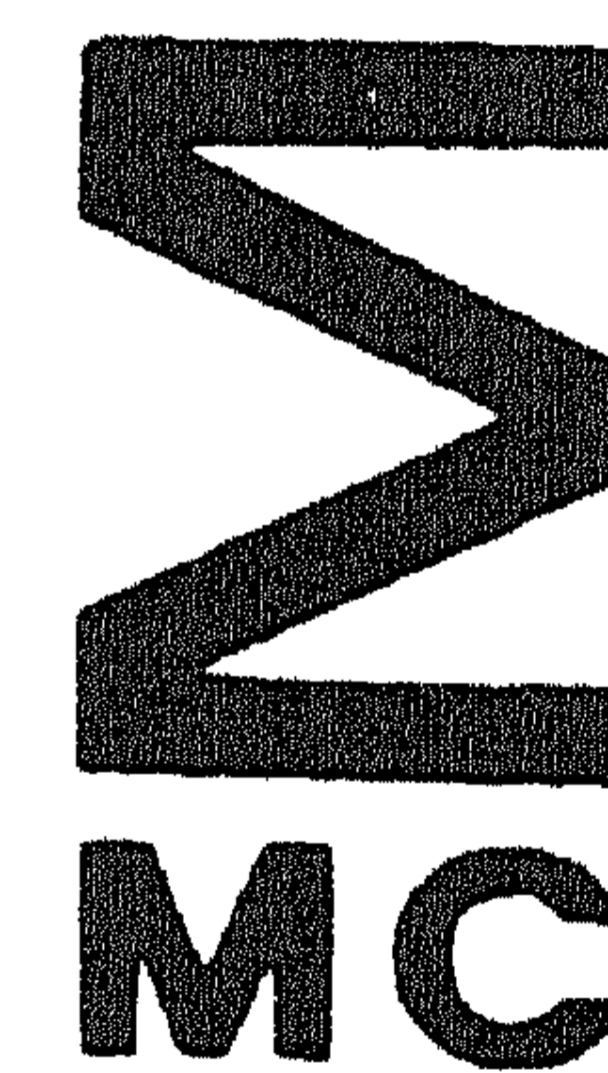


**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

SD 113/78

JUNI

J.G. BETHLEHEM, R.J.M.M. DOES & R. HELMERS

STATISTISCHE ANALYSE VAN VERDELINGEN VAN GOLF-
HOOGTEN EN WATERSTANDEN BIJ DE OOSTERSCHELDE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Statistische analyse van verdelingen van golfhoogten en waterstanden
bij de Oosterschelde

door

J.G. Bethlehem, R.J.M.M. Does & R. Helmers

SAMENVATTING

De nota DDWT-77.238 "Beschrijving van de probabilistische methode voor de bepaling van de golf- en vervalkrachten" van de Deltadienst werd op zijn wiskundig-statistische merites bezien. De nota DDWT-77.238 heeft betrekking op een methode om uit de verdelingen van hoogwaterstanden, binnenwaterstanden en significante golfhoogten de verdeling van de totaalbelasting (samen- gesteld uit golf- en vervalkrachten) op de stormvloedkering in de Ooster- schelde te bepalen. Dit rapport behelst een nadere statistische analyse van de in de nota DDWT-77.238 gehanteerde verdelings- en onafhankelijkheids- assumpties. Verder is getracht een wiskundig correcte behandeling te geven van een in bovengenoemde nota gegeven model voor de golf- en vervalkrachten op de stormvloedkering in de Oosterschelde.

TREFWOORDEN: *statistische consultatie*

INHOUD

§ 1	Inleiding	1
§ 2	Het model	2
2.1.	Inleiding	2
2.2.	De golfbelasting	2
2.3.	De vervalbelasting I	4
2.4.	De totaalbelasting	4
2.5.	De binnenwaterstand <u>Bws</u> en de buitenwaterstand <u>Hw</u> zijn onafhankelijk	7
2.6.	Het discretiseren	9
2.7.	De vervalbelasting II	11
§ 3	De significante golfhoogten, de buitenwaterstanden en de binnenwaterstanden	13
3.1.	Het waarnemingsmateriaal aangaande significante golf- hoogten, buitenwaterstanden en windrichtingen	13
3.2.	De significante golfhoogte Hs	13
3.3.	De buitenwaterstand	16
3.4.	De windrichting	16
3.5.	Statistisch onderzoek naar de aard van de verdeling van Hs (O.S.IV)	17
3.6.	Het verband tussen Hs (O.S.IV) en Hw (B)	18
3.7.	Statistisch onderzoek naar de verdeling van Hs (vis) en Hs (instr.)	19
3.8.	Enige opmerkingen over schatting van kansen op extreme gebeurtenissen	22
3.9.	Het waarnemingsmateriaal aangaande binnenwaterstanden	23
3.10.	De laagwaterstanden	24
3.11.	Het verband tussen de binnenwaterstand enerzijds en de significante golfhoogte en de buitenwaterstand anderzijds	24
3.12.	Conclusies	28
3.13.	Betrouwbaarheidsintervallen, scheefheid en kurtosis	29

Appendix I.	Het waarnemingsmateriaal aangaande significante golfhoogten, buitenwaterstanden en windrichtingen	32
Appendix II.	Het lineaire regressiemodel	41
Appendix III	Informe beschrijving van enige gebruikte statistische methoden	44
Appendix IV.	Het waarnemingsmateriaal aangaande binnenwaterstanden	49
Literatuur		51

Rapport van een statistisch onderzoek n.a.v. de nota DDWT-77.238
"Beschrijving van de probabilistische methode voor de bepaling
van de golf- en vervalkrachten".

§1 INLEIDING

In december 1977 heeft ir. D. Kooman, coördinator van het projekt Coprob van de Deltadienst aan het Mathematisch Centrum gevraagd de in de titel van dit rapport vermelde nota op zijn wiskundig-statistische merites te bezien. De nota DDWT-77.238 heeft betrekking op een methode om uit de verdelingen van hoogwaterstanden, binnenwaterstanden en significante golfhoogten de verdeling van de totaalbelasting (samengesteld uit golf- en vervalkrachten) op de stormvloedkering in de Oosterschelde te bepalen.

Het gaat om het opstellen van een kansmodel voor de golf- en vervalkrachten, waaruit de verdeling van de totaalbelasting kan worden afgeleid. In het in de nota DDWT-77.238 ontwikkelde model spelen een aantal veronderstellingen een belangrijke rol. Enkele van deze veronderstellingen zijn statistisch van aard: verdelingsassumpties en onafhankelijkheidsassumpties. Daarnaast spelen een aantal relaties (veronderstellingen) een rol die te maken hebben met de bepaling van (golf- en verval-)belastingen uit het golfbeeld en het verval. Dit rapport heeft vooral betrekking op een statistische analyse van de in de nota DDWT-77.238 vermelde verdelings- en onafhankelijkheidsassumpties (zie §3). Verder hebben wij getracht een wiskundig correcte behandeling te geven van een model voor de golf- en vervalkrachten op de stormvloedkering in de Oosterschelde (zie §2). Hierbij zijn de bovengenoemde veronderstellingen aangaande de bepaling van golf- en vervalbelastingen uit golfbeeld en verval voor ons een niet nader onderzocht uitgangspunt geweest. Ook de hiermee verband houdende "spectrale analyse" (o.m. leidend tot een Rayleigh verdeling voor de maxima van de golfbelastingamplitude) zijn niet onderzocht. Het in §2 ontwikkelde kansmodel voor de golf- en vervalkrachten op de stormvloedkering in de Oosterschelde is een herziene versie van het in de nota DDWT-77.238 gegeven model. In §3 wordt verslag gedaan van een statistische analyse naar de verdelingen van de hoogwaterstanden, significante golfhoogten en binnenwaterstanden. Ook hun onderlinge samenhang (onafhankelijkheidsassumptie!) werd onderzocht, terwijl tevens de invloed van de windrichting werd nagegaan. Bij de analyse van de binnenwaterstanden werd gebruik gemaakt van de gegevens uit de nota DDWT-77.192 van de Deltadienst. Appendices, waarin een beschrijving van de gebruikte statistische methoden en het waarnemingsmateriaal, zijn toegevoegd.

§2 HET MODEL

2.1. Inleiding

In deze paragraaf wordt een kansmodel ontwikkeld voor de golf- en vervalkrachten op de stormvloedkering in de Oosterschelde. Omdat de golf- en vervalkrachten kunnen worden samengesteld tot een totaalbelasting (zie 2.4) kan men op deze wijze een uitdrukking vinden voor de kans dat de totaalbelasting een gegeven belastingwaarde (tenminste eenmaal) overschrijdt.

Een belastingstoestand is gedefinieerd als een combinatie van een binnenwaterstand Bws op de Oosterschelde, een buitenwaterstand Hw en een golfbeeld dat gekarakteriseerd wordt door een significante golfhoogte Hs en een gemiddelde periode Tz . De significante golfhoogte is gedefinieerd als het gemiddelde van de hoogste $33\frac{1}{3}\%$ golfhoogten, gemeten tijdens een korte periode van ongeveer gelijke waterstand. De drie stochastische grootheden ^{*)} Bws , Hw en Hs zijn de variabelen waarop het model gebaseerd wordt. De gemiddelde periode Tz komt niet voor, omdat bij iedere significante golfhoogte een bepaalde gemiddelde periode hoort.

Een complicatie is dat de windrichting invloed heeft op de buitenwaterstand Hw en de significante golfhoogte Hs . In het vervolg beschouwen we dan ook het gestelde probleem voor een vaste, doch willekeurige windrichting. Bij toepassingen dient men voor iedere windrichtingsklasse apart de relevante kansen te bepalen.

2.2. De golfbelasting

De overgang van golven naar golfbelastingen vindt plaats met behulp van een zogenaamde spectrale methode. Het onregelmatige zee-oppervlak in een golfbeeld kan men beschrijven door middel van een variantie-dichtheidsspectrum, of ook wel een golfspectrum genoemd. Wanneer er nu sprake is van een lineair systeem bij de overgang van golven naar golfbelastingen, dan kan men voor de golfbelastingen een soortgelijk spectrum vinden (het zgn. golfbelastingsspectrum). De golfbelasting wordt bepaald door de buitenwaterstand Hw en het golfspectrum dat gekarakteriseerd wordt door de significante golfhoogte Hs . Voorwaardelijk op $Hw = Hw$ én $Hs = Hs$ kan men de kans bepalen dat een bepaald golfbelastingsnivo tenminste eenmaal in een golfbeeld wordt overschreden.

*) Stochastische grootheden worden onderscheiden van waarden, die zij in de steekproef kunnen aannemen, door ze te onderstrepen.

Veronderstel dat het golfbelastingsspectrum smal is, dan is de kansverdeling van de maxima van de golfbelastingamplitude \underline{B} een Rayleigh verdeling met als parameter de significante golfbelastingamplitude B_s . De significante golfbelastingamplitude B_s is een functie van de buitenwaterstand H_w en de significante golfhoogte H_s . De verdeling van de maxima van de golfbelastingamplitude is bevestigd door modelproeven.

De Rayleigh verdeling met parameter B_s heeft een dichtheid gelijk aan

$$\frac{4B}{B_s} \exp\left(-2\left(\frac{B}{B_s}\right)^2\right)$$

voor $B \geq 0$, en 0 voor $B < 0$. Dus voor $B \geq 0$ geldt:

$$P(\underline{B} > B \mid \underline{H_w} = H_w, \underline{H_s} = H_s) = \exp\left(-2\left(\frac{B}{B_s}\right)^2\right).$$

De kans dat een golfbelasting B niet wordt overschreden is gelijk aan $1 - P(\underline{B} > B \mid \underline{H_w} = H_w, \underline{H_s} = H_s)$. Als men nu uitgaat van n onafhankelijke extreme golfbelastingen binnen de tijdsduur van een golfbeeld, dan is de kans dat bij ieder van de n extreme golfbelastingen de golfbelasting B niet wordt overschreden gelijk aan

$$[1 - P(\underline{B} > B \mid \underline{H_w} = H_w, \underline{H_s} = H_s)]^n = \left(1 - \exp\left(-2\left(\frac{B}{B_s}\right)^2\right)\right)^n. \quad (1)$$

Om n te bepalen, moet men de tijdsduur van een golfbeeld weten en de gemiddelde periode van de nuldoorgangen van de golfbelastingsregistratie. Voorwaardelijk op $\underline{H_w} = H_w$ en $\underline{H_s} = H_s$ veronderstelt men dat n bepaald kan worden (zie nota DDWT-77.238 van de Deltadienst).

Stel dat \underline{GB} een stochastische grootte is met voorwaardelijke verdelingsfunctie zoals in uitdrukking (1), dan geldt dus dat

$$\begin{aligned} P(\underline{GB} \leq GB \mid \underline{H_w} = H_w, \underline{H_s} = H_s) &= \left(1 - \exp\left(-2\left(\frac{GB}{B_s}\right)^2\right)\right)^n \\ &= \int_{-\infty}^{GB} \frac{4yn}{B_s^2} \left(1 - \exp\left(-2\left(\frac{y}{B_s}\right)^2\right)\right)^{n-1} \exp\left(-2\left(\frac{y}{B_s}\right)^2\right) dy = \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{GB} f_{\underline{GB}}(y \mid \underline{H_w} = H_w, \underline{H_s} = H_s) dy. \end{aligned}$$

\underline{GB} zullen we in het vervolg de golfbelasting noemen.

2.3. De vervalbelasting I

Het verval V is gedefinieerd als het verschil van een buitenwaterstand H_w en een binnenwaterstand B_{ws} . Onder aanname van een bepaalde drukverdeling over de konstruktie kan de vervalbelasting VB bepaald worden uit de relatie $VB = aV$, waarin a een konstante is. De verdeling van de vervalbelasting VB is dus te bepalen uit de verdeling van het verval V .

$$\begin{aligned} P(\underline{VB} \leq VB) &= P(a\underline{V} \leq VB) = P(\underline{V} \leq \frac{VB}{a}) = P(\underline{H_w} - \underline{B_{ws}} \leq \frac{VB}{a}) = \\ &= \int_{\underline{H_w} - \underline{B_{ws}} \leq VB/a} f_{\underline{B_{ws}}, \underline{H_w}}(B_{ws}, H_w) d(B_{ws}, H_w), \end{aligned}$$

waarbij $f_{\underline{B_{ws}}, \underline{H_w}}(B_{ws}, H_w)$ de simultane dichtheid is van de simultane verdeling van $\underline{B_{ws}}$ en $\underline{H_w}$. Deze simultane dichtheid kan men schrijven als het produkt van de voorwaardelijke dichtheid $f_{\underline{B_{ws}}}(B_{ws} \mid \underline{H_w} = H_w)$ en de marginale dichtheid $f_{\underline{H_w}}(H_w)$. Als men veronderstelt dat de binnenwaterstand $\underline{B_{ws}}$ en de buitenwaterstand $\underline{H_w}$ onafhankelijk zijn, dan geldt dat $f_{\underline{B_{ws}}}(B_{ws} \mid \underline{H_w} = H_w) = f_{\underline{B_{ws}}}(B_{ws})$. In 2.4 zullen wij deze veronderstelling niet maken, maar vervangen door een zwakkere eis die realistischer lijkt. In 2.7 komen we op de relatie $VB = aV$ terug.

2.4. De totaalbelasting

De totaalbelasting wordt gedefinieerd als de som van de vervalbelasting en α maal de golfbelasting. De vervalbelasting wordt bepaald door de buitenwaterstand en de binnenwaterstand (zie 2.3), terwijl de golfbelasting bepaald wordt door de buitenwaterstand en de significante golfhoogte (zie 2.2). Verval- en golfbelasting hangen dus beide af van de buitenwaterstand. Het ligt daarom voor de hand om te conditioneren op de buitenwaterstand en te veronderstellen dat de binnenwaterstand $\underline{B_{ws}}$ gegeven $\underline{H_w} = H_w$ en de significante golfhoogte $\underline{H_s}$ gegeven $\underline{H_w} = H_w$ onafhankelijk zijn. Men moet de kans bepalen dat de totaalbelasting TB niet wordt overschreden. Deze kans wordt genoteerd door $P(\underline{TB} \leq TB)$. Allereerst bekijken we $P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{H_w} = H_w)$. Merk op dat

$$\begin{aligned}
P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) &= P(\underline{VB} + \alpha \underline{GB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) = \\
&= \int_{-\infty}^{\underline{TB}} f_{\underline{VB} + \alpha \underline{GB}}(z \mid \underline{Hw} = Hw) dz = \\
(*) \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw\right) f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) du dz. \quad (2)
\end{aligned}$$

(*) Onder de veronderstelling dat \underline{VB} en \underline{GB} gegeven $\underline{Hw} = Hw$ onafhankelijk zijn, is de verdeling van $\underline{VB} + \alpha \underline{GB}$ te schrijven als een convolutie. D.i. dan ook wat we in het rechterlid in feite doen. (**)

We gaan nu nog een stap verder en conditioneren de eerste dichtheid uit (2) op de significante golfhoogte, d.w.z. (2) wordt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right\} \cdot \\
&\quad \cdot f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) du dz.
\end{aligned}$$

Merk tevens op dat wegens de definitie van een voorwaardelijke dichtheid geldt

$$f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) = \frac{f_{\underline{VB}, \underline{Hw}}(u, Hw)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)}.$$

Verder is $\underline{VB} = a\underline{V} = a\underline{Hw} - a\underline{Bws}$ (zie 2.3). Een eenvoudige transformatieformule geeft nu (zie Dieudonné (1969), p.175-176)

$$\begin{aligned}
f_{\underline{VB}, \underline{Hw}}(\underline{VB}, Hw) &= f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(\frac{aHw - \underline{VB}}{a}, Hw\right) \times \text{de absolute waarde van de} \\
&\quad \text{determinant van de matrix van eerste partiële afgeleiden} = \\
&= f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(\frac{aHw - \underline{VB}}{a}, Hw\right) \times \text{de absolute waarde van de} \\
&\quad \text{determinant van de matrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{Bws}}{\partial \underline{VB}} & \frac{\partial \underline{Bws}}{\partial Hw} \\ \frac{\partial Hw}{\partial \underline{VB}} & \frac{\partial Hw}{\partial Hw} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(\frac{aHw - \underline{VB}}{a}, Hw\right).
\end{aligned}$$

(**)

Zie Fabius & Van Zwet (1975), blz.62-63.

We concluderen

$$\begin{aligned}
 P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{a} \frac{f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(Hw - \frac{u}{a}, Hw\right)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)} du dz.
 \end{aligned}$$

In principe is uit deze uitdrukking $P(\underline{TB} \leq TB)$ te bepalen:

$$\begin{aligned}
 P(\underline{TB} \leq TB) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{a} \frac{f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(Hw - \frac{u}{a}, Hw\right)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)} du dz \right\} f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw.
 \end{aligned}$$

OPMERKINGEN.

1. De voorwaardelijke dichtheid $f_{\underline{GB}}(y \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs)$ is bepaald in 2.2.
2. Per windrichting (voor de praktijk: per windrichtingsklasse) is de voorwaardelijke verdeling van de significante golfhoogte \underline{Hs} gegeven $\underline{Hw} = Hw$ een normale verdeling. (Dit is redelijk bevestigd door een statistische analyse, zie §3 van dit rapport.)
3. De simultane verdeling van de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} is nog onbekend, omdat nog niet voldoende waarnemingsmateriaal beschikbaar is.
4. De buitenwaterstanden \underline{Hw} zijn in eerste benadering exponentieel verdeeld en de binnenwaterstanden \underline{Bws} zijn normaal verdeeld. Zie voor een statistisch onderzoek naar deze verdelingsassumptie §3 van dit rapport.

In 2.5 zullen we nagaan wat er gebeurt indien de in de nota DDWT-77.238 van de Deltadienst gemaakte veronderstelling van onafhankelijkheid van de buitenwaterstand \underline{Hw} en de binnenwaterstand \underline{Bws} in ons model wordt opgenomen.

2.5. De binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} zijn onafhankelijk

Onder de veronderstelling dat de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} onafhankelijk zijn, is de verdeling van de vervalbelasting \underline{VB} eenvoudig te bepalen:

$$\begin{aligned}
 P(\underline{VB} \leq VB) &= P(a\underline{V} \leq VB) = P(a\underline{Hw} - a\underline{Bws} \leq VB) = P(\underline{Hw} - \underline{Bws} \leq \frac{VB}{a}) = \\
 &= \int_{\underline{Hw} - \underline{Bws} \leq \frac{VB}{a}} f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}(\underline{Bws}, \underline{Hw}) d(\underline{Bws}, \underline{Hw}) \quad (*) \\
 &= \iint_{\underline{Hw} - \underline{Bws} \leq \frac{VB}{a}} f_{\underline{Bws}}(\underline{Bws}) f_{\underline{Hw}}(\underline{Hw}) d \underline{Bws} d \underline{Hw}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

(*) Hier gebruiken we de onafhankelijkheid

Onder de veronderstelling dat \underline{Bws} en \underline{Hw} onafhankelijk zijn, is de verdeling van $\underline{Hw} + (-\underline{Bws})$ te schrijven als een convolutie. (3) wordt nu

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{VB}{a} + \underline{Bws}} f_{\underline{Hw}}(\underline{Hw}) d\underline{Hw} \right\} f_{\underline{Bws}}(\underline{Bws}) d \underline{Bws} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{VB} f_{\underline{Hw}}\left(\frac{x}{a} + \underline{Bws}\right) dx \right\} f_{\underline{Bws}}(\underline{Bws}) d \underline{Bws} = \\
 &= \int_{-\infty}^{VB} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_{\underline{Hw}}\left(\frac{x}{a} + \underline{Bws}\right) f_{\underline{Bws}}(\underline{Bws}) d \underline{Bws} d x.
 \end{aligned}$$

De dichtheid van de vervalbelasting is in dit geval gelijk aan

$$f_{\underline{VB}}(VB) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_{\underline{Hw}}\left(\frac{VB}{a} + \underline{Bws}\right) f_{\underline{Bws}}(\underline{Bws}) d \underline{Bws}.$$

Voor het geval dat de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} onafhankelijk zijn, kan men net zoals in 2.4 de kans bepalen dat de totaalbelasting \underline{TB} niet wordt overschreden. We bepalen eerst $P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw)$.

$$\begin{aligned}
P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) &= \int_{-\infty}^{TB} f_{\underline{VB} + \alpha \underline{GB}}(z \mid \underline{Hw} = Hw) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{TB} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw\right) f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) du dz = \\
&= \int_{-\infty}^{TB} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{a} \frac{f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}\left(Hw - \frac{u}{a}, Hw\right)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)} du dz = \\
&= \int_{-\infty}^{TB} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}}\left(Hw - \frac{u}{a}\right) du dz.
\end{aligned}$$

In deze uitdrukking zijn alle dichtheden al dan niet voorwaardelijk bekend. De onvoorwaardelijke kans krijgt men door $P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw)$ te vermenigvuldigen met de dichtheid van \underline{Hw} en te integreren over alle mogelijke buitenwaterstanden.

$$\begin{aligned}
P(\underline{TB} \leq TB) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{TB} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right] \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}}\left(Hw - \frac{u}{a}\right) du dz \right\} f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw.
\end{aligned}$$

2.6. Het discretiseren

Als de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} onafhankelijk zijn dan is

$$P(\underline{TB} \leq TB) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{TB} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid \underline{Hw} = Hw, \underline{Hs} = Hs\right) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot f_{\underline{Hs}}(Hs \mid \underline{Hw} = Hw) dHs \right] \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}}\left(Hw - \frac{u}{a}\right) du dz \right\} f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw.$$

Het verdient aanbeveling de integralen in deze uitdrukking daar waar mogelijk analytisch te bepalen. Dit is in feite ook mogelijk omdat alle dichtheden in deze uitdrukking bekend zijn. De integralen die erg moeilijk te berekenen zijn, kunnen met numerieke integratiemethoden berekend worden.

Als men wil gaan discretiseren dan kan men dit als volgt doen: stel er zijn p buitenwaterstandklassen van gelijke lengte met

$$P(Hw_i - \Delta_1 \leq \underline{Hw} \leq Hw_i + \Delta_1) \stackrel{\text{def.}}{=} P(Hw_i) \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, p$$

en er zijn q binnenwaterstandklassen van gelijke lengte met

$$P(Bws_j - \Delta_2 \leq \underline{Bws} \leq Bws_j + \Delta_2) \stackrel{\text{def.}}{=} Q(Bws_j) \quad \text{voor } j = 1, 2, \dots, q$$

en tenslotte er zijn r significante golfhoogteklassen per buitenwaterstandklasse van gelijke lengte met

$$P(Hs_k - \Delta_3 \leq \underline{Hs} \leq Hs_k + \Delta_3 \mid Hw_i - \Delta_1 \leq \underline{Hw} \leq Hw_i + \Delta_1) =$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} R(Hs_k \mid Hw_i) \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, r \\ \text{en } i = 1, 2, \dots, p.$$

Δ_1 , Δ_2 en Δ_3 zijn getallen groter dan nul en niet noodzakelijk gelijk. Men benadert $P(\underline{TB} \leq TB)$ met de zojuist gedefinieerde kansen.

$$P(\underline{TB} \leq TB) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\underline{TB} \leq TB \mid \underline{Hw} = Hw) f_{\underline{Hw}}(Hw) dHw \approx \\ \approx \sum_{i=1}^p P(\underline{TB} \leq TB \mid Hw_i - \Delta_1 \leq \underline{Hw} \leq Hw_i + \Delta_1) P(Hw_i).$$

Nu is

$$\begin{aligned}
 & P(\underline{TB} \leq TB \mid Hw_i^{-\Delta_1} \leq \underline{Hw} \leq Hw_i^{+\Delta_1}) \approx \\
 & \approx \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid Hw_i^{-\Delta_1} \leq \underline{Hw} \leq Hw_i^{+\Delta_1}, \underline{Hs} = Hs\right) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot f_{\underline{HS}}(Hs \mid Hw_i^{-\Delta_1} \leq \underline{Hw} \leq Hw_i^{+\Delta_1}) dHs \right\} \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}}\left(Hw_i - \frac{u}{a}\right) du dz. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Nu geldt dat (4) benaderd kan worden door

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^r \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z-u}{\alpha} \mid Hw_i^{-\Delta_1} \leq \underline{Hw} \leq Hw_i^{+\Delta_1}, Hs_k^{-\Delta_3} \leq \underline{Hs} \leq Hs_k^{+\Delta_3}\right) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot R(Hs_k \mid Hw_i) \right\} \frac{1}{a} f_{\underline{Bws}}\left(Hw_i - \frac{u}{a}\right) du dz. \quad (5)
 \end{aligned}$$

De integraal over de variabele u kunnen we benaderen door een som, waarbij gesommeerd moet worden over die waarden van $\frac{u_j}{a}$ waarvoor geldt dat

$$\frac{u_j}{a} = Hw_i - Bws_j \quad \text{voor } j = 1, 2, \dots, q.$$

Dus (5) wordt ongeveer gelijk aan

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\underline{TB}} \sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=1}^r \frac{1}{\alpha} f_{\underline{GB}}\left(\frac{z - aHw_i + aBws_j}{\alpha} \mid Hw_i^{-\Delta_1} \leq \underline{Hw} \leq Hw_i + \Delta_1, \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot Hs_k^{-\Delta_3} \leq \underline{Hs} \leq Hs_k^{+\Delta_3}\right) \cdot R(Hs_k \mid Hw_i) \right] Q(Bws_j) dz.
 \end{aligned}$$

De integraal over z kunnen we uitrekenen als we voor de significante golfbelasting Bs de significante golfbelasting kiezen die hoort bij een buitenwaterstand Hw_i en een significante golfhoogte Hs_k (zie 2.2). Noteer deze significante golfbelasting door $Bs(Hw_i, Hs_k)$.

Dus

$$\int_{-\infty}^{\text{TB}} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{z - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j}{\alpha} \mid \text{Hw}_i^{-\Delta_1} \leq \underline{\text{Hw}} \leq \text{Hw}_i^{+\Delta_1}, \text{Hs}_k^{-\Delta_3} \leq \underline{\text{Hs}} \leq \text{Hs}_k^{+\Delta_3} \right) dz \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\text{TB}} \frac{1}{\alpha} \frac{4n\alpha^{-1} (z - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}^2(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \left(1 - \exp\left(-2 \left(\frac{\alpha^{-1} (z - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \right)^2\right) \right)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-2 \left(\frac{\alpha^{-1} (z - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \right)^2\right) dz = \left(1 - \exp\left(-2 \left(\frac{\alpha^{-1} (\text{TB} - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \right)^2\right) \right)^n \cdot$$

Samenvattend kunnen we dus concluderen dat $P(\underline{\text{TB}} \leq \text{TB})$ benaderd kan worden door

$$P(\underline{\text{TB}} \leq \text{TB}) \approx \sum_{i=1}^p P(\text{Hw}_i) \left[\sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=1}^r \left(1 - \exp\left(-2 \left(\frac{\alpha^{-1} (\text{TB} - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \right)^2\right) \right)^n \right. \right.$$

$$\cdot R(\text{Hs}_k \mid \text{Hw}_i) Q(\text{Bws}_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(1 - \exp\left(-2 \left(\frac{\alpha^{-1} (\text{TB} - a\text{Hw}_i + a\text{Bws}_j)}{\text{Bs}(\text{Hw}_i, \text{Hs}_k)} \right)^2\right) \right)^n R(\text{Hs}_k \mid \text{Hw}_i) Q(\text{Bws}_j) P(\text{Hw}_i).$$

Over de nauwkeurigheid van het discretisatieproces valt i.h.a. weinig te zeggen. Wanneer we de kans op overschrijding van een totaalbelasting via analytische en/of numerieke integratiemethoden bepalen, kan hier waarschijnlijk wel iets over gezegd worden. Verder moeten de in de respectievelijke kansdichtheden optredende parameters uit de waarnemingen geschat worden, zodat in feite slechts een schatting van $P(\underline{\text{TB}} \leq \text{TB})$ verkregen wordt. Het probleem dat dan nog overblijft is betrouwbaarheidsgrenzen voor genoemde kans te geven. Deze zijn, in principe, af te leiden uit de betrouwbaarheidsintervallen die voor ieder van de in de respectievelijke dichtheden optredende parameters kunnen worden gegeven.

2.7. De vervalbelasting II

In 2.3 hebben we de verdeling van de vervalbelasting $\underline{\text{VB}}$ bepaald uit de verdeling van het verval $\underline{\text{V}}$. Dit was mogelijk vanwege de relatie $\underline{\text{VB}} = a\underline{\text{V}}$ met a een konstante. In werkelijkheid is deze a geen konstante maar een functie van de binnenwaterstand en de buitenwaterstand. De vervalbelasting $\underline{\text{VB}}$ is dus een functie van de binnenwaterstand $\underline{\text{Bws}}$ en de buitenwaterstand $\underline{\text{Hw}}$,

onder aanname van een bepaalde drukverdeling over de konstruktie. Stel dus dat $\underline{VB} = g(\underline{Bws}, \underline{Hw})$ met g een bekende funktie^(*). De verdeling van de vervalbelasting kan men dan bepalen uit

$$P(\underline{VB} \leq VB) = P(g(\underline{Bws}, \underline{Hw}) \leq VB) = \int_{g(\underline{Bws}, \underline{Hw}) \leq VB} f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}(\underline{Bws}, \underline{Hw}) d(\underline{Bws}, \underline{Hw}).$$

De verdeling van de vervalbelasting wordt eenvoudiger als we veronderstellen dat de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} onafhankelijk zijn, omdat in dit geval de simultane dichtheid van de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} te schrijven is als het produkt van de marginale dichtheden van \underline{Bws} en \underline{Hw} .

Om de kansverdeling van de totaalbelasting te bepalen moet men de voorwaardelijke verdeling van de vervalbelasting \underline{VB} (gegeven $\underline{Hw} = Hw$) kennen. Nu geldt dat (zie 2.4)

$$f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) = \frac{f_{\underline{VB}, \underline{Hw}}(u, Hw)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)}.$$

Verder is $\underline{VB} = g(\underline{Bws}, \underline{Hw})$ met g een bekende funktie. Los uit $\underline{VB} = g(\underline{Bws}, \underline{Hw})$, \underline{Bws} op. Dit geeft dan $\underline{Bws} = h(\underline{VB}, \underline{Hw})$ met h een bekende funktie^(*). Analoog als in 2.4 geeft dezelfde eenvoudige transformatieformule (zie Dieudonné (1969), p.175-176) dat

$$f_{\underline{VB}, \underline{Hw}}(\underline{VB}, \underline{Hw}) = f_{\underline{Bws}, \underline{Hw}}(h(\underline{VB}, \underline{Hw}), \underline{Hw}) \times \text{de absolute waarde van de determinant van de matrix van eerste partiële afgeleiden.} \quad (6)$$

Als men veronderstelt dat de binnenwaterstand \underline{Bws} en de buitenwaterstand \underline{Hw} onafhankelijk zijn, dan geldt dat

$$f_{\underline{VB}}(u \mid \underline{Hw} = Hw) = \frac{f_{\underline{VB}, \underline{Hw}}(u, Hw)}{f_{\underline{Hw}}(Hw)} = f_{\underline{Bws}}(h(u, Hw)) \times \text{de absolute waarde van de determinant van de matrix van eerste partiële afgeleiden uit (6).}$$

Als de funkties g en h bekend zijn dan kan men op precies dezelfde wijze als in 2.6 gaan discretiseren.

(*) De funkties g en h moeten aan een aantal regulariteitsvoorwaarden voldoen.

§3 DE SIGNIFICANTE GOLFHOOGTEN, DE BUITENWATERSTANDEN EN DE BINNENWATERSTANDEN

3.1. Het waarnemingsmateriaal aangaande significante golfhoogten, buitenwaterstanden en windrichtingen

Ten behoeve van het onderzoek naar het verband tussen de significante golfhoogte (Hs), buitenwaterstanden (Hw) en windrichtingen (Wr) hebben we de beschikking over het hieronder beschreven waarnemingsmateriaal.

- (1) Hoogste hoogwaterstanden tijdens stormen gemeten in Zierikzee in de periode 1949-1956 (Notatie: Hw(Z)).
- (2) Hoogste hoogwaterstanden tijdens stormen gemeten in Burghsluis in de periode 1949-1977 (Notatie: Hw(B)).

OPMERKING. (1) en (2) kunnen worden opgevat als buitenwaterstanden indien de stormvloedkering aanwezig is.

- (3) Significante golfhoogten tijdens stormen met het oog geschat op het lichtschip Goeree in de periode 1949-1971 (Notatie: Hs(vis)).
- (4) Significante golfhoogten tijdens stormen gemeten op het lichteiland Goeree in de periode 1972-1977 (Notatie: Hs(instr.)).
- (5) Windrichtingen tijdens stormen gemeten op het lichtschip/eiland Goeree in de periode 1949-1977 (Notatie: Wr).
- (6) Significante golfhoogten tijdens stormen gemeten bij de meetpaal O.S.IV met een amplitudeschrijver in de periode 1964-1977 (Notatie: Hs(O.S.IV)).
- (7) Significante golfhoogten tijdens stormen gemeten bij de meetpaal O.S.IV met een stappenbaak in de periode 1968-1977.
- (8) Windrichtingen tijdens stormen gemeten in Hoek van Holland in 1973.

Het waarnemingsmateriaal is te vinden in appendix I (een -1 duidt op een ontbrekende waarneming).

Op grond van dit waarnemingsmateriaal willen we uitspraken doen over de verdeling van Hs gegeven Hw en eventueel Wr.

3.2. De significante golfhoogte Hs

De metingen van Hs zijn op twee afzonderlijke plaatsen verricht: in open zee (Goeree) en op de plaats van de stormvloedkering (O.S.IV). In principe zijn de metingen van (6) gebruikt voor het onderzoek naar het verband tussen

H_s , H_w en W_r , omdat deze op een plaats dichtbij de kering zijn verricht. Metingen (7) zijn op dezelfde plaats verricht. Aangezien het aantal waarnemingen van (7) vrij gering is en bovendien een ander instrument is gebruikt, terwijl de simultane waarnemingen van (6) ook aanwezig zijn, hebben wij deze waarnemingen niet gebruikt.

De metingen (3) en (4) zijn in open zee verricht. Het gemiddelde en de spreiding van de waarnemingen verschillen aanzienlijk met de metingen uit (6), zoals blijkt uit de volgende tabel:

type	aantal waarnemingen	steekproef-gemiddelde	steekproef-standaardafwijking
(3)	372	252	121
(4)	83	277	123
(6)	202	117	49

In 3.13 worden voor het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking betrouwbaarheidsintervallen berekend. Voor het onderzoek naar het verband tussen H_s , H_w en W_r zullen we alleen gebruik maken van (6). Wel is nagegaan of er een eenvoudig verband bestaat tussen (3), (4) en (6) en is enig onderzoek gedaan naar de verdeling van H_s in open zee.

3.2.1. Verband tussen $H_s(O.S.IV)$, $H_s(vis)$ en $H_s(instr.)$

We hebben twee lineaire regressieanalyses uitgevoerd (kleinste kwadraatmethode) met $H_s(O.S.IV)$ als afhankelijke variabele en $H_s(vis)$ resp. $H_s(instr.)$ als onafhankelijke variabele. (Een beschrijving van een lineaire regressieanalyse is te vinden in appendix II).

$$(a) H_s(O.S.IV) = \alpha_0 + \alpha_1 H_s(vis)$$

De analyse leverde de volgende resultaten:

aantal paren waarnemingen:	111
geschatte product-moment correlatie:	0,78
geschatte % verklaarde variantie:	61
geschatte standaardafwijking storingsterm:	28

regressie-coëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheids-interval *)
α_0	30	(17; 43)
α_1	0,33	(0,28; 0,38)

*) Betrouwbaarheidsintervallen voor schattingen van regressiecoëfficiënten worden berekend onder de veronderstellingen van normaliteit en constante variantie van de storingsterm.

Analyse van de residuën laat zien dat waarden in de orde van 40 of 50 niet ongewoon zijn. Dit houdt in dat schatting van $H_s(O.S.IV)$ op grond van $H_s(vis)$ er een bedrag van de orde van 40 of 50 cm naast kan zitten. Bovendien dient nog opgemerkt te worden dat de 111 paren die gebruikt worden voor de regressie-analyse kennelijk niet representatief zijn voor de in totaal aanwezige metingen van $H_s(O.S.IV)$ en $H_s(vis)$. Dit blijkt uit de steekproefgemiddelden en -standaardafwijkingen. Zie onderste tabel:

	totale bestand		gebruikt in regressieanalyse	
	steekproef- gemiddelde	steekproef- standaard- afwijking	steekproef- gemiddelde	steekproef- standaard- afwijking
$H_s(vis)$	252	121	231	104
$H_s(O.S.IV)$	117	49	106	44

De vraag of het lineaire verband waarvoor hierboven een aanwijzing is gevonden, ook geldig is buiten het gebied waarin de paren metingen zijn verricht, blijft dan ook onbeantwoord.

(b) $H_s(O.S.IV) = \alpha_0 + \alpha_1 H_s(instr.)$

De analyse leverde de volgende resultaten:

aantal paren waarnemingen:	77
geschatte product-moment correlatie:	0,77
geschatte % verklaarde variantie:	59
geschatte standaardafwijking storingsterm:	35

regressie- coëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheids- interval
α_0	37	(18; 57)
α_1	0,34	(0,28; 0,40)

We moeten in dit geval ongeveer tot dezelfde conclusie komen als bij de vorige regressieanalyse. Hier komen zelfs residuën van de orde 60 voor. Ook hier moet men zich weer afvragen of de in de analyse gebruikte paren waarnemingen representatief waren voor het totale bestand, gezien de afwijkingen in steekproefgemiddelde en steekproefstandaardafwijking:

	totale bestand		gebruikt in regressieanalyse	
	steekproef- gemiddelde	steekproef- standaard- afwijking	steekproef- gemiddelde	steekproef- standaard- afwijking
<u>Hs</u> (instr.)	277	123	273	124
<u>Hs</u> (O.S.IV)	117	49	130	54

3.3. De buitenwaterstand

We hebben de beschikking over twee groepen metingen: metingen verricht bij Burghsluis en metingen verricht bij Zierikzee. In principe gebruiken we $H_w(B)$, aangezien deze gedaan zijn op de plaats van de toekomstige stormvloedkering. We hebben wel onderzocht in hoeverre de waarnemingen $H_w(Z)$ opgevat konden worden als afkomstig te zijn uit dezelfde verdeling. We hebben daartoe een lineaire regressieanalyse verricht op het volgende model:

$$H_w(B) = \alpha_0 + \alpha_1 H_w(Z).$$

De analyse leverde de volgende resultaten:

aantal paren waarnemingen:	91
geschatte product-moment correlatie:	0,96
geschatte % verklaarde variantie:	92
geschatte standaardafwijking storingsterm:	7

regressie- coëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheids- interval *)
α_0	9,8	(-3; 22)
α_1	0,92	(0,86; 0,97)

Ondanks het feit dat de product-moment correlatie tussen $H_w(B)$ en $H_w(Z)$ zeer hoog is, blijkt de waarde $\alpha_1 = 1$ niet in het betrouwbaarheidsinterval te liggen.

3.4. De windrichtingen

We hebben voor wat betreft de windrichting de beschikking over de metingen (5) en (8). Die van (8) vormen een zodanig klein aantal dat we ze buiten beschouwing laten.

*) Dit betrouwbaarheidsinterval is in feite niet valide, aangezien de veronderstelling van normaliteit niet vervuld is; de hoogwaterstanden zijn exponentieel verdeeld. Nader onderzoek naar het juiste interval is hier nog noodzakelijk.

3.5. Statistisch onderzoek naar de aard van de verdeling van Hs(O.S.IV)

Nagegaan werd of de verdeling van Hs(O.S.IV), gegeven een bepaalde hoogwater-klasse en/of windrichtingsklasse "bij goede benadering" normaal is. Daartoe werden in de eerste plaats de verdelingen op normaal waarschijnlijkheidspapier uitgezet en vervolgens werden scheefheid en kurtosis van de steekproeven berekend. Ook werd m.b.v. de toets van D'Agostino & Pearson (1973) getoetst of de steekproefwaarden van scheefheid resp. kurtosis significant afwijken van de normale waarde van 0 resp. 3. (Voor een beschrijving van deze technieken zie appendix III). Daartoe werden de volgende klasse-indelingen van hoogwater en windrichting gemaakt:

Hoogwater:

Hw1: [175,225)

Hw2: [225,275)

Hw3: [275,325]

Windrichting:

Wr1: [200°,275°]

Wr2: (275°,295°]

Wr3: (295°,315°]

Wr4: (315°,350°]

In onderstaande tabel staan de resultaten samengevat:

	aantal waarnemingen	steekproef-gemiddelde	steekproef-standaard-afwijking	steekproef-scheefheid	steekproef-kurtosis	normaliteit ^{*)}
totaal	202	117	49	0,27	2,28	-
Wr1	67	113	49	0,29	2,11	+
Wr2	33	131	57	0,16	1,99	+
Wr3	38	120	46	-0,01	2,86	+
Wr4	34	118	48	0,14	2,27	+
Hw1	128	98	40	0,32	2,29	± **)
Hw2	59	140	47	0,01	2,43	+
Hw3	13	178	30	-0,92	2,99	+

In 3.13 worden betrouwbaarheidsintervallen berekend en scheefheid en kurtosis beschreven. De volgende aanvullende analyses werden uitgevoerd:

*) - = normaliteit verworpen; + = normaliteit niet verworpen (bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%).

**) Twijfelgeval.

3.5.1. Effect van de windrichting op Hs(O.S.IV)

Met behulp van een één-weg variantieanalyse is onderzocht of de gemiddelde Hs(O.S.IV)-waarden per windrichtingsklasse significant verschilden.

De F-toets leidde op 5%-nivo niet tot verwerping, zodat de indeling naar windrichtingsklasse van weinig betekenis lijkt.

3.5.2. Effect van het hoogwater op Hs(O.S.IV)

Ook met behulp van een één-weg variantieanalyse werd getoetst of de gemiddelde Hs(O.S.IV)-waarden van de vier hoogwaterklassen gelijk waren. De F-toets leidde tot een duidelijke verwerping van deze hypothese.

3.5.3. Effect van een combinatie (interactie) van hoogwater en windrichting op Hs(O.S.IV)

Met behulp van een lineaire regressieanalyse met Hs(O.S.IV) als afhankelijke variabele en Hw(B) als onafhankelijke variabele en dummy-variabelen voor de windrichtingsklassen, werd nagegaan of bepaalde combinaties van hoogwater en windrichting nog tot een extra effect op de Hs(O.S.IV) leidden. Deze analyse bevestigde de resultaten onder 3.5.1 en 3.5.2: Geen effect van de windrichting, wel effect van het hoogwater.

CONCLUSIE. De verdeling van Hs(O.S.IV) is normaal met parameters die afhangen van Hw(B) en niet van Wr.

3.6. Het verband tussen Hs(O.S.IV) en Hw(B)

Het verband tussen Hs(O.S.IV) en Hw(B) werd nader onderzocht. Per Wr-klasse en voor het totale waarnemingsmateriaal werden lineaire regressieanalyses uitgevoerd met als model

$$Hs(O.S.IV) = \alpha_0 + \alpha_1 Hw(B).$$

De resultaten van de analyse staan in onderstaande tabel.

Notatie: n = aantal paren waarnemingen
 r = geschatte product-moment correlatiecoëfficiënt
 p = geschatte % verklaarde variantie
 σ = geschatte standaardafwijking van de storingsterm
 $\hat{\alpha}_0$ = schatting voor α_0
 B_0 = 95%-betrouwbaarheidsinterval voor $\hat{\alpha}_0$
 $\hat{\alpha}_1$ = schatting voor α_1
 B_1 = 95%-betrouwbaarheidsinterval voor $\hat{\alpha}_1$.

	n	r	p	σ	$\hat{\alpha}_0$	B_0	$\hat{\alpha}_1$	B_1
totaal	202	0,58	34	40	-126	(-174; -77)	1,1	(0,9; 1,3)
Wr1	67	0,56	31	41	-159	(-261; -58)	1,2	(0,8; 1,7)
Wr2	33	0,64	41	44	-217	(-368; -66)	1,5	(0,9; 2,2)
Wr3	38	0,73	54	32	- 95	(-162; 67)	0,9	(0,7; 1,2)
Wr4	34	0,38	14	45	- 44	(-184; 96)	0,7	(0,1; 1,3)

De verklarende kracht van de modellen, in het bijzonder het laatste, is niet bijzonder groot.

CONCLUSIE.

- (a) $H_s(O.S.IV)$ is normaal verdeeld per hoogwaterklasse.
- (b) Er is een lineair verband met H_w ; de verklarende kracht van het verband is echter vrij klein.

3.7. Statistisch onderzoek naar de verdeling van $H_s(vis)$ en $H_s(instr.)$

Om de verdeling van H_s te onderzoeken zijn de visuele waarnemingen van het lichtschip en instrumentele waarnemingen van het lichteiland apart behandeld, aangezien er indicaties waren dat de beide groepen waarnemingen van karakter verschilden.

De waarnemingen werden ingedeeld in hoogwaterklassen van 50 cm ($\dots - 200$, $200 - 250$, $250 - 300$) en windrichtingsklassen van 90° ($180^\circ - 270^\circ$, $270^\circ - 360^\circ$). Voor iedere op deze wijze gevonden deelklasse werden de waarnemingen uitgezet op normaal, exponentieel, Gumbel en Weibull waarschijnlijkheidspapier. Voor de verdelingen die in een klasse als best passend naar voren kwamen, werden bovendien parameters geschat en een aanpassingstoets uitgevoerd. Bovendien werd voor de in aanmerking komende verdelingen, na bepalen van de schattingen voor de parameters, de kans geschat op een overschrijding van een extreme H_s waarde, nl. 800 cm.

In bijgevoegde tabel staan de resultaten van de analyses samengevat. Voor iedere klasse staan vermeld:

- (1) aantal waarnemingen
- (2) best passende verdelingen
- (3) schatting van locatieparameters
- (4) schatting van schaalparameters
- (5) +, indien de toets op aanpassing niet verwerpt op 5%-nivo en
-, indien de toets op aanpassing wel verwerpt op 5%-nivo

- (6) de op grond van de aangepaste verdeling geschatte kans op een overschrijding van een H_s -waarde van 800 cm.

Er valt geen duidelijke conclusie te trekken omtrent de aard van de verdeling van H_s . Zowel de normale verdeling als de Gumbel verdeling lijken in aanmerking te komen, alhoewel er ook gevallen zijn waarin beide verdelingen verworpen worden. In deze laatste gevallen zijn er vage indicaties, dat de verdeling van H_s te scheef naar rechts is om normaal verdeeld te kunnen zijn en te weinig scheef naar rechts om Gumbel verdeeld te kunnen zijn. Dat in het geval $n = 10$ wel drie verdelingen in aanmerking komen is vermoedelijk een gevolg van het geringe aantal waarnemingen. Dit aantal is te klein om duidelijk te kunnen differentiëren. Gezien de aantallen waarnemingen kan aan de resultaten in de klassen met minder dan 20 waarnemingen in het algemeen weinig betekenis worden gehecht.

Concluderend kan opgemerkt worden dat, gezien het feit dat (nog?) geen duidelijke conclusie over de verdeling van H_s -Goeree getrokken kan worden, in feite toepassing van de hier verkregen resultaten, met name de schattingen voor kansen op overschrijding van $H_s = 800$ cm, uiterst dubieus is. Aanvullend onderzoek is nodig, met name:

- (i) betrouwbaarheidsinterval (dat mogelijk relatief vrij groot zal blijken te zijn!) van de te schatten kansen;
- (ii) nadere evaluatie van de afwijking van de normale, respectievelijk Gumbel verdeling;
- (iii) gebruikmakend van (i) & (ii): trachten te komen tot een redelijk betrouwbare bovengrens voor de te schatten overschrijdingskans.

		VISUEEL		INSTRUMENTEEL	
Wt	Hw	180 - 270	270 - 360	180 - 270	270 - 360
...	- 200	n = 17 NORMAL $\mu = 200$ $\sigma = 61$ +	n = 61 NORMAL $\mu = 256$ $\sigma = 124$ -		
		GUMBEL $\theta = 48$ $\xi = 172$ +	GUMBEL $\theta = 97$ $\xi = 200$ -		
		0.000 000	0.000 006		
		0.000 002	0.002		
200 - 250		n = 52 NORMAL $\mu = 194$ $\sigma = 111$ -	n = 173 NORMAL $\mu = 248$ $\sigma = 98$ -	n = 19 NORMAL $\mu = 210$ $\sigma = 62$ +	n = 43 NORMAL $\mu = 280$ $\sigma = 116$ +
		GUMBEL $\theta = 87$ $\xi = 144$ -	GUMBEL $\theta = 76$ $\xi = 204$ -	GUMBEL $\theta = 49$ $\xi = 181$ -	GUMBEL $\theta = 91$ $\xi = 228$ +
		0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 004
		0.000 5	0.0004	0.000 003	0.002
250 - 300			n = 27 NORMAL $\mu = 367$ $\sigma = 107$ \pm		n = 10 NORMAL $\mu = 388$ $\sigma = 120$ +
			GUMBEL $\theta = 83$ $\xi = 321$ -		GUMBEL $\theta = 94$ $\xi = 334$ +
		0.00003	0.003		0.007
					EXPONENTIEEL $\tau = 246$ $\lambda = 142$ +
					0.02

3.8. Enige opmerkingen over schatting van kansen op extreme gebeurtenissen

In 3.7 staan geschatte kansen op een overschrijding van een extreem hoge H_s -waarde. De schattingen voor deze kansen zijn waarschijnlijk zeer onnauwkeurig. Daarvoor zijn een aantal oorzaken aan te wijzen:

- (a) De schattingen zijn gebaseerd op een steekproef van beperkte omvang. Deze bron van onzekerheid kan eventueel gekwantificeerd worden door middel van een betrouwbaarheidsinterval^{*)} voor de geschatte overschrijdingskans. Hierbij moet dan evenwel uitgegaan worden van bepaalde verdelingsveronderstellingen.
- (b) Een tweede bron van onzekerheid is een gevolg van het feit dat men verdelingsveronderstellingen doet. Men kan zich tegen deze foutenbron beschermen door conservatief te werk te gaan: kies een zodanige verdeling dat hij goed past en bovendien tot de grootste overschrijdingskans in extreme situaties leidt.
- (c) Een bron van onnauwkeurigheid wordt gevormd door inhomogeniteit (groepering) en afhankelijkheid in het waarnemingsmateriaal. Selectie van waarnemingen zou dit euvel mogelijk kunnen verminderen. Het heeft echter wel tot gevolg dat foutenbron (a) belangrijk in omvang toeneemt. Het doel van het onderzoek in 3.7 is om de verdeling van H_s per hoogwaterklasse van 50 cm. te bepalen. Echter van de hoogwaterklassen 300-350, 350-400, ..., 750-800 zijn geen waarnemingen beschikbaar. Het is daarom gewenst om uit de beschikbare gegevens de verdeling van H_s voor bovengenoemde hoogwaterklassen te extrapoleren. Als men kijkt naar de resultaten uit 3.7 dan ziet men dat er geen tendens is te konstateren zodat men moet konkluderen dat extrapolatie niet goed mogelijk is.

^{*)} Aanvullend onderzoek naar zo'n betrouwbaarheidsinterval is o.i. noodzakelijk.

3.9. Het waarnemingsmateriaal aangaande binnenwaterstanden

In de nota DDWT - 77.192 van de Deltadienst wordt beschreven dat de geselecteerde laagwaterstanden te Burghsluis normaal verdeeld zijn met verwachting $\mu = \text{N.A.P.} - 0,67 \text{ m}$ en standaardafwijking $\sigma = 0,53 \text{ m}$. De bijbehorende astronomische laagwaterstanden zijn ook normaal verdeeld met verwachting $\mu = \text{N.A.P.} - 1,46 \text{ m}$ en standaardafwijking $\sigma = 0,16 \text{ m}$. De selectie van laagwaterstanden is gebaseerd op het feit dat de stormvloedkering pas gesloten zal worden als een grenspeiloverschrijding wordt verwacht. Voor de selectie van laagwaterstanden te Burghsluis is daarom gekozen voor die laagwaterstanden die voorafgaan aan hoogwaterstanden te Vlissingen die de waterstand N.A.P. + 3,00m overschreden. Men beschouwt alleen die laagwaterstand te Burghsluis voorafgaand aan de eerste hoogwaterstand te Vlissingen die de waterstand N.A.P. + 3,00m overschrijdt gedurende een storm. Men heeft de beschikking over het hieronder beschreven waarnemingsmateriaal gemeten in de periode 1957-1976 tenzij anders vermeld.

- (1) Laagwaterstanden te Vlissingen voorafgaand aan een hoogwaterstand te Vlissingen hoger dan N.A.P. + 3,00m tijdens een storm (Notatie: Lw(V)).
- (2) De eerste hoogwaterstand te Vlissingen hoger dan N.A.P. + 3,00m tijdens een storm (Notatie: Hw(V)).
- (3) Laagwaterstanden te Burghsluis voorafgaand aan een hoogwaterstand te Vlissingen hoger dan N.A.P. + 3,00m tijdens een storm (Notatie: Lw(B)).
- (4) Hoogwaterstanden te Burghsluis corresponderent met een hoogwaterstand te Vlissingen hoger dan N.A.P. + 3,00m (Notatie: hw(B)).
- (5) Astronomische laagwaterstanden te Burghsluis corresponderent met de laagwaterstanden te Burghsluis uit (3). (Notatie: aLw(B)).
- (6) Astronomische hoogwaterstanden te Burghsluis correspondèrent met de hoogwaterstanden te Burghsluis uit (4). (Notatie: ahw(B)).
- (7) De significante golfhoogten, tijdens stormen met het oog geschat op het lichtschip Goeree in de periode 1957-1963, corresponderent met de hoogwaterstanden te Burghsluis uit (4). (Notatie: hs(vis)).
- (8) De significante golfhoogten, tijdens stormen gemeten bij de meetpaal O.S.IV met een amplitude schrijver in de periode 1964-1976, corresponderent met de hoogwaterstanden te Burghsluis uit (4). (Notatie:hs(O.S.IV)).
- (9) De hoogste hoogwaterstanden te Burghsluis gemeten tijdens een storm (Notatie: Hw(B)).
- (10) De significante golfhoogten, tijdens stormen met het oog geschat op het licht-eiland Goeree in de periode 1957-1963, corresponderent met de hoogste hoogwaterstanden te Burghsluis uit (9). (Notatie: Hs(vis)).

- (11) De significante golfhoogten, tijdens stormen gemeten bij de meetpaal O.S.IV met een amplitude schrijver in de periode 1964-1976, correspondent met de hoogste hoogwaterstanden te Burghsluis uit (9). (Notatie: Hs(O.S.IV)).

Het waarnemingsmateriaal is te vinden in appendix IV (Een -1 duidt op een ontbrekende waarneming).

3.10. De laagwaterstanden

Nagegaan werd of de verdeling van de laagwaterstanden (zowel te Vlissingen gemeten als ook te Burghsluis gemeten) "bij goede benadering" normaal is. Daartoe werden in de eerste plaats de verdelingen op normaal waarschijnlijkheidspapier uitgezet en vervolgens werden scheefheid en kurtosis van de steekproef berekend. Evenals in 3.5 werd m.b.v. de grafieken van Bowman & Shenton (1975) getoetst of de steekproefwaarden van scheefheid respectievelijk kurtosis significant afweken van de normale waarde van 0 respectievelijk 3. In onderstaande tabel staan de resultaten samengevat:

	aantal waarnemingen	steekproef- gemiddelde (in N.A.P. cm)	steekproef standaard afwijking	steekproef scheefheid	steekproef kurtosis	normaliteit
Lw(V)	56	-130	61	0,75	2,87	+
Lw(B)	56	- 69	53	0,67	2,62	+
aLw(B)	56	-147	15	-0,33	3,16	+

Zie voor een nadere uitleg van de normaliteitstoets appendix III. In 3.13 worden betrouwbaarheidsintervallen berekend.

3.11. Het verband tussen de binnenwaterstand enerzijds en de significante golfhoogte en de buitenwaterstand anderzijds

In de nota DDWT - 77.192 van de Deltadienst wordt aangenomen dat de invloed van de stormvloedkering uitsluitend tot uitdrukking komt in een verschuiving van de verwachting van de verdeling (de variantie blijft dus gelijk).

In de nota DDWT - 77.238 van de Deltadienst wordt aangenomen dat de binnenwaterstand onafhankelijk is van de buitenwaterstand en de significante golfhoogte. Tot op dit moment zijn er nog geen waarnemingen gedaan van de binnenwaterstanden omdat de stormvloedkering nog niet gereed is. Echter onder de veronder-

stelling dat de binnenwaterstanden te verkrijgen zijn d.m.v. een verschuiving van de laagwaterstanden te Burghsluis voorafgaand aan een hoogwaterstand te Vlissingen hoger dan N.A.P. + 3,00m is het mogelijk om na te gaan of de binnenwaterstand onafhankelijk is van de buitenwaterstand en de significante golfhoogte. We merken op dat de hoogste hoogwaterstanden te Burghsluis opgevat kunnen worden als de buitenwaterstanden indien de stormvloedkering aanwezig is. Verder merken we op dat de binnenwaterstanden te berekenen zijn uit de laagwaterstanden door optelling van een konstante.

In onderstaande tabel staat de correlatie van de laagwaterstand te Burghsluis met een aantal variabelen. Merk op dat dit tevens de correlatie van de binnenwaterstand met dezelfde variabelen

	aantal waarnemingen	correlatie-coëfficiënt ρ *)	Toets met nulhypothese $\rho = 0$. **) en alternatief $\rho \neq 0$
<u>hw</u> (B)	54	0,65	-
<u>Hw</u> (B)	56	0,50	-
<u>hs</u> (O.S.IV)	28	0,17	+
<u>Hs</u> (O.S.IV)	34	0,22	+

OPMERKING: 1^e Wij gebruiken alleen de significante golfhoogte gemeten tijdens een storm bij de meetpaal O.S.IV met een amplitude schrijver omdat deze op een plaats dichtbij de toekomstige kering zijn verricht. Bovendien zijn deze waarnemingen gemeten en niet met het oog geschat.

2^e Als \underline{x} en \underline{y} twee onafhankelijke stochastische grootheden zijn dan geldt dat de correlatiecoëfficiënt nul is. Omgekeerd geldt niet dat als de correlatiecoëfficiënt van twee stochastische grootheden nul is dat deze stochastische grootheden onafhankelijk zijn. Echter als de stochastische grootheden normaal verdeeld zijn dan geldt dit laatste wel.

CONCLUSIE: a) De binnenwaterstand en de buitenwaterstand zijn niet onafhankelijk

*) Dit is de zgn. product-moment correlatiecoëfficiënt.

**) - betekent dat de nulhypothese verworpen wordt en + betekent dat de nulhypothese niet verworpen wordt.

b) De binnenwaterstand en de significante golfhoogte hebben een correlatiecoëfficiënt die niet significant van nul afwijkt wat zou kunnen duiden op onafhankelijkheid.

3.11.1. Verband tussen Lw(B), Hw(B) en hw(B)

We hebben twee lineaire regressieanalyses uitgevoerd (kleinste kwadratenmethode) met Lw(B) als afhankelijke variabele en Hw(B) resp. hw(B) als onafhankelijke variabele.

$$a) Lw(B) = \alpha_0 + \alpha_1 Hw(B).$$

De analyse leverde de volgende resultaten:

aantal paren waarnemingen	56
geschatte product-moment correlatie	0,50
geschatte % verklaarde variantie	25
geschatte standaardafwijking storingsterm	47

regressiecoëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheidsinterval
α_0	-311	(-427; -195)
α_1	0,9	(0,5; 1,4)

Het bestaan van een verband tussen Hw(B) en Lw(B) wordt niet verworpen. Men merkt op dat deze regressieanalyse laat zien dat bij een grote waarde van Hw(B) een grote waarde van Lw(B) hoort.

$$b) Lw(B) = \alpha_0 + \alpha_1 hw(B).$$

aantal paren waarnemingen	54
geschatte product-moment correlatie	0,65
geschatte % verklaarde variantie	42
geschatte standaardafwijking storingsterm	41

regressiecoëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheidsinterval
α_0	-418	(-532; -303)
α_1	1,4	(0,9; 1,8)

Het bestaan van een verband tussen $hw(B)$ en $Lw(B)$ wordt niet verworpen en is zelfs in dit geval iets duidelijker dan in het vorige geval.

3.11.2. Verband tussen $Lw(B)$, $Hs(O.S.IV)$ en $hs(O.S.IV)$

Wij hebben twee lineaire regressieanalyses uitgevoerd (kleinste kwadraten methode) met $Lw(B)$ als afhankelijk variabele en $Hs(O.S.IV)$ resp. $hs(O.S.IV)$ als onafhankelijke variabele.

a) $Lw(B) = \alpha_0 + \alpha_1 Hs(O.S.IV)$

aantal paren waarnemingen	34
geschatte product-moment correlatie	0,22
geschatte % verklaarde variantie	5
geschatte standaardafwijking storingsterm	53

regressie-coëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheidsinterval
α_0	-110	(-177; -43)
α_1	0,3	(-0,1; 0,7)

b) $Lw(B) = \alpha_0 + \alpha_1 hs(O.S.IV)$

aantal paren waarnemingen	28
geschatte product-moment correlatie	0,17
geschatte % verklaarde variantie	3
geschatte standaardafwijking storingsterm	54

regressie-coëfficiënt	schatting	95% betrouwbaarheidsinterval
α_0	-104	(-173; -33)
α_1	0,2	(-0,2; 0,6)

De twee lineaire regressieanalyses laten zien dat er van een lineaire verband van $Lw(B)$ met $Hs(O.S.IV)$ resp. $hs(O.S.IV)$ nauwelijks sprake kan zijn.

3.12. Conclusies

- a) Er zijn goede indicaties dat de laagwaterstanden normaal verdeeld zijn.
- b) De laagwaterstanden en de hoogwaterstanden zijn niet onafhankelijk van elkaar, zodat men ook niet kan concluderen dat de binnenwaterstand en de buitenwaterstand onafhankelijk van elkaar zijn.
- c) Het verband tussen significante golfhoogten en laagwaterstanden lijkt gering. We willen er echter op wijzen dat correlaties in de orde van 0,20 in het algemeen niet verwaarloosd moeten worden. Vermoedelijk wordt er enige correlatie veroorzaakt vanwege het feit dat zowel de laagwaterstanden als de significante golfhoogten samenhangen met de hoogwaterstanden. Om dit na te gaan hebben wij de partiële correlatiecoëfficiënt bepaald van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{hs}(O.S.IV)$, gecorrigeerd voor de invloed van $\underline{hw}(B)$ en tevens die van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{Hs}(O.S.IV)$, gecorrigeerd voor de invloed van $\underline{Hw}(B)$.

Dit levert inderdaad een behoorlijke reductie op:

Product-moment correlatie van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{hs}(O.S.IV)$: 0,22
Partiële correlatiecoëfficiënt van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{hs}(O.S.IV)$ gecorrigeerd voor $\underline{hw}(B)$: -0,10
Product-moment correlatie van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{Hs}(O.S.IV)$: 0,17
Partiële correlatiecoëfficiënt van $\underline{Lw}(B)$ en $\underline{Hs}(O.S.IV)$ gecorrigeerd voor $\underline{Hw}(B)$: -0,06.

3.13. Betrouwbaarheidsintervallen, scheefheid en kurtosis

Stel $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ zijn n onderling onafhankelijke normaal verdeelde stochastische grootheden met verwachting μ en variantie $\sigma^2 > 0$ (notatie: \underline{x}_1 is $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld). Het gemiddelde van deze steekproef van omvang n is gedefinieerd als $\bar{\underline{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i$ en de steekproefvariantie is gedefinieerd als $\underline{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2$. $\bar{\underline{x}}$ heeft een $N(\mu, \sigma^2/n)$ verdeling en $(n-1)\underline{s}^2/\sigma^2$ een chi-kwadraatverdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. De stochastische grootheid $t_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\underline{x}} - \mu}{\underline{s}} \sqrt{n}$ bezit dan een Student verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. (zie Hemelrijk (1977), stelling 14.2.1). Met behulp van bovenstaande karakterisering kan men voor de verwachting en de variantie betrouwbaarheidsintervallen bepalen. Het betrouwbaarheidsinterval voor μ is te bepalen uit

$$P(-t_{n-1, \frac{1}{2}\alpha} \leq \frac{\bar{\underline{x}} - \mu}{\underline{s}} \sqrt{n} \leq t_{n-1, \frac{1}{2}\alpha}) = 1 - \alpha,$$

waarbij $1 - \alpha$ de betrouwbaarheidscoëfficiënt is (en α dus de onbetrouwbaarheid) en $t_{n-1, \frac{1}{2}\alpha}$ die waarde t voorstelt waarvoor $\int_t^\infty f(u) du = \frac{1}{2}\alpha$, met $f(u)$ de dichtheid van een Student verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Dus het betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting μ met onbetrouwbaarheid α ziet eruit als $\bar{\underline{x}} \pm \frac{\underline{s} t_{n-1, \frac{1}{2}\alpha}}{\sqrt{n}}$

Het betrouwbaarheidsinterval voor σ^2 is te bepalen uit $P(a \leq \frac{(n-1)\underline{s}^2}{\sigma^2} \leq b) = 1 - \alpha$ met α de onbetrouwbaarheid en a en b z.d.d. $\int_0^a g(u) du = \int_b^\infty g(u) du = \frac{1}{2}\alpha$ met $g(u)$ de dichtheid van een chi-kwadraatverdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Dus het betrouwbaarheidsinterval voor de variantie met onbetrouwbaarheid α ziet eruit als

$$\frac{(n-1)\underline{s}^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\underline{s}^2}{a}$$

Hieruit volgt dat het betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking σ gelijk is aan

$$\frac{\sqrt{n-1}\underline{s}}{\sqrt{b}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n-1}\underline{s}}{\sqrt{a}} .$$

Voor de chi-kwadraat verdeling en de Student verdeling hebben wij de tabellen gebruikt uit het boek van Fisher & Yates (1949).

Omschrijving	95% betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting (gemiddelde)	95% betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking
Uit 3.2: <u>Hs</u> (vis)	(240; 264)	(113; 130)
<u>Hs</u> (instr.)	(250; 304)	(106; 145)
<u>Hs</u> (O.S.IV)	(110; 124)	(45; 54)
Uit 3.5: de verdeling van <u>Hs</u> (O.S.IV) per Wr- en Hw-klasse		
Wr1	(101; 125)	(42; 59)
Wr2	(111; 151)	(45; 75)
Wr3	(105; 135)	(37; 59)
Wr4	(101; 135)	(38; 63)
Hw1	(91; 105)	(36; 46)
Hw2	(128; 152)	(40; 57)
Hw3	(169; 196)	(21; 46)
Uit 3.10: <u>Lw</u> (V)	(-146); -114)	(51;75)
<u>Lw</u> (B)	(- 83); - 55)	(44;65)
<u>aLw</u> (B)	(-151); -143)	(13;18)

De scheefheid en de kurtosis van een stochastische grootheid \underline{x} met $E|\underline{x}| < \infty$ worden gedefinieerd als

$$\frac{E(\underline{x}-E\underline{x})^3}{\{E(\underline{x}-E\underline{x})^2\}^{3/2}}, \text{ respectievelijk als } \frac{E(\underline{x}-E\underline{x})^4}{\{E(\underline{x}-E\underline{x})^2\}^2}. \text{ Stel } \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n \text{ zijn}$$

n onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische grootheden dan worden de steekproefscheefheid \underline{b}_1 en de steekproefkurtosis \underline{b}_2 gedefinieerd als

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^3}{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2 \right\}^{3/2}} \text{ respectievelijk als } \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^4}{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2 \right\}^2}. \text{ Voor een normale}$$

verdeling geldt dat de scheefheid gelijk is aan 0 en de kurtosis gelijk is aan 3. Voor een willekeurige verdeling duidt een waarde van de scheefheid < 0 op scheefheid naar links, een waarde > 0 op scheefheid naar rechts. Een waarde van de

kurtosis van een willekeurige verdeling < 3 duidt op dunne staarten, een waarde > 3 op dikke staarten (t.o.v. de normale verdeling).

Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ een aselechte steekproef van omvang n uit een normale verdeling voorstelt dan geldt dat de gestandaardiseerde steekproefscheefheid $\underline{b}_1/\sqrt{v_1}$ met $v_1 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$ voor voldoende grote n standaard normaal verdeeld is. Verder geldt dat de gestandaardiseerde steekproefkurtosis

$$\frac{\underline{b}_2 - 3 + \frac{6}{n+1}}{\sqrt{v_2}} \text{ met } v_2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n-5)}$$

voor voldoende grote n standaard normaal verdeeld is (zie Fisher (1948) p.70-75). In 3.5 hebben wij o.a. de steekproefscheefheid en de steekproefkurtosis berekend van $\underline{H}_s(0.S.IV)$ per hoogwaterklasse. Onder aanname van normaliteit kan men een schatting geven van de standaardafwijking van de steekproefscheefheid en de steekproefkurtosis.

klasse	aantal waarnemingen	steekproefscheefheid \pm 2 maal standaardafwijking	steekproefkurtosis \pm 2 maal standaardafwijking
Hw1	128	(-0,10; 0,74)	(1,47; 3,11)
Hw2	59	(-0,60; 0,62)	(1,30; 3,56)
Hw3	13	(-2,01; 0,17)	(1,43; 4,55)

OPMERKING: Voor de derde hoogwaterklasse zijn slechts weinig waarnemingen beschikbaar.

APPENDIX I. Het waarnemingsmateriaal aangaande significante golfhoogten, buitenwaterstanden en windrichtingen.

Kolom	Omschrijving
1	Datum
2	Hw(Z)
3	Hw(B)
4	Hs(vis) (tm 27-01-71)/Hs(instr.) (vanaf 23-10-71)
5	Wr(goeree)
6	Hs(O.S.IV) (amplitude schrijver)
7	Hs(O.S.IV) (stappenbaak)
8	Wr (Hoek van Holland)

OPMERKING: Een -1 duidt op een ontbrekende waarneming.

080149	207	-1	200	020	-1	-1	-1
140149	200	188	150	270	-1	-1	-1
180149	215	-1	150	290	-1	-1	-1
200149	207	210	150	270	-1	-1	-1
210149	209	-1	250	310	-1	-1	-1
300149	212	210	150	360	-1	-1	-1
270249	230	220	350	270	-1	-1	-1
010349	347	350	700	340	-1	-1	-1
140349	221	216	150	240	-1	-1	-1
150349	224	235	200	330	-1	-1	-1
160349	219	202	250	300	-1	-1	-1
180349	244	-1	250	300	-1	-1	-1
120449	202	200	200	250	-1	-1	-1
030849	201	200	200	300	-1	-1	-1
101049	203	196	250	260	-1	-1	-1
221049	209	-1	150	220	-1	-1	-1
231049	221	-1	200	270	-1	-1	-1
241049	234	233	200	250	-1	-1	-1
261049	298	270	400	320	-1	-1	-1
061149	223	-1	200	290	-1	-1	-1
071149	200	197	150	290	-1	-1	-1
081149	203	200	150	290	-1	-1	-1
131149	210	-1	350	290	-1	-1	-1
021249	209	194	250	320	-1	-1	-1
041249	261	-1	350	250	-1	-1	-1
081249	210	201	100	270	-1	-1	-1
151249	202	-1	100	320	-1	-1	-1
181249	270	-1	650	290	-1	-1	-1
261249	201	-1	150	220	-1	-1	-1
060250	228	215	150	360	-1	-1	-1
120250	204	200	250	270	-1	-1	-1
210250	213	-1	200	300	-1	-1	-1
120350	205	200	200	320	-1	-1	-1
030450	229	220	200	320	-1	-1	-1
160950	202	-1	100	300	-1	-1	-1
230950	201	-1	300	290	-1	-1	-1
111050	206	202	250	300	-1	-1	-1
091150	206	-1	200	220	-1	-1	-1
111150	242	-1	250	320	-1	-1	-1
131150	261	250	200	290	-1	-1	-1
141150	223	212	200	290	-1	-1	-1
291150	222	200	350	310	-1	-1	-1
011250	208	-1	200	240	-1	-1	-1
111250	217	215	100	220	-1	-1	-1
121250	220	222	250	320	-1	-1	-1
070151	216	200	250	250	-1	-1	-1
090151	204	195	200	250	-1	-1	-1
210251	201	192	200	270	-1	-1	-1
240351	242	230	300	320	-1	-1	-1
100451	214	-1	250	290	-1	-1	-1
160951	211	-1	150	320	-1	-1	-1
170951	200	-1	150	300	-1	-1	-1
141151	209	-1	200	360	-1	-1	-1
211151	200	-1	200	280	-1	-1	-1
291151	279	-1	350	360	-1	-1	-1
301151	200	198	150	260	-1	-1	-1
011251	226	222	150	290	-1	-1	-1
041251	209	-1	200	260	-1	-1	-1
051251	210	-1	250	240	-1	-1	-1
101251	249	-1	350	300	-1	-1	-1
281251	209	192	250	220	-1	-1	-1
311251	247	230	150	130	-1	-1	-1

010152	222	205	300	280	-1	-1	-1
020152	202	185	150	220	-1	-1	-1
110152	233	216	250	320	-1	-1	-1
140152	205	200	100	290	-1	-1	-1
180152	249	-1	350	300	-1	-1	-1
270152	221	208	200	320	-1	-1	-1
010252	226	215	250	270	-1	-1	-1
080252	221	206	300	320	-1	-1	-1
040952	214	-1	150	350	-1	-1	-1
220952	201	-1	200	330	-1	-1	-1
051052	200	-1	150	330	-1	-1	-1
071052	257	-1	350	320	-1	-1	-1
301052	238	-1	200	270	-1	-1	-1
311052	208	-1	150	320	-1	-1	-1
021152	200	-1	150	320	-1	-1	-1
031152	206	203	200	360	-1	-1	-1
061152	225	223	300	270	-1	-1	-1
071152	252	248	300	350	-1	-1	-1
031252	255	240	300	40	-1	-1	-1
151252	213	210	300	330	-1	-1	-1
171252	241	225	350	270	-1	-1	-1
211252	200	-1	250	310	-1	-1	-1
211252	208	200	150	300	-1	-1	-1
180153	204	190	0	240	-1	-1	-1
280153	205	186	150	250	-1	-1	-1
010253	432	-1	450	320	-1	-1	-1
050253	205	-1	250	360	-1	-1	-1
120453	203	195	100	180	-1	-1	-1
250853	202	-1	250	260	-1	-1	-1
100953	205	205	250	360	-1	-1	-1
120953	200	-1	200	320	-1	-1	-1
240953	200	-1	150	250	-1	-1	-1
241253	201	196	100	270	-1	-1	-1
271253	205	193	250	320	-1	-1	-1
030154	236	220	350	360	-1	-1	-1
090154	210	208	250	360	-1	-1	-1
160154	274	265	600	260	-1	-1	-1
170154	200	190	350	270	-1	-1	-1
200154	219	212	150	240	-1	-1	-1
050354	244	240	300	300	-1	-1	-1
040454	224	203	150	300	-1	-1	-1
150454	203	186	150	340	-1	-1	-1
180754	223	-1	250	280	-1	-1	-1
190754	211	-1	200	330	-1	-1	-1
170954	214	-1	-1	-1	-1	-1	-1
260954	200	-1	-1	-1	-1	-1	-1
270954	205	-1	-1	-1	-1	-1	-1
290954	237	227	-1	-1	-1	-1	-1
141054	198	207	-1	-1	-1	-1	-1
091154	224	218	300	300	-1	-1	-1
111154	209	-1	250	310	-1	-1	-1
121154	245	248	250	290	-1	-1	-1
141154	221	220	200	330	-1	-1	-1
051254	215	208	350	310	-1	-1	-1
151254	206	194	100	320	-1	-1	-1
211254	204	-1	300	310	-1	-1	-1
221254	282	-1	500	310	-1	-1	-1
231254	355	325	750	320	-1	-1	-1
241254	285	-1	800	320	-1	-1	-1
261254	203	190	250	270	-1	-1	-1

110155	247	231	150	320	-1	-1	-1
130155	260	-1	400	300	-1	-1	-1
130155	200	200	200	140	-1	-1	-1
160155	227	-1	550	360	-1	-1	-1
050255	224	206	200	270	-1	-1	-1
060255	207	190	200	340	-1	-1	-1
090255	230	-1	300	280	-1	-1	-1
240355	201	197	250	240	-1	-1	-1
270355	216	-1	200	340	-1	-1	-1
070555	222	-1	350	300	-1	-1	-1
180555	214	203	550	270	-1	-1	-1
080855	218	-1	350	320	-1	-1	-1
061055	272	260	400	290	-1	-1	-1
161055	239	-1	300	350	-1	-1	-1
171055	216	-1	300	320	-1	-1	-1
171055	221	227	200	310	-1	-1	-1
181055	217	-1	250	290	-1	-1	-1
181055	190	200	200	290	-1	-1	-1
031255	213	207	150	270	-1	-1	-1
291255	265	260	400	270	-1	-1	-1
301255	213	210	200	360	-1	-1	-1
311255	239	235	250	310	-1	-1	-1
020156	217	-1	200	340	-1	-1	-1
180156	274	258	400	330	-1	-1	-1
210156	231	210	400	280	-1	-1	-1
010356	211	-1	300	270	-1	-1	-1
020356	234	224	200	250	-1	-1	-1
100756	201	-1	150	360	-1	-1	-1
041056	210	-1	300	280	-1	-1	-1
061056	245	-1	250	340	-1	-1	-1
181056	204	-1	100	280	-1	-1	-1
031156	201	195	300	360	-1	-1	-1
051156	204	197	250	340	-1	-1	-1
251156	216	-1	250	270	-1	-1	-1
271156	235	225	300	290	-1	-1	-1
291156	249	-1	350	310	-1	-1	-1
060257	-1	203	150	190	-1	-1	-1
140257	-1	225	200	280	-1	-1	-1
150257	-1	206	50	320	-1	-1	-1
180357	-1	217	250	250	-1	-1	-1
260857	-1	244	420	300	-1	-1	-1
120957	-1	224	350	350	-1	-1	-1
140957	-1	200	250	300	-1	-1	-1
221057	-1	212	250	310	-1	-1	-1
241057	-1	210	200	250	-1	-1	-1
221157	-1	214	200	340	-1	-1	-1
091257	-1	243	300	300	-1	-1	-1
060158	-1	208	250	270	-1	-1	-1
070158	-1	249	450	310	-1	-1	-1
100158	-1	243	550	290	-1	-1	-1
110158	-1	263	300	320	-1	-1	-1
190158	-1	241	350	290	-1	-1	-1
060258	-1	232	250	310	-1	-1	-1
170258	-1	219	250	330	-1	-1	-1
180258	-1	202	200	340	-1	-1	-1
220258	-1	201	200	360	-1	-1	-1
060358	-1	235	200	290	-1	-1	-1
160958	-1	201	150	280	-1	-1	-1
250958	-1	202	400	280	-1	-1	-1
141058	-1	222	150	290	-1	-1	-1
161058	-1	279	400	290	-1	-1	-1
091258	-1	217	300	300	-1	-1	-1
111258	-1	201	200	270	-1	-1	-1

020159	-1	227	250	310	-1	-1	-1
070159	-1	200	150	360	-1	-1	-1
080159	-1	202	350	350	-1	-1	-1
090159	-1	243	350	360	-1	-1	-1
120159	-1	270	300	300	-1	-1	-1
230159	-1	205	200	300	-1	-1	-1
240159	-1	210	250	320	-1	-1	-1
070459	-1	208	250	290	-1	-1	-1
221059	-1	209	250	320	-1	-1	-1
271059	-1	230	200	320	-1	-1	-1
311059	-1	204	300	340	-1	-1	-1
031159	-1	208	50	190	-1	-1	-1
031259	-1	208	150	180	-1	-1	-1
281259	-1	202	200	300	-1	-1	-1
311259	-1	218	150	200	-1	-1	-1
010160	-1	211	150	220	-1	-1	-1
200160	-1	232	450	320	-1	-1	-1
290160	-1	233	550	300	-1	-1	-1
160260	-1	204	300	290	-1	-1	-1
290660	-1	219	350	320	-1	-1	-1
210960	-1	263	350	340	-1	-1	-1
111060	-1	215	400	300	-1	-1	-1
051160	-1	214	250	270	-1	-1	-1
181160	-1	216	550	270	-1	-1	-1
041260	-1	241	400	270	-1	-1	-1
040161	-1	202	250	330	-1	-1	-1
300161	-1	204	150	240	-1	-1	-1
010261	-1	215	300	280	-1	-1	-1
040261	-1	201	350	300	-1	-1	-1
180361	-1	223	200	290	-1	-1	-1
190361	-1	223	200	340	-1	-1	-1
210361	-1	296	550	360	-1	-1	-1
040761	-1	219	350	340	-1	-1	-1
290761	-1	206	100	320	-1	-1	-1
171061	-1	248	600	330	-1	-1	-1
181061	-1	204	600	360	-1	-1	-1
251061	-1	224	200	230	-1	-1	-1
031161	-1	200	350	320	-1	-1	-1
031161	-1	206	380	310	-1	-1	-1
061261	-1	227	400	280	-1	-1	-1
100162	-1	205	150	250	-1	-1	-1
120162	-1	205	300	200	-1	-1	-1
130162	-1	208	350	270	-1	-1	-1
220162	-1	212	250	260	-1	-1	-1
050262	-1	235	200	280	-1	-1	-1
080262	-1	210	50	180	-1	-1	-1
120262	-1	270	400	320	-1	-1	-1
170262	-1	279	450	300	-1	-1	-1
050462	-1	233	250	320	-1	-1	-1
090462	-1	202	100	320	-1	-1	-1
310562	-1	210	200	330	-1	-1	-1
040762	-1	208	250	320	-1	-1	-1
180962	-1	210	-1	-1	-1	-1	-1
291062	-1	247	300	320	-1	-1	-1
151162	-1	281	450	310	-1	-1	-1
101262	-1	230	350	290	-1	-1	-1
121262	-1	211	100	300	-1	-1	-1
131262	-1	208	250	340	-1	-1	-1
161262	-1	264	550	290	-1	-1	-1

260163	-1	208	150	340	-1	-1	-1
120363	-1	208	150	320	-1	-1	-1
061063	-1	207	200	300	-1	-1	-1
141063	-1	223	300	290	-1	-1	-1
031163	-1	200	50	140	-1	-1	-1
071163	-1	202	150	270	-1	-1	-1
141163	-1	205	200	290	-1	-1	-1
161163	-1	200	150	230	-1	-1	-1
181163	-1	215	550	230	-1	-1	-1
201163	-1	220	250	360	-1	-1	-1
221163	-1	231	250	290	-1	-1	-1
191263	-1	208	150	20	70	-1	-1
300164	-1	205	200	300	68	-1	-1
010264	-1	212	100	250	55	-1	-1
130564	-1	202	50	240	58	-1	-1
081064	-1	214	250	280	79	-1	-1
241064	-1	250	300	360	91	-1	-1
171164	-1	235	300	300	150	-1	-1
031264	-1	271	350	330	170	-1	-1
180165	-1	244	250	270	120	-1	-1
190165	-1	207	100	290	70	-1	-1
140265	-1	236	250	310	137	-1	-1
180465	-1	213	200	330	96	-1	-1
050565	-1	201	150	280	64	-1	-1
300765	-1	224	250	270	176	-1	-1
290865	-1	203	100	330	-1	-1	-1
280965	-1	200	50	240	-1	-1	-1
291065	-1	211	200	270	-1	-1	-1
311065	-1	209	200	290	-1	-1	-1
241165	-1	270	350	290	-1	-1	-1
261165	-1	230	300	280	-1	-1	-1
271165	-1	239	150	290	-1	-1	-1
281165	-1	208	350	300	-1	-1	-1
301165	-1	280	600	300	-1	-1	-1
061265	-1	211	300	270	-1	-1	-1
101265	-1	321	300	310	-1	-1	-1
181265	-1	207	250	230	131	-1	-1
301265	-1	200	200	280	112	-1	-1
060266	-1	203	50	210	27	-1	-1
070266	-1	207	100	250	35	-1	-1
120366	-1	205	300	350	151	-1	-1
250366	-1	234	250	310	138	-1	-1
280366	-1	252	300	290	175	-1	-1
060566	-1	202	150	250	119	-1	-1
140966	-1	205	200	280	105	-1	-1
160966	-1	248	200	340	115	-1	-1
151166	-1	204	150	300	62	-1	-1
161166	-1	314	450	320	208	-1	-1
291166	-1	200	300	300	95	-1	-1
011266	-1	257	450	290	169	-1	-1
021266	-1	234	400	250	175	-1	-1
091266	-1	233	300	270	125	-1	-1
101266	-1	203	300	260	126	-1	-1
111266	-1	223	250	290	123	-1	-1
131266	-1	227	250	340	63	-1	-1
181266	-1	226	200	280	71	-1	-1
241266	-1	209	250	300	85	-1	-1
251266	-1	205	250	310	77	-1	-1
301266	-1	214	200	270	94	-1	-1

010167	-1	219	250	290	130	-1	-1
020167	-1	200	250	290	71	-1	-1
110167	-1	206	100	300	-1	-1	-1
240267	-1	235	350	300	132	-1	-1
280267	-1	284	400	250	190	-1	-1
020367	-1	214	300	260	81	-1	-1
180367	-1	204	250	300	80	-1	-1
260367	-1	222	200	230	65	-1	-1
280367	-1	214	200	230	80	-1	-1
260567	-1	207	100	270	65	-1	-1
060967	-1	204	150	240	60	-1	-1
031067	-1	203	150	250	61	-1	-1
051067	-1	278	250	310	110	-1	-1
071067	-1	217	200	240	121	-1	-1
181067	-1	257	350	290	179	-1	-1
011167	-1	207	100	310	33	-1	-1
051167	-1	215	150	230	65	-1	-1
061167	-1	212	350	240	171	-1	-1
281167	-1	204	150	290	75	-1	-1
041267	-1	234	150	330	38	-1	-1
051267	-1	244	250	280	68	-1	-1
071267	-1	243	300	320	80	-1	-1
311267	-1	216	250	310	92	-1	-1
040168	-1	261	350	340	90	-1	-1
160168	-1	202	150	250	52	-1	-1
180168	-1	202	200	300	107	-1	-1
060368	-1	256	350	360	123	-1	-1
140368	-1	202	100	310	41	-1	-1
160368	-1	212	100	330	53	-1	-1
170368	-1	240	300	230	175	-1	-1
110768	-1	224	300	340	142	-1	-1
140868	-1	209	200	360	63	-1	-1
220968	-1	224	200	260	110	-1	-1
240968	-1	239	300	280	176	-1	-1
041168	-1	225	400	360	106	110	-1
241168	-1	217	150	270	83	102	-1
211268	-1	249	50	270	58	76	-1
231268	-1	254	300	300	132	123	-1
241268	-1	207	200	310	85	-1	-1
271268	-1	200	200	340	115	-1	-1
190169	-1	205	50	250	52	69	-1
020269	-1	275	350	280	200	176	-1
080269	-1	217	50	10	62	93	-1
160269	-1	204	250	20	60	64	-1
270869	-1	210	200	340	80	109	-1
290869	-1	230	200	310	103	106	-1
270969	-1	222	150	290	75	-1	-1
290969	-1	251	50	350	72	-1	-1
011069	-1	203	200	310	77	-1	-1
251069	-1	224	150	300	120	124	-1
261069	-1	201	50	230	50	-1	-1
291069	-1	216	50	70	95	-1	-1
081169	-1	205	350	250	129	-1	-1
091169	-1	214	450	250	140	142	-1
101169	-1	273	500	270	192	196	-1
121169	-1	257	300	220	173	152	-1
251169	-1	205	100	250	90	-1	-1
281169	-1	240	300	340	166	139	-1

080270	-1	213	150	260	100	-1	-1
200270	-1	205	300	250	180	156	-1
230270	-1	200	200	280	103	120	-1
280370	-1	223	200	320	141	-1	-1
160970	-1	208	100	360	58	-1	-1
011070	-1	206	250	310	140	-1	-1
031070	-1	266	400	300	182	147	-1
191070	-1	284	350	290	145	135	-1
291070	-1	207	50	320	95	-1	-1
011170	-1	201	300	270	125	-1	-1
031170	-1	206	400	240	165	165	-1
051170	-1	206	350	300	140	-1	-1
091170	-1	249	350	310	158	-1	-1
121170	-1	206	250	220	95	-1	-1
151170	-1	236	300	360	140	-1	-1
191170	-1	200	250	290	135	-1	-1
270171	-1	201	50	210	25	-1	-1
231071	-1	202	-1	-1	54	-1	-1
061171	-1	239	-1	-1	82	-1	-1
081171	-1	208	-1	-1	75	-1	-1
171171	-1	256	-1	-1	164	-1	-1
191171	-1	205	-1	-1	110	-1	-1
211171	-1	275	-1	-1	159	150	-1
221171	-1	279	-1	-1	193	159	-1
270172	-1	235	-1	-1	130	-1	-1
280372	-1	207	-1	-1	140	-1	-1
150472	-1	218	-1	-1	121	-1	-1
270572	-1	217	-1	-1	155	-1	-1
211072	-1	219	400	340	110	-1	-1
241072	-1	245	250	310	115	-1	-1
101172	-1	217	200	260	83	-1	-1
131172	-1	239	450	290	210	241	-1
211172	-1	217	-1	-1	155	-1	-1
241172	-1	220	-1	-1	125	-1	-1
230273	-1	214	250	290	170	-1	-1
030473	-1	276	500	300	195	183	-1
050473	-1	205	150	250	80	-1	-1
070473	-1	220	300	280	160	-1	-1
190473	-1	212	300	340	105	-1	-1
290973	-1	205	200	230	100	-1	-1
300973	-1	226	250	350	120	-1	-1
151073	-1	204	50	280	30	-1	-1
171073	-1	214	250	300	130	-1	-1
211073	-1	236	393	320	220	189	-1
111173	-1	208	200	270	100	-1	-1
131173	-1	291	350	270	205	189	-1
151173	-1	256	300	280	165	-1	-1
191173	-1	268	260	-1	140	-1	310
251173	-1	278	280	-1	150	-1	320
061273	-1	275	300	-1	175	-1	300
081273	-1	210	260	-1	75	-1	360
111273	-1	215	120	-1	90	-1	220
141273	-1	330	400	-1	165	184	310
171273	-1	229	240	-1	190	157	260

110174	-1	232	200	240	125	-1	-1
130174	-1	201	200	200	90	-1	-1
150174	-1	203	200	240	110	-1	-1
170174	-1	248	300	290	220	178	-1
070274	-1	229	200	310	118	-1	-1
090274	-1	227	300	220	190	207	-1
120274	-1	218	200	220	130	111	-1
230774	-1	202	250	230	140	-1	-1
180974	-1	212	50	360	42	-1	-1
180974	-1	201	100	350	43	-1	-1
041074	-1	206	200	250	185	-1	-1
051074	-1	203	200	300	150	-1	-1
191074	-1	207	-1	270	120	-1	-1
281074	-1	246	450	290	205	-1	-1
291074	-1	200	300	350	140	-1	-1
161174	-1	205	100	280	75	-1	-1
251174	-1	213	480	270	180	-1	-1
281174	-1	298	480	300	210	196	-1
011274	-1	208	240	290	145	-1	-1
051274	-1	225	480	290	185	-1	-1
111274	-1	244	500	-1	195	310	-1
131274	-1	224	600	320	175	-1	-1
181274	-1	260	640	270	220	200	-1
301274	-1	229	380	310	-1	119	-1
260175	-1	229	440	280	-1	-1	-1
280175	-1	245	260	310	-1	-1	-1
260375	-1	208	200	350	-1	-1	-1
300375	-1	212	200	310	-1	-1	-1
061075	-1	214	50	260	65	67	-1
171175	-1	243	333	-1	145	120	330
201175	-1	268	367	-1	135	145	330
221175	-1	207	265	-1	110	107	310
281175	-1	206	184	-1	120	58	310
031275	-1	232	189	-1	85	66	340
081275	-1	212	209	-1	77	63	360
010176	-1	212	195	270	85	-1	-1
030176	-1	347	490	300	220	205	-1
050176	-1	252	158	260	100	-1	-1
150176	-1	202	301	320	150	-1	-1
210176	-1	286	401	270	175	-1	-1
230176	-1	221	346	320	155	-1	-1
130276	-1	201	190	30	60	-1	-1
010376	-1	207	155	290	55	-1	-1
130576	-1	207	131	330	50	-1	-1
100976	-1	226	300	260	120	-1	-1
071076	-1	209	314	230	80	-1	-1
251076	-1	204	60	120	55	-1	-1
231176	-1	233	303	330	125	121	-1
241176	-1	222	324	300	142	-1	-1
301176	-1	224	360	320	195	196	-1
081276	-1	200	200	240	60	-1	-1
261276	-1	206	278	360	60	-1	-1
260177	-1	200	195	234	90	-1	-1
080277	-1	207	179	300	18	-1	-1
200277	-1	217	256	236	152	-1	-1
070477	-1	227	237	284	120	137	-1
060677	-1	204	169	319	50	-1	-1
290977	-1	203	209	241	120	-1	-1
011077	-1	246	345	276	250	210	-1
151177	-1	319	471	281	-1	-1	-1

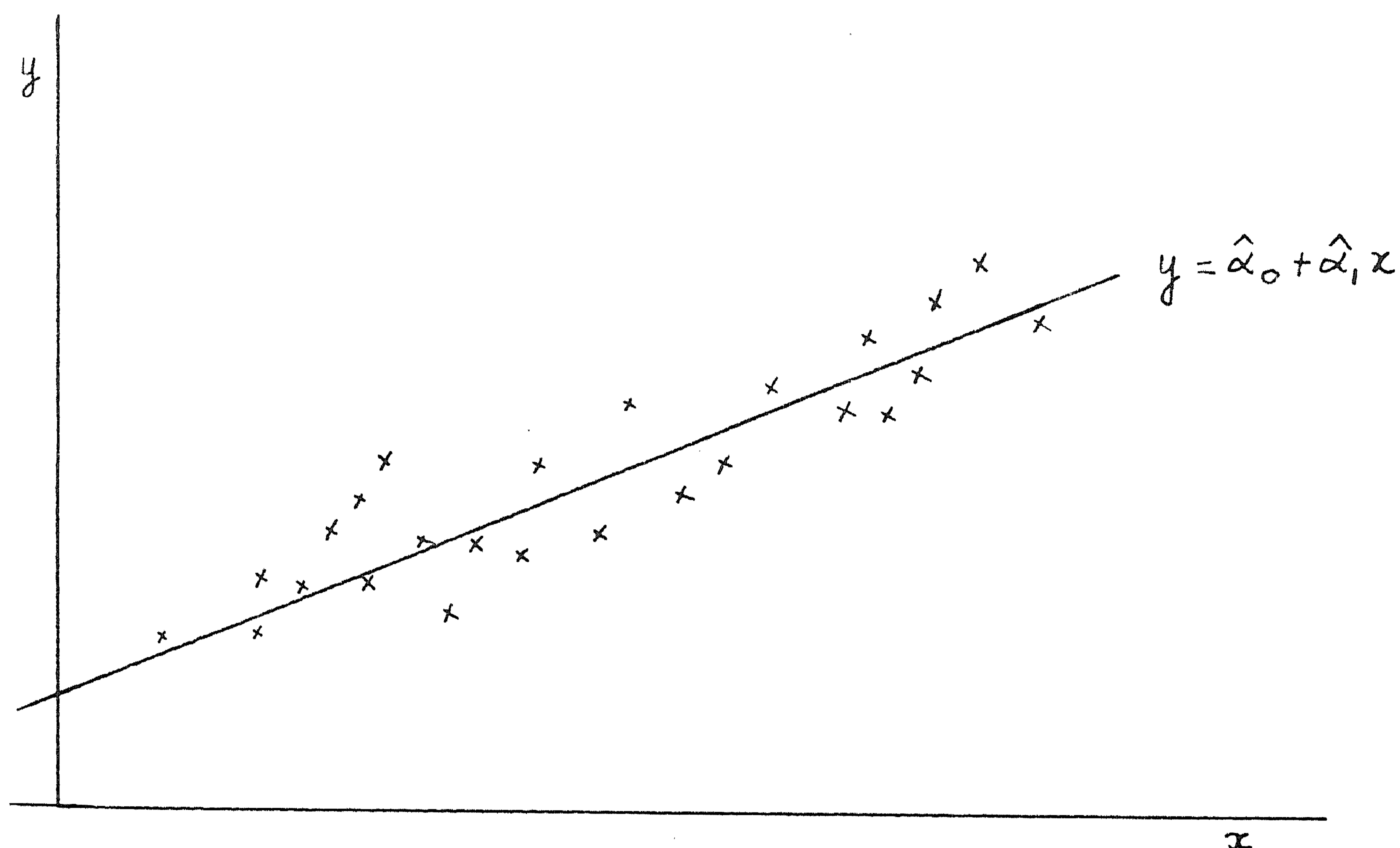
APPENDIX II. Het lineaire regressiemodel.

In deze appendix beschouwen we de volgende situatie: gegeven zijn n onderling onafhankelijke en identiek verdeelde paren waarnemingen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ en wij zijn geïnteresseerd in de vraag hoe de verdeling van de stochastische grootte y , gegeven een waarde van de stochastische grootte x , zij $x = x$, er uit ziet. Wij beperken ons in deze appendix tot een eenvoudig speciaal geval: wij veronderstellen nl. dat

- (i) $E(y|x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$,
 waarbij $E(y|x)$ de voorwaardelijke verwachting van y gegeven $x = x$ voorstelt. M.a.w. $E(y|x)$ is het populatiegemiddelde van de voorwaardelijke verdeling van y bij gegeven $x = x$.
 α_0 en α_1 zijn parameters, die i.h.a. onbekend zijn en geschat moeten worden uit de waarnemingen.
- (ii) $\sigma^2(y|x) = \sigma_x^2 = \sigma^2$
 d.w.z. de voorwaardelijke variantie van y bij gegeven $x = x$ is onafhankelijk van x .
- (iii) $y|x$ is een stochastische grootte die een normale verdeling bezit met verwachting $\alpha_0 + \alpha_1 x$ (zie(i)) en variantie σ^2 onafhankelijk van x (zie(ii)).

De voorwaarden (i) en (ii) zijn essentieel voor ons model. Voorwaarde (iii) is alleen nodig indien we de nauwkeurigheid van onze schatters willen vastleggen, of een betrouwbaarheidsinterval voor de onbekende parameters α_0 en α_1 wensen op te stellen. Ook bij het uitvoeren van toetsen (bijvoorbeeld: voor hypothesen omtrent α_0 en/of α_1 ; ook kan dan, in bepaalde gevallen, een toets voor de model-assumptie (i) (lineairiteit) worden uitgevoerd) dient aan voorwaarde (iii) voldaan te zijn.

Het volgende plaatje is illustratief voor de situatie die we bekijken. In een x - y -vlak zijn de waarnemingen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ uitgezet. Verder is een denkbeeldige regressielijn, d.w.z. een schatting van het lineaire verband (i) aangegeven. De coëfficiënten $\hat{\alpha}_0$ en $\hat{\alpha}_1$ in de regressielijn zijn schattingen (berekend uit de waarnemingen) voor de parameters α_0 en α_1 .



Lineaire regressie van y op x

De schattingen $\hat{\alpha}_0$ en $\hat{\alpha}_1$ van de regressiecoëfficiënten α_0 en α_1 resp. worden bepaald via de methode der kleinste kwadraten: d.w.z. bepaal die waarden van $\hat{\alpha}_0$ en $\hat{\alpha}_1$ waarvoor

$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i)^2$ minimaal wordt, d.w.z. we minimaliseren de vertikale afstanden tot de denkbeeldige regressielijn. De oplossing van dit minimaliseringsprobleem ziet er als volgt uit:

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{y} - \hat{\alpha}_1 \bar{x}, \quad \bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$$

en

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{zie Hemelrijk \& Kriens (1972), blz.35})$$

Merk op dat de optimale lijn (in kleinste kwadraten zin) door het punt (\bar{x}, \bar{y}) gaat. Deze lijn heet: de regressielijn van y op x . In deze beschouwing zijn de y_i 's stochastische grootheden voor $i = 1, 2, \dots, n$, terwijl de x_i 's als gegeven getallen worden beschouwd (voor $i = 1, 2, \dots, n$ geldt $x_i = x_i$). Dit laatste lijkt niet onredelijk omdat we slechts geïnteresseerd zijn in de voorwaardelijke verdeling van y bij gegeven waarden van x . De kleinste kwadraten schatters $\hat{\alpha}_0$ en $\hat{\alpha}_1$ voor α_0 en α_1 zijn in allerlei opzichten behoorlijke schatters voor α_0 en α_1 , mits maar aan de veronderstellingen (i) en (ii) voldaan is. We merken nog op dat er naast α_0 en α_1 nog een derde

parameter in het spel is, nl. σ^2 ; deze grootte kan geïnterpreteerd worden als de variantie van de storingsterm: d.w.z. het verschil tussen een waargenomen y_i en zijn predictie $\alpha_0 + \alpha_1 x_i$ op grond van ons model. We vermelden nog dat (onder de voorwaarden (i) en (ii)) ook σ^2 geschat kan worden: een goede schatter is

$$\underline{s}^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n (\underline{y}_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i)^2. \underline{s}^2 \text{ is dus een schatter van de}$$

variantie van de storingsterm (zie Hemelrijk & Kriens (1972), blz.36). Het geschatte percentage verklaarde variantie geeft aan welk deel van de variantie \underline{y} niet door de variantie van de storingsterm bepaald wordt.

Verder bepaalt men vaak nog de geschatte product-moment correlatie tussen \underline{y} en \underline{x} :

$$\hat{r}_n = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \cdot n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \text{ (zie Fisher (1948), p.183-184)}$$

\hat{r}_n is een maat voor de (lineaire) samenhang tussen \underline{y} en \underline{x} . Zij geeft aan "hoe sterk" het verband tussen \underline{y} en \underline{x} is.

Tenslotte merken wij nog op dat men bij toepassing van bovengenoemde technieken dient na te gaan (bijvoorbeeld aan de hand van een plaatje, veelal aangevuld met toetsingen van de modelveronderstellingen) of het model dat gespecificeerd is door de veronderstellingen (i) en (ii) (en als men wenst te toetsen of betrouwbaarheidsintervallen wil opgeven ook (iii)), bij benadering correct is.

APPENDIX III. Informele beschrijving van enige gebruikte statistische methoden.

III.a. Waarschijnlijkheidspapier

Een belangrijk hulpmiddel om een eerste indruk te krijgen van de aard van de verdeling is het uitzetten van de waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier. De gang van zaken is als volgt: laten $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ n onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische grootheden zijn, d.w.z. $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ stelt een aselechte steekproef van omvang n uit een verdeling voor met verdelingsfunctie.

$$F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

waarbij F een of andere verdeling voorstelt en μ en σ onbekende plaats- en schaalparameters zijn. Teneinde nu de veronderstelling te verifiëren dat de verdeling, waaruit de waarnemingen afkomstig zijn, inderdaad van type F is, en om tegelijkertijd μ en σ grafisch te schatten, maakt men gebruik van geschikt waarschijnlijkheidspapier. Dit papier heeft een verticale schaal evenredig met F^{-1} (de inverse van F), zodat de punten

$$(x, F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right))$$

een rechtlijn vormen. Ordenen we nu de steekproef naar grootte:

$$\underline{x}_{1n} \leq \dots \leq \underline{x}_{nn}$$

(dus \underline{x}_{1n} de kleinste en \underline{x}_{nn} de grootste waarneming) en maakt men vervolgens een grafiek van de punten

$$(\underline{x}_{in}, \underline{P}_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

waarbij \underline{P}_{in} een schatting is van

$$F\left(\frac{\underline{x}_{in}-\mu}{\sigma}\right),$$

op het waarschijnlijkheidspapier, dan kan men grafisch beoordelen of de verdeling van de waarnemingen van type F is. Als de n punten, bij benadering, op een rechte lijn liggen, dan is de onderliggende verdeling waarschijnlijk van type F. Afwijkingen van lineairiteit wijzen op een verdeling van een ander type en geven een aanduiding voor de aard van de afwijking. Benard & Bos-Levenbach (1953) hebben laten zien dat een goede keuze voor \underline{P}_{in} is:

$$\underline{P}_{in} = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}.$$

Voor een viertal typen verdelingen is voor dit onderzoek waarschijnlijkheidspapier geconstrueerd. De verdelingen zijn in onderstaande tabel weergegeven:

Verdeling	Verdelingsfunctie	F	Parameters
Normaal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu}{\sigma})^2\} dy$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-\frac{1}{2}y^2\} dy$	μ (verwachting) σ (standaardafwijking)
Exponentieel	$1 - \exp\{-\lambda(x-\tau)\}$	$1 - \exp\{-x\}$	τ (startpunt) λ (1/verwachting)
Gumbel	$\exp\{-\exp\{-\frac{x-\xi}{\theta}\}\}$	$\exp\{-\exp\{-x\}\}$	ξ (plaatsparameter) θ (schaalparameter)
Weibull	$\exp\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^\alpha\}$		μ (plaatsparameter) σ (schaalparameter) α (vormparameter)

Voor de Weibull verdeling gaat de hierboven beschreven procedure niet zonder meer op: de parameter μ moet bekend zijn en wanneer men dan op de waarnemingen de transformatie

$$\underline{y} = -\log(\underline{x}-\mu)$$

toepast, kan men de aldus getransformeerde waarnemingen op Gumbel-waarschijnlijkheidspapier uitzetten. In de praktijk moet men dus de beschikking hebben over Gumbel papier waarvan de horizontale schaal logaritmisch is.

Immers, als \underline{x} Weibull verdeeld is met parameters α , μ en σ dan is $-\log(\underline{x}-\mu)$ Gumbel verdeeld met parameters $\xi = -\log(\sigma)/\alpha$ en $\theta = 1/\alpha$.

III.b. Toetsen

In aansluiting op het onderzoek m.b.v. waarschijnlijkheidspapier zijn toetsen op normaliteit, een Gumbel verdeling, en op exponentialiteit uitgevoerd.

III.b.1. Toets op normaliteit

Laat $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ een aselechte steekproef zijn van omvang n uit een verdeling F . Men wenst te toetsen de nulhypothese

$$H_0: F = N(\mu, \sigma^2),$$

d.w.z. de waarnemingen zijn afkomstig uit een normale verdeling met onbekende μ en σ^2 . De in dit verslag gebruikte toets is afkomstig van D'Agostino & Pearson (1973). De toetsingsprocedure is gebaseerd op het 3^e en 4^e centrale steekproefmoment en is speciaal gevoelig voor niet-symmetrische verdelingen en verdelingen met dikkere of dunnere staarten dan de normale verdeling. Voor een beschrijving van de toetsingsgrootheden \underline{b}_1 en \underline{b}_2 verwijzen we naar D'Agostino & Pearson (1973). Bowman & Shenton (1975) geven grafieken van de kritieke zônes voor de tweedimensionale toetsingsgrootheid $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$.

III.b.2. Toets op een Gumbel verdeling

Laat $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ een aselechte steekproef van omvang n zijn uit een verdeling F . Men wenst te toetsen de nulhypothese

$$H_0: F \text{ is een Gumbel verdeling,}$$

d.w.z.

$$F(x) = \exp\{-\exp\{-\frac{(x-\xi)}{\theta}\}\} \quad -\infty < x < \infty,$$

met onbekende parameters θ en ξ . De parameters worden geschat met de meest aannemelijkheidsmethode, d.w.z. via de vergelijkingen

$$\hat{\theta} = \bar{x} - \left(\sum_{i=1}^n \underline{x}_i \{\exp\{-\underline{x}_i/\hat{\theta}\}\} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \exp\{-\underline{x}_i/\hat{\theta}\} \right)$$

en

$$\hat{\xi} = -\hat{\theta} \log\left(\sum_{i=1}^n \exp\{-\underline{x}_i/\hat{\theta}\} / n \right).$$

Vervolgens worden getransformeerde grootheden $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n$ bepaald:

$$\underline{z}_i = F(\underline{x}_{in} \mid \hat{\xi}, \hat{\theta}), \quad i = 1, \dots, n,$$

waarin $\underline{x}_{1n}, \dots, \underline{x}_{nn}$ de geordende steekproef.

De volgende drie toetsingsgrootheden voor het toetsen van H_0 worden nu bepaald (zie bijv. Stephens (1977)):

$$\underline{W}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \left(z_i - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \quad (\text{toets van Cramér-von Mises})$$

$$\underline{U}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{W}^2 - n(\bar{z} - \frac{1}{2})^2 \quad (\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i, \text{ toets van Watson})$$

$$\underline{A}^2 \stackrel{\text{def}}{=} - \left[\left(\sum_{i=1}^n (2i-1) [\log(z_i) + \log(1 - z_{n+i-1})] \right) / n \right] - n$$

(toets van Anderson-Darling).

Vervolgens wordt nog een eindige-steekproef-correctie toegepast door ieder van deze toetsingsgrootheden te vermenigvuldigen met een factor $(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}})$. Percentagepunten van de resp. toetsingsgrootheden onder H_0 zijn te vinden in Stephens (1977).

III.b.3. Toets op exponentialiteit

Laat x_1, \dots, x_n een aselechte steekproef van omvang n zijn uit een verdeling F . Men wenst te toetsen de nulhypothese

$$H_0: F \text{ is een exponentiële verdeling,}$$

d.w.z.

$$F(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x-\tau)\}, \quad x \geq \tau,$$

met onbekende parameter λ . De parameter τ kan ook onbekend zijn.

Om H_0 te toetsen werd gebruik gemaakt van de "cumulative total time on test statistic" (zie Barlow et.al. (1972)). De "failure rate" van een verdeling wordt gedefinieerd door

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)},$$

waarin f de dichtheid van de verdeling voorstelt. De exponentiële verdeling is de enige verdeling waarvan de failure rate constant is. De "cumulative total time on test statistic" onderzoekt of de failure rate constant is tegen het alternatief dat de waarnemingen afkomstig zijn uit een verdeling, waarvan de failure rate monotoon daalt (bijv. Gumbel) of stijgt (bijv. normaal).

Laat x_{1n}, \dots, x_{nn} de geordende steekproef voorstellen. Definieer:

$$\underline{z}_i = \underline{x}_{in} - \tau; \quad \tau \text{ bekend,}$$

en

$$\underline{d}_i = (n - i + 1)(\underline{z}_i - \underline{z}_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \underline{z}_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

De "cumulative total time on test statistic" wordt nu gedefinieerd door

$$\underline{v}_n = \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \underline{d}_{n-i+1} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \underline{d}_i \right).$$

Men kan bewijzen dat de gestandaardiseerde grootheid

$$\underline{v}_n^* = \sqrt{12(n-1)} \left(\underline{v}_n / (n-1) - \frac{1}{2} \right)$$

voor "grote n bij benadering" standaard normaal verdeeld is. Grote waarden van \underline{v}_n^* wijzen op een toenemende failure rate en kleine waarden op een dalende failure rate.

APPENDIX IV. Het waarnemingsmateriaal aangaande binnenwaterstanden.

Kolom	Omschrijving
1	Datum
2	Lw(V)
3	Hw(V)
4	Lw(B)
5	hw(B)
6	aLw(B)
7	ahw(B)
8	hs(vis) (tm 16-12-62 en van 12-11-65 tm 10-12-65) /hs(O.S.IV) (vanaf 24-10-64)
9	Hw(B)
10	Hs(vis) (tm 16-12-62 en van 12-11-65 tm 10-12-65) /Hs(O.S.IV) (vanaf 24-20-64)

OPMERKING: Een -1 duidt op een ontbrekende waarneming.

180357	-172	310	-103	217	-133	159	-1	217	-1
160857	-168	312	-107	244	-155	172	-1	244	-1
091257	-106	307	-052	243	-137	-1	-1	243	-1
070158	-074	310	-012	249	-160	162	-1	249	-1
190158	-077	305	-020	241	-153	139	-1	241	-1
050258	-175	300	-103	223	-166	164	-1	232	-1
060358	-173	308	-111	235	-170	168	-1	235	-1
141058	-209	300	-133	222	-151	185	-1	222	-1
090159	-158	310	-097	243	-143	163	-1	243	-1
290160	-170	305	-102	233	-171	177	-1	233	-1
210960	-110	327	-062	263	-151	160	-1	263	-1
180361	-216	301	-138	223	-186	176	-1	223	-1
170262	030	310	066	279	-121	130	-1	279	-1
050462	-201	313	-139	244	-186	174	-1	233	-1
291062	-142	332	-090	256	-145	148	-1	247	-1
151162	-126	341	-060	281	-154	181	-1	281	-1
161262	-126	313	-069	264	-131	135	-1	264	-1
241064	-093	319	-035	250	-145	167	091	250	91
031264	-082	317	-042	271	-130	134	170	271	170
180165	-106	313	-047	244	-150	173	120	244	120
121165	-054	324	016	270	-139	148	-1	270	-1
301165	-051	300	-005	280	-134	125	-1	280	-1
101265	-074	365	-010	321	-142	163	-1	321	-1
160966	-169	324	-084	248	-155	189	115	248	115
161166	-156	304	-101	232	-136	144	171	314	208
301166	-217	300	-146	239	-143	154	183	257	169
131266	-154	300	-086	227	-144	152	063	227	63
280267	-189	352	-118	284	-159	175	190	284	190
051067	-158	344	-076	278	-153	183	110	278	110
181067	-122	307	-056	257	-147	158	179	257	179
040168	-134	321	-084	261	-123	129	090	261	90
170368	-167	310	-098	240	-169	170	175	240	175
110768	-186	312	-116	224	-129	162	142	224	142
240968	-180	306	-101	239	-157	172	176	239	176
231268	-161	311	-090	254	-147	172	132	254	132
020269	-145	313	-086	275	-153	141	200	275	200
290869	-206	304	-133	230	-153	178	103	230	103
290969	-080	307	-004	251	-130	146	072	251	72
101169	-038	330	003	273	-144	164	192	273	192
021070	-141	315	-064	256	-127	144	-1	256	-1
191070	-093	333	-037	284	-143	149	145	284	145
151170	-180	312	-110	236	-149	156	140	236	140
221171	004	335	042	279	-127	137	193	279	193
150472	-212	301	-142	218	-166	176	121	218	121
241072	-172	316	-102	245	-149	185	115	245	115
030473	012	335	050	275	-137	135	195	276	195
131173	-166	321	-107	266	-140	174	-1	291	205
251173	-123	311	-059	272	-146	154	-1	278	150
141273	-063	352	0	298	-114	163	-1	330	165
070274	-198	300	-130	229	-154	175	118	229	118
281174	-168	312	-121	256	-139	157	235	298	210
181274	-054	310	001	260	-118	135	220	260	220
280175	-102	310	-062	240	-137	154	-1	245	-1
201175	-134	320	-065	-1	-137	149	-1	268	135
030176	-017	395	019	345	-160	155	-1	347	220
210176	-180	335	-120	-1	-166	172	-1	286	175

LITERATUUR

- [1] BARLOW, R.E., D.J. BARTHOLOMEW, J.M. BREMNER, H.D. BRUNK (1972), *Statistical inference under order restrictions*, Wiley, New York.
- [2] BENARD, A., E.C. BOS-LEVENBACH (1953), *Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier*, *Statistica Neerlandica* 7, 163-173.
- [3] BOWMAN, K.O., L.R. SHENTON (1975), *Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2* , *Biometrika* 62, 243-250.
- [4] D'AGOSTINO, R.B., E.S. PEARSON (1973), *Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of b_2 and $\sqrt{b_1}$* , *Biometrika* 60, 613-622.
- [5] DIEUDONNÉ, J. (1969), *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York.
- [6] FABIOUS, J., W.R. VAN ZWET (1975), *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, M.C. syllabus 10, Amsterdam.
- [7] FISHER, R.A. (1948), *Statistical Methods for Research Workers*, tenth edition, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- [8] FISHER, R.A., F. YATES (1949), *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- [9] HEMELRIJK, J. (1977), *Orienterende cursus mathematische statistiek*, M.C. syllabus 34, Amsterdam.
- [10] HEMELRIJK, J., J. KRIENS (1972), *Leergang besliskunde deel 3: statistiek*, M.C. syllabus 1.3, Amsterdam.
- [11] STEPHENS, M.A. (1977), *Goodness of fit for the extreme value distribution*, *Biometrika* 64, 583-588.
- [12] NOTA DDWT - 77.283, (1977), *Beschrijving van de probabilistische methode voor de bepaling van de golf - en vervalkrachten*, Rijkswaterstraat, Deltadienst, Hoofdafdeling Waterloopkunde, s'-Gravenhage.
- [13] NOTA DDWT - 77.192, (1977), *Verdeling van geselecteerde LW-standen te Burghsluis i.v.m. vervalbelasting op de stormvloedkering Oosterschelde*, Rijkswaterstraat, Deltadienst, Hoofdafdeling Waterloopkunde, s'-Gravenhage.