Wie het weet mag het zeggen.

J. van de Lune
CWI, Afdeling AM

Het is niet ongebruikelijk iemand bij een bijzondere gelegenheid een 'aardigheidje' aan te bieden. Het afscheid van Jan Nuis, als directeur beheerszaken van het MC/CWI, stelt mij dan ook voor de (toch altijd wat lastige) taak een passend presentje uit te zoeken.
Er van uitgaande dat een cadeautje in ieder geval aan moet sluiten bij de smaak van de gever, ben ik er toe gekomen voor deze gelegenheid enkele 'experimentele' vraagstukken te componeren, en deze aan Jan, en allen die met hem meelezen, voor te leggen.

Zij α een reëel getal en definieer

$$S_N(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{[n\alpha]}, \ (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

waarbij voor reële x, zoals gebruikelijk, $[x]$ het (enige) gehele getal is dat voldoet aan $x-1<[x]\leqslant x$. Volgens de definitie van de entier funktie $[x]$ is $[n\alpha]$ dus altijd geheel en bijgevolg of *even* of *oneven*. Men ziet dat $S_N(\alpha)$ een soort boekhoud-machientje is dat cumulatief bijhoudt hoe het staat met de pariteit van $[n\alpha]$, $(1\leqslant n\leqslant N)$.
Als α *irrationaal* is en N groot, dan ligt het in de verwachting dat $S_N(\alpha)$ opgebouwd is uit 'ongeveer evenveel plussen als minnen', en dat $S_N(\alpha)$, als funktie van N, daarom wel 'niet al te groot' zal kunnen worden.
Laten we $\alpha=\sqrt{2}$ eens wat nader bekijken. Ik stel voor om die waarden van N te registreren en op te slaan in een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$, waarvoor $S_N(\alpha)$ of groter of kleiner is dan alle $S_M(\alpha)$ met $M<N$. Iets informeler gezegd: voor $N=a_k$ gebeurt er iets nieuws met $S_N(\alpha)$.
Voor $\alpha=\sqrt{2}$ geven we hieronder het beginstuk van de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en de bijbehorende $S_N(\alpha)$ weer.
Hierbij houden we ons aan de conventies $a_0:=0$ en $S_0:=0$.

N	1	3	8	20	49	119	288	696	1681
S_N	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5

Vrijwel niemand zal de volgende regelmaat ontgaan

$$a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1} + 1$$

en

$$S_{a_{2k-1}}(\alpha) = -k, \ S_{a_{2k}} = k$$

voor alle $k \geqslant 1$.

Gevraagd wordt aan te tonen (*of te weerleggen*) dat voor $\alpha = \sqrt{2}$ de bovenstaande recurrente betrekking voor a_k en de formules voor S_{a_k} algemeen geldig zijn voor $k \geqslant 1$.
Indien men er in slaagt de juistheid van deze formules aan te tonen dan zal men er ook wel in slagen te bewijzen dat (voor $\alpha = \sqrt{2}$)

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{S_N(\alpha)}{\log N} = \frac{1}{2\log(1+\sqrt{2})}$$

en

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S_N(\alpha)}{\log N} = \frac{-1}{2\log(1+\sqrt{2})}\ .$$

Aan hen die inmiddels de smaak te pakken hebben gekregen wordt verder gevraagd het bovenstaande (indien mogelijk) te generaliseren voor

$$\alpha := \alpha_m := \sqrt{(2m-1)^2+1}\,,\ (m \geqslant 1 \text{ en geheel}).$$

Verdergaande generalisaties worden aan de lezer over gelaten.

We gaan nog een stap verder.
Fixeer een natuurlijk getal m en definieer $\alpha := \alpha_m := \dfrac{e^{1/m}-1}{e^{1/m}+1}$.
(Merk op dat al deze α's transcendent zijn.)
In dit geval geldt voor de rij $a_1, a_2, a_3,...$ (die van m afhangt)

$$a_k = k \quad \text{voor} \quad 1 \leqslant k \leqslant 2m,$$

$$a_k = 2(4mr-m+1)a_{k-1} - a_{k-2} \text{ als } k = 4mr^2-2mr+1,\quad (r \geqslant 1)$$

en

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} \text{ als } k \neq 4mr^2 - 2mr + 1,\quad (r \geqslant 1).$$

Verder hebben we (voor alle m) de merkwaardige ongelijkheid

$$S_N(\alpha_m) \geqslant 0 \text{ voor } \textit{alle } N \geqslant 1$$

en is voor elke m het quotiënt

$$\frac{S_N(\alpha_m)}{\log N} \text{ niet begrensd als } N \to \infty.$$

Gevraagd wordt deze beweringen te bewijzen (of te weerleggen).
Verder geef ik nog ter overweging ook eens te kijken naar α's van de vorm $e^{1/m}$, $e^{-1/m}$ en $1/(e^{1/m}-1)$.
Zouden voor deze α's de rijen sign($S_N(\alpha)$), ($N = a_1, a_2, a_3, ...$) allemaal periodiek zijn met periode 4 ?
Tenslotte, wat neemt men waar bij de rijen sign($S_N(\alpha)$), ($N = a_1, a_2, a_3, ...$), als $\alpha = m(e^{1/m}-1)$?

Veel succes toegewenst !