

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TW 53 *h*

Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung
in einem untiefen Meere

D. van Dantzig



1958

Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere^{*)}

Von *D. van Dantzig*

Die freundliche Einladung des örtlichen Tagungsleiters dieser Versammlung, einen Hauptvortrag zu halten über einige in den letzten Jahren in den Niederlanden durchgeführte Forschungen auf dem Gebiete der angewandten Mathematik, bietet mir — obwohl ich eigentlich kein angewandter Mathematiker bin, sondern ein Mathematiker der nur gelegentlich angewandt wird — die Gelegenheit, Ihnen einen, wenn auch sehr unvollständigen, Überblick zu geben über einige Arbeiten, die unter meiner Leitung seit 1953 in der Abteilung für angewandte Mathematik des Mathematischen Zentrums in Amsterdam vollbracht wurden. Sie wurden veranlaßt durch die Sturmflut, die unser Land am 1. Februar 1953 getroffen hat, beruhen auf einem Auftrag des Centrale Studiedienst van de Waterstaat, und bezwecken, einiges Verständnis zu gewinnen für die Weise, in der einer über ein Meer, insbesondere die Nordsee, sich bewegender Sturm die Höhe des Meeresniveaus beeinflußt. Obwohl die endgültige Lösung des Problems noch in unabsehbarer Ferne liegt, möchten unsere Bemühungen, die sich gezwungenermaßen nur auf wesentlich einfachere Probleme beziehen, vielleicht doch einiges Interesse erwecken können.

Bis auf einige wenige durch die Umstände erzwungene Ausnahmen sind die Ergebnisse nicht mir selbst, sondern meinen Mitarbeitern zu verdanken. Dies waren anfangs Herr T. C. Braakman und Herr G. W. Veltkamp, später Herr Dr. H. A. Lauwerier, und jetzt auch Herr Dr. D. J. Hofsommer. Wenn auch gelegentlich Anregungen, Ansätze und weitere Suggestionen meinerseits in den Berichten verarbeitet wurden, so haben doch meine Mitarbeiter zum größten Teil ihre Ergebnisse selbständig erhalten.

Zeitbeschränkung nötigt mich, mich auf einen Teil — wenn auch einen wichtigen Teil — der Arbeiten zu beschränken, alle Ansätze zu den Eigenwertproblemen außer Betracht zu lassen, und auch über die zu behandelnden Arbeiten nur einen manchmal oberflächlichen und sehr unvollständigen Überblick zu geben.

1. Formulierung und erste Reduktion des Problems

Die meisten Arbeiten, die seit etwa 5 Jahren in der Abteilung für angewandte Mathematik des Mathematischen Zentrums in Amsterdam unter meiner Leitung ausgeführt wurden, beziehen sich auf die Bewegung des Wassers in einem rotierenden Becken unter Einfluß von gegebenen, von einem Windfelde verursachten Kräften an der Oberfläche, sowie von Bodenreibung.

Ein Nachteil der analytischen Behandlungsweise besteht darin, daß man erhebliche, und im Grunde nicht gerechtfertigte Vereinfachungen anzubringen genötigt ist. Als Modell für die Wasserbewegung in einem Meer unter Einfluß von Gravitation, Wind und Reibung betrachten wir diejenige in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Bassin von konstanter Tiefe. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen werden durch die entsprechenden linearisierten ersetzt, d. h. wir betrachten in erster Näherung kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustand. In der linearen Annäherung (nicht in Wirklichkeit) kann deshalb die Gezeitenbewegung außer Betracht gelassen werden, weil die berechnete Bewegung auf sie superponiert wird. Der Einfluß des Windes wird als eine gegebene Schubspannung¹⁾ an der Oberfläche betrachtet; die Reibung (insbesondere die Bodenreibung) wird durch eine der lokalen Geschwindigkeit proportionale Massenkraft ersetzt. Entlang einer jeden Vertikalen wird eine quasistatische Druckverteilung angenommen, und die Geschwindigkeitskomponenten werden durch ihre Integrale über eine solche Vertikale ersetzt. Schließlich werden als Randbedingungen nur undurchdringbare Küsten oder Begrenzungen durch Ozeane in Betracht gezogen, welche letztere als unendlich tief angesehen werden.

Wir stellen das Bassin durch das ebene Gebiet D , seinen Rand durch C dar, $D + C$ durch \bar{D} , die über die Vertikale integrierten Geschwindigkeitskomponenten im Punkte (x, y) durch

^{*)} Hauptvortrag, gehalten auf der Wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 8. bis 12. April 1958 in Saarbrücken.

¹⁾ Das barometrische Feld kann als ein Gradientenfeld in der äußeren Kraft aufgenommen werden, und wird deswegen nicht ausdrücklich erwähnt.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, die Erhebung des Wasserspiegels über das Gleichgewichtsniveau durch w , die Komponenten der durch den Wind verursachten Kraft durch $\vec{X} = (X_1, X_2)$, den Reibungskoeffizienten durch λ , den Coriolis-Parameter ($= 2 \omega \sin \beta$) durch Ω , die Tiefe durch h , die Gravitationsbeschleunigung durch g , die stationäre Wellengeschwindigkeit $\sqrt{g h}$ durch c und die Dichte durch 1.

Die linearisierten Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung lauten dann bekanntlich (H. Lamb, 1932):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \lambda u_1 - \Omega u_2 + c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = X_1, \quad \Omega u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} + \lambda u_2 + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} = X_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

oder in Vektorform

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lambda \vec{u} - \vec{\Omega} \times \vec{u} + c^2 \text{grad } w = \vec{X}, \quad \text{div } \vec{u} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

wo $\vec{\Omega}$ ein senkrecht nach oben gerichteter Vektor der Länge Ω ist. Entlang einer Küste C_k verschwindet die normale Geschwindigkeitskomponente u_n , entlang eines Ozeanrandes C_o die Erhebung w .

Wir nehmen eine Laplace-Transformation vor, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wir die alten Bezeichnungen für die Laplace-Transformierten beibehalten, wir ersetzen den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial t}$ durch einen Faktor p . Selbstverständlich wird dadurch eine der wesentlichen Schwierigkeiten bis zum Schluß hinausgeschoben, nämlich die Umkehrung der Laplace-Transformation (Vgl. 3.).

Die Determinante der Koeffizient-Operatoren der linken Glieder von (1.1) ist, mit $p = \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\begin{vmatrix} p + \lambda & -\Omega & c^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \Omega & p + \lambda & c^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & p \end{vmatrix} = c^2 (p + \lambda)^2 \Delta - p \{(p + \lambda)^2 + \Omega^2\} \dots \dots \dots (1.2),$$

wo $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Elimination von u_1 und u_2 ergibt also für w eine Gleichung

$$\Delta w - \kappa^2 w = c^{-2} F \dots \dots \dots (1.3),$$

wo

$$\kappa^2 \stackrel{\text{def}}{=} c^{-2} p (p + \lambda)^{-1} \{(p + \lambda)^2 + \Omega^2\} \dots \dots \dots (1.4).$$

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\Omega}{p + \lambda} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) = \text{div } \vec{X} + \text{tg } \gamma \text{ rot } \vec{X} \dots \dots \dots (1.5)$$

mit

$$\text{tg } \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega}{p + \lambda} \dots \dots \dots (1.6).$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$\left. \begin{array}{l} w = 0 \quad \text{entlang eines Ozeans} \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \text{tg } \gamma \frac{\partial w}{\partial s} = f/c^2 \quad \text{entlang einer Küste} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.7)$$

mit

$$f = X_n + \text{tg } \gamma X_s \dots \dots \dots (1.8),$$

wo X_n, X_s die normale und die tangentielle Komponente des Vektors \vec{X} darstellen, erstere beim Durchlaufen des äußeren Randes von D im positiven Sinne nach außen gerichtet.

Die Geschwindigkeitskomponenten u_1, u_2 , welche Gleichungen derselben Form (1.3) (mit demselben κ^2 , aber mit anderen rechten Gliedern) genügen, ergeben sich sofort aus w :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \{(p + \lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} \left\{ (p + \lambda) \left(X_1 - c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \Omega \left(X_2 - c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}, \\ u_2 = \{(p + \lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} \left\{ -\Omega \left(X_1 - c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (p + \lambda) \left(X_2 - c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \end{array} \right\} \dots \dots (1.9)$$

²⁾ Das Symbol $\stackrel{\text{def}}{=}$ bezeichnet eine Gleichheit, die das linke Glied durch das rechte definiert.

oder in Vektorform

$$\vec{u} = \{(p + \lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} (p + \lambda + \vec{\Omega} \times) (\vec{X} - c^2 \text{grad } w).$$

Wir bemerken noch, daß, bei konstantem $(p + \lambda)^2 + \Omega^2$, $u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \gamma}$, $u_1 = -\frac{\partial u_2}{\partial \gamma}$ ist.

Die größten Schwierigkeiten werden von der „schiefen“ Randbedingung (1.7), also von der Corioliskraft verursacht, die weiteren von der komplizierten Form (1.4) von κ^2 , das für $\Omega = \lambda = 0$ einfach p^2/c^2 wäre. Man möchte deswegen versuchen, eine Störungsrechnung hinsichtlich Ω vorzunehmen. Dies geht aber nur für viel kleinere Gebiete als die Nordsee. Im allgemeinen kann man sagen, daß anfänglich, wenn ein Sturm einsetzt, nur die äußeren Kräfte \vec{X} von Bedeutung sind; nach einiger Zeit beginnt sich der Einfluß von Ω zu zeigen, und noch später macht sich die Reibungsdämpfung bemerkbar. Auf dem Höhepunkt eines Orkans läßt sich keiner dieser Faktoren vernachlässigen. Bei einem einigermaßen lange anhaltenden Sturm wäre eher p im Vergleich zu Ω (nicht aber zu λ) als Ω gegenüber p vernachlässigbar. Auch macht es die Corioliskraft unmöglich, die Wasserbewegung eindimensional zu behandeln, sogar wenn man die Nordsee als einen unendlich langen Kanal betrachtet; die Querbewegung ist dafür von zu großem Einfluß.

2. Zurückführung auf Fundamentallösungen

Zur Diskussion der Lösungsmethoden der Differentialgleichung (1.3) mit den Randbedingungen (1.7) benutzen wir den Greenschen Satz. Einfachheit halber setzen wir das Gebiet D als einfach zusammenhängend voraus, und sein Rand C sei stückweise glatt und bestehe aus zwei Teilen C_o (Ozeanrand), C_k (Küste) die je aus endlich vielen Bögen bestehen. Weder die Konstanz von κ^2 aus (1.4), noch die stückweise Konstanz von $\tau(s) = \text{tg } \gamma$ aus (1.7) auf C_k , ist für das nächstfolgende nötig. Punkte (x, y) , (x_0, y_0) usw. seien kurz mit P, P_0 , usw. angedeutet. Die Entfernung $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ zweier Punkte P_1, P_2 sei mit $\rho(P_1, P_2)$ bezeichnet. Es sei $C_2(D)$ die Menge aller Funktionen in D , die dort zweimal stetig differenzierbar und am Rande stückweise glatt sind, und $S(D, M)$ die Menge aller Funktionen, wo dies für das Komplement bzgl. D einer endlichen Menge $M \in D$ gilt, und die in jedem $c \in M$ wie $-(2\pi)^{-1} \ln \rho(P, c)$ unendlich werden.

Für je zwei Funktionen $\varphi \in S(D, M_1)$, $\psi \in S(D, M_2)$, wo $M_1 \cap M_2 = 0$ sei, gilt dann für die „Dirichletsche Entfernung“ (S. Bergmann und M. Schiffer, 1953)

$$\begin{aligned} E\{\varphi \cdot \psi\} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_D \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \kappa^2 \varphi \psi \right) dx dy \\ &= - \int_D \int \varphi (\Delta \psi - \kappa^2 \psi) dx dy - \int_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \sum_{a \in M_1} \varphi(a) \dots \dots \dots (2.1). \end{aligned}$$

Weil $E\{\varphi \cdot \psi\}$ offenbar symmetrisch ist, erhalten wir für den Fall, wo M_1 nur aus einem Punkte P_0 besteht:

$$\begin{aligned} \psi(P_0) &= \int_D \int \psi (\Delta \varphi - \kappa^2 \varphi) dx dy - \int_D \int \varphi (\Delta \psi - \kappa^2 \psi) dx dy + \int_{C_o} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{C_o} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \\ &+ \int_{C_k} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) \varphi \right) ds - \int_{C_k} \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds + \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial s} (\varphi \tau(s) \psi) ds + \sum_{a \in M_1} \varphi(a) \quad (2.2). \end{aligned}$$

Es sei jetzt $\psi(P) = w(P)$ eine Lösung $\in C_2(D)$ von (1.3), (1.7) und $\varphi(P) = G(P_0, P)$ eine beliebige Funktion $\in S(D, z_0)$. Dann wird (2.2), unter der Voraussetzung, daß $\varphi \tau \psi$ auf ganz C stetig und stückweise glatt ist³⁾:

$$\begin{aligned} w(P_0) &= - \int_D \int G F dx dy + \int_{C_k} G f ds + \int_D \int w (\Delta G - \kappa^2 G) dx dy - \int_{C_o} G \frac{\partial w}{\partial n} ds \\ &+ \int_{C_k} w \left(\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) G \right) ds \dots \dots \dots (2.3). \end{aligned}$$

A. Falls eine verallgemeinerte Greensche Funktion G gefunden worden ist, d. h. daß G

a) der homogenen Differentialgleichung

$$\Delta G - \kappa^2 G = 0 \quad \text{in } D \dots \dots \dots (2.4a),$$

b) der Ozeanbedingung

$$G = 0 \quad \text{auf } C_o \dots \dots \dots (2.4b),$$

³⁾ Also, wenn φ und ψ stetig sind auf C , muß in jeder etwaigen Unstetigkeitsstelle von $\tau(s)$ entweder φ oder ψ verschwinden.

c) der homogenen adjungierten Küstenbedingung

$$\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) G = 0 \quad \text{auf } C_k \dots \dots \dots (2.4c)$$

genügt, ergibt (2.3) eine explizite Darstellung von $w(P_0)$ mittels Quadraturen.

B. Falls aber eine Funktion G bekannt ist, die wohl der Differentialgleichung (2.4a) und der Ozeanbedingung (2.4b), aber nicht der Küstenbedingung (2.4c) genügt, so stellt (2.3) eine für $P \in C_k$ singuläre Integralgleichung für $w(P)$ entlang der Küste C_k vor. Falls G überdies der Küstenbedingung auf einem Teile von C_k genügt, so bleibt eine ebensolche Gleichung für den Rest von C_k übrig. Diese singulären Integralgleichungen können mittels bekannter Methoden, die zum Beispiel im Buche Muskhelishvili's über singuläre Integralgleichungen dargestellt worden sind, durch Ausübung des adjungierten Integraloperators in reguläre verwandelt und sodann nach klassischen Methoden aufgelöst werden.

C. Man kann aber auch sofort eine reguläre Integralgleichung erhalten, wenn auch eine zwei-dimensionale, falls man eine Funktion $G = G_0$ bestimmen kann, die den sämtlichen Randbedingungen (1.13b, c), aber nicht der Differentialgleichung (1.13a) genügt, jedoch stattdessen harmonisch ist ($\Delta G_0 = 0$). Für den Fall wo C_0 (also auch C_k) ein zusammenhängender Bogen ist, hat H. A. Lauwerier (TW31, 1955) eine solche Funktion G_0 konstruiert mittels einer konformen Abbildung von D auf eine Halbebene, bei der C_0 auf die negative reelle Achse abgebildet wird.

Man kann G_0 durch eine Summe von vier Gliedern von der Form $\pm \frac{1}{4\pi i} H\left(\frac{M(x \pm iy)}{M(x_0 \pm iy_0)}\right)$ darstellen, wo $H(w)$ eine unvollständige Beta-Funktion ist. Für den Spezialfall eines Rechtecks von der Breite $2a$ und der Länge $2b$, bei dem C_0 eine Rechtecksseite ist, und das ein Modell der Nordsee darstellt, ist $M(z) = \wp(z - 2a - 2ib) - \wp(2ib)$.

Es ergibt sich dann für w unter Vertauschung von P und P_0 aus (1.12)

$$w(P) = -\kappa^2 \iint_D w(P_0) G_0(P, P_0) dx_0 dy_0 + \int_{C_k} G_0(P, P_0) f(z_0) ds_0 - \iint_D G_0(P, P_0) F(z_0) dx_0 dy_0 \quad (2.5),$$

aus welcher sich w mittels der Neumannschen Reihe als eine Potenzreihe nach Potenzen von κ^2 ergibt.

Weil dabei der Koeffizient von κ^{2n} u. a. noch ein $2n$ -faches Integral enthält, worin der Integrand a) vom Aufpunkte P , b) von den Randbedingungen, c) von der Form des Gebietes, d) von dem gegebenen äußeren Felde abhängt, ist es von Bedeutung, die Fälle zu betrachten, in denen sich die Greensche Funktion explizit bestimmen, und zwar mittels einer beschränkten Anzahl von Integrationen herstellen läßt. Dies ist gelungen für diejenigen Gebiete, die nur von höchstens zwei Geraden begrenzt werden.

Die zu bestimmende Greensche Funktion sei, unter Vertauschung der Punkte P und P_0 , mit $G(P, P_0)$ bezeichnet. Sie genügt dann hinsichtlich P und P_0 der Differentialgleichung (2.4a) als der Ozeanbedingung (2.4b). Der Küstenbedingung (2.4c) genügt sie nur hinsichtlich P_0 , während mit Bezug auf P die homogenisierte Bedingung (1.7), d. h. allgemeiner

$$\frac{\partial G}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial G}{\partial s} = 0 \quad \text{auf } C_k \dots \dots \dots (2.6)$$

gilt. Die Funktion $G(P, P_0)$ ist also nicht symmetrisch. In unsrem Fall, wo $\tau(s) = \operatorname{tg} \gamma$ auf der Küste konstant ist, geht sie in sich über, falls die beiden Argumentpunkte vertauscht werden, und gleichzeitig das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \gamma$, d. h. von Ω umgekehrt wird.

3. Bestimmung von Fundamentallösungen für von höchstens zwei Geraden begrenzten Meeren

Ein wesentlicher Beitrag zur Bestimmung der Fundamentallösungen der Differentialgleichung

$$\Delta G - \kappa^2 G = 0 \dots \dots \dots (3.1)$$

mit homogenen schiefen Randbedingungen (vgl. 1.7) wurde von G. W. Veltkamp (1955) in einer kurzen internen Note für das Mathematische Zentrum gegeben, über deren Grundgedanken ich jetzt kurz berichten werde.

Die Fundamentallösung $G(P, P_0)$, die in der ganzen Ebene der Gleichung (3.1) genügt, im gegebenen Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ eine Singularität $G = -\frac{1}{2\pi} \ln \varrho(P, P_0) + O(1)$ aufweist und für $P \rightarrow P_0$ ins Unendliche verschwindet, ist gegeben durch die Besselsche Funktion

$$\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \varrho) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa e \operatorname{ch} \xi} d\xi \dots \dots \dots (3.2).$$

Wir werden sie, ähnlich wie in der Theorie der harmonischen Funktionen, kurz einen Pol (in P_0) nennen. Durch Differentiation nach dem „Aufpunkte“ P_0 in einer vorgegebenen Richtung ergibt sie einen Dipol, durch zweifache Differentiation in zwei Richtungen einen Quadrupol, durch k -fache Differentiation einen 2^k -Pol. Wir betrachten den Richtungsdifferentialoperator

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \dots \dots \dots (3.3).$$

In Polarkoordinaten ist

$$D_\alpha = \sin \gamma \left(\frac{\partial}{\partial r} - r^{-1} \cot \gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

falls $\gamma + \varphi \equiv \alpha + \frac{1}{2} \pi \pmod{\pi}$ ist.

Die Operatoren D_α kommutieren für alle Werte von α , und sie erfüllen, wie man leicht einsieht, bei Beschränkung ihres Anwendungsbereiches auf Lösungen der Gleichung

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0,$$

die Identität

$$D_{\alpha-\gamma} D_\beta - D_{\beta-\gamma} D_\alpha = \kappa^2 \sin(\alpha - \beta) \sin \gamma \dots \dots \dots (3.4),$$

oder auch

$$D_{\alpha+\beta} D_{\alpha-\beta} = D_\alpha^2 - \kappa^2 \sin^2 \beta \dots \dots \dots (3.5).$$

Für $\kappa = 0$ ist $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_k} = D_\alpha^k$, mit $\alpha = k^{-1} \sum_1^k \alpha_i$, so daß es für jedes k bis auf Bewegungen nur eine Art von harmonischen 2^k -Polen gibt; für $\kappa \neq 0$ aber ist das nicht der Fall. Zuzufolge (3.5) ist die schiefe Randbedingung $D_\beta f = 0$ entlang der x -Achse erfüllt, falls $f = D_{-\beta} g$ und g als Funktion von y ungerade ist. Es ist dann nämlich $g = 0$ für $y = 0$, folglich auch $D_0^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ entlang der x -Achse, also nach (3.5) ebendort $D_\beta D_{-\beta} g = 0$.

Um eine Fundamentallösung von (3.1) in der Halbebene $y > 0$ mit Pol in $z_0 = (x_0, y_0)$ zu erhalten, die der Randbedingung

$$D_\alpha G = 0 \quad \text{für } y = 0 \dots \dots \dots (3.6)$$

genügt, setzen wir $\rho^* = \{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2\}^{1/2}$ und $2\pi g = K_0(\kappa \rho) - K_0(\kappa \rho^*)$. Dann ist g ungerade in y ; folglich genügt

$$u = \frac{1}{2\pi} D_{-\alpha} (K_0(\kappa \rho) - K_0(\kappa \rho^*)) \dots \dots \dots (3.7)$$

sowohl (3.1) als (3.6). Diese Lösung besteht aus zwei entgegengesetzten parallelen Dipolen in den Spiegelpunkten z_0 und $\bar{z}_0 = (x_0, -y_0)$, deren Richtung spiegelbildlich zu α ist (vgl. Bild 1). Weil diese Lösung für jeden Aufpunkt z_0 der Bedingung (3.6) genügt, bleibt dasselbe der Fall, wenn man z_0 durch $(x_0 - t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ für alle $t > 0$ ersetzt und über t integriert. Dabei geht der Dipol in z_0 in einen einfachen Pol über, während der Dipol in \bar{z}_0 in eine mit gleichen und parallelen Dipolen gleichmäßig besetzte Halbgerade in der Richtung α übergeht. Zerlegt man diese Dipole in ebensolche senkrecht und parallel zu dieser Halbgeraden, so erhalten erstgenannte die Größe $\sin 2\alpha$, während letztere sich zu einem einzigen Pol in \bar{z}_0 der Stärke $-\cos 2\alpha$ zusammensetzen (Bild 2, Bild 3).

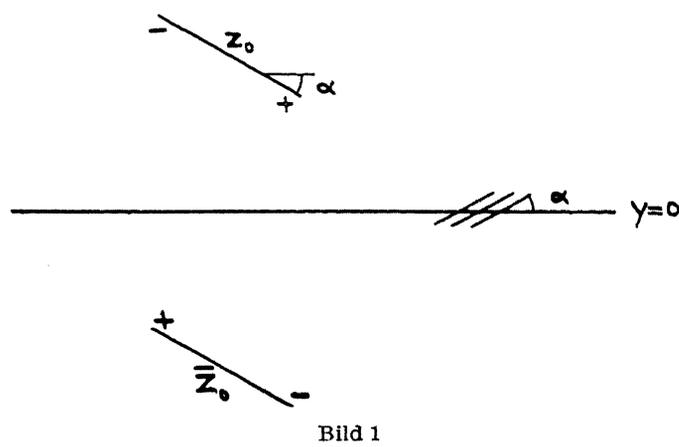


Bild 1

Analytisch wird die Lösung durch

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(t + i\alpha)}{\text{sh}(t - i\alpha)} e^{-\kappa(y+y_0)cht - i\kappa(x-x_0)sh t} dt, \\ \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa|y-y_0|cht - i\kappa(x-x_0)sh t} dt \end{aligned} \right\} \dots \dots (3.8),$$

gegeben.

Dieses Ergebnis, das Veltkamp auch für beliebige Richtung der begrenzenden Geraden herleitete, wurde auf etwas anderem Wege auch von H. A. Lauwerier bewiesen und zur Lö-



+1

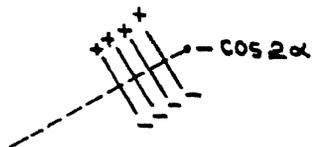
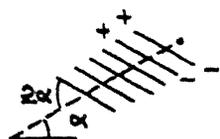
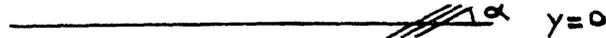
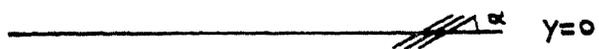


Bild 2. (Die beim oberen Halbstrahl eingezeichneten + - und - Zeichen sind zu streichen. Dieser Halbstrahl ist aus „Kopf zu Schwanz“ liegenden Dipolen zusammengesetzt.)

Bild 3

sung des Randwertproblems für einen (beiderseits unendlichen) Parallelstreifen ausgenutzt (TW 31). Für den Streifen $|x| < a$ (unendlich langer Kanal) mit

$$\frac{\partial G}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial G}{\partial y} \sin \gamma = 0 \quad \text{für } x = \pm a$$

wird

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\kappa(2a+x_0-x)\text{ch}\eta} + e^{-\kappa(2a-x_0+x)\text{ch}\eta} + \frac{\text{ch}(\eta + i\gamma)}{\text{ch}(\eta - i\gamma)} e^{\kappa(x+x_0)\text{ch}\eta} + \frac{\text{ch}(\eta - i\gamma)}{\text{ch}(\eta + i\gamma)} e^{-\kappa(x+x_0)\text{ch}\eta} \right\} \cdot \frac{e^{-i\kappa(y-y_0)\text{sh}\eta}}{\text{sh}(2\kappa a \text{ch}\eta)} d\eta \dots \dots \dots (3.9),$$

wofür auch

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa(y-y_0)\text{sh}\eta} d\eta \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-(-1)^n x_0-2na|\kappa \text{ch}\eta} \cdot \frac{\text{ch}(\eta + i \text{sgn } n (-1)^n \gamma)}{\text{ch}(\eta + i \text{sgn } n \gamma)} \right\} (3.10)$$

geschrieben werden kann. (Vgl. Bild 4.)

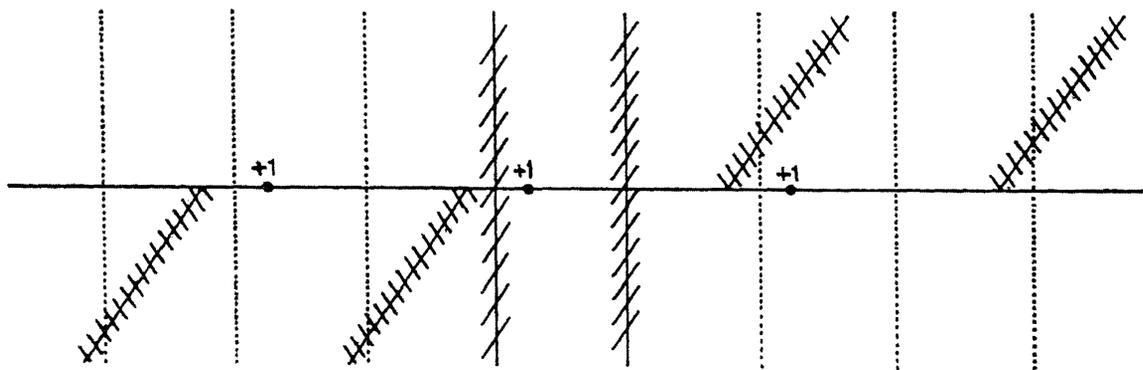


Bild 4

Die Faktoren $\frac{\text{ch}(\eta \mp i\gamma)}{\text{ch}(\eta \pm i\gamma)}$ ändern einen Pol in einen „Dipolchwanz“. Für den Streifen $0 < y < b$ mit

$$D_x G = 0 \quad \text{für } y = 0, \quad G = 0 \quad \text{für } y = b,$$

so daß $y = 0$ eine Küste ($\alpha = \frac{1}{2} \pi + \gamma$) und $y = b$ eine Ozeanbegrenzung darstellt, erhält Lauwerier die Lösung

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) - \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho^*) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \frac{\text{sh}(\kappa(y-a)\text{ch}\eta) \text{sh}(\kappa(y_0-a)\text{ch}\eta)}{1 + \frac{\text{sh}(\eta - i\gamma)}{\text{sh}(\eta + i\gamma)} e^{2\kappa a \text{ch}\eta}} \cdot e^{-i\kappa(x-x_0)\text{sh}\eta} (3.11),$$

deren Schema in Bild 5 skizziert worden ist.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich das Problem schon im einfachsten Falle, wo der Rand eine Ecke aufweist, nämlich im Falle, wo D ein Winkel ist, z. B. in Polarkoordinaten: $r > 0$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Wir werden da die Lösungen, insbesondere die Fundamentallösung der Gleichung (3.1) mit den Randbedingungen

$$r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_1, \quad r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_2 \quad (3.12)$$

betrachten, obwohl wir eigentlich nur die beiden Fälle $\gamma_1 = \gamma_2$ (zwei Küsten) und $\cot \gamma_1 = 0$ oder $\cot \gamma_2 = 0$ (eine Küste und ein Ozeanrand) (im letzteren Falle mit der Zusatzbedingung, daß dort $w = 0$ sei) bedürfen. Schon 1956 hat G. W. Veltkamp (TW 40) das Verhalten einer für $r \rightarrow 0$ endlich bleibenden Funktion w in der Umgebung der Ecke studiert, die in D definiert ist und entweder der Potentialgleichung $\Delta w = 0$ genügt (oder allgemeiner $\Delta w = O(r^{-2})$ für $r \rightarrow 0$) und den Randbedingungen (3.12) (mit w anstatt G ; im Falle $\gamma_1 = \gamma_2$ ist r^{-2} durch $r^{-2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ zu ersetzen), oder für $\kappa^2 \neq 0$ den speziellen Randbedingungen (3.12) mit $\gamma_1 = \gamma_2$ oder $\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$ genügt. Die Notwendigkeit, mehrere verschiedene Fälle zu unterscheiden, ließ wenig Hoffnung, auf diesem Wege durch Heranziehen höherer Näherungen weiterzukommen. Beiläufig sei bemerkt, daß ein Spezialfall, nämlich $\gamma_2 - \gamma_1 \equiv \Theta \pmod{\pi}$ auf Grund von (3.8) (Bild 1) trivial ist.

Jüngstens aber ist es uns gelungen, das Problem für den Winkel vollständig zu lösen. Herr Lauwerier's Krankheit zwang mich, eine schon 1956 in groben Zügen skizzierte Methode selbst auszuarbeiten; seit der Wiedergewinnung seiner Kräfte hat Lauwerier sodann unabhängig von der meinigen das Problem nach einer anderen Methode gelöst, und später mehrere wertvolle Zusätze zur meinigen angebracht. Lauwerier's Methode beruht, ähnlich wie es bei den Wiener-Hopf-Methoden geschieht, auf der Zurückführung des Problems auf ein Hilbert-Problem. In seinem Vortrag (TW 50) behandelt er in dieser Weise den speziellen Fall eines Vollwinkels. Übrigens lassen sich die wichtigsten Elemente jeder der beiden Methoden auch bei der anderen wiederfinden. Ich werde deswegen meine eigene Lösung kurz skizzieren.

1. Ist G in $D \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \varphi) | r > 0, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ mit Ausnahme höchstens einer endlichen Menge von logarithmisch singulären Stellen eine Lösung der Gleichung (3.1) die für $r \rightarrow \infty$ genügend schnell gegen Null geht, so ist

$$U(\eta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \operatorname{ch} \eta \int_0^\infty e^{i\kappa r \operatorname{sh} \eta} G(r, \varphi) dr \quad \dots \dots \dots (3.13)$$

eine harmonische Funktion, also in der Form

$$U(\eta, \varphi) = U_1(\eta + i\varphi) + U_2(-\eta + i\varphi) \quad \dots \dots \dots (3.14)$$

zu schreiben. Dabei sind U_1 und U_2 stückweise holomorph für $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$; auf den Geraden $\varphi = \text{konst.}$, die den Singularitäten von G entsprechen, können sich U_1 und U_2 unstetig ändern. Sind andererseits U_1 und U_2 stückweise holomorph und ist für $\eta \rightarrow \pm \infty$, $(\operatorname{ch} \eta)^c U \rightarrow 0$ für eine gewisse Konstante c , so genügt, der Lösung von (3.13), (3.14) entsprechend,

$$G(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa r \operatorname{sh} \eta} \{U_1(\eta + i\varphi) + U_2(-\eta + i\varphi)\} d\eta \quad \dots \dots \dots (3.15)$$

in D der Gleichung (3.13). Die Transformation (3.13) ist im wesentlichen einem schon von Peters (A. S. Peters, 1952) für das „sloping beach“ Problem benutzten analog.

2. Den Randbedingungen (3.12) entsprechen zwei Funktionalgleichungen für U_1 und U_2 , die eine spezielle Lösung

$$U_1(\zeta) = U_2(\zeta) = \Phi(\zeta) \quad \dots \dots \dots (3.16)$$

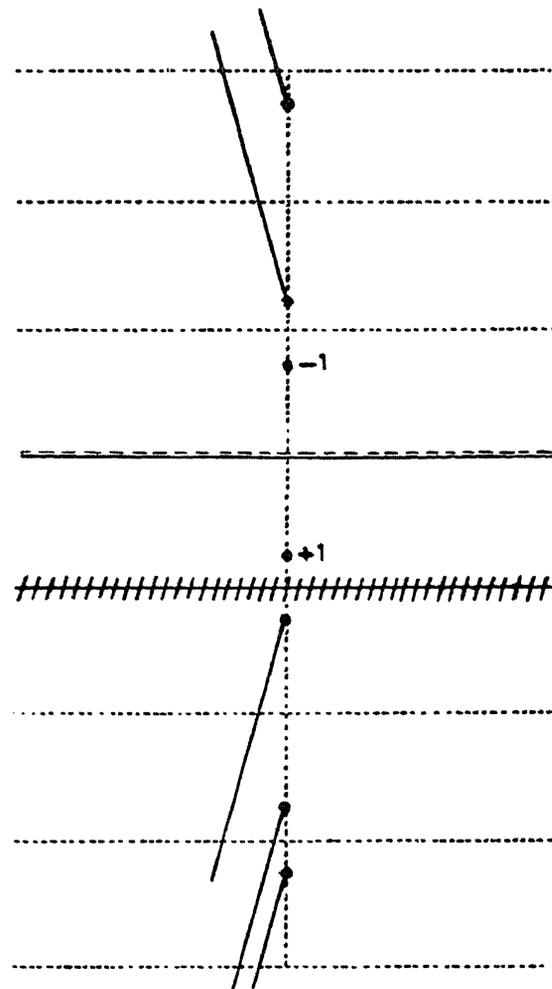


Bild 5

besitzen, wo $\Phi(\zeta)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion ist. Und zwar ist

$$\Phi(\zeta) = e(\zeta - i\varphi_1, \gamma_2)/e(\zeta - i\varphi_2, \gamma_1) \dots \dots \dots (3.17),$$

wo $e(\zeta, \gamma)$ für $|\text{Im } \zeta| < \Theta + \frac{\pi}{2} - |\text{Re } \gamma|$ durch

$$e(\zeta, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t \text{ sh } \frac{1}{2} \pi t} \frac{\text{sh } \gamma t (1 - \cos \zeta t)}{\text{sh } \Theta t} \dots \dots \dots (3.18),$$

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2 - \varphi_1 \dots \dots \dots (3.19)$$

definiert, aber in der ganzen Ebene meromorph ist.

Gemäß (3.15) entspricht Φ einer überall in \bar{D} , außer vielleicht in $r = 0$ reguläre Lösung von (3.1), (3.12). Für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ist sie auch für $r = 0$ regulär.⁴⁾

Für $\gamma_1 \leq \gamma_2$ dagegen gibt es keine überall, einschließlich $r = 0$ reguläre nichttriviale Lösung.⁴⁾

3. Um die Fundamentallösung zu finden, müssen wir die Funktion $K_0(\kappa \varrho(P, P_0))$ in der Form (3.15) darstellen:

$$K_0 = K_0(\kappa \varrho(P, P_0)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa r \text{ sh } \eta + i\kappa r_0 \text{ sh } (\eta + i|\varphi - \varphi_0|)} d\eta \dots \dots \dots (3.20).$$

Je nachdem $\varphi > \varphi_0$ oder $\varphi < \varphi_0$ ist, entspricht also U_2 oder U_1 der Null, und U_1 oder U_2 der Funktion $(4\pi)^{-1} e^{i\kappa r_0 \text{ sh } (\eta + i|\varphi - \varphi_0|)}$. Fordern wir jetzt, daß $G = (2\pi)^{-1} K_0$ überall regulär ist. Es entstehen U_1 und U_2 aus Φ durch Multiplikation zweier im Streifen $\varphi_1 \leq \text{Im } \zeta \leq \varphi_2$ stückweise holomorphen Funktionen, die periodisch mit der Periode $2i\Theta$ sind und an den Geraden $\varphi = \varphi_0 + 2m\Theta$ bzw. $\varphi = 2\varphi_1 - \varphi_0 + 2m\Theta i$ (m gerade) einen Sprung $(4\pi)^{-1} e^{i\kappa r_0 \text{ sh } \eta}$ bzw. $-(4\pi)^{-1} e^{i\kappa r_0 \text{ sh } \eta}$ aufweisen. Mittels einer Plemelj-Formel lassen sich diese Funktionen dazu bestimmen. Das Endergebnis ist

$$G(r, \varphi) = \frac{1}{2\Theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa r \text{ sh } \eta) \sin(\kappa r_0 \text{ sh } \eta_0) \frac{\Phi(\zeta)}{\Phi(\zeta_0)} \frac{\text{sh } \frac{\pi}{\Theta} \zeta_0}{\text{ch } \frac{\pi}{\Theta} \zeta_0 - \text{ch } \frac{\pi}{\Theta} \zeta} d\zeta_0 d\zeta \quad (3.21)$$

für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \frac{\pi}{2}$, und

$$G(r, \varphi) = \frac{1}{2\Theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\kappa r \text{ sh } \eta) \cos(\kappa r_0 \text{ sh } \eta_0) \frac{\Phi(\zeta)}{\Phi(\zeta_0)} \frac{\text{sh } \frac{\pi}{\Theta} \zeta}{\text{ch } \frac{\pi}{\Theta} \zeta_0 - \text{ch } \frac{\pi}{\Theta} \zeta} d\zeta_0 d\zeta \quad (3.22)$$

für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}$, wo $\zeta = \eta + i\varphi$, $\zeta_0 = \eta_0 + i\varphi_0$ und $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \Theta$ gewählt ist.

Gemäß Lauwerier's Bemerkung ist die Lösung für $\gamma_1 \leq \gamma_2$ die einzige, die für $r \rightarrow 0$ endlich bleibt; für $\gamma_1 > \gamma_2$ kann man noch eine überall in D reguläre Lösung hinzufügen. Dadurch kann man erreichen, daß sie für $r = 0$ Null wird. Die Lösung (3.22) ist dieser Forderung schon angepaßt worden.

Weitere Untersuchungen dieser Lösung sind augenblicklich noch im Gange. Leider ist nicht zu erwarten, daß eine entsprechend einfache explizite Lösung für beliebige Form des Gebietes D anzugeben ist.

4. Zeitabhängige Lösungen

In kurzer Form möchte ich noch einiges berichten über die schon anfangs erwähnten Schwierigkeiten und über die Möglichkeiten bei der Umkehrung der Laplace-Transformation.

⁴⁾ Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Lauwerier.

Herr Lauwerier hat dieses Problem in Angriff genommen, und wir verdanken ihm mehrere recht verschiedene, wenn auch immer noch einfache Fälle vollständiger Lösungen, manchmal bis zu numerischen Resultaten durchgerechnet.

Zunächst (TW 35) betrachten wir den Fall, wo D die ganze unendliche Ebene ist, wo also weder Küsten noch Ozeane vorhanden sind. Ersetzen wir in

$$K_0(\kappa r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa r \operatorname{ch} \eta} d\eta \quad \dots \dots \dots (4.1)$$

η durch $\eta + \ln \frac{\kappa}{p}$, und setzen wir für κ^2 den Ausdruck (1.4) ein, so ergibt sich

$$K_0(\kappa r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} r p e^{-\eta} - \frac{1}{2} r(p+\lambda) e^{\eta} - \frac{1}{2} r \frac{\Omega^2}{p+\lambda} e^{\eta}} d\eta \quad \dots \dots \dots (4.2).$$

Zur Lösung kann man p mit dem Operator $\frac{\partial}{\partial t}$ identifizieren und sodann (4.2) auf eine gegebene Funktion der Zeit $X(t)$ (die auch von den räumlichen Koordinaten abhängen kann) wirken lassen. Im einfachsten Falle, wo weder Reibung noch Drehung vorhanden ist ($\lambda = \Omega = 0$), ist $\kappa = p$, und (4.1) ergibt

$$K_0(\kappa r) X(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - r \operatorname{ch} \eta) d\eta = \int_r^{\infty} X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \quad \dots \dots \dots (4.3).$$

Falls wohl die Reibung, aber noch nicht die Erddrehung in Betracht gezogen wird, erhalten wir

$$K_0(\kappa r) X(t) = \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \lambda \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \quad \dots \dots \dots (4.4)$$

und endlich im allgemeinen Fall

$$K_0(\kappa r) X(t) = \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \lambda \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \\ - \frac{1}{2} \Omega \int_r^{\infty} e^{-\lambda\tau} d\tau X(t - \tau) \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\varphi J_1(\Omega \cos \varphi \cdot \sqrt{\tau^2 - r^2}) \cdot \exp \frac{\frac{1}{2} \lambda r^2}{\tau + \sin \varphi \cdot \sqrt{\tau^2 - r^2}} \quad (4.5),$$

ein Ausdruck, der noch verschiedentlich umgeformt werden kann. Lauwerier betrachtet speziell den Fall, wo, bis auf eine zeitlich konstante Funktion, $X(t) = \iota(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ist, d. h. wo ein Windfeld plötzlich einsetzt und dann konstant bleibt. Insbesondere hat er die folgenden Spezialfälle untersucht:

- a) Kein Wind; rotationssymmetrisch verteilte Depression. Es handelt sich dann lediglich um ein Barometergefälle, d. h. der Vektor \vec{X} in 1 ist ein Gradient.
- b) Rotationssymmetrisches wirbelfreies Feld. (Auch hier ist \vec{X} ein reiner Gradient.)
- c) Rotationssymmetrisches Wirbelfeld.
- d) Punktquellenfeld konstanter Richtung.
- e) Beliebige Windfeld konstanter Richtung, das bis auf einen beliebigen zeitabhängigen Faktor, eine zeitlich konstante rotationssymmetrische, aber sonst beliebige Verteilung hat.

Schon vorher (TW 32) hatte Lauwerier für den Fall einer Halbebene ein räumlich konstantes Windfeld untersucht, das von der Zeit mittels eines Faktors $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} m^2 t e^{-mt}$ ($t > 0$) abhängt, also anschwillt, ein Maximum erreicht und wieder abflaut. Die Erhebung w läßt sich mittels elementarer Methoden nur an der Küste berechnen, und wird dort dargestellt durch die Konvolution der beiden Funktionen

$$\varphi(t) = \sin \alpha X(t) - \Omega \cos \alpha \int_0^t e^{-\lambda\tau} X(t - \tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (4.6)$$

und

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t} I_0\left(\frac{1}{2}\lambda t\right) - \Omega e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda \tau} J_1(\Omega \tau) I_0\left(\frac{1}{2}\lambda(t-\tau)\right) d\tau \dots (4.7).$$

Die numerischen Rechnungen hierzu wurden von der Rechenabteilung des Mathematischen Zentrums ausgeführt und gestatten eine gute Übersicht über die Weise, in der die Erhebung w vom Winkel α zwischen Windfeld und Küste abhängt.

Es ergibt sich, daß die maximale Erhebung für etwa $\alpha = 170^\circ$ maximal ist, so daß die Erhebung an der Küste viel stärker von einem zur Küste parallelen als von einem senkrecht einfallenden Wind beeinflusst wird, eine qualitativ von vornherein einleuchtende Tatsache. Nachdem $w(t)$ sein Maximum erreicht hat, dämpfte es allmählich in leicht oszillierender Weise ab; die Oszillationen haben eine Periode von etwa $\frac{2\pi}{\Omega}$ und korrespondieren analytisch mit den

Singularitäten der *Laplace*-Transformierten bei $p = -\lambda \pm i\Omega$. Das Erhebungsmaximum kommt viel später als das Windmaximum. Das Erhebungsmaximum hängt der Größe nach kaum von Ω ab, in seiner Abhängigkeit von α aber (offensichtlich) sehr stark. Auf die wichtigen Untersuchungen Lauweriers bezüglich eines streifenförmigen Meeres („unendlich breite Nordsee“) einzugehen, sowie auf verschiedene spätere Ergebnisse, verbietet mir leider die Zeit.

Ich möchte noch einige Bemerkungen über die Inversion der *Laplace*-Transformation im Falle des Streifens, also der Lösung (3.10) hinzufügen. Der exponentielle Faktor unter dem Integralzeichen läßt sich ganz ähnlich wie oben bei $K_0(\kappa r)$ durch Ersetzung von η durch $\eta + \ln \frac{\kappa}{p}$ behandeln. Weiter ist

$$\frac{\text{ch}(\eta + i\gamma)}{\text{ch}(\eta - i\gamma)} = 1 + \frac{2i\Omega \text{th} \eta}{p + \lambda - i\Omega \text{th} \eta} \dots (4.8).$$

Hierin aber muß noch die obengenannte Verschiebung von η durchgeführt werden, wodurch $\text{th} \eta$ in $\text{th}\left(\eta + \ln \frac{\kappa}{p}\right)$ übergeht. Nun wird

$$\frac{\text{ch}(\eta + i\gamma)}{\text{ch}(\eta - i\gamma)} \rightarrow \frac{p + \lambda - i\Omega}{p + \lambda + i\Omega} \cdot \frac{e^{2\eta} (p + \lambda + i\Omega)^2 + p(p + \lambda)}{e^{2\eta} (p + \lambda - i\Omega)^2 + p(p + \lambda)} \dots (4.9).$$

Zerlegung in Partialbrüchen ergibt eine ziemlich unangenehme Abhängigkeit von η , da $e^{2\eta}$ unter dem Wurzelzeichen vorkommt.

Man muß aber bedenken, daß bei den wirklichen Anwendungen λ nur sehr ungenau bekannt ist. Die Berechnung der Reibung beruht nämlich auf Turbulenztheorien, die nicht alle dasselbe Resultat geben (Schönfeld 1954).

Überdies ist die Reibung proportional zum Strom und unabhängig vom Winde angesetzt, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Schließlich ist λ abhängig von, und zwar näherungsweise umgekehrt proportional mit der Tiefe. Im Falle der Nordsee nun ist die Tiefe keineswegs konstant. Sie nimmt gen Norden allmählich zu und ist in der Mitte durch die Doggersbank stark beeinträchtigt. Es ist also der Wert von λ nicht nur nicht genau bekannt, sondern nicht mal genau definiert, ja sogar nicht genau definierbar.⁵⁾

Nun hat es in der angewandten Mathematik nicht den mindesten Sinn, im rein mathematischen Teil vollkommene Exaktheit zu verlangen, wenn man bei der Anwendung auf sehr unexakt bestimmte Größen stößt. Man wird also im letzten Glied der Formel (4.9) (die ich lediglich als Beispiel gewählt habe) bedenken, daß Vermehrung des Zählers sowie des Nenners mit $\frac{1}{4}\lambda^2$ lediglich auf eine kleine Änderung des Wertes von λ hinauskommt, also infolge der geringen Bestimmtheit von λ „dasselbe“ Resultat ergibt, vorausgesetzt, daß lediglich große Werte von p einen wesentlichen Beitrag geben, das heißt, daß man nur kurz dauernde Stürme in Betracht zieht. Damit geht (4.9) über in

$$\frac{\text{ch}(\eta + i\gamma)}{\text{ch}(\eta - i\gamma)} = \left(1 - \frac{2i\Omega}{p + \lambda + i\Omega}\right) \cdot \left\{ 1 + \frac{C_1}{e^\eta (p + \lambda - i\Omega) + i\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)} + \frac{C_2}{e^\eta (p + \lambda - i\Omega) - i\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)} \right\} \quad (4.10),$$

wo C_1 und C_2 nicht von p abhängen.

⁵⁾ Übrigens gilt Entsprechendes auch, wenn auch in geringerem Maße, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{g h}$ der ungestörten Wellen, die wir sogar als Einheit der Geschwindigkeit gewählt haben.

Welche Möglichkeiten unsere Lösung des Problems vom Winkel bieten wird, läßt sich jetzt noch nicht sagen. Einige Bemerkungen aber kann man schon machen.

Die Nordsee hat bekanntlich in grober Annäherung die Form eines Rechtecks. Für die holländische Küste aber werden bei den häufigst vorkommenden Stürmen weder die Ostseite (Deutsche Bucht, Dänemark, Kattegat, Norwegen), noch die Nordseite (Ozean „rand“) großen Einfluß haben. Ein rechter Winkel ist deswegen als Modell nicht gar so schlecht, um so mehr, als über den Einfluß des als Senke auftretenden Kanals, der genügend kleine Dimensionen hat, um dort die Corioliskraft vernachlässigbar zu machen, schon eine ausführliche Untersuchung von Lauwerier vorliegt (TW 36).

Eine über die Nordsee sich bewegende Depression wird durch eine Verteilung von Polen wiedergegeben, die sich hauptsächlich bei der Bahn des Zentrums der Depression anhäufen. Daneben haben wir die durch Reflexion an den Küsten entstehenden Pole samt ihren Multipol„schwänzen“, die hier in Form der Funktionen Φ auftreten, in Betracht zu ziehen. Die größten und heute noch nicht übersehbaren Schwierigkeiten wird wohl die *Laplace*-Inversion der Faktoren Φ bereiten. Wegen der Dämpfung werden wiederholte Reflexionen wohl kaum einen merklichen Beitrag ergeben, es sei denn, das Zentrum der Depression ziehe ganz nahe an den singulären Ecken vorbei, ein Tatbestand, der sich nur selten (aber doch gelegentlich mal) vortut. Die Reflexionen an der schottisch-englischen Küste werden sicher wohl nicht vernachlässigbar sein, insbesondere wenn die Depression sich ziemlich nahe und parallel zu dieser Küste südwärts bewegt, oder wenn sich nahe dieser Küste ein starker barometrischer Gradient befindet. Beide Erscheinungen traten beim Februarsturm 1953 stark hervor. Die Reflexionen an unserer Küste schließlich sind — für uns! — die wichtigsten, insbesondere wenn sie nicht zustande kommen, denn eben das bedeutet den Deichbruch.

Obwohl also die analytische Behandlung von Problemen wie dem hier besprochenen ganz erheblichen Einschränkungen unterliegt und keinesfalls eine maschinell numerische vollständig ersetzen kann, so hoffe ich doch in diesem Vortrag gezeigt zu haben, daß die klassischen Methoden der angewandten Mathematik noch keineswegs als überholt zu betrachten sind, in enger Verbindung mit den numerischen einen nicht unerheblichen Beitrag zu unserem Verständnis bieten können und methodisch interessante und für die Weiterentwicklung der reinen Mathematik nicht unbedeutende Ergebnisse vorzuzeigen vermögen.

Literatur

- [1] S. Bergman und M. Schiffer, Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, New York 1953.
- [2] D. van Dantzig, Mathematical problems raised by the flood disaster 1953, Proc. Int. Congress of Mathem. p. 218—239. Amsterdam 1954. — Enkele voorbeelden van de berekening van waterhoogten onder de invloed van wind (Verslagen Kon. Ned. Ak. v. Wet., afd. Nat. 65, 3, (1956), p. 39—44. — TW 51⁶), Solutions of the equation of Helmholtz in an angle with vanishing directional derivatives along each side (1958), Proceedings Kon. Ned. Ak. v. Wet. Series A, 61 (1958), S. 384—398; auch in Indagationes Mathematicae 20 (1958), S. 384—398.
- [3] H. Lamb, Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge (Tidal waves, S. 318) (1932).
- [4] H. A. Lauwerier, TW 31, The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary windfield. (1955). — TW 32, The motion of a half-plane sea under influence of a non-stationary wind. (1955). — TW 35, The influence of a disturbance upon an infinitely large shallow sea of constant depth. (1956). — TW 36, The wind effect in the Southern part of the North Sea due to a single storm and the influence of the Channel. (1956). — TW 41, The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea. (1957). — TW 42, Exponential windfields. (1957). — TW 50, A uniform windfield on a rotating sea in presence of a semi-infinite barrier. (1958).
- [5] A. S. Peters, Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary problem for $(\Delta - k^2)\varphi = 0$ in a sector, Comm. pure appl. math. vol. V, (1952), S. 87—108.
- [6] J. C. Schönfeld, Internal Report, Rijkswaterstaat, Vergelijkingen van een lange golfbeweging in twee dimensies. (1954).
- [7] G. W. Veltkamp, TW 40, The behaviour of a solution of Helmholtz' equations near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives. (1956). — (Internal note), Singuliere oplossingen van de Helmholtz vergelijking in twee dimensies. (1955).

⁶). Mit TW (= „toegepaste wiskunde“) werden Berichte der Abteilung für Angewandte Mathematik des Mathematischen Zentrums in Amsterdam bezeichnet.

Manuskripteingang: 22. 5. 1958

Anschrift: Prof. Dr. D. van Dantzig, Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O.), Holland