

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

SD 111/78

MEI

P. GROENEBOOM, J. HEMELRIJK & F.J.A. OVERWEEL
ANALYSE VAN DE NAUWKEURIGHEID VAN LODINGEN
IN DE WESTELIJKE WADDENZEE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Analyse van de nauwkeurigheid van lodingen in de Westelijke Waddenzee

door

P. Groeneboom, J. Hemelrijk en F.J.A. Overweel

SAMENVATTING

Dit rapport is de samenbundeling van twee rapporten, waarvan het eerste reeds afzonderlijk is verschenen onder de titel:

SD 110/77. Eerste analyse van de nauwkeurigheid van lodingen verricht door verschillende schepen op dezelfde plaatsen op 2 en 3 maart 1976.

Dit rapport had de volgende samenvatting:

De resultaten van een onderzoek naar de nauwkeurigheid van lodingen zijn met behulp van een variantie-analyse model met stochastische termen geanalyseerd. De schattingen van de parameters in dit model zijn met behulp van twee verschillende methoden verkregen: de momentenmethode en de methode van de grootste aannemelijkheid. De twee methoden leverden hetzelfde algemene beeld op en in het bijzonder een schatting van ongeveer $0,7 \text{ dm}^2$ voor de variantie van de systematische afwijkingen van de schepen ten opzichte van elkaar. De samenvatting van het tweede rapport luidt:

Een tweede serie meervoudige metingen wordt geanalyseerd en met de eerste serie vergeleken. De analysemethode is verder geperfectioneerd. De systematische verschillen tussen de schepen blijken persistent en een verbeterde schatting van de variantie van die verschillen is rondweg 1 dm^2 .

TREFWOORDEN: *gemengde modellen, MINQUE-analyse*

INHOUD

Eerste rapport:

1. Inleiding 1

2. Model 1

3. Kwadratenschatters volgens de momenten methode 3

4. Berekening van de schattingen 7

5. Toetsingen10

6. Methode van de grootste aannemelijkheid12

7. Conclusies21

8. Literatuur22

Tweede rapport:

9. Inleiding23

10. De nauwkeurighedsanalyse26

11. Conclusies van algemene aard40

12. Appendix40

13. Literatuur55

1. INLEIDING

Bij de lodingen in de Waddenzee worden verschillende schepen gebruikt, die metingen verrichten in series, varende over bepaalde trajekten. Daar deze metingen individueel veel minder nauwkeurig zijn dan het resultaat, dat men uiteindelijk wenst te bereiken is het van groot belang te beschikken over een bruikbaar wiskundig model. Dit model moet enerzijds nog eenvoudig genoeg zijn om statistische methoden toe te passen, doch anderzijds niet zoveel vereenvoudigende veronderstellingen bevatten, dat het zich te ver van de werkelijkheid verwijderd om nog betrouwbare resultaten te geven.

In dit rapport wordt op grond van de waarnemingen, waar in de titel op wordt gedoeld, een dergelijk model voorgesteld en voor zover de huidige waarnemingen en beschikbare statistische technieken dit toelaten, worden daarin schattingen berekend en toetsingen uitgevoerd. Hierbij zijn twee methoden gevolgd, een eenvoudige overzichtelijke en een verfijndere, maar minder overzichtelijke, waarvan de resultaten met elkaar worden vergeleken.

Bij eerste lezing krijgt men een indruk van de resultaten door de paragrafen 1,2 en 7 te lezen, benevens de tabellen 1,2,3,4 en 6.

2. MODEL

Als model hebben we gekozen:

$$(2.1) \quad \underline{Y}_{ijk} = \mu + \xi_i + \tau_j + \underline{w}_{jk} + \underline{e}_{ijk} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \text{ meetpunten} \\ j = 1, \dots, p \text{ schepen} \\ k = 1, \dots, q \text{ herhalingen} \end{array}$$

We veronderstellen τ_j , \underline{w}_{jk} en \underline{e}_{ijk} stochastisch onafhankelijk. Om goed te onderscheiden tussen stochastische grootheden enerzijds en parameters en verrichte waarnemingen anderzijds worden stochastische grootheden aangegeven door onderstreepte symbolen. De betekenis van de symbolen is de volgende:

\underline{Y}_{ijk} is de dieptemeting van het j-de schip, op het i-de punt in het

trajekt, tijdens de k-de vaart over dat trajekt.

μ is een algemeen gemiddelde van alle dieptepeilingen.

ξ_i is een afwijking van dat algemeen gemiddelde voor het i-de punt, of ook:

$\mu + \xi_i$ is de diepte voor het i-de punt.

τ_j is een stochastische grootte, die het effect van het schip aangeeft. Deze grootte is stochastisch genomen, omdat bij andere waarnemingsseries andere schepen zijn ingeschakeld. Op deze wijze kunnen we ons het schip-effekt denken als te zijn getrokken uit een bepaalde verdeling. We veronderstellen dat τ_j een normale verdeling met verwachting 0 en variantie T^2 heeft. (Notatie $\tau_j \sim N(0, T^2)$).

w_{jk} is de systematische fout in de k-de vaart van schip j tengevolge van bijvoorbeeld koersafwijking of getijverschillen. We veronderstellen $w_{jk} \sim N(0, W_j^2)$.

e_{ijk} is een algemene storingsterm. Ook hier veronderstellen we normaliteit: $e_{ijk} \sim N(0, F_j^2)$.

De aannames van normaliteit zijn nodig voor een deel van de uit te voeren toetsen, niet voor de schattingen van §3, maar wel voor de afleiding van die van §6. Het zal duidelijk zijn, dat de τ_j een grotere invloed heeft dan w_{jk} en e_{ijk} op de uiteindelijke onnauwkeurigheid. Immers het aantal vaarten (lanes dat gevaren wordt) is groot, zeg k_j en voor elke vaart wordt een nieuwe trekking uit de $(0, W_j^2)$ -verdeling gedaan, zodat de variantie van de gemiddelde systematische fout in de vaarten $\frac{W_j^2}{k_j}$ is. Het aantal meetpunten is nog veel groter, zeg n_j , zodat de variantie van de gemiddelde systematische fout in de punten $\frac{F_j^2}{n_j}$ is. De variantie van de gemiddelde systematische fout van de τ_j 's blijft vrij aanzienlijk, daar er slechts een beperkt aantal schepen is gebruikt. Hoewel het mogelijk is dat deze τ_j in de tijd verandert, is daar nu nog niets over bekend en gaan we er voorlopig vanuit, dat de τ_j de grootste invloed heeft op de uiteindelijke onnauwkeurigheid.

3. KWADRATENSCHATTERS VOLGENS DE MOMENTEN METHODE

3.1 Schatters voor ieder der schepen afzonderlijk.

In deze paragraaf worden formules afgeleid, waarmee schatters voor de parameters F_j^2 , W_j^2 en T^2 worden verkregen. Deze formules zijn ontleend aan de theorie van de gemengde lineaire modellen, wat betekent, dat in het model naast deterministische ook meerdere stochastische termen voorkomen. Vooraf nog even een notatie: we geven het gemiddelde over een bepaalde index aan met behulp van een punt, bijvoorbeeld: $\underline{Y}_{.jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{Y}_{ijk}$.

De schatters, die afgeleid worden zijn:

$$(3.1) \quad \hat{F}_j^2 = \frac{1}{(q-1)(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{ij.} - \underline{Y}_{.jk} + \underline{Y}_{.j.})^2$$

$$(3.2) \quad \hat{W}_j^2 = \frac{1}{n(q-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{ij.})^2 - \hat{F}_j^2$$

$$(3.3) \quad \hat{T}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (\underline{Y}_{.j.} - \underline{Y}_{...})^2 - \frac{1}{npq} \sum_{j=1}^p \hat{F}_j^2 - \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \hat{W}_j^2$$

Afleiding:

LEMMA. *Zijn $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m$ stochastisch onafhankelijk met*

$$E \underline{x}_h = 0 \text{ en } \sigma^2(\underline{x}_h) = E \underline{x}_h^2 = \sigma^2, \text{ dan is}$$

$$E \sum_{h=1}^m (\underline{x}_h - \underline{x}_{.})^2 = (m-1) \sigma^2 \text{ en}$$

$$E (\underline{x}_h - \underline{x}_{.})^2 = \frac{m-1}{m} \sigma^2.$$

BEWIJS.

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^m (\underline{x}_h - \underline{x}_{.})^2 &= \sum_{h=1}^m \{ \underline{x}_h^2 - 2 \underline{x}_h \underline{x}_{.} + \underline{x}_{.}^2 \} = \\ &= \sum_{h=1}^m \underline{x}_h^2 - \frac{2}{m} \left(\sum_{h=1}^m \underline{x}_h \right) \cdot \left(\sum_{h=1}^m \underline{x}_h \right) + m \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_{h=1}^m \underline{x}_h \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{h=1}^m \frac{x_h^2}{h} - \frac{m\bar{x}^2}{h}$$

$$E \sum_{h=1}^m (\frac{x_h - \bar{x}}{h})^2 = mE\frac{x_h^2}{h} - mE\frac{\bar{x}^2}{h} = m\sigma^2 - m\frac{\sigma^2}{m} = (m-1)\sigma^2 = (m-1) E\frac{x_h^2}{h}.$$

De tweede bewering in het lemma is een gevolg van het feit dat $E(\frac{x_h - \bar{x}}{h})^2$ voor elke h dezelfde is:

Schatting voor F_j^2

Om F_j^2 te schatten beschouwen we voor $j = 1, \dots, p$

$$E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{.jk} + Y_{.j.}}{h})^2 = \quad (\text{na substitutie van 2.1})$$

$$= E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{e_{ijk} - e_{ij.} - e_{.jk} + e_{.j.}}{h})^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^q (n-1) E (e_{ijk} - e_{ij.})^2 = (n-1)(q-1)F_j^2$$

zodat een zuivere schatter voor F_j^2 is

$$\hat{F}_j^2 = \frac{1}{(n-1)(q-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{.jk} + Y_{.j.}}{h})^2.$$

Schatting voor W_j^2

Teneinde een schatter voor W_j^2 af te leiden beschouwen we voor $j = 1, \dots, p$

$$(3.4) \quad E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{Y_{ijk} - Y_{ij.}}{h})^2 = E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{w_{jk} - w_{j.} + e_{ijk} - e_{ij.}}{h})^2 =$$

$$= E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q \{ (\frac{w_{jk} - w_{j.}}{h})^2 + (\frac{e_{ijk} - e_{ij.}}{h})^2 - 2(\frac{w_{jk} - w_{j.}}{h})(\frac{e_{ijk} - e_{ij.}}{h}) \} =$$

$$= E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q \{ (\frac{w_{jk} - w_{j.}}{h})^2 + (\frac{e_{ijk} - e_{ij.}}{h})^2 \},$$

immers daar w_{jk} en e_{ijk} stochastisch onafhankelijk zijn en verwachting 0 hebben is $E(\frac{w_{jk} - w_{j.}}{h})(\frac{e_{ijk} - e_{ij.}}{h}) = 0$. We bekijken de termen van (3.4) apart.

$$(3.5) \quad E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\frac{w_{jk} - w_{j.}}{h})^2 = \sum_{i=1}^n (q-1)W_j^2 = n(q-1)W_j^2$$

$$(3.6) \quad E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\underline{e}_{ijk} - \underline{e}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^n (q-1) F_j^2 = n(q-1) F_j^2$$

dus

$$E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{ij.})^2 = n(q-1) W_j^2 + n(q-1) F_j^2$$

zodat een zuivere schatter voor W_j^2 wordt

$$\hat{W}_j^2 = \frac{1}{n(q-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (\underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{ij.})^2 - \hat{F}_j^2.$$

Schatter voor T^2

We beschouwen de volgende verwachting van de som van kwadraten om T^2 te schatten

$$(3.7) \quad E \sum_{j=1}^p (\underline{Y}_{.j.} - \underline{Y}_{...})^2 = E \sum_{j=1}^p (\underline{\tau}_j - \underline{\tau}_{..} + \underline{w}_{j.} - \underline{w}_{..} + \underline{e}_{.j.} - \underline{e}_{...})^2 =$$

$$E \sum_{j=1}^p \{ (\underline{\tau}_j - \underline{\tau}_{..})^2 + (\underline{w}_{j.} - \underline{w}_{..})^2 + (\underline{e}_{.j.} - \underline{e}_{...})^2 \}$$

daar \underline{w}_{jk} , \underline{e}_{ijk} en $\underline{\tau}_j$ stochastisch onafhankelijk zijn met verwachting 0. We bekijken de drie sommen van kwadraten apart:

$$E \sum_{j=1}^p (\underline{\tau}_j - \underline{\tau}_{..})^2 = (p-1) T^2$$

$$E \sum_{j=1}^p (\underline{w}_{j.} - \underline{w}_{..})^2 = \frac{p-1}{p} \sum_{j=1}^p \sigma^2(\underline{w}_{j.}) = \frac{p-1}{pq} \sum_{j=1}^p W_j^2$$

$$E \sum_{j=1}^p (\underline{e}_{.j.} - \underline{e}_{...})^2 = \frac{p-1}{p} \sum_{j=1}^p \sigma^2(\underline{e}_{.j.}) = \frac{p-1}{npq} \sum_{j=1}^p F_j^2$$

dus

$$E \sum_{j=1}^p (\underline{Y}_{.j.} - \underline{Y}_{...})^2 = (p-1) T^2 + \frac{p-1}{pq} \sum_{j=1}^p W_j^2 + \frac{p-1}{npq} \sum_{j=1}^p F_j^2$$

een zuivere schatter voor T^2 is dus

$$\hat{T}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (\underline{Y}_{.j.} - \underline{Y}_{...})^2 - \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \hat{W}_j^2 - \frac{1}{npq} \sum_{j=1}^p \hat{F}_j^2.$$

3.2 Gewogen gemiddelde schatters

Stel we hebben voor de verschillende schepen de varianties F_j^2 , W_j^2 en T^2 geschat. We hebben dit gedaan voor 4 series waarnemingen met verschillende n en q , maar gelijke p (= aantal schepen). Deze n en q zijn n_1, n_2, n_3 en n_4 en q_1, q_2, q_3 en q_4 . Definieer nu voor elk van die waarnemingsseries de volgende sommen van kwadraten:

$$\begin{aligned} \underline{S}_\ell &= \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{k=1}^{q_\ell} (Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{.jk} + Y_{.j.})^2 \\ \underline{S}'_\ell &= \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{k=1}^{q_\ell} (Y_{ijk} - Y_{ij.})^2 \\ \underline{S}''_\ell &= \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{k=1}^{q_\ell} (Y_{.j.} - Y_{...})^2 \end{aligned} \quad \ell = 1, 2, 3, 4.$$

We noemen de schatting voor F_j^2 op grond van waarnemingsserie ℓ $\hat{F}_{j\ell}^2$ en op analoge wijze zijn $\hat{W}_{j\ell}^2$ en \hat{T}_ℓ^2 gedefinieerd.

Dan geldt voor elke $\ell = 1, \dots, 4$ en $j = 1, \dots, p$ (zie (3.1))

$$(q_\ell - 1)(n_\ell - 1) \hat{F}_{j\ell}^2 = \underline{S}_\ell, \text{ sommeren over } \ell:$$

$$\sum_{\ell=1}^4 \hat{F}_{j\ell}^2 (q_\ell - 1)(n_\ell - 1) = \sum_{\ell=1}^4 \underline{S}_\ell$$

de gewogen gemiddelde schatter van F_j^2 is dan

$$\hat{F}_j^2 = \frac{\sum_{\ell=1}^4 \underline{S}_\ell}{\sum_{\ell=1}^4 (q_\ell - 1)(n_\ell - 1)}.$$

Op dezelfde wijze volgt uit (3.2)

$$\begin{aligned} n_\ell (q_\ell - 1) \cdot (\hat{F}_{j\ell}^2 + \hat{W}_{j\ell}^2) &= \underline{S}'_\ell \\ \sum_{\ell=1}^4 (\hat{F}_{j\ell}^2 + \hat{W}_{j\ell}^2) n_\ell (q_\ell - 1) &= \sum_{\ell=1}^4 \underline{S}'_\ell. \end{aligned}$$

De gewogen gemiddelde schatter voor W_j^2 wordt:

$$\hat{\underline{W}}_j^2 = \frac{\sum_{\ell=1}^4 \underline{S}'_{\ell}}{\sum_{\ell=1}^4 n_{\ell}(q_{\ell}-1)} - \hat{\underline{F}}_j^2.$$

Uit formule (3.3) volgt:

$$(p-1)\hat{\underline{T}}_{\ell}^2 + \frac{p-1}{n_{\ell}pq_{\ell}} \sum_{j=1}^p \hat{\underline{F}}_{j\ell}^2 + \frac{p-1}{pq_{\ell}} \sum_{j=1}^p \hat{\underline{W}}_{j\ell}^2 = \underline{S}''_{\ell}$$

$$\sum_{\ell=1}^4 (p-1)\hat{\underline{T}}_{\ell}^2 = \sum_{\ell=1}^4 \underline{S}''_{\ell} - \sum_{\ell=1}^4 \left(\frac{p-1}{n_{\ell}pq_{\ell}} \sum_{j=1}^p \hat{\underline{F}}_{j\ell}^2 \right) - \sum_{\ell=1}^4 \left(\frac{p-1}{pq_{\ell}} \sum_{j=1}^p \hat{\underline{W}}_{j\ell}^2 \right)$$

dus de gewogen gemiddelde schatter voor T^2 wordt:

$$\hat{\underline{T}}^2 = \frac{1}{4(p-1)} \sum_{\ell=1}^4 \left[\underline{S}''_{\ell} - \left(\frac{p-1}{n_{\ell}pq_{\ell}} \cdot \sum_{j=1}^p \hat{\underline{F}}_{j\ell}^2 \right) - \left(\frac{p-1}{pq_{\ell}} \sum_{j=1}^p \hat{\underline{W}}_{j\ell}^2 \right) \right].$$

4. BEREKENING VAN DE SCHATTINGEN

Bij het uitvoeren van de berekeningen hebben we vier volledige schema's uit het materiaal gehaald, we duiden ze aan met blok 1 t/m blok 4. Een volledig schema betekent in ons geval, dat er per schip per meetpunt evenveel herhalingen van de meting zijn.

blok 1 - inlood 4 - punten 835,00 t/m 840,00 en

n = 26 p = 5 q = 5 840,75 t/m 841,75

blok 2 - inlood 6 - punten 835,00 t/m 844,50

n = 37 p = 5 q = 2

blok 3 - inlood 4 - punten 820,50 t/m 834,75

n = 57 p = 5 q = 4

blok 4 - inlood 7 - punten 835,00 t/m 840,50

n = 16 p = 5 q = 3 841,50 t/m 843,00.

In de blokken 1,2 en 3 zijn drie tussenpunten gemeten tussen twee opvolgende geheelwaardige punten, dus bijvoorbeeld: 835,00; 835,25; 835,50; 835,75; etc., bij het laatste blok telkens één tussenpunt, dus: 835,00; 835,50; 836,00 etc.

Uit blok 1 en blok 4 is een aantal punten weggelaten, omdat het profiel van de bodem daar erg steil is, zodat er onnauwkeurigheid als gevolg van de steilte geïntroduceerd wordt. Om een indruk te geven van het cijfermateriaal volgt hier een aantal tabellen. De eerste bevat $\underline{Y}_{.jk} - \underline{Y}_{...} = (\underline{\tau}_j - \underline{\tau}_.) + (\underline{w}_{jk} - \underline{w}_{..}) - (\underline{e}_{.jk} - \underline{e}_{...})$. De tweede tabel geeft een indruk van de spreiding van het schipeffect; hierin staan de waarden van $\underline{Y}_{.j.} - \underline{Y}_{...} = (\underline{\tau}_j - \underline{\tau}_.) + (\underline{w}_{j.} - \underline{w}_{..}) + (\underline{e}_{.j.} - \underline{e}_{...})$. In tabel 3 vatten we de blokken van de tabel 2 samen, door elke waarde per blok gewicht $n_{\ell} \times q_{\ell}$ (aantal punten \times aantal herhalingen van blok ℓ te geven en te delen door het totaal).

Tabel 1 $\underline{Y}_{.jk} - \underline{Y}_{...} = \underline{\tau}_j - \underline{\tau}_. + \underline{w}_{jk} - \underline{w}_{..} + \underline{e}_{.jk} - \underline{e}_{...}$

	k	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
blok 1	1	-2,45	1,35	-0,22	0,28	-1,30
	2	-0,18	0,62	0,20	1,01	-0,45
	3	-2,65	0,20	0,28	-0,65	-0,22
	4	-2,03	0,12	1,59	-0,11	0,16
	5	-2,22	1,51	1,78	0,47	2,93
blok 2	1	-0,80	-0,77	0,80	1,34	0,80
	2	-0,58	-0,88	0,04	1,61	-1,55
blok 3	1	-1,65	-0,23	0,02	1,54	-3,18
	2	-1,33	0,40	0,21	1,25	-0,58
	3	-0,74	0,12	0,07	1,35	0,25
	4	-1,14	0,30	0,93	0,95	1,49
blok 4	1	-1,31	0,32	0,82	0,50	-0,50
	2	-0,93	-0,06	0,32	0,50	0,82
	3	-1,81	0,57	1,13	1,13	-1,50

Tabel 2 $Y_{.j} - Y_{...} = \tau_j - \tau_{.} + w_{j.} - w_{..} + e_{.j} - e_{...}$

blok 1	-1,91	0,76	0,72	0,20	0,22
blok 2	-0,69	-0,83	0,42	1,47	-0,38
blok 3	-1,22	0,15	0,30	1,27	-0,50
blok 4	-1,35	0,28	0,75	0,71	-0,39

Tabel 3 Gewogen gemiddelden van de waarden uit tabel 2

-1,34	0,18	0,48	0,96	-0,28
-------	------	------	------	-------

Opmerking: de eenheid van de getallen in de tabellen 1,2 en 3 is dm.
 We gebruiken de in §3 ontwikkelde formules om $F_{j.}^2$, $W_{j.}^2$ en T^2 te schatten.
 De resultaten zijn in dm^2 .

Tabel 4 Schattingen van de varianties $F_{j.}^2$, $W_{j.}^2$ en T^2 per blok

blok 1	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A.Vierlingh
$F_{j.}^2$	2,62	5,90	2,73	1,20	12,01
$W_{j.}^2$	0,88	0,19	0,70	0,34	2,12
T^2	1,00				
blok 2					
$F_{j.}^2$	1,48	1,77	4,32	2,41	5,14
$W_{j.}^2$	-0,02	-0,04	0,17	-0,03	2,63
T^2	0,60				
blok 3					
$F_{j.}^2$	2,64	3,36	3,89	2,73	6,29
$W_{j.}^2$	0,10	0,02	0,12	0,01	3,78
T^2	0,65				
blok 4					
$F_{j.}^2$	0,66	1,74	1,40	0,26	3,08
$W_{j.}^2$	0,15	-0,01	0,08	0,11	1,15
T^2	0,65				

Opmerking: negatieve schattingen van de varianties kunnen ontstaan, doordat (zie formule (3.2)), het kan gebeuren, dat

$$\frac{1}{n(q-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q (Y_{ijk} - Y_{ij.})^2 < \hat{F}_j^2.$$

De beste schatter is dan 0, maar voor de berekening van de gecombineerde schattingen in tabel 5 zijn de negatieve waarden gehandhaafd en gewogen meegeteld. Negatieve waarden komen dan niet meer voor.

Tabel 5 gewogen gemiddelde variantie schattingen

	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A.Vierlingh
F_j^2	2,33	3,80	3,36	2,01	7,59
W_j^2	0,33	0,07	0,29	0,11	2,92
T^2	0,73				

5. TOETSINGEN

5.1 Toetsing van gelijkheid van F_1^2, \dots, F_5^2

Om een beter inzicht te krijgen in de waarde en betekenis van de verkregen schattingen, voeren we een aantal toetsingen uit. Laten we eerst nagaan in hoeverre het nodig is aan te nemen, dat de variantie van e_{ijk} per schip verschilt; daartoe toetsen wij

$$H_0: F_1^2 = F_2^2 = F_3^2 = F_4^2 = F_5^2.$$

Als toetsingsgrootte hiervoor nemen wij

$$\underline{V} = \max_{1 \leq j \leq p} \hat{F}_j^2 / \sum_{j=1}^p \hat{F}_j^2.$$

Kritieke waarden voor $\alpha = 0,05$ en $\alpha = 0,01$ zijn getabelleerd in tabel 31a van Biometrika Tables for Statisticians [4]. De toets wordt gewoonlijk naar zijn ontwerper W.G. Cochran genoemd. Voor onze vier blokken krijgen we

v	$v = (n-1)(q-1)$	kritieke waarden		
		$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	
12,01/24,46 = 0,49	100	0,26	0,28	*)
5,14/15,12 = 0,34	36	0,31	0,34	
6,29/18,91 = 0,33	168	0,24	0,25	*)
3,08/ 7,14 = 0,43	30	0,31	0,35	*)

*) de kritieke waarden voor $v = 100$, 168 en 30 zijn niet getabelleerd en verkregen door interpolatie.

Blijkbaar is ongelijkheid van F_j^2 wel degelijk het geval.

5.2 Toetsing van gelijkheid van W_1^2, \dots, W_5^2

Om na te gaan in hoeverre het nodig is aan te nemen dat de varianties van w_{jk} per schip verschillen is de te toetsen nulhypothese

$$H_0: W_1^2 = W_2^2 = W_3^2 = W_4^2 = W_5^2.$$

We kunnen niet dezelfde toets gebruiken, omdat de schatters van de W_j^2 bestaan uit de verschillen van twee sommen van kwadraten. Daarom nemen we onze toevlucht tot de toets van Friedman, ook wel de methode van m rangschikken genoemd. Een beschrijving van de methode staat in de Jonge [3]. We nummeren de schattingen van W_j^2 per blok naar opklimmende grootte. Deze rangnummers brengen we voor de 4 blokken onder in de volgende tabel en we tellen kolomsgewijs op.

	schip 1	schip 2	schip 3	schip 4	schip 5
blok 1	4	1	3	2	5
blok 2	3	1	4	2	5
blok 3	3	2	4	1	5
blok 4	4	1	2	3	5
totaal	14	5	13	8	20

De bijbehorende toetsingsgrootte is:

$$K = \sum_{j=1}^5 (S_j - S_{\cdot})^2, \text{ waarbij } S_j \text{ de kolomtotalen zijn.}$$

$$K = (14-12)^2 + (5-12)^2 + (13-12)^2 + (8-12)^2 + (20-12)^2 =$$

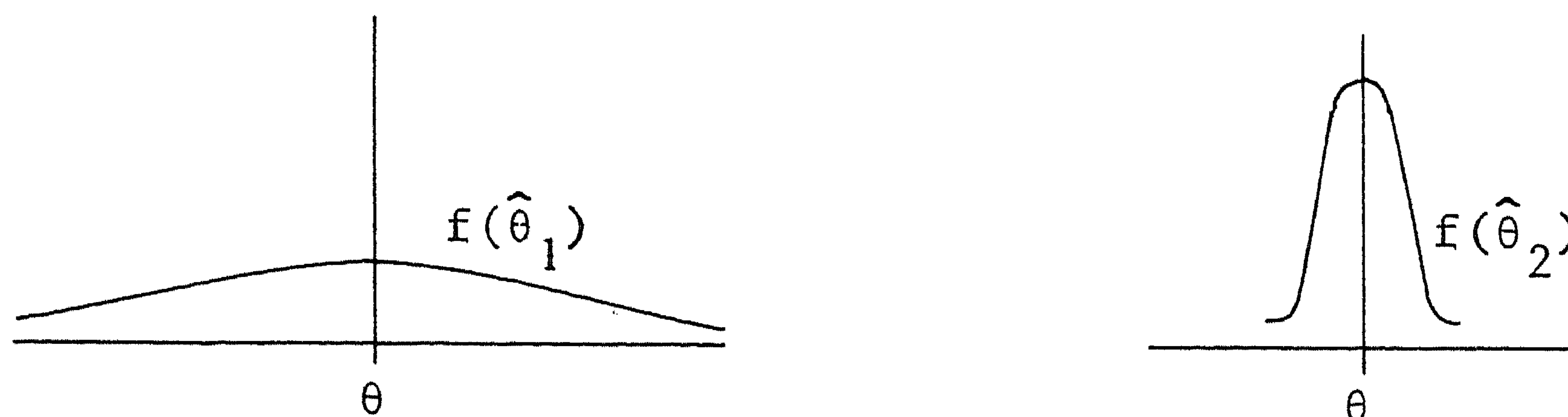
$$4 + 49 + 1 + 16 + 64 = 134$$

deze waarde overtreft de kritieke waarde voor $\alpha = 0,05$, die 89 is, verre, zodat we de nulhypothese moeten verwerpen. De aanname dat de W_j^2 per schip verschillen kan dus ook niet vermeden worden.

6. METHODE VAN DE GROOTSTE AANNEMELIJKHEID

6.1 Inleiding

In de vorige paragrafen werden de resultaten van de voor onzuiverheid gecorrigeerde "momentenmethode" bij het schatten van parameters beschreven. Dit betekent dat men bij het schatten van een parameter θ zoekt naar een schatter $\hat{\theta}$ waarvan men (onder de modelassumpties) weet dat $E\hat{\theta} = \theta$, dat wil zeggen men zoekt naar *zuivere* schatters. Hierbij moet echter worden opgemerkt dat zo'n zuivere schatter niet uniek bepaald is; er zijn meestal zeer veel zuivere schatters te bedenken, waaronder goede en slechte. Vergelijk de volgende situaties:



$\hat{\theta}_1$ en $\hat{\theta}_2$ zijn allebei zuivere schatters van een parameter θ , maar $\hat{\theta}_1$ heeft een dichtheid $f(\hat{\theta}_1)$ met tamelijk dikke staarten, terwijl de dichtheid $f(\hat{\theta}_2)$ horend bij de schatter $\hat{\theta}_2$ om de parameter θ geconcentreerd ligt. Intuïtief kan men de situatie als volgt beschrijven: hoewel $\hat{\theta}_1$ en $\hat{\theta}_2$

beide "gemiddeld" bij herhaalde experimenten een juiste schatting van de parameter θ zullen geven, zal $\hat{\theta}_2$ meestal vlak bij θ liggen terwijl $\hat{\theta}_1$ regelmatig ver uit de buurt van θ terecht zal komen.

Minstens zo belangrijk als het criterium van zuiverheid lijkt daarom het criterium van de *nauwkeurigheid* van een schatter. Een schatter $\hat{\theta}$ wordt een *nauwkeurige* schatter van θ genoemd als $E(\hat{\theta}-\theta)^2$ "klein" is. In bovenstaand voorbeeld is duidelijk $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2 < E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$.

Een methode die in het algemeen nauwkeurige schatters oplevert is de methode van de grootste aannemelijkheid. De zo verkregen "maximum likelihood" schatters zijn niet noodzakelijk zuiver, maar meestal wel asymptotisch raak, dat wil zeggen: bij toenemende steekproefomvang zal de schatter met tot 1 naderende kans willekeurig dicht bij de geschatte parameterwaarde komen te liggen.

6.2 Toepassingen van de methode van de grootste aannemelijkheid op het gemengde lineaire model

Om de methode van de grootste aannemelijkheid te kunnen toepassen, gaan we het model eerst nog in een andere vorm schrijven. Het model is

$$\underline{y}_{ijk} = \mu + \xi_i + \tau_j + \underline{w}_{jk} + \underline{e}_{ijk},$$

waarbij

$$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p \text{ en } k = 1, \dots, q$$

$$\tau_j \sim N(0, T^2), \underline{w}_{jk} \sim N(0, W_j^2) \text{ en } \underline{e}_{ijk} \sim N(0, F_j^2).$$

We hanteren dezelfde onafhankelijkheidsveronderstellingen als in paragraaf 2 en bovendien gebruiken we voor de afleidingen van de meest aannemelijke schatters de normaliteitsassumpties. Zij nu

$$\underline{Y} = (\underline{y}_{111}, \dots, \underline{y}_{11q}, \dots, \underline{y}_{1p1}, \dots, \underline{y}_{1pq}, \dots, \underline{y}_{np1}, \dots, \underline{y}_{npq})'$$

dat wil zeggen \underline{Y} is de uitgerolde kolomvector van waarnemingen waarbij de

de laatste index het snelst loopt en de eerste index het langzaamst.

Zij

$\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_p)'$ de vector van schipeffecten

$\underline{w}_j = (w_{j1}, \dots, w_{jq})'$ de vector van "vaarteffecten" van schip j , $j = 1, \dots, p$

$\underline{e}_j = (e_{1j1}, \dots, e_{1jq}, \dots, e_{nj1}, \dots, e_{njq})'$ de vector van toevallige fouten van schip j , $j = 1, \dots, p$ en

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ de vector van werkelijke dieptes op het traject (d.w.z. $\theta_i = \mu + \xi_i$):

Zij verder $A \otimes B$ het zg. Kronecker produkt van de matrices A en B , d.w.z. als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix},$$

dan is

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Dus $A \otimes B$ is een $mr \times ns$ matrix met bijv. op de eerste rij de getallen $a_{11}b_{11}, a_{11}b_{12}, \dots, a_{11}b_{1s}, \dots, a_{1n}b_{11}, \dots, a_{1n}b_{1s}$. Laat tenslotte de vectoren J_m , d_j en de matrix I_m gedefinieerd zijn door

$$J_m = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_m', \quad d_j = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_p'$$

en

$$I_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}}_m = m \times m \text{ identiteitsmatrix.}$$

Dan kan het model als volgt geschreven worden

$$(6.1) \quad \underline{Y} = X\theta + U_1 \underline{\tau} + \sum_{j=1}^p U_{2j} \underline{w}_j + \sum_{j=1}^p U_{3j} \underline{e}_j,$$

met

$$\begin{aligned} X &= I_n \otimes J_p \otimes J_q \\ U_1 &= J_n \otimes I_p \otimes J_q \\ U_{2j} &= J_n \otimes d_j d_j' \otimes I_q, \quad j = 1, \dots, p \\ U_{3j} &= I_n \otimes d_j d_j' \otimes I_q, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Aan de schrijfwijze (6.1) van het model kunnen we nu onmiddellijk zien dat de waarnemingsvector \underline{Y} een meerdimensionale normale verdeling heeft met verwachting $\theta \otimes J_{pq}$ en covariantiematrix $\sigma^2 H$ met

$$(6.2) \quad \sigma^2 H \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 \left(\gamma_1 U_1 U_1' + \sum_{j=1}^p \gamma_{2j} U_{2j} U_{2j}' + \sum_{j=1}^p \gamma_{3j} U_{3j} U_{3j}' \right),$$

waarbij $\gamma_1 = T^2/\sigma^2$, $\gamma_{2j} = W_j^2/\sigma^2$ en $\gamma_{3j} = F_j^2/\sigma^2$ (σ^2 is een hulpgrootheid ten opzichte waarvan de andere varianties door de quotiënten γ_1 , γ_{2j} en γ_{3j} bepaald zijn). Merk op dat hoewel in het model de τ_j 's, w_{jk} 's en e_{ijk} 's onderling onafhankelijk zijn de \underline{y}_{ijk} 's in het geheel niet onafhankelijk zijn, maar een covariantiestructuur vertonen die gespecificeerd wordt door (6.2).

De dichtheid en tevens aannemelijkheidsfunctie van een realisatie Y van de stochast \underline{Y} gedefiniëerd door (6.1) is dus:

$$L(Y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}npq} \sigma^{-npq} |H|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y-X\theta)' H^{-1} (Y-X\theta) \right\}$$

($|H|$ is de determinant van H). Stel $\lambda(Y) = \log L(Y)$. (Vector-)differentiatie van $\lambda(Y)$ naar θ en σ^2 geeft

$$\frac{\delta \lambda(Y)}{\delta \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \{ X'H^{-1}Y - (X'H^{-1}X)\theta \}$$

$$\frac{\delta \lambda(Y)}{\delta \sigma^2} = -\frac{npq}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (Y-X\theta)' H^{-1} (Y-X\theta).$$

Nul stellen van deze afgeleides geeft de meest aannemelijke schatters

$$(6.3) \quad \hat{\underline{\theta}} = (X'H^{-1}X)^{-1} X'H^{-1}\underline{Y}$$

en

$$(6.4) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{npq} (\underline{Y} - \underline{X}\hat{\theta})' H^{-1} (\underline{Y} - \underline{X}\hat{\theta}) =$$

$$\frac{1}{npq} \{ \underline{Y}' H^{-1} \underline{Y} - (\underline{X}' H^{-1} \underline{Y})' (\underline{X}' H^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}' H^{-1} \underline{Y} \}.$$

Als $\gamma_1, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{2p}$ en $\gamma_{31}, \dots, \gamma_{3p}$ bekend zouden zijn, zouden $\hat{\theta}$ en $\hat{\sigma}^2$ gedefiniëerd in (6.3) en (6.4) tevens de *gewogen kleinste kwadratschatters* zijn. Als schattingen voor de dieptes krijgen we

$$(6.5) \quad \hat{\theta}_i = \frac{1}{\gamma_3} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\gamma_{3j}} (Y_{ij} - Y_{.j}) + \frac{1}{\delta_3} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\delta_{3j}} Y_{.j},$$

waarbij

$$\gamma_3 = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\gamma_{3j}}, \quad \delta_{3j} = nq\gamma_1 + n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}$$

en

$$\delta_3 = \sum_{j=1}^p \frac{1}{nq\gamma_1 + n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}}.$$

Het onmiddellijke praktische gevolg van de weging met de gewichten γ_{3j} en δ_{3j} is, dat een schip met grote geschatte onnauwkeurigheid minder invloed heeft bij de schatting van de werkelijke diepte op een bepaald meetpunt. We gaan hier in 6.3 nader op in voor het schip "Vierlingh" bij de besprekingen van de uitkomsten van deze methode.

Uitwerking van (6.4) geeft

$$(6.6) \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q \frac{1}{\gamma_{3j}} (Y_{ijk} - \hat{\theta}_i)^2 - \frac{n^2}{n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}} \sum_{k=1}^q (Y_{.jk} - \hat{\mu})^2 \right.$$

$$\left. - \frac{(nq)^2 \gamma_1}{(n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}) \delta_{3j}} (Y_{.j} - \hat{\mu})^2 \right\}$$

waarbij $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i$ de schatter van de gemiddelde diepte is.

Tenslotte vinden we de meest aannemelijke schatters van $\gamma_1, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{2p}$ en $\gamma_{31}, \dots, \gamma_{3p}$ weer door de partiële afgeleiden van $\log L(Y)$ naar deze

parameters nul te stellen. Dit geeft de vergelijkingen

$$(6.7) \quad \text{spoor } (U_1' H^{-1} U_1) = \frac{1}{\sigma^2} (Y - X\theta)' H^{-1} U_1 U_1' H^{-1} (Y - X\theta)$$

$$(6.8) \quad \text{spoor } (U_{ij}' H^{-1} U_{ij}) = \frac{1}{\sigma^2} (Y - X\theta)' H^{-1} U_{ij} U_{ij}' H^{-1} (Y - X\theta)$$

$$i = 2, 3; j = 1, \dots, p$$

(spoor (A) = som van de diagonaalelementen van A).

We krijgen dus een stelsel (niet-lineaire) vergelijkingen met als onbekenden de parameters $\theta_1, \dots, \theta_n, \sigma^2, \gamma_1, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{2p}$ en $\gamma_{31}, \dots, \gamma_{3p}$. Deze vergelijkingen zijn door middel van een iteratieve methode met als startwaarden $\gamma_1 = \gamma_{21} \dots \gamma_{2p} = \gamma_{31} \dots \gamma_{3p} = 1$ opgelost.* Deze methode wordt in principe beschreven in Hartley en Rao (1967), sectie 5 en Harville (1977), sectie 6.1, hoewel in beide artikelen een iets ander type model dan het onze gehanteerd wordt.

6.3 Resultaten van de methode van de grootste aannemelijkheid

De meest aannemelijke schattingen van de varianties F_j^2, W_j^2 en T^2 , $j = 1, \dots, p$ worden gegeven in tabel 6 (in dm^2).

*) Wij zijn veel dank verschuldigd aan de heer R. van der Horst, die een computerprogramma voor deze berekeningen geschreven heeft.

Tabel 6 Schattingen van de varianties F_j^2 , W_j^2 en T^2

blok 1	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	3,05	6,58	2,77	1,38	17,40
W_j^2	1,08	0,16	0,68	0,32	1,69
T^2	0,73				
blok 2	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	1,09	1,76	2,91	2,25	4,16
W_j^2	0,0008	0,0004	0,18	0,001	1,74
T^2	0,77				
blok 3	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	3,09	3,85	3,70	2,97	11,26
W_j^2	0,09	0,009	0,12	0,01	3,21
T^2	0,70				
blok 4	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	0,77	2,17	1,92	1,09	3,73
W_j^2	0,17	0,002	0,05	0,06	0,92
T^2	0,58				

Het is duidelijk, dat het algemene beeld van tabel 4 wordt bevestigd. Als we allereerst kijken naar de belangrijkste schatting nl. T^2 , dan krijgen we voor de 4 blokken respectievelijk de schattingen 0,73, 0,77, 0,70 en 0,58, terwijl de schattingen volgens de momentenmethode respectievelijk 1,00, 0,60, 0,65 en 0,65 waren met als gewogen gemiddelde over de 4 blokken 0,73. De opmerkingen in paragraaf 6.1 over de grotere nauwkeurigheid van de meest aannemelijke schatters (t.o.v. schatters van de momentenmethode) lijkt hier dus enigzins geïllustreerd te worden: het verschil tussen de grootste en kleinste schatting is bij de momentenmethode gelijk aan 0,35 terwijl dit verschil bij de methode van de grootste aannemelijkheid slechts 0,19 is.

Als we vervolgens de meest aannemelijke schattingen van W_j^2 bekijken zien we dat het beeld van tabel 4 weer bevestigd wordt. In het bijzonder krijgen we steeds op de plaatsen waar in tabel 4 negatieve schattingen

voorkomen, schattingen die dicht bij nul liggen (eerste twee decimalen achter de komma zijn nullen).

Tenslotte vinden we bij de schattingen van F_j^2 de grootste afwijkingen van tabel 4. Als we bijvoorbeeld de schatting van F_5^2 in het eerste blok bekijken (schip A. Vierlingh), dan geeft de momentenmethode een schatting van $12,01 \text{ dm}^2$, maar de methode van de grootste aannemelijkheid een schatting van $17,40 \text{ dm}^2$. Dit verschil wordt veroorzaakt door het feit dat in de loop van de iteratieve berekening van de meest aannemelijke schattingen van de varianties de aanvankelijke schattingen van de dieptes $\theta_i = \mu + \xi_i$ veranderen. Het schip A. Vierlingh krijgt in de loop van het iteratieve proces steeds minder gewicht in de schatting van de dieptes (vanwege de hoge schattingen van de onnauwkeurigheid van dit schip). Dit heeft tot gevolg dat de afwijkingen van de A. Vierlingh in de loop van de berekening nog geaccentueerd worden.

Ter illustratie vergelijk we de resultaten van de eerste en de laatste (33^{e}) iteratie bij blok 1.

Tabel 7. Vergelijking van de schattingen van de varianties F_j^2 , W_j^2 en T^2 bij de 1^{e} en 33^{e} iteratie voor blok 1.

1^{e} iteratie	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	3,74	5,90	2,82	2,57	13,96
W_j^2	1,90	1,43	1,66	1,31	3,06
T	1,63				
33^{e} iteratie	Blauwe Slenk	Zwarte Haan	Breesem	Falga	A. Vierlingh
F_j^2	3,05	6,58	2,77	1,38	17,40
W_j^2	1,08	0,16	0,68	0,32	1,69
T	0,73				

De schatting van F_5^2 is in de loop van het iteratieproces opgeklommen van 13,96 tot 17,40. Ook is in deze vergelijkende tabel te zien hoe de schattingen van de varianties, die aan het begin van het proces allemaal gelijk genomen werden, in de loop van het proces steeds meer gaan verschillen (na de 33^{e} iteratie werd gestopt omdat van de 32^{e} naar de 33^{e} iteratie de

schattingen gelijk gebleven waren in de 4^e decimaal; het criterium was: stoppen als de verschillen kleiner zijn dan $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$).

We vergelijken vervolgens de schattingen van de dieptes bij de eerste en laatste iteratie voor blok 1.

Tabel 8. Schattingen van de dieptes bij de 1^e en 33^e iteratie voor blok 1

1 ^e iteratie	33 ^e iteratie
1 = 132,52	1 = 133,88
2 = 136,28	2 = 137,24
3 = 140,28	3 = 140,98
4 = 143,56	4 = 144,14
5 = 146,44	5 = 146,94
6 = 149,16	6 = 149,53
7 = 150,44	7 = 150,31
8 = 151,60	8 = 151,72
9 = 152,80	9 = 153,35
10 = 151,88	10 = 151,65
11 = 149,60	11 = 149,40
12 = 148,88	12 = 148,93
13 = 144,96	13 = 145,04
14 = 144,60	14 = 144,17
15 = 141,16	15 = 140,99
16 = 136,88	16 = 135,84
17 = 120,24	17 = 119,64
18 = 118,20	18 = 117,76
19 = 116,32	19 = 115,29
20 = 114,20	20 = 113,71
21 = 112,96	21 = 113,18
22 = 39,36	22 = 37,86
23 = 33,96	23 = 34,30
24 = 31,28	24 = 31,56
25 = 29,96	25 = 30,44
26 = 28,28	26 = 28,86

Uit de tabel blijkt dat er soms aanzienlijke wijzigingen optreden. Als we nu bijvoorbeeld nader bekijken wat er bij de meetpunten no. 1 en no. 22 aan de hand was, dan vinden we voor de A. Vierlingh hier respectievelijk de metingen 133, 120, 126, 127, 130 en 36, 61, 36, 35, 59. Het is duidelijk dat in de 33^e iteratie de lage waarden van de metingen van de A. Vierlingh bij meetpunt 1 en de zeer hoge waarden gemeten door dit schip bij meetpunt 22 minder invloed hebben op de schatting van de dieptes.

De methode levert dus tevens een soort detectiesysteem voor extreem uitvallende waarnemingen (zg. "uitbijters") op.

7. CONCLUSIES

7.1 Het *algemene beeld* dat uit beide analyses naar voren komt is, dat er duidelijke systematische verschillen tussen de schepen zijn. Deze vallen te onderscheiden in:

- a) verschil in nauwkeurigheid: in het bijzonder is de A. Vierlingh veel onnauwkeuriger te werk gegaan dan de andere schepen (zie tabel 4).
- b) verschillen in gemiddelde: hier springt duidelijk de Blauwe Slenk eruit (zie tabel 1,2 en 3).

7.2 De *overeenstemming tussen beide analysemethoden* is goed. Het lijkt, na de vergelijking tussen deze twee methoden geen twijfel, dat de tweede (grootste aannemelijkheid) - in de toekomst toe te passen zonder verdeling in blokken - superieur is. Voor dit doel is een computerprogramma in ontwikkeling, dat hier voor volledige blokken reeds is gebruikt.

7.3 De *grootste bron van onnauwkeurigheid* in het uiteindelijke resultaat zit, zoals in §2 reeds is opgemerkt, in de T^2 . Houden wij rekening met $T^2 = 0,7 \text{ dm}^2$, dan is de invloed hiervan op de gemiddelde gemeten diepte, onafhankelijk van het totale aantal meetpunten, bij gebruik van 5 schepen, die ieder evenveel metingen verrichten, gelijk aan $0,70/5 = 0,14 \text{ dm}^2$; dit is een standaardafwijking van $\sqrt{0,14} = 0,37 \text{ dm}$. Deze is te groot om vertrouwen te hebben in een gevonden verschil van 0,5 dm tussen twee series metingen. Nader onderzoek van het gevolg van het gedrag van de τ_j in de loop van de tijd is nodig om hierin (eventueel) verbetering te kunnen brengen.

7.4 *Persistentie van de τ_j* . Het huidige waarnemingsmateriaal strekt zich slechts uit over twee dagen. Indien, op grond van latere meervoudige waarnemingen zou blijken, dat de afwijking die nu voor de Blauwe Slenk gevonden is persisteert, dan moet het mogelijk zijn de oorzaak daarvan op te sporen. Indien de afwijking niet persistent is, is de oorzaak, die tot het nu geconstateerde verschil heeft geleid, wellicht niet meer te achterhalen.

Dit behoeft dan echter niet te gelden voor latere eventueel te vinden systematische verschillen. Voor de opsporing van de oorzaken dienen dan speciaal daartoe te ontwerpen experimenten te worden uitgevoerd. De mate van persistentie van de τ_j 's is van essentiële betekenis voor de uiteindelijke berekening van de nauwkeurigheid en deze dient dus mede op grond van verdere duplobepalingen te worden onderzocht. Deze conclusie sluit geheel aan bij de beschouwingen op bladzijde 2 en 3 van het rapport "Foutenbeschouwing aanzandings en erosieonderzoek" van de Studiedienst Hoorn van Rijkswaterstaat.

7.5 *Verdere mogelijke punten van analyse* van het huidige waarnemingsmateriaal zijn:

- a) het nagaan van de invloed van "diep" en "ondiep", benevens de hier achterwege gelaten analyse van steile stukken.
- b) onderzoek naar systematische verschillen van viertallen en drietallen schepen na verwijdering van de Blauwe Slenk resp. A. Vierlingh.
- c) toetsing van $W_j^2 = 0$ voor sommige schepen.

Deze verdere analyse lijkt echter minder belangrijk dan voortzetting van het onderzoek op met nieuwe metingen uitgebreid waarnemingsmateriaal.

8. LITERATUUR

- 1 HARTLEY, H.O. & J.N.K. RAO (1967), *Maximum-likelihood estimation for the mixed analysis of variance model*, Biometrika 54, 93-108.
- 2 HARVILLE, D.A. (1977), *Maximum-likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems*, Journal of the American Statistical Association 72, 320-340. (Vermeldt veel literatuur).
- 3 JONGE DE H. (1963), *Inleiding tot de medische statistiek*, deel 1, (2^e druk, Nederlands Instituut voor Praeventieve Geneeskunde, Leiden).
- 4 PEARSON, E.S. & H.O. HARTLEY (1970), *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1 (3rd. ed., Cambridge University Press, Cambridge).

9. INLEIDING

9.1 Aansluiting op het eerste rapport

De indeling van dit tweede rapport verschilt enigzins van die van het eerste. De nummering van de hoofdstukken sluit echter aan. De tabellen zijn vanaf dit punt voorzien van een nummering met het nummer van de paragraaf, zodat zij gemakkelijk zijn terug te vinden.

9.2 De lodingen.

De eerste analyse berustte op herhaalde lodingen van 5 schepen, verdeeld in 4 blokken, beschreven in hoofdstuk 4. Deze zijn genoemd blok 1, ..., blok 4. Wij noemen deze 4 blokken van waarnemingen tezamen: serie I. Het vervolg van de analyse berust op 4 nieuwe blokken, (blok 5, ..., blok 8), tezamen serie II. Tussen beide reeksen waarnemingen in ligt een tijdsinterval van ruim $1\frac{1}{2}$ jaar. Serie II had in hoofdzaak betrekking op twee van de schepen, die ook bij serie I waren gebruikt, nl. de Breesem en de A. Vierlingh, terwijl in één blok (nl. blok 7) ook de Blauwe Slenk was betrokken. Hieronder volgt een samenvatting.

Tabel 9.2 De 8 blokken metingen

blok no	n	p	q	beschrijving	schepen
1	25	5	5	inlood 4; punten 835,00 t/m 840,00 841,00 t/m 841,75	*) Blauwe Slenk Zwarte Haan Breesem Falga A. Vierlingh
2	37	5	2	inlood 6; punten 835,00 t/m 844,50	
3	57	5	4	inlood 4; punten 820,50 t/m 834,75	
4	16	5	3	inlood 7; punten 835,00 t/m 840,50 841,50 t/m 843,00	
5	58	2	20 10	lane 305; punten 237,0 t/m 265,0 en 266,0	Breesem A. Vierlingh
6	58	2	14	lane 305; punten 237,5 t/m 266,0	
7	58	3	10	lane 305; punten 237,0 t/m 266,0	Blauwe Slenk Breesem A. Vierlingh
8	57	2	10	lane 305; punten 237,0 t/m 265,5	Breesem A. Vierlingh

n = aantal meetpunten

p = " schepen

q = " herhalingen (vaarten).

*) In blok 1 is, in vergelijking met het eerste rapport, nog één uitschieter weggelaten.

Opmerkingen bij tabel 9.2.

Serie I (blok 1,...,4) is opgemeten op 2 en 3 maart 1976, blok 5,...,8 resp. op 5 oktober, 10 oktober, 20 oktober en 7 november 1977. Bij blok 1,2 en 3 zijn tussen opeenvolgende geheelwaardige meetpunten telkens 3 tussenpunten opgemeten en bij de blokken 4,...,8 telkens 1.

9.3 Het model

Het model dat voor de analyse is gebruikt is het in hoofdstuk 2 beschreven model. De in (2.1) voorkomende stochastische termen τ_j , w_{jk} en e_{ijk} geven wij in het vervolg aan als schipeffect, vaarteffect resp. puntmeetfout. De bijbehorende varianties T^2 , W_j^2 resp. F_j^2 worden in hoofdstuk 10 stuk voor stuk behandeld.

9.4 De gebruikte analysemethode

In hoofdstuk 3 en 4 is de momentenmethode gebruikt, eenvoudig en overzichtelijk, maar minder geavanceerd dan de in hoofdstuk 6 gebruikte methode van de grootste aannemelijkheid. Verdere studie van het probleem heeft intussen geleid tot het voltooiën van een programma voor de z.g. MINQUE-methode, die nog beter geschikt is voor onze analyse dan de twee andere. Deze methode wordt beschreven in hoofdstuk 12. Ter controle zijn de schattingen ook verricht met de momentenmethode; de overeenstemming was goed; de verderop vermelde schattingen zijn die van de MINQUE-methode, op een enkel punt aangevuld met een momenten-schatting.

9.5 De bedoeling van de analyse

In 7.3 is uiteengezet dat de grootste bron van onnauwkeurigheid in de variantie T^2 zit, het schipeffect dus. Van groot belang is nu na te gaan of de systematische verschillen tussen de schepen al dan niet persistent zijn (zie 7.4). Dit noemen wij het persistentieonderzoek. Daartoe was het nodig over een tweede serie meervoudige waarnemingen te beschikken, geruime tijd na de eerste verricht.

Verdere punten van onderzoek waren:

- onderzoek naar verschillen in nauwkeurigheid van diep, ondiep en steil^{*)};
- normaliteitsonderzoek met betrekking tot de puntmeetfouten;
- diverse toetsingen, die in het vorige rapport nog niet waren verricht.

De uiteindelijk in dit rapport verkregen conclusies en schattingen worden verder gebruikt in een volgend rapport, waarin twee series (enkelvoudig verrichte) lodingen van de Westelijke Waddenzee - met een tussenpoze van 5 jaar - worden onderzocht op in die tussentijd eventueel ontstane aanzanding of ontgronding.

10. DE NAUWKEURIGHEIDSANALYSE

In dit hoofdstuk worden de numerieke resultaten vermeld, die verkregen zijn met de in hoofdstuk 12 beschreven MINQUE-methode.

10.1 Het Persistentie-onderzoek

Tabel 10.1;1 ... 10.1;3 bevatten de schattingen der τ_j (de systematische schip-afwijkingen voor serie I en II, voor de gehele blokken, de ondiepe stukken en de diepe stukken afzonderlijk; voor serie II was ook een steil stuk aanwezig, bij serie I waren er te weinig metingen op steile gedeelten. De vermelde schattingen zijn

$$(10.1;1) \quad Y_{.j} - Y_{...}$$

en een deel van deze schattingen was reeds vermeld in tabel 2 op blz.9.

*) Ondiep: minder dan 60 dm. Diep en steil zijn niet altijd duidelijk te scheiden. Dit is mede gebeurd op grond van grafieken en dieptekaarten.

Tabel 10.1;1 Schattingen van τ_j voor hele blokken

Serie	Blok	Schip				
		Bl.Sl.	Zw.H.	Breesem	Falga	A.Vierl.
I	* * 1	-1,83	0,77	0,77	0,29	-0,01
	* * 2	-0,69	-0,83	0,42	1,47	-0,38
	* * 3	-1,22	0,15	0,30	1,27	-0,50
	* * 4	-1,35	0,28	0,75	0,71	-0,39
II	* 5			0,47		-0,93
	* 6			0,11		-0,11
	* * 7	-0,55		0,46		0,09
	* 8			0,20		-0,20
I	Gewogen gem.	-1,31	0,17	0,49	0,99	-0,34
II		-0,55		0,32		-0,27

Tabel 10.1;2 Schattingen voor τ_j voor ondiepe stukken

Serie	Blok	Schip				
		Bl.Sl.	Zw.H.	Breesem	Falga	A.Vierl.
I	1	-0,67	-0,17	0,58	0,83	-0,57
	* * 2	-0,71	-1,11	0,39	1,85	-0,41
	* * 3	-1,09	-0,66	0,81	1,46	-0,51
	* * 4	-0,85	-0,52	0,88	1,21	-0,72
II	* * 5			0,41		-0,82
	* 6			0,41		-0,41
	* * 7	-0,69		0,71		-0,02
	* 8			0,43		-0,43
I	Gewogen gem.	-0,92	-0,67	0,69	1,43	-0,52
II		-0,69		0,50		-0,41

Tabel 10.1;3 Schattingen voor τ_j voor diepe stukken

Serie	Blok	Schip				
		Bl.Sl.	Zw.H.	Breesem	Falga	A.Vierl.
I	** 1	-2,06	0,95	0,81	0,19	0,10
	** 2	-0,67	-0,63	0,44	1,21	-0,35
	** 3	-1,27	0,52	0,06	1,18	-0,50
	** 4	-1,58	0,64	0,70	0,48	-0,24
II	** 5			0,50		-1,00
	6			-0,14		0,14
	7	-0,32		0,21		0,11
	8			-0,13		0,13
I	Gewogen	-1,47	0,52	0,40	0,81	-0,27
II	gem.	-0,32		0,13		-0,13

Tabel 10.1;4 Schattingen voor τ_j voor steile stukken in serie II

Serie	Blok	Schip		
		Bl.Sl.	Breesem	A.Vierl.
II	** 5		0,50	-1,00
	6		0,11	-0,11
	** 7	-0,82	0,46	0,36
	* 8		0,59	-0,59
I	Gewogen gem.	-0,82	0,41	-0,31

Deze uitkomsten vertonen een duidelijk patroon. De sterretjes geven het resultaat aan van de uitgevoerde toetsen. Telkens is de hypothese getoetst

dat er geen systematische verschillen tussen de betrokken schepen waren ($\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_p$). Eén sterretje betekent verwerping van deze hypothese op grond van een overschrijdingskans $< 0,01$; twee sterretjes betekent overschrijdingskans $< 0,001$. De overschrijdingskansen waren een aantal keren zelfs van de orde 10^{-6} . Er is dus geen twijfel aan het bestaan van systematische verschillen. *) Ook de persistentie is zeer duidelijk. Niet alleen geeft de Blauwe Slenk ook in serie II (blok 7) net als in alle blokken van serie I de laagste getallen te zien, ook is zowel in serie I als II de geschatte waarde van τ voor de Breesem bijna steeds groter dan die van de A. Vierlingh. Daar de waarnemingen in serie II van blok tot blok met tussenpozen van 1 à 2 weken zijn verricht, wijst de overeenstemming tussen deze blokken ook op persistentie op korte termijn.

Verder valt het op dat de splitsing in diep en ondiep geen duidelijk effect heeft: de schattingen vertonen in beide gevallen, en ook in de steile stukken, eenzelfde patroon. Samenvattend concluderen wij:

Conclusie 10.1;1: de systematische verschillen tussen de schepen zijn zeer duidelijk.

Conclusie 10.1;2: deze verschillen zijn duidelijk persistent zowel op korte termijn als over de betrokken (tussenliggende) periode van ruim $1\frac{1}{2}$ jaar.

Conclusie 10.1;3: er is wat de waarde der τ_j betreft geen reden om te concluderen tot een verschillend gedrag in diepe, ondiepe en steile stukken.

10.2 Het schipeffect; schatting van T^2

Wij geven nu de schattingen van T^2 , de variantie van de τ_j . Deze zijn voor serie I enigszins verschillend (en wel wat hoger) dan in tabel 6 op blz. 18. Dit wordt veroorzaakt door de overgang op de MINQUE-methode, die betrouwbaarder is dan de vroeger gebruikte methoden. I.h.b. heeft de methode van de grootste aannemelijkheid (waarop tabel 6 berust) de neiging deze varianties te onderschatten.

*) Ook wanneer men in serie I de Blauwe Slenk weglaat blijven de overschrijdingskansen voor de overige 4 schepen zeer klein; bekijkt men alleen Breesem en Vierlingh dan worden zij aanzienlijk groter, net als bij serie II (vgl. ook 10.4).

Tabel 10.2 Schattingen van T^2

Serie	Blok	diep/ondiep	n	p	q	\hat{T}^2
I	1	totaal	25	5	5	0,95
	2		37	5	2	0,99
	3		57	5	4	0,88
	4		16	5	3	0,74
II	5	totaal	58	2	{20 10	0,96
	6		58	2		14
	7		58	3	10	0,24
	8		57	2	10	0,02
I	1	ondiep	4	5	5	0,25
	2		15	5	2	1,46
	3		18	5	4	1,20
	4		5	5	3	0,87
II	5	ondiep	23	2	{20 10	0,76
	6		22	2		14
	7		24	3	10	0,47
	8		22	2	10	0,32
I	1	diep	21	5	5	1,17
	2		22	5	2	0,25
	3		39	5	4	0,88
	4		11	5	3	0,80
II	5	diep	26	2	{20 10	1,09
	6		27	2		14
	7		25	3	10	0,01
	8		26	2	10	0

Opmerking 10.2

Op twee plaatsen (blok 6 totaal en blok 8 diep) komen schattingen van de waarde 0 voor. Die wordt veroorzaakt doordat de formele uitkomst van de betrokken schatting negatief was - wat bij de gebruikte schattingsmethode voor kan komen (vgl. ook blz. 5, laatste regel) -; daar negatieve varianties niet mogelijk zijn is in zulk een geval de waarde 0 de beste schatting. De schattingen van T^2 lopen aanmerkelijk uiteen, vooral in die gevallen waar het aantal schepen of het aantal meetpunten wat kleiner is. Het meest consistent is serie I zonder splitsing naar diep en ondiep. Wij hebben in 10.1 gezien dat er wat de τ_j betreft geen speciale reden is om onderscheid te maken tussen diep en ondiep. (Dit zal verderop wel het geval blijken te zijn voor de puntmeetfouten.) Wij zullen dus hier de splitsing naar diep en ondiep niet meer hanteren. Bekijken we nu de schattingen voor T^2 voor serie I en II (beide "totaal") dan zijn de schattingen voor serie II lager dan voor serie I. Daar serie II echter slechts op (in hoofdzaak) 2 schepen berust en serie I op 5, moeten wij onze schatting voor T^2 wel op serie I baseren. Ook andere overwegingen wijzen in deze richting. Bij serie II is meer dan normaal aandacht besteed aan de precisie van de plaatsbepaling. Ook kan door het grote aantal vaarten routinevorming zijn opgetreden. De grotere precisie bij serie II, die ook verderop bij de schattingen \hat{F}^2 (zie 10.4) naar voren komt, kan niet naar het verleden toe op vroegere waarnemingen worden geëxtrapoleerd. Serie I sluit dus nauwer aan bij de routinemetingen waarop de variantie T^2 uiteindelijk moet worden toegepast. De onnauwkeurigheid van de schattingen in aanmerking nemend komen wij tot

Conclusie 10.2: bij de berekening van de nauwkeurigheid van gemiddelden van door verschillende schepen verrichte lodingen is het redelijk de grootte T^2 te stellen op 1 dm^2 .

10.2 Het vaarteffect; schatting van W_j^2

In tabel 10.3;1 staan de schattingen \hat{W}_j^2 van de vaart-varianties. De kolom p, die het aantal schepen aangeeft is hier overbodig. Overigens heeft de tabel dezelfde vorm als tabel 10.2. Voor serie I, totaal zijn de uitkomsten te vergelijken met die van tabel 6 op blz.18. De (geringe) verschillen

worden veroorzaakt door het gebruik van de MINQUE-methode. De schattingen zijn nu iets lager geworden dan bij de methode van de grootste aannemelijkheid. Dit klopt met het feit dat de \hat{T}^2 groter zijn: alle varianties tezamen moeten de totale variatie vormen, dus wordt één type groter geschat dan wordt een ander kleiner.

De sterretjes in de tabel geven de resultaten aan van toetsingen, waarbij telkens de hypothese getoetst is dat er geen vaarteffect was ($W_j^2=0$). Eén sterretje betekent: overschrijdingskans $< 0,01$, twee sterretjes: $< 0,001$.

Aangezien bij het toetsen steeds twee kwadratensommen met elkaar vergeleken worden waarvan de groottes corresponderen met de groottes van \hat{W}_j^2 respectievelijk \hat{F}_j^2 , zijn de overschrijdingskansen niet zonder meer monotoon met de absolute groottes van \hat{W}_j^2 . In grote lijn valt dit verband echter wel duidelijk te constateren.

Tenslotte valt nog op te merken dat bij serie II het aantal meetpunten (n) van ondiep en diep samen kleiner is dan van totaal. De oorzaak hiervan is dat een aantal "steile punten" van "totaal" niet in "diep" of "ondiep" zijn meegenomen. De steile gedeelten zijn niet apart beschouwd omdat het aantal meetpunten gering was.

Tabel 10.3;1 Schattingen van W_j^2

serie	blok	diep/ondiep	n	q	\hat{W}_1^2	\hat{W}_2^2	\hat{W}_3^2	\hat{W}_4^2	\hat{W}_5^2	
I	1	totaal	25	5	1,02**	0,19	0,65**	0,33**	1,62**	
	2		37	2	0	0	0,18	0	1,19**	
	3		57	4	0,09	0,005	0,12	0,006	3,29**	
	4		16	3	0,15	0	0,04	0,05*	0,96*	
II	5	totaal	58	20 10	—	—	0,14**	—	0,27**	
	6		58		14	—	—	0,59**	—	0,24**
	7		58		10	0,20**	—	0,01	—	0,01
	8		57		10	—	—	0,95**	—	0,23**
I	1	ondiep	4	5	2,22**	0,75*	1,15	0,38	1,66**	
	2		15	2	0,08	0,68*	1,42**	0	1,30**	
	3		18	4	0	0,08	0,15	0,02	2,97**	
	4		5	3	0,25**	0,51	0,42	0,03	1,13**	
II	5	ondiep	23	20 10	—	—	0,16**	—	0,09**	
	6		22		14	—	—	0,54**	—	0,31**
	7		24		10	0,25**	—	0,12**	—	0,11*
	8		22		10	—	—	0,48**	—	0,35**
I	1	diep	21	5	1,37**	0,42**	0,58*	0,33**	1,87**	
	2		22	2	0,08	0,06	0	0,34	1,37*	
	3		39	4	0,14	0,11	0,05	0,07	3,76**	
	4		11	3	0,44*	0	0	0,07*	1,94**	
II	5	diep	26	20 10	—	—	0,15**	—	0,36*	
	6		27		14	—	—	0,63**	—	0,15
	7		25		10	0,53*	—	0	—	0,02
	8		26		10	—	—	2,19**	—	0,13*

(Zie voor de waarden 0 opmerking 10.2.)

Vervolgens zijn de gewogen gemiddelden van de schattingen berekend volgens de formule bovenaan blz.7. Deze formule is ontleend aan de momenten-methode, maar dit valt te rechtvaardigen omdat de momenten-schatters redelijk goed blijken overeen te stemmen met de \hat{W}_j^2 in tabel 10.3;1. (Deze momenten-schatters zijn niet eveneens in dit rapport opgenomen omdat zij geen nieuw licht op de zaak werpen; zij zijn wel ter controle berekend en telkens met de andere resultaten vergeleken.)

Tabel 10.3;2 Gewogen gemiddelden van de \hat{W}_j^2

serie	diep/ondiep	\hat{W}_1^2	\hat{W}_2^2	\hat{W}_3^2	\hat{W}_4^2	\hat{W}_5^2
I	totaal	0,35	0,05	0,26	0,10	2,32
II	totaal	0,20	—	0,38	—	0,19
I	ondiep	0,37	0,27	0,51	0,03	2,22
II	ondiep	0,25	—	0,30	—	0,22
I	diep	0,29	0,18	0,20	0,15	2,63
II	diep	0,53	—	0,62	—	0,16

Bezien wij nu de resultaten, dan vallen de volgende verschijnselen op. In de eerste plaats zijn de \hat{W}_j^2 en \hat{W}_j^2 bij serie I veelal hoger dan bij serie II.

Dit verschijnsel deed zich ook bij de \hat{T}^2 voor en wij verklaren het, evenals daar, door een grotere zorgvuldigheid bij serie II.

In de tweede plaats zien wij ook hier geen systematisch verschil tussen diep en ondiep. Dit zal bij de punt-meetfouten wel het geval blijken te zijn. Voor verder gebruik bij berekeningen met in het verleden verrichte lodingen valt, evenals bij T^2 , rekening te houden met de resultaten van serie I. Wij komen daarbij tot de volgende globale richt-waarden (waarbij de A. Vierlingh apart wordt genoemd omdat deze in een ander rapport een bijzondere rol speelt):

Conclusie 10.3;1: als globale waarde voor W_j^2 voor schepen, die in het verleden lodingen hebben verricht is de waarde $0,5 \text{ dm}^2$ redelijk.

Conclusie 10.3;2: voor de A. Vierlingh dient een grotere waarde te worden gebruikt; we stellen deze op $2,5 \text{ dm}^2$.

Opmerking. De "totaal"-waarden zijn geen gemiddelden van de "diep"- en "ondiep"-waarden. Het komt voor, dat de twee laatstgenoemde waarden beide groter zijn dan de eerstgenoemde. Dit berust niet op rekenfouten.

10.4 De puntmeetfouten: schattingen van F_j^2

In tabel 10.4;1 en 10.4;2 staan de MINQUE-schattingen der F_j^2 , voor de blokken afzonderlijk resp. gewogen gemiddeld over de blokken volgens de formule op blz. 6 voor \hat{F}_j^2 . De schattingen van serie I, totaal zijn te vergelijken met die in tabel 6 op blz. 18, met dien verstande dat in blok 1 nog een uitschieter is weggelaten (zoals reeds vermeld in een voetnoot bij tabel 9.2).

Tabel 10.4;1 Schattingen van F_j^2

serie	blok	diep/ondiep	n	q	\hat{F}_1^2	\hat{F}_2^2	\hat{F}_3^2	\hat{F}_4^2	\hat{F}_5^2
I	1	totaal	25	5	3,48	3,45	2,84	1,69	9,72
	2		37	2	1,35	2,01	3,14	2,45	4,36
	3		57	4	3,33	4,05	3,90	3,19	11,40
	4		16	3	0,90	2,28	1,99	1,23	3,77
II	5	totaal	58	20	—	—	0,92	—	2,76
	6		58	10	—	—	—	—	—
	7		58	14	—	—	2,21	—	3,12
	8		57	10	4,57	—	1,23	—	2,05
I	1	ondiep	4	5	0,55	0,46	0,79	0,37	0,49
	2		15	2	0,89	0,57	0,83	0,70	0,37
	3		18	4	1,53	2,40	1,78	1,63	2,54
	4		5	3	0,16	0,76	0,35	0,12	0,45
II	5	ondiep	23	20	—	—	0,24	—	0,28
	6		22	10	—	—	—	—	—
	7		24	14	—	—	0,41	—	0,81
	8		22	10	0,88	—	0,81	—	1,28
I	1	diep	21	5	3,34	3,45	3,18	1,93	11,13
	2		22	2	1,68	2,55	4,32	3,46	7,14
	3		39	4	4,17	4,15	4,75	3,88	15,28
	4		11	3	0,94	2,29	2,65	1,74	4,17
II	5	diep	26	20	—	—	1,12	—	4,75
	6		27	10	—	—	—	—	—
	7		25	14	—	—	3,16	—	4,09
	8		26	10	6,80	—	1,36	—	2,18
						5,44	—	2,13	

Tabel 10.4;2 Gewogen gemiddelden van de \hat{F}_j^2

serie	diep/ondiep	\hat{F}_1^2	\hat{F}_2^2	\hat{F}_3^2	\hat{F}_4^2	\hat{F}_5^2
I	totaal	2,94	3,49	3,34	2,49	9,45
II	totaal	4,57	—	1,83	—	2,58
I	ondiep	1,16	1,67	1,35	1,16	1,70
II	ondiep	0,88	—	0,55	—	0,81
I	diep	3,40	3,62	4,01	3,01	12,23
II	diep	6,80	—	2,49	—	3,39

Opvallend is in beide tabellen dat de nauwkeurigheid van de metingen in de ondiepe stukken veel groter is dan in de diepe. De steile stukken zijn niet apart verwerkt: na verwijdering van uitschieters (hierover meer in hoofdstuk 10.5) gedroegen de steile stukken zich ongeveer als de diepe. Verder valt op dat voor Breesem (schip 3) en A. Vierlingh (schip 5) de nauwkeurigheid bij serie II aanzienlijk groter was dan bij serie I; voor commentaar hierop vergelijk men 10.2. Bij beide series was de Breesem nauwkeuriger dan de A. Vierlingh. Ook hier dus persistentie van het verschil. De Blauwe Slenk (schip 1) valt uit de toon, wat wellicht te wijten is aan het feit dat hij maar bij één blok (no. 7) van serie II heeft meegedaan.

Onze conclusies luiden:

Conclusie 10.4;1: voor alle schepen is de puntmeetfout in ondiepe gedeelten aanzienlijk kleiner dan in diepe en steile gedeelten.

Conclusie 10.4;2: de A. Vierlingh meet in serie I minder nauwkeurig dan de andere schepen; in serie II blijft dit verschil, althans in vergelijking met de Breesem, bestaan.

Conclusie 10.4;3: indien extra zorg aan de metingen wordt besteed (serie II) wordt de meetnauwkeurigheid positief beïnvloed.

Conclusie 10.4;4: als globale waarde van F_j^2 van schepen, die in het verleden lodingen hebben verricht is de waarde 4 dm^2 redelijk. Voor ondiepe stukken kan de waarde 2 dm^2 aangehouden worden.

Conclusie 10.4;5: voor de A. Vierlingh die nu hogere waarden in rekening te worden gebracht voor diepe en steile stukken: 12 dm^2 ; voor ondiep is 2 dm^2 acceptabel, als globale waarde zonder onderscheid tussen diep en ondiep 10 dm^2 .

10.5 Normaliteitsonderzoek

Met behulp van de residuen: $Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{.jk} + Y_{.j.}$, die geen systematische termen meer bevatten en dus ook gediend hebben voor de schattingen \hat{F}_j^2 , werd, telkens bij vaste j , dus voor de schepen afzonderlijk, tevens voor afzonderlijke blokken, een onderzoek gedaan naar de normaliteit van de verdeling van de puntmeetfouten.*) Dit geschiedde door uitzetten van de residuen op normaal waarschijnlijkheidspapier. In geval van normaliteit behoren de verkregen punten bij benadering op een rechte lijn te liggen. In de figuren 10.5;1, ..., 10.5;4 (die wij hierna afzonderlijk bespreken) behoort de getrokken rechte lijn bij de normale verdeling die op grond van gemiddelde en variantie is aangepast.

Fig. 10.5;1 is redelijk representatief voor de grafieken die voor de meeste schepen werden verkregen. Er is geen reden om niet met een normale verdeling als model te werken. Afwijkingen in de staarten van de hier optredende aard komen ook bij steekproeven uit nauwkeurig normale verdelingen voor. Niettemin is het interessant na te gaan van wat voor type de punten zijn die de grootste afwijkingen van 0 vertonen. Deze zijn in de figuur genummerd 1, 2 en 3 en, zoals daar ook vermeld staat, komen 1 en 2 uit een diep stuk en 3 van de rand van een geul. Wij merken nog op dat in de eerste drie figuren alle residuen meegenomen zijn; daarom gaan de lijnen door het punt 0. Bij de bespreking van fig. 10.5;4 komen we hier nader op terug.

*) Voor de schip- en vaarteffecten waren zoveel minder waarnemingspunten beschikbaar dat dit onderzoek daarvoor niet uitgevoerd is.

Fig. 10.5;2 is een voorbeeld van zeer goede aanpassing van de normale verdeling. Hier is geen uitschieter te bekennen.

Fig. 10.5;3 komt overeen met 10.5;1, maar nu voor de A. Vierlingh. Hier is geen sprake van normaliteit, aan beide zijden vallen uitschieters te zien en de punten vormen een duidelijke S-vorm in plaats van een rechte lijn. Interessant is nu het resultaat van het onderzoek van de uitschieters. De punten 1, 2, 3, 4 en 6 blijken de 5 residuen te zijn, die bij één meetpunt behoren, dat op de rand van een geul ligt. Het is dit punt, dat bij de in vorige hoofdstukken beschreven berekeningen is weggelaten. Het is tevens punt no.3 van fig. 10.5;1. Opvallend is dat de Breesem - en andere schepen - veel minder last van dit meetpunt hebben ondervonden dan de A. Vierlingh. Punt no.5 in fig. 10.5;3 is weer van een diep gelegen meetpunt afkomstig.

Fig. 10.5;4 is uit fig. 10.5;3 verkregen door het bewuste aan de rand van een geul gelegen meetpunt weg te laten. Verder is één kolom van de 5 kolommen residuen weggelaten. (Er was 5 keer gevaren; iedere vaart gaf één kolom residuen.) Op die wijze worden de afhankelijkheden tussen de residuen verminderd: oorspronkelijk waren de kolomtotalen gelijk aan 0 (sommerring over i) en de rijtotalen ook (sommerring over k). Nu is dat niet meer het geval en de aangepaste rechte lijn gaat nu ook niet meer door het punt 0. Zo wordt een van de ergste uitschieters gekuist maar tevens op een realistischer aantal residuen gebaseerde grafiek verkregen. Deze ziet er aanzienlijk gunstiger uit dan de vorige. Toch zijn er nog verdachte punten over. Deze blijken bij nader onderzoek afkomstig van 3 meetpunten, alle 3 uit diepe gedeelten.

Conclusie 10.5;1: het waarnemingsmateriaal bevat uitschieters, die de meetnauwkeurigheid ongunstig beïnvloeden, maar deze liggen niet in ondiepe gedeelten.

Conclusie 10.5;2: van de 5 onderzochte schepen heeft de A. Vierlingh het meeste last van uitschieters.

Conclusie 10.5;3: afgezien van, of na verwijdering van de uitschieters kan voor de verdeling van de puntmeetfout zonder bezwaar een normale verdeling genomen worden.

NORMAL PLOT OF RESIDUALS ; SUBMODEL 1

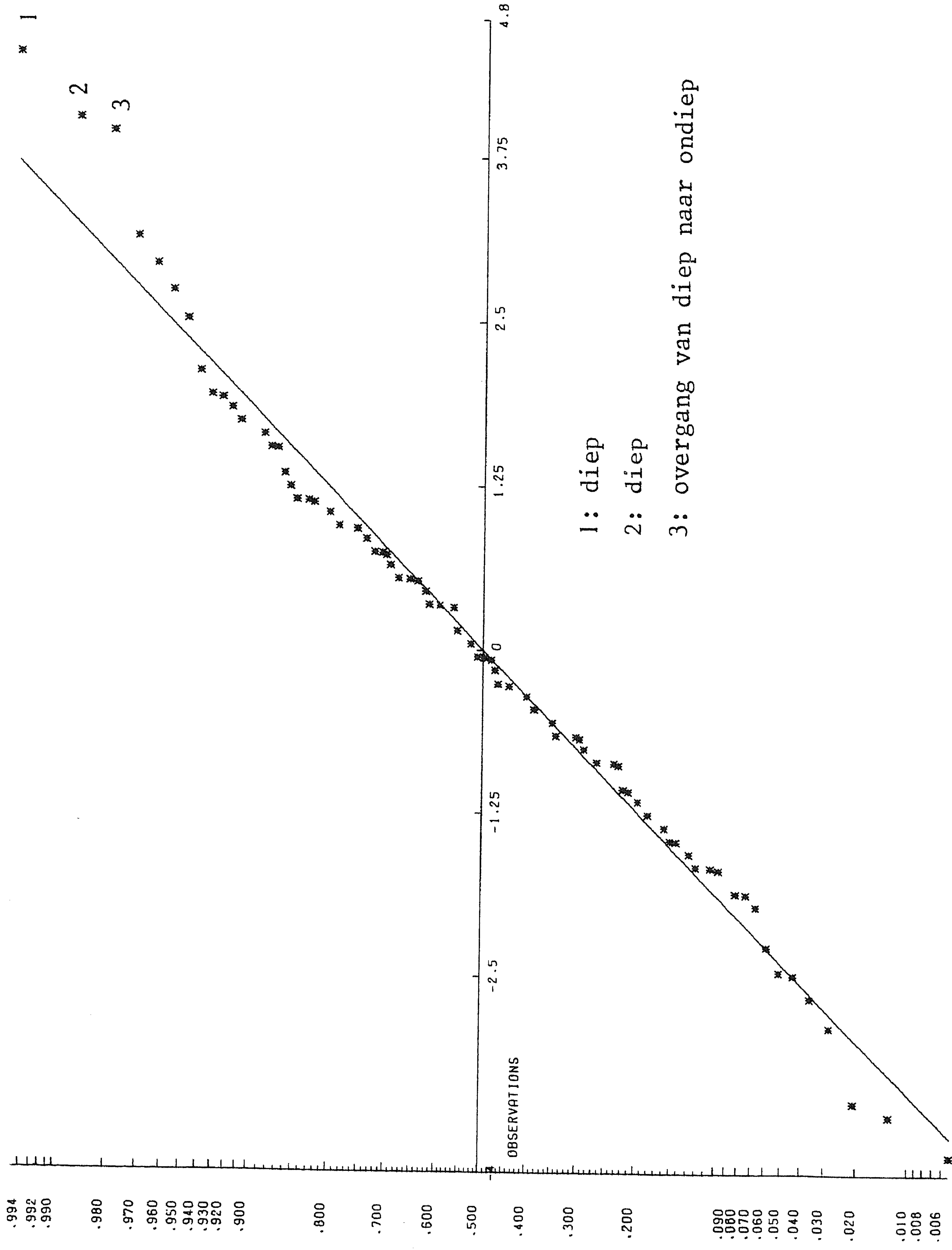


Fig. 10.5;1 Residuen van de Breccen, blok 1, op waarschijnlijkheidspapier

NORMAL PLOT OF RESIDUALS ; SUBMODEL 1

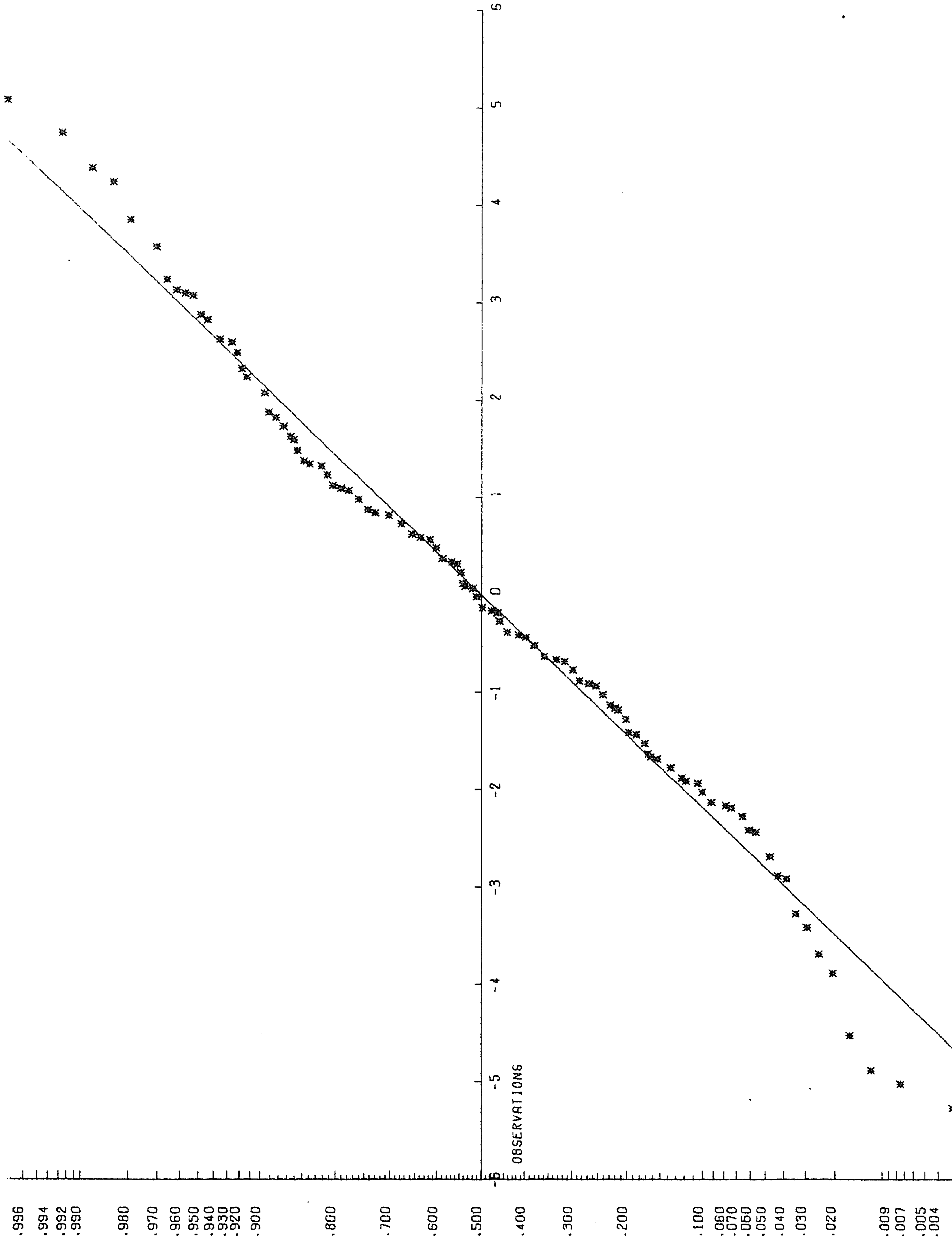


Fig. 10.5;2. Residuen van de Breescm, blok 3, op waarschijnlijkheidspapier.

NORMAL PLOT OF RESIDUALS ; SUBMODEL 1

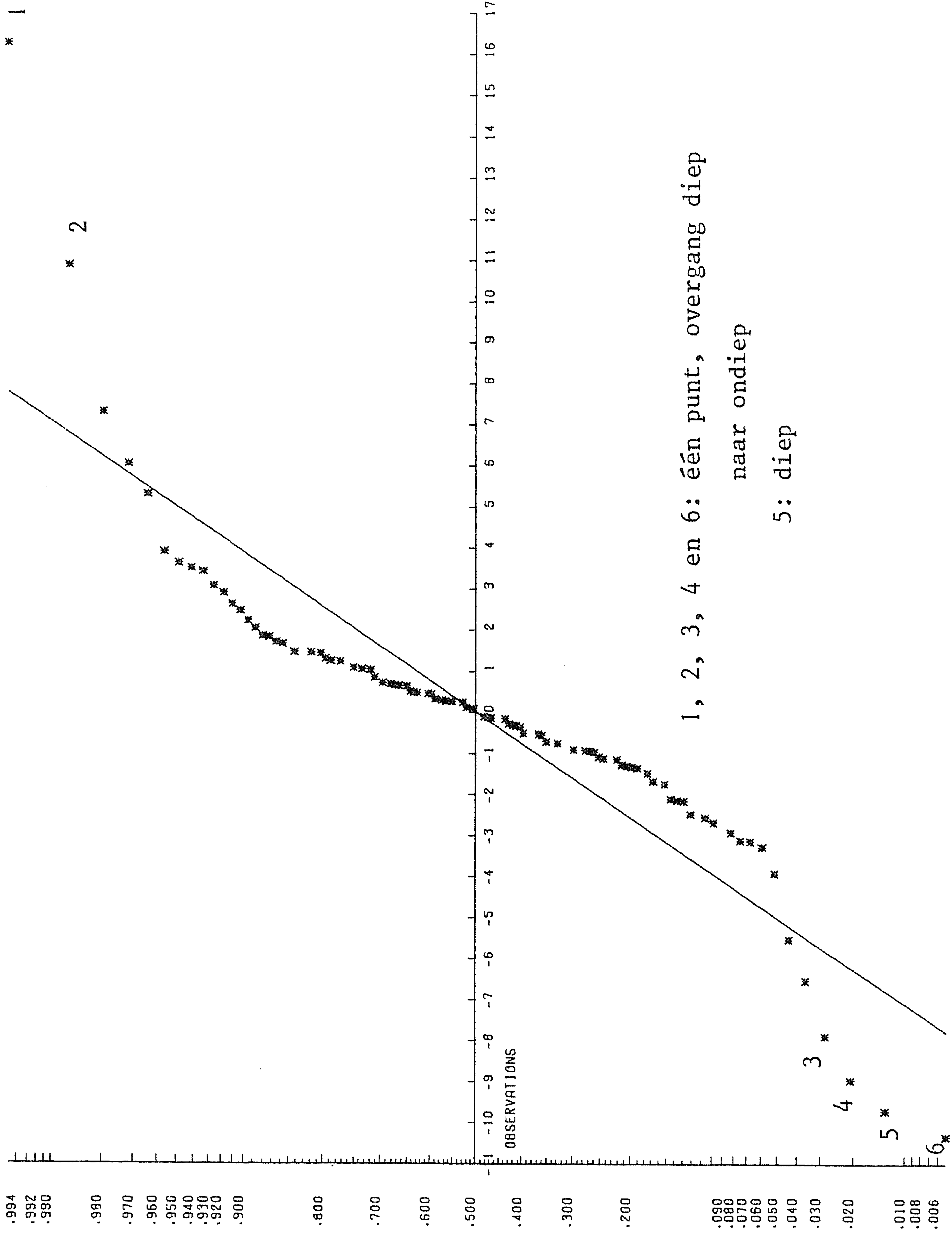


Fig. 10.5;3. Residuen van de A. Vierlingh, blok 1, op waarschijnlijkheidspapier

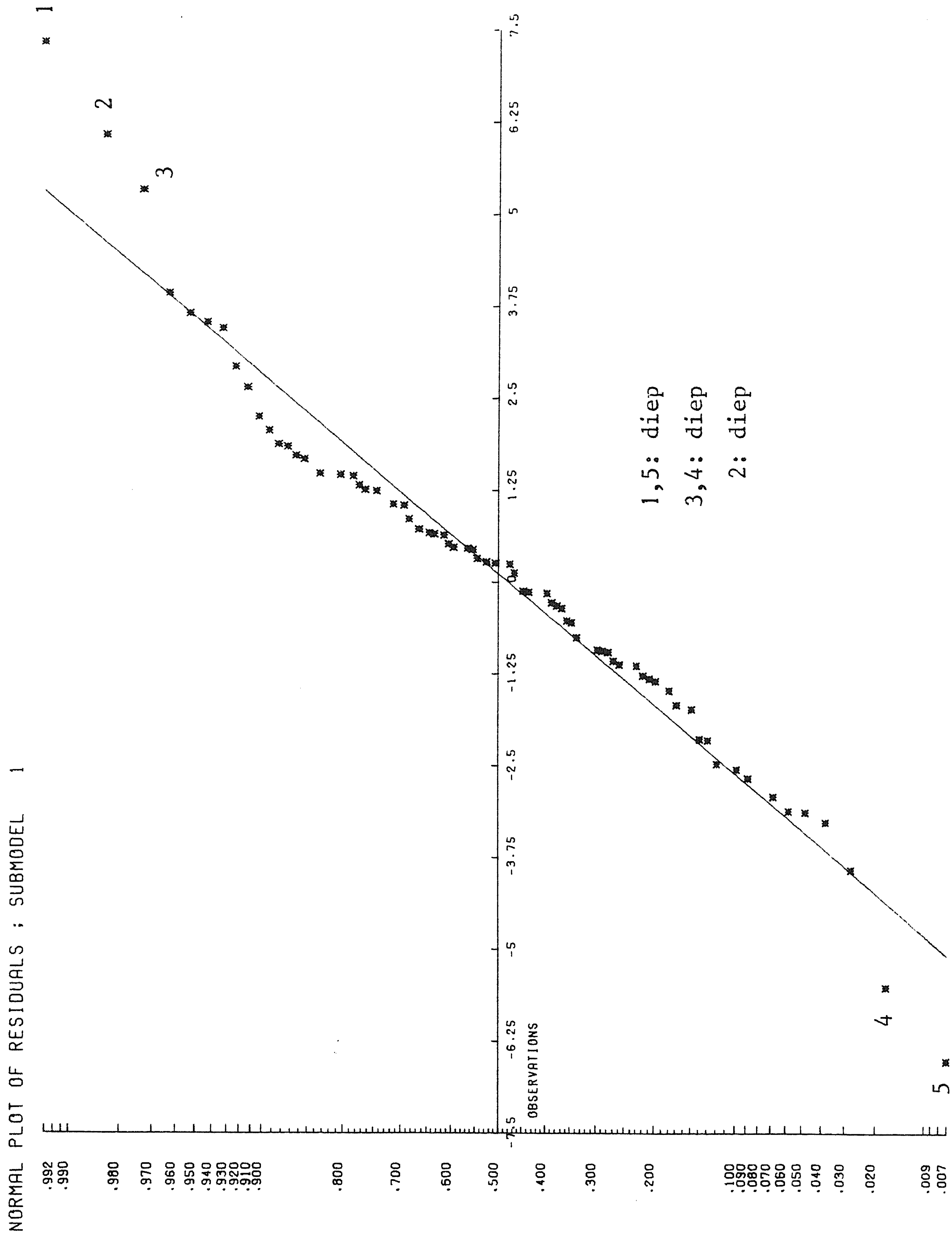


Fig. 10.5;4. Residuen van de A. Vierlingh, blok 1, na verwijdering van één rij en één kolom, op waarschijnlijkheidspapier

11. Conclusies van algemene aard

Naast de in de vorige hoofdstukken vermelde specifieke conclusies formuleren wij er hier nog enkele van algemene aard, die tevens kunnen dienen als aanbeveling bij verdere statistische analyses van lodingen.

Conclusie 11.1: het is nuttig de meetpunten te splitsen in "diepe" en "ondiepe", waarbij de "steile" bij de "diepe" kunnen worden ingedeeld.

Conclusie 11.2: de onbetrouwbaarheid van de metingen in geulen ("diep" en "steil") is zo groot, dat over de inhoud van geulen grote onzekerheden blijven bestaan. De platen daarentegen ("ondiep") lenen zich veel beter voor het trekken van conclusies over aanzanding of ontgronding.

Conclusie 11.3: het (overigens voor de hand liggende) feit dat speciaal meetpunten op de rand van een geul verraderlijk zijn wordt vermoedelijk veroorzaakt door fouten in de plaatsbepaling van het schip.

Conclusie 11.4: de meervoudige metingen wekken het vermoeden dat de meetnauwkeurigheid verbeterd kan worden door extra zorg bij de metingen.

Conclusie 11.5: voor toekomstige metingen is het van groot belang regelmatig meervoudige waarnemingen te verrichten.

Conclusie 11.6: het opsporen van de oorzaken van systematische verschillen tussen de meetuitkomsten van verschillende schepen is van groot belang voor de in de toekomst te verrichten lodingen.

Een aantal van deze conclusies is van invloed geweest op de analyse van "aanzanding of ontgronding", die in een ander rapport wordt beschreven.

12. APPENDIX

12.1 De iteratieve MINQUE-methode

De letters van het woord MINQUE corresponderen met "Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation". We zullen hier kort enige aspecten van deze methode beschrijven (aan de hand van [8] en [9]).

Op pagina 14 en 15 is het door ons gehanteerde model geschreven in een vorm die we nodig zullen hebben voor het beschrijven van de MINQUE-methode. Deze vorm was

$$(12.1.1) \quad \underline{Y} = X\theta + U_1 \underline{\tau} + \sum_{j=1}^p U_{2j} \underline{w}_j + \sum_{j=1}^p U_{3j} \underline{e}_j,$$

waarbij \underline{Y} de lexicografisch uitgerolde kolomvector van waarnemingen \underline{Y}_{ijk} was,

$\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_p)'$ de vector van schipeffecten,

$\underline{w}_j = (w_{j1}, \dots, w_{jq})'$ de vector van "vaarteffecten" van schip j , $j = 1, \dots, p$,

$\underline{e}_j = (e_{1j1}, \dots, e_{1jq}, \dots, e_{nj1}, \dots, e_{njq})'$ de vector van puntmeetfouten van schip j , $j = 1, \dots, p$,

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ de vector van werkelijke dieptes op het traject en X , U_1 , U_{2j} en U_{3j} matrices gevuld met enen en nullen ("design matrices"), waarvan de vorm gegeven is op bladzijde 15 bovenaan.

Bij een model waarin verschillende aantallen vaarten per schip worden toegelaten, krijgen de matrices X , U_1 , U_{2j} en U_{3j} (en ook de vectoren \underline{w}_j en \underline{e}_j) een iets ingewikkelder gedaante, waarop we hier verder niet in zullen gaan (de wijzigingen zijn voor de hand liggend, maar vergen veel ruimte om te beschrijven). Onder de modelveronderstellingen (zie § 9.3) heeft \underline{Y} verwachting $X\theta$ en covariantiematrix

$$(12.1.2) \quad V = T^2 U_1 U_1' + \sum_{j=1}^p W_j^2 U_{2j} U_{2j}' + \sum_{j=1}^p F_j^2 U_{3j} U_{3j}'.$$

De aanname van normaliteit wordt hierbij niet gebruikt.

Het door ons gehanteerde model is dus een speciaal geval van het volgende algemene model

$$(12.1.3) \quad \underline{Y} = X\beta + U_1 \underline{\xi}_1 + \dots + U_k \underline{\xi}_k,$$

waarbij \underline{Y} een n -vector van stochastische variabelen is, X een gegeven $n \times m$ matrix, β een m -vector van onbekende vaste parameters, U_i een gegeven $n \times c_i$ -matrix, $\underline{\xi}_i$ een c_i -vector van ongecorrleerde stochastische variabelen met verwachting 0 en variantie σ_i^2 en waarbij $E \underline{\xi}_i \underline{\xi}_j' = 0$ als $i \neq j$ (zie [8]). Als we schrijven $U = (U_1 \vdots \dots \vdots U_k)$ en $\underline{\xi}' = (\underline{\xi}_1' \vdots \dots \vdots \underline{\xi}_k')$ (gepartitioneerde matrix en vector), kunnen we het model schrijven in de korte vorm

$$(12.1.4) \quad \underline{Y} = X\beta + U\underline{\xi}.$$

Hiervoor geldt:

$$(12.1.5) \quad E\underline{Y} = X\beta, \quad D(\underline{Y}) = \sigma_1^2 V_1 + \dots + \sigma_k^2 V_k,$$

waarbij $D(\underline{Y})$ de covariantiematrix van \underline{Y} aanduidt en $V_i = U_i U_i'$. Het schatten van de onbekende varianties T^2 , W_j^2 en F_j^2 in (12.1.2) correspondeert dus met het schatten van σ_1^2 t/m σ_k^2 in (12.1.5).

In plaats van het schatten van de afzonderlijke σ_i^2 bekijken we nu het algemene probleem van het schatten van een lineaire functie $p_1 \sigma_1^2 + \dots + p_k \sigma_k^2$ van de varianties σ_i^2 met een kwadratische functie $\underline{Y}'A\underline{Y}$, waarbij A een symmetrische matrix is. De MINQUE-methode is gebaseerd op de volgende criteria.

- 1) Translatie-invariantie. Dit betekent dat de schatting ongewijzigd blijft als de parameter β veranderd wordt. Deze voorwaarde is vervuld als $AX=0$. Dan geldt namelijk

$$\underline{Y}'A\underline{Y} = (\underline{Y}-X\beta)' A(\underline{Y}-X\beta)$$

voor willekeurige waarden van β .

- 2) Zuiverheid. Dit houdt in dat

$$E\underline{Y}'A\underline{Y} = \sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2.$$

Als $AX=0$, geldt:

$$\begin{aligned} E\underline{Y}'A\underline{Y} &= E \underline{\xi}' U' A U \underline{\xi} = \sum_{i=1}^k E \underline{\xi}_i' U_i' A U_i \underline{\xi}_i \\ &= \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \text{spoor} (U_i' A U_i). \end{aligned}$$

Dus als we eisen dat $\text{spoor} (U_i' A U_i) = p_i$, $i = 1, \dots, k$, is $\underline{Y}'A\underline{Y}$ een zuivere schatter van $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$.

- 3) Minimum norm. Stel dat we de stochastische vectoren $\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_k$ kenden, dan zou een goede schatter van $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ gegeven worden door

$$\underline{\xi}' \Delta \underline{\xi} = \sum_{i=1}^k (p_i / c_i) \underline{\xi}'_i \underline{\xi}_i,$$

waarbij Δ een diagonaal-matrix is met als eerste c_1 diagonaal elementen steeds p_1/c_1 , als tweede c_2 diagonaal elementen steeds p_2/c_2 , enz. t/m c_k diagonaal elementen p_k/c_k . We kunnen dus het verschil tussen $\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y} = \underline{\xi}' U'AU\underline{\xi}$ en $\underline{\xi}'\Delta \underline{\xi}$ "klein" maken door A zo te kiezen dat een "norm" $\|U'AU-\Delta\|$ minimaal wordt. Als norm $\|\dots\|$ van een matrix B kunnen we bijvoorbeeld de Euclidische norm $\|B\| = \{\sum_{i,j} b_{ij}^2\}^{\frac{1}{2}}$ kiezen, als B uit de elementen b_{ij} bestaat.

Stel $V = V_1 + \dots + V_k$, dan geldt voor deze norm:

$$\|U'AU-\Delta\|^2 = \text{spoor}\{(U'AU-\Delta)^2\} = \text{spoor}((AV)^2) - \text{spoor}(\Delta^2).$$

Een MINQUE-schatter $\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y}$ van $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ wordt nu gevonden door de matrix A zodanig te kiezen dat $\text{spoor}((AV)^2)$ minimaal wordt onder de nevenvoorwaarden

$$\begin{cases} AX = 0 \\ \text{spoor}(AV_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Afhankelijk van de gekozen norm krijgen we echter verschillende MINQUE-schatters. Het bezwaar van de norm $\text{spoor}\{(U'AU-\Delta)^2\}$ is, dat hierbij de stochasten $\underline{\xi}_i$ niet gewogen worden naar hun variantie. Stel σ_i is de standaard afwijking van de componenten van $\underline{\xi}_i$ en stel Λ is een diagonaal-matrix met als eerste c_1 diagonaalelementen steeds σ_1^2 , als tweede c_2 diagonaalelementen steeds σ_2^2 , enz., dan lijkt een betere keuze voor de norm te zijn:

$$\|\Lambda^{\frac{1}{2}}(U'AU-\Delta)\Lambda^{\frac{1}{2}}\|^2 = \text{spoor}((AV_*)^2),$$

waarbij $V_* = \sigma_1^2 V_1 + \dots + \sigma_k^2 V_k$ de eigenlijke covariantie-matrix is. In dat geval kijken we eigenlijk naar het verschil

$$\underline{\eta}' \Lambda^{\frac{1}{2}} U' A U \Lambda^{\frac{1}{2}} \underline{\eta} - \underline{\eta}' \Lambda^{\frac{1}{2}} \Delta \Lambda^{\frac{1}{2}} \underline{\eta},$$

waarbij $\underline{\eta}' = (\eta'_1 \dots \eta'_k)$ bestaat uit de gestandaardiseerde stochastische vectoren $\sigma_i^{-1} \xi_i$. Aangezien de varianties σ_1^2 t/m σ_k^2 echter onbekend zijn, moeten bij toepassing van dit type norm aanvangsgewichten aan σ_1^2 t/m σ_k^2 worden toegekend. Een voor de hand liggende methode is om te starten met de ongewogen Euclidische norm $\|U'AU - \Delta\|^2$, MINQUE-schattingen $\hat{\sigma}_i^2$ van de varianties σ_i^2 te berekenen en vervolgens MINQUE-schattingen van $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ te berekenen met behulp van de norm $\|\Lambda^{\frac{1}{2}}(U'AU - \Delta)\Lambda^{\frac{1}{2}}\|^2$ waarbij Λ van de bovenbeschreven vorm is met i.p.v. σ_i^2 de schattingen $\hat{\sigma}_i^2$. Dit proces kan herhaald worden, bijv. tot de schattingen stationair zijn over twee opeenvolgende iteraties (zg. iteratieve MINQUE-methode). Aangezien $\underline{\Lambda}$ stochastisch is, wordt op deze wijze de te kiezen matrix A ook stochastisch (notatie \underline{A}), zodat we in plaats van met de schatter $\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y}$ te maken hebben met een schatter van het type $\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y}$. Het is duidelijk dat deze schatter vanwege de afhankelijkheid van \underline{A} en \underline{Y} niet noodzakelijk zuiver is. De zo verkregen schatter heeft echter wel de belangrijke eigenschap dat hij een stationair punt van een marginale aannemelijkheidsfunctie (zie 12.2) oplevert. Tenslotte is ook de volgende eigenschap van groot belang.

- 4) De MINQUE-schatters zijn nauwkeurig (d.w.z. hebben i.h.a. een kleine variantie) als de stochasten ξ_i een normale $N(0, \sigma_i^2 I_{C_i})$ verdeling hebben (en onderling onafhankelijk zijn). De variantie van $\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y}$ is dan namelijk (voor niet-stochastische A) gelijk aan

$$\begin{aligned} V(\underline{Y}'\underline{A}\underline{Y}) &= V(\underline{\xi}'U'AU\underline{\xi}) = 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sigma_i^2 \sigma_j^2 \text{ spoor } (AV_i AV_j) = \\ &= 2 \text{ spoor } (AV_* AV_*), \end{aligned}$$

waarbij $V_* = \sigma_1^2 V_1 + \dots + \sigma_k^2 V_k$ de covariantie-matrix van \underline{Y} is. Aangezien bij de iteratieve MINQUE-methode een uitdrukking van de vorm $\text{spoor } (\underline{A}\underline{W}\underline{A}\underline{W})$ met $\underline{W} = \sum_{i=1}^k \hat{\sigma}_i^2 V_i$ wordt geminimaliseerd, als functie van A, zal de voorwaardelijke variantie van de iteratieve MINQUE-schatter gegeven $\hat{\sigma}_1^2 = a_1, \dots, \hat{\sigma}_k^2 = a_k$ i.h.a. klein zijn (en wel des te kleiner naarmate a_1, \dots, a_k minder van de werkelijke varianties $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ verschillen).

Zij nu H een positief definitie $n \times n$ matrix en X van volledige rang (zodat $X'H^{-1}X$ ook positief definit is) en zij $P = X(X'H^{-1}X)^{-1}X'H^{-1}$. Dan geldt het volgende Lemma (voor het bewijs zie [7] p. 114).

LEMMA. *Het minimum van spoor $(AHAH)$ onder de nevenvoorwaarden*

$$\begin{cases} AX = 0 \\ \text{spoor}(AV_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, k \end{cases}$$

wordt bereikt voor $A_* = \sum_{i=1}^k \lambda_i RV_i R$, waarbij $R = H^{-1}(I_n - P)$ en $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$ bepaald wordt uit de vergelijking

$$S\lambda = (p_1, \dots, p_k)'$$

met S een matrix waarvan het ij^e element gelijk is aan $\text{spoor}(RV_i RV_j)$.

Uit het Lemma volgt dat voor een matrix $H = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$ met gegeven begingewichten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ voor de varianties $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ de MINQUE-schatter van $\sum_i p_i \sigma_i^2$ gegeven wordt door

$$\underline{Y}' A_* \underline{Y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{Y}' RV_i R \underline{Y}.$$

Stel $\underline{u}_i = \underline{Y}' RV_i R \underline{Y}$, $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)'$ en $p = (p_1, \dots, p_k)'$, dan geldt dus

$$\underline{Y}' A_* \underline{Y} = \lambda' \underline{u} = p' S^{-1} \underline{u}.$$

Hieruit volgt dat de MINQUE-schatter voor een willekeurige lineaire combinatie $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ gegeven wordt door $\sum_{i=1}^k p_i \hat{\sigma}_i^2$, waarbij $(\hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_k^2)' = S^{-1} \underline{u}$.

Hiermee is het probleem van het vinden van MINQUE-schatters in principe opgelost. Als we echter de methode in deze ruwe vorm zouden programmeren, zou de methode voor het schatten van de varianties in het model voor de analyse van de lodingen in de Waddenzee buitengewoon kostbaar worden. De matrix $H = \sum_{i=1}^k \alpha_i V_i$ zou bijvoorbeeld voor blok 3 - inlood 4 (zie pagina 7) een 1140×1140 matrix worden, die zou moeten worden opgeslagen, geïnverteerd en vermenigvuldigd met andere matrices (zoals in

$P = X(X'H^{-1}X)^{-1}X'H^{-1}$). Daarom zijn deze matrixinversies en vermenigvuldigingen met de hand uitgevoerd (gebruikmakend van de speciale structuur van de matrices). Dit leidt tot de volgende formules. Zij

$$(12.1.6) \quad H = \gamma_1 V_1 + \sum_{j=1}^p \gamma_{2j} V_{2j} + \sum_{j=1}^p \gamma_{3j} V_{3j},$$

waarbij $V_1 = U_1 U_1'$, $V_{ij} = U_{ij} U_{ij}'$, $i = 2, 3$; $j = 1, \dots, p$, en waarbij γ_1 , γ_{2j} , γ_{3j} uitgangsgewichten zijn voor het schatten van de varianties. γ_1 correspondeert met T^2 , γ_{2j} met W_j^2 en γ_{3j} met F_j^2 . Zij $P = X(X'H^{-1}X)^{-1}X'H^{-1}$, $R = H^{-1}(I-P)$ en S een $(2p+1) \times (2p+1)$ matrix die als volgt is opgebouwd

$$\begin{aligned} s_{11} &= \text{spoor} (RV_1 RV_1), \\ s_{1,1+j} &= \text{spoor} (RV_1 RV_{2j}), \quad j = 1, \dots, p, \\ s_{1,1+p+j} &= \text{spoor} (RV_1 RV_{3j}), \quad j = 1, \dots, p, \\ s_{1+j,1+k} &= \text{spoor} (RV_{2j} RV_{2k}), \quad j = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p, \\ s_{1+j,1+p+k} &= \text{spoor} (RV_{2j} RV_{3k}), \quad j = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p, \\ s_{ij} &= s_{ji}, \quad i = 1, \dots, 2p+1; \quad j = 1, \dots, 2p+1. \end{aligned}$$

Dan geldt:

$$s_{11} = n^2 \left\{ \delta_3^{(2)} + \left(\frac{\delta_3^{(2)}}{\delta_3} \right)^2 - \frac{2}{\delta_3} \delta_3^{(3)} \right\},$$

waarbij $\delta_3^{(i)} = \sum_{j=1}^p (q_j / (nq_j \gamma_1 + n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}))^i$, $i = 2, 3$, q_j het aantal vaarten van het j^e schip is (merk op dat het aantal vaarten per schip mag variëren) en $\delta_3 = \sum_{j=1}^p q_j / (nq_j \gamma_1 + n\gamma_{2j} + \gamma_{3j})$.

$$s_{1,1+j} = \frac{n^2 q_j}{\delta_{3j}^2} \left\{ 1 + \frac{\delta_3^{(2)}}{\delta_3^2} - \frac{2q_j}{\delta_3 \delta_{3j}} \right\},$$

waarbij $\delta_{3j} = nq_j \gamma_1 + n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}$, $j = 1, \dots, p$.

$$s_{1,1+j+p} = \frac{1}{n} s_{1,1+j}, \quad j = 1, \dots, p$$

$$s_{1+j,1+j} = \frac{n^2 q_j}{\epsilon_{3j}^2} - \frac{n^3 q_j \gamma_1}{\delta_{3j} \epsilon_{3j}} \left(\frac{1}{\delta_{3j}} + \frac{1}{\epsilon_{3j}} \right) \\ + \frac{n^2 q_j}{\delta_3 \delta_{3j}^3} \left(\frac{q_j}{\delta_3 \delta_{3j}} - 2 \right), \quad j = 1, \dots, p,$$

waarbij $\epsilon_{3j} = n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}$.

$$s_{1+j+p,1+j+p} = \frac{nq_j}{\gamma_{3j}^2} - \frac{nq_j \gamma_{2j}}{\gamma_{3j} \epsilon_{3j}} \left(\frac{1}{\gamma_{3j}} + \frac{1}{\epsilon_{3j}} \right) \\ - \frac{nq_j \gamma_1}{\delta_{3j} \epsilon_{3j}} \left(\frac{1}{\delta_{3j}} + \frac{1}{\epsilon_{3j}} \right) + \frac{q_j}{\delta_3 \delta_{3j}^3} \left(\frac{q_j}{\delta_3 \delta_{3j}} - 2 \right) \\ + \frac{(n-1)q_j}{\gamma_3 \gamma_{3j}^3} \left(\frac{q_j}{\gamma_3 \gamma_{3j}} - 2 \right), \quad j = 1, \dots, p,$$

waarbij $\gamma_3 = \sum_{j=1}^p \frac{q_j}{\gamma_{3j}}$.

$$s_{1+j,1+k+p} = \frac{1}{n} s_{1+j,1+k}, \quad j = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p \text{ en } j \neq k$$

$$s_{1+p+j,1+p+k} = \left(\frac{q_j}{\delta_3 \delta_{3j} \delta_{3k}} \right)^2 + \frac{(n-1)q_j^2}{(\gamma_3 \gamma_{3j} \gamma_{3k})^2}, \quad j = 1, \dots, p; \\ k = 1, \dots, p \text{ en } j \neq k.$$

Zij verder

$$u_1 = Y'RV_1RY, \quad u_{1+j} = Y'RV_{2j}RY, \quad j = 1, \dots, p$$

en

$$u_{1+p+j} = Y'RV_{3j}RY, \quad j = 1, \dots, p.$$

Dan geldt:

$$u_1 = n^2 \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_j}{\delta_{3j}} (y_{.j.} - \hat{\mu}) \right)^2,$$

$$\text{waarbij } \hat{\mu} = \frac{1}{\delta_3} \sum_{j=1}^p \frac{q_j}{\delta_{3j}} y_{.j.}.$$

$$u_{1+j} = \left(\frac{n}{\epsilon_{3j}} \right)^2 \sum_{k=1}^{q_j} \left(y_{.jk} - \hat{\mu} - \frac{nq_j \gamma_1}{\delta_{3j}} (y_{.j.} - \hat{\mu}) \right)^2 \quad j = 1, \dots, p.$$

$$u_{1+j+p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_j} \left\{ \frac{1}{\gamma_{3j}} (y_{ijk} - \hat{\theta}_i) - \frac{n\gamma_{2j}}{\gamma_{3j} \epsilon_{3j}} (y_{.jk} - \hat{\mu}) - \frac{nq_j \gamma_1}{\delta_{3j} \epsilon_{3j}} (y_{.j.} - \hat{\mu}) \right\}^2 \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\text{waarbij } \hat{\theta}_i = \frac{1}{\gamma_3} \sum_{j=1}^p \frac{q_j}{\gamma_{3j}} (y_{ij.} - y_{.j.}) + \hat{\mu}.$$

Zij tenslotte $\gamma = (\gamma_1, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{2p}, \gamma_{31}, \dots, \gamma_{3p})'$, dan is met behulp van bovenstaande formules het oplossen van de vergelijking

$$S\gamma = u$$

herhaald totdat de oplossingsvectoren γ zich niet meer wijzigden in twee opeenvolgende iteraties (bijv. zich niet meer wijzigden in de 10^e decimaal). Dit bereiken van een stationair punt gebeurde i.h.a. vrij snel (na 10 iteraties was het stationaire punt meestal wel bereikt).

Zo'n stationair punt levert i.h.a. tevens een "restricted maximum likelihood" schatting. Dit zal worden toegelicht in de volgende paragraaf.

Tenslotte vermelden we dat de MINQUE-schattingsmethode ook is uitgewerkt voor een model, dat alleen verschilt van het oorspronkelijke door ons gehanteerde model door het feit dat de parameters τ_1, \dots, τ_p als vast in plaats van stochastische worden opgevat. Speciaal in het geval

dat er maar twee of drie schepen meedoen in het experiment lijkt dit een realistischer model. Bovendien zijn de schattingen die met deze methode verkregen werden gebruikt bij de toetsingen (zie §12.3). In het algemeen weken overigens de schattingen van W_j^2 en F_j^2 die op deze wijze werden verkregen buitengewoon weinig af van de schattingen die verkregen werden voor het model waarin τ_1, \dots, τ_p als stochastische variabelen worden beschouwd.

12.2 Verband tussen iteratieve MINQUE-schatters en "restricted maximum likelihood" schatters

In het model (12.1.1) zijn de varianties van τ , w_j en e_j de dingen die ons eigenlijk interesseren en zijn de parameters θ_1 t/m θ_n , die de onbekende dieptes aangeven, in feite "nuisance parameters". Er zijn aanwijzingen dat bij een groot aantal nuisance parameters de zg. "restricted maximum likelihood" schatters efficiënter zijn dan de gewone maximum likelihood schatters (zie [5] en [2], p.325).

De "restricted maximum likelihood" schatters zijn gebaseerd op een deel van de aannemelijkheidsfunctie waaruit de nuisance parameters zijn geëlimineerd.

Stel (met de notatie van p.14 en 15), dat S de $npq \times npq$ matrix is die gelijk is aan $I_{npq} - X(X'X)^{-1} X'$ en dat A een $npq \times (npq-n)$ matrix is die voldoet aan $A'A = I$ en $S = AA'$. Zo'n matrix kan altijd gevonden worden, omdat S positief semidefiniet is en rang $npq-n$ heeft (voor de eenvoud nemen we weer aan dat het aantal vaarten gelijk is voor de verschillende schepen). Zij verder H de covariantie matrix van \underline{Y} gedefinieerd in (12.1.2) en zij $G = H^{-1}X(X'H^{-1}X)^{-1}$. Dan kunnen we voor een npq -vector Y de een-eenduidige transformatie $T(Y) = (G'Y:A'Y)'$ definiëren. De stochastische vector \underline{Y} gaat hierdoor over in $(G'\underline{Y}:A'\underline{Y})'$, waarbij $G'\underline{Y}$ een n -vector met verwachting $E(G'\underline{Y}) = \theta$ is en $A'\underline{Y}$ een $(npq-n)$ -vector met verwachting $E(A'\underline{Y}) = 0$. Onder de normaliteitsveronderstellingen heeft $G'\underline{Y}$ een normale $N(\theta, G'HG)$ -verdeling en $A'\underline{Y}$ een normale $N(0, A'HA)$ -verdeling. We hebben de vector \underline{Y} door de transformatie dus opgesplitst in een deel $G'\underline{Y}$ bestaande uit n componenten die corresponderen met de "nuisance parameters" θ_i en een deel $A'\underline{Y}$ waarvan de verdeling onafhankelijk is van de parameters θ_i (de onbekende dieptes).

De "restricted maximum likelihood" schatters van de varianties T^2 , W_j^2 en F_j^2 zijn schatters die verkregen worden door de zg. marginale aannemelijkheidsfunctie van $A'Y$ te maximaliseren naar deze parameters T^2 , W_j^2 en F_j^2 (zie voor de beschrijving van dit type schatters bijvoorbeeld [2] en [6]). De logaritme van de aannemelijkheidsfunctie van Y wordt gegeven door

$$(12.2.1) \quad L_1(Y) = -\frac{1}{2}n(pq-1) \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|H| - \frac{1}{2} \log|X'H^{-1}X| - \\ - \frac{1}{2}(Y-XG'Y)' H^{-1}(Y-XG'Y)$$

(zie [7]).

Hierbij duidt "log" de natuurlijke logaritme aan (even goed kan echter een andere basis voor de logaritme genomen worden) en duiden $|H|$ en $|X'H^{-1}X|$ de determinanten van H respectievelijk $X'H^{-1}X$ aan (merk op dat (12.2.1) niet van de keuze van A afhangt). Als we nu weer analoog aan (12.1.6) de onbekende variantie T^2 aanduiden met γ_1 , de onbekende varianties W_j^2 door γ_{2j} , de onbekende varianties F_j^2 door γ_{3j} en tenslotte definiëren

$$g(X,H) = -\log|H| - \log|X'H^{-1}X|,$$

hebben we de volgende relaties (zoals met enige volharding kan worden aangetoond)

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma_1^2} g(X,H) = \text{spoor}(RV_1 RV_1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_{ij}} g(X,H) = \text{spoor}(RV_1 RV_{ij}), \quad i = 2,3; \quad j = 1,\dots,p$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} g(X,H) = \text{spoor}(RV_{ij} RV_{kl}), \quad i,k = 2,3; \quad j,l = 1,\dots,p.$$

We zien dus dat de tweede afgeleides van $g(X,H)$ naar de parameters γ_1 , γ_{2j} en γ_{3j} gelijk zijn aan de elementen van de matrix S die gedefinieerd werd op pagina 46.

Verder kan worden aangetoond

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} (Y-XG'Y)'H^{-1}(Y-XG'Y) = -Y'RV_1RY$$

en

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} (Y-XG'Y)'H^{-1}(Y-XG'Y) = -Y'RV_{ij}RY, \quad \text{voor } i = 2,3; \\ j = 1,\dots,p.$$

Deze afgeleides corresponderen met de elementen u_1, \dots, u_{2p+1} van de vector u gedefinieerd op pagina 47 en 48.

Stel nu dat de iteratieve MINQUE-methode een stationair punt van de vergelijking $S\gamma = u$ vindt (dat wil zeggen: aan de rechterkant van het gelijkteken treden in de componenten van u dezelfde γ 's op als links van het gelijkteken). Dan geldt:

$$(12.2.2) \quad S\gamma = (\text{spoor}(RV_1), \text{spoor}(RV_{21}), \dots, \text{spoor}(RV_{2p}), \dots, \text{spoor}(RV_{31}), \\ \dots, \text{spoor}(RV_{3p}))' = (Y'RV_1RY, Y'RV_{21}RY, \dots, Y'RV_{3p}RY)'$$

Hieruit volgt:

$$(12.2.3) \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_1} L_1 = 0 \text{ en } \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} L_1 = 0, \quad i = 2,3; \quad j = 1,\dots,p$$

omdat $2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} L_1 = -\text{spoor}(RV_1) + Y'RV_1RY$

en $2 \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} L_1 = -\text{spoor}(RV_{ij}) + Y'RV_{ij}RY, \quad i = 2,3; \quad j = 1,\dots,p,$

waarbij L_1 gedefinieerd is door (12.2.1).

Omgekeerd, als γ aan (12.2.3) voldoet, is γ tevens een oplossing van (12.2.2), dus een stationair punt van de vergelijking $S\gamma = u$. Hiermee is aangetoond dat een vinden van een stationair punt van de vergelijking $S\gamma = u$ in de iteratieve MINQUE-methode equivalent is met het vinden van een stationair punt van L_1 (de logaritme van de marginale aannemelijkheidsfunctie). Het stationaire punt van de iteratieve MINQUE-methode zal dus i.h.a. corresponderen met een maximum van de marginale aannemelijkheidsfunctie.

12.3 Toetsingsmethoden *)A. Toets voor $W_j^2 = 0$.Als toetsingsgrootte voor de hypothese $H_0: W_j^2 = 0$ is genomen

$$(12.3.1) \quad T_j = n(n-1) \frac{\sum_{k=1}^{q_j} (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j})^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_j} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.jk} + \bar{Y}_{.j})^2}.$$

De toetsingsgrootte T_j heeft onder H_0 een centrale F-verdeling met respectievelijk $q_j - 1$ en $(n-1)(q_j - 1)$ vrijheidsgraden. Om dit in te zien definiëren we de volgende grootte

$$S_{2j}^2 = \sum_{k=1}^{q_j} \frac{n}{n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}} (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j})^2$$

$$S_{3j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_j} \frac{1}{\gamma_{3j}} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.jk} + \bar{Y}_{.j})^2,$$

waarbij $\gamma_{2j} = W_j^2$ en $\gamma_{3j} = F_j^2$.

Zij verder (met de notatie van p.14)

$$A = \frac{1}{n} J_n J_n' \otimes \left(I_{q_j} - \frac{1}{q_j} J_{q_j} J_{q_j}' \right)$$

$$B = I_n \otimes \left(I_{q_j} - \frac{1}{q_j} J_{q_j} J_{q_j}' \right)$$

en

$$\underline{Y}_j = (\underline{Y}_{1j}, \dots, \underline{Y}_{1jq_j}, \underline{Y}_{2j1}, \dots, \underline{Y}_{2jq_j}, \dots, \underline{Y}_{nj1}, \dots, \underline{Y}_{njq_j})'.$$

\underline{Y}_j is de uitgerolde vector van waarnemingen van schip j. Nu geldt:

$$(12.3.2) \quad S_{2j}^2 = \frac{1}{n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}} \underline{Y}_j' A \underline{Y}_j$$

*) Bij de toetsen worden de normaliteitsveronderstellingen van p.13 gehanteerd.

$$(12.3.3) \quad \underline{S}_{3j}^2 = \frac{1}{\gamma_{3j}} \underline{Y}'_j (B-A) \underline{Y}_j$$

en

$$(12.3.4) \quad A(B-A) = 0, \quad A^2 = A, \quad (B-A)^2 = B-A.$$

Uit (12.3.2), (12.3.3) en (12.3.4) volgt dat \underline{S}_{2j}^2 en \underline{S}_{3j}^2 respectievelijk een $\chi^2_{q_j-1}$ en een $\chi^2_{(n-1)(q_j-1)}$ verdeling hebben en onafhankelijk zijn (namelijk: rang (A) = spoor (A) = q_j-1 en rang (B-A) = spoor (B-A) = $(n-1)(q_j-1)$ corresponderend met de vrijheidsgraden van de χ^2 -verdelingen, zie bijv. [9], p.187).

Onder H_0 is $\gamma_{2j} = 0$ en geldt dus

$$(n-1)\underline{S}_{2j}^2/\underline{S}_{3j}^2 = (n-1) \underline{Y}'_j A \underline{Y}_j / \underline{Y}'_j (B-A) \underline{Y}_j = T_j^2,$$

waaruit het gestelde volgt.

B. Toets voor $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_p$.

Bij de toets op aanwezigheid van een "schipeffect" nemen we aan dat de parametervector τ in model (12.1.1) niet-stochastisch is en dat de componenten τ_1 t/m τ_p voldoen aan $\sum_{j=1}^p q_j \tau_j = 0$. Voor de eenvoud van notatie nemen we weer aan dat het aantal vaarten voor de verschillende schepen gelijk is, d.w.z. $q_j = q$ voor $j = 1, \dots, p$. De nulhypothese wordt: $H_0: \tau_1 = \dots = \tau_p = 0$. Stel weer $\gamma_{2j} = W_j^2$, $\gamma_{3j} = F_j^2$, $j = 1, \dots, p$, dan wordt de covariantiematrix van \underline{Y} :

$$H = J_n J_n' \otimes \text{diag}(\gamma_{21}, \dots, \gamma_{2p}) \otimes I_q + I_n \otimes \text{diag}(\gamma_{31}, \dots, \gamma_{3p}) \otimes I_q,$$

waarbij $\text{diag}(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ip})$ een matrix met op de diagonaal $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ip}$ en buiten de diagonaal nullen voorstelt.

Zij X_1 de matrix X verminderd met de eerste kolom, zij $\theta^{(1)} = (\theta_2, \dots, \theta_n)'$, $W = (X_1; U_1)$ en $\eta = (\theta^{(1)} - \theta_1 J_{n-1}; \tau + \theta_1 J_p)'$. Dan kan het model als volgt geschreven worden

$$(12.3.5) \quad \underline{Y} = W\eta + \sum_{j=1}^p U_{2j} \underline{w}_j + \sum_{j=1}^p U_{3j} \underline{e}_j.$$

We gaan op deze nieuwe schrijfwijze over omdat $W = (X_1 : U_1)$ van volledige (kolommen-) rang is, terwijl $(X : U_1)$ niet van volledige rang is (dit correspondeert met het feit dat de parameters θ_i en τ_j alleen identificeerbaar zijn als we een of andere restrictie zoals $\sum_{j=1}^p \tau_j = 0$ opleggen). De gewogen kleinste kwadraten (tevens meest aannemelijke) schatter van η wordt nu gegeven door

$$\hat{\underline{\eta}} = (W'H^{-1}W)^{-1} W'H^{-1}\underline{Y}$$

en de gewogen kleinste kwadraten (tevens meest aannemelijke) schatter van θ onder H_0 door

$$\hat{\underline{\theta}} = (X'H^{-1}X)^{-1} X'H^{-1}\underline{Y}.$$

Stel nu:

$$(12.3.6) \quad \underline{t}_1 = (\underline{Y} - W\hat{\underline{\eta}})' H^{-1} (\underline{Y} - W\hat{\underline{\eta}})$$

en

$$(12.3.7) \quad \underline{t}_2 = (\underline{Y} - X\hat{\underline{\theta}})' H^{-1} (\underline{Y} - X\hat{\underline{\theta}}).$$

Dan heeft onder H_0 $\frac{npq-p-n+1}{p-1} \frac{\underline{t}_2 - \underline{t}_1}{\underline{t}_1}$ een centrale F-verdeling met respectievelijk $p-1$ en $npq-n-p+1$ vrijheidsgraden.

Uitwerking van \underline{t}_1 en \underline{t}_2 geeft

$$\underline{t}_2 - \underline{t}_1 = nq \sum_{j=1}^p \frac{1}{\epsilon_{3j}} \left(\underline{Y}_{.j.} - \frac{1}{\epsilon_3} \sum_{l=1}^p \frac{1}{\epsilon_{3l}} \underline{Y}_{.l.} \right)^2,$$

waarbij $\epsilon_{3j} = n\gamma_{2j} + \gamma_{3j}$, $\epsilon_3 = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\epsilon_{3j}}$ en $\underline{t}_2 - \underline{t}_1$ een χ_{p-1}^2 -verdeling heeft. Verder:

$$\begin{aligned} \underline{t}_1 = & n \sum_{j=1}^p \frac{1}{\epsilon_{3j}} \sum_{k=1}^q (\underline{Y}_{.jk} - \underline{Y}_{.j.})^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \frac{1}{\gamma_{3j}} \left\{ \underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{.jk} - \frac{1}{\gamma_3} \sum_{l=1}^p \frac{1}{\gamma_{3l}} (\underline{Y}_{i1.} - \underline{Y}_{.1.}) \right\}^2 \end{aligned}$$

waarbij de eerste term een $\chi^2_{p(q-1)}$ -verdeling heeft en de tweede term een $\chi^2_{(n-1)(pq-1)}$ -verdeling. \underline{t}_1 heeft dus een $\chi^2_{npq-n-p+1}$ -verdeling, omdat $\underline{Y}_{.jk} - \underline{Y}_{.j}$ en $\underline{Y}_{ijk} - \underline{Y}_{.jk} - \frac{1}{\gamma_3} \sum_{l=1}^p \frac{1}{\gamma_{3l}} (\underline{Y}_{il.} - \underline{Y}_{l.})$ ongecorrleerd zijn. De verdelingen van $\underline{t}_2 - \underline{t}_1$ en \underline{t}_1 volgen overigens ook onmiddellijk uit (12.3.6) en (12.3.7). Onze toetsingsgrootte voor het toetsen van H_0 wordt dus:

$$\underline{t} = \frac{npq-p-n+1}{p-1} \frac{\underline{t}_2 - \underline{t}_1}{\underline{t}_1} .$$

Aangezien de varianties γ_{2j} en γ_{3j} onbekend zijn, hebben we hiervoor de schattingen $\hat{\gamma}_{2j}$ en $\hat{\gamma}_{3j}$ genomen die de MINQUE-methode bij model (12.3.5) opleverde. Het is duidelijk dat \underline{t} met deze geschatte varianties $\hat{\gamma}_{ij}$ niet meer exact een centrale F-verdeling onder H_0 volgt. De grote verschillen tussen de varianties maken een dergelijke "weging" echter wel noodzakelijk en het leek ons aangewezen om voor deze gewichten de schattingen van de MINQUE-methode te nemen.

13. LITERATUUR

- [5] Corbeil, R.R. & S.R. Searle (1976), *A Comparison of Variance Component Estimators*, Biometrics, 32, 779-791.
- [6] Corbeil, R.R. & S.R. Searle (1976), *Restricted Maximum Likelihood (REML) Estimation of Variance Components in the Mixed Model*, Technometrics, 18, 31-38.
- [7] Harville, D.A. (1974), *Bayesian Inference for Variance Components Using only Error Contrasts*, Biometrika, 61, 383-385.
- [8] Rao, C.R. (1972), *Estimation of Variance and Covariance Components in Linear Models*, Journal of the American Statistical Association, 67, 112-115.
- [9] Rao, C.R. (1973), *Linear Statistical Inference and its Applications*, New York, John Wiley & Sons.