Methodus Auferendi Omnes Terminos Intermedios ex Data Equatione*

(E.W.Tschirnhaus)

0. Ten Geleide

Wanneer iemand als Drs. J. Nuis na een lange, eervolle loopbaan op eigen initiatief ontslag aanvraagt en hem dit op de meest eervolle wijze verleend wordt, dan lijkt het ongepast bij deze gelegenheid een artikel te schrijven waarin *e*-liminatie, letterlijk: "het over de drempel zetten", centraal staat. Hierbij zou dan licht de suggestie gewekt kunnen worden dat met deze limen, drempel, die van het CWI bedoeld zou kunnen zijn. Zo is dit artikel werkelijk niet bedoeld!

Mijn keuze van het onderwerp voor deze bijdrage in dit Liber Amicorum is hierop gevallen omdat het aansluit bij de historische belangstelling van de heer Nuis en ook omdat er al geruime tijd op mijn bureau een fotocopie ligt van het in de titel vermelde artikel dat Tschirnhaus in 1683 publiceerde in het in 1682 opgerichte wetenschappelijke tijdschrift "Acta Eruditorum", een van de oudste wetenschappelijke tijdschriften, dat zijn ruime lezerskring vooral daaraan dankte dat het in een voor alle betrokkenen toegankelijke taal gesteld was: het Latijn. Over dit artikel en zijn context zal in de inleiding meer gezegd worden.

Het verzoek om een bijdrage in deze bundel was, zoals gezegd, een goede aanleiding een oud voornemen op te vatten dit artikel van Tschirnhaus te vertalen en van een korte inleiding en enkele aantekeningen te voorzien. De bijdrage die hier voor u ligt is een voorloper van een vertaling met uitgebreider commentaar en inleiding die ik t.z.t. elders hoop te publiceren. Ik hoop nu maar dat deze bescheiden bijdrage bij de scheidende functionaris in de smaak zal vallen.

Gaarne besluit ik dit "ten geleide" met het uitspreken van mijn beste wensen aan het adres van de heer Nuis en aan allen die hem nastaan. Al het goede voor een lange toekomst. Ad multos annos!

1. Inleiding

a. De Schrijver.

Ehrenfried Walther Tschirnhaus werd in 1651 geboren in het Duitse Görlitz en overleed in 1708 in Dresden. Na een gymnasiale opleiding in Duitsland liet hij zich in 1668 inschrijven als student wijsbegeerte, wiskunde en medicijnen aan de Leidse Universiteit, waar hij door de lessen van Pieter van Schooten kennis maakte met de wijsbegeerte van Descartes. Via Spinoza kwam hij in contact met de secretaris van de Royal Society Oldenburg, met Wallis en later met

* Een methode om alle tussentermen uit een gegeven vergelijking te verwijderen

Huygens en Leibniz. Vooral met de laatste correspondeerde hij zeer intensief, hoewel hij niet altijd diens adviezen opvolgde. Later zou hij met Leibniz en Huygens in conflict raken omdat hij enkele ideeën van hen als eigen vondsten publiceerde. Hoewel in hoofdzaak autodidact, en daardoor niet voldoende door anderen gecorrigeerd, gold hij als origineel en inspirerend wiskundige, die niet alleen publiceerde op het gebied van de wiskunde, maar ook op dat van de medicijnen en -als zovelen in zijn tijd- zich ook wijdde aan het slijpen van lenzen en spiegels.

b. Het Artikel.

Aan de orde is het artikel van de hand van Tschirnhaus, verschenen onder de titel: "Methodus Auferendi Omnes Terminos Intermedios ex Data Equatione" in de aflevering van mei 1683 van genoemd tijdschrift.

In het kort gezegd komt dit artikel hierop neer dat Tschirnhaus met behulp van een handig gekozen substitutie in een derde-graadsvergelijking (in x) de termen met x^2 en x elimineert. Er rest dan een binomiaalvergelijking waarvan hij dan de (reële) wortel kan bepalen.

Deze methode laat zich, zoals Tschirnhaus aantoont, gemakkelijk generaliseren tot een willekeurige vergelijking van de graad n in x, d.w.z. hij kan daaruit de termen met x^{n-1} en x^{n-2} met behulp van een geschikte substitutie verwijderen. Bij een derde-graadsvergelijking verloopt dit proces als volgt:

Uitgaande van de vergelijking $x^3 - px^2 + qx - r$, brengt hij deze d.m.v. de substitutie $x = y + \frac{1}{3}p$ in de gedaante $y^3 + Ay + B = 0$. Hieruit wordt met behulp van de substitutie $y^2 = by + z + a$ een vergelijking in z verkregen, waarin -door geschikte keuze van a en b- de termen met z^2 en z ontbreken. Tschirnhaus laat zien welke waarden a en b daartoe moeten aannemen. Ook berekent hij de waarden die a en b moeten hebben om met een dergelijke substitutie de termen van de graad 3 en 2 in een vierde-graadsvergelijking te verwijderen; dito voor vergelijkingen van de graad 5 en 6. Zijn resultaten laat hij zo maar uit de lucht vallen, maar ze zijn goed. Te optimistisch is hij echter als hij aankondigt dat men zo alle "tussentermen" kan verwijderen. Zo maakt hij de gratuite opmerking dat, indien men in een vierde-graadsvergelijking in x de drie tussentermen met x^3, x^2 en x wil verwijderen, gesteld moet worden $x^3 = cx^2 + bx + y + a$ en dat men op analoge wijze moet handelen bij vergelijkingen van willekeurige hoge graad. Deze berekeningen voert hij echter niet uit en later zou Leibniz hem er op wijzen dat deze methode leidt tot onoverkomelijke complicaties in de berekeningen.

Als voorbeeld werkt Tschirnhaus het geval van de derde-graadsvergelijking (waarin volledige reductie wèl lukt) geheel uit.

Aan het einde van het artikel laat Tschirnhaus zien hoe men ook met een andere substitutie de derde-graadsvergelijking kan oplossen en wel door in

$$y^3 - py - r = 0$$

te stellen $\quad yz = z^2 + a$

met $\quad a = \frac{1}{3}p.$

In feite is dit de transformatie die Cardano al toepaste, zoals in de bijbehorende aantekening uiteengezet wordt.
Tot slot een algemene opmerking over de Latijnse tekst.
Zoals reeds gezegd, laat Tschirnhaus veel van zijn resultaten uit de lucht vallen. Daarnaast valt een vrij groot aantal zetfouten in de formules op. Kennelijk wisten de zetters hier geen raad mee en ook heeft blijkbaar de auteur geen drukproeven gezien.
De zetfouten in de formules zijn -i.h.a. zonder nadere toelichting- in de vertaling rechtgezet.

[Hier begint de vertaling van de Latijnse tekst, pag. 204]

Een methode om alle tussentermen uit een gegeven vergelijking te verwijderen

door de heer T(schirnhaus)

Uit de "Géométrie" van de heer Descartes [1] is bekend op welke wijze steeds de tweede term uit een gegeven vergelijking verwijderd kan worden. Tot nu toe zag ik niet dat er iets in de Analyse [2] gevonden was m.b.t. het probleem hoe meerdere tussentermen verwijderd kunnen worden: integendeel, ik heb niet weinigen aangetroffen die geloofden dat dit op geen enkele manier te doen is. Daarom besloot ik hier enkele zaken die betrekking hebben op dit probleem openbaar te maken, in feite althans ten behoeve van hen die zeer bedreven zijn in de Analyse, daar het nauwelijks mogelijk is anderen met zo'n korte uiteenzetting tevreden te stellen, het overige dat op dit punt verlangd zou kunnen worden tot een ander ogenblik uitstellend.
In de eerste plaats dan vraag ik de aandacht voor het volgende: laat een of andere kubische vergelijking $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ gegeven zijn, waarin de letter x de wortels van deze vergelijking voorstelt; p, q, r staan voor bekende grootheden. Om nu de tweede term te verwijderen moet men stellen $x = y + a$. Met behulp van deze twee vergelijkingen kan dan een derde gevonden worden waarin de grootheid x ontbreekt en er ontstaat [3]:

$$\begin{array}{llll} y^3 + 3ay^2 & +3a^2y & +a^3 & \\ \quad\; -py^2 & -2pay & -pa^2 & \\ & +\;qy & +qa & \\ & & -r & =0. \end{array}$$

Laat nu de tweede term gelijk aan nul gesteld worden (het is immers onze bedoeling deze te verwijderen); er ontstaat dan $3ay^2 - py^2 = 0$. Vandaar $a = \frac{1}{3}p$. Dit betekent dat, om de tweede term in een kubische vergelijking te verwijderen, men in plaats van $x = y + a$ (zoals we zoëven deden) moet stellen $x = y + \frac{1}{3}p$. Dit is algemeen bekend en er wordt hier naar verwezen om geen

METHODUS AUFERENDI OMNES TERMInos intermedios ex data æquatione, per D. T.

EX Geometria Dn. Des Cartes notum eſt, qua ratione ſemper ſecundus terminus ex data æquatione poſſit auferri; quoad plures terminos intermedios auferendos, hactenus nihil inventum vidi in Arte Analytica: imo non paucos offendi, qui crediderunt, in nulla arte perfici poſſe. Quapropter hic quædam citra hoc negotium aperire conſtitui, verum ſaltem pro iis, qui Artis Analyticæ apprime gnari, cum aliis tam brevi explicatione vix ſatisfieri poſſit: reliqua quæ hic deſiderari poſſent alii tempori reſervans.

Primo itaque loco, ad hoc attendendum; ſit data aliqua æquatio cubica $x^3-pxx+qx-r=0$, in qua x radices hujus æquationis deſignat; p, p, r, cognitas quantitates repræſentant: ad auferendum jam ſecundum terminum ſupponatur $x=y+a$, jam ope harum duarum æquationum inveniatur tertia, ubi quantitas x abſit, & erit

$$\begin{array}{llll} y^3 & +3ayy & +aay & +a^3=0 \\ & -pyy & -2pay & -qaa \\ & & +qy & +qa \\ & & & -r \end{array}$$

Ponatur nunc ſecundus terminus æqualis nihilo (quia hunc auferre noſtra intentio) eritque $3ayy-pyy=0$. Unde $2=\frac{p}{3}$: id quod indicat, ad auferendum ſecundum terminum in æquatione Cubica, ſupponendum eſſe loco $x=y+a$ (prout modo fecimus) $x=y+\frac{p}{3}$. Hæc jam vulgata admodum ſunt, nec hic referuntur aliam ob cauſam, quam quia ſequentia admodum illuſtrant, dum hiſce bene intellectis, eo facilius, quæ modo proponam, capientur.

Sint jam ſecundo in æquatione data auferendi duo termini: dico, quod ſupponendum ſit, $xx=bx+y+a$; ſi tres, $x^3=cxx+cxx+bx+y+a$; ſi quatuor, $x^4=dx^3+cxx+bx+y+a$, atque ſic in infinitum. Vocabo autem has *æquationes aſſumtas*, ut eas diſtinguam ab æquatione, quæ ut data conſideratur. Ratio autem horum eſt: quod eadem ratione, prout ope æquationis $x=y+a$ ſaltem unicus terminus poterat auferri, quia nimirum unica ſaltem indeterminata hic exiſtit a, ſic eadem ratione ope hujus $xx=bx+y+a$, non niſi duo termini poſſunt auferri, quia duæ indeterminatæ a & b adſunt;

andere reden dan dat het vervolg duidelijk aantoont dat -wanneer deze zaken goed zijn begrepen- des te gemakkelijker datgene wat ik aanstonds zal voorleggen kan worden gevat.
Ten tweede nu dit: Stel dat in een gegeven vergelijking twee termen verwijderd moeten worden, ik zeg dat dan gesteld moet worden $x^2=bx+y+a$; indien drie termen verwijderd moeten worden dient men te stellen $x^3=cx^2+bx+y+a$; in het geval van vier termen: $x^4=dx^3+cx^2+bx+y+a$ en zo in het oneindige toe door. Ik zal deze "hulpvergelijkingen" noemen om hen te onderscheiden van de vergelijking die als gegeven beschouwd wordt.
De zin hiervan is echter dat op dezelfde wijze als waarop met behulp van de vergelijking $x=a+y$ in elk geval precies één term verwijderd kon worden -omdat immers hier slechts één variabele in het spel is- zó ook op dezelfde wijze met behulp van $x^2=bx+y+a$ slechts twee termen verwijderd kunnen worden, omdat twee variabelen a en b voorkomen;

[pag. 205]

en zo kunnen verder ook met behulp van $x^3=cx^2+bx+y+a$ niet meer dan drie termen verwijderd worden omdat er slechts drie variabelen a,b en c optreden.
Opdat met evenwel begrijpt op welke wijze dit bereikt kan worden, zal ik laten zien hoe twee termen uit een gegeven vergelijking verwijderd kunnen worden met behulp van de hulpvergelijking $x^2=bx+y+a$.
Hieruit zal immers gemakkelijk blijken hoe men in dit probleem net zover kan komen als men wil, daar overal dezelfde tactiek geldt [4].
Laat dan -en dit is het derde punt- de kubische vergelijking $x^3-px^2+qx-r=0$ gegeven zijn, waaruit de beide tussentermen verwijderd moeten worden; laat eerst de tweede term verwijderd worden (dit is weliswaar niet nodig, maar we doen dit hier in ieder geval om nodeloze ingewikkeldheid te vermijden). We krijgen dan daardoor een vergelijking van het type: $y^3-qy-r=0$.
Verder hebben we de hulpvergelijking $y^2=by+z+a$ (volgens onze tweede opmerking) en laat daaruit vervolgens een derde vergelijking ontstaan (door te werk te gaan volgens de bekende regels van de Analyse), waarbij de grootheid (nl. y, *vert.)* geheel afwezig is. We verkrijgen dan [5]:

$$\begin{array}{llll}
z^3+3az^2 & +3a^2z & + & a^3 \\
-2qz^2 & -4qaz & -2qa^2 & \\
 & +\ q^2z & +\ q^2a & \\
 & -qb^2z & -qb^2a & \\
 & +3rbz & +3rba & \\
 & & -\ \ r^2 & \\
 & & -\ \ qrb & \\
 & & +\ \ rb^3 & =0.
\end{array}$$

ſunt; ac ſic porro ope ſequentis $x^3 = cxx + bx + y + a$, non plures tribus auferri poſſunt, quia tres tantum indeterminatæ a, b, c. Ut autem intelligatur, qua ratione hac aſſequi liceat, oſtendam qua ratione duo termini ex data æquatione ope aſſumptæ $xx = bx + y + a$ ſint auferendi: hinc enim (cum ubique eadem Methodus ſit procedendi) facile conſtabit, quomodo in hac re progrediendum, quousque quis velit. Sic itaque

Tertio. Æquatio Cubica $x^3 - pxx + qx - r = 0$, ex qua auferendi duo intermedii termini: auferatur primo ſecundus terminus (id quod equidem non opus eſt, ſed ſaltem hic ob nimiam prolixitatem evitandam fit) tunc hunc obtinebimus æquationem ſimilem huic $y^3 - qy - r = 0$. Jam ſit aſſumta æquatio (juxta ſecundam annotationem) $yy = by + z + a$, & fiat porro hinc tertia æquatio (procedendo juxta cognita Analyſeos præcepta) ubi quantitas penitus abſit, & obtinebitur.

$$\begin{aligned} z^3 + 3azz &+ 5aaz + a^3 = 0 \\ -2qqzz &- 4qaz - 2qaa \\ &+ qqz + qqa \\ &- qbbz - qbba \\ &+ 3rbz + 3rba \\ &- rr \\ &- prb \\ &+ rb3 \end{aligned}$$

Ponantur jam in hac æquatione Cubica ſecundus & tertius terminus æquales o (quia hos duos intermedios auferre noſtrum propoſitum) & orientur hinc duæ æquationes $3azz - 2qzz = 0$, & $3aaz - 4qaz + qqz - qbbz + 3rbz = 0$, quarum ope duæ indeterminatæ determinantur: invenitur ſiquidem $a = \frac{2p}{3}$ & $b = \frac{3}{q}$ multiplicatum in $\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}}$. Si itaque loco a & b modo inventæ quantitates ſubſtituantur in æquatione $yy = by + z + a$, ejus ope, in æquatione data Cubica, duo termini poterunt auferri; ſeu quod eo recidit, data æquatio Cubica ope hujus æquationis $yy = by + z + a$, in aliam Cubicam æquationem transmutabitur, ubi duo intermedii termini ablati erunt. Et ſic idem proceſſus obſervatur ad tres, quatuor, quinque &c. terminos auferendos. Cum enim data æquatio ſemper ope aſſumptæ ad aliam redigatur, quæ æque altas dimenſiones obtinet veluti unico intuitu patet hic fieri) in hac tertia, tres, quatuor, quinque &c. termini poterunt æquales poni nihilo, atque hinc totidem ſemper æquationes habebimus, quot indeterminatæ adſunt, ut proinde hæ ſemper ope harum æquationum poſſint determinari.

Cc 3 Notan-

Laat nu in deze kubische vergelijking de tweede en de derde term gelijk aan nul gesteld worden (het is immers onze bedoeling deze twee tussentermen te verwijderen), dan zullen daaruit twee vergelijkingen ontstaan:

$$3az^2 - 2qz^2 = 0$$

en

$$3a^2z - 4qaz + q^2z - qb^2z + 3rbz = 0$$

met behulp waarvan de twee variabelen (nl. a en b, *vert.)* bepaald kunnen worden; men vindt dan inderdaad $a = \frac{2}{3}q$ en $b = \frac{3}{q}\{\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}\}$. Indien dan in de plaats van a en b de zojuist gevonden grootheden worden gesubstitueerd in de vergelijking $y^2 = by + z + a$, dan zullen met behulp daarvan in de gegeven kubische vergelijking twee termen verwijderd kunnen worden of -wat op hetzelfde neerkomt- de gegeven kubische vergelijking zal met behulp van de vergelijking $y^2 = by + z + a$ in een andere kubische vergelijking worden veranderd waaruit de twee tussentermen verwijderd zijn. En zo wordt dezelfde werkwijze in acht genomen als men drie, vier, vijf etc. termen moet verwijderen.
Daar echter steeds de gegeven vergelijking met behulp van de hulpvergelijking tot een andere vergelijking van dezelfde graad herleid wordt (zoals hier klaarblijkelijk met scherpzinnigheid geschiedt) zullen in deze derde vergelijking drie, vier, vijf etc. termen gelijk aan nul gesteld worden en daardoor zullen we steeds evenveel vergelijkingen als onbekenden hebben, zodat deze dus steeds met behulp van deze vergelijkingen bepaald kunnen worden.

[pag. 206]

Ten vierde moet worden opgemerkt dat hieruit soortgelijke regels kunnen worden opgesteld en de Heer Descartes geeft een bewijs m.b.t. het verwijderen van de tweede term uit een gegeven vergelijking [1], wanneer hij zegt dat om de tweede term met behulp van de vergelijking $x = y + a$ te verwijderen in een vierkants-vergelijking de grootheid a gelijkgesteld moet worden aan $\frac{1}{2}p$, in een kubische vergelijking gelijk aan $\frac{1}{3}p$ enz. Ik zeg nl. dat om twee termen te verwijderen met behulp van de vergelijking $x^2 = bx + y + a$ in de kubische vergelijking $x^3 + qx + r = 0$ [6], a gelijk gesteld moet worden aan $-\frac{2}{3}q$ en $b = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{9r^2}{4q^2} + \frac{q}{3}}$; in de bikwadratische vergelijking $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ moet gesteld worden

$$a = -\frac{2q}{4} \text{ en } b = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{9r^2}{4q^2} + \frac{2q}{4} - \frac{2s}{q}}$$

in de vergelijking $x^5 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$

Notandum quarto, quod hinc ſimiles regulæ poſſint formari, atque exhibet Dn. des Cartes pro auferendo ſecundo termino ex data æquatione, dum dicit, quod ad auferendum ſecundum terminum ope æquationis $x = y + a$ in æquatione quadratica quantitas a debeat æquari $\frac{p}{2}$; in æquatione Cubica $\frac{p}{3}$, atque ſic porro. Dico etenim, quod ad auferendos duos terminos ope æquationis $xx = bx + y + a$, in æquatione Cubica $x^3 + qx + qx + r = 0$, a debeat ſupponi æqualis $-\frac{2q}{3}$ & $b = \frac{3r}{2q} \mp \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{q}{3}}$: in æquatione quadratoquadratica, $x^4 + qxx + rx + s = 0$, debeat ſupponi $a = -\frac{2q}{4}$, & $b = \frac{3r}{2q} \mp \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{2q}{4} - \frac{2s}{q}}$: in Æquatione $x^5 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, $a = -\frac{2q}{5}$, & $b = \frac{3r}{rq} \mp \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{3q}{5} - \frac{2s}{q}}$: in æquatione denique $x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + u = 0$, $a = -\frac{2q}{6}$, & $b = \frac{3r}{2q} \mp \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{4q}{6} - \frac{2s}{q}}$ atque ſic in infinitum. Quia itaque ſimilibus delectatur, his bene intellectis, rem hanc facile ulterius promovere poterit.

Quinto, Qualis autem promotio Analyſeos hæc ſit, & quanti uſus, periti Analyſtæ facile judicabunt: Ergo unicum ſaltem hic corollarium deducam, quod nimirum hinc Methodus exhibeatur omnium æquationum cujuscunque gradus Radices analytice determinandi, idque exemplo oſtendam. Sit etenim æquatio Cubica $x^3 - pxx + qx - r = 0$, auferatur hinc ſecundus terminus ope hujus $x = \frac{y}{3} + \frac{p}{3}$ & invenietur.

$$\begin{aligned} y^3 - 3ppy &- 2p^3 = 0 \\ + 9qx &+ 9pq \\ &+ 27r. \end{aligned}$$

Ponatur jam brevitatis cauſa $3pp - 9q = q$, & $2p^3 - 9pq + 27r = r$: Unde erit $y^3 - q7 - r = 0$. Jam hæc æquatio rurſus transmutetur in aliam Cubicam, ubi duo intermedii termini abſint, idque fiet (prout ſupra indicatum) ope æquationis $yy = by + z + a$, ſi nim. quantitas a fiat æqualis $\frac{2q}{3}$ & $b = \frac{3}{q}$ in $\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}}$ (ſiat brevitatis cauſa $\sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}} = f$, & $\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}} = g$) tunc etenim invenietur hinc $z^3 = -\frac{216f^3g}{q^3}$ Unde $z = -\frac{6f}{q}\sqrt[3]{g}$ Antea erat $yy = \frac{3gy}{q} \mp \frac{2q}{3} \mp z$, cum

vero

$$a=-\frac{2q}{5} \text{ en } b=\frac{3r}{2q}\pm\sqrt{\frac{9r^2}{4q^2}+\frac{3q}{5}-\frac{2s}{q}}.$$

Tenslotte moet men in de vergelijking $x^6+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u=0$ stellen:

$$a=-\frac{2q}{6} \text{ en } b=\frac{3r}{2q}\pm\sqrt{\frac{9s^2}{4q^2}+\frac{4q}{6}-\frac{2s}{q}}$$

en zo tot in het oneindige [7].

Wie nu in deze dingen behagen schept kan, wanneer hij dat goed begrepen heeft, dit probleem gemakkelijk verder uitwerken [8].

Ten vijfde. Hoe zeer dit de Analyse vooruit brengt en van welk nut dit is zullen bekwame analytici gemakkelijk kunnen beoordelen. Derhalve zal ik hier althans slechts één toegift afleiden namelijk dat hiermee een methode kan worden gedemonstreerd om op analytische wijze de wortels te bepalen van alle vergelijkingen, van welke graad dan ook en ik zal dit aan de hand van een voorbeeld aantonen [9]. Laat namelijk de kubische vergelijking $x^3-px^2+qx-r=0$ gegeven zijn en laat hieruit de tweede term verwijderd worden met behulp van $x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}p$. Men vindt dan

$$\begin{aligned}&y^3-3p^2y-2p^3\\&\qquad+9qy+9pq\\&\qquad\qquad-27r=0.\end{aligned}$$

Laat kortheidshalve gesteld worden $3p^2-9q=q$ en $2p^3-9pq+27r=r$. Daaruit zal ontstaan $y^3-qy-r=0$.

Deze vergelijking wordt op zijn beurt omgezet in een andere vergelijking waarin de twee tussentermen ontbreken en dit zal gebeuren (zoals boven aangegeven) met behulp van de vergelijking $y^2=by+z+a$ als namelijk de grootheid a gelijk is aan $\frac{2q}{3}$ en $b=\frac{3}{q}\{\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}\}$ (laat kortheidshalve $\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}=f$ en $\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}=g$) dan wordt immers daaruit gevonden $z^3=-\frac{216f^3g}{q^3}$. Daaruit: $z=-\frac{6f}{q}\sqrt[3]{g}$. Eerder was $y^2=\frac{3gy}{q}+\frac{2}{3}q+z$; daar echter

[pag. 207]

de grootheid z zojuist gevonden is, zal gelden:

$$y=\frac{3g}{2q}+\sqrt{\frac{9g^2}{4q^2}+\frac{2q}{3}-\frac{6f}{q}\sqrt[3]{g}}.$$

Voorts werd tevoren ook gesteld $x=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y$; daar nu y reeds gevonden was, vero quantitas z modo inventa, erit $y = \frac{3g}{2q} + \sqrt{\frac{9gg}{4qq} \mp \frac{2q}{3} - \frac{6f}{q}}\ \sqrt{3\ 9}$

Porro antea quoque supponebatur $x = \frac{p}{3} \mp \frac{y}{3}$; cum itaque y jam inventa, erit tandem $x = \frac{p}{3} + \frac{g}{2q} + \sqrt{\frac{gg}{4qq} \mp \frac{2q}{27} - \frac{2f}{3q}}\ \sqrt{3}$- Radix æquationis Cubicæ $x^3 - pxx \mp qx - r = o$, quæ Radix diversa est ab expressione Cardanica, & præcipue quoque in eo, quod unicum signum radicale Cubicum includat; cum Cardanica expressio duo involvat.

Notandum vero ultimo, quod non solum ope æquationum exhibitarum annotatione secunda, duo, tres, quatuor &c. termini ex data æquatione auferri possint; sed quod variis aliis æquationibus, diversis ab his, idem quoque facere possim: imo quod omnes possibiles æquationes, ope quarum hoc negotium peragi possit, facile enumerare valeam: Ac quod proinde (per annot. 5) omnium æquationum, omnes possim, prout suo loco diffusius explicabo. Jam ad confirmationem horum, quæ modo dixi, breviter ostendam, qua ratione etiam alia expressio Radicum Cubicæ æquationis, ope ablationis terminorum possit detegi, quæ apprime respondet Cardanicæ expressioni Si etenim $y^3 - py - r = o$, supponatur $yz = zz + a$, & ope hujus inveniatur tertia, ubi y penitus abest,

$$z^6 \mp 3az + -rz^3 \mp 3aazz \mp a3 = o$$
$$\quad - qz4 \qquad\qquad - qazz$$

in hac æquatione, si termini, ubi z quatuor & duas dimensiones obtinet, ponantur æquales nihilo, invenietur $a = \frac{q}{3}$ & hinc erit $z6 - yz^3 + \frac{q3}{27} = o$: Unde $z = \sqrt{-\frac{3r}{2} \mp \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q3}{27}}}$ quæ restituta in æquatione assumpta $yz = zz + \frac{q}{3}$ exhibet $y = \sqrt{3}\ \frac{y}{3} + \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q3}{27}} + \frac{q}{3} \Big/ \sqrt{\frac{3r}{2} \mp \sqrt{\frac{rr}{4} - \frac{q3}{27}}}$, Radicem desideratam æquationis $y^3 - py - r = o$.

ISMAELIS BULLIALDI OPUS NOVUM AD Arithmeticam Infinitorum, Libris sex comprehensum.
Lutetiæ Parisiorum, in fol. 1682.

Pro-zal tenslotte

$$x=\frac{p}{3}+\frac{g}{2q}+\sqrt{\frac{g^2}{4q^2}+\frac{2q}{27}-\frac{2f}{3q}\sqrt[3]{g}}$$

de wortel zijn van de kubische vergelijking $x^3-px^2+qx-r=0$, welke wortel (in uiterlijk, *vert.)* verschilt van de door Cardano gegeven uitdrukking en wel vooral daarin dat deze slechts één derde-machtswortel bevat, terwijl de uitdrukking van Cardano er twee omvat.

Tenslotte moet worden opgemerkt dat niet alleen met behulp van de vergelijkingen die ten tonele gevoerd zijn in onze tweede aantekening, twee, drie, vier etc. termen verwijderd kunnen worden, maar dat ik ditzelfde ook met verscheidene andere vergelijkingen, verschillend van de eerstgenoemde zou kunnen doen, ja zelfs dat ik alle mogelijke vergelijkingen waarmee dit werk gedaan kan worden, gemakkelijk zou kunnen opsommen. En dat ik verder (zie opmerking 5) van alle vergelijkingen alle hulpvergelijkingen zou kunnen opnoemen, zoals ik op een daarvoor geschikte plaats uitvoeriger zal uiteenzetten.

Ter bevestiging nu van wat ik zojuist zei, zal ik in het kort aantonen hoe ook een andere uitdrukking voor de wortels van de kubische vergelijking gevonden kan worden, met behulp van het verwijderen van termen, welke (uitdrukking) bijzonder veel lijkt op de uitdrukking van Cardano. [10].

Laat nu $y^3-py-r=0$. Stel $yz=z^2+a$ en laat met behulp hiervan een derde vergelijking gevonden worden waarin y geheel en al afwezig is:

$$\begin{array}{lllll} z^6+3az^4 & -rz^3 & +3a^2z^2 & +a^3 & \\ \quad\;\; -pz^4 & & -paz^2 & & =0. \end{array}$$

Indien in deze vergelijking de termen waarin z voorkomt in de vierde en in de tweede macht gelijk aan nul gesteld worden, vindt men $a=\frac{1}{3}p$ en daardoor zal gelden:

$$z^6-rz^3+\frac{p^3}{27}=0.$$

Vandaar

$$z=\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}.$$

Substitutie daarvan in de hulpvergelijking $yz=z^2+\frac{1}{3}p$ geeft:

$$y=\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}}, \qquad [11]$$

als de gewenste wortel van de vergelijking $y^3-py-r=0$.

AANTEKENINGEN

[1] La Géométrie, Leiden, 1637, Livre III, p. 376, 377.

[2] In dit artikel wordt gesproken over "Ars Analytica". Hiermee wordt bedoeld wat wij vroeger Algebra genoemd zouden hebben, in het bijzonder het oplossen van vergelijkingen waarvan het linkerlid -na herleiding op nul- een polynoom in de onbekende is (cf. Viète's "In Artem Analyticam Isagoge" van 1591).
Vertaling door Analyse lijkt een anachronisme: de infinitesimaalrekening was er nog niet. Leibniz' baanbrekende artikel "Nova methodus de Maximis et Minimis" dateert van 1684, Newton's "Principia" was nog niet gepubliceerd. Daar wij onder Algebra nu meer verstaan dan toen bedoeld werd, kiezen wij in deze vertaling toch maar voor het woord "Analyse", vergezeld van deze toelichting.

[3] Reeds Cardano (1501-1576) paste deze tactiek toe in zijn "Ars Magna" van 1545. In feite gaat het erom dat elke wortel verminderd wordt met 1/3 van de som van de wortels, zo ontstaat een vergelijking waarin de som van de wortels, en dus de coëfficiënt van de op één na hoogste macht van de onbekende, nul is.

[4] Hier is Tschirnhaus te optimistisch. In het volgende voorbeeld lukt het hem om een kubische vergelijking te herleiden tot een binomiaalvergelijking, maar wanneer men in een vergelijking van de graad n ($n \geqslant 4$) alle tussentermen tracht te verwijderen met transformatieformules van het type $x^3 = cx^2 + bx + y + 1$ etc. dan stuit men op vergelijkingen van zo hoge graad dat het probleem bijbehorende a,b,c etc. te bepalen in het algemeen onoplosbaar is. Leibniz schreef dit al in een brief aan Tschirnhaus (litt.7).

[5] Tschirnhaus zwijgt over de wijze waarop hij tot dit resultaat gekomen is.
Cantor geeft in zijn "Vorlesungen" (III; p. 114, 115) een verklaring tegenover welke Kracht en Kreyszig (litt. 7) een andere stellen. Wij, met onze kennis van de resultante, zouden het resultaat vinden (met flink wat rekenwerk) door van de vergelijkingen

$$y^3 - qy - r = 0$$

en $$y^2 - by - z - a = 0$$

de resultante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -q & -r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -q & -r \\ 1 & -b & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b & -t \end{vmatrix}$$

(met $t = z + a$) te berekenen en die nul te stellen.
De eis dat de coëfficiënten van z^2 en z nul zijn levert dan:

$$3a - 2q = 0$$

en $\quad -qb^2+3rb+q^2-4aq+3a^2=0$.

De bekende term in de vergelijking in z wordt dan (als we stellen $a=\frac{2}{3}q$):

$$\frac{2}{27}q^3 - \frac{2}{3}b^2q^2 + brq - r^2 + rb^3.$$

We zullen deze nodig hebben in aantekening [9].

Maar zó kon Tschirnhaus het niet doen: het begrip resultante vindt men voor het eerst bij Newton in diens "Arithmetica Universalis" die in 1707 verscheen in Cambridge.

[6] In het Latijnse origineel staat een storende zetfout: $x^3+qx+qx+r=0$ moet zijn: $x^3+qx+r=0$, anders zijn de gegeven waarden voor a en b onjuist. Even tevoren heeft Tschirnhaus immers afgeleid, dat -om uit de vergelijking $y^3-qy-r=0$ met behulp van de substitutie $y^2=by+z+a$ een vergelijking in z te verkrijgen waarin de termen met z^2 en z ontbreken- men moet stellen $a=\frac{2}{3}q$ en $b=\frac{3}{q}\{\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}\}$
Voor de vergelijking $x^3+qx+r=0$ geldt dan, mutatis mutandis, $a=-\frac{2}{3}q$ en $b=\frac{3r}{2q}\pm\sqrt{\frac{9r^2}{4q^2}+\frac{q}{3}}$.

[7] Evenals in het geval dat in aantekening [4] is besproken, gaat het hier in feite om het berekenen van resultanten en wel die van de volgende paren vergelijkingen:

(1) $x^3+qx+r=0$
$\quad x^2-bx-y-a=0$

(2) $x^4+qx^2+rx+s=0$
$\quad x^2-bx-y-a=0$

(3) $x^5+qx^3+rx^2+sx+t=0$
$\quad x^2-bx-y-a=0$

(4) $x^6+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u=0$
$\quad x^2-bx-y-a=0.$

Uit deze paren moet steeds x geëlimineerd worden, waarbij a en b zodanig gekozen moeten worden dat in de ontstane vergelijking in y steeds de op één na hoogste en de op twee na hoogste macht van y ontbreken.

Geval (1) is al besproken in aantekening [5]. De andere gevallen leiden tot vergelijkingen in y, resp. van de graad 4, 5 en 6. De eis dat ook hierin de op één na hoogste en op twee na hoogste macht van y ontbreken blijkt dan te leiden tot de volgende vergelijkingen in a en b

(2) $4a+2q=0$ en $qb^2-3rb+q^2+2s+6a^2+6aq=0$
(3) $5a+2q=0$ en $qb^2-3rb+q^2+2s-10a^2-8aq=0$
(4) $6a+2q=0$ en $qb^2-3rb+q^2+2s+15a^2+10aq=0.$

Zonder deze vergelijkingen te noemen, laat Tschirnhaus de wortels ervan uit de lucht vallen met een eenvoudig: "Dico enim", d.w.z. "Ik zeg namelijk dat". Een en ander vereist flink wat rekenwerk. Zelf heb ik de berekeningen gemaakt, daarna zijn deze gecontroleerd met het programma Mathematica door de heer R.J. Schotting van de Faculteit TWI van de

TU Delft, waarvoor mijn hartelijke dank.

[8] Wanneer in deze zin inderdaad "Quia" bedoeld zou zijn, dan zou deze zin geen zin hebben. De conjectuur "Qui" lijkt mij de enige aanvaardbare en deze leidt tot de gegeven vertaling.

[9] Wanneer men in een kubische vergelijking in z de termen met z^2 en z verwijdert, krijgt men uiteraard een binomiaalvergelijking en dat is wat Tschirnhaus hier doet. Allereerst herleidt hij $x^3 - px^2 + qx - r$ d.m.v. de substitutie $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}p$ tot $y^3 - (3p^2 - 9q)y - 2p^3 + 9pq - 27r = 0$.

Nu schept hij verwarring door te stellen

$$3p^2 - 9q = q \text{ en } 2p^3 - 9pq + 27r = r.$$

Beter zou zijn $3p^2 - 9q = Q$ en $2p^3 - 9pq + 27r = R$.
In deze lijn gaan we nu verder; er ontstaat dan:

$$y^3 - Qy - R = 0. \tag{*}$$

Via de bekende substitutie

$$y^2 = by + z + a \tag{**}$$

wordt deze vergelijking omgezet in een vergelijking in z waarin de termen met z en z^2 ontbreken door een geschikte keuze van a en b.
We zagen al eerder dat dit kan gebeuren d.m.v. de resultante van (*) en (**). Ook zagen we al dat de eisen voor a en b dan zijn:

$$a = \frac{2Q}{3} \quad \text{en} \quad b = \frac{3}{Q}\left\{\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{Q^3}{27}}\right\}.$$

Berekening van deze resultante geeft dan tevens de bekende term in de vergelijking in z, zoals we zagen in aantekening [5]. In ons geval wordt deze bekende term:

$$\frac{2}{27}Q^3 - \frac{2}{3}b^2Q^3 + bRQ - R^2 + Rb^3.$$

Indien we nu stellen:

$$f = \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{Q^3}{27}} \qquad \text{en} \quad g = \frac{R}{2} + f,$$

dan geldt: $b = \frac{3g}{Q}$, $\quad R = 2g - f$ en $\frac{Q^3}{27} = g^2 - 2fg$.

Na enig rekenwerk vinden we dan voor de bekende term: $\frac{216f^3g}{Q^3}$ zodat geldt:

$$z^3 = -\frac{216f^3g}{Q^3}.$$

Ook dit resultaat laat Tschirnhaus "uit de lucht vallen", nu met de opmerking "tunc enim invenitur", d.w.z. "dan wordt immers gevonden".

Bedenkt men nog dat

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}p$$

$$y^2 = by + z + a \qquad \text{(met } a \text{ en } b \text{ als boven)}$$

$$z = -\frac{6f\sqrt[3]{g}}{Q}$$

dan vindt men inderdaad voor "de" wortel (sic!) van de oorspronkelijke vergelijking $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ de in de vertaling gegeven uitdrukking, met dien verstande dat de hierin voorkomende q **niet** de coëfficiënt van de gegeven vergelijking is, maar de door Tschirnhaus ingevoerde grootheid $3p^2 - 9q$, welke in deze verklarende aantekening is aangegeven met Q.
De correcte uitdrukking voor de bedoelde wortel is dus:

$$x = \frac{p}{3} + \frac{g}{2Q} + \sqrt{\frac{g^2}{4Q^2} + \frac{2Q}{27} - \frac{2f\sqrt[3]{g}}{3Q}}.$$

Hierin is p inderdaad de coëfficiënt van de oorspronkelijke vergelijking in x en f,g en Q zijn de hierboven ingevoerde, van p,q en r afhankelijke, grootheden. In feite komt het hierop neer dat Tschirnhaus een tweede-machtswortel (f) en een derde-machtswortel ($\sqrt[3]{g}$) adjungeert.
De formule in de Latijnse tekst bevat een drukfout: $\sqrt{3\,9}$ moet zijn: $\sqrt[3]{g}$.
De 3 staat slechts schijnbaar "onder" het wortelteken, bedoeld is nl. de derde-machtswortel uit g en een derde-machtswortel werd in die tijd aangegeven als $\sqrt{\ }_3$. Ook in de laatste formule van dit artikel moet men hierop bedacht zijn (zie ook aantekening [11]).
De uitdrukking van Cardano voor "de" wortel van een kubische vergelijking van de gedaante $y^3 - Qy - R = 0$ waar Tschirnhaus op doelt, zou luiden:

$$y = \sqrt[3]{\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{Q^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{Q^3}{27}}}$$

en deze bevat inderdaad twee derde-machtswortels.

[10] Dat de uitdrukking voor de wortels bijzonder veel lijkt op die welke Cardano daarvoor vond, is niet verbazingwekkend. De methode van Cardano bestond immers daarin dat hij, uitgaande van de vergelijking

$$y^3 - py - r = 0$$

stelde (met nader te bepalen u en v):

$$y = u + v.$$

Hierdoor krijgen we:

$$u^3 + (3uv - p)(u + v) - r = 0.$$

Cardano eiste daarbij:

$$3uv - p = 0,$$

waardoor zijn substitutie neerkomt op

$$y = u + \frac{p}{3u}.$$

In feite doet Tschirnhaus ditzelfde, want hij stelt

$$y = z + \frac{a}{z}$$

met $a = \frac{1}{3}p$.

[11] Het resultaat van Tschirnhaus is dan ook direct om te zetten in de vorm waarin Cardano de wortel(s) gaf, immers

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}} = \frac{p\sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{\frac{r^2}{4} - (\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27})}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

en daaruit volgt letterlijk de uitdrukking van Cardano voor de wortel van de kubische vergelijking.

N.B. Tschirnhaus geeft (uiteraard) slecht één oplossing: de reële.

Overigens zij opgemerkt dat juist dit laatste gedeelte wordt ontsierd door zetfouten in het Latijnse origineel. Voorts lijkt het in het eindresultaat alsof de 3 van de derde-machtswortel als coëfficiënt daaronder terecht gekomen is, maar dat is het gevolg van de toen gebruikelijke notatie voor de derde-machtswortel (zie ook aantekening [9]).

LITTERATUUR

1. Cajori, F.: A History of Mathematical Notations, La Salle, Illinois, 1974.
2. Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, Leipzig, 1901.
3. Cardano, G.: The Great Art, translated by T.R. Witmer, Cambridge Mass., 1967.
4. Dictionary of Scientific Biography, s.v. Tschirnhaus, New York, 1976.
5. Klein, F.: The Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree, translated by G.G. Morrice, New York, 1956.
6. Kline, M.: Mathematical Thought from Ancient to modern Times, New York, 1972.
7. Kracht, M. and Kreyszig, E.: E.W. von Tschirnhaus: His Role in Early Calculus and His Work and Impact on Algebra, Historia Mathematica, Vol. 17. No. 1, pp. 16-35.
8. Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, I, pp. 240, sqq, Braunschweig, 1898.

A.W. Grootendorst