

OVERDRUK

E U C L I D E S

Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte vakken
onder leiding van Dr H. Mooy, Dr H. Streefkerk,
Dr J. Wansink en J. Willemse

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

WISKUNDIGE CONSULTATIE IN DE PRACTIJK ¹⁾

door

Prof. Dr D. VAN DANTZIG

Met bijzonder veel genoegen heb ik gevolg gegeven aan de uitnodiging, door Uw Bestuur tot het Mathematisch Centrum gericht, U een beeld te geven (dat natuurlijk tengevolge van de beperkte tijd slechts globaal en oppervlakkig kan zijn) van de wijze, waarop wiskundige problemen welke oplossing voor andere wetenschapsgebieden of het bedrijfsleven nodig is, door ons behandeld worden. Immers, niet slechts is deze uitnodiging vererend voor het Mathematisch Centrum, maar vooral is belangrijk, dat de daaruit sprekende wens, het wiskunde-onderwijs opnieuw te oriënteren op de behoeften der hedendaagse praktijk, niet anders dan dit onderwijs ten goede kan komen.

Laat mij beginnen, U een overzicht te geven van de structuur van het Mathematisch Centrum. Het is een stichting, gesubsidieerd door het Rijk, t.w. de organisaties Z.W.O. en T.N.O., door de Gemeente Amsterdam, en, voor een klein deel, door het bedrijfsleven. De subsidiërende lichamen zijn alle vertegenwoordigd in het Curatorium aan welks goedkeuring de jaarlijkse begroting en andere belangrijke beslissingen onderworpen zijn, terwijl de dagelijkse leiding berust bij de Raad van Beheer, bestaande uit de Directeur en drie leden, allen hoogleraren.

Het Mathematisch Centrum bestaat uit vier afdelingen: voor zuivere wiskunde (Z), toegepaste wiskunde (T), statistiek (S) en numerieke wiskunde (R). De werkzaamheid van elk dezer afdelingen is deels van educatieve, deels van consultatieve, deels van zuiver wetenschappelijke aard.

De educatieve taak bestaat in het houden of organiseren van cursussen en voordrachten, vaak in samenwerking met andere organisaties, zowel voor wiskundigen van professie, als ook voor onderzoekers op andere gebieden, die hun kennis van bepaalde delen der wiskunde willen vermeerderen. Voorts omvat deze de opleiding van studenten en afgestudeerden in een aantal speciale richtingen. De wetenschappelijke werkzaamheid bestaat o.a. in het oplossen van

¹⁾ Voordracht, gehouden op 2 Januari 1954 voor de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie. Rapport S127 (V4) van het Mathematisch Centrum.

problemen, door een afdeling op eigen initiatief gesteld, die van wetenschappelijke betekenis zijn. Zoals gezegd, beperkt deze wetenschappelijke werkzaamheid zich geenszins tot de afdeling Z. Over de consultatieve taak zal ik zo aanstonds uitvoeriger spreken.

Zijn adviserende taak voert het Mathematisch Centrum uit ten behoeve van wetenschappelijke instellingen (b.v. universiteitslaboratoria, overheidsinstellingen, e.d.), individuele wetenschappelijke onderzoekers (b.v. promovendi), en het bedrijfsleven.

De gevraagde adviezen zijn van zeer uiteenlopende aard. Soms kan een gestelde vraag direct beantwoord worden, of kunnen met behulp van in het Centrum aanwezige kaartsystemen direct plaatsen in de literatuur aangegeven worden, waar het antwoord te vinden is. In de meeste gevallen echter hebben de onderzoekers die zich om een advies tot ons wenden hun probleem reeds te grondig bekeken, dan dat op zo eenvoudige wijze een antwoord gegeven zou kunnen worden.

De opdrachten, die massaal rekenwerk van een eenvoudig type inhouden, en waaraan dus in wiskundig opzicht weinig interessants te ervaren valt, buiten beschouwing latende, vermelden we vooreerst een groep van opdrachten, die vooral bij de Rekenafdeling binnenkomen, waarbij het voorbereidende wiskundige werk reeds verricht is, en uitsluitend de numerieke oplossing van een probleem gevraagd wordt. Om een denkbeeld te geven van de aard dezer problemen vermelden we er een, dat betrekking heeft op het bepalen van de stralingsdruk in het inwendige van sterren van een bepaald type. Daartoe moesten voor $n = 1$ en $n = 2$ de integralen

$$E_n(y) = 2 \int_0^\infty e^{-nx^2} k_2(ye^{-x^2}) dx$$

waarin

$$k_2(z) = \int_1^\infty e^{-zw} \frac{dw}{w^2} = e^{-z} + z \operatorname{Ei}(-z)$$

op eenvoudige wijze in getabelleerde functies uit te drukken is, voor een dertigtal waarden van y berekend worden.

Vervolgens moest uit

$$P_n(\sigma) = \int_1^\sigma (J(\sigma + y) - J(\sigma - y)) E_n(y) dy + \int_\sigma^{\sigma_m - \sigma} J(\sigma + y) E_n(y) dy$$

waarin σ_m een gegeven constante en $P_n(\sigma)$ (op een gegeven constante factor na) een gegeven functie van σ is, voor $n = 1$ de onbekende functie $J(x)$ berekend en in dezelfde uitdrukking voor $n = 2$ gesubstitueerd worden; de functie $P_2(\sigma)$ was de gevraagde.

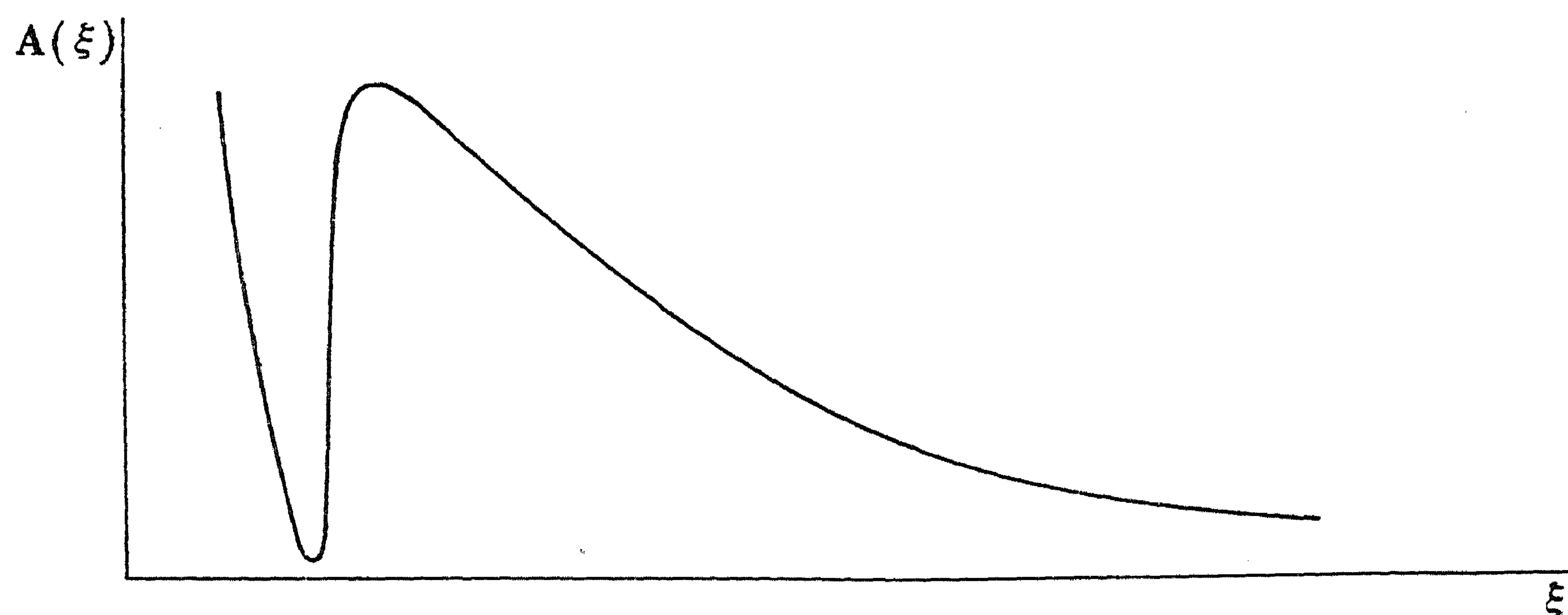
Als onderdeel van een ander probleem, dat op het gebied der

quantum-mechanica ligt, moest de niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{1}{A(\xi)^3} - \left(1 - \frac{l(l+1)}{\xi^2} + \frac{a}{\xi^6} - \frac{b}{\xi^{12}}\right) A(\xi),$$

voor een aantal waarden der parameters l , a en b numeriek geïntegreerd worden, met de „beginvoorwaarde” $\lim_{\xi \rightarrow \infty} A(\xi) = 1$. Voor sommige waarden der parameters deed zich hierbij de omstandigheid voor, dat de functie $A(\xi)$ na (van rechts komende) eerst sterk gestegen te zijn, plotseling zeer snel ging dalen, tot waarden van de orde van 10^{-7} toe. Het scheen daardoor, alsof er voor een onbekende waarde van ξ een singulariteit zou optreden.

Met behulp van een eenvoudige approximatie kon echter aangetoond worden, dat de functie nog net voor de ξ -as bereikt te hebben, scherp rechtsomkeert maakt (met een $A''(\xi)$ van de orde van 10^{21} !), waarna de integratie weer gewoon kan worden voortgezet.



Het is duidelijk, dat een dergelijk merkwaardig verloop van de kromme grote zorg vereist bij de bepaling van de nauwkeurigheid, waarmede men stap voor stap voortschrijdt. De numerieke oplossing van dit probleem vindt thans plaats met behulp van de in het laboratorium van het Mathematisch Centrum geconstrueerde „ARRA” (= Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam).

Naar aanleiding van deze en dergelijke problemen wil ik een opmerking maken, die het fundamentele verschil tussen de formele en de numerieke wiskunde in het oog stelt, en die daarom ook voor het elementaire onderwijs van belang is.

Men kan een irrationeel getal, zij het een „eenvoudig” getal als $\sqrt{2}$ of ook e of π zij het gecompliceerd als b.v. de boven gedefinieerde functie $E_2(y)$ voor $y = 1$ op tweeërlei wijzen beschouwen: hetzij formeel, hetzij numeriek. In het eerste geval kan men uitsluitend

met behulp van de definitie van het getal formele relaties tussen dit getal en andere opstellen. B.v. $(\sqrt{2})^2 = 2$, $e^{i\pi} = -1$,

$$E_2(1) = 2 \int_0^\infty e^{-2x^2} \left(\int_1^\infty e^{-wx} e^{-x^2} \frac{dw}{w^2} \right) dx$$

In het tweede geval wenst men het beschouwde getal tussen de rationale getallen te rangschikken. Dan kan men het echter *uitsluitend* met een voorgeschreven *eindige* graad van nauwkeurigheid bepalen. Zodra men dit echter werkelijk gaat doen, vervallen alle limietbeschouwingen. Vandaar dat de numerieke wiskunde geen principieel verschil kent tussen een integraal en een benaderende som, of tussen een convergente oneindige reeks en een voldoende groot beginsegment, tussen een differentiaalvergelijking en een differentievergelijking, ja zelfs tussen een rationaal en een irrationaal getal. In de numerieke wiskunde wordt voor het eersternst gemaakt met het finitistische beginsel, dat ook aan de zogenaamde „intuitionistische” wiskunde ten grondslag ligt, die bij Brouwer in de inconsequentie van de erkenning van een principieel verschil tussen het eindige en het oneindige is blijven steken, een feit, waarop Mannoury reeds in 1907 gewezen heeft. Het heeft geen enkele reële betekenis, $\aleph_0$ „oneindig” en $10^{10^{100}}$ „eindig” te noemen, en evenmin, te vragen welk getal dan het laatste „eindige” getal is of te „bewijzen” dat $10^{10^{100}}$ toch werkelijk „groter” is dan $10^{10^{100}}$. Al deze „symbolen” hebben slechts „boekhoudkundige” betekenis, zonder „reële balanswaarde”. Het is hier echter niet de plaats, uitvoeriger op deze kwestie in te gaan.

Bij vele andere problemen is samenwerking van de Rekenafdeling met andere afdelingen nodig. Bij voorbeeld stuitten de Nederlandse Spoorwegen op een stabiliteitsprobleem, dat wiskundig neerkwam op de vraag, onder welke voorwaarden de wortels van een zesdegraadsvergelijking, welker coëfficiënten veeltermen in 5 parameters waren, een negatief imaginair gedeelte bezitten. Deze vraag werd door Dr H. J. A. Duparc van de afdeling Z opgelost met behulp van eigenschappen van algebraïsche krommen, waarna de heren J. A. Zonneveld en Drs J. Berghuis en de rekenaarsters van de afdeling R een aantal typerende gevallen konden doorrekenen.

Ook komt het dikwijls voor, dat aan de afdelingen T en S problemen voorgelegd worden, waarvoor aldaar een oplossingsmethode wordt aangegeven, en die dan ten slotte door de afdeling R wordt uitgevoerd. Bij de afdeling T geschiedde dit bij voorbeeld met enkele problemen, afkomstig van de Waterleidingen, die betrekking hadden op het zoetwaterreservoir dat zich in en onder de duinen bevindt,

en met berekeningen, uitgevoerd door Drs T. C. Braakman en Drs G. W. Veltkamp van de getijdebewegingen op de beneden-rivieren, afkomstig van de Δ -commissie. Ook komen wel problemen voor, waarbij uitsluitend de afdeling Z betrokken is. Zo werd b.v. door de N.V. Philips gevraagd, te onderzoeken, of een vermoeden van Prof. Tellegen juist was, dat betrekking had op het bestaan van reële oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen met complexe coëfficiënten, dat aan bepaalde voorwaarden voldeed, een vermoeden dat ontstaan was bij de studie van bepaalde elektrische netwerken, en ook voor het voortgezette onderzoek daarvan van belang, en waarvan de juistheid inderdaad door Dr H. J. A. Duparc, Drs C. G. Lekkerkerker en Dr W. Peremans bewezen kon worden.

Terwijl de tot dusverre genoemde problemen nog voor het grootste deel tot de „gewone wiskunde” behoren, met name tot de klassieke analyse, hebben de aan de afdeling S gestelde vragen doorgaans een geheel ander karakter. Bovendien bestrijken zij een veel groter gebied van het wetenschappelijk en maatschappelijk leven, en worden zij vaak gesteld door onderzoekers, die een veel geringere wiskundige scholing bezitten.

Behalve het klassieke toepassingsgebied, de levensverzekeringswiskunde, en het tegenwoordig algemeen bekende gebied van de industriële kwaliteitscontrôle zijn het hier vooral de medisch-biologische wetenschappen en de econometrie, met verwante vakken als de schadeverzekering, van waar uit statistische en waarschijnlijkheidstheoretische problemen toestromen.

Om U enig denkbeeld te geven van de diversiteit van gebieden, waarin tegenwoordig wiskunde wordt toegepast, kies ik, vrij willekeurig, een aantal uit de honderden onderwerpen waarover de laatste jaren door de verschillende afdelingen van het Mathematisch Centrum rapporten zijn uitgebracht.

- Mathematische scheepsvormen;
- Afscheiding van 17-ketosteroiden;
- Seismische golven;
- Functies voor een levensverzekeringsmaatschappij;
- Cariës-onderzoek;
- Stabiliteitskrommen van rijwielen;
- Vormverandering van lagervlakken tengevolge van druk in de olielaag;
- Groeiproeven met Wistar-ratten;
- Trillende vleugel in subsone stroming;
- Verdampingssnelheid van vloeistofdruppels;

Regeneratievermogen van poliepen;
 Groeiproeven met kuikens;
 Keuring van thermometers;
 Veneuze druk bij de gezonde mens;
 Verdelgingsmiddelen voor kakkerlakken;
 Schoolbezoek in Suriname;
 Invloed van ergotamine op de aciditeit van het maagsap;
 Invloed van het gebruik van spreekuurbriefjes op het verzuim
 van spreekuurbezoek;
 Getijdenberekeningen;
 Invloed van regen en temperatuur op roggeopbrengst;
 Physiologisch trainingsonderzoek;
 Cholesterolgehalte in voeding en bloedserum;
 Verhoging van de grondwaterstand door het brengen van rivier-
 water naar de duinen;
 Pulscode-modulatie;
 β -Radioactiviteit;
 Band-doorlatende filters;
 Luchtkrachtcoëfficiënten;
 Betontabellen;
 Grenslaaginterferentie;
 Bacteriologisch wateronderzoek;
 IJkmethode voor leverextracten;
 Analgesieproeven op ratten en marmotten;
 Diagnose van Coeliaki;
 Aequivalentiebeginsel in de herverzekering;
 Diagnose van reumapatiënten;
 Wachttijden van vliegtuigen bij landing;
 Verschillende problemen over extreem hoge waterstanden.

Het begint haast op het pak van Sjaalman te gelijken!

Laat mij trachten, U een denkbeeld ervan te geven, hoe zulk een
 consultatie verloopt, door uitvoeriger in te gaan op de wijze, waarop
 deze in de statistische afdeling geschiedt, en laat mij daartoe het
 geval beschouwen, dat een medicus een onderzoek heeft verricht en
 zich tot ons wendt met de vraag, welke van de conclusies, die hij
 meent uit zijn experimenten te mogen trekken, wel, en welke niet
 „statistisch verantwoord” zijn. Natuurlijk geldt mutatis mutandis
 het volgende ook voor onderzoekers op andere gebieden.

Zij die met een dergelijke vraag tot ons komen bezitten vrijwel
 zonder uitzondering een aanzienlijk groter belangstelling voor en
 kennis van de wiskunde dan het merendeel van hun collega's. Zij
 hebben dan ook doorgaans enkele boeken gelezen, waarin medische

statistiek behandeld wordt, en zich meer dan eens ook in een algemeen statistisch werk verdiept; zij het dat zij dáárin meestal al spoedig op te grote moeilijkheden stuiten. Zij zijn daardoor dan ook meestal wel in staat, de eenvoudige rekenkundige bewerkingen, die het statistisch onderzoek vergt, uit te voeren, indien dit althans niet te grote afmetingen aanneemt, maar wenden zich b.v. tot ons met de vraag, of het in hun geval al dan niet „geoorloofd” is, een bepaalde formule die zij in hun boek vinden toe te passen. Dit komt doordat de schrijvers van dergelijke toegepast-statistische werken (die toch zonder uitzondering aanzienlijk méér belangstelling en begrip voor de wiskunde moeten hebben dan de gemiddelde abiturient) vrijwel zonder uitzondering alle critische zin ten aanzien van het geldigheidsgebied van bepaalde statistische methoden ontberen, en daarover gewoonlijk in het geheel niet spreken. Een feit dat hen, die in een „principe van de overdracht” geloven tot nadenken moet stemmen.

Terwijl dus enerzijds de medicus met een volkomen ontoereikende wiskundige kennis is uitgerust, staan anderzijds de wiskundige consultants — zij het één der leiders van de afdeling of één der medewerkers, met een of meer assistenten — voor de moeilijkheid, dat zij als wiskundigen slechts een vaag denkbeeld hebben van wat b.v. een titratie is, en in het geheel niet weten wat b.v. anti-streptolysine of het verschil tussen acuut rheuma en rheumatoïde arthritis is. Dit bezwaar blijkt echter niet ernstig te zijn. Wij leren al gauw deze woorden gebruiken, zodat, zoals Conrad zou zeggen, wij op papegaaien gelijken, die een zó grote vaardigheid in het spreken hebben verkregen, dat men zich somtijds nauwelijks aan de indruk kan onttrekken dat wij werkelijk iets begrijpen van wat wij zeggen. Overigens leidt deze situatie, waarbij de wiskundige zònder een recht begrip van biologie, economie, e.d. tòch over deze onderwerpen adviezen moet en kan uitbrengen, anderzijds met betrekking tot het wiskunde-onderwijs tot de ietwat pijnlijke vraag, of wij wèrkelijk goed doen, de medicus, bioloog, etc. te verhinderen, zich op de middelbare school de wiskundige vaardigheden te verwerven waaraan hij dringend behoefte heeft, zolang hij zich niet „het juiste begrip” van b.v. de integraaldefinitie heeft eigen gemaakt.

Nadat, in een vaak vrij langdurig gesprek, de wiskundige zich een globaal denkbeeld gevormd heeft van de wijze waarop de experimenten genomen zijn, van de meetnauwkeurigheid, en van de gegevens en het doel van het onderzoek, tracht hij door een reeks vragen de onderzoeker te dwingen zijn doel- en probleemstelling te preciseren en te concretiseren. Het feit, dat dit vrijwel zonder uit-

zondering nodig is, wekt wederom gegronde twijfel aan het „beginsel van de overdracht”. Of, om G. Mannoury te citeren: „Schaken leert schaken, maar geen wiskunst. Wiskunst leert wiskunst, maar geen redelijkheid”.

De consultant geeft vervolgens een beknopte uiteenzetting van de beginselen der wiskundige statistiek, die eigenlijk menig abituriënt zou moeten kennen. Hij spreekt dus over de toetsbaarheid van een hypothese of andere onderstelling; hij zet uiteen, dat men zulk een hypothese nooit kan bewijzen, maar uitsluitend weerleggen, en dat ook dit laatste alleen kan geschieden met een beperkte betrouwbaarheid, d.w.z. als men van te voren toelaat, dat een voorgeschreven fractie van de te trekken conclusies fout mag zijn. Deze fractie wordt de „onbetrouwbaarheidsdrempel” (Engels: level of significance) genoemd en doorgaans conventioneel op 0,05 vastgesteld. Hij zal dit alles uiteenzetten geheel aan de hand van het door de medicus gedane onderzoek, zodat het gehele betoog binnen diens eigen voorstellingswereld zinvol blijft. Indien b.v. de medicus wil trachten te „bewijzen”, dat een behandelingswijze een physiologische grootheid — b.v. de aciditeit van het maagsap — verandert, zal de consultant aantonen, dat alleen de hypothese getoetst kan worden, dat het middel geen enkele invloed op de grootheid heeft, in de hoop dat deze hypothese spr 0,05, (d.w.z. salva probabilitate 0,05: onder voorbehoud van een waarschijnlijkheid $\leq 0,05$) verworpen zal kunnen worden. Vervolgens zal hij trachten te ervaren, welke alternatieve hypothesen mogelijk zijn, b.v. of de physiologische grootheid alleen vergroot kan worden, dan wel ook kan afnemen, en dan een bepaalde toetsingsmethode voorstellen, die ten opzichte van deze alternatieven een voldoende groot onderscheidingsvermogen bezit, d.w.z. in voldoende vele van de gevallen, waarin de getoetste hypothese niet juist is, ook werkelijk tot verwerping daarvan leidt. De consultant zal daarbij teneinde dit onderscheidingsvermogen te kunnen vergroten, trachten deze klasse van alternatieve hypothesen zoveel mogelijk te beperken door aan de hand van een reeks vragen te ervaren welke hypothesen de experimentator meent met zekerheid op grond van vroegere, zij het wellicht ongeanalyseerde ervaring, dus „a priori”, te kunnen uitsluiten. Hij zal er zich dus van vergewissen, of de verschillende experimenten werkelijk alle onafhankelijk zijn, dan wel of ongemerkt afhankelijkheden kunnen zijn binnengeslopen; of de ten grondslag liggende waarschijnlijkheidsverdeling werkelijk binnen elke groep van experimenten constant is, dan wel of deze aan onbemerkte systematische veranderingen onderhevig is. Hierbij komen soms zeer merkwaardige dingen voor de dag. B.v.

het feit, dat waarnemingen gedaan bij proefpersonen, die zich vrijwillig aanmelden, alléén karakteristiek blijken te zijn voor een duidelijk geselecteerde bevolkingsgroep: wanneer men lichaamsafmetingen, die voor de confectie-industrie van belang zijn, meet bij een groot aantal vrijwillige proefpersonen, vindt men vrij zeker een onjuiste fractie van degenen die een bijzonder fraaie lichaamsbouw hebben. Of het feit, dat andere oorzaken dan een toegediend middel veranderingen in een gemeten grootheid kunnen teweegbrengen: wanneer men b.v. de snelheid meet, waarmede ratten op een pijnprikkel reageren, met en zonder toediening van een pijnstillend middel, loopt men groot gevaar, de getoetste hypothese *ten onrechte* te verwerpen, indien men b.v. alle dieren des ochtends zonder en des middags met het middel aan het experiment onderwerpt, vooral als de ratten in de tussentijd gegeten hebben, en daardoor vadsiger geworden zijn. En wanneer bij een aantal proefpersonen het cholesterolgehalte van het bloed bepaald wordt door groepen van telkens 8 bloedsera met eenzelfde standaardoplossing te vergelijken, en als de verschillende standaardoplossingen niet precies overeenstemmen, loopt men gevaar, tot de conclusie te komen, dat het cholesterolgehalte op dezelfde wijze varieert bij personen, die aan eenzelfde dieetverandering onderworpen zijn, of die tezamen hun emoties beleven (b.v. echtparen), wanneer men niet vermijdt, dat deze telkens bij eenzelfde groep van 8 ingedeeld worden.

Dit alles heeft met wiskunde weinig te maken, maar het is „toegepaste logica”, en behoorde dus vanzelfsprekend te zijn voor ieder die wiskunde-onderwijs genoten heeft, indien het waar was, dat dit het „logisch denken” ook over andere onderwerpen dan wiskunde bevorderde. Het *is* ook alles vanzelfsprekend — als men er eenmaal aan denkt, maar dat is niet altijd het geval. Ook niet bij de wiskundigen, zolang ze niet speciaal in deze richting getraind zijn.

Bij de keuze van een toetsingsmethode moet de consultant een evenwicht zoeken tussen de uitingen van zijn mathematische en die van zijn maatschappelijke geweten. Als hij alleen zijn wiskundig geweten laat spreken en *alle* mogelijkheden, die niet volledig ondenkbaar zijn — en dat zijn er geen — mede in aanmerking neemt, kan hij *nooit* een hypothese a priori uitsluiten. Maar dan kan hij ook nooit een hypothese toetsen, en dus ook geen wetenschappelijke onderzoeker werkelijke hulp bieden. Hulp, die deze dringend behoeft. Hij zal dus zijn logica moeten toepassen in de zin van „gezond verstand”, van buiten beschouwing laten van mogelijkheden, als er geen redelijke grond is, aan te nemen dat zij gerealiseerd zullen zijn, zonder zich om *deductieve* logica te bekommeren. Dit laatste

zal hij eerst weer gaan doen, indien hij niet meer als *consultant* optreedt, maar als een wiskundige, die nieuwe toetsingsmethoden ontwerpt, en dan zuiver deductief *bewijst*, dat zij inderdaad de gepoeneerde eigenschappen bezitten, (b.v. een willekeurig voorgeschreven onbetrouwbaarheidsdrempel niet overschrijden). Een bewijs, dat overigens natuurlijk maar alleen formele betekenis heeft, want het gaat uit van onderstellingen, die in de toepassing nooit in exacte zin vervuld zijn, zodat er nooit volledige zekerheid kan zijn, dat de onbetrouwbaarheidsdrempel werkelijk niet overschreden wordt. Bij deze wiskundige werkzaamheid echter laat hij uitsluitend zijn wiskundig geweten aan het woord: láát het dan kunnen voorkomen, dat te veel statistische conclusies niet juist blijken te zijn; maar aan de wiskunde mag het niet liggen!

Dit ontwerpen van nieuwe toetsingsmethoden, die tegenover een grote klasse (mathematisch geweten!) van alternatieve mogelijkheden toch een voldoende groot onderscheidingsvermogen hebben (maatschappelijk geweten) is dus een belangrijke taak van de afdeling S van het Mathematisch Centrum. Daarnaast wordt ook een educatieve taak uitgevoerd, doordat de belangrijkste statistische begrippen en methoden in de vorm van korte memoranda ten behoeve van de onderzoekers worden beschreven, als „recepten” dus, zonder enig bewijs. Ook streven wij er naar, ons zelf overbodig te maken — al zal dit wel niet geheel gelukken — doordat wij de onderzoekers meer en meer leren, hun toetsingen zèlf uit te voeren, voor zoverre deze een eenvoudig routine-karakter hebben. Ook hier bewijzen de „receptenverzamelingen” goede diensten. Nodig is dus voor de onderzoekers: goed begrijpen wat statistische toetsing is, zich zorgvuldig afvragen, welke mogelijkheden *niet* a priori uitgesloten kunnen worden, weten of de te gebruiken toets tegenover deze mogelijkheden voldoende onderscheidingsvermogen bezit en de voor toepassing van de toets benodigde berekeningen zonder fouten kunnen uitvoeren. Kennis van de wiskundige stellingen die aan de toets ten grondslag liggen, a fortiori van hun bewijzen is voor hen niet van het minste belang.

Nadat ik — om een geijkte formule te gebruiken — meen de mij door Uw bestuur opgedragen taak te hebben volbracht door U een, natuurlijk summier en in grove trekken geschetst, beeld te geven van Wiskundige Consultatie in de Practijk, wil ik de gelegenheid, mij tegenover een gehoor van leraren in de wiskunde uit te spreken, benutten om enkele opmerkingen te maken over een onderwerp dat

mij — zij het wellicht tamelijk platonisch — sinds meer dan 25 jaren na aan het hart ligt: het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen: H.B.S., Lyceum en Gymnasium.

Voor zoverre mijn opmerkingen bestaande toestanden critiseren — en dat doen zij — vereisen zij dat ik de opmerkingen laat voorafgaan:

1° dat ik *niet* van mening ben, dat het onderwijs in de omliggende landen, voor zoverre ik dit ken, wezenlijk beter is dan ten onzent;

2° dat ik *niet* van mening ben, dat het onderwijs in de meeste andere leervakken, voor zoverre ik dat beoordelen kan, wezenlijk beter is dan dat in de wiskunde;

3° dat ik *niet* van mening ben, dat de tekortkomingen, die ik meen te moeten signaleren aan de leraren in de wiskunde moeten worden geweten, want de meeste hunner hebben door hun opleiding en hun overbelaste werkkring nooit gelegenheid gehad met de hedendaagse wiskunde kennis te maken.

Ook moet opgemerkt worden, dat deze opmerkingen uitsluitend voor mijn persoonlijke verantwoordelijkheid komen, en niet geacht mogen worden, de opvatting van het Mathematisch Centrum als zodanig weer te geven.

De plaats van de wiskunde in wetenschap en samenleving is de laatste halve eeuw ingrijpend veranderd. Terwijl dit verschijnsel voorheen nog niet voor allen waarneembaar was, heeft deze ontwikkeling thans een zodanig, welhaast explosief, karakter gekregen, dat zij een ingrijpende heroriëntering van het onderwijs in de wiskunde dringend nodig maakt.

Dit is, kort samengevat, de kern van mijn opmerkingen, die ik thans iets nader wil toelichten.

Dat wiskundige methoden behalve in de klassieke toepassingsgebieden: sterrekunde, natuurkunde, technische en actuariële wetenschappen, thans in een veel grotere kring van het moderne leven zijn doorgedrongen, zal U, voor zoverre U het niet reeds wist, wel uit „Sjaalmans pak” duidelijk zijn geworden. Toch geeft deze lijst daarvan nog slechts een zeer onvolledig beeld. Verschillende toepassingsgebieden zijn daarin niet of nauwelijks ter sprake gekomen. Ik noem slechts: de variantie-analyse in de landbouwwetenschap en andere wetenschappen, waar experimenten systematisch ontworpen worden; de factor-analyse in de psychologie; de biomathematica met haar niet-statistische wiskundige behandeling van biologische en sociologische problemen; de informatietheorie en cybernetica met haar toepassingen op de fysiologie van het zenuwstelsel; de theorie der strategische spelen en haar toepassingen op de econo-

mische en andere decisieproblemen; de theorie der stochastische processen met haar veelvuldige toepassingen, o.a. op de ontwikkeling van menselijke, dierlijke en plantaardige bevolking onder invloed van geboorte, sterfte en migratie, maar ook op de kernsplijting, e.a.

Men zou derhalve verwachten, nu een zoveel grotere groep van mensen dan vroeger met wiskundige methoden in aanraking komt, dat dienovereenkomstig het belang van het middelbaar onderwijs in wiskunde zou zijn toegenomen.

Het tegendeel is echter het geval. En wel tengevolge van het feit, dat dit onderwijs in hoge mate verouderd is, en vrijwel geen enkel aanknopingspunt met de moderne wiskunde meer biedt.

Wanneer ik terugdenk aan de wiskunde, die ik zelf indertijd, en met zoveel plezier, op school geleerd heb, b.v. aan de formules voor hoogtelijn, zwaartelijn, hoekdeellijn, aan de stelling van Stewart, de eigenschappen van om-, in- en aangeschreven cirkels, de koorden en raaklijnen vierhoeken, de eigenschappen van regelmatige n -hoeken, dan moet ik zeggen, dat ik in mijn loopbaan als wiskundige géén van deze zaken ooit heb kunnen gebruiken; nòch in enig gebied van zuivere, nòch van toegepaste wiskunde. Met uitzondering natuurlijk van de perioden waarin ik eindexamen afnam. Hetzelfde geldt voor de *gehele* beschrijvende meetkunde, voor de stereometrie met uitzondering van de inhoud van een viervlak, inhoud en oppervlakte van een bol, een bolsector en een bolsegment, welke echter in de integraalrekening behoren, enkele zwaartepuntseigenschappen van een viervlak e.d., en het regelmatige 6- en 8-vlak. Het voorkomen van de dodekaëdergroep in de theorie der automorfe functies, en van half-regelmatige lichamen in de kristallografie laat ik nu maar buiten beschouwing. Ook de trigonometrie (in tegenstelling tot de goniometrie) heb ik, al is deze natuurlijk fundamenteel voor de astronomie, de geodesie en de navigatieleer, zelf nooit kunnen toepassen, met uitzondering natuurlijk van de cosinusregel, en desnoods de sinusregel.

Met andere woorden, afgezien van enkele kleine en zeer specialistische gebieden, houdt, zuinig geschat, $\frac{3}{4}$ van de schoolwiskunde *geen enkel* verband met de hedendaagse toegepaste wiskunde, noch ook met de fundamentele gebieden der hedendaagse zuivere wiskunde.

Aan het verschil tussen „zuiver” en „toegepast” ligt het overigens niet. Met uitzondering, wellicht, van plani- en stereometrie (over de overstromingen van de Nijl spreken we nu maar niet) is alle schoolwiskunde toegepaste wiskunde geweest. Gonio- en trigonometrie zijn als hulpmiddel van de hemelmechanica ontstaan. De beschrijvende

meetkunde is door Monge ingevoerd omdat in de 18e eeuw de numerieke methoden te moeizaam en omslachtig waren. Logarithmen zijn zuiver als rekentechnisch hulpmiddel ingevoerd. Vierkantsvergelijkingen werden „opgelost” met behulp van wortelvormen, omdat de wortels destijds nog vrijwel de enige functies waren, die men kende en numeriek kon beheersen.

Het ergste echter is de massaproductie van sommen. Ik schat de jaarlijkse „productie” op minstens 10^8 , de L.S. buiten beschouwing gelaten. Ook wanneer men de weerzinwekkende monstruositeiten, die de Heer P. Wijdenes onlangs nog voor het *toelatingsexamen* aan de kaak gesteld heeft, buiten beschouwing laat, en alleen op de nauwelijks minder monstreuze eindexamensommen let, kan men onmogelijk volhouden, dat de talloze uren, daaraan besteed, enig ander „nut” afwerpen dan dat ze een aantal leerlingen bij de overgang of voor het eindexamen doen zakken of, wat de beschrijvende meetkunde betreft, doen slagen.

Terwijl dus enerzijds een geenszins te verwaarlozen aantal wetenschappelijke onderzoekers en hun assistenten dringend verlegen zit om wiskunde-vaardigheden, die de middelbare school hun niet heeft kunnen geven, worden er, wanneer ik de tijd aan huiswerk besteed medereken, jaarlijks vele miljoenen man-uren — of, zo U wilt, leerling-uren — besteed aan wiskunde-onderwijs, waarvan het nuttig effect met enkele procenten hoog getaxeerd is. Het is duidelijk, dat een her-oriëntering van de wiskunde dringend noodzakelijk is. Ik acht daarom de keuze van Uw bestuur van de onderwerpen der beide heden gehouden lezingen bijzonder gelukkig, omdat daaruit blijkt dat ook onder U dit besef van de noodzaak ener heroriëntering, en de bereidheid, daarmee een ernstig begin te maken, levend is.

Een dergelijke heroriëntering praktisch uit te voeren zal geenszins een gemakkelijke taak zijn, vooral zolang er voor leraren nog geen „sabbatical year” is ingevoerd, waarmee ik bedoel dat leraren periodiek in staat gesteld zouden worden, met behoud van salaris een jaar lang aan een binnen- of buitenlandse universiteit te verblijven, deels om daar opnieuw colleges te volgen, maar vooral ook om daar wetenschappelijk werk te verrichten, en daardoor in contact te blijven met de levende wetenschap.

Ten slotte zij het mij toegestaan, enkele der punten aan te geven, die naar mijn overtuiging bij een dergelijke heroriëntering in de eerste plaats in aanmerking genomen moeten worden.

1. In de eerste plaats is nodig: een preciese en gedifferentieerde doelstelling van het wiskunde-onderwijs, en wel in operationeel

gedefinieerde termen, zodat bij iedere leerling *toetsbaar* is, of, resp. in hoeverre het gestelde doel bij hem bereikt is. De differentiatie dient daarin te bestaan, dat a) beheersing van bepaalde technisch-wiskundige vaardigheden, b) een juist „begrip” van bepaalde theoretische overwegingen, c) vindingrijkheid bij het overwinnen van nieuwe moeilijkheden *afzonderlijk* geleerd en *afzonderlijk* getoetst worden, in plaats van, zoals thans het geval is, in ieder vraagstuk opnieuw tot een dikke brij dooreengeklutst te worden. Daarbij dient bij het toetsen van technische vaardigheid vooraf een *begrensde* verlangde rekencapaciteit vastgesteld te worden, zodat iedere opgave, wat omvang en graad van complicatie betreft, aan zeer stricte grenzen gebonden is, terwijl voor het „foutloos rekenen” *vooraf* bepaalde tolerantiegrenzen vastgesteld worden. Hetzelfde dient, mutatis mutandis, met het toetsen van „begrip” en „vindingrijkheid” het geval te zijn.

2. De gedifferentieerde doelstelling dient in verband gebracht te worden met een differentiatie naar de persoonlijke capaciteiten, de persoonlijke belangstelling en de beroepskeuze van de leerling. Iemand, die een commerciële loopbaan kiest, naar een huishoudschool gaat of bij de politie komt, heeft m.i. geen enkel nut van wiskunde-onderwijs dat verder gaat dan het kunnen lezen van grafieken en statistieken. Iemand, die naar de universiteit gaat en enige aanleg en belangstelling voor wiskunde heeft, kan op bijna ieder gebied voordeel hebben van enige vaardigheid in het lezen van algebraïsche formules en enige kennis van statistische toetsingsmethoden. Iemand, die in technische richting gaat, of die belangstelling heeft voor radiotechniek, e.d., dient ruimer algebraïsch-analytische kennis te hebben, die zich uitstrekt tot en met de vaardigheid, met goniometrische en exponentiële functies te werken (ook van een complex argument!), terwijl een technische vaardigheid in het differentiëren van zulke uitdrukkingen eveneens zeer gewenst is, zodat hij b.v. de oplossing van de differentiaalvergelijking van een eenvoudig circuit, b.v.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = A e^{i\omega t}$$

kan begrijpen. Voor iemand, ten slotte, die in wiskundige of verwante richting verder gaat, zal men bepaalde eisen aan „begrip” en „vindingrijkheid” wensen te stellen.

3. Deze differentiatie bij het onderwijs zou natuurlijk een zelfde differentiatie bij het eindexamen vereisen. (Dat men dit laatste ooit zou willen afschaffen durf ik niet te hopen.) Ik zou zeker niet willen

voorstellen, het Amerikaanse systeem over te nemen. Voor het systeem van uitsluitend „ja- of neen-vragen” of van het uitbesteden van eindexamens bij een commerciële instelling b.v. voel ik niets (al zou het eindexamen er zeker nauwelijks nòg slechter door kunnen worden!). Maar wel meen ik, dat een invoering in beperkte omvang van het Amerikaanse „credit”-systeem aanbeveling verdient. Dit houdt in, dat de abituriënt voor alle vakken tezamen een bepaald aantal eenheden als „credit” moet verwerven. Ieder onderdeel van de leerstof vertegenwoordigt een vooraf bepaald aantal eenheden, en de candidaat heeft binnen zekere grenzen de vrijheid, die eenheden willekeurig te kiezen. Voor ieder bepaald *gebruik* van het einddiploma kan dan het bezit van een bepaald aantal eenheden in een bepaald vak als eis gesteld worden. Voor zoverre de wiskunde betreft, zou men dus b.v. voor iedere universitaire studie 3 eenheden, voor de β -faculteiten, de M.T.S. en dergelijke 6 eenheden, en voor studie in de wis- of natuurkunde 9 eenheden kunnen eisen. Precisering van deze aantallen is natuurlijk een kwestie van latere overweging.

Dit alles eist ingrijpende wijzigingen, met betrekking tot onderwijs zowel als eindexamen. Hopelijk kunnen wij ermede bereiken, dat niet meer het onderwijs door het eindexamen, maar het eindexamen door het onderwijs beheerst wordt, en dat de eindexamenopgaven niet meer vastgesteld worden door anonieme adviseurs zonder openbare verantwoordelijkheid, waarvan men wel eens de indruk gaat krijgen, dat zij van de hedendaagse wiskunde en haar toepassingen niet méér gezien hebben dan wat op de middelbare school geleerd wordt dat wil zeggen: eigenlijk niets.

Samenvattende meen ik te mogen zeggen, dat wij mathematici er voor dienen te zorgen, dat op het massaproduct dat wij afleveren, de leerlingen, een behoorlijke kwaliteitscontrole kan worden toegepast, dat de resultaten die wij pretenderen te kunnen bereiken aan de eisen van toetsbaarheid worden onderworpen, die van iedere medicus of bioloog verlangd worden, dat wij ons van de beperkte betrouwbaarheid van onze toetsing rekenschap geven en bepaalde tolerantiegrenzen toelaten, maar ook dat wij weten hoe het evenwicht te bewaren tussen de „opbrengst”, gedifferentieerd naar de verschillende behoeften, en de „kosten” in de vorm van onderwijs- en leer-uren, en dit te behandelen als een wiskundig decisie-probleem.

Het komt mij voor, dat dit voor ons, wiskundigen, een ereplicht is.

Ik heb gezegd.