Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen [1])

door Constance van Eeden

Summary

Methods for comparing, testing and estimating unknown probabilities.

This expository paper deals with the 2×2-table for comparing two probabilities. It gives the exact distribution under the hypothesis tested, the normal approximation and several methods for combining independent tests of this kind.

Furthermore it deals with a test for the hypothesis H_0: $p = p_0$ and gives exact methods and approximations for determining a confidence interval for an unknown probability.

Inhoud

---

[1]) Rapport S 115 (M 45) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam. De afdeling staat onder leiding van Prof. Dr D. van Dantzig.

Inleiding — Het toetsen van een hypothese in het algemeen

Het toetsen van een hypothese H_0 berust op een aantal waarnemingen x_1, x_2, ..., x_n van één of meer stochastische grootheden [1]) of op enige groepen van waarnemingen.

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid $\underline{u}$, die een functie is van bovengenoemde waarnemingen.

Men berekent nu, onder de onderstelling dat H_0 juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{u}$. Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van $\underline{u}$, zodanig dat de kans dat $\underline{u}$ een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese H_0, hoogstens gelijk is aan een gegeven getal α; Z wordt de *kritieke zone* genoemd en α de *onbetrouwbaarheidsdrempel*.

H_0 wordt nu verworpen als de bij het experiment gevonden waarde van $\underline{u}$ in Z ligt. Noemen we de kans dat dit gebeurt als H_0 juist is α', dan is α' de kans op ten onrechte verwerpen van H_0 als deze juist is; α' heet de *onbetrouwbaarheid* en deze is hoogstens gelijk aan α, de onbetrouwbaarheidsdrempel. De betekenis van α' en α is de volgende: α is de grootste kans op ten onrechte verwerpen van H_0, die de onderzoeker nog wil accepteren. α' de kans die hij werkelijk loopt om H_0 ten onrechte te verwerpen.

Indien de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{u}$ continu is, is $\alpha' = \alpha$; is de verdeling van $\underline{u}$ discreet dan is in het algemeen $\alpha' < \alpha$.

Als uitkomst van een toets wordt vaak de *overschrijdingskans* k opgegeven. Dit is de kleinste α' (of α, dat maakt hiervoor geen verschil) waarvoor de gevonden waarde van $\underline{u}$ nog juist in de bij α behorende kritieke zone ligt. Werken we met een onbetrouwbaarheidsdrempel α dan wordt H_0 dus verworpen als $k \leqq \alpha$ is.

De kritieke zone Z kan één- of tweezijdig gekozen worden. Tweezijdig wil zeggen: Z bestaat uit de waarden van $\underline{u}$ die ver van het gemiddelde afwijken. Rechts éénzijdig wil zeggen: Z bestaat uit de waarden van $\underline{u}$ die een grote positieve afstand tot het gemiddelde hebben.

De keuze van Z (één- of tweezijdig) hangt af van de alternatieve mogelijkheden, die men naast de getoetste hypothese in het onderzoek wenst te betrekken [2]).

---

[1]) Een stochatische grootheid is een grootheid die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit; stochastische grootheden worden aangegeven met onderstreepte letters. Waarden aangenomen door een stochastische grootheid worden aangegeven met dezelfde letters, niet onderstreept.

[2]) Nadere details hierover vindt men b.v. in [1]. In dit rapport volstaan wij, wat dit aspect betreft, met aanduidingen.

1.1. De methode der dubbele dichotomie voor het vergelijken van twee kansen

1.1.1. Inleiding

Wij beschouwen twee reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment één der mogelijke uitkomsten A of $\bar{A}$ (non-A) heeft.

Indien de eerste reeks uit n experimenten bestaat, waarvan er $\underline{a}$ de uitkomst A hebben gegeven en de tweede reeks uit m experimenten, waarvan er $\underline{b}$ de uitkomst A hebben gegeven, dan kunnen wij de resultaten als volgt samenvatten:

TABEL I

	A	$\bar{A}$	Totaal
eerste reeks	$\underline{a}$	$\underline{c}$	n
tweede reeks	$\underline{b}$	$\underline{d}$	m
totaal	$\underline{r}$	$\underline{s}$	N

Hierin zijn $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{r}$ en $\underline{s}$ stochastisch, terwijl n en m (en dus ook $N = n + m$) gegeven getallen zijn.

Stel nu dat bij ieder experiment van de eerste reeks de kans op A gelijk is aan p (en de kans op $\bar{A}$ dus gelijk aan $1 - p$) en dat bij ieder experiment van de tweede reeks de kans op A gelijk is aan p' (en de kans op $\bar{A}$ dus $1 - p'$).

De hypothese die we willen toetsen luidt dan:

$$H_0 : p = p'.$$

1.1.2. De toetsingsmethode

Als toetsingsgrootheid wordt hier de grootheid $\underline{a}$ gebruikt, dus het aantal malen A in de eerste reeks, en wel wordt speciaal gelet op de waarden, die $\underline{a}$ aan zou kunnen nemen bij de gegeven waarden van n en m *en bij de gevonden waarde van* $\underline{r}$.

Dit laatste is noodzakelijk, omdat men alleen op die wijze de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{a}$, als H_0 juist is, kan berekenen. De grootste waarde die deze grootheid $\underline{a}$ aan kan nemen, bij gegeven n, m en r, is: *min.* (n, r). De kleinste waarde is n — *min.* (s, n). De kans dat $\underline{a}$ een waarde a aanneemt, onder de aanname dat de hypothese H_0 juist is en onder de voorwaarde, dat $\underline{r}$ de bij het experiment gevonden waarde r aanneemt, wordt gegeven door:

$$P\,[\underline{a} = a \mid \underline{r} = r\,;\,H_0] = \frac{\binom{n}{a}\cdot\binom{m}{b}}{\binom{N}{r}}. \qquad (1)$$

Voor de verschillende waarden a, die $\underline{a}$ aan kan nemen, kunnen we deze kans berekenen. Hierbij kunnen wij gebruik maken van tabellen der binomiaalcoëfficiënten, die o.a. te vinden zijn in [2].

Voorbeeld 1.

Ter vergelijking van twee geneesmiddelen voor een bepaalde ziekte werden 11 patiënten met het eerste en 16 patiënten met het tweede middel behandeld. Vervolgens werd bij ieder der patiënten nagegaan of de ziekte aanmerkelijk werd verlicht. De resultaten zijn samengevat in tabel II:

TABEL II

geneesmiddel	succes	geen succes	totaal
1	6	5	11
2	14	2	16
totaal	20	7	27

We hebben dus: $a = 6$, $n = 11$, $m = 16$, $r = 20$ en de waarden die $\underline{a}$ aan kan nemen bij deze waarden van n, m en r zijn: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Berekenen wij met formule (1) de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{a}$ bij de gevonden waarde (20) van $\underline{r}$, dan vinden we:

TABEL III

a	$P\,[\underline{a} = a \mid \underline{r} = 20\,;\, H_0]$ $(n = 11,\ m = 16)$
4	0,0004
5	0,0083
6	0,0624
7	0,2081
8	0,3382
9	0,2705
10	0,0992
11	0,0129

In figuur 1 is horizontaal a uitgezet en verticaal $P\,[\underline{a} = a \mid \underline{r} = 20\,;\, H_0]$:

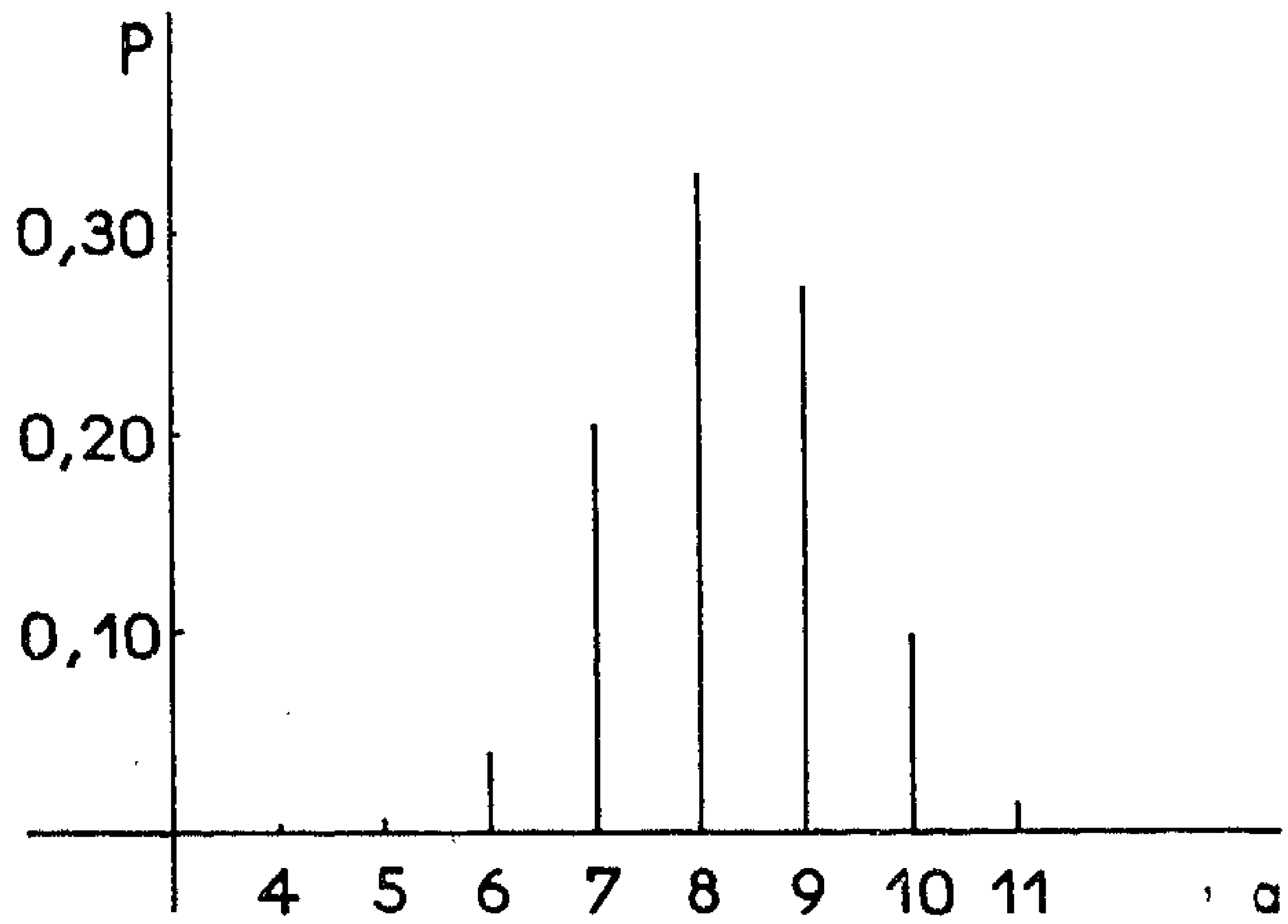

Fig. 1. $P\,[\underline{a} = a \mid \underline{r} = 20\ ;\ H_0]$, $n = 11$, $m = 16$.

Het *gemiddelde* en de *variantie* (spreidingskwadraat) van $\underline{a}$ worden gegeven door

$$\mathcal{E}\,(\underline{a} \mid \underline{r} = r\ ;\ H_0) = \frac{nr}{N}, \tag{2}$$

$$\sigma^2\,(\underline{a} \mid \underline{r} = r\ ;\ H_0) = \frac{nmrs}{N^2\,(N - 1)}. \tag{3}$$

Wil men als andere mogelijkheden beschouwen $p \neq p'$ dan kiest men een tweezijdige kritieke zone Z. Om deze kritieke zone te vormen worden de waarden van $\underline{a}$ met de kleinste waarschijnlijkheden bij elkaar gezocht totdat de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert.

De overschrijdingskans k wordt gevonden door alle waarschijnlijkheden bij elkaar te zoeken die niet groter zijn dan de waarschijnlijkheid van de gevonden waarde van $\underline{a}$.

Nemen we $\alpha = 0{,}05$ dan bestaat de tweezijdige kritieke zone Z in ons *voorbeeld* uit de waarden $a = 4$; 5 en 11. De kans α' dat $\underline{a}$ in Z valt is dan, onder de hypothese H_0, (zie tabel III) gelijk aan: 0,0004 + 0,0083 + 0,0129 = 0,0216.

Zouden wij de waarde $a = 6$ ook nog bij Z trekken, dan zou de waarde α overschreden worden.

We zien dat α' in dit geval veel kleiner dan α, zelfs kleiner dan $\frac{1}{2}\alpha$, is. Het alleen opgeven van α zou dus misleidend zijn.

De overschrijdingskans wordt (voor de in het voorbeeld voor a gevonden waarde 6):

$$k = 0{,}0004 + 0{,}0083 + 0{,}0129 + 0{,}0624 = 0{,}0840.$$

De hypothese H_0 wordt dus (bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0,05) niet verworpen.

Wil men als andere mogelijkheden naast $p = p'$ alleen beschouwen $p > p'$ (dit kan men b.v. doen als men weet dat p zeker niet kleiner is dan p'), dan kiest men een rechtséénzijdige kritieke zone Z_r, d.w.z. men kiest een kritieke zone die alleen bestaat uit grote waarden van a. De overschrijdingskans k wordt nu gevonden door de waarschijnlijkheden van alle waarden van $\underline{a}$ die niet kleiner zijn dan de gevonden waarde bij elkaar te tellen. Analoog voor een linkeréénzijdige kritieke zone Z_l.

In ons *voorbeeld* bestaat een rechtséénzijdige kritieke zone Z_r (bij een onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05) uit de waarde $a = 11$. De kans α' dat $\underline{a}$ in Z_r valt is, onder de hypothese H_0, gelijk aan 0,0129.
Een linkséénzijdige kritieke zone Z_l met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 bestaat uit de waarden $a = 4$ en 5; in dit geval is $\alpha' = 0{,}0087$.

1.1.3. Benadering voor de verdeling van $\underline{a}$ voor grote waarden van N

Voor grote waarden van N en als p niet te ver van $\frac{1}{2}$ verwijderd is en (of) $n \approx m$ is, maken wij gebruik van het feit dat $\underline{a}$ bij benadering normaal verdeeld is met gemiddelde $\frac{nr}{N}$ en spreiding $\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}$ (zie formules (2) en (3)). Daar wij hiermee een discrete verdeling benaderen met een continue passen wij de z.g. continuïteitscorrectie toe, d.w.z. wij nemen voor a een waarde die $\frac{1}{2}$ dichter bij het gemiddelde ligt.

Toetst men tweezijdig dan is de overschrijdingskans bij benadering 2 maal het oppervlak van de normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1, dat rechts van

$$\frac{\left|a - \frac{nr}{N}\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}} = \frac{|aN - nr| - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} = \frac{|ad - bc| - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}$$

ligt (de verticale strepen geven aan, dat de absolute waarde van $ad - bc$ genomen moet worden, d.w.z. $ad - bc$ zelf als dit > 0 is en anders $bc - ad$).

Beschouwt men als alternatieve mogelijkheden naast $p = p'$ alleen $p > p'$, dan is de overschrijdingskans bij benadering het oppervlak rechts van

$$\frac{ad - bc - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}.$$

Dit is dan de rechteréénzijdige overschrijdingskans. De linkeroverschrijdingskans (behorend bij linkszijdige toetsing, als $p < p'$ de enige toegelaten alternatieve mogelijkheid is) is bij benadering gelijk aan het oppervlak links van

$$\frac{ad - bc + \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}.$$

Opmerking:

Als p (of $1 - p$) klein is en n is veel kleiner (of veel groter) dan m kan men de verdeling van $\underline{a}$ beter benaderen met een Poisson-verdeling met parameter $\mu = \frac{nr}{N}$. Dan geldt:

$$P[\underline{a} = a \mid r, H_0] \approx \frac{e^{-\mu}\,\mu^a}{a!}.$$

Voorbeeld 2.

Bij 52 mannen en 109 vrouwen werd nagegaan of zij een bepaalde stof (phenyl-tio-carbamide) konden proeven[1]). Het doel van dit onderzoek was na te gaan of er een verschil is tussen mannen en vrouwen wat betreft het al of niet proeven van deze stof.

De resultaten staan vermeld in tabel IV:

TABEL IV

	proevers	niet proevers	totaal
mannen	35	17	52
vrouwen	69	40	109
totaal	104	57	161

We hebben dus: $a = 35$, $b = 69$, $c = 17$, $d = 40$,
$n = 52$, $m = 109$, $r = 104$, $s = 57$, $N = 161$.

Dit geeft $ad - bc = 227$, dus $ad - bc$ is positief (en dus gelijk aan $|ad - bc|$) en we krijgen dus:

[1]) Zie: Sexual and racial variations in ability to taste phenyl-tio-carbamide, with some data on the inheritance, by William C. Boyd and Lyle G. Boyd, Ann. Eugen. 8 (1936), p. 46–51.

$$\frac{|ad - bc| - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} = 0{,}32.$$

In een tabel van de normale verdeling vinden we voor de tweezijdige overschrijdingskans $k = 2 \times 0{,}3745 = 0{,}75$ en de hypothese, dat er geen verschil is tussen mannen en vrouwen wat betreft het al of niet proeven van phenyl-tio-carbamide, wordt op grond van dit experiment dus niet verworpen.

1.2. Het combineren van een aantal dubbele dichotomieën

1.2.1. Inleiding

We zullen hier beginnen met een *voorbeeld:* Het bovengenoemde onderzoek naar het verschil tussen mannen en vrouwen wat betreft het al of niet proeven van phenyl-tio-carbamide werd o.a. verricht in de stad San Sebastian. In deze stad kan men twee bevolkingsgroepen onderscheiden, nl. de Basken en de niet-Basken. Het onderzoek werd nu uitgevoerd voor ieder van deze twee groepen apart en de resultaten staan vermeld in de tabellen V en VI:

TABEL V. *Basken*

	proevers	niet proevers	totaal
mannen	24	5	29
vrouwen	49	20	69
totaal	73	25	98

TABEL VI. *Niet-Basken*

	proevers	niet proevers	totaal
mannen	17	8	25
vrouwen	35	14	49
totaal	52	22	74

De hypothese die we nu willen toetsen is, dat er noch bij de Basken, noch bij de niet-Basken een verschil is tussen mannen en vrouwen wat betreft het proeven van phenyl-tio-carbamide.

1.2.2. Beschrijving van de methode

In het algemene geval hebben wij dus een aantal tabellen van de vorm:

	A	$\bar{A}$	totaal
eerste reeks	$\underline{a}_i$	$\underline{c}_i$	n_i
tweede reeks	$\underline{b}_i$	$\underline{d}_i$	m_i
	$\underline{r}_i$	$\underline{s}_i$	N_i

waarbij $i = 1, 2, \ldots, l$.

Stel nu dat bij de i^e proef de kansen op A bij de eerste en tweede reeks resp. p_i en p_i' zijn. De hypothese die we dan willen toetsen is dat voor iedere i geldt: $p_i = p_i'$. De p_i's mogen echter onderling verschillen.

De alternatieve hypothesen houden uiteraard in, dat voor minstens één der tabellen geldt: $p_i \neq p_i'$. Indien men nu weet, dat alle eventuele verschillen tussen p_i en p_i' hetzelfde teken bezitten, dus dat $p_i > p_i'$ voor alle i met $p_i \neq p_i'$ òf $p_i < p_i'$ voor al deze gevallen, dan berekent men de grootheid:

$$\underline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l}\left(\underline{a}_i - \frac{n_i \underline{r}_i}{N_i}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i m_i \underline{r}_i \underline{s}_i}{N_i^2 (N_i - 1)}}}.$$

Deze grootheid $\underline{x}$ is onder de hypothese H_0 bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde nul en spreiding 1.

De overschrijdingskans kan weer in een tabel der normale verdeling worden opgezocht.

Een continuïteitscorrectie is hier moeilijk aan te brengen en wordt daarom gewoonlijk buiten beschouwing gelaten.

Beschouwt men als alternatieve mogelijkheden naast $p_i = p_i'$, $p_i \neq p_i'$ (waarbij dus het teken van $p_i - p_i'$ niet voor alle i 's hetzelfde behoeft te zijn) dan berekent men:

$$\underline{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\underline{a}_i N_i - n_i \underline{r}_i)^2}{\frac{n_i m_i \underline{r}_i \underline{s}_i}{N_i - 1}} = N_i \sum_{i=1} (-1) \frac{(\underline{a}_i \underline{d}_i - \underline{b}_i \underline{c}_i)^2}{n_i m_i \underline{r}_i \underline{s}_i}.$$

De grootheid $\underline{\chi}^2$ heeft, onder de hypothese H_0, bij benadering een χ^2-verdeling met l graden van vrijheid. De overschrijdingskans (die hier gelijk is aan het oppervlak dat rechts van de gevonden waarde van $\underline{\chi}^2$ ligt) kan in een tabel van de χ^2-verdeling worden opgezocht.

Opmerking:

Het combineren van een aantal dubbele dichotomieën kan nog op vele andere wijzen geschieden, b.v. als volgt:

1. Als men weet dat voor iedere i geldt $p_i = p$ en $p_i' = p'$ (dus dat p en p' niet van proef tot proef verschillen) dan vormt men uit de gegeven l dubbele dichotomieën één nieuwe, die er dan als volgt uitziet:

	A	$\bar{A}$	totaal
eerste reeks	$\Sigma \underline{a}_i$	$\Sigma \underline{c}_i$	Σn_i
tweede reeks	$\Sigma \underline{b}_i$	$\Sigma \underline{d}_i$	Σm_i
	$\Sigma \underline{r}_i$	$\Sigma \underline{s}_i$	ΣN_i

De hypothese $H_0 : p = p'$ toetst men dan als aangegeven in 1.1.

2. In plaats van de toetsingsgrootheid:

$$\underline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \left(\underline{a}_i - \frac{n_i r_i}{N_i} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i^2 (N_i - 1)}}}$$

kan men ook nemen:

$$\underline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\underline{a}_i N_i - n_i r_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i - 1}}} \qquad \text{of} \qquad \underline{z} = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{i=1}^{l} \frac{\underline{a}_i N_i - n_i r_i}{\sqrt{\frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i - 1}}}.$$

Deze twee toetsingsgrootheden zijn beide, onder de hypothese H_0, bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde nul en spreiding 1.

Het verschil tussen de drie methoden is dat men bij gebruik van $\underline{z}$, als de aantallen waarnemingen der groepen verschillen, de groepen met kleine aantallen relatief zwaarder meetelt dan bij gebruik van $\underline{y}$, waarbij de groepen met grote N_i veel zwaarder meewegen dan die met kleine N_i, zwaarder ook dan bij gebruik van $\underline{x}$ het geval is. De grootheid $\underline{x}$ houdt in zekere zin het midden tussen deze twee mogelijkheden. Zijn alle N_i gelijk, dan zijn de grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ identiek.

Voorbeeld 3.

In het in 1.2.1. genoemde voorbeeld, waarin het aantal groepen 2 bedraagt, gebruiken wij de toetsingsgrootheid $\underline{x}$.

We vinden hier:

$$a_1 - \frac{n_1 r_1}{N_1} = +\ 2{,}40$$

$$a_2 - \frac{n_2 r_2}{N_2} = -\ 0{,}57$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{2}\left(a_i - \frac{n_i r_i}{N_i}\right) = +\ 1{,}83} \quad +$$

$$\frac{n_1 m_1 r_1 s_1}{N_1^2\,(N_1 - 1)} = 3{,}92$$

$$\frac{n_2 m_2 r_2 s_2}{N_2^2\,(N_2 - 1)} = 3{,}51$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{2} \frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i^2\,(N_i - 1)} = 7{,}43} \quad +$$

dus $x = +\ \frac{1{,}83}{2{,}73} = +\ 0{,}67.$

De overschrijdingskans wordt: $k = 2 \times 0{,}2514 = 0{,}50$, dus de hypothese H_0 wordt niet verworpen.

2.1. Het toetsen van de hypothese $p = p_0$

2.1.1. Inleiding

We beschouwen een reeks van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment één der mogelijke uitkomsten A of $\overline{A}$ heeft. Geven we het aantal malen A aan met $\underline{n}_1$ dan kan $\underline{n}_1$ de waarden 0, 1, 2, . . ., n aannemen, waarbij n het aantal experimenten is.

Indien bij ieder experiment de kans op A gelijk is aan p dan wordt de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{n}_1$ gegeven door:

$$P\,[\underline{n}_1 = n_1] = \binom{n}{n_1} p^{n_1}\, q^{n-n_1} \qquad (q = 1 - p). \tag{4}$$

Deze verdeling wordt de *binominale verdeling* of verdeling van B e r n o u l l i genoemd.

De hypothese die we willen toetsen is:

$$H_0 \,:\, p = p_0.$$

2.1.2. De toetsingsmethode

Als toetsingsgrootheid gebruiken we de grootheid $\underline{n}_1$. De waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{n}_1$ onder de hypothese H_0 wordt gegeven door:

$$P[\underline{n}_1 = n_1 \mid H_0] = \binom{n}{n_1} p_0^{n_1} q_0^{n-n_1} \quad (q_0 = 1 - p_0). \tag{5}$$

Tabellen der binomiale verdeling zijn te vinden in [5] ($n = 2\ (1)\ 49$ en $p_0 = 0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}50$) en [6] ($n = 2(1)\ 200$ en $p_0 = 0{,}5$).

Voorbeeld 4.

In figuur 2 en tabel VII vinden we een voorbeeld van de binomiale verdeling voor $n = 10$ en $p_0 = 0{,}3$.

TABEL VII

n_1	$\binom{n}{n_1} p_0^{n_1} q_0^{n-n_1}$	n_1	$\binom{n}{n_1} p_0^{n_1} q_0^{n-n_1}$
0	0,0282	6	0,0368
1	0,1211	7	0,0090
2	0,2335	8	0,0014
3	0,2668	9	0,0001
4	0,2001	10	0,0000
5	0,1029		

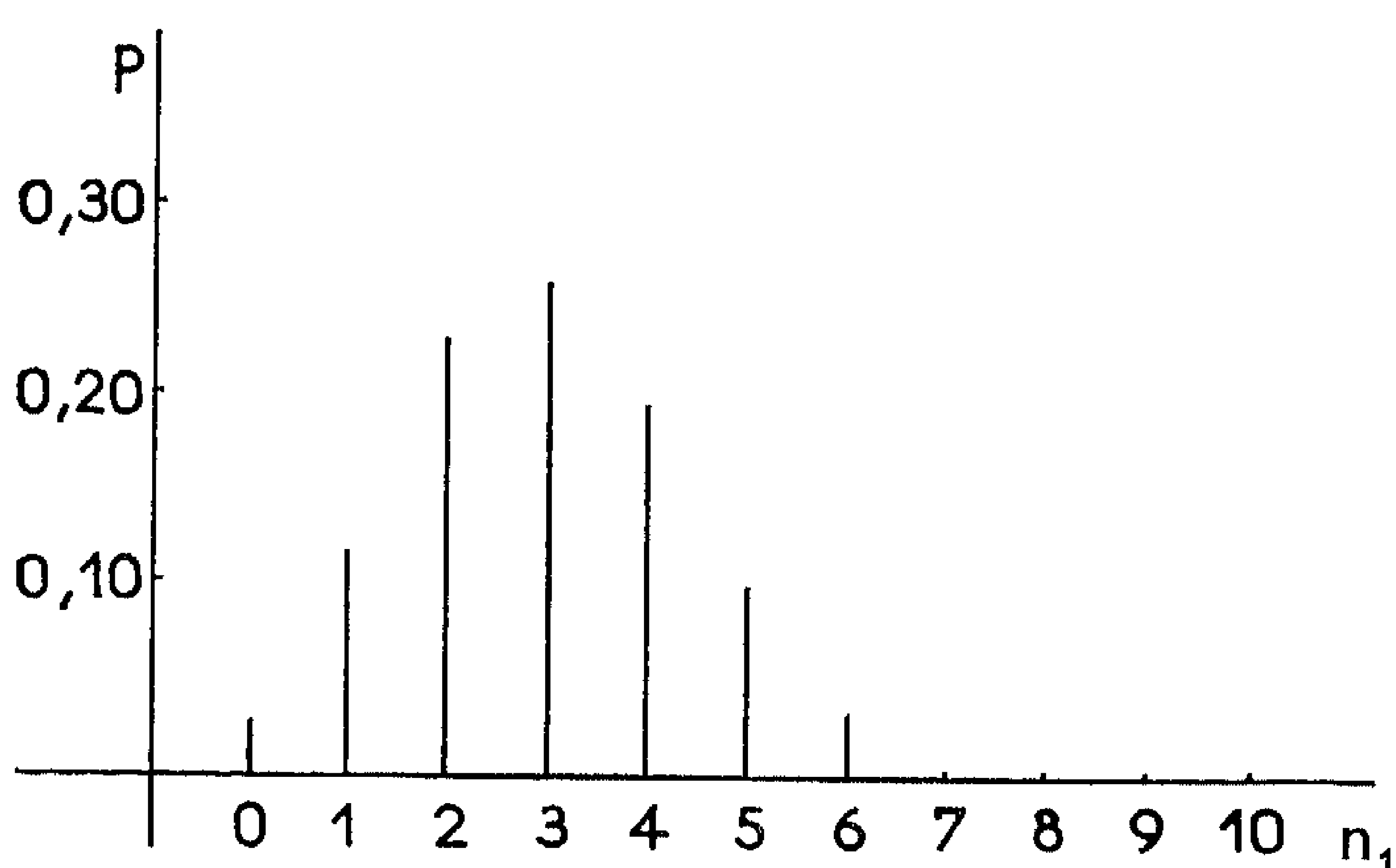

Fig. 2. $P[\underline{n}_1 = n_1]$ $\quad n = 10,\ p_0 = 0{,}3,\ q_0 = 1 - p_0.$

Het *gemiddelde* en de *variantie* (spreidingskwadraat) van $\underline{n}_1$ worden gegeven door:

$$\varepsilon\ (\underline{n}_1 \mid H_0) = np_0, \tag{6}$$

$$\sigma^2\ (\underline{n}_1 \mid H_0) = np_0q_0. \tag{7}$$

De rechtséénzijdige kritieke zone Z_r (welke men gebruikt als men als alternatieve mogelijkheden naast $p = p_0$ beschouwt: $p > p_0$) bestaat uitsluitend uit grote waarden van $\underline{n}_1$; de linkséénzijdige Z_l uitsluitend uit kleine waarden van $\underline{n}_1$. De rechtséénzijdige overschrijdingskans is de som van de waarschijnlijkheden van die waarden van $\underline{n}_1$, die niet kleiner zijn dan de gevonden waarde van n_1. De linkséénzijdige overschrijdingskans is de som van de waarschijnlijkheden van die waarden van $\underline{n}_1$, die niet groter zijn dan de gevonden waarde van $\underline{\ }_1$.

In *voorbeeld 4* bestaat de rechtséénzijdige kritieke zone Z_r (met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05) uit de waarden $n_1 = 6$; 7; 8; 9 en 10. De kans α' dat $\underline{n}_1$ in Z_r valt is, onder de hypothese H_0 ($p = 0{,}3$) (zie tabel VII) gelijk aan:

$$\alpha' = 0{,}0368 + 0{,}0090 + 0{,}0014 + 0{,}0001 = 0{,}0483.$$

De linkséénzijdige kritieke zone Z_l (met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05) bestaat uit de waarde $n_1 = 0$. Hier wordt $\alpha' = 0{,}0282$.

De tweezijdige kritieke zone Z' (met onbetrouwbaarheidsdrempel α) kan men nu vormen uit een rechtséénzijdige Z_r en een linkséénzijdige Z_l, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{1}{2}\alpha$. De overschrijdingskans wordt nu gedefiniëerd als tweemaal de éénzijdige overschrijdingskans (en wel moet hierbij de kleinste der twee éénzijdige overschrijdingskansen genomen worden). Men kan de tweezijdige kritieke zone echter ook vormen als is aangegeven in 1.1.2. (Deze kritieke zone zullen we aangeven met Z). We zoeken dan de waarden van $\underline{n}_1$ met de kleinste waarschijnlijkheden bij elkaar totdat de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert. De tweezijdige overschrijdingskans is de som van alle waarschijnlijkheden die niet groter zijn dan de waarschijnlijkheid van de gevonden waarde van $\underline{n}_1$ [1]).

---

1) Een kritieke zone van het type van Z', dus met hoogstens $\frac{1}{2}\,\alpha$ aan beide kanten, kan ook gebruikt worden voor de tweezijdige toets van de hypothese $p = p'$ (zie 1.1.2.). De reden, dat deze methode daar niet en hier wel beschreven is, is, dat wij de kritieke zone Z in het algemeen prefereren. Deze leidt echter bij het bepalen van een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval (zie 2.2.) van een onbekende kans tot complicaties, die met behulp van Z' vermeden kunnen worden. Dit deed zich bij 1.1.2. niet voor.

In *voorbeeld 4* bestaat de tweezijdige kritieke zone Z' (gevormd uit een links- en een rechtséénzijdige, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,025) uit de waarden $n_1 = 7$; 8; 9 en 10. De kans α' dat $\underline{n}_1$ in Z' valt, onder de hypothese H_0, is gelijk aan:

$$\alpha' = 0{,}0090 + 0{,}0014 + 0{,}0001 = 0{,}0105.$$

De tweezijdige kritieke zone Z, gevormd door het bij elkaar zoeken van de waarden van $\underline{n}_1$ met de kleinste waarschijnlijkheden, bestaat (bij een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0{,}05$) uit de waarden $n_1 = 0$; 7; 8; 9 en 10. De kans α', dat $\underline{n}_1$ in Z valt, onder de hypothese H_0, is nu:

$$\alpha' = 0{,}0001 + 0{,}0014 + 0{,}0090 + 0{,}0282 = 0{,}0387.$$

De twee bovenomschreven tweezijdige kritieke zones vallen samen als $p_0 = \frac{1}{2}$. De waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{n}_1$ is dan nl. symmetrisch. Als $p_0 \neq \frac{1}{2}$ is zal, in het algemeen, de werkelijke onbetrouwbaarheid α' van Z dichter bij α liggen dan die van Z'.

2.1.3. Benadering voor de verdeling van $\underline{n}_1$ voor grote waarden van n

Voor grote waarden van n en als p_0 niet te ver van $\frac{1}{2}$ verwijderd is, is de grootheid $\underline{n}_1$ bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde np_0 en variantie np_0q_0 (zie formules (6) en (7)).

We passen weer (evenals in 1.1.3.) een continuïteitscorrectie toe.

De tweezijdige overschrijdingskans (die we gebruiken als zowel $p > p_0$ als $p < p_0$ als alterternatieve mogelijkheden worden beschouwd) is bij benadering gelijk aan twee maal het oppervlak van de normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 dat rechts van $\dfrac{|\,n_1 - np_0\,| - \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}}$ ligt.

Beschouwt men als alternatieve mogelijkheden naast $p = p_0$ alleen $p > p_0$ dan is de rechtséénzijdige overschrijdingskans bij benadering het oppervlak rechts van

$$\frac{n_1 - np_0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}}.$$

De linkséénzijdige overschrijdingskans is bij benadering gelijk aan het oppervlak links van

$$\frac{n_1 - np_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}}.$$

Voorbeeld 5.

In 1930 werden in Amsterdam 6848 jongens en 6374 meisjes geboren [1]). Met behulp van de boven beschreven methode kunnen we de hypothese toetsen dat de kans op een jongensgeboorte gelijk is aan de kans op een meisjesgeboorte, d.w.z. we kunnen de hypothese $H_0 : p = \frac{1}{2}$ toetsen. Als alternatieve mogelijkheden beschouwen wij, naast $p = \frac{1}{2} : p \neq \frac{1}{2}$. We toetsen dus tweezijdig. We krijgen: $n = 6848 + 6374 = 13.222$; $n_1 = 6848$ en $p_0 = \frac{1}{2}$. Dus $n_1 - np_0 = 237$ en

$$\frac{|\, n_1 - np_0 \,| - \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{2 \times 236{,}5}{\sqrt{13.222}} = 4{,}11.$$

De tweezijdige overschrijdingskans is 0,0002. De hypothese H_0 wordt dus verworpen ten gunste van de hypothese dat de kans op een jongensgeboorte groter is dan die op een meisjesgeboorte.

Voor grote waarden van n en kleine waarden van p_0 (of $1 - p_0$) benadert men de verdeling van $\underline{n}_1$ met de Poisson-verdeling met gemiddelde np_0. Voor kleine p_0 geldt bij benadering:

$$P\,[\underline{n}_1 = n_1 \mid H_0] = \frac{e^{-np_0}\,(np_0)^{n_1}}{n_1!}.$$

De rechtséénzijdige kritieke zone Z_r bestaat weer uitsluitend uit grote waarden van $\underline{n}_1$, de linkséénzijdige Z_l uitsluitend uit kleine waarden van $\underline{n}_1$.

De tweezijdige kritieke zone Z' (met onbetrouwbaarheidsdrempel α) bestaat uit een rechtséénzijdige en een linkséénzijdige ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{1}{2}\alpha$ [2]).

Tabellen der Poisson-verdeling vindt men in [7] en [8]. Een nomogram der Poisson-verdeling vindt men in [9].

Opmerking.

Bij kleine waarden van $1 - p_0 = q_0$ vervangt men n_1 door $n_2 = n - n_1$. Dan geldt bij benadering:

$$P\,[\underline{n}_2 = n_2 \mid H_0] = \frac{e^{-nq_0}\,(nq_0)^{n_2}}{n_2!}.$$

---

[1]) Zie: „De bevolking van Amsterdam", deel I, Amsterdam 1933, pag. 47.

[2]) Het in 1.1.2. gebruikte principe van het bijeenzoeken der kleinste waarschijnlijkheden leidt in dit geval zeer vaak tot éénzijdigheid en wel rechtséénzijdigheid der kritieke zone, zodat wij het gebruik hier niet kunnen aanraden.

2.2. Het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor een kans p

2.2.1. Het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval in het algemeen

Een betrouwbaarheidsinterval $\underline{I}$ voor een onbekende parameter θ (b.v. het gemiddelde van een waarschijnlijkheidsverdeling of een onbekende kans) is een interval waarvan de grenzen stochastisch zijn en dat de eigenschap bezit, behoudens een zekere onbetrouwbaarheid α, de ware waarde van θ te bevatten.

Het algemene principe ter bepaling van een betrouwbaarheidsinterval is het volgende:

Zij gegeven een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van een stochastische grootheid $\underline{x}$; θ is een onbekende parameter van de waarschijnlijkheidsverdeling van x. Zij nu T een toets voor de hypothese

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

dan is het betrouwbaarheidsinterval $\underline{I}$ de verzameling van al die waarden θ_0 die bij de toepassing van T op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ niet voor verwerping in aanmerking komen.

Is de toets T toegepast met een onbetrouwbaarheidsdrempel α dan is dit ook de onbetrouwbaarheidsdrempel van het betrouwbaarheidsinterval.

Want de kans om de juiste hypothese te verwerpen is $\leqq \alpha$. Daar het betrouwbaarheidsinterval $\underline{I}$ bestaat uit alle niet verworpen waarden θ_0, is de kans dat $\underline{I}$ de ware waarde van θ niet bevat $\leqq \alpha$.

2.2.2. Exacte bepaling van één- en tweezijdige betrouwbaarheidsintervallen voor een kans p

Onder een éénzijdig naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval voor een kans p verstaat men een betrouwbaarheidsinterval, waarvan de bovengrens stochastisch is en de ondergrens 0. Om dit betrouwbaarheidsinterval te bepalen, maken wij gebruik van de toets voor de hypothese

$$H_0 : p = p_0.$$

Dan geldt:

$$P[\underline{n}_1 = n_1 \mid H_0] = \binom{n}{n_1} p_0^{n_1} q_0^{n-n_1}.$$

We kiezen nu een linkséénzijdige kritieke zone en verwerpen H_0 dus als

$$P[\underline{n}_1 \leqq n_1 \mid H_0] = \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n}{i} p_0^{i} q_0^{n-i} \leqq \alpha$$

is.

Deze som neemt af als p_0 toeneemt; verwerpen we dus een bepaalde waarde

p_0 dan is dit ook het geval met alle p waarvoor geldt $p > p_0$. De bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval is dus de kleinste p_0 waarvoor

$$\sum_{i=0}^{n_1} \binom{n}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,n-i} \leqq \alpha$$

is, of: de kleinste p_0, waarvoor

$$\sum_{i=n_1+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,n-i} \geqq 1 - \alpha$$

is.

Onder een éénzijdig naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor een kans p verstaan we een betrouwbaarheidsinterval waarvan de ondergrens stochastisch is en de bovengrens 1. De bepaling geschiedt geheel analoog als boven, maar nu met een rechtséénzijdige kritieke zone. We verwerpen H_0 nu dus als:

$$P[\underline{n}_1 \geqq n_1 \mid H_0] = \sum_{i=n_1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,n-i} \leqq \alpha$$

is.

Deze som neemt af als p_0 afneemt; dus als een bepaalde waarde p_0 verworpen wordt is dit ook het geval met alle p waarvoor geldt $p < p_0$. De ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval is de grootste p_0, waarvoor

$$\sum_{i=n_1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,n-i} \leqq \alpha$$

is.

Voorbeeld 6.

Stel $n = 20$ en $n_1 = 6$.

We willen nu een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor p bepalen met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05. In tabel [5] vinden we

$$\sum_{i=6}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i}$$

voor $p_0 = 0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}50$.

We moeten nu de grootste p_0 bepalen waarvoor

$$\sum_{i=6}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q^{20-i} \leqq 0{,}05$$

is.

In de tabel vinden we:

$$\sum_{i=6}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i} \begin{cases} = 0{,}0369738 \text{ voor } p_0 = 0{,}13 \\ = 0{,}0506727 \text{ voor } p_0 = 0{,}14, \end{cases}$$

dus de ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval is 0,13. De ware p is dus behoudens een onbetrouwbaarheid $\leqq 0{,}05 > 0{,}13$.
Voor een naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval moeten we de kleinste p_0 zoeken waarvoor

$$\sum_{i=7}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q^{20-i} \geqq 0{,}95$$

is.
Uit de tabel zien we dat deze p_0 groter dan 0,50 is. Daarom vervangen we p_0 door q en q_0 door p $(p+q = 1)$. We krijgen dan:

$$\sum_{i=7}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i} = \sum_{i=7}^{20} \binom{20}{i} p^{20-i} q^{i} = \sum_{i=0}^{13} \binom{20}{i} p^{i} q^{20-i} =$$
$$= 1 - \sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} p^{i} q^{20-i}.$$

Gezocht wordt nu dus de grootste p waarvoor

$$\sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} p^{i} q^{20-i} \leqq 0{,}05$$

is.
De tabel geeft:

$$\sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} p^{i} q^{20-i} \begin{cases} = 0{,}0480128 \text{ voor } p = 0{,}49 \\ = 0{,}0576591 \text{ voor } p = 0{,}50, \end{cases}$$

dus $p = 1 - p_0 = 0{,}49$ of $p_0 = 0{,}51$.
Het naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid 0,05 bestaat dus uit alle p waarvoor geldt: $p < 0{,}51$.

Een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor p (met onbetrouwbaarheidsdrempel α) kunnen we nu vinden door een naar boven en een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval te bepalen, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{1}{2}\alpha$.

Dit komt er dus op neer dat we de hypothese

$$H_0 : p = p_0$$

toetsen en de in 2.1.2. gedefiniëerde kritieke zone Z' gebruiken.

Voor de bepaling van een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval kunnen we ook de kritieke zone Z gebruiken (zie 2.1.2.). De bepaling van het betrouwbaarheidsinterval geschiedt dan weer volgens het in 2.2.1. beschreven principe en is vrij bewerkelijk. Men krijgt op deze wijze echter in het algemeen een nauwer betrouwbaarheidsinterval.

Voorbeeld 7.
Stel $n = 20$ en $n_1 = 6$ (dus dezelfde gegevens als in voorbeeld 6).
We willen nu een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor p bepalen uit twee éénzijdige, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,025.
De ondergrens van dit interval is de grootste p_0, waarvoor

$$\sum_{i=6}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i} \leqq 0{,}025.$$

In tabel [5] vinden we:

$$\sum_{i=6}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i} \begin{cases} = 0{,}0175482 \text{ voor } p_0 = 0{,}11 \\ = 0{,}0260185 \text{ voor } p_0 = 0{,}12. \end{cases}$$

De ondergrens van het interval is dus 0,11.
De bovengrens is de kleinste p_0 waarvoor

$$\sum_{i=7}^{20} \binom{20}{i} p_0^{\,i}\, q_0^{\,20-i} \geqq 0{,}975$$

is.
Stellen we weer $p = 1 - p_0$ dan zoeken we de grootste p waarvoor

$$\sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} p^{i}\, q^{20-i} \leqq 0{,}025$$

is.
De tabel geeft:

$$\sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} p^{i}\, q^{20-i} \begin{cases} = 0{,}0214144 \text{ voor } p = 0{,}45 \\ = 0{,}0265129 \text{ voor } p = 0{,}46. \end{cases}$$

De bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval is dus $1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

Bepalen wij het betrouwbaarheidsinterval met behulp van de kritieke zone Z dan vinden we voor de ondergrens 0,13 en voor de bovengrens 0,53.

2.2.3. Benaderingen voor een betrouwbaarheidsinterval voor een kans *p*

Voor grote waarden van n en als p niet te ver van $\frac{1}{2}$ verwijderd is, maken wij gebruik van de normale benadering van de verdeling van $\underline{n}_1$.

Een betrouwbaarheidsinterval bestaat uit alle niet verworpen waarden van

p_0; dus uit alle p_0, waarvoor (bij gegeven n en n_1) de overschrijdingskans $> \alpha$ is.

Voor de bepaling van een naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval kiezen we een linker kritieke zone. De linksééenzijdige overschrijdingskans wordt bepaald door

$$\frac{n_1 - np_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}}.$$

Dus de bovengrens van het naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval (met onbetrouwbaarheid α) is die p_0 waarvoor

$$\frac{n_1 - np_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}} = -\xi_\alpha,$$

waarin ξ_α gevonden wordt uit de normale verdeling:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \alpha.$$

De ondergrens van het naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval is die p_0, waarvoor

$$\frac{n_1 - np_0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{np_0q_0}} = +\xi_\alpha.$$

Het tweezijdig betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α wordt hier gevonden uit een naar boven en een naar beneden begrensd interval, ieder met onbetrouwbaarheid $\frac{1}{2}\alpha$.

Nomogrammen voor de bepaling van deze grenzen, waarbij deze direct afgelezen kunnen worden, zonder dat berekeningen nodig zijn, zijn o.a. te vinden in [10] (α = 0,20; 0,10; 0,05 en 0,01) en in [11] (α = 0,05 en 0,01).

Voor grote waarden van n en kleine p (of $1 - p$) maken we gebruik van de Poisson-benadering voor de verdeling van $\underline{n}_1$.

Bij kleine p vinden we de bovengrens van het naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval als de kleinste p_0, waarvoor

$$\sum_{i=0}^{n_1} \frac{e^{-np_0}\,(np_0)^i}{i!} \leqq \alpha$$

is.

De ondergrens van het naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval is de grootste p_0, waarvoor

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} \frac{e^{-np_0}\,(np_0)^i}{i!} \geqq 1-\alpha$$

is.

Het tweezijdig betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt weer gevonden uit een naar boven en een naar beneden begrensd interval, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{1}{2}\alpha$.

Voor $n_1 \leqq 10$ en α (éénzijdig) $= 0{,}005$; $0{,}025$; $0{,}05$ en $0{,}10$ kan men in het geval van de Poisson-benadering de grenzen van het interval afleiden uit tabel VIII.

TABEL VIII. *Betrouwbaarheidsgrenzen voor np voor* $n_1 \leqq 10$

α	0,005		0,025		0,05		0,10	
n_1	ben.	boven	ben.	boven	ben.	boven	ben.	boven
0	0,0	5,3	0,0	3,7	0,0	3,0	0,0	2,3
1	0,005	7,4	0,025	5,6	0,05	4,7	0,11	3,9
2	0,1	9,3	0,2	7,2	0,4	6,3	0,5	5,3
3	0,3	11,0	0,6	8,8	0,8	7,8	1,1	6,7
4	0,6	12,6	1,0	10,2	1,4	9,2	1,7	8,0
5	1,0	14,1	1,6	11,7	2,0	10,5	2,4	9,3
6	1,5	15,6	2,2	13,1	2,6	11,8	3,1	10,5
7	2,0	17,1	2,8	14,4	3,3	13,1	3,9	11,8
8	2,5	18,5	3,4	15,8	4,0	14,4	4,7	13,0
9	3,1	20,0	4,0	17,1	4,7	15,7	5,4	14,2
10	3,7	21,3	4,7	18,4	5,4	17,0	6,2	15,4

Deze tabel is samengesteld met behulp van de tabellen [12] en [13].

Voorbeeld 8.

Een handelaar koopt van een fabrikant een grote partij goederen en keurt hieruit een steekproef van 100 stuks. Hieronder blijken zes defecte exemplaren te zijn. De vraag is nu of deze handelaar op grond hiervan kan protesteren als de fabrikant gegarandeerd heeft dat de fractie defecten in de partij hoogstens 0,02 is.

De handelaar wenst slechts een kans van $^1/_{20}$ te lopen om, als de partij aan deze garantie voldoet, toch tot reclameren over te gaan. Hij wenst dus de hypothese $p \leqq 0{,}02$ te toetsen tegen de alternatieve $p > 0{,}02$. Daartoe kan hij nu uit tabel VIII een éénzijdig, naar onderen begrensd, betrouwbaarheidsinterval voor p bepalen. Bevat dit de waarde 0,02 wel, dan kan hij deze niet verwerpen ten gunste van grotere waarden, maar bevat het 0,02 niet, dan besluit hij tot reclameren.

Voor $\alpha = 0{,}05$ (éénzijdig) en $n_1 = 6$ vinden wij de ondergrens 2,6 voor

np, dus (daar $n = 100$ is in dit geval) 0,026 voor p. Met andere woorden, de conclusie is

$$p \geqq 0{,}026$$

behoudens een onbetrouwbaarheid 0,05, dus reclameren is geoorloofd. Het is duidelijk, dat de bovengrens voor p bij deze probleemstelling onbelangrijk is en dat de kans op reclameren bij goede partijen inderdaad hoogstens α is, daar de kans, dat het betrouwbaarheidsinterval de werkelijke waarde van p niet bevatten zal, hoogstens α is.

Literatuur:

[1] Hemelrijk, J. en H. R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950), p. 54–66.

[2] Fry, T. C., Probability and its engineering uses, D. van Nostrand Company, New York 1928, p. 439–452.

[3] Hemelrijk, J., Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, Vacantiecursus Mathematisch Centrum Amsterdam 1950, § 2, 3 en 4.

[4] Fisher, R. A., Statistical methods for research workers, London 1948, p. 96.

[5] Tables of the binomial probability distribution, U.S. Dept. of Commerce, Nat. Bureau of Standards, Washington 1949.

[6] Wijngaarden, A. van, Table of the cumulative symmetric binomial distribution, Proc. Kon. Ned. Akad. van Wet., **53** (1950).

[7] Molina, E. C., Poisson's exponential binomial limit, D. van Nostrand Company, New York, 1945.

[8] Hartley, H. O. and E. S. Pearson, Tables of the χ^2-integral and of the cumulative Poisson distribution, Biometrika **37** (1950), p. 313–325.

[9] Dodge, H. F. and H. G. Romig, Sampling inspection tables, J. Wiley and Sons, 1944, p. 44.

[10] Dixon, W. J. and F. J. Massey, Introduction to statistical analysis, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York 1951.

[11] Deming, W. E., Some theory of sampling, John Wiley and Sons, Inc., Chapman and Hall, London 1950.

[12] Richer, W. S., The concept of confidence and fiducial limits applied to the Poisson frequency distribution, Journ. Amer. Stat. Ass., **32** (1937), p. 349–357.

[13] Przyborowski, J. and H. Wilenski, Statistical principles of routine work in testing clover seed for dodder, Biometrika, **27** (1935), p. 273–293.

Errata

In een deel van de oplaag van „Statistica" 7.3 komen een aantal storende drukfouten voor. Daarom navolgende errata:

Artikel: Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen, door Constance van Eeden (p. 141—162).

blz.	*regel*	*staat*	*moet staan*
143	tabel I	a	$\underline{a}$
144	2 v.o. (boven tabel III)	a	$\underline{a}$
146	15 v.b.	a	$\underline{a}$
149	5 v.o.	$N_i \sum_{i=1} (-1) \ldots$	$\sum_{i=1} (N_i - 1) \ldots$
153	12 v.b.	waarde van $_{-1}$	waarde van $\underline{n}_1$

Artikel: Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier, door A. Benard en E. C. Bos-Levenbach (p. 163—173).

blz.	*regel*	*staat*	*moet staan*
164	1 v.b.	$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \ldots$	$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ldots$
165	12 v.o.	x	$\underline{x}$
166	9 v.o.	$F(x_i)$	$F(\underline{x}_i)$
	7 v.o.	$(\underline{x}_i, F(x_i))$	$(\underline{x}_i, F(\underline{x}_i))$
	voetnoot, 2 v.o.	x_i	$\underline{x}_i$
167	8 v.b.	$\mathcal{E} y_i$	$\mathcal{E} \underline{y}_i$
	13 v.b.	$\left(\underline{x}_i, \frac{i-i}{n-1}\right)$	$\left(\underline{x}_i, \frac{i-1}{n-1}\right)$
168	figuur 2	$\varphi_5 = y_i^*$	$\varphi_5 \approx y_i^*$
169	2 v.o.	hoofdstuk IV	hoofdstuk VI
170	10 v.b.	$\sum_{k=i}^{n-1} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k}$	$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k}$
	6 v.b.	y_i	$\underline{y}_i$
	9 v.o.	(16)	vervalt
173	3 v.b.	te liggen	te komen liggen