

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

Einige analytische Ergebnisse über die
Wasserbewegung in einem untiefen Meere

D. van Dantzig

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Einige analytische Ergebnisse über die
Wasserbewegung in einem untiefen Meere

D. van Dantzig

Die freundliche Einladung des örtlichen Tagungsleiters dieser Versammlung, einen Hauptvortrag zu halten über einige in den letzten Jahren in den Niederlanden durchgeführten Forschungen auf dem Gebiete der angewandten Mathematik bietet mir die Gelegenheit Ihnen einen, sei es sehr unvollständigen, Überblick zu geben über einige Arbeiten, die unter meiner Leitung seit 1953 in der Abteilung für angewandte Mathematik des Mathematischen Zentrums in Amsterdam vollbracht wurden. Sie wurden veranlasst durch die Sturmflut, die unser Land am 1. Februar 1953 getroffen hat, beruhen auf einen Auftrag des Rijksstudiedienst van de Waterstaat, und bezwecken, einiges Verständnis zu gewinnen für die Weise in der einer über ein Meer, insbesondere die Nordsee, bewegender Sturm die Höhe des Meeresniveaus beeinflusst. Obwohl die endgültige Lösung des Problems noch in unabsehbarer Ferne liegt, möchten unsere nicht ganz erfolglos geblieben Bemühungen, die sich gezwungenermassen nur noch auf wesentlich einfachere Probleme beziehen, vielleicht doch einiges Interesse erwecken können.

Bis auf einige wenige durch die Umstände erzwungene Ausnahmen sind die Ergebnisse nicht mir selbst, sondern meinen Mitarbeitern zu verdanken. Dies waren anfangs Herr T.C. Braakman und Herr G.W. Veltkamp, später Herr Dr H.A. Lauwerier, und jetzt auch Herr Dr D.J. Hofsommer. Wenn auch gelegentlich Anregungen, Ansätze und weitere Suggestionen meinerseits in den Berichten verarbeitet wurden, so haben doch meine Mitarbeiter zum grössten Teil ihre Ergebnisse selbständig erhalten.

Zeitbeschränkung nötigt mich, mich auf einen Teil -- sei es einen wichtigen Teil -- der Arbeiten zu beschränken, alle Ansätze zu den Eigenwertproblemen ausser Betracht zu lassen, und auch von den zu behandelnden Arbeiten nur einen manchmal oberflächlichen und sehr unvollständigen Überblick zu geben.

In seinem Einladungsbrief schrieb Herr Kollege Dörr, dass bei den unter meiner Leitung durchgeführten Arbeiten "die numerischen Rechnungen erst nach Ausschöpfung aller analytischen Hilfsmittel in Angriff genommen werden".

Obwohl diese Formulierung geradezu dazu auffordert, die Vorteile der numerischen und diejenigen der analytischen Methoden gegen einander abzuwägen, möchte ich jetzt auf diese Frage nicht näher eingehen, und mich nur auf eine Bemerkung beschränken. Einerseits wäre es natürlich töricht, bei der Lösung eines Problems der angewandten Mathematik die vorhandenen maschinellen Hilfsmittel nicht vollständig auszunützen, auch wenn dabei einen Kurzschluss über die klassischen mathematischen Ergebnisse hinweg vorgenommen werden muss. Andererseits aber hat man als Mathematiker das Gefühl, dass die Entwicklungen einer Lösung in Reihen oder Integrale von einfacheren Funktionen, zu denen eine analytische Behandlungsweise führt, gewisse Einsichten in die Struktur des Lösungssystems gestatten, die die rein numerische Behandlungsweise, wenigstens heutzutage, uns noch nicht gewährt. Es lässt sich aber gar nicht leicht entscheiden, ob dieses Gefühl zurecht oder zu unrecht besteht, und ob der Widerwillen des Mathematikers, seine Daseinsberechtigung darin zu sehen, dass er die Maschine mit Programmen füttern darf, einen rationalen Hintergrund besitzt. Vielleicht kommt dieses Gefühl darauf hinaus, dass bei der rein maschinellen Behandlung gewisse Erkenntnisse, die wir als wichtig betrachten, vielleicht wohl im Gedächtnis der Maschine verborgen sind, aber jedenfalls nicht in unser eigenes Gehirn aufgenommen werden.

1. Formulierung und erste Reduktion des Problems.

Die meisten Arbeiten, die seit etwa 5 Jahren in der Abteilung für angewandte Mathematik des Mathematischen Zentrums in Amsterdam unter meiner Aufsicht ausgeführt wurden, beziehen sich auf die Bewegung des Wassers in einem rotierenden Becken unter Einfluss von gegebenen, von einem Windfelde verursachten, Kräften an der Oberfläche, sowie von Bodenreibung.

Einer der Nachteile der analytischen Behandlungsweise besteht darin, dass man erhebliche, und im Grunde nicht gerechtfertigte Vereinfachungen anzubringen genötigt ist. Als Modell für die Wasserbewegung in einem Meer unter Einfluss von Gravitation, Wind und Reibung, betrachten wir diejenige in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Bassin von konstanter Tiefe. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen werden durch die entsprechenden linearisierten ersetzt, d.h. wir betrachten in erster Näherung kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustand. In der linearen Annäherung (nicht in Wirklichkeit) kann deshalb die Gezeitenbewegung ausser Betracht gelassen werden, weil die berechnete Bewegung auf sie superponiert wird. Der Einfluss des Windes wird als eine gegebene Schubspannung ¹⁾ an der Oberfläche betrachtet; die Reibung (insbesondere die Bodenreibung) wird durch eine der lokalen Geschwindigkeit proportionale Massenkraft ersetzt. Entlang einer jeden Vertikalen wird eine quasistatische Druckverteilung angenommen, und die Geschwindigkeitskomponenten werden durch ihre Integrale über eine solche Vertikale ersetzt. Schliesslich werden als Randbedingungen nur undurchdringbare Küsten oder Begrenzungen durch Ozeane in Betracht gezogen, welche letztere als unendlich tief angesehen werden.

Wir stellen das Bassin durch das ebene Gebiet D , seinen Rand durch C , $D+C$ durch \bar{D} , die über die Vertikale integrierten Geschwindigkeitskomponenten im Punkte (x,y) durch $\vec{u}=(u_1, u_2)$ vor, die Erhebung des Wasserspiegels über das

1) Das barometrische Feld kann als ein Gradientfeld in der äusseren Kraft aufgenommen werden, und wird deswegen nicht ausdrücklich erwähnt.

Gleichgewichtsniveau durch w , die Komponenten der durch den Wind verursachten Kraft durch $\vec{X}=(X_1, X_2)$, den Reibungskoeffizienten durch λ , den Coriolis-Parameter ($=2\omega \sin\beta$) durch Ω , die Tiefe durch h , die Gravitationsbeschleunigung durch g , die stationäre Wellengeschwindigkeit \sqrt{gh} durch c , und die Dichte durch ρ .

Die linearisierten Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung lauten dann bekanntlich ²⁾

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \lambda u_1 - \Omega u_2 + c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = X_1 \\
 1.1 \quad & -\Omega u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} + \lambda u_2 + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} = X_2 \\
 & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

oder in Vektorform

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lambda \vec{u} - \vec{\Omega} \times \vec{u} + c^2 \text{grad } w &= \vec{X} \\
 \text{div } \vec{u} + \frac{\partial w}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

wo $\vec{\Omega}$ ein senkrecht nach oben gerichteter Vektor der Länge Ω bezeichnet. Entlang einer Küste C_k verschwindet die normale Geschwindigkeitskomponente u_n , entlang eines Ozeanrandes C_o die Erhebung w .

Wir nehmen eine Laplace Transformation vor, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wir die alten Bezeichnungen für die Laplace Transformierten beibehalten, wir ersetzen den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial t}$ durch einen Faktor p . Selbstverständlich wird dadurch eine der wesentlichen Schwierigkeiten bis zum Schluss hinweggeschoben, nämlich die Umkehrung der Laplace Transformation. (Vgl. §3).

Die Determinante der Koeffizient-Operatoren der linken Glieder von (1.1) ist, mit $p = \frac{\partial}{\partial t}$:

 2) Vgl. Lamb Hydrodynamics (Tidal Waves), 6th ed., p.318, Cambridge 1932.

$$1.2 \quad \begin{vmatrix} p+\lambda & -\Omega & c^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \Omega & p+\lambda & c^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & p \end{vmatrix} = c^2(p+\lambda)\Delta - p\{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}.$$

wo $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 3.) Elimination von u_1 und u_2 ergibt also für w eine Gleichung

$$1.3 \quad \Delta w - \kappa^2 w = c^{-2} F$$

wo

$$1.4 \quad \kappa^2 \stackrel{\text{def}}{=} c^{-2} p(p+\lambda)^{-1} \{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}.$$

$$1.5 \quad F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\Omega}{p+\lambda} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) \\ = \operatorname{div} \vec{X} + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{rot} \vec{X}$$

mit

$$1.6 \quad \operatorname{tg} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega}{p+\lambda}.$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$1.7 \quad \begin{cases} w=0 & \text{entlang eines Ozeans} \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial w}{\partial s} = f/c^2 & \text{entlang einer Küste} \end{cases}$$

mit

$$1.8 \quad f = X_n + \operatorname{tg} \gamma X_s$$

wo X_n , X_s die normale und die tangentielle Komponente des Vektors \vec{X} darstellen, erstere beim durchlaufen des äusseren Randes von D im positiven Sinne nach aussen gerichtet.

Die Geschwindigkeitskomponenten u_1, u_2 , welche Gleichungen derselben Form (1.3) (mit demselben κ^2 , aber mit andren rechten Gliedern) genügen, ergeben sich sofort aus w :

$$1.9 \quad u_1 = \{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} \left\{ (p+\lambda) \left(X_1 - c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \Omega \left(X_2 - c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \\ u_2 = \{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} \left\{ -\Omega \left(X_1 - c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (p+\lambda) \left(X_2 - c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}$$

oder in Vektorform

$$\vec{u} = \{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}^{-1} (p+\lambda + \vec{\Omega} \times) (\vec{X} - c^2 \operatorname{grad} w).$$

3) Das Symbol $\stackrel{\text{def}}{=}$ bezeichnet eine Gleichheit, die das linke Glied durch das rechte definiert.

Wir bemerken noch, dass, bei konstantem $(p+\lambda)^2 + \Omega^2$,
 $u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y}$, $u_1 = -\frac{\partial u_2}{\partial y}$ ist.

Die grössten Schwierigkeiten werden von der "schiefen" Randbedingung (1.7), also von der Corioliskraft verursacht, die weiteren von der komplizierten Form (1.4) von x^2 , das für $\Omega = \lambda = 0$ einfach p^2/c^2 wäre. Man möchte deswegen ersuchen, eine Störungsrechnung hinsichtlich Ω vorzunehmen. Dies aber geht nur für viel kleinere Gebiete als die Nordsee. Im allgemeinen kann man sagen, dass anfänglich wenn ein Sturm einsetzt, nur die äusseren Kräfte \vec{X} von Bedeutung sind; nach einiger Zeit beginnt sich der Einfluss von Ω zu zeigen, und noch später macht sich die Reibungsdämpfung bemerkbar. Auf dem Höhepunkt eines Orkans lässt sich keine dieser Faktoren vernachlässigen. Bei einem einigermaßen lange anhaltendem Sturm wäre vielmehr p im Vergleich zu Ω (nicht aber zu λ) als Ω gegenüber p vernachlässigbar. Auch macht es die Corioliskraft unmöglich, die Wasserbewegung zu eindimensionalisieren, sogar wenn man die Nordsee als ein unendlich langes Kanal betrachtet; die Querbewegung ist dafür von zu grossem Einfluss.

§2. Zurückführung auf Fundamentallösungen.

Zur Diskussion der Lösungsmethoden der Differentialgleichung (1.3) mit den Randbedingungen (1.7) benutzen wir den Greenschen Satz. Einfachheitshalber setzen wir das Gebiet D als einfach zusammenhängend voraus, und sein Rand C sei stückweise glatt und bestehe aus zwei Teile C_o (Ozeanrand), C_k (Küste) die je aus endlich vielen Bögen bestehen. Weder die Konstanz von κ^2 aus (1.4), noch die stückweise Konstanz von $\tau(s)=\text{tg}\gamma$ aus (1.7) auf C_k ist für das nächstfolgende nötig. Punkte (x,y) , (x_o,y_o) , u.s.w. seien kurz mit P, P_o , u.s.w. angedeutet. Die Entfernung

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ zweier Punkte P_1, P_2 sei mit $\rho(P_1, P_2)$ bezeichnet. Es sei $C_2(D)$ die Menge aller Funktionen in D , die dort zweimal stetig differenzierbar und am Rande stückweise glatt sind, und $S(D, M)$ die Menge aller Funktionen wo dies für das Komplement bzgl. D einer endlichen Menge $M \in D$ gilt, und die in jedem $c \in M$ wie $-(2\pi)^{-1} \ln \rho(P, c)$ unendlich werden.

Für je zwei Funktionen $\varphi \in S(D, M_1), \psi \in S(D, M_2)$, wo $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ sei, gilt dann für die "Dirichletsche Entfernung" ⁴⁾

$$2.1 \quad E\{\varphi, \psi\} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \kappa^2 \varphi \psi \right) dx dy =$$

$$= - \iint_D \varphi (\Delta \psi - \kappa^2 \psi) dx dy - \int_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \sum_{a \in M_2} \varphi(a)$$

Weil $E\{\varphi, \psi\}$ offenbar symmetrisch ist, erhalten wir für den Fall, wo M_1 nur aus einem Punkte P_o besteht:

$$2.2 \quad \begin{aligned} \psi(P_o) = & \iint_D \psi (\Delta \varphi - \kappa^2 \varphi) dx dy - \iint_D \varphi (\Delta \psi - \kappa^2 \psi) dx dy + \\ & + \int_{C_o} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{C_o} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_{C_k} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) \varphi \right) ds \\ & - \int_{C_k} \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds + \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial s} (\varphi \tau(s) \psi) ds + \sum_{a \in M_2} \varphi(a) \end{aligned}$$

Es sei jetzt $\psi(P)=w(P)$ eine Lösung $\in C_2(D)$ von (1.3), (1.7), und $\varphi(P)=G(P_o, P)$ eine beliebige Funktion $\in S(D, z_o)$. Dann

⁴⁾ Vgl. z.B. S. Bergmann and M. Schiffer (1953), p.

wird (2.2), unter Voraussetzung dass $\varphi \tau \psi$ auf ganz C stetig und stückweise glatt ist⁵⁾:

$$2.3 \quad w(P_0) = - \iint_D GF \, dx dy + \int_{C_k} Gf \, ds + \\ + \iint_D w(\Delta G - \kappa^2 G) \, dx dy - \int_{C_0} G \frac{\partial w}{\partial n} \, ds + \\ + \int_{C_k} w \left(\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) G \right) ds.$$

Folglich, falls A. eine verallgemeinerte Greensche Funktion G gefunden worden ist, d.h. dass G a) der homogenen Differentialgleichung

$$2.4a \quad \Delta G - \kappa^2 G = 0 \quad \text{in } D$$

b) der Ozeanbedingung

$$2.4b \quad G=0 \quad \text{auf } C_0$$

c) der homogenen adjungierten Küstenbedingung

$$2.4c \quad \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \tau(s) G = 0 \quad \text{auf } C_k$$

genügt, dann ergibt (2.3) eine explizite Darstellung von $w(P_0)$ mittels Quadraturen. Falls aber B. eine Funktion G bekannt ist, die wohl der Differentialgleichung (2.4a) und der Ozeanbedingung (2.4b), aber nicht der Küstenbedingung (2.4c) genügt, so stellt (2.3) eine für $P \in C_k$ singuläre Integralgleichung für $w(P)$ entlang der Küste C_k vor. Falls G überdies der Küstenbedingung auf einem Teile von C_k genügt, so bleibt eine ebensolche Gleichung für den Rest von C_k übrig. Diese singuläre Integralgleichungen können mittels bekannter Methoden, die zum Beispiel im Buche Muskhelishvili's über singuläre Integralgleichungen dargestellt worden sind, durch Ausübung des adjungierten Integraloperators in reguläre verwandelt, und sodann nach klassischen Methoden aufgelöst werden.

Man kann aber auch sofort eine reguläre Integralgleichung erhalten, sei es eine zweidimensionale, falls man C . eine Funktion $G=G_0$ bestimmen kann, die den sämtlichen Randbedingungen (1.13b,c), aber nicht der Differentialgleichung (1.13a) genügt, aber B. anstatt dessen harmonisch ist ($\Delta G_0=0$). Für den Fall wo C_0 (also auch C_k) ein zusammenhängender Bogen ist,

5) Also, wenn φ und ψ stetig sind auf C , muss in jeder etwaigen Unstetigkeitsstelle von $\tau(s)$ entweder φ oder ψ verschwinden.

hat H.A. Lauwerier (TW31, 1955) eine solche Funktion G_0 konstruiert mittels einer konformen Abbildung von D auf eine Halbebene, bei der C_0 auf die negative reelle Achse abgebildet wird.

Man kann G_0 durch eine Summe von vier Gliedern von der Form $\pm \frac{1}{4\pi i} H\left(\frac{M(x+iy)}{M(x_0+iy_0)}\right)$ vorstellen, wo $H(w)$ eine unvollständige Beta-Funktion ist. Für den Spezialfall eines Rechtecks von der Breite $2a$ und der Länge $2b$, wo C_0 eine Rechtecksseite ist, und das ein Modell der Nordsee darstellt, ist $M(z) = \varphi(z-2a-2ib) - \varphi(2ib)$.

Es ergibt sich dann für w unter Vertauschung von P und P_0 aus (1.12)

$$2.5 \quad w(P) = -\kappa^2 \iint_D w(P_0) G_0(P, P_0) dx_0 dy_0 + \int_{C_k} G_0(P, P_0) f(z_0) ds_0 - \iint_D G_0(P, P_0) F(z_0) dx_0 dy_0$$

aus welcher sich w mittels der Neumannschen Reihe als eine Potenzreihe nach Potenzen von κ^2 ergibt.

Weil dabei der Koeffizient von κ^{2n} u.A. noch ein $2n$ -faches Integral enthält, worin der Integrand a) vom Aufpunkte P , b) von den Randbedingungen, c) von der Form des Gebietes, d) von dem gegebenen äusseren Felde abhängt, ist es von Bedeutung, die Fälle zu betrachten, in denen sich die Greensche Funktion explizit bestimmen, und zwar mittels einer beschränkten Anzahl von Integrationen herstellen lässt. Dies ist gelungen für diejenigen Gebiete, die nur von höchstens zwei Geraden begrenzt werden.

Die zu bestimmende Greensche Funktion sei, unter Vertauschung der Punkte P und P_0 , mit $G(P, P_0)$ bezeichnet. Sie genügt dann sowohl hinsichtlich P als P_0 der Differentialgleichung (2.4a) als der Ozeanbedingung (2.4b). Der Küstenbedingung (2.4c) genügt sie nur hinsichtlich P_0 , während mit Bezug auf P die homogenisierte Bedingung (1.7), d.h. allgemeiner

$$2.6 \quad \frac{\partial G}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial G}{\partial s} = 0 \quad \text{auf } C_k$$

gilt. Die Funktion $G(P, P_0)$ ist also nicht symmetrisch. In

unsrem Fall, wo $\tau(s)=\text{tg}\gamma$ auf der Küste konstant ist, geht sie in sich über, falls die beiden Argumentpunkte vertauscht werden, und gleichzeitig das Vorzeichen von $\text{tg}\gamma$, d.h. von Ω umgekehrt wird.

§3. Bestimmung von Fundamentallösungen für von höchstens zwei Geraden begrenzten Meeren.

Ein wesentlicher Beitrag zur Bestimmung der Fundamentallösungen der Differentialgleichung

$$3.1. \quad \Delta G - \kappa^2 G = 0$$

mit homogenen schiefen Randbedingungen (vgl. 1.7) wurde von G.W. Veltkamp (1955) in einer kurzen internen Note für das Mathematische Zentrum gegeben, über deren Grundgedanken ich jetzt kurz berichten werde.

Die Fundamentallösung $G(P, P_0)$, die in der ganzen Ebene der Gleichung (3.1) genügt, im gegebenen Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ eine Singularität $G = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho(P, P_0) + O(1)$ für $P \rightarrow P_0$ und ins Unendlichen verschwindet ist gegeben durch die Besselsche Funktion

$$3.2 \quad \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa \rho} \operatorname{ch} \xi \, d\xi .$$

Wir werden sie, ähnlich wie in der Theorie der harmonischen Funktionen, kurz einen Pol (in P_0) nennen. Durch Differentiation nach dem "Aufpunkte" P_0 in eine vorgegebene Richtung, ergibt sie einen Dipol, durch zweifache Differentiation in zwei Richtungen einen Quadrupol, durch k -fache Differentiation einen 2^k -Pol. Wir betrachten den Richtungsdifferentialoperator

$$3.3 \quad D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} .$$

Die Operatoren D_α kommutieren für alle Werte von α , und sie erfüllen, wie man leicht einsieht, bei Beschränkung ihres Anwendungsbereiches auf Lösungen der Gleichung

$$3.4 \quad \Delta u - \kappa^2 u = 0,$$

die Identität

$$3.4 \quad D_{\alpha-\gamma} D_\beta - D_{\beta-\gamma} D_\alpha = \kappa^2 \sin(\alpha-\beta) \sin \gamma ,$$

oder auch

$$3.5 \quad D_{\alpha+\beta} D_{\alpha-\beta} = D_\alpha^2 - \kappa^2 \sin^2 \beta .$$

Für $\kappa=0$ ist $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_k} = D^k$, mit $\alpha = k^{-1} \sum_1^k \alpha_i$, sodass es für jedes k bis auf Bewegungen nur eine Art von harmonischen 2^k -Polen gibt; für $\kappa \neq 0$ aber ist das nicht der Fall. Zufolge (3.4) ist die schiefe Randbedingung $D_{\beta} f=0$ entlang der x -Achse erfüllt, falls $f=D_{-\beta} g$ und g als Funktion von y ungerade ist. Es ist dann nämlich $g=0$ für $y=0$, folglich auch $D_0^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ entlang der x -Achse, also nach (3.4) ebendort $D_{\beta} D_{-\beta} g = 0$.

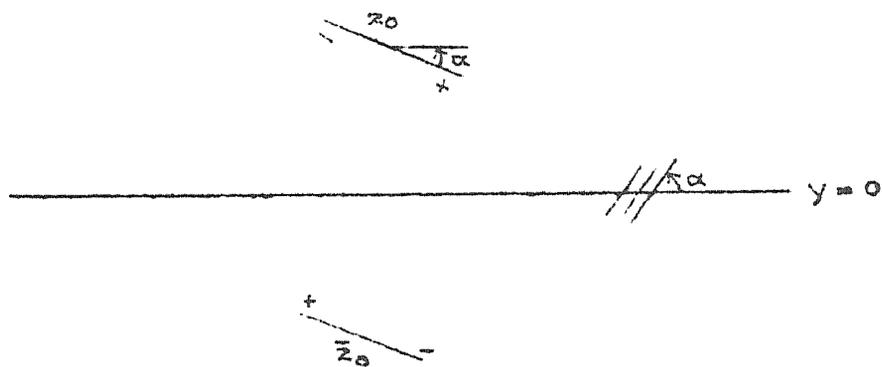
Um eine Fundamentallösung von (3.1) in der Halbebene $y > 0$ mit Pol in $z_0 = (x_0, y_0)$ zu erhalten, die der Randbedingung

$$3.6 \quad D_{\alpha} G = 0 \quad \text{für } y=0$$

genügt, setzen wir $\rho^* = \{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$ und $2\pi g = K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa\rho^*)$. Dann ist g ungerade in y ; folglich genügt

$$3.7 \quad u = \frac{1}{2\pi} D_{-\alpha} (K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa\rho^*))$$

sowohl (3.1) als (3.6). Diese Lösung besteht aus zwei entgegengesetzten parallelen Dipolen in den Spiegelpunkten z_0 und $\bar{z}_0 = (x_0, -y_0)$, deren Richtung spiegelbildlich zu α ist (vgl. Fig. 1).



Weil diese Lösung für jeden Aufpunkt z_0 der Bedingung (3.6) genügt, bleibt dasselbe der Fall, wenn man z_0 durch $(x_0 - t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ für alle $t > 0$ ersetzt und über t integriert. Dabei geht der Dipol in z_0 in einen einfachen Pol über, während der Dipol in \bar{z}_0 in eine mit gleichen und parallelen Dipolen gleichmässig besetzte Halbgerade in der Richtung α übergeht. Zerlegt man diese Dipole in ebensolche senkrecht und parallel dieser Halbgerade, so erhalten erstgenannte die Grösse $\sin 2\alpha$, werden letztere sich zu einem einzigen Pol in \bar{z}_0 der Stärke $-\cos 2\alpha$ zusammensetzen (Fig. 2, Fig. 3).

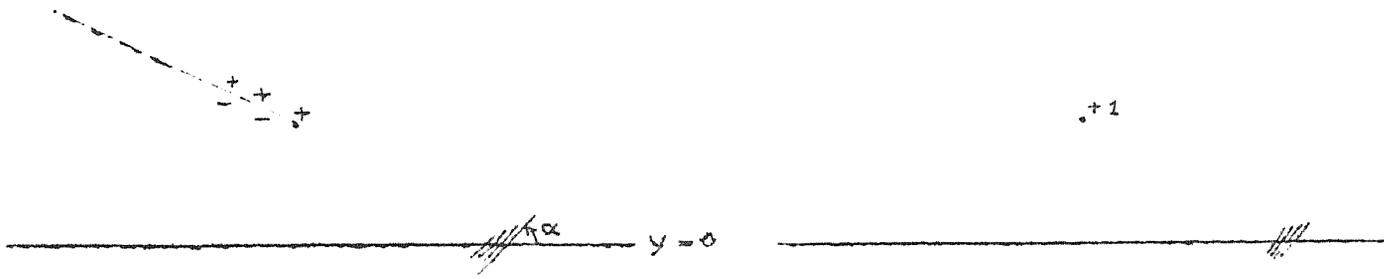


Fig.2

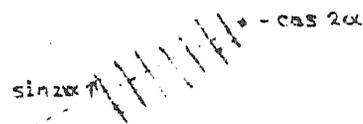


Fig.3

Analytisch wird die Lösung durch

$$3.8 \quad G = \frac{1}{2\pi} K_0(x\rho) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(t+i\alpha)}{\text{sh}(t-i\alpha)} e^{-x(y+y_0)\text{cht} - ix(x-x_0)\text{sht}} dt,$$

$$\frac{1}{2\pi} K_0(x\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x|y-y_0|\text{cht} - ix(x-x_0)\text{sht}} dt$$

gegeben.

Dieses Ergebnis, das Veltkamp auch für beliebige Richtung der begrenzenden Gerade herleitete, wurde auf etwas anderem Wege auch von H.A. Lauwerier bewiesen und zur Lösung des Randwertproblems für einen (beiderseits unendlichen) Parallelstreifen ausgenutzt (TW31). Für den Streifen $|x| < a$ (unendlich langer Kanal) mit

$$\frac{\partial G}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial G}{\partial y} \sin \gamma = 0 \quad \text{für } x = \pm a$$

wird

$$3.9 \quad G = \frac{1}{2\pi} K_0(x\rho) + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-x(2a+x_0-x)\text{ch}\eta} + e^{-x(2a-x_0+x)\text{ch}\eta} - \frac{\text{ch}(\eta-i\gamma)}{\text{ch}(\eta+i\gamma)} e^{x(x+x_0)\text{ch}\eta} - \frac{\text{sh}(\eta+i\gamma)}{\text{sh}(\eta-i\gamma)} e^{-x(x+x_0)\text{ch}\eta} \right\} \cdot \frac{e^{-ix(y-y_0)\text{sh}\eta}}{\text{sh}(2x a \text{ ch}\eta)} d\eta,$$

wofür auch

$$3.10 \quad G = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(y-y_0)\text{sh}\eta} d\eta \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x_0-4na| x \text{ ch}\eta} - \frac{\text{ch}(\eta-i\gamma)}{\text{ch}(\eta+i\gamma)} e^{-((4n+2)a-x-x_0)x \text{ ch}\eta} - \frac{\text{ch}(\eta+i\gamma)}{\text{ch}(\eta-i\gamma)} e^{((4n+2)a+x+x_0)x \text{ ch}\eta} \right\}$$

geschrieben werden kann. (Vgl. Fig. 4). Der für ungerades n auftretende Faktor $\frac{\text{ch}(t-i\gamma)}{\text{ch}(t+i\gamma)}$ ändert einen Pol in einen "Dipolschwanz". Für den Streifen $0 < y < b$ mit

$$D_\alpha G = 0 \quad \text{für } y=0, \quad G=0 \quad \text{für } y=b$$

sodass $y=0$ eine Küste ($\alpha = \frac{1}{2}\pi + \gamma$) und $y=b$ eine Ozeanbegrenzung darstellt, erhält Lauwerier die Lösung

$$3.11 \quad G = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa\rho) - \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa\rho) + \\ + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \frac{\text{sh}(\kappa(y-a)\text{ch}\eta) \text{sh}(\kappa(y_0-a)\text{ch}\eta)}{1 + \frac{\text{sh}(\eta - i\gamma)}{\text{sh}(\eta + i\gamma)} e^{2\kappa a \text{ch}\eta}} \cdot e^{-i\kappa(x-x_0)\text{sh}\eta}$$

deren Schema in Fig. 5 skizziert worden ist.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich das Problem schon im einfachsten Falle wo der Rand eine Ecke vorzeigt, nämlich im Falle wo D ein Winkel ist, z.B. in Polarkoordinaten: $r > 0$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Wir werden da die Lösungen, insbesondere die Fundamentallösung der Gleichung (3.1) mit den Randbedingungen

$$3.12 \quad r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_1 \\ r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_2$$

betrachten, obwohl wir eigentlich nur die beiden Fälle $\gamma_1 = \gamma_2$ (zwei Küsten) und $\cot \gamma_1 = 0$ oder $\cot \gamma_2 = 0$ (eine Küste und ein Ozeanrand) (im letzteren Falle mit der Zusatzbedingung dass dort $w=0$ sei) bedürfen. Schon in 1956 hat G.W. Veltkamp (TW40) das Verhalten einer für $r \rightarrow 0$ endlich bleibenden Funktion w in der Umgebung der Ecke studiert, die in D definiert ist, und entweder für der Potentialgleichung $\Delta w = 0$ genügt (oder allgemeiner $\Delta w = O(r^{-2})$ für $r \rightarrow 0$) und den Randbedingungen (3.12) (mit w anstatt G ; im Falle $\gamma_1 = \gamma_2$ ist r^{-2} durch $r^{-2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ zu ersetzen), oder für $\kappa^2 \neq 0$ den speziellen Randbedingungen (3.12) mit $\gamma_1 = \gamma_2$ oder $\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$ genügt. Die Notwendigkeit mehrere verschiedene Fälle zu unterscheiden liess wenig Hoffnung, auf diesem Wege durch heranziehen höherer Näherungen weiterzukommen.

Jüngstens aber ist es uns gelungen, das Problem für den Winkel vollständig zu lösen. Herr Lauwerier's Krankheit zwang mich, eine schon in 1956 in groben Zügen skizzierte Methode selbst auszuarbeiten; seit der Wiedergewinnung seiner Kräfte hat Lauwerier sodann unabhängig von der meinigen das Problem nach einer anderen Methode gelöst, und später mehrere wertvolle Zusätze zur meinigen angebracht. Lauwerier's Methode beruht, ähnlich wie es bei den Wiener-Hopf Methoden geschieht, auf der Zurückführung des Problems zu einem Hilbert Problem. In seinem Vortrag ⁶⁾ behandelt er in dieser Weise den speziellen Fall eines Vollwinkels. Ubrigens lassen sich die wichtigsten Elemente jeder der beiden Methoden auch bei der anderen zurückführen. Ich werde deswegen meine eigene Lösung kurz skizzieren.

1. Ist G in $D \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \varphi) \mid r > 0, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ mit Ausnahme höchstens einer endlichen Menge von logarithmisch singulären Stellen eine Lösung der Gleichung (3.1) die für $r \rightarrow \infty$ genügend schnell gegen Null geht, so ist

$$3.13 \quad U(\eta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \operatorname{ch} \eta \int_0^{\infty} e^{i\kappa r \operatorname{sh} \eta} G(r, \varphi) dr$$

eine harmonische Funktion, also in der Form

$$3.14 \quad U(\eta, \varphi) = U_1(\eta + i\varphi) + U_2(-\eta + i\varphi)$$

zu schreiben. Dabei sind U_1 und U_2 stückweise holomorph für $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$; auf den Geraden $\varphi = \text{konst.}$, die den Singularitäten von G entsprechen können U_1 und U_2 sich unstetig ändern. Sind andererseits U_1 und U_2 stückweise holomorph und für $\eta \rightarrow \pm \infty$ $(\operatorname{ch} \eta)^c U \rightarrow 0$ für einen gewissen Konstant c , so genügt, der Lösung von (3.13), (3.14) entsprechend,

$$3.15 \quad G(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa r \operatorname{sh} \eta} \{U_1(\eta + i\varphi) + U_2(-\eta + i\varphi)\} d\eta$$

in D der Gleichung (3.13). Die Transformation (3.13) stimmt im wesentlichen mit einem schon von A.S. Peters ⁷⁾ für das "sloping beach" Problem benutzten überein.

6) H.A. Lauwerier, A uniform windfield on a rotating sea in presence of a semi-infinite barrier.

7) Comm. on pure and appl. math. vol. V (1952), New York Univ.

2. Den Randbedingungen (3.12) entsprechen zwei Funktionalgleichungen für U_1 und U_2 , die eine spezielle Lösung

$$3.16 \quad U_1(\zeta) = U_2(\zeta) = \Phi(\zeta)$$

besitzen, wo $\Phi(\zeta)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion ist. Und zwar ist

$$3.17 \quad \Phi(\zeta) = e(\zeta - i\varphi_1, \gamma_2) / e(\zeta - i\varphi_2, \gamma_1)$$

wo $e(\zeta, \gamma)$ für $|\operatorname{Im} \zeta| < \Theta + \frac{\pi}{2} - |\gamma|$ durch

$$3.18 \quad e(\zeta, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t \operatorname{sh} \frac{1}{2} \pi t} \frac{\operatorname{sh} \gamma t (1 - \cos \zeta t)}{\operatorname{sh} \Theta t}$$

$$3.19 \quad \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2 - \varphi_1$$

definiert, aber in der ganzen Ebene meromorph ist.

Gemäss (3.15) entspricht Φ eine überall in \bar{D} , ausser vielleicht in $r=0$ reguläre Lösung von (3.1), (3.12). Für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ist sie auch für $r=0$ regulär.

Für $\gamma_1 \leq \gamma_2$ dagegen gibt es keine überall, einschliesslich $r=0$ reguläre nicht-triviale Lösung. ⁸⁾

3. Um die Fundamentallösung zu finden, müssen wir die Funktion $K_0(x, \rho(P, P_0))$ in der Form (3.15) darstellen:

$$3.20 \quad K_0 = K_0(x, \rho(P, P_0)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix r \operatorname{sh} \eta + ix r_0 \operatorname{sh}(\eta + i|\varphi - \varphi_0|)} d\eta.$$

Je nachdem $\varphi > \varphi_0$ oder $\varphi < \varphi_0$ ist, entspricht also U_2 oder U_1 der Null, und U_1 oder U_2 der Funktion $(4\pi)^{-1} e^{ix r_0 \operatorname{sh}(\eta + i|\varphi - \varphi_0|)}$.

Fordern wir jetzt, dass $G - (2\pi)^{-1} K_0$ überall regulär ist. Es entstehen U_1 und U_2 aus Φ durch Multiplikation zweier im Streifen $\varphi_1 \leq \operatorname{Im} \zeta \leq \varphi_2$ stückweis holomorphen Funktionen, die periodisch mit der Periode $2i\Theta$ sind, und an den Geraden $\varphi = \varphi_0 + 2m\Theta$ bzw. $\varphi = 2\varphi_1 - \varphi_0 + 2m\Theta$ (m gerade) einen Sprung $(4\pi)^{-1} e^{ix r_0 \operatorname{sh} \eta}$ bzw. $-(4\pi)^{-1} e^{ix r_0 \operatorname{sh} \eta}$ vorzeigen. Mittels einer Plemelj Formel lassen sich diese Funktionen dazu bestimmen.

Das Endergebnis ist

8) Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Lauwerier.

$$3.21 \quad G(r, \varphi) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xr \operatorname{sh} \eta) \sin(xr_0 \operatorname{sht}) \frac{\Phi(\zeta)}{\Phi(s)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\theta} s}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\theta} s - \operatorname{ch} \frac{\pi}{\theta} \zeta} ds d\zeta$$

für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \frac{\pi}{2}$, und

$$3.22 \quad G(r, \varphi) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xr \operatorname{sh} \eta) \cos(xr_0 \operatorname{sht}) \frac{\Phi(\zeta)}{\Phi(s)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\theta} \zeta}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\theta} s - \operatorname{ch} \frac{\pi}{\theta} \zeta} ds d\zeta$$

für $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}$

wo $\zeta = \eta + i\varphi$, $s = t + i\varphi_0$ und $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \theta$

gewählt ist.

Gemäss Lauwerier's Bemerkung ist die Lösung für $\gamma_1 \leq \gamma_2$ die einzige, die für $r=0$ endlich bleibt; für $\gamma_1 > \gamma_2$ kann man noch eine überall in D reguläre Lösung hinzufügen. Dadurch kann man erreichen, dass sie für $r=0$ Null wird. Die Lösung 3.22 ist dieser Forderung schon angepasst worden.

Weitere Untersuchungen dieser Lösung sind augenblicklich noch im Gange. Leider ist nicht zu erwarten, dass eine entsprechend einfache explizite Lösung für beliebige Form des Gebietes D anzugeben ist.

§4. Zeitabhängige Lösungen.

In kurzer Form möchte ich noch einiges berichten über die schon anfangs erwähnten Schwierigkeiten sowohl als Möglichkeiten bei der Umkehrung der Laplace Transformation. Herr Lauwerier hat dieses Problem in Angriff genommen, und wir verdanken ihm mehrere recht verschiedene, sei es immer noch einfache, Fälle vollständige Lösungen, manchmal bis zu numerischen Resultaten durchgerechnet.

Zunächst (TW35) betrachten wir den Fall, wo D die ganze unendliche Ebene ist, wo also weder Küsten noch Ozeane vorhanden sind. Ersetzen wir in

$$4.1 \quad K_0(\kappa r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \kappa r \operatorname{ch} \eta} d\eta$$

η durch $\eta + \ln \frac{\kappa}{p}$, und setzen wir für κ^2 den Ausdruck (1.4) ein, so ergibt sich

$$4.2 \quad K_0(\kappa r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} r p e^{-\eta} - \frac{1}{2} r (p+\lambda) e^{\eta} - \frac{1}{2} r \frac{\Omega^2}{p+\lambda} e^{\eta}} d\eta.$$

Zur Lösung kann man p mit dem Operator $\frac{\partial}{\partial t}$ identifizieren, und sodann (4.2) auf eine gegebene Funktion der Zeit $X(t)$ (die auch von den räumlichen Koordinaten abhängen kann) wirken lassen. Im einfachsten Falle, wo weder Reibung noch Drehung vorhanden ist ($\lambda = \Omega = 0$) ist $\kappa = p$, und (4.1) ergibt

$$4.3 \quad K_0(\kappa r) X(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - r \operatorname{ch} \eta) d\eta = \int_r^{\infty} X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}.$$

Falls wohl die Reibung, aber noch nicht die Erddrehung in Betracht gezogen wird, erhalten wir

$$4.4 \quad K_0(\kappa r) X(t) = \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda \tau} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \lambda \sqrt{\tau^2 - r^2} X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}.$$

und endlich im allgemeinen Fall

$$4.5 \quad K_0(\kappa r) X(t) = \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda \tau} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \lambda \sqrt{\tau^2 - r^2} X(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} - \frac{1}{2} \Omega \int_r^{\infty} e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\varphi J_1(\Omega \cos \varphi \sqrt{\tau^2 - r^2}) \cdot \exp \frac{\frac{1}{2} \lambda r^2}{\tau + \sin \varphi \sqrt{\tau^2 - r^2}}.$$

ein Ausdruck der noch verschiedentlich umgeformt werden kann. Lauwerier betrachtet speziell den Fall wo, bis auf eine zeitlich konstante Funktion, $X(t) = u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ist, d.h. wo ein Windfeld plötzlich einsetzt und dann konstant bleibt. Insbesondere hat er die folgenden Spezialfälle untersucht:

- a. Kein Wind; rotationssymmetrisch verteilte Depression. Es handelt sich dann lediglich um ein Barometergefälle, d.h. der Vektor \vec{X} in § 1 ist ein Gradient.
- b. Rotationssymmetrisches wirbelfreies Feld. (Auch hier ist \vec{X} ein reiner Gradient.)
- c. Rotationssymmetrisches Wirbelfeld.
- d. Punktquellenfeld konstanter Richtung.
- e. Beliebiges Windfeld konstanter Richtung, das bis auf einen beliebigen zeitabhängigen Faktor, eine zeitlich konstante rotationssymmetrische, aber sonst beliebige Verteilung hat.

Schon vorher (TW32) hatte Lauwerier für den Fall einer Halbebene ein räumlich konstantes Windfeld untersucht, das von der Zeit mittels eines Faktors $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} m^2 t e^{-mt}$ ($t > 0$) abhängt, also anschwillt, ein Maximum erreicht und wieder abflaut. Die Erhebung w lässt sich mittels elementarer Methoden nur an der Küste berechnen, und wird dargestellt durch die Konvolution der beiden Funktionen

$$4.6 \quad \varphi(t) = \sin \alpha X(t) - \Omega \cos \alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} X(t-\tau) d\tau$$

und

$$4.7 \quad \psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t} I_0\left(\frac{1}{2}\lambda t\right) - \Omega e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda \tau} J_1(\Omega \tau) I_0\left(\frac{1}{2}\lambda(t-\tau)\right) d\tau.$$

Die numerischen Rechnungen hierzu wurden von der Rechenabteilung des Mathematischen Zentrums ausgeführt und gestatten eine gute Übersicht über die Weise, in der die Erhebung w vom Winkel α zwischen Windfeld und Küste abhängt.

Es ergibt sich, dass die maximale Erhebung für etwa $\alpha = 170^\circ$ maximal ist, so dass die Erhebung an der Küste viel stärker von einem zur Küste parallelen als von einem senkrecht einfallenden Wind beeinflusst wird, eine qualitativ von

vornherein einleuchtende Tatsache. Nachdem $w(t)$ sein Maximum erreicht hat, dämpft es allmählich in leicht oszillierender Weise ab; die Oszillationen haben eine Periode von etwa $\frac{2\pi}{\Omega}$ und korrespondieren analytisch mit den Singularitäten der Laplace Transformierten bei $p = -\lambda \pm i\Omega$. Das Erhebungsmaximum kommt viel später als das Windmaximum. Das Erhebungsmaximum hängt der Grösse nach kaum von Ω ab, in seiner Abhängigkeit von α aber (offensichtlich) sehr stark. Auf die wichtigen Untersuchungen Lauweriers bezüglich eines streifenförmigen Meeres ("unendlich breite Nordsee") einzugehen, sowie auf verschiedene spätere Ergebnisse, verbietet mir leider die Zeit.

Ich möchte noch einige Bemerkungen über die Inversion der Laplace Transformation im Falle des Streifens, also der Lösung (3.10) hinzufügen. Der exponentielle Faktor unter dem Integralzeichen lässt sich ganz ähnlich wie oben bei $K_0(\kappa r)$ durch Ersetzung von η durch $\eta + \ln \frac{\kappa}{p}$ behandeln. Weiter ist

$$4.8 \quad \frac{\operatorname{ch}(\eta + i\gamma)}{\operatorname{ch}(\eta - i\gamma)} = \left(1 + \frac{2i\Omega \operatorname{th} \eta}{p + \lambda - i\Omega \operatorname{th} \eta} \right) .$$

Hierin aber muss noch die obengenannte Verschiebung von η durchgeführt werden, wodurch $\operatorname{th} \eta$ in $\operatorname{th}(\eta + \ln \frac{\kappa}{p})$ übergeht. Nun ist

$$4.9 \quad \frac{\operatorname{ch}(\eta + i\gamma)}{\operatorname{ch}(\eta - i\gamma)} = \frac{p + \lambda - i\Omega}{p + \lambda + i\Omega} \frac{e^{2\eta}(p + \lambda + i\Omega)^2 + p(p + \lambda)}{e^{2\eta}(p + \lambda - i\Omega)^2 + p(p + \lambda)} .$$

Zerlegung in Partialbrüchen ergibt eine ziemlich unangenehme Abhängigkeit von η , da $e^{2\eta}$ unter dem Wurzelzeichen vorkommt.

Man muss aber bedenken, dass bei den wirklichen Anwendungen λ nur sehr ungenau bekannt ist. Die Berechnung der Reibung beruht nämlich auf Turbulenztheorien, die nicht alle das selbe Resultat geben (Schönfeld 1954).

Überdies ist die Reibung proportional zum Strom und unabhängig vom Winde angesetzt, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Schliesslich ist λ abhängig von, und zwar näherungsweise umgekehrt proportional mit, der Tiefe. Im Falle der Nordsee nun ist die Tiefe keineswegs konstant. Sie nimmt gen

Norden allmählich zu, und ist in der Mitte durch die Doggersbank stark beeinträchtigt. Es ist also der Wert von λ nicht nur nicht genau bekannt, sondern nicht mal genau definiert, ja, eben nicht genau definierbar. 7)

Nun hat es in der angewandten Mathematik nicht den mindesten Sinn, im rein mathematischen Teil vollkommene Exaktheit zu verlangen, wenn man bei der Anwendung auf sehr unexakt bestimmten Grössen stösst. Man wird also im letzten Glied der Formel (4.9) (die ich lediglich als Beispiel gewählt habe) bedenken, dass Vermehrung des Zählers sowie des Nenners mit $\frac{1}{4} \lambda^2$ lediglich auf eine kleine Änderung des Wertes von λ hinauskommt, also infolge der geringen Bestimmtheit von λ dasselbe Resultat ergibt. Nur für sehr lange anhaltende Stürme ist diese Änderung nicht genügend motiviert. Damit geht (4.9) über in

$$4.10 \quad \frac{\operatorname{ch}(z+i\delta)}{\operatorname{ch}(z-i\delta)} = \left(1 - \frac{2i\Omega}{p+\lambda+i\Omega}\right) \cdot \left\{ 1 + \frac{C_1}{e^{z(p+\lambda-i\Omega)+i(p+\frac{\lambda}{2})}} + \frac{C_2}{e^{z(p+\lambda-i\Omega)-i(p+\frac{\lambda}{2})}} \right\}$$

wo C_1 und C_2 nicht von p abhängen

Welche Möglichkeiten unsere Lösung des Problems vom Winkel bieten wird, lässt sich jetzt noch nicht sagen. Einige Bemerkungen aber kann man schon machen.

Die Nordsee hat bekanntlich in grober Annäherung die Form eines Rechtecks. Für die holländische Küste aber werden bei den häufigst vorkommenden Stürmen weder die Ostseite (Deutsche Bucht, Danmark, Kattegat, Norwegen), noch die Nordseite (Ozean, „rand“) grossen Einfluss haben. Ein rechtes Winkel ist deswegen als Modell nicht gar so schlecht, umso mehr als über den Einfluss des als Senke auftretenden Kanals, der genügend kleine Dimensionen hat um dort die Corioliskraft vernachlässigbar zu machen, schon eine ausführliche Untersuchung von Lauwerier vorliegt (TW36).

7) Ubrigens gilt Entsprechendes auch, sei es in geringerem Masse, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$ der ungestörten Wellen, die wir sogar als Einheit der Geschwindigkeit gewählt haben.

Eine über die Nordsee sich bewegende Depression wird durch eine Verteilung von Polen wiedergegeben, die sich hauptsächlich bei der Bahn des Zentrums der Depression anhäufen. Daneben haben wir die durch Reflexion an den Küsten entstehenden Pole samt ihre Multipol "schwänze", die hier in Form der Funktionen φ_0 auftreten, in Betracht zu ziehen. Die grössten, und heute noch nicht überschaubaren Schwierigkeiten wird wohl die Laplace Inversion der Faktoren φ_0 bereiten. Wegen der Dämpfung werden wiederholte Reflexionen wohl kaum einen merklichen Beitrag ergeben, es sei denn das Zentrum der Depression ziehe ganz nahe an den singulären Ecken vorbei, ein Tatbestand der sich nur selten (aber doch gelegentlich mal) vortut. Die Reflexionen an der schottisch-englischen Küste werden sicher wohl nicht vernachlässigbar sein, insbesondere wenn die Depression sich ziemlich nahe und parallel zu dieser Küste südwärts bewegt, oder wenn sich nahe dieser Küste ein starker barometrischer Gradient befindet. Beide Erscheinungen traten beim Februarsturm 1953 stark hervor. Die Reflexionen an unserer Küste schliesslich sind --für uns! -- die wichtigsten, insbesondere wenn sie nicht zustande kommen, denn eben das bedeutet den Deichbruch.

Obwohl also die analytische Behandlung von Problemen wie das hier besprochene ganz erheblichen Einschränkungen unterliegt, und keinenfalls eine maschinell numerische vollständig ersetzen kann, so hoffe ich doch in diesem Vortrag gezeigt zu haben, dass die klassischen Methoden der angewandten Mathematik noch keineswegs als überholt zu betrachten sind, und in enger Verbindung mit den numerischen einen nicht unerheblichen Beitrag zu unserem Verständnis bieten können, und dazu noch methodisch ganz interessante und für die Weiterentwicklung der reinen Mathematik nicht unbedeutende Ergebnisse vorzuzeigen vermag.

Literatur:

- D.van Dantzig, 1954, Mathematical problems raised by the flood disaster 1953, Proc.Int.Congress of Mathem. 1954, Amsterdam, p.218-239.
- 1956, Enkele voorbeelden van de berekening van waterhoogten onder de invloed van wind (Verslagen Kon.Ned.Ak.v.Wet.,afd. Nat.65,3, p.39-44.
- H.A. Lauwerier, TW31, 1955, The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary windfield.
- TW32, 1955, The motion of a half-plane sea under influence of a non-stationary wind.
- TW35, 1956, The influence of a disturbance upon an infinitely large shallow sea of constant depth.
- TW36, 1956, The windeffect in the Southern part of the North Sea due to a single storm and the influence of the Channel.
- TW41, 1957, The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea.
- TW42, 1957, Exponential windfields.
- G.W. Veltkamp, TW40, 1956, The behaviour of a solution of Helmholtz'equations near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives.
- Internal note, 1955, Singuliere oplossingen van de Helmholtz vergelijking in twee dimensies.
- J.C. Schönfeld, Internal Report, Rijkswaterstaat 1954, Vergelijkingen van een lange golfbeweging in twee dimensies.