Zij mogen uiteraard daarbij de besliskunde niet verwaarloozen ...

Kansberekeningen en kanttekeningen bij een kantine

O.J. Boxma
CWI, Afdeling Besliskunde, Statistiek en Systeemtheorie
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

1. Inleiding

Tot de belangrijkste activiteiten van de Directeur Beheerszaken van het CWI behoren het laten verzamelen en bewerken van statistische gegevens, het mede op grond van deze gegevens beslissingen nemen, en het voortdurend bijsturen op basis van waarnemingen aan het "systeem". De naam van de afdeling *Besliskunde, Statistiek en Systeemtheorie* (BS) zou daarom bij argeloze buitenstaanders de indruk kunnen wekken dat deze afdeling de afgelopen jaren het eerste adviesorgaan van dhr. Nuis is geweest. Toch is BS niet één van de ondersteunende diensten van het CWI. Het is een wetenschappelijke afdeling, die als haar hoofdtaak ziet het verrichten van fundamenteel wetenschappelijk onderzoek, en als haar belangrijkste neventaken het overdragen van kennis en het bijdragen aan de rol van het CWI als een internationaal centrum voor wiskunde en informatica. Wel vertonen al deze taken raakvlakken met consultatie. Wiskundige consultatie is een activiteit met een rijke traditie op het CWI, niet in het minst in de twee afdelingen welke in 1988 werden verenigd in de huidige afdeling BS: *Mathematische Besliskunde en Systeemtheorie* (MB) en *Mathematische Statistiek* (MS). Tientallen malen werden MS, MB en BS geraadpleegd door grote en kleine overheidsinstellingen en industrieën. Een kleine bloemlezing van bedrijfscont(r)acten uit de afgelopen vijf jaren: verwerking van aangiften voor de vennootschapsbelasting (Ministerie van Financiën); ontwikkeling en implementatie van algoritmen voor de routering van voertuigen (Van Gend en Loos); toewijzing van vliegtuigen aan opstelplaatsen (Schiphol); wachtrijproblemen bij opslag en transport van containers (ECT); prestatie-analyse van een computernetwerk (Volmac Networks); de regeling van overbelasting van telefooncentrales (PTT); tijdreeksanalyse in verband met maximalisering van de kijkdichtheid van tv-netten (NOS); analyse van extreme waarden van waterstanden in verband met de hoogte van dijken (Rijkswaterstaat).

Het zou onjuist zijn te verwachten dat het CWI zelf ook om de haverklap een beroep doet op dit gigantische reservoir aan kennis en inzicht. Ten eerste hebben niet al te veel bezigheden op het CWI een omvang die een diepgaande wiskundige analyse ervan rechtvaardigt: het zou bijvoorbeeld lichtelijk overdreven zijn het succesvolle interactieve routeringsprogramma CAR te gebruiken voor het bepalen van de optimale route bij het rondbrengen van de post in het

CWI. Ten tweede heeft interne consultatie al snel een zweem van belangenverstrengeling. Voor zover te achterhalen valt deed het CWI één keer een beroep op de afdeling MB. Het betrof hier de meest delicate aller beslissingsproblemen in een instituut: de kamerindeling. In de eerste helft van de jaren tachtig werd een grondige herziening van de CWI-kamerindeling noodzakelijk geacht. Aangezien MB beschikte over enige lieden met ruime theoretische kennis èn praktische ervaring in toewijzings- en roosterproblemen e.d., kreeg zij de - onbetaalde - opdracht. Gevraagd werd een kamerindeling te maken die zoveel mogelijk rekening hield met alle randvoorwaarden (rokers gescheiden van niet-rokers door meer dan een rookgordijn; aan computerspelletjes verslaafden op maximale afstand van een beeldscherm, enz.). De gepresenteerde oplossing voldeed volledig aan de randvoorwaarden - tot volledige ontevredenheid van alle betrokkenen, die ijlings nieuwe randvoorwaarden bedachten. Uiteindelijk werd besloten een minder wetenschappelijke aanpak te volgen, waarbij de hulp van MB zeer goed gemist kon worden.

Het geringe succes van deze interne consultatie valt wellicht te verklaren uit een te grote belangenverstrengeling. Toch zijn natuurlijk - minder gevoelige - onderwerpen voorhanden, waarover BS haar licht zou kunnen laten schijnen. De rest van deze verhandeling is gewijd aan een onderwerp waar de belangen van het gros der CWI-ers parallel lopen: de WCW-kantine.

2. Wachtrij-analyse van de WCW-kantine

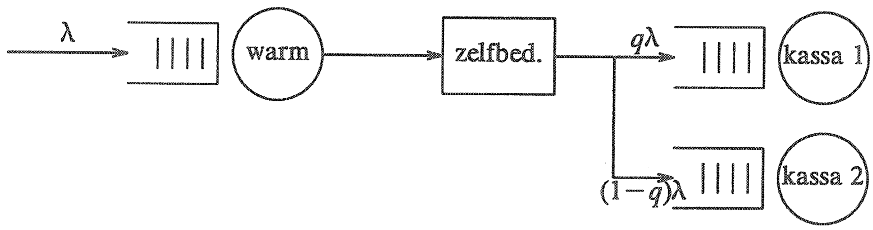
De kantine is op het moment van schrijven zodanig opgezet dat de hongerige WCW-ers tijdens lunchtijd in één grote wachtrij de kantine binnenschuifelen, waarbij zij achtereenvolgens een dienblad, bord, brood, beleg, snacks, een warme maaltijd, melk, fruit, slaatje en sauzen kunnen bemachtigen (en passant koffie of frisdranken pakkend van er tegenover geplaatste tafels). Op natuurlijke wijze leidt deze veroveringstocht tot kassa 1 en het bestek. Weliswaar is kassa 2 ook meestal open, maar dat zie je pas op het laatste moment. Dikwijls probeert een werkeloze kassière achter kassa 2 zelfs vruchteloos de aandacht te trekken van voor kassa 1 wachtende verstrooide wiskundigen, die in gedachten bezig zijn met zulke boeiende problemen als het in factoren ontbinden van de afscheidsdatum van Dhr. Nuis (22111991) - of met de vraag hoe wachtrijtheorie zou kunnen worden gebruikt bij het terugdringen van de wachttijden in de kantine. Deze wachttijden zijn dikwijls aanzienlijk, zodat sommige WCW-ers de buik vol hebben van het met een lege maag in de rij staan.

Een voor de hand liggende overweging is, te differentiëren tussen verschillende typen klanten, zoals tussen degenen die een warme maaltijd wensen en degenen die bijvoorbeeld slechts wat melk begeren (en in de huidige opzet gedwongen zijn de hele route mee te hobbelen, of asociaal te lijken door de rij te passeren, melk te pakken en naar de vrije kassa 2 te stappen). Het zou in het kantinebestek te ver voeren een volledige theorie op te dissen; om de eetlust van de lezer op te wekken volgt hieronder een simpele wachtrij-analyse van de huidige situatie en van twee alternatieve mogelijkheden. Allereerst enige veronderstellingen betreffende aankomstproces, bedieningsproces en klantenroutering.

(i) *Aankomstproces:*
Kantineklanten worden verdeeld in twee typen. Type-1 = warme-maaltijdeter; type-2 = de rest. Beide typen arriveren volgens onafhankelijke Poissonprocessen, met intensiteiten $\lambda_1 = 1$ klant per minuut en $\lambda_2 = 3$ klanten per minuut. De totale aankomstintensiteit is $\lambda = 4$ klanten per minuut.

(ii) *Bedieningsproces:*
(a) Er is één bediende voor de warme maaltijden. Bedieningstijden voor warme maaltijden zijn onafhankelijke, negatief exponentieel verdeelde stochastische variabelen met gemiddelde $w = 0.8$ minuut. Merk op dat alle klanten dit "bedieningscentrum" passeren, waarbij slechts één op de vier ook echt een bediening vraagt.
(b) Er is zelfbediening voor brood, beleg, melk etc. In wachtrijtermen kan het verwerven van deze delicatessen worden gezien als het passeren van een bedieningscentrum met oneindig veel bedienden en constante bedieningstijd. De bedieningstijd is $z = 0.5$ minuut. De onderstaande analyse zou overigens niet worden aangetast indien z als stochastische variabele zou worden beschouwd met gemiddelde 0.5.
(c) Er zijn twee kassières. Bij beide kassa's zijn de bedieningstijden onafhankelijke, negatief exponentieel verdeelde stochastische variabelen met gemiddelde $\kappa = 0.2$ minuut.

(iii) *Klantenroutering:*
Voor het gemak wordt ervan uitgegaan dat alle zelfbedieningsartikelen nà de warme maaltijden zijn gesitueerd; voor de berekeningen maakt deze afwijking van de werkelijkheid niets uit. Klanten die geen warme maaltijd wensen dringen niet voor, doch blijven watertandend en tandenknarsend in de rij wachten. Wanneer klanten eenmaal voorbij de laatste zelfbediening zijn doorgedrongen, kiezen ze kassa 1 met kans $q = 5/8$ en kassa 2 met kans $1 - q = 3/8$. Een schematische weergave van het resulterende netwerk van bedieningscentra staat in figuur 1.



Figuur 1: De huidige situatie

Kopstukken 1
Alvorens over te gaan tot de analyse van het wachtrijmodel doen we eerst een schuchtere poging iets lezenswaardigs te melden over de Franse wiskundige Siméon Poisson (1781-1840), die zijn naam leende aan het eerder genoemde belangrijkste proces in de wachtrijtheorie: het Poissonproces. Dit als blijk van waardering voor de buitengewoon interessante serie geschiedkundige "Kopstukken" van Dhr. Nuis in het *Mededelingenblad Personeel CWI.*
Poisson hoorde met o.a. Fourier en Cauchy tot de leidende wiskundigen wier namen met de eerste decennia van de in 1794 opgerichte Ecole Polytechnique zijn verbonden. Deze oprichting kwam voort uit een sterke behoefte aan een gecentraliseerde militaire ingenieursopleiding in de woelige jaren rond de Franse Revolutie [5]. Aan de Ecole Polytechnique werd niet alleen het onderwijs maar ook het wetenschappelijk onderzoek krachtig ondersteund. Enige van de beste leerboeken uit de eerste periode van de 19de eeuw zijn uit het onderwijs aan de Ecole Polytechnique voortgekomen, zoals *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* van Lacroix, *Géometrie descriptive* van de eerste directeur Monge, *Théorie analytique de la chaleur* van Fourier en *Traité de mécanique* van Poisson. Deze laatste twee titels illustreren de grote belangstelling van Fourier en Poisson voor de toepassing van de wiskunde op natuur- en werktuigbouwkunde.
Poisson's naam leeft o.a. voort in de constante van Poisson in de elasticiteitsleer, de vergelijking van Poisson in de potentiaaltheorie, de sommatieformule van Poisson en de Poisson kansverdeling, geintroduceerd in zijn boek *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, precédées des règles générales du calcul des probabilités* (1837). De eerste bladzijde van dit boek bevat ook de beroemde zin "Een vraag over kansspelen, door een man van de wereld aan een ernstige Jansenist gesteld, is het begin geweest van de waarschijnlijkheidsrekening". Deze verwijzing naar de vraag die Chevalier de Méré stelde aan Pascal over het probleem hoe je de pot verdeelt als een spel tussen twee spelers voortijdig wordt afgebroken gaat weliswaar voorbij aan minstens zo belangrijke economische impulsen (o.a. samenhangend met verzekeringsproblemen); zij bevat echter in zoverre een kern van waarheid, dat de erop volgende briefwisseling tussen Fermat en Pascal een nieuwe 'standard of excellence' zette voor kansberekeningen [3].

Wachtrij-analyse van de huidige situatie
In het geval dat alle klanten in bedieningscentrum "warm" een exponentieel verdeelde bedieningstijd hebben, is het vertrekproces uit "warm" een Poissonproces en is het totale wachtrijnetwerk een zg. Jackson netwerk [1], waarvoor een exacte analyse mogelijk is. Het feit dat slechts een kwart van de klanten een warme maaltijd kiest bederft een dergelijke exacte analyse. We

kunnen nog slechts "warm" exact analyseren; "warm" gedraagt zich als een $M/G/1$ wachtrij met als bedieningstijden stochastische variabelen welke een gewogen som zijn van een negatief exponentieel verdeelde grootheid met gemiddelde 0.8, en een grootheid die identiek nul is. Het is voor ons doel een voldoend goede benadering, te veronderstellen dat het vertrekproces uit "warm" toch een Poissonproces is. Dan is "zelfbediening" te beschouwen als een zg. $M/G/\infty$ systeem, dat ook weer een Poissonproces als vertrekproces heeft - waardoor op hun beurt de twee kassa's als zg. M/G/1 wachtrijen zijn te beschouwen. De theorie betreffende de $M/G/1$ wachtrij [2, p. 256] geeft nu de gemiddelde verblijftijd, EV, in minuten van een willekeurige klant in het netwerk van bedieningscentra (de tijd van aankomst in de kantine tot en met het passeren van de kassa's):

$$EV = \frac{\lambda_1 w^2}{1-\lambda_1 w} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} w 4.2571428\ldots . \tag{1}$$

De consultatie-ervaring leert dat de klant veel belang hecht aan een voldoend aantal decimalen; het zij hier voldoende op te merken dat het patroon van de laatste zes cijfers van dit getal 4 9/35 zich buitengewoon hardnekkig lijkt te herhalen. Merk op dat "warm" de flessehals van de kantine vormt, met een gemiddelde verblijftijd van 3.4 minuut (de som van de eerste twee termen). Merk ook op dat de gemiddelde verblijftijd van type-1 klanten en van type-2 klanten respectievelijk gelijk is aan 4.8571428... en 4.0571428... ; het verschil, ruwweg afgerond op 0.8, is de gemiddelde bedieningstijd van warme-maaltijdeters.

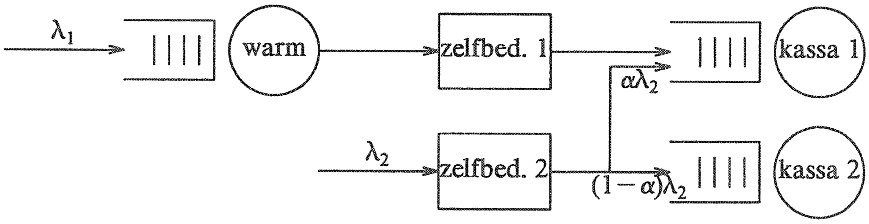
De formule van Little [4] leert dat het gemiddeld aantal klanten EL in het netwerk gegeven wordt door $EL = \lambda EV$. Derhalve is $EL = 17.0285714\ldots$; de laatste zes cijfers zijn niet toevalligerwijs een cyclische permutatie van de laatste zes vermelde cijfers van de gemiddelde verblijftijd.

> *Kopstukken 2*
> John D.C. Little bewees in 1961 [4] dat onder zeer algemene voorwaarden het verband $EL = \lambda EV$ bestaat tussen gemiddeld aantal klanten en gemiddelde verblijftijd in een bedieningssysteem met aankomstintensiteit λ van de klanten. Zijn publikatie is wellicht het meest geciteerde artikel uit de wachtrijliteratuur. Het voldoet dan ook aan de drie belangrijkste criteria voor een veelvuldige citatie: het resultaat is intuitief aansprekend maar net niet helemaal triviaal; het gegeven bewijs is niet waterdicht; de gegeven voorwaarden kunnen op diverse interessante manieren worden gegeneraliseerd.

Wachtrij-analyse van alternatief I

Laten we veronderstellen dat de lay-out van de kantine zodanig kan worden veranderd, dat er aparte rijen zijn voor de type-1 en de type-2 klanten, waarbij beide rijen toegang hebben tot één eigen zelfbedieningsbuffet. Veronderstel dat beide typen nog steeds $z = 0.5$ minuut nodig hebben voor de zelfbediening.

Veronderstel verder dat alle type-1 klanten naar kassa 1 gaan, en dat een fractie α van de type-2 klanten ook kassa 1 kiest. Zie figuur 2.



Figuur 2: Alternatief I

De gemidelde verblijftijd EV_i van type-i klanten, $i=1,2$, wordt nu gegeven door:

$$EV_1 = \frac{w}{1-\lambda_1 w} \frac{\kappa}{1-(\lambda_1+\alpha\lambda_2)\kappa}\,, \tag{2}$$

$$EV_2 = z + \alpha\frac{\kappa}{1-(\lambda_1+\alpha\lambda_2)\kappa}(1-\alpha)\frac{\kappa}{1-(1-\alpha)\lambda_2\kappa}\,. \tag{3}$$

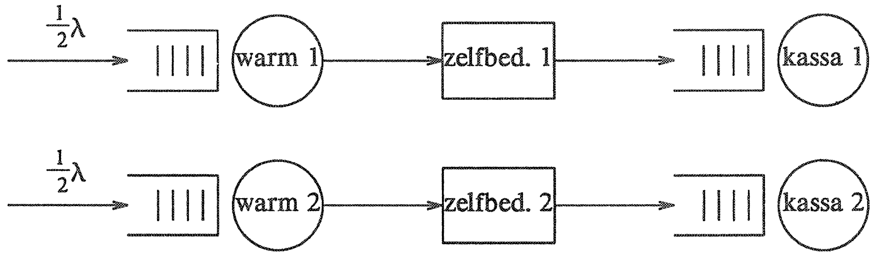
In het eenvoudige geval dat $\alpha=0$ is $EV_1=4.75$, $EV_2=1.0$, en de totale gemiddelde verblijftijd van een willekeurige klant bedraagt $EV^{(I)}=EV_1\ \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)EV_2\ \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)1.9375$. Vergeleken met de huidige situatie krijgen de warme-maaltijdklanten slechts een iets kortere verblijftijd, maar de andere klanten gaan er zoveel op vooruit dat een willekeurige klant gemiddeld bijna $2\frac{1}{2}$ minuut korter in het systeem hoeft door te brengen. $EV^{(I)}$ wordt geminimaliseerd door de keuze $\alpha=(\lambda_2-\lambda_1)/2\lambda_2=1/3$. Nu is $EV_1=4.8333...$, $EV_2=0.8333...$ en $EV^{(I)}=1.8333...$ (110 seconden).

Wachtrij-analyse van alternatief II

Laten we veronderstellen dat de lay-out van de kantine kan worden gewijzigd tot een volledig symmetrische opstelling met twee lijnen. In elk der lijnen is derhalve precies hetzelfde voedselaanbod, inclusief warme maaltijd. We nemen aan dat elk der klanten met kans 0.5 één der rijen kiest (het kiezen van de kortste rij leidt tot een kleine verkorting van de wachttijden die voor ons niet opweegt tegen de nadelen van een veel complexere analyse). Zie figuur 3.
De gemiddelde verblijftijd $EV^{(II)}$ van een willekeurige klant wordt nu, analoog aan formule (1), gegeven door

$$EV^{(II)} = \frac{\lambda_1 w^2}{2(1-\frac{1}{2}\lambda_1 w)} \tag{4}$$

Alternatief II leidt tot een 16 seconden kortere gemiddelde verblijftijd ten opzichte van alternatief I, maar vergt wel een beduidend grotere investering.



Figuur 3: Alternatief II

In het voorgaande is een eenvoudige analyse gegeven van het wachtrij- en bedieningsproces in de WCW-kantine. De gekozen parameterwaarden ontspruiten aan de verbeelding van de auteur, die ervan af heeft gezien de statistici van zijn afdeling hierbij te consulteren, en die eveneens verzuimd heeft de systeemtheoretici te vragen naar mogelijkheden betreffende een dynamische regeling. De opgediste analyse dient naar ieders smaak te worden voorzien van de nodige korrels zout. De voortreffelijke kwaliteit van het gebodene in de kantine is in dit verhaal onderbelicht gebleven, maar hier geldt net als voor Jan Nuis: goede wijn behoeft geen krans!

REFERENTIES

1. F. BASKETT, K.M. CHANDY, R.R. MUNTZ, F. PALACIOS (1975). *Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers,* J. ACM 22, 248-260.
2. J.W. COHEN (1982). *The Single Server Queue* (North-Holland, Amsterdam).
3. I. HACKING (1975). *The Emergence of Probability* (Cambridge University Press, Cambridge).
4. J.D.C. LITTLE (1961). *A proof for the queuing formula:* $L = \lambda W$, Operations Research 9, 383-387.
5. D.J. STRUIK (1990). *Geschiedenis van de Wiskunde* (Het Spectrum, Utrecht; herziene en uitgebreide druk).

Erratalijst bij het artikel van O.J. Boxma in "Jan en Alleman" (pp. 13-19)
Bij een redactionele bewerking van de door de auteur geleverde file zijn helaas alle genummerde formules verminkt. Hieronder staan de correcte formules.

$$EV = \frac{\lambda_1 w^2}{1-\lambda_1 w} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} w + z + q\frac{\kappa}{1-\lambda q\kappa} + (1-q)\frac{\kappa}{1-\lambda(1-q)\kappa} = 4.2571428\ldots . \tag{1}$$

$$EV_1 = \frac{w}{1-\lambda_1 w} + z + \frac{\kappa}{1-(\lambda_1+\alpha\lambda_2)\kappa} , \tag{2}$$

$$EV_2 = z + \alpha\frac{\kappa}{1-(\lambda_1+\alpha\lambda_2)\kappa} + (1-\alpha)\frac{\kappa}{1-(1-\alpha)\lambda_2\kappa} . \tag{3}$$

$$EV^{(II)} = \frac{\lambda_1 w^2}{2(1-\frac{1}{2}\lambda_1 w)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} w + z + \frac{\kappa}{1-\frac{1}{2}\lambda\kappa} = 1.5666\ldots . \tag{4}$$

De formule in de tekst, drie regels onder formule (3), moet luiden:

$$EV^{(I)} = EV_1\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2) + EV_2\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2) = 1.9375.$$