4,\ 2)$$

In de b&b-boom, die hieronder volledig is weergegeven, is geen lagere ondergrens meer te vinden, zodat we mogen concluderen, dat de twee gevonden oplossingen beide optimaal zijn.



Opgaven

Los de volgende opgaven op m.b.v. ~~een~~ b&b-algorithme, en formuleer de modellen, indien dat nog niet is gebeurd.

5.1. $$\max z = 3x_1 + 6x_2 + \tfrac{1}{2}x_3$$

onder de bijvoorwaarden

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5$$
$$4x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_j \geq 0$$
$$x_j \text{ geheel} \qquad j = 1, 2, 3.$$

5.2. Bij de firma Bingel vaceren 4 functies, waarvoor in de desbetreffende vakbladen personeelsadvertenties zijn geplaats. Op die advertenties hebben in totaal 8 sollocitanten gereflecteerd. Na een gesprek met de personeelschef en de verschillende afdelingshoofden hoofden hebben deze in onderling overleg aan iedere sollicitant een "geschiktheids-cijfer" toegekend, varierend van 1 (slecht) tot 10 (uitstekend). In onderstaande tabel zijn die cijfers vermeld. Men wil nu die sollicitanten in dienst nemen, waarbij de totale geschiktheid van de gehele groep nieuwe functionarissen maximaal is.

functie / sollicitant	1	2	3	4
1	5	7	3	8
2	8	2	5	7
3	7	5	4	2
4	6	7	7	9
5	4	4	3	6
6	6	5	4	6
7	3	8	6	1
8	2	3	1	5

Welke sollicitanten zal men accepteren en voor welke functies?
Hoe zou de oplossing luiden wanneer de laatste vier sollicitanten zich zouden hebben teruggetrokken?

5.3. Een onderhoudsmonteur van de N.V. STOTU moet volgende week 5 bedrijven langs om daar de apparatuur te controleren. Iedere dag wordt één bedrijf bezocht. De 5 bedrijven zijn resp. gevestigd in Den Helder, Venlo, Tilburg, Dordrecht en Enschede, terwijl de N.V. STOTU zelf gevestigd is in Assen. De afstanden tussen de plaatsen zijn gegeven in onderstaande tabel. Bepaal nu de kortste weg waarlangs de monteur, vertrekkend uit Assen de bedrijven kan bezoeken om vervolgens weer terug te keren naar Assen.

	1	2	3	4	5	6
1. Assen	0	157	217	225	218	111
2. Den Helder	157	0	249	191	171	233
3. Venlo	217	249	0	93	145	157
4. Tilburg	225	191	93	0	54	164
5. Dordrecht	218	171	145	54	0	176
6. Enschede	111	233	157	164	176	0

5.4. Aan het eind van de maand wil de bedrijfsleider van de firma Bingel de volgende overzichten van de afdeling administratie en automatisering verkrijgen:

1. staat gewerkte uren
2. " voorraadniveau en bestellingen
3. " orderstand
4. " crediteuren
5. " debiteuren.

Bovendien wil de economisch directeur nog enige rentabiliteitsberekeningen laten uitvoeren, terwijl voor de researchafdeling een drietal resultatenberekeningen moeten worden verwerkt. Al deze aanvragen worden verwerkt m.b.v. een kleine bedrijfscomputer, waarop o.a. nog geen multi-programming mogelijk is. Een en ander houdt in dat de afzonderlijke eenheden (zie tekening) slechts één probleem

invoer → | buffer geheugen | → | centrale rekeneenheid | → | buffer geheugen | → uitvoer tegelijk kan worden werwerkt, hetgeen zonder onderbreking moet geschieden. Men heeft voor de totale werktijd dan ook te maken met invoer-, reken- en uitvoertijd, welke voor de diverse aanvragen hieronder (in minuten) zijn vermeld.

aanvraag	invoertijd	rekentijd	uitvoertijd
1. gewerkte uren	10	2	12
2. voorraadniveau en bestellingen	15	3	8
3. orderstand	6	1	5
4. crediteuren	3	0,5	2
5. debiteuren	3	0,5	3
6. rentabiliteit	2	2	1
7. resultaatberekening	5	15	3
8. "	2	20	1
9. "	1	18	0,5

In welke volgorde kunnen de aanvragen het beste worden uitgevoerd wanneer men de totale benodigde tijd zo klein mogelijk wil houden?

5.5. Een fabrikant heeft 120.000 kg van een bepaalde hoogwaardige soort plastic nodig. Hij kan daarvoor bij vijf fabrieken terecht, die hem ieder hun offerte gemaakt hebben.

Fabriek 1 kan maximaal 16.500 kg leveren en berekent daarvoor ƒ 30,50 per kg plus een vast bedrag, dat nodig is voor het dekken van de extra kosten, die het uivoeren van deze opdracht met zich meebrengt, ter grootte van ƒ 15.000,--.
Fabriek 2 kan maximaal 80.000 kg leveren, en berekent daarvoor: voor de eerste 10.000 kg alleen een vast bedrag van ƒ 403.000,--. Voor een order tussen de 10.000 en 35.000 kg wordt ƒ 34,-- per kg en een vast bedrag van ƒ 63.000,-- berekend. Voor een afname tussen de 35.000 en 50.000 kg zijn die bedragen ƒ 33,-- per kg en ƒ 98.000,-- vast. Voor een afname tussen de 50.000 en 75.000 kg resp. ƒ 32,-- per kg en ƒ 148.000,-- vast en tenslotte voor een afname tussen 75.000 en 80.000 kg ƒ 31,-- per kg en ƒ 223.000,-- vast.

Fabriek 3 kan hoogstens 83.000 kg leveren voor ƒ 34,-- per kg en ƒ 6.500,-- als vast bedrag.
Fabriek 4 kan hoogstens 6.000 kg leveren voor ƒ 46,-- per kg en een vast bedrag van ƒ 3.300,--.
Fabriek 5 tenslotte berekent geen vast bedrag voor de eerste 20.000 kg maar ƒ 35,-- per kg, en boven de 20.000 kg (tot een maximum van 38.000 kg) wel een vast bedrag, van ƒ 20.000,-- en ƒ 34,-- per kg.

Hoe zal nu de fabrikant zijn orders uitgeven?

5.6. Een nogal expansief bedrijf wil haar produktiecapaciteit uitbreiden. Daarbij kan gekozen worden tussen 3 projecten, die afhankelijk van de hoeveelheid erin geïnvesteerd kapitaal verschillende rendementen opleveren. In totaal heeft het bedrijf 1 miljoen gulden beschikbaar, dat in eenheden van ƒ 250.000,-- moet worden besteed. In onderstaande tabel zijn rendementen per project en per geïnvesteerd bedrag vermeld.

Hoe zal het bedrijf de ƒ 1.000.000,-- verdelen over de projecten, opdat een maximaal totaal rendement wordt verkregen?

project \ geïnvesteerd bedrag	ƒ250.000	ƒ500.000	ƒ750.000	ƒ1.000.000
1	25	28	20	16
2	22	25	22	18
3	20	24	22	20

5.7. Bakker Jansen verkoopt tien soorten brood, die hij zelf, in vaste hoeveelheden, bakt. De bewerkingen die bij dat bakken grofweg worden onderscheiden zijn deeg maken en bakken. Voor iedere broodsoort gelden verschillende tijden voor die bewerkingen, die in de volgende tabel zijn vermeld (in minuten).

broodsoort	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
deeg maken	15	22	35	10	32	40	10	15	20	18
bakken	30	20	18	25	30	16	33	40	15	30

Daar bakker Jansen een druk beklante eenmanszaak drijft, wil hij al het brood 's ochtends voor de verkoop begint (9.00 uur) gebakken hebben. Hiermee gaat een deel van zijn welverdiende nachtrust verloren, en zoals begrijpelijk is hij daar weinig op gesteld.

In welke volgorde moet hij het brood nu bakken opdat hij zo laat mogelijk kan opstaan en wat is de totale werktijd in de bakkerij?

<u>Opm</u>. Het deeg maken en brood bakken dient voor iedere broodsoort apart te geschieden.

APPENDIX A. WISKUNDE

A.1. Verzamelingen.

In het dagelijkse leven zijn wij zonder meer gewend aan het begrip verzameling, ook wel collectie genoemd. Men behoeft alleen maar te denken aan de talloze hobby's, als het verzamelen van postzegels, lucifermerken of sigarenbandjes. De zaken waaruit zo'n verzameling bestaat noemen we elementen. Het begrip verzameling laat zich gemakkelijk uitbreiden tot zaken, waar wij in de regel niet gewend zijn die term te gebruiken. Zo kan men zeggen dat een bibliotheek onder meer bestaat uit een verzameling boeken en een huis uit een verzameling bouwmaterialen.In de wiskunde gebruikt men het begrip veelvuldig: er wordt b.v. gesproken over de verzameling gehele getallen, de verzameling punten in een 2-dimensionale ruimte, of, zoals wij in de besliskunde veel doen, over de verzameling toegelaten beslissingen. Als notatie wordt voor een verzameling een aparte, vaak een griekse of sierletter, gereserveerd, of de elementen worden tussen accoladen opgeschreven:

de verzameling toegelaten beslissingen (in toestand S): $\chi(S)$

de verzameling gehele getallen van 1 t/m 8: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Het zal ieder duidelijk zijn dat bij grote verzamelingen het opschrijven van alle elementen reusachtig inefficient is. We lossen dat op door, als dit geen aanleiding tot verwarring geeft, puntjes te plaatsen:

nogmaals de verzameling gehele getallen van 1 t/m 8: $\{1, 2, \ldots, 8\}$

of, als het gaat om alle gehele getallen groter dan 0: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Een bijzondere verzameling, die men zeker in het dagelijkse leven niet vaak zal hanteren, is de lege verzameling, die geen element bevat, en die aangeduid wordt met ϕ.

Uit verzamelingen kunnen we nieuwe verzamelingen maken door elementen weg te laten, we spreken dan van deelverzamelingen. Uit de verzameling gehele getallen van 1 t/m 8 kunnen b.v. de volgende 2 deelverzamelingen verkregen worden:

de deelverzameling met de even getallen {2, 4, 6, 8}

de deelverzameling met de priem-getallen {1, 2, 3, 5, 7}

Als notatie gebruiken we voor deelverzamelingen hoofdletters. Op verzamelingen kan men ook bewerkingen, of, wat een meer gebruikelijke term is, operaties uitvoeren. Dat zijn o.m.:

a) de doorsnede c) het complement

b) de vereniging d) het verschil

Hebben we een verzameling χ met twee deelverzamelingen V en U dan is

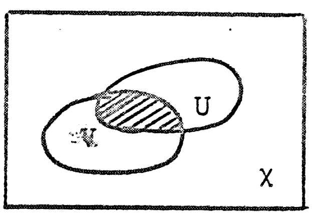
a) de doorsnede $V \cap U$ de verzameling, die de elementen bevat, die zowel tot V als tot U behoren;

b) de vereniging $V \cup U$ de verzameling van de elementen, die of tot V en/of tot U behoren;

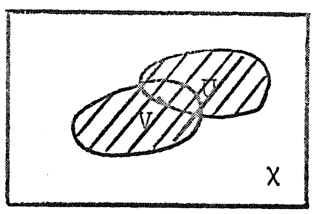
c) het complement $\overline{V}$ de verzameling van de elementen van χ, die niet tot V behoren;

d) het verschil $V - U$ de verzameling van de elementen, die wel tot V, echter niet tot U behoren.

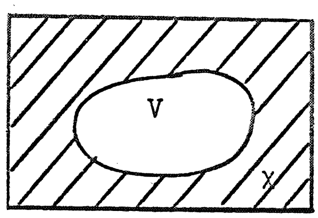
Het als zodanig geschreven verschil $V - U$ is niet strikt nodig: het kan geschreven worden als $V \cap \overline{U}$. Men kan bovenstaande operaties in een tekeningetje verduidelijken:



gearceerd: $V \cap U$



gearceerd: $V \cup U$



gearceerd: $\overline{V}$

De notatie van een deelverzameling V uit een verzameling X is

$$V \subset X$$

en een element v dat tot de verzameling V behoort geeft men aan met

$$v \in V$$

We kunnen nu bijv. a) herformuleren als volgt:

a[1]) $v \in V$ en $v \in U \Leftrightarrow v \in V \cap U$.

Opgaven

A.1. Ga nu voor de deelverzamelingen {1, 3, 5} en {3, 4, 5, 7} van de verzameling {1, 2, ..., 8} na wat resp. doorsnee, vereniging, verschillen en complementen zijn.

(antw. {3, 5}, {1, 3, 4, 5, 7}, {1}, {4, 7}, {2, 4, 6, 7, 8}, {1, 2, 6, 8})

A.2. Bij twee achtereenvolgende tentamens besliskunde werden de volgende cijfers behaald:

cijfers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal 1e tent.	0	0	0	1	2	8	15	6	2	1
aantal 2e tent.	0	0	1	2	5	13	7	5	2	3

Laten de volgende deelverzamelingen van de verzameling X van alle kandidaten gegeven zijn:

A = kandidaten 1e tentamen; B = kandidaten 2e tentamen; C = kandidaten met cijfer hoger dan 6; D = kandidaten met cijfer 6; E = kandidaten met cijfer 4 of 5; F = kandidaten met cijfer lager dan 4.

Bereken hoeveel elementen de volgende verzamelingen bevatten:

$A \cap D$ (Antw. 8)

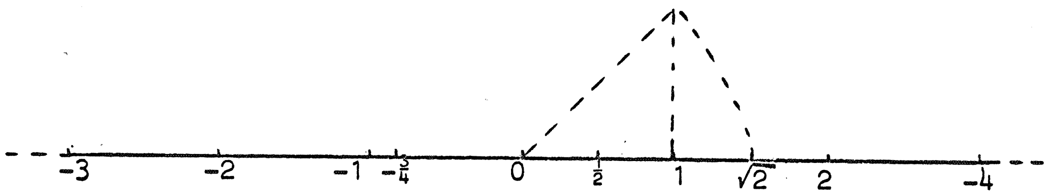
$(A \cup B) \cap (C \cup E)$ (51)

$B \cap F$ (1)

$\overline{B} \cap F$ (0)

Enkele verzamelingen die we veel gebruiken noemen we hier apart:

1. de verzameling $\mathbb{N}$ der natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
2. de verzameling der gehele getallen $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dat zijn de natuurlijke getallen, hun tegengestelden en 0.
3. de verzameling der rationale getallen $\frac{m}{n}$, 0 of $-\frac{m}{n}$, waarin m en n natuurlijke getallen zijn
4. de verzameling $\mathbb{R}$ der reële getallen, een tamelijk abstract begrip, dat we verduidelijken door het gebruik van de getallenrechte. Op een rechte lijn kiezen we twee punten, het linkerpunt noemen we 0 en het rechter 1. Door de afstand tussen de twee punten steeds weer, en naar beide zijden, af te zetten krijgen we een afbeelding van de gehele getallen op die lijn. Evenzo kan men aan ieder rationaal getal een punt op de lijn toevoegen, en tenslotte ook aan ieder irrationaal getal; dat is een getal dat niet geschreven kan worden als m/n (m en n geheel*)), zoals $\sqrt{2}$. Aan alle reële getallen kan nu een punt toegevoegd worden, want de verzameling $\mathbb{R}$ is de vereniging van de verzameling rationale en de verzameling irrationale getallen.



reële rechte

Deelverzamelingen die we veel gebruiken zijn de intervallen. Een open interval (a,b) is de verzameling van alle reële getallen x, die tussen de vaste getallen a en b inliggen: $a < x < b$. Een gesloten interval $[a,b]$ is de verzameling reële getallen x waarvoor geldt: $a \leq x \leq b$. Bij een onbegrensd interval geldt: $x > a$, of $x \geq a$, of $x < a$, of $x \leq a$ en dit wordt resp. genoteerd als (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$ en $(-\infty,a]$. Mengvormen van de gesloten en open intervallen zijn de halfopen intervallen (links open, rechts gesloten, of omgekeerd) $(a,b]$ of $[a,b)$.

Onder een δ-omgeving $U_\delta(x)$ van een punt x op de reële rechte verstaat men het interval $(x-\delta,x+\delta)$.

*) $n \neq 0$

A.2. Functies van één variabele.

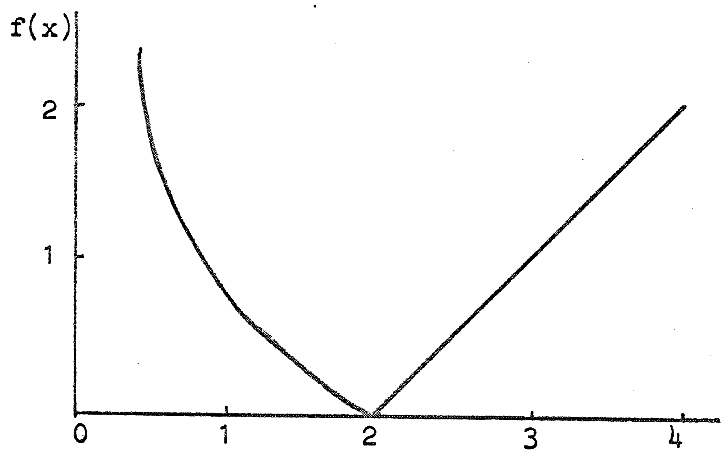
Op verzamelingen kan men functies definiëren, dat zijn voorschriften die aan ieder element van een verzameling één of meer elementen van diezelfde of een andere verzameling toevoegen.

Voorbeeld: we hebben de verzameling van natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, \ldots\}$ en daarop de functie $f(x) = 2x + x^2$. Deze functie $f(x)$ - x heet het argument van de functie - voegt aan ieder natuurlijk getal x het ,natuurlijke, getal $2x + x^2$ toe. Is $x = 2$ dan is $f(x) = 2.2 + 2^2 = 8$. Definiëren we op de verzameling der natuurlijke getallen de functie $g(x) = -2x + x/2$, dan voegt deze functie aan ieder natuurlijk getal een rationaal getal toe. In de regel definieert men functies op (een deelverzameling van) de verzameling der reële getallen of in het meer dimensionale geval: op de reële ruimte $\mathbb{R}^n$. (zie A.7)

De verzameling waarop een functie gedefinieerd wordt noemt men het domein, de verzameling waarin de functiewaarden liggen, de range. Een plezierige bijkomstigheid is dat men eenvoudige functies gemakkelijk kan tekenen en met behulp van deze grafische voorstelling inzicht in het verloop van de functie kan krijgen.

Voorbeeld:

$$f(x) = (x-2)^2 \qquad x \leq 2$$
$$f(x) = (x-2) \qquad x > 2$$



De hier getekende functie is een <u>continue</u> functie d.w.z. hij heeft de eigenschap dat een kleine verandering (hoe klein ook) in de waarde van x eveneens een kleine verandering in de waarde van f(x) tot gevolg heeft. Wiskundig gezegd: in ieder punt x_0 van het domein van de functie f(x) is er bij elke reëel getal $\varepsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$, zo dat voor elke x in dat domein met $|x - x_0| < \delta$ geldt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
$|x - x_0|$ betekent de absolute waarde van $(x_1 - x_2)$ en is een bijzonder belangrijke functie, die gedefinieerd is als

$$g(x) = |x| = x \qquad \text{als } x \geq 0$$
$$= -x \qquad \text{als } x < 0$$

Bij het voorbeeld $f(x) = (x-2)^2$, $x \leq 2$ en $f(x) = (x-2)$, $x > 2$ ziet men snel in dat het wel mogelijk is om aan iedere x één waarde f(x) toe te voegen, maar niet om omgekeerd bij iedere f(x) één waarde x aan te wijzen. Er zijn echter functies, waarbij dat wel mogelijk is. Zij g(x) zo'n functie: aan iedere waarde van x (in het domein) is dan één getal y = g(x) toegevoegd, en aan iedere waarde van y is ook één getal x toegevoegd. Men schrijft $x = g^{-1}(y)$ en noemt g^{-1} de <u>inverse functie</u> van g. Wij zullen nu nagaan welke, aan een functie te stellen, eisen voldoende zijn opdat hij een inverse functie heeft. We voeren daartoe het begrip monotone functie in. Een functie g(x) heet <u>monotoon stijgend</u> (<u>dalend</u>) op zijn domein indien voor ieder paar x' en x" in dat domein geldt

$$x' < x'' \Leftrightarrow g(x') < g(x'')$$
$$(x' < x'' \Leftrightarrow g(x') > g(x''))$$

Monotoon stijgende (dalende) functies hebben een inverse functie. Men gaat gemakkelijk na dat voor deze functies geldt dat aan iedere x één y = g(x) is toegevoegd, en omgekeerd aan iedere y één $x = g^{-1}(y)$. We noemen dat <u>éénwaardige functies</u>. Volledigheidshalve merken we op dat er ook een zwakke vorm van monotonie bestaat, die echter geen voldoende voorwaarde voor het bestaan van een inverse functie levert. Een functie heet <u>monotoon niet-dalend</u> (<u>niet-stijgend</u>) op zijn domein als voor ieder paar x' en x" in dat domein geldt

$$x' < x'' \Rightarrow g(x') \leq g(x'')$$
$$(x' < x'' \Rightarrow g(x') \geq g(x''))$$

Voorbeelden:

$$y = f(x) = x \qquad x = f^{-1}(y) = y$$

$y = g(x) = x^2$ heeft geen inverse op $x \in \mathbb{R}$; beperkt men het domein tot $x \geq 0$, dan bestaat de inverse wel: $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Laat gegeven zijn de functie $y = f(x)$, die gedefinieerd is op het interval $a \leq x \leq b$, met functiewaarden in het interval $c \leq y \leq d$, en verder de functie $g(y) = z$, die gedefinieerd is op $c \leq y \leq d$. Nemen we nu een x_0 uit het interval $[a, b]$ dan hoort daar volgens het voorschrift g een y_0 uit $[c, d]$ bij. Het voorschrift wijst op zijn beurt aan y_0 een $z_0 = g(y_0)$ toe. Dit kunnen we voor alle x uit $[a, b]$ doen en we krijgen dan een zogenaamde <u>samengestelde functie</u> $z = g(f(x))$.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2 && \text{voor } 2 \leq x \leq 8 \\ g(y) &= y^2 && \text{voor } 0 \leq y \leq 6 \\ z = g(f(x)) &= (x-2)^2 && \text{voor } 2 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

Een bijzondere klasse van functies vormen de <u>rijen</u>. Een rij is een functie, met als domein de verzameling van (alle) natuurlijke getallen (soms ook uitgebreid tot alle gehele getallen).

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} f(n) &= n && \text{voor } n = 1, 2, \ldots. \\ g(n) &= 1, 2, 3, \ldots, n = n! && \text{voor } n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Voor n! dient men "n faculteit" te lezen (we definiëren $0! = 1$). Vaak schrijft men bij rijen geen f(n), maar geïndiceerde variabelen:

$$\begin{aligned} a_n &= n && \text{voor } n = 1, 2, \ldots. \\ b_n &= n! && \text{voor } n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Men schrijft de rij zelf als de geordende verzameling $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ of $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Het is ook wel gebruikelijk bij de behandeling van bepaalde problemen (zie b.v. §5.2) van een rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een deelrij te nemen, b.v. van de rij $a_n = 1/n$ alleen de termen $a_{2n} = 1/2n$. Als aanduiding voegt men bij de notatie nog een index toe: $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Alle rijen die we hier getoond hebben waren oneindig voortlopende rijen, daarnaast heeft men ook rijen met een eindig aantal termen: $\{a_n\}_{n=1}^{k}$.

Van een willekeurige rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kunnen we een <u>reeks</u> $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ afleiden, volgens het voorschrift

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n
\end{aligned}
$$

De notatie hiervoor is $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. $\sum$ is een somteken en de betekenis is

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Een ander veel gebruikt teken in de wiskunde, dat overeenkomstig toegepast wordt, is het product-teken:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_n ;$$

n! kan men dus ook schrijven als $\prod_{i=1}^{n} i$.

We noemen hier nog enkele, in de statistiek veel toegepaste, rijen en reeksen:

de <u>binomiaalcoëfficienten</u> $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ voor $0 \leq m \leq n$

$\binom{n}{m} = 0$ voor $m > n \geq 0$

m en n geheel

deze zijn ontleend aan het binomium van Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}.$$

de <u>exponentiële functie</u> $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n! = e^x$

<u>Opgaven</u>

A.3. Teken de grafiek van de volgende functies:

$f(x) = 1/x$ voor $1/5 \leq x \leq 12$

$f(x) = 1 \times 1 + x$ voor $-8 \leq x \leq 8$

$f(x) = (2x-3)/(x-2)$ voor $0 \leq x \leq 12$

A.4. Bepaal de inverse functie van de volgende functies:

$f(x) = x^2 + 2$ $x \geq 0$ (antw. $g(y) = \sqrt{y-2}$ voor $y \geq 2$)

$f(x) = x^2 - 2x$ $x \geq 1$ (antw. $g(y) = 1 + \sqrt{1+y}$ $y \geq -1$)

$f(x) = (2x-3)/(x-2)$ $x \neq 2$ (antw. $g(y) = (2y-3)/y-2$ $y \neq 2$)

$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x & x > 1 \end{cases}$ (antw. $g(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1-y & y < 0 \end{cases}$)

A.3. <u>Limieten</u>

Nemen we de rij $a_n = 1/n$. Het mag bekend verondersteld worden dat, naarmate n groter wordt, a_n steeds dichter naar 0 toegaat. We kunnen dat wiskundig zeggen door een interval $[0,\varepsilon)$ in te voeren, waarbij $\varepsilon > 0$ een zeer klein reëel getal is. Nu is er altijd een n_0 te vinden waarvoor geldt

$$n > n_0 \Longrightarrow a_n \in [0,\varepsilon)$$

want laat $n_0 = 1/\varepsilon$, dan is hieraan voldaan.

We schrijven nu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

en we zeggen dat de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>convergeert</u> naar 0.

Algemener: een oneindige rij a_1, a_2, ... is convergent, dan en slechts dan, als er een reëel getal a bestaat met de eigenschap dat er bij elk getal $\varepsilon > 0$ een n_0 is, waarvoor geldt

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{als } n > n_0.$$

a heet de <u>limiet</u> van de rij (afgekort: lim). Is een rij niet convergent dan heet hij <u>divergent</u>.

Zonder bewijs vermelden we een aantal stellingen over limieten van rijen:

1-een rij heeft hoogstens één limiet;

zijn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente rijen met resp. limieten a en b, dan geldt voor de rij

2- $c_n = a_n + b_n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} c_n = a + b;$

3- $d_n = a_n - b_n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} d_n = a - b;$

4- $e_n = a_n \cdot b_n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} e_n = a \cdot b;$

5- $f_n = a_n / b_n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} f_n = a / b$, voorzover $b \neq 0$;

Een bijzondere limiet is het getal e:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n \cong 2,7182818284590$$

Het limietbegrip kunnen we uitbreiden tot functies in het algemeen; we zeggen dat, als f(x) in x = a gedefinieerd is, f(x) in dat punt x = a limiet f(a) heeft indien er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden, zo dat

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor } |x - a| < \delta \qquad {}^{*)}$$

Voldoet de functie f(x) aan deze voorwaarden, dan heet hij <u>continu</u> in het punt x = a. Een functie heet continu op een interval als hij continu is in alle punten van dat interval. Een functie heet <u>links-continu</u> in

*) f(x) kan in x = a ook een limiet $b \neq f(a)$ hebben.

een punt a als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor} \quad a - \delta < x < a.$$

Evenzo kan men rechts-continu definiëren.

Zonder bewijs vermelden we:
Zijn $f(x)$ en $g(x)$ beide continu in $x = a$, dan zijn ook continu in $x = a$:

$$f(x) \pm g(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)$$
$$f(x) \,/\, g(x) \quad \text{mits } g(a) \neq 0.$$

Voor samengestelde functies geldt dat een continue functie van een continue functie weer een continue functie is.

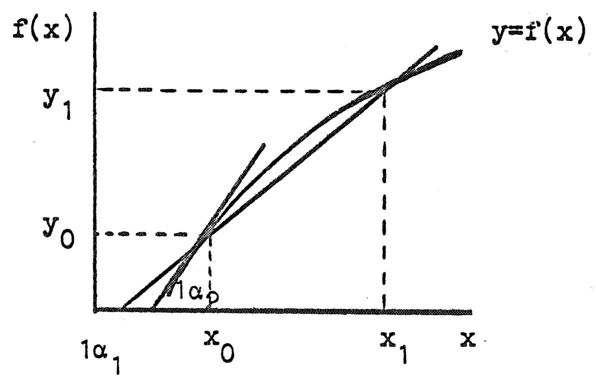
Opgaven

A.5. Bepaal de limieten van

$f(x) = (3x-1)/x$	voor $x \to \infty$	(antw. 3)
$f(x) = x(x+1)(2x+1)/6x^3$	voor $x \to \infty$	(antw. 1/3)
$f(x) = (1+gxn)^{1/n}$	voor $n \to 0$	(antw. e^{gx})
$f(x) = \{(x+h)^3 - x^3\}/h$	voor $h \to 0$	(antw. $3x^2$)

A.4. Differentiaalrekening.

Zij gegeven een functie $y = f(x)$, zoals in onderstaande figuur



dan laat het zich goed denken, dat in vele punten van die functie, zoals b.v. in x_0, een raaklijn aan de functie geconstrueerd kan worden.

We willen nu de richting van die raaklijn bepalen, d.w.z. $tg\alpha_2$. Eerst trekken we dan de lijn door de punten (x_0,y_0) en (x_1,y_1) en we kunnen $tg\alpha_1$ bepalen.

$$tg\alpha_1 = (y_1-y_0) \;/\; (x_1-x_0).$$

Stellen we $x_1 - x_0 = h$ dan wordt dit

$$tg\alpha_1 = (f(x_0+h) - f(x_0))/h.$$

Wanneer men nu x_1 naar x_0 laat naderen, ofwel $h \to 0$, dan zal het duidelijk zijn dat $tg\alpha_1$ naar $tg\alpha_2$ nadert, zodat voor de limiet geldt

$$tg\alpha_2 = \lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0))/h.$$

Deze limiet behoeft echter niet altijd te bestaan.

We definiëren nu, zonder gebruikt te maken van de meetkundige voorstelling:

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0))/h \quad (h < 0 \text{ of } h > 0)$$

is het <u>differentiaalquotient</u> van $f(x)$ in x_0, mits de limiet bestaat. Men kan uit de limiet afleiden dat een functie $f(x)$, die differentieerbaar is in $x = x_0$ daar ook continu moet zijn.

Bestaat het differentiaalquotient van $f(x)$ op een geheel interval (a,b) dan heet $f(x)$ <u>differentieerbaar</u> op (a,b), met als (eerste) <u>afgeleide</u> $f'(x)$.

Daar $f'(x)$ weer een functie van x is is het mogelijk dat $f'(x)$ ook differentieerbaar is, en we definiëren analoog:

$$\left[\frac{df'(x)}{dx}\right]_{x=x_0} = f''(x_0) = \lim_{h\to 0} (f'(x+h) - f'(x))/h$$

als het <u>tweede differentiaalquotient</u> van $f(x)$ in x_0, mits de limiet bestaat. Overeenkomstig spreken we van de <u>tweede afgeleide</u> $f''(x)$. Men kan zo doorgaan voor hogere afgeleiden $f'''(x)$, etc.

In de definities is toegevoegd dat $h < 0$ of $h > 0$. Is slechts één van deze twee mogelijk, dan spreken we, net als bij de continuïteit van links- of rechts-differentieerbaar.

Door het strikt toepassen van de definitie kan men de volgende rekenregels bewijzen.

1. $$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

2. $$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. $$\frac{d(f(x) \,/\, g(x))}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

en voor samengestelde functies $g(f(x))$ de <u>kettingregel</u>

4. $$\frac{dg(f(x))}{dx} = g'(f(x))f'(x)$$

Overigens is hier aangenomen dat zowel $f(x)$ als $g(x)$ differentieerbaar zijn.

We bewijzen 2. en 4.

2. $$\frac{d(f(x)\,g(x))}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. stel $y = g(z)$ en $z = f(x)$, dus $y = g(f(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg(z)}{dx} = \frac{dg(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = g'(z)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Voorbeeld

$$y = z^3 = (x^2+4)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz^3}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3z^2 \cdot 2x = 6(x^2+4)^2x.$$

Afgeleiden van enkele eenvoudige functies:

1. $f(x) = c$ $\quad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x$ $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} (x+h-x)/h = 1$
3. $f(x) = x^n$ produktregel n-maal toepassen: $f'(x) = nx^{n-1}$ (geldt ook voor n niet geheel)
4. $f(x) = \log x$ $\quad f'(x) = 1/x$
5. $f(x) = a^x$ $\quad f'(x) = a^x \log a$
6. $f(x) = \sin x$ $\quad f'(x) = \cos x$
7. $f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\sin x$

<u>Opgaven</u>

A.6. Differentieer de volgende functies

$f(x) = x^5$ (antw.) $f'(x) = 5x^4$

$f(x) = x^{-5}$ $\quad f'(x) = -5x^{-6}$

$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ $\quad f'(x) = (3/4)(1/\sqrt[4]{x})$

$f(x) = x\sqrt{x}$ $\quad f'(x) = (3/2)\sqrt{x}$

$f(x) = x\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = (4/3)(\sqrt[3]{x})$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = -2|x|$$

$f(x) = (1/3)x^3 + 5$ $\quad f'(x) = x^2$

$f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad f'(x) = 1/\sqrt{x}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad f'(x) = 2ax + b$

$f(x) = 3x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 6$ $\quad f'(x) = 15x^4 - 16x^3 - 6x$

$f(x) = (6x^2-3x)/3x$ $\quad f'(x) = 2$

$f(x) = x - (1/x)$ $\quad f'(x) = 1 + (1/x^2)$

$f(x) = \sqrt{2ax}$ $\quad f'(x) = \sqrt{a/2x}$

$f(x) = (a^2-x^2)/(a^2+x^2)$ $\quad f'(x) = -4a^2x/(a^2+x^2)^2$

$f(x) = x/(4+x^2)$ $\quad f'(x) = (4-x^2)/(4+x^2)^2$

$f(x) = \log x^2$	$f'(x) = 2/x$
$f(x) = \mathrm{tg}x - x$	$f'(x) = \mathrm{tg}^2x$
$f(x) = x\sqrt{x+1}$	$f'(x) = (3x+2)/2\sqrt{x+1}$
$f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$	$f'(x) = x \,/\, \sqrt{x^2-a^2}$
$f(x) = \sqrt{\log x}$	$f'(x) = 1 \,/\, 2x\sqrt{\log x}$
$f(x) = \log(\log x)$	$f'(x) = 1 \,/\, x \log x$
$f(x) = \log((1-x)/(1+x))$	$f'(x) = 2 \,/\, (x^2-1)$
$f(x) = 2x + \sin 2x$	$f'(x) = 4\cos^2x$

A.5. Maxima en minima.

We onderscheiden convexe en concave functies, en functies, die noch convex of concaaf zijn (het laatste houdt voor continue functies in dat die functies gedeeltelijk convex en gedeeltelijk concaaf zijn). Een functie $f(x)$ noemen we strikt convex op een interval $[a,b]$ als geldt

$$(1-r)f(x') + rf(x'') > f((1-r)x' + rx'')$$

(waarin r een reëel getal is, $0 < r < 1$) voor elke x' en x'' behorende tot $[a,b]$. Men kan afleiden dat voor tweemaal differentieerbare functies dit dan en slechts dan zo is als

$$f''(x) > 0 \qquad \text{voor} \quad x \in [a,b]$$

Een functie $f(x)$ noemen we strikt concaaf als geldt (onder overigens dezelfde condities)

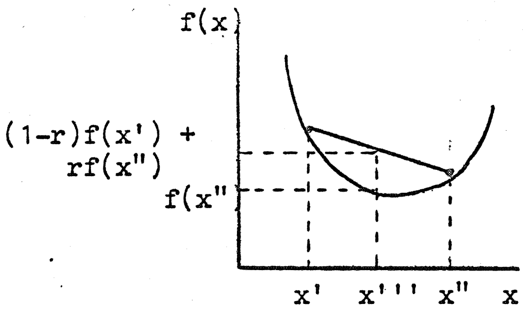
$$(1-r)f(x') + rf(x'') < f((1-r)x' + rx'')$$

en (voor tweemaal differentieerbare functies)

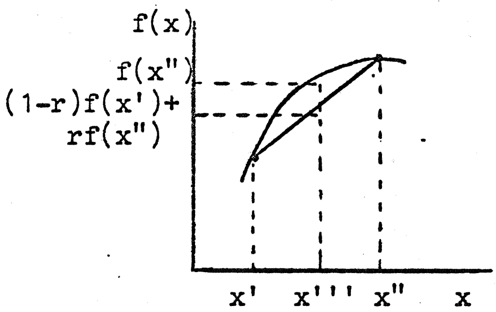
$$f''(x) < 0 \qquad \text{voor} \quad x \in [a,b]$$

Laat men "strikt" in de definitie weg dan moet aan de ongelijktekens een gelijkteken worden toegevoegd.

Men kan zich van deze functies de volgende aanschouwelijke voorstelling maken.



convexe functie

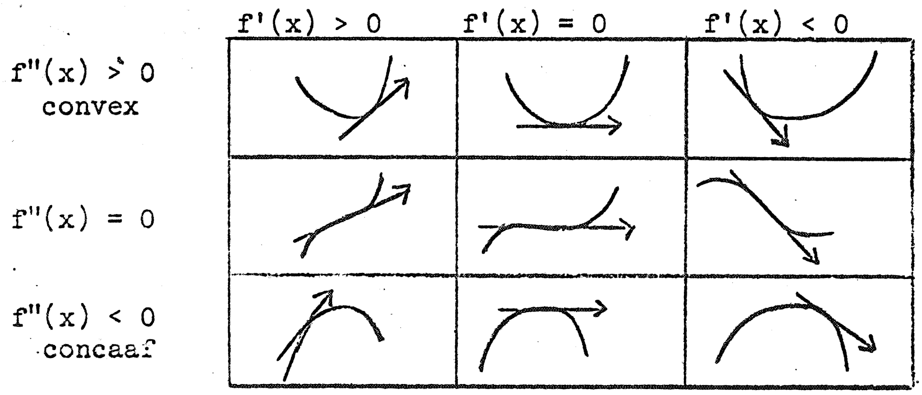


concave functie

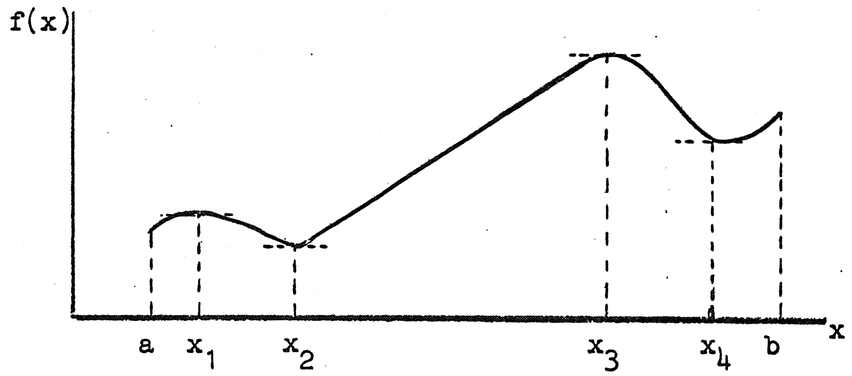
$$x''' = (1-r)\, x' + rx''$$

Bij een strikt convexe (concave) functie f(x) treedt slechts één minimale (maximale) waarde op. Voor dit punt geldt f'(x) = 0, want de raaklijn moet in dat punt horizontaal lopen. Bij niet-strikt convexe of concave functies zijn er meer punten x mogelijk, waar het minimum of maximum kan worden aangenomen(men bedenke dat een rechte - horizontale - lijn zowel convex als concaaf is).

We hebben voor het gedrag van functies de volgende tabel, die opgaat voor functies die tweemaal differentieerbaar zijn.



De maxima en minima - tezamen extrema genoemd - die we hier beschouwd hebben waren absolute extrema, d.w.z. op het gehele interval $[a,b]$ is geen waarde $f(x')$ van $f(x)$ te vinden, die groter resp. kleiner is dan het gevonden maximum of minimum. Behalve absolute kent men ook relatieve extrema. Geldt voor alle x in een omgeving $U_\delta(x'')$ van x" dat $f(x'') > f(x)$, maar geldt dat niet op het gehele interval $[a,b]$ dan is $f(x)$ een relatief maximum. Dit komt voor bij functies die deels convex, deels concaaf zijn.



relatief maximum x_1, absoluut maximum in x_3
relatief minimum x_4, absoluut minimum in x_1.

Wil men een meer compleet overzicht van de extrema van de $f(x)$, dan zal men ook de waarden die $f(x)$ op de rand van zijn domein aanneemt moeten onderzoeken.

In de besliskunde spreekt men vaak van optimumproblemen. Hiermee worden problemen aangeduid, waar extrema bepaald moeten worden onder bijvoorwaarden.

Opgaven

A.7. Bepaal de extrema van de volgende functies en geef voor ieder extreem aan of het een maximum of een minimum is (randwaarden blijven buiten beschouwing).

$f(x) = x^2 - 10x + 8$ (Antw. min. $x = 5$)

$f(x) = x + 1/x$ (min. $x = +1$; max. $x = -1$)

$f(x) = x/((x-1)(x-4))$ (max. $x = 2$; min. $x = -2$)

$f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x,$

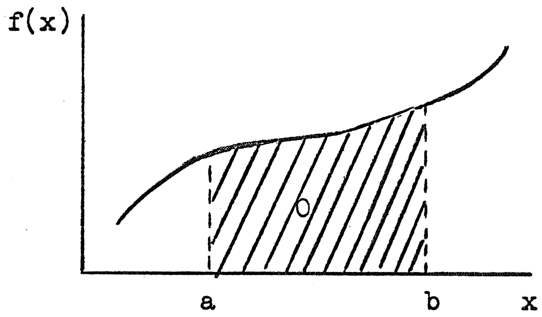
$- 180^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$ (max. $x \cong 53^{\circ}$; min. $x \cong -127^{\circ}$)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + (10\frac{2}{3})x - 4$ (min. $x = 8/3$; max. $x = 4/3$)

$f(x) = x + \sin 2x,\ 0 < x \leq 5\pi$ (max. $x = 2\pi / 6 + k\pi$;
min. $x = 2\pi / 3 + k\pi$)

A.6. Integraalrekening.

Zij gegeven een functie $f(x)$ en willen we de oppervlakte onder de kromme van die functie op het interval $a \leq x \leq b$ bepalen.



We schrijven voor die oppervlakte $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ en noemen dat de bepaalde integraal van $f(x)$. We kunnen ons hier de volgende voorstelling van maken: $F(b)$ is het oppervlak tussen de kromme en de x-as, dat links van b ligt en daar trekken we vanaf $f(a)$, het oppervlak tussen de kromme en de x-as, dat links van a ligt. a heet de ondergrens van de integraal en b de bovengrens.

Maken we nu de bovengrens b van de integraal variabel, dan

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = F(x) - C,$$

waarin C een constante is.

$F(x)$, de onbepaalde integraal, is nu de functie die als afgeleide $f(x)$ heeft. $F(x)$ wordt de primitieve functie van $f(x)$ genoemd; $f(x)$ heet de integrand. Men zal eenvoudig kunnen nagaan dat ook $F(x) + K$, K een willekeurige constante, een primitieve functie van $f(x)$ is (immers de afgeleide van een constante is 0).

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$$

Bestaat er op het interval $[a,b]$ een functie $F(x)$ met afgeleide $f(x)$ dan noemen we $f(x)$ integreerbaar op $[a,b]$.

We noemen enige eigenschappen van integralen. Hierbij nemen we aan dat alle functies $f(x)$ en $g(x)$ op het - willekeurige - interval $[a,b]$ integreerbaar zijn.

1. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$

2. laat $c \in [a,b]$, dan geldt $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. laat de eerste afgeleide $g'(x)$ van $g(x)$ bestaan

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(x)F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \frac{dg(x)}{dx} dx =$$

$$= g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Dit is afgeleid uit het differentiaalquotient voor producten

$$\frac{dg(x)F(x)}{dx} = g(x) \frac{dF(x)}{dx} + F(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

dus $$g(x)f(x) = \frac{dg(x)F(x)}{dx} - F(x)g(x)$$

en hieruit volgt de integraal.

Uit 4. volgt:

5. $$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c\int_a^b f(x)dx$$

6. voor de kettingregel in de differentiaalrekening bestaat een pendant - de substitutiemethode - in de integraalrekening,

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = G(f(x))\,\Big|_a^b = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$$

7. het differentieren van integralen met functies in de grenzen,

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt = \psi'(x)f(x,\psi(x)) - \phi'(x)f(x,\phi(x)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

hier is de integrand een functie van twee variabelen (zie A.7); voor een functie van één variabele luidt dit als volgt:

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = \psi'(x)f(\psi(x)) - \phi'(x)f(\phi(x))$$

8. een belangrijke functie is de logarithmische functie

$$\int_0^t \frac{1}{x}\,dx = \log t \qquad t > 0$$

Opgaven

A.8. Bereken de volgende integralen

$$\int_0^x t^4 dt \qquad \text{antw. } \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_{-\infty}^x (1/t^6)dt \qquad -\frac{1}{5x^5}$$

$$\int_0^x (1/\sqrt[4]{t})dt \qquad \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}$$

$\int_0^x \sqrt[5]{t^9}\,dt$	$\dfrac{5x^2\sqrt[5]{x^4}}{14}$
$\int_0^x (at^2+bt+c)dt$	$\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx$
$\int_1^x (-2/t+t^4/5+2t)dt$	$-\ 2\log x + x^5/25 + x^2 - 26/25$
$\int_1^x ((5\sqrt[4]{t^3}-3\sqrt[6]{t^5}-16\sqrt{t})/2\sqrt{t^3})dt$	$10\sqrt[4]{x} - (9/2)\sqrt[3]{x} - 8\log x - 5\tfrac{1}{2}$
$\int_1^x (t-1/t^2)dt$	$(1/2)x^2 + 1/x - 3/2$
$\int_x^{\pi/2} ((1+2\sin^2 t)/\sin^2 t)dt$	$\mathrm{cotg}\ x - 2x + \pi$
$\int_x^{-5/3} (3t+5)^4 dt$	$-\ 1/15\ (3x+5)^5$
$\int_0^x \sin^2 t\cos t\,dt$	$(\sin^3 t)/3$
$\int_4^\infty (1/(t^2\sqrt{t}))dt$	$1/12$
$\int_0^x e^{t^3}\,t^2\,dt$	$e^{x^3}/3 - 1/3$
$\int_0^x e^{\log t}\,dt$	$x^2/2$

A.9. Differentieer de volgende integralen

$\dfrac{d}{dx}\int_0^x (3t^2+5t-2)^n(6t+5)dt$	$(3x^2+5x-2)^n(6x+5)$
$\dfrac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} (t/\sqrt{1-t^2})dt$	$1/(2\sqrt{1-x})$
$\dfrac{d}{dx}\int_{-1/2}^{\mathrm{tg}x+\sin x} (2t+1)^3 dt$	$(1/\sin^2 x + \cos x)(2\mathrm{tg}x+2\sin x+1)^3$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{\log x}}^{0} \text{tgt}\ dt \qquad -\ (\text{tg}(\sqrt{\log x}))/(2x\ \sqrt{\log x})$$

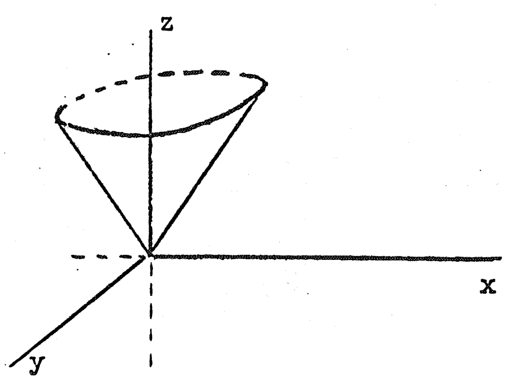
$$\frac{d}{dx}\int_{e^{-x}}^{e^{x}} \text{logt}\ dt \qquad x(e^{x}-e^{-x})$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} ((t^2-1)/(t^2+1))dt \qquad (\sqrt[3]{x^2}-1)/3(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2})\ +\ (x-1)/2(x\sqrt{x}+\sqrt{x})$$

A.7. Functies van meer variabelen.

In A.2 hebben wij alleen functies van één variabele beschouwd, die gedefinieerd waren op de reëele getallenrechte. Men zal echter wel bekend zijn met het feit dat er ook functies zijn van meer variabelen, die op een twee- of meer-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd worden. We geven als voorbeeld de kegel

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$



Bij de lineaire programmering komen we hypervlakken van de vorm

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

in een n-dimensionale ruimte tegen. Dit zijn bepaalde "waarden" van de functie

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

op een (n)-dimensionale ruimte.

Ook deze functies kan men differentiëren en integreren. Wij definiëren voor de functie $z = f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ de partiële afgeleide naar x_i $(i=1,2,\ldots,n)$

$$f'_{x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

Bij tweede (en hogere) afgeleiden kan men behalve

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial_{x_i}^2} = f''_{x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ook gemengde afgeleiden ontmoeten

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Men kan ook naar een variabele integreren

$$\int_a^b f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_i = F(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+},\ldots,x_n)$$

en dat herhaald toepassen

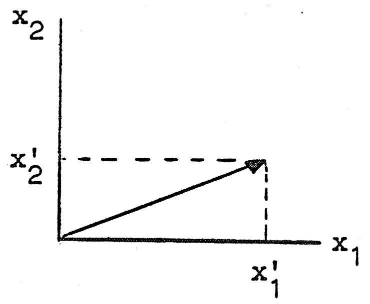
$$\int_e^h \ldots \int_c^d \int_a^b f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_i dx_j \ldots dx_k$$

A.8. Vectoren en matrices.

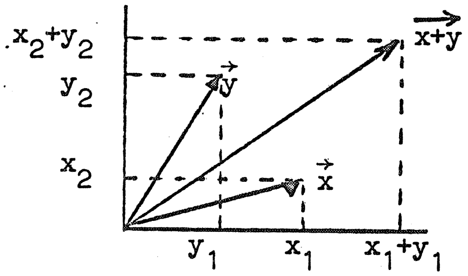
In A.7 zijn we functies van een rijtje van n variabelen x_i tegengekomen. In de praktijk is het als lastig ondervonden om zo'n rijtje bij iedere gelegenheid weer te moeten opschrijven. Daarom schrijft men voor $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nu $\vec{x}$ en we noemen dat een vector.*) Het zal duidelijk zijn dat met iedere vector $\vec{x}$ een punt in de n-dimensionale ruimte correspondeert, waarvan de coördinaten gegeven worden door $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

*) In de literatuur schrijft men vaak x i.p.v. $\vec{x}$

In het twee dimensionale geval kunnen we zo'n vector gemakkelijk tekenen.



Als we twee vectoren $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ willen optellen, dan tellen we de <u>componenten</u> x_i en y_i bij elkaar op en we krijgen de vector $\overrightarrow{x + y} = \vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$



Vermenigvuldigen we een vector x met een reëel getal α dan heeft dat tot gevolg dat alle componenten met α worden vermenigvuldigd. We definiëren nu een n-dimensionale <u>Euclidische</u> ruimte E^n als de verzameling van alle vectoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Voor deze vectoren zijn optelling en vermenigvuldiging met elk reëel getal gedefinieerd. Bovendien is aan elk paar vectoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ een niet negatief getal toegevoegd, de afstand genoemd, gegeven door

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)}$$

Denkt men niet in termen van vectoren maar in die van punten dan spreekt men van de <u>reële ruimte</u> $\mathbb{R}^n$.

Een belangrijke vector is de eenheidsvector E_i $(i=1,2,\ldots,n)$, dat is een vector, waarvan i^e component gelijk is aan 1 en de overige gelijk aan nul. We zeggen nu dat de n eenheidsvectoren E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ de n-dimensionale ruimte opspannen (zij zijn overigens de enige niet), hetgeen wil zeggen dat elke vector in de n-dimensionale ruimte als een lineaire combinatie $\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \ldots + \alpha_nE_n$ (α_i zijn reële getallen) geschreven kan worden. Meetkundig gezien liggen de eenheidsvectoren langs de assen van het coördinatenstelsel.

Een aantal, laat ons zeggen k, vectoren x_1, x_2, ..., x_k heet lineair onafhankelijk als er geen getallen α_i $(i=1,2,\ldots,k)$, die niet allemaal gelijk aan nul mogen zijn, bestaan zo dat geldt

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

De vector in het rechterlid is de nulvector met als componenten alleen nullen. Geldt het bovenstaande niet, dan heten die vectoren lineair afhankelijk, en dit houdt in dat minstens één der k vectoren als een lineaire combinatie van de andere geschreven kan worden. We merken op dat de eenheidsvectoren E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ lineair onafhankelijk zijn.

Een mxn matrix is een rechthoekig schema van reële getallen met m rijen en n kolommen; we duiden een matrix aan met een hoofdletter.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

Voorbeeld: een afstandstabel, zoals in menig agenda te vinden is, met de afstanden tussen de grote plaatsen in Nederland of Europa is een matrix.

De getallen a_{ii} $(i=1,2,\ldots,\min(m,n))$ - dus van "links-boven" naar "rechts-onder" - noemt men de hoofddiagonaal van een matrix.

We kunnen met matrices (en vectoren) operaties uitvoeren:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Zo'n som (of verschil) is dus alleen gedefinieerd als beide matrices A en B mxn matrices zijn. Is A een mxp matrix en B een pxn matrix, dan is het produkt de mxn matrix

$$A.B = C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Bij het produkt is ieder element in de nieuwe mxn matrix C de som van de produkten van de elementen uit een rij van de matrix A en uit een kolom van de tweede matrix B. Wordt een matrix A met een reëel getal α vermenigvuldigd, dan houdt dat in dat alle elementen a_{ij} van A met α worden vermenigvuldigd

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

De eenheidsmatrix I_m is een vierkante matrix - d.w.z. m = n - met op de hoofddiagonaal $i_{jj} = 1$ en overal elders $i_{jk} = 0$.

Er geldt nu voor een mxn matrix A

$$I_m.A = A$$
$$A.I_n = A$$

en als A ook vierkant(mxm) is

$$I_m.A = A.I_m = A$$

Als A een vierkante matrix is, kan men soms een vierkante matrix B vinden, waarvoor geldt

$$B.A = A.B = I$$

B heet de inverse van A, en men schrijft $B = A^{-1}$. Heeft de matrix A een inverse A^{-1}, dan noemt men A niet-singulier.

Een gespiegelde matrix C' van C wordt verkregen door die matrix om zijn hoofddiagonaal een halve slag te draaien:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & & & \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{mm} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = (c_{ij}) \qquad C' = (c_{ji})$$

Voor twee matrices C en D waarvoor het produkt gedefinieerd is geldt nu:

$$(C.D)' = D'.C'$$

Ook het produkt van een vector en een matrix bestaat. Men vat hiertoe de vector $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ op als een 1xn matrix. Deze vector kan dus vermenigvuldigd worden met een nxp matrix A als volgt

$$\vec{x}A = (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ip})$$

en dit is weer een vector,met p componenten.

Behalve de vectoren $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, die men rijvectoren noemt, bestaan er ook kolomvectoren

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ook hiervoor gaat het bovenstaande - in andere volgorde - op. Merk op dat een gespiegelde rijvector een kolomvector is.

Voorbeelden:

We kunnen nu de bijvoorwaarden in l.p.-problemen in matrix notatie geven:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \text{ wordt } A\vec{x} = \vec{b}$$

Hierin is A de mxn matrix met de coëfficiënten a_{ij}, $\vec{x}$ en $\vec{b}$ resp. de kolomvectoren

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

De afstandstabel tussen de plaatsen A, B en C is een vierkante 3x3 matrix, die symmetrisch kan zijn, d.w.z. $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{array}{ll} & \quad\text{naar} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{van} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 25 & 18 \\ 23 & 0 & 13 \\ 18 & 13 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Van de volgende voedingsmiddelen geven we in onderstaande matrix enkele van de voedingsstoffen die er in voorkomen (in frakties).

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccc} \text{brood} & \text{kaas} & \text{ham} & \text{jam} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{eiwitten} \\ \text{vet} \\ \text{koolhydraten} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}08 & 0{,}23 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}28 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}46 & 0 & 0 & 0{,}80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gebruikt men van brood, kaas, ham en jam de volgende hoeveelheden (in gr.)

$$\begin{array}{l} \text{brood} \\ \text{kaas} \\ \text{ham} \\ \text{jam} \end{array} \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

dan staat in de vector $\vec{b}$ resp. van boven naar beneden de totale hoeveelheid eiwitten, vet en koolhydraten.

$$\begin{bmatrix} 0{,}08 & 0{,}23 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}28 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}46 & 0 & 0 & 0{,}80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 14{,}4 \\ 12{,}6 \\ 54{,}0 \end{bmatrix}$$

Literatuur:

R.G.D. ALLEN, Mathematical economics, MacMillan, Londen.

F. GOBEL & J. v.d. LUNE, Leergang besliskunde dl.1, Mathematisch Centrum, Amsterdam

J.G. KEMENY, J.L. SNELL & G.L. THOMSON, Introduction to finite mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

APPENDIX B. STATISTIEK

B.1. Kansen.

In de besliskunde gebruikt men de wiskunde als beschrijvingstaal en zet men problemen uit de werkelijkheid om in wiskundige problemen. De verschijnselen, die men beschrijft, kunnen zodanig zijn, dat zij zich onder - voor ons - gelijke omstandigheden steeds hetzelfde voordoen. We spreken dan van verschijnselen van deterministische aard en beschrijven die met behulp van deterministische modellen. Een kenmerkende eigenschap van deterministische verschijnselen is dat ze gelegenheid bieden tot het doen van volkomen zekere (detail-) voorspellingen omtrent hun voorkomen. Uitspraken als "de maan komt morgen op om 23.19 uur" berusten op een deterministische modelbeschrijving. Er zijn echter ook verschijnselen, die geen zekere voorspellingen omtrent hun voorkomen toelaten. Men kent ze b.v. als "het weer van volgende week maandag", "het cijfer van een candidaat voor het tentamen besliskunde" of "de uitkomst van een worp met een dobbelsteen". Men beschrijft nu deze (stochastische) verschijnselen m.b.v. een model, waarvan onzekerheid een wezenlijk bestanddeel vormt. In deze modellen wordt gebruik gemaakt van de waarschijnlijkheidsrekening. Het meest in het oog springende praktische verschil met deterministische modellen is, dat men in de voorspellingen onzekerheid toelaat en die onzekerheid ook kwantificeert. In de regel vindt men dat terug in uitspraken van de vorm "het verschijnsel zal in de voorspelde vorm optreden behoudens een kans van 0,05", b.v. "In Hoek van Holland zal hoogwater de stand van 2,8 m. boven N.A.P. niet overschrijden behoudens een kans 0,1".
Beschouwen we het experiment "werpen met een dobbelsteen", en vragen we ons af hoeveel keren men een 6 zal gooien als men een aantal worpen doet. Het zal voor ieder, die zich wel eens met dit soort spelletjes heeft beziggehouden, een bekend feit zijn dat naarmate men meer worpen doet de verhouding tussen het aantal zessen en het totaal aantal worpen steeds meer naar een constante waarde (1/6) gaat. Een dergelijk verschijnsel doet zich ook voor bij b.v. geboorte- en sterftecijfers, wat o.a. een belangrijk gegeven is voor verzekeringsmaatschappijen. In de waarschijnlijkheidsrekening duidt men dit verschijnsel (ervaringsfeit) aan met de experimentele wet van de grote aantallen.

Laat gegeven zijn een experiment E (b.v. het werpen met een dobbelsteen) dat N maal wordt uitgevoerd. Zij S een willekeurige, mogelijke uitkomst van E (b.v. een zes)*) en N(S) het aantal malen dat die uitkomst in de N uitvoeringen van E voorkomt. We definiëren nu het frequentiequotient (afgekort: fq.) van S als

$$fq(S) = N(S)/N.$$

Voert men het experiment E een aantal malen N keer uit, dan ontstaan verschillende reeksen van N uitkomsten en voor ieder van die reeksen kan fq(S) een andere waarde aannemen. De experimentele wet van de grote aantallen leert ons nu dat voor grote waarden van N de verschillen tussen de onderscheiden fq(S) zeer klein worden.

Het begrip experiment gebruiken we in een zeer ruime betekenis en we vatten daaronder ook het doen van waarnemingen ofwel het trekken van steekproeven. Bij steekproeven heeft men te maken met populaties, dat zijn verzamelingen van individuen of objecten waarvan men bepaalde aspecten wil onderzoeken. Een steekproef is een deelverzameling van zo'n populatie, waarop waarnemingen worden verricht. De wijze, waarop een steekproef uit een populatie wordt getrokken is aan restricties onderhevig: het is geen willekeurige deelverzameling uit de populatie.

Belangrijk in de steekproeftheorie is het begrip aselecte trekking waarmee men aanduidt dat geen enkele vorm van selectie bij de trekking wordt toegestaan. Wanneer we b.v. aselect een lot uit een loterijtrommel trekken, dan betekent dat in concreto een trekking, die niet afhangt van het op het getrokken lot geschreven nummer. Bij het aselect trekken uit een willekeurige populatie, met een eindig aantal elementen, kan men zich voorstellen dat de elementen van die populatie genummerd worden en dat met behulp van een zuivere (of eerlijke) loterij een nummer aselect getrokken wordt. Hebben we b.v. een populatie met 6 elementen dan zal

---

*) Men duidt S ook wel aan met eventualiteit, een suggestieve benaming, die goed tot uitdrukking brengt dat het gaat om "een eventueel optredende gebeurtenis". Ook wordt de term kenmerk hier gebruikt.

men m.b.v. een zuivere dobbelsteen een aselecte trekking uit die populatie kunnen verrichten. Een zuivere loterij, die men gebruikt bij aselecte trekkingen heet ook wel een aselector.

Met het begrip aselect gewapend kunnen we een definitie geven van het begrip kans:

> Wordt uit een N-tal objecten, waarvan er N(S) het kenmerk S bezitten, één object aselect getrokken, dan kennen wij aan het optreden van kenmerk S de kans
>
> $$P(S) = N(S)/N$$
>
> toe.

Dit is de klassieke kansdefinitie van LAPLACE, aangevuld met de restrictie, dat aselect moet worden getrokken.

Daar men werkt met (deel-)verzamelingen van elementen uit een populatie die aan bepaalde kenmerken voldoen, kan men ook verzamelingsoperaties uitvoeren (zie A.1) en zodoende nieuwe kenmerken samenstellen.

Uit de kansdefinitie kan men eenvoudig de volgende stelling afleiden.
Stelling. B.1. Voor de kenmerken (eventualiteiten) $S_1, S_2, S_3, \ldots$ geldt bij aselecte trekking

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & 0 \leq P(S_i) \leq 1 & \\ (2) & P(S_i) = 0 & \text{als } S_i \text{ onmogelijk is} \\ (3) & P(S_i) = 1 & \text{als } S_i \text{ zeker is} \\ (4) & P(S_i \text{ of } S_j) = P(S_i) + P(S_j) - P(S_i \text{ en } S_j) & \end{array}\right\} \begin{array}{l} i,j = 1,2,3,\ldots \\ i \neq j \end{array}$$

Sluiten de kenmerken S_i en S_j elkaar uit, dan heten ze disjunct en we mogen (4) dan schrijven als:

$$(4') \qquad P(S_i \text{ of } S_j) = P(S_i) + P(S_j)$$

We geven nu nog enige definities m.b.t. kenmerken. We beschouwen een eindige verzameling (populatie) χ van N elementen x en een aantal kenmerken (eigenschappen) S_i ($i = 1,2,3,\ldots$). Ieder element bezit geen, één of meer van deze kenmerken. De kenmerken S_1, S_2, S_3, ... vormen op χ een exclusief systeem wanneer ieder element $x \in \chi$ hoogstens één kenmerk

S_i bezit. Bezit ieder element $x \in X$ precies één kenmerk S_i dan heet $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ op X een <u>categorisch systeem</u>.

Men kan eenvoudig verifiëren dat voor een categorisch systeem moet gelden

$$P(S_1 \text{ of } S_2 \text{ of } \ldots \text{ of } S_n) = 1 \text{ en } P(S_1 \ \& \ S_2 \ \& \ \ldots \ \& \ S_n) = 0$$

en voor een exclusief systeem,

$$P(S_1 \text{ of } S_2 \text{ of } \ldots \text{ of } S_n) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i), \text{ voor alle eindige } n.$$

Voor een oneindige rij kenmerken $S_1, S_2, S_3, \ldots$, die een exclusief systeem op X vormen, geven we als axioma

$$P(S_1 \text{ of } S_2 \text{ of } \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i) \qquad \text{(B.1)}$$

Behalve de zojuist ingevoerde kansen kennen we ook zogenaamde <u>voorwaardelijke kansen</u>. Hiermee bedoelen we kansen op een bepaalde eventualiteit onder de voorwaarde dat een andere eventualiteit ook optreedt. We beschouwen i.p.v. de gehele populatie dus een deelverzameling daarvan, en wel die waarvan alle elementen tenminste het in de voorwaarde genoemde kenmerk bezitten. Zo b.v. de kans op de eventualiteit A (= een uitkomst groter dan 3 bij het gooien met een dobbelsteen) onder de voorwaarde van eventualiteit B (= een even getal als uitkomst), met $P(B) > 0$, genoteerd als

$$P(A|B)$$

In het voorbeeld $P(A|B) = 2/3$.
Uit de definitie leiden we af

$$P(A|B) = N(A\&B)/N(B) = P(A\&B)/P(B), \qquad P(B) > 0.$$

We krijgen voor voorwaardelijke kansen de volgende stelling.
<u>Stelling</u>. B.2. Indien $P(B) > 0$, dan geldt

(1) $0 \leq P(A|B) \leq 1$

(2) $P(A|B) = 0$ als $A|B$ onmogelijk is

(3) $P(A|B) = 1$ als $A|B$ zeker is

(4) $P(A_1 \text{ of } A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \& A_2|B)$

(5) $P(A_1 \text{ of } A_2 \text{ of } A_3 \text{ of } \ldots |B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$, als $A_1, A_2, \ldots$ een exclusief systeem is op de deelverzameling van χ, waarvan alle elementen tenminste kenmerk B bezitten.

Uit de formule voor de voorwaardelijke kansen kan men de zogenaamde produktregel afleiden:

$$P(A \& B) = P(A|B).P(B).$$

in bijzondere gevallen geldt $P(A|B) = P(A)$, zodat de produktregel dan wordt

$$P(A \& B) = P(A).P(B). \qquad (B.2)$$

Wanneer A en B aan (B.2) voldoen zeggen we dat A en B stochastisch onafhankelijk (kortweg: onafhankelijk) zijn. Kennis betreffende de ene eventualiteit verschaft ons dan geen enkele informatie omtrent de andere eventualiteit. Zijn twee eventualiteiten niet stochastisch onafhankelijk, dan heten zij stochastisch afhankelijk.

B.2. Stochastische grootheden en verdelingen.

Tot nu toe hebben wij over uitkomsten, kenmerken en eventualiteiten gesproken en die aangeduid met hoofdletters. Daarmee werden concrete kenmerken als rood, groen, blauw of 1,2,3,4,5,6 etc. aangeduid. We kunnen ook in verzamelingtheoretische termen spreken en zeggen dat we onder een eventualiteit verstaan het feit dat een getrokken element x uit een populatie χ behoort tot een deelverzameling $V \subset \chi$ met een zeker kenmerk.

In het vervolg zullen we aannemen dat de verzameling χ bestaat uit reële getallen, en dat we deelverzamelingen V daarvan beschouwen die intervallen zijn, of die zijn verkregen uit operaties met intervallen. We definiëren een stochastische grootheid $\underline{x}$ (onderstreept!) als een grootheid, die bij een experiment verschillende reële waarden kan aannemen. Bovendien moet voor ieder reëel getal $x \in \chi$, de kans dat $\underline{x}$ een waarde aanneemt die hoogstens daaraan gelijk is, dat is

$$P(\underline{x} \in (-\infty, x]) = P(\underline{x} \leq x),$$

gedefinieerd zijn. De term stochastische grootheid kort men ook wel af tot stochast.

Voorbeelden van stochasten zijn: het aantal zessen ($\underline{n}$) bij N worpen met een dobbelsteen, het aantal worpen met een munt ($\underline{m}$) tot voor het eerst kruis verkregen wordt en de levertijd ($\underline{l}$) van een uitgegeven order.

De kansverdeling van een stochast $\underline{x}$ is de verzameling van alle waarden x, die $\underline{x}$ kan aannemen, met de bijbehorende kansen $P(\underline{x} \leq x)$. De verdelingsfunctie van $\underline{x}$ is de functie

$$F(x) = P(\underline{x} \leq x).$$

Uit deze definitie, en stelling B.1 en het axioma (B.1) volgt o.a. dat F(x) een monotoon niet-dalende functie is. Bovendien geldt

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

terwijl

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Discrete kansverdelingen zijn kansverdelingen waarbij de beschouwde stochast een eindig of aftelbaar aantal waarden x_1, x_2, x_3, ... kan aannemen en waarbij

$$P(\underline{x} = x_i) > 0 \qquad \text{en} \qquad \sum_i P(\underline{x} = x_i) = 1 .$$

De verdelingsfuncties, die hierbij behoren zijn trapfuncties

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\underline{x} = x_i) .$$

We geven enige voorbeelden van discrete kansverdelingen:

1. de <u>alternatieve verdeling</u>, met parameter $p \in (0,1)$

$$P(\underline{x} = 0) = p \qquad P(\underline{x} = 1) = 1 - p$$

2. de <u>binomiale verdeling</u>, met parameters $n > 0$ en geheel en $p \in (0,1)$

$$P(\underline{x} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (K = 0,1,2,\ldots,n;\ q = 1 - p)$$

3. de <u>Poisson-verdeling</u>, met parameter $\lambda > 0$

$$P(\underline{x} = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

4. de <u>discrete homogene verdeling</u>, met parameter $n > 0$ en geheel

$$P(\underline{x} = k) = 1/(n+1) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n)$$

<u>Continue kansverdelingen</u> zijn kansverdelingen, waarbij de stochast een continuum van waarden (b.v. alle reële getallen of een interval daaruit) kan aannemen, terwijl de verdelingsfunctie $F(x)$ voor elke x continu is en voor alle x (op hoogstens een eindig aantal na) een continue eerste afgeleide bezit.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

$f(x)$ is die afgeleide en heet de <u>verdelingsdichtheid</u>. Uit stelling B.1 en axioma (B.1) is af te leiden

$$P(x_1 < \underline{x} \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt$$

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$P(\underline{x} = x) = 0 \qquad \text{voor alle } x.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

We geven ook enkele voorbeelden van continue verdelingen:

5. de <u>(continue) homogene verdeling</u>, met parameters a en b > a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

6. de <u>normale $N(\mu,\sigma^2)$ verdeling</u>, met parameters $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\, dt$$

7. de <u>gamma $\Gamma(\alpha.\sigma)$ verdeling</u>, met parameters α, $\sigma > 0$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t/\sigma}\, dt \qquad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

8. <u>de exponentiële verdeling</u>, met parameter $\lambda > 0$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

(dit is een $\Gamma(1,1/\lambda)$ verdeling).

Behalve de hier getoonde één-dimensionale kansverdelingen bestaan er ook meer-dimensionale kansverdelingen, die men ook wel simultane kansverdelingen noemt. Bijvoorbeeld de twee-dimensionale normale verdeling

$$F(x,y) = P(\underline{x} \leq x \,\&\, \underline{y} \leq y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{t-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\,\frac{t-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{s-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{s-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right\}} dtds$$

We zullen hier niet verder op deze verdelingen ingaan.

Evenals we voor eventualiteiten (stochastische) onafhankelijkheid gedefinieerd hebben kunnen we dat ook doen voor stochasten. Een aantal stochasten $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ..., $\underline{x}_n$ zijn (stochastisch) onafhankelijk wanneer zij een simultane kansverdeling hebben die voldoet aan

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F_1(x_1).F_2(x_2). \ldots F_n(x_n)$$

F_i is de zogenaamde marginale kansverdeling van x_i.

Hieruit volgt in het twee-dimensionale geval voor onafhankelijke $\underline{x}$ en $\underline{y}$

$$P(\underline{x} \leq x \ \& \ \underline{y} \leq y) = P(\underline{x} \leq x).P(\underline{y} \leq y)$$

en dus, als $P(\underline{y} \leq y) > 0$

$$P(\underline{x} \leq x | \underline{y} \leq y) = P(\underline{x} \leq x)$$

B.3. Verwachtingen en andere momenten.

Zo goed als men in de mechanica m.b.v. traagheidsmomenten een constructie en in de beschrijvende statistiek m.b.v. gemiddelden en spreidingen steekproeven karakteriseert, zo goed zijn er ook zekere grootheden, die de ligging en de vorm van kansverdelingen karakteriseren.

We definiëren de (mathematische) verwachting voor discreet verdeelde stochastische grootheden. Zij $\underline{x}$ een discreet verdeelde stochast die de waarden x_1, x_2, x_3, ... aan kan nemen met kansen

$$P(\underline{x} = x_i) = p_i \qquad \sum_i p_i = 1$$

dan luidt de verwachting van $\underline{x}$, aangeduid met $\mathcal{E}\underline{x} = \mu$

$$\mathcal{E}\underline{x} = \sum_i x_i p_i$$

Voor een continu verdeelde stochastische grootheid $\underline{x}$ met kansdichtheid $f(x)$ is de verwachting

$$\mathcal{E}\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Deze formules zullen - terecht - associaties oproepen met het gemiddelde uit een aantal waarnemingen. Dit wordt nog sterker als we ons een discreet verdeelde stochast $\underline{x}$ voorstellen, die de waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ met gelijke kansen kan aannemen. Dan is de verwachting

$$\mathcal{E}\,\underline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

We kunnen het begrip verwachting generaliseren en krijgen dan de momenten. Het k^e moment van een stochast $\underline{x}$ is de verwachting van $\underline{x}^k$ (indien die verwachting bestaat). De notatie hiervoor is

$$\mu_k = \mathcal{E}\,\underline{x}^k = \sum_i p_i x_i^{\,k} \qquad \text{voor discreet verdeelde } \underline{x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \qquad \text{voor continu verdeelde } \underline{x}$$

Ook van andere functies van x, dan alleen bovenstaande machten kan men de verwachting berekenen (zo die bestaat). Zij gegeven een functie $\phi(x)$ van $\underline{x}$, dan is

$$\mathcal{E}\,\phi(\underline{x}) = \sum_i p_i \phi(\underline{x}_i) \qquad \text{voor discreet verdeelde } \underline{x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx \qquad \text{voor continu verdeelde } \underline{x}$$

Naast de hier genoemde momenten kent men ook de gereduceerde momenten. Het k^e gereduceerde moment van een stochast $\underline{x}$ is de verwachting van $(\underline{x} - \mathcal{E}\,\underline{x})^k$. Het tweede gereduceerde moment is de variantie $\sigma^2(\underline{x})$.

$$\sigma^2(\underline{x}) = \mathcal{E}\,(\underline{x} - \mathcal{E}\,\underline{x})^2 = \mathcal{E}\,\underline{x}^2 - (\mathcal{E}\,\underline{x})^2$$

De wortel uit de variantie heet de spreiding of standaardafwijking van $\underline{x}$.

De verwachting is een lineaire operator, d.w.z. er gelden de volgende rekenregels

(1) $\mathcal{E}\,c.\phi(\underline{x}) = c\,\mathcal{E}\,\phi(\underline{x})$

(2) $\mathcal{E}(\phi(\underline{x}) \pm \psi(\underline{x})) = \mathcal{E}\phi(\underline{x}) \pm \mathcal{E}\psi(\underline{x})$

Vergelijk dit met de rekenregels voor differentiëren en integreren!

In de volgende tabel staan de verwachting en de variantie van enige van de hiervoor genoemde verdelingen vermeld. Van de overige verdelingen wordt bij de opgaven gevraagd deze te berekenen.

Tabel B.1. Enkele verwachtingen en varianties.

Verdeling	parameters	verwachting	variantie
binomiale verdeling	n,p	$n.p$	$n.p.q$
Poisson verdeling	λ	λ	λ
Normale verdeling	μ,σ^2	μ	σ^2
$\Gamma(\alpha,\sigma)$ verdeling	α,σ	$\alpha\sigma$	$\alpha\sigma^2$

Opgaven

B.1. Bereken de verwachting en variantie van de verdelingen 1, 4, 5 en 8 uit deze paragraaf. *)
(antw. resp. p, pq; $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{12}n(n+2)$; $\frac{1}{2}(b+a)$, $\frac{1}{12}(b-a)^2$; $1/\lambda$, $1/\lambda^2$)

B.2. Bereken de volgende verwachtingen:

$\mathcal{E}\underline{x}^2$ met $P(\underline{x} = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$; $0 \leq x \leq n$ (antw. $n^2p^2 + npq$)

$\mathcal{E}\underline{x}^2$ met $f(x) = \mu e^{-\mu(x-p)}$; $p \leq x < \infty$ ($p^2 + 2p/\mu + 2/\mu^2$)

$\mathcal{E}g(\underline{x})$ met $g(x) = x^2 + 3ax + 5$, $P(\underline{x} = x) = \mu^x e^{-\mu}/x!$; $x = 0,1,2,\ldots$ ($\mu^2 + (3a+1)\mu + 5$)

$\mathcal{E}g(x)$ met $g(x) = |x - 5|$, $f(x) = 1/20$; $0 \leq x \leq 20$ (6,25)

*) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

B.4. Nogmaals aselect.

In B.1 hebben we het kansbegrip ingevoerd via het begrip aselect en de - enigszins gewijzigde - kansdefinities van LAPLACE. Daaruit was stelling B.1 af te leiden. Er is ook een andere mogelijkheid om kansen in te voeren en die zullen we nu belichten. We gaan uit van stelling B.1 en nemen de daar genoemde eigenschappen aan als axioma's.

(1) $0 \leq P(S_i) \leq 1$

(2) $P(S_i) = 0$ als S_i onmogelijk is

(3) $P(S_i) = 1$ als S_i zeker is

(4) $P(S_i \text{ of } S_j) = P(S_i) + P(S_j) - P(S_i \;\&\; S_j)$ $(i,j = 1,2,3,\ldots\,;\, i = j)$

en

(5) $P(S_1 \text{ of } S_2 \text{ of } \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$ als $S_1, S_2, S_3, \ldots$ een exclusief systeem vormen.

Een verzamelingsfunctie *) P, die aan deze axioma's voldoet noemen we kans. De kansdefinitie is nu als stelling uit de axioma's af te leiden. De voorgaande theorie blijft geheel gelijk.

Stellen we ons nu voor dat we een loterij hebben met 10 briefjes, waarbij op ieder briefje precies één, niet op een ander briefje voorkomend, cijfer uit de verzameling {0,1,2,...,9} geschreven staat. Trekken we aselect een briefje uit die loterij, dan wil dat zeggen, dat ieder van de cijfers 0,1,2,...,9 gelijke kans heeft om getrokken te worden.

$$P(\underline{x} = j) = 1/10 \quad \text{of:} \quad F(j) = \sum_{i=0}^{j} P(\underline{x} = i) = (j+1)/10 \quad j = 0,1,2,\ldots,9$$

Dit is de kansverdeling van de discrete homogene verdeling (n = 9). Hebben we een proces (b.v. een loterij) dat aselecte (onafhankelijke)

---

*) Met een verzamelingsfunctie bedoelen we hier een voorschrift dat aan elke verzameling behorende tot het "domein" van die functie een reëel getal toevoegt.

trekkingen uit bovenstaande verdeling als uitkomst aflevert, dan noemen we die uitkomsten <u>aselecte cijfers</u>.

We kunnen i.p.v. 10 briefjes met de cijfers 0,1,2,...,9 evengoed 10 briefjes met de getallen 0,0; 0,1; 0,2; ...; 0,9 nemen of 1000 briefjes met de getallen 0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999. In het laatste geval vermindert de kans op trekking voor ieder individueel getal; de eigenschap van gelijke kansen (aselect) blijft echter bestaan. We generaliseren dit en nemen daartoe de homogene (0,1) verdeling:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Wanneer nu een proces uitkomsten aflevert, die aselecte (onafhankelijke) trekkingen uit deze verdeling voorstellen, dan spreekt men van <u>aselecte getallen</u>. Theoretisch zijn dat oneindig voortlopende breuken; in de praktijk zal men zich bij het gebruik van aselecte getallen tot een vrij klein aantal decimalen beperken (bijv. 4) en werkt men dus eigenlijk met een discrete homogene verdeling. Om niet iedere keer, dat men ze nodig heeft aselecte getallen te moeten loten heeft men tabellen van reeds uitgevoerde "lotingen" samengesteld.

Literatuur

J.R. McCORD & R.M. MORNEY, Inleiding tot de waarschijnlijkheidsleer, Aula pocket, Utrecht.

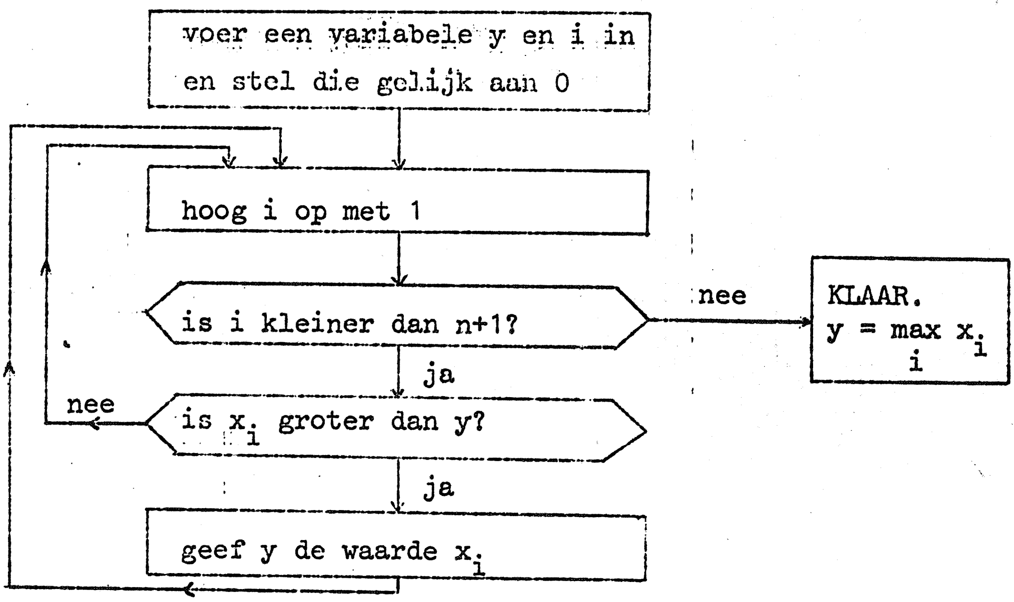
J. HEMELRIJK & J. KRIENS, Leergang besliskunde dl. 2, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

M.L. WYVEKATE, Verklarende statistiek, Aula pocket, Utrecht.

APPENDIX C. STROOMSCHEMA'S

Een stroomschema is een welkom hulpmiddel voor het weergeven van reken-technische procedures en processen. Vooral bij het voorbereiden van programma's voor rekenautomaten wordt er veel gebruik van gemaakt. Een dergelijk schema geeft beter en sneller een inzicht in de te onderzoeken materie dan een zuiver verbale beschrijving.

Onder een stroomschema zullen wij verstaan een geordende verzameling van een aantal symbolen, en wel rechthoeken, zeshoeken *) en cirkels, die verbonden worden door pijlen. In de rechthoeken, zeshoeken en cirkels is een korte samenvattende tekst geplaatst, die de plaats en de betekenis van dat symbool in het schema verklaart. Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Stel dat we van een aantal (n) positieve getallen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ het grootste getal willen bepalen. Dan zouden we te werk kunnen gaan als in onderstaand schema.



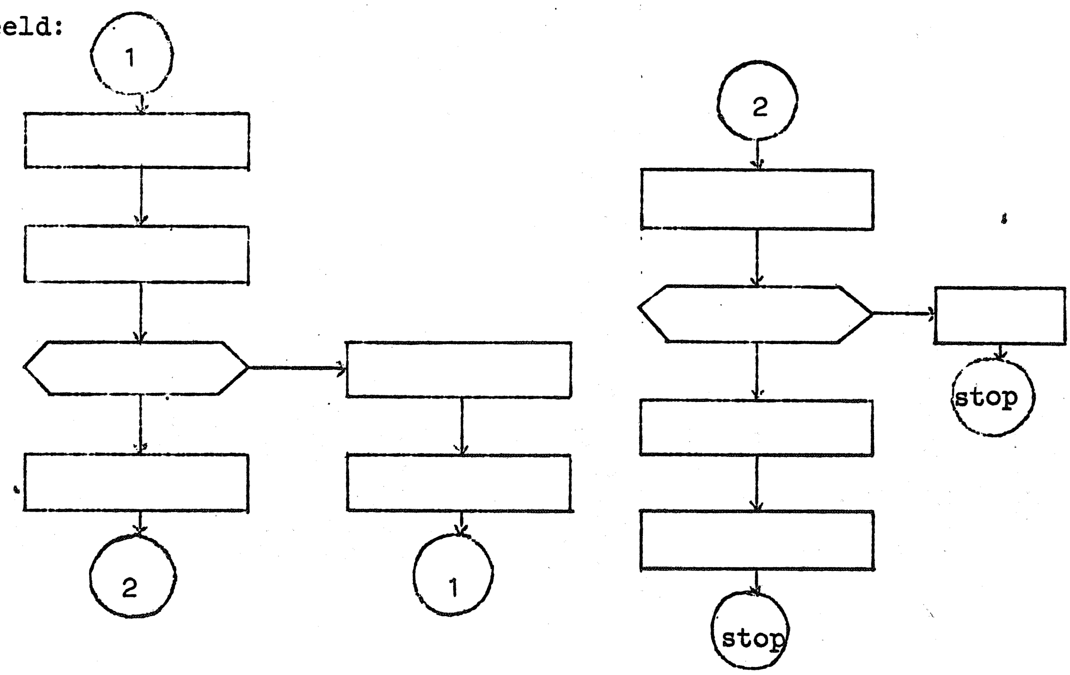
Zoals uit dit schema blijkt stelt men m.b.v. de rechthoeken (met hoogstens één ingangs- en één uitgangspijl) bewerkingen voor; in het bijzonder rekenkundige bewerkingen. De zeshoeken (met één ingangs- en

---

*) I.p.v. zeshoeken worden ook wel ruiten gebruikt.

minstens twee uitgangspijlen) worden gebruikt voor toetsingen, die van belang zijn voor de voortgang en/of de richting van het proces. De pijlen lopen in het algemeen van boven naar beneden, tenzij een "loop" (= rondgang) in het proces voorkomt: de pijlen lopen dan van beneden naar boven terug naar het uitgangspunt van de loop. Bij de zeshoeken komen ook horizontale pijlen voor. De cirkels, ook connectoren geheten, (met slechts één ingangs- of uitgangspijl) zijn in het voorbeeld nog niet gebruikt; zij komen bij meer uitgebreide schema's voor en maken het mogelijk het schema ergens af te breken en ergens anders weer voort te zetten (b.v. bij schema's, die meerdere bladzijden in beslag nemen). Ten behoeve van het terugvinden van de aansluitpunten worden de cirkels genummerd. Ook gebruikt men connectoren wel aan het begin en/of het einde van een stroomschema, met daarin resp. vermeld start en stop.

Voorbeeld:



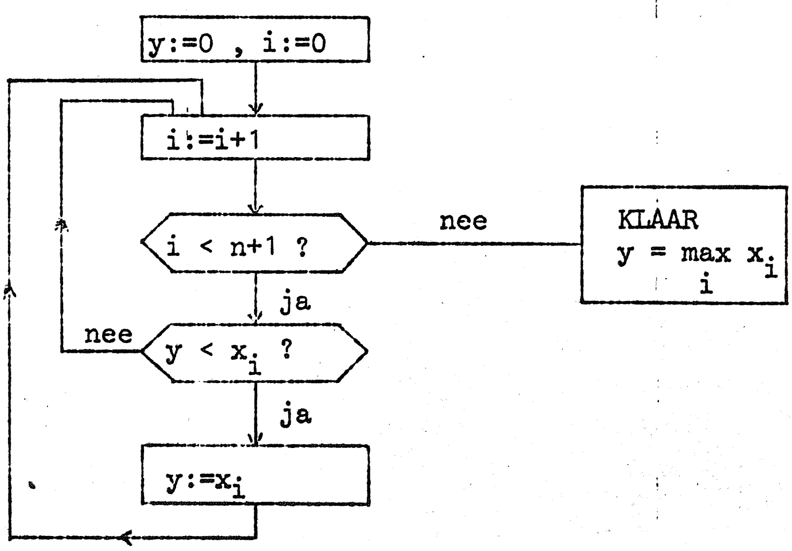
Het aantal symbolen, dat bij stroomschema's gebruikt kan worden is, vooral onder invloed van het gebruik bij de beschrijving van administratieve procedures, groter dan wij hier hebben aangenomen. In de meeste boeken over programmering van rekenautomaten vindt men een uitgebreide verzameling met toelichting omtrent het gebruik.

Ten behoeve van een korte omschrijving binnen de symbolen voeren we nog de volgende notaties in, die zoveel mogelijk afgeleid zijn van normale wiskundige notaties.

verbale omschrijving:	notatie:
y wordt x, of: y krijgt de waarde x	y:=x
hoog i met 1 op (= i krijgt de waarde i+1)	i:=i+1

en verder de gebruikelijke wiskundige notaties.

Met gebruik van deze notaties wordt het schema voor het eerste voorbeeld:



Om de duidelijkheid te vergroten gebruikt men voor de variabelen ook wel suggestieve namen (zie o.a. hoofdstuk 2).

Literatuur

D.W. McCRACKEN, H. WEISS, TSAI-HWA LEE, Programming Business Computers, New York.

R.W. STARREVELD, Administratieve Techniek dl. 2, Alphen a.d. Rijn.