VERVORMING VAN LAGERVLAKKEN, II.

R 110

Rekenafdeling Mathematisch Centrum.

1 9 5 1 .

Vervorming van lagervlakken, II.

1. Inleiding.

De hiervolgende berekeningen werden uitgevoerd op verzoek van het Koninklijke Shell-Laboratorium te Delft. (Zie Uw inleidende opdracht d.d. 15 Maart 1951).

Het onderwerp betreft de elastische vormverandering van lagervlakken. Gebruik werd gemaakt van reeds verkregen resultaten , neergelegd in de volgende rapporten:

(1) De elastische vormverandering van het oppervlak van een halfruimte onder de hydrodynamische drukverdeling behorende bij een parabolische smeerfilm. (IM 524) door H. Blok en J.W. Cohen.

(2) On the elastic hydrodynamic problem of the lubrication of spur gear teeth. By H. Blok.

(3) Vervorming van lagervlakken. R 51 van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

2. Methode en omvang van de berekeningen.

De gespecificeerde opdracht luidde:

1[e] x_1 in de omgeving van $x = k$ te bepalen zodanig dat

$$y''(x_1) = 0, \qquad (2,1)$$

opgave te doen van de waarden

$$y(x_1),\ y'(x_1) \text{ en } y''(x_1),$$

en de functie $F(x,x_1)$ gedefinieerd door (zie (2) formule (64)):

$$F(x,x_1) = (x-x_1)(x+x_1-2\,z_\omega) + \frac{2}{y''(x_1)}\left[y(x_1) - y(x)\right], \qquad (2,2)$$

voor het gebied $x = -2{,}0\ (0{,}1)\ 7{,}0$.

2[e]. de functie te bepalen $\gamma(G) = \frac{1+k^2}{2G} \int_{-k}^{\infty} \ln \left\{1 - G \quad (t)\right\}^{-1} dt, \qquad (2,3)$

waarin

$$\varphi(t) = A.t(1+t^2)^{-2} - B+(1+t^2)^{-1} + B(\tfrac{\pi}{2} - \text{arctang.}t), \qquad (2,4)$$

$$A = 2(1+k^2) \qquad (2,5)$$

$$B = 1 - 3\,k^2 \qquad (2,6)$$

$$1 + k^2 = 1{,}225748441 \qquad (2,7)$$

en wel voor een aantal nader gekozen waarden van de parameter G en tevens voor N = 0(0,2) 12,2, waarbij het verband tussen G en N gegeven wordt door

$$N = \sqrt{24}.\ (1+k^2)^{-\frac{3}{4}}\ .G\left[\gamma(G)\right]^{\frac{3}{4}}. \tag{2,8}$$

Afzonderlijk diende berekend te worden de waarde van N voor $G = \left[\pi (1-3\ k^2)\right]^{-1}$. (Zie voor de formules (2)).

3^e. De functie y(x,G) te bepalen, gedefinieerd door

$$y(x,G) = \frac{1}{G}\int_{-k}^{\infty} \ln\left[1 - G\varphi(t)\right]^{-1} \ln\ (x-t)^2 dt, \tag{2,9}$$

voor x = k
en G die waarden, welke overeenstemmen met N = 2(2)12.

Tot slot werd nog uitgevoerd de berekening van de eerste en tweede de afgeleide naar x van de functie y(x,G) voor bovengenoemde waarde van x en G.

Voor de berekeningen werden de oneigenlijke integralen (2,3) en (2,9) omgevormd door middel van de transformatie

$$\text{arccotg}\ t = s. \tag{2,10}$$

$\varphi(t)$ gaat over in de functie p(s)

$$p(s) = -\frac{1+k^2}{4}\ \sin 4\ s + 2\ k^2 \sin 2\ s + (1-3\ k^2)s. \tag{2,11}$$

Nu is:

$$\gamma(G) = -\frac{1+k^2}{2G}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\text{arctang}\ k} \log\left[1 - G\ p(s)\right]\frac{ds}{\sin^2 s}, \tag{2,12}$$

en

$$y(x,G) = -\frac{1}{G}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\text{arctg}\ k} \log\left[1 - G\ p(s)\right]\log\left|x - \text{cotg}\ s\right|^2 \frac{ds}{\sin^2 s} \tag{2,13}$$

De integraal $\gamma(G)$ is in het punt s = 0 niet oneigenlijk, want

$$\frac{\log\left\{1-G\ p(s)\right\}^{-1}}{\sin^2 s} = \frac{8}{3}\ G\ s\left\{1 - \frac{7+9k^2}{15}s^2 \ldots\right\} \tag{2,14}$$

Voor s_o = arccotg k bevat de integrand van (2,12) een logarithmische singulariteit groot

$$-\frac{2\log(s-s_o)}{\sin^2 s_o}$$

welke moeilijkheid overwonnen is op de wijze als omschreven in (3).

De integrand in (2,13) bevat ook een logarithmische singulariteit en wel in cotg s_o = x .

Dit logarithmische karakter van de singulariteit verdwijnt bij berekening van de afgeleiden naar x.

Gemakkelijk leidt men af

$$y'(x,G) = -\frac{2}{G}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} k} \frac{\log\left[1-G\,p(s)\right]}{(x-\operatorname{cotg} s)\sin^2 s}\,ds \qquad (2,15)$$

Dit is een hoofdwaarde-integraal in de zin van Cauchy.

We ontwikkelen nu de integrand in een reeks

$$\frac{a_{-1}}{u} + a_o + a_1\,u + a_2\,u^2 \;.\;.\;.\;, \qquad (2,16)$$

waarbij $u = s - s_o$,

$$s_o = \operatorname{arccotg} x \qquad (2,17)$$

is en berekenen nu $a_{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} k} \frac{1}{s}\,ds$ analytisch en numeriek. Het verschil tussen beide berekeningswijzen is nu de fout, welke gemaakt wordt door (2,15) via de weg der numerieke integratie te bepalen.

De formule voor $y''(x,G)$ is de volgende

$$y''(x,g) = \frac{+2}{G}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} k}\left\{\log\left[1-G\,p(s)\right]-\log\left[1-G\,p(s_o)\right]\right\}\frac{ds}{(x-\operatorname{cotg} s)^2\sin^2 s}$$

(2,18)

(2,18) wordt bewezen door de integraal (2,15) als volgt te schrijven

$$y'(x,G) = -\frac{2}{G}\left\{\int_0^{s_o-\varepsilon}\frac{\log\left[1-G\,p(s)\right]}{(x-\operatorname{cotg} s)\sin^2 s}\,ds\; + \right.$$

$$+\int_{s_o-\varepsilon}^{s_o+\varepsilon}\frac{\log\left[1-G\,p(s)\right]}{(x-\operatorname{cotg} s)\sin^2 s}\,ds\; +$$

$$+\int_{s_o+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} k}\frac{\log\left[1-G\,p(s)\right]}{(x-\operatorname{cotg} s)\sin^2 s}\,ds\;.$$

en dan de differentiatie naar x uit te voeren:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{s_o-\varepsilon}^{s_o+\varepsilon}\frac{\log\left[1-G\,p(s)\right]}{(x-\operatorname{cotg} s)\sin^2 s}\,ds\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{a_{-1}}{u}+a_o+a_1\,u+\ldots\right)du\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[2\,a_o\varepsilon + \frac{2}{3}\,a_2\,\varepsilon^3 + \ldots\right] = 2\,b_o\varepsilon + \frac{2}{3}\,b_2\,\varepsilon^3 + \;\ldots$$

waarin $b_n = \dfrac{da_n}{dx}$

$$\text{dus} \quad \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{d}{dx}\left[\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} \frac{\log[1-G\,p(s)]}{(x-\text{cotg}\,s)\sin^2 s}\,ds\right] = 0 .$$

Gebruikmakend van

$$x - \text{cotg}\, s_o = 0$$

vindt men $\frac{ds_o}{dx} = -\sin^2 s_o$ en dus geeft differentiatie van de eerste integraal

$$+\frac{2}{G}\int_0^{s_0-\varepsilon} \frac{\log[1-G\,p(s)]}{(x-\text{cotg}\,s)^2\sin^2 s}\,ds + \frac{2}{G}\,\frac{\log[1-G\,p(s_o-\varepsilon)]}{[x-\text{cotg}(s_o-\varepsilon)]\sin^2(s_o-\varepsilon)}\sin^2 s_o$$

$$= +\frac{2}{G}\int_0^{s_0-\varepsilon}\left\{\log[1-G\,p(s)] - \log[1-G\,p(s_o-\varepsilon)]\frac{\sin^2 s_o}{\sin^2(s_o-\varepsilon)}\right\}.$$

$$\cdot\frac{ds}{(x-\text{cotg}\,s)^2\sin^2 s} .$$

Op een zelfde wijze de laatste integraal differentierend en $\lim \varepsilon\to 0$ nemend vinden wij (2,18).

Deze nieuw gevonden integraal is weer een hoofdwaarde integraal voor het geval x = 0, voor x = k is de integrand regulier.

3. Numerieke resultaten.

Alle resultaten zijn onderworpen aan een fout van ten hoogste een eenheid van het laatst opgegeven cijfer. Hier en daar bleek het nodig iets meer cijfers te gebruiken voor de berekening dan nodig was voor het eindantwoord in verband met het wegvallen van cijfers.

Voor x_1 werd gevonden

$$x_1 = 0{,}384043$$

en

$$y(x_1) = -2{,}5714$$

$$y'(x_1) = -2{,}18004$$

$$y''(x_1) = 10{,}53252 .$$

Hieronder volgen in de tabellen I, II en III de functies $F(x,x_1)$, $\gamma(G)$ als functie van G en N, en $y(x,G)$, $y'(x,G)$ en $y''(x,G)$.

1 c x	F(x,x_1)	x	F(x,x_1)	x	F(x,x_1)
- 2,0	5,49315	2,1	1,68235	6,2	29,95236
- 1,9	5,00686	2,2	1,95412	6,3	31,07174
- 1,8	4,54144	2,3	2,24735	6,4	32,21136
- 1,7	4,09699	2,4	2,56202	6,5	33,37119
- 1,6	3,67358	2,5	2,89806	6,6	34,55125
- 1,5	3,27132	2,6	3,25545	6,7	35,75152
- 1,4	2,89032	2,7	3,63410	6,8	36,97198
- 1,3	2,53075	2,8	4,03398	6,9	38,21265
- 1,2	2,19276	2,9	4,45501	7,0	39,47349
- 1,1	1,87655	3,0	4,89713		
- 1,0	1,58239	3,1	5,36031		
- 0,9	1,31063	3,2	5,84446		
- 0,8	1,06163	3,3	6,34955		
- 0,7	0,83600	3,4	6,87554		
- 0,6	0,63453	3,5	7,42235		
- 0,5	0,45845	3,6	7,98997		
- 0,4	0,31059	3,7	8,57835		
- 0,3	0,19416	3,8	9,18745		
- 0,2	0,10949	3,9	9,81722		
- 0,1	0,05378	4,0	10,46764		
0	0,02173	4,1	11,13868		
0,1	0,00648	4,2	11,83031		
0,2	0,00110	4,3	12,54249		
0,3	0,00004	4,4	13,27520		
0,4	0,00001	4,5	14,02842		
0,5	0,00014	4,6	14,80212		
0,6	0,00164	4,7	15,59627		
0,7	0,00694	4,8	16,41088		
0,8	0,01902	4,9	17,24589		
0,9	0,04091	5,0	18,10132		
1,0	0,07533	5,1	18,97713		
1,1	0,12459	5,2	19,87329		
1,2	0,19057	5,3	20,78982		
1,3	0,27466	5,4	21,72669		
1,4	0,37798	5,5	22,68390		
1,5	0,50130	5,6	23,66140		
1,6	0,64515	5,7	24,65920		
1,7	0,80994	5,8	25,67731		
1,8	0,99594	5,9	26,71568		
1,9	1,20330	6,0	27,77431		
2,0	1,43207	6,1	28,85321		

2 a G	$\gamma(G)$
0,0	1
0,1	1,03263
0,2	1,06935
0,3	1,11112
0,4	1,15944
0,5	1,21655
0,6	1,28609
0,69	1,36458
0,7	1,37456
0,8	1,49587
0,84	1,56041
0,9	1,69062
0,97	1,99381
0,98	2,10312
0,98622858	2,31253

2 b N	$\gamma(G)$
0,0	1
0,2	1,01717
0,4	1,03447
0,6	1,05192
0,8	1,06948
1,0	1,08717
1,2	1,10498
1,4	1,12292
1,6	1,14100
1,8	1,15919
2,0	1,17750
2,2	1,19593
2,4	1,21449
2,6	1,23319
2,8	1,25200
3,0	1,27094
3,2	1,29000
3,4	1,30918
3,6	1,32848
3,8	1,34791
4,0	1,36746
4,2	1,38713
4,4	1,40693
4,6	1,42686
4,8	1,44690
5,0	1,46706
5,2	1,48735
5,4	1,50776
5,6	1,52829
5,8	1,54894
6,0	1,56972
6,2	1,59061

2 b N	$\gamma(G)$
6,4	1,61162
6,6	1,63275
6,8	1,65400
7,0	1,67538
7,2	1,69687
7,4	1,71848
7,6	1,74021
7,8	1,76206
8,0	1,78404
8,2	1,80613
8,4	1,82834
8,6	1,85067
8,8	1,87312
9,0	1,89569
9,2	1,91837
9,4	1,94118
9,6	1,96411
9,8	1,98716
10,0	2,01033
10,2	2,03362
10,4	2,05703
10,6	2,08056
10,8	2,10420
11,0	2,12797
11,2	2,15186
11,4	2,17587
11,6	2,20000
11,8	2,22427
12,0	2,24861
12,2	2,27310

G	N
0,98622858	12,52021

3 a

N	G	y(x,G)	y'(x,G)	y"(x,G)
2	0,43360	- 3,6565	- 1,4716	12,32
4	0,69292	- 4,7485	- 1,7283	19,37
6	0,84514	- 6,052	- 2,0035	31,78
8	0,93001	- 7,623	- 2,2970	57,01
10	0,97191	- 9,584	- 2,6097	127,8
12	0,98580	- 12,27	- 2,974	$8,4 \times 10^2$