

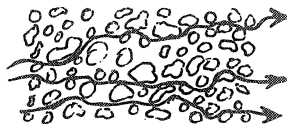
## ASYMPTOTISCHE METHODEN VOOR DE BEPALING VAN DE MATE VAN GRONDWATERVERONTREINIGING

Johan Grasman  
Vakgroep Wiskunde  
Landbouwniversiteit  
Wageningen

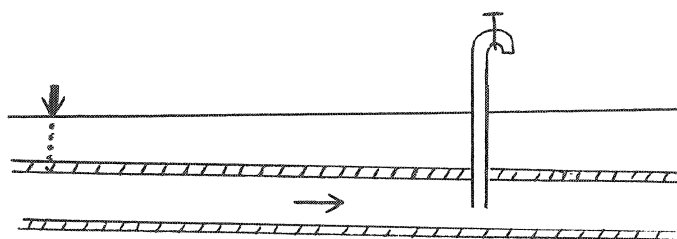
### 1. Inleiding

In deze bijdrage wordt de dispersieve stroming van grondwater berekend met behulp van asymptotische methoden. Het grondwater is opgesloten in een laag, de zogeheten aquifer. De dikte van deze laag is klein t.a.v. de horizontale schaal. Er kan daarom volstaan worden met een 2D-stromingsmodel voor dit probleem.

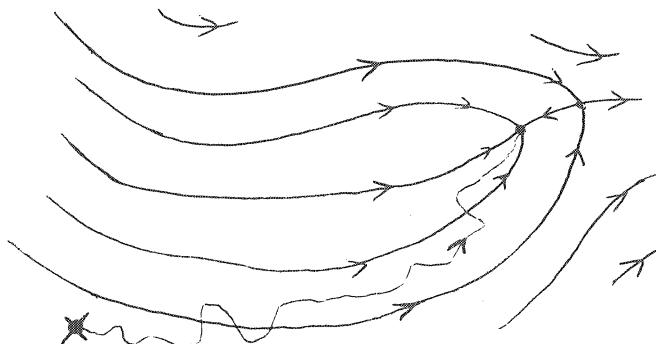
In het verleden werd met behulp van de potentiaalvergelijking het gemiddelde stromingspatroon bepaald. Dit resultaat bevat echter geen informatie over de verplaatsing van individuele waterdeeltjes en opgeloste stoffen. Door in de modelvergelijking dispersie op te nemen is het mogelijk rekening te houden met de willekeurige verspreiding van deeltjes. De korrelstructuur van de bodem is de belangrijkste bron voor dispersie, zie fig. 1. Deze zogeheten macroscopische dispersie is evenredig met de grootte van de stroomsnelheid. De dispersiekonstante hangt af van de richting: loodrecht op de stroming is de waarde kleiner dan in het verlengde, zie Bear en Verruyt (1987).



*Fig. 1 De korrelstructuur van de bodem en macroscopische dispersie.*



(a) schets van de situatie



(b) het 2-D stromingspatroon

Fig. 2 *Stroming van grondwater naar een put met bovenstrooms een bron van vervuiling*

In fig. 2 schetsen we het typische voorbeeld van (drink)water onttrekking van een aquifer. We nemen in beschouwing dat het water vervuild wordt op een plek ergens stroomopwaarts. Een verfijnde berekening van de dispersieve stroming is noodzakelijk als deze plek juist buiten het aantrekkingsgebied van de put gelegen is. Door middel van dispersie kan een klein, maar misschien schadelijk, deel van de vervuilende substantie opgepompt worden.

Met Monte Carlo methoden kan de dispersieve stroming nagebootst worden, zie Uffink (1990). Een numeriek schema gebaseerd op de stochastische differentiaalvergelijking, die gerelateerd is aan de advectie-dispersie vergelijking, kan eenvoudig geformuleerd worden.

Echter een groot aantal simulaties is nodig voor de bepaling van de mate van vervuiling vanaf iedere mogelijke bron van vervuiling. De asymptotische methode die we voorstellen gaat uit van de advection-dispersie vergelijking die gezien kan worden als de Fokker-Planck vergelijking behorende bij het probleem van de willekeurige verplaatsing van een deeltje in een stroom.

## 2. De Fokker-Planck vergelijking

De kansdichtheidsfunctie om een deeltje op positie  $(x, y)$  op tijdstip  $t$  aan te treffen is gegeven door  $p(x, y, t)$ . Voor een snelheidsveld  $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  voldoet deze functie aan

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Mp \tag{1}$$

met

$$M = \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xx} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xy} \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yy} \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right),$$

waarin

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix}$$

de dispersiematrix voorstelt. De coëfficiënten worden gegeven door

$$D_{xx} = a_T |v| + (a_L - a_T) v_x^2 |v|^{-1},$$

$$D_{xy} = (a_L - a_T) v_x v_y |v|^{-1},$$

$$D_{yy} = a_T |v| + (a_L - a_T) v_y^2 |v|^{-1}$$

met  $a_T$  en  $a_L$  resp. de transversale en longitudinale dispersiecoëfficiënt.

In de theorie van stochastische processen wordt  $M$  de voorwaartse operator genoemd, zie Gardiner (1983). De formeel geadjungeerde van  $M$  is de achterwaartse operator

$$M^* = L = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Deze achterwaartse operator is van belang in uittreeproblemen. Stel een deeltje start op  $t = 0$  in een punt  $(x, y) \in \Omega$  met  $\Omega$  een begrensde gebied en stel dat de rand  $\partial\Omega$  uit twee delen bestaat  $\partial\Omega_0$  en  $\partial\Omega_1$ . De waarschijnlijkheid  $q(x, y)$  van het uittreden uit  $\Omega$  via  $\partial\Omega_1$  volgt dan uit het Dirichlet probleem

$$Lq = 0 \text{ in } \Omega, \quad q = 1 \text{ op } \partial\Omega_1, \quad q = 0 \text{ op } \partial\Omega_0. \quad (2)$$

Het is eveneens mogelijk de verwachte aankomsttijd te berekenen, zie Van Herwaarden en Grasman (1991).

### 3. Uittreding uit een stroomgebied

In deze paragraaf onderzoeken we het probleem van het passeren van een scheidende stroomlijn door een deeltje. Stroomlijnen met verschillende bestemmingen worden gescheiden door een stroomlijn die in een stagnatiepunt eindigt, zie fig. 3. We beschouwen een willekeurig stromingspatroon in de omgeving van zo'n stroomlijn gegeven door de snelheidsvector  $(v(\rho, n), w(\rho, n))$  met  $\rho > 0$  de coördinaat langs de stroomlijn en  $n$  loodrecht erop. Het stagnatiepunt is in  $(\rho, n) = (0, 0)$ . We bepalen de kans  $q(\rho, n)$  dat een deeltje dat start in  $\Omega = \{(\rho, n) \mid \rho, n > 0\}$  de scheidende stroomlijn  $\partial\Omega_1$  zal bereiken, zie fig. 3. Daartoe introduceren we de lokale coördinaat  $\eta = n/\sqrt{a_T}$ . Als we overgaan van de  $x, y$ -coördinaten op de  $\rho, \eta$ -coördinaten en we laten vervolgens  $a_T$  en  $a_L$  naar nul gaan, dan krijgen we als asymptotische benadering

$$v(\rho, 0) \frac{\partial q}{\partial \rho} + w_n(\rho, 0) \eta \frac{\partial q}{\partial \eta} - v(\rho, 0) \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$q(\rho, 0) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} q(\rho, \eta) = 0.$$

De oplossing is van de vorm

$$q(\rho, \eta) = \operatorname{erfc}(\eta s(\rho)) \quad (3a)$$

met

$$s(\rho) = \left\{ 2 \int_0^\rho \frac{w_n(\bar{\rho}, 0)^2}{v(\bar{\rho}, 0)^2} d\bar{\rho} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3b)$$

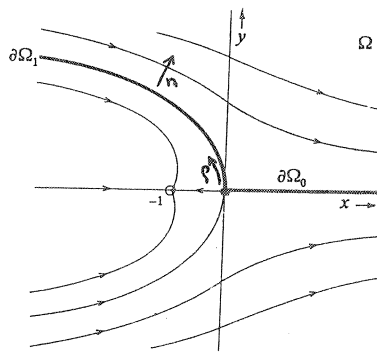


Fig. 3 Kans  $q(\rho, n)$  dat een deeltje de scheidende stroomlijn  $\partial\Omega_1$  bereikt. De kans om opgepompt te worden is bij benadering  $\frac{1}{2}q(\rho, n)$ .

Als bijzonder geval, dat geheel analytisch kan worden opgelost, beschouwen we het probleem van een put in een uniforme achtergrondstroming, zie Van der Hoek (1990). Het stroompatroon wordt gegeven door

$$v_x(x, y) = \frac{x^2 + x + y^2}{(1+x)^2 + y^2}, \quad v_y(x, y) = \frac{-y}{(1+x)^2 + y^2}.$$

De scheidende stroomlijn  $\partial\Omega_1$  (zie fig. 3) voldoet aan

$$x = -1 + \frac{y}{\tan y}.$$

Een punt op  $\partial\Omega_1$  wordt bepaald door z'n  $y$ -waarde. De corresponderende  $\rho$ -waarde volgt uit

$$\rho = \int_0^y \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\tan y} - \frac{\bar{y}}{\sin^2 \bar{y}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\bar{y}.$$

Dit geeft voor (3b)

$$s(\rho) = \left\{ \frac{2}{Q(y)} \int_0^y Q(\bar{y})R(\bar{y})d\bar{y} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

met

$$Q(y) = \sin^2 y \left\{ 1 + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{\tan y} \right)^2 \right\}, \quad R(y) = \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\tan y} - \frac{y}{\sin^2 y} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

#### 4. De Monte Carlo methode

De positie  $(X(t), Y(t))$  van een deeltje, waarvoor de kansdichtheidsfunctie  $p(x, y, t)$  van par. 2 van toepassing is, voldoet aan de stochastische differentiaalvergelijking

$$dX = \left( v_x + \frac{\partial}{\partial x} D_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} D_{xy} \right) dt + \sigma_{xx} dW_L(t) + \sigma_{xy} dW_T(t),$$

$$dY = \left( v_y + \frac{\partial}{\partial x} D_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} D_{yy} \right) dt + \sigma_{yx} dW_L(t) + \sigma_{yy} dW_T(t),$$

met de diffusiematrix  $\sigma$  zodanig dat  $\sigma\sigma^T = 2D$ . De termen  $dW_L(t)$  en  $dW_T(t)$  vertegenwoordigen het stochastische element: het zijn onafhankelijke Wiener incrementen. Van deze vergelijking kan een stochastische differentievergelijking afgeleid worden. In fig. 4 geven we het resultaat voor verschillende startwaarden  $(X(0), Y(0))$  op een lijn loodrecht op de scheidende stroomlijn voor het voorbeeld van par. 3. Voor elke startwaarde is een Monte Carlo simulatie ( $N = 100$ ) uitgevoerd. Hiermee wordt een benadering gevonden voor de fractie van deeltjes die de put bereikt.

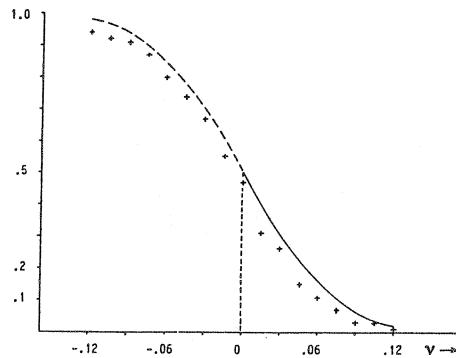


Fig. 4 Kans op het bereiken van de put bij een uniforme achtergrondstroming uit  $N = 100$  simulaties in ieder punt  $(\rho, n)$  met  $\rho = 2,958$  voor een dispersieve stroming met  $a_T = 0,001$  en  $a_L = 0,01$ . Het resultaat is aangegeven met (+). De kromme stelt de asymptotische oplossing voor.

#### Literatuur

Bear, J., en A. Verruyt (1983), *Modelling Groundwater flow and Pollution*, Reidel, Dordrecht.

Gardiner, C.W. (1983). *Handbook of Stochastic Methods for Physics Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag, Berlin.

Herwaarden, O.A. van, en J. Grasman (1991), *Dispersive groundwater flow and pollution*, *Math. Models and Meth. in Appl. Sci.* **1**, p. 61-81.

Hoek, C.J. van der (1990), *Contamination of a well in a uniform background flow*, Rapport Vakgroep Wiskunde, Landbouwniversiteit Wageningen, TN 90-03.

Uffink, G.J. van (1989), *Application of Kolmogorov's backward equation in random walk simulations of groundwater contaminant transport*, in *Contaminant Transport in Groundwater*, H.E. Kobus en Kinzelbach (red.), Balkema, Amsterdam, p. 283-289.