$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+1}\cos na = (-)^{h}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\cot\frac{a}{2} +$$

$$+ (-)^{h}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\left\{\sin\xi a-(\cot\tfrac{a}{2})\cos\xi a\right\};$$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+1}\sin na = (-)^{h}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\left\{\cos\xi a-(\cot\tfrac{a}{2})\cos\xi a\right\};$$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+2}\cos na = (-)^{h+1}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+2}\left\{\cos\xi a-(\cot\tfrac{a}{2})\sin\xi a\right\}.$$

Een jong mathemaat uit Purmerend
Vond asymptotiek soms een gebed-zonder-end.
"O Heer die daar des hemels tenten spreidt",
Sprak hij op tafel staand gewijd
En de neutrices werden getemd.

De l[illegible] is gelijk aan een veelvoud in ξ maal sin ξ a vermeerderd met een veelvoud in ξ maal cos ξ a en derhalve verwaarloosbaar in M . Dit geeft (16) en (17), terwijl (18) uit (19) volgt.

Stelling 2: Zij a een bestaanbaar getal dat geen veelvoud van 2π is. Zij $\chi(\xi)$ een gegeven functie van ξ (ξ = 0,1,...). Zij k een geheel getal ≥ 0. Zij N een neutrix die elke functie $ce^{i\xi a}\Delta^{h}\chi(\xi)$ $(0\leq h<k)$ bevat, waarin de coefficienten c willekeurige complexe getallen voorstellen. Dan is

$$(20)\quad \sum_{n=1}^{N}\chi(n)e^{ina} = -\sum_{h=0}^{k-1}\left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{h+1}\Delta^{h}\chi(1)+\left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{k}\sum_{n=1}^{N}(\Delta^{k}\chi(n))e^{ina},$$

indien de laatste geneutraliseerde som bestaat.

Het bewijs verloopt als volgt. De functie

$$g(n)=\frac{e^{i(n+1)a}}{e^{ia}-1}$$

voldoet aan de volgende identiteit, waarin ξ een willekeurig geheel getal ≥ 0 voorstelt:

$$\sum_{n=1}^{\xi}\varphi(n)e^{ina} = \sum_{n=1}^{\xi}\varphi(n)\,(g(n)-g(n-1))$$

Dat waren nog eens tijden, Jan.

$$= \varphi(\xi)\,g(\xi)-\varphi(1)\,g(0)+\sum_{n=1}^{\xi}(\Delta\varphi(n))\,g(n)$$

$$= \varphi(\xi)\,\frac{e^{i(\xi+1)a}}{e^{ia}-1}-\varphi(1)\,\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}+\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\sum_{n=1}^{\xi}(\Delta\varphi(n))e^{ina}.$$

Ria van Ouwerkerk

De eerste term in het rechterlid is verwaarloosbaar in M . Dus

$$\sum_{n=1}^{M}\varphi(n)e^{ina} = -\varphi(1)\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}+\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\sum_{n=1}^{M}(\Delta\varphi(n))\,e^{ina},$$

als de laatste som bestaat. Ur doorgaande vinden we de gevraagde betrekking.