LIBER AMICORUM

LEVEN MET GETALLEN

TER GELEGENHEID VAN DE PENSIONERING VAN HERMAN TE RIELE

Redactie
Ronald Cramer
Susanne van Dam
Rob van der Mei

Eindredactie
Coby van Vonderen

Vormgeving en voorbereiding drukwerk
Coby van Vonderen
Jos van der Werf

Foto's en illustraties
Jan Schipper
Minnie Middelberg

Drukwerk
Loogman's Boekbinderij, Amsterdam

Oplage eerste druk
Twee: één voor Herman en één voor de bibliotheek

VOORWOORD

Je zou kunnen zeggen dat dit Liber Amicorum als mosterd na de maaltijd komt, want Hermans afscheid van het CWI ligt alweer weken achter ons. Maar niets is minder waar. We hebben er bewust voor gekozen de bijdragen van familie, vrienden en collega's te mengen met foto's van Hermans afscheid van het CWI op 2 december 2011. Dit heeft geresulteerd in dit prachtige boek, dat vol staat met statige dankwoorden, wetenschappelijke hoogstandjes en vooral ook kostelijke anekdotes van een bescheiden maar kleurrijke persoonlijkheid.

Dit boek is een collector's item en wordt uitgebracht in een eenmalige druk met een oplage van twee: een voor Herman zelf en een voor de CWI-bibliotheek.

Wij danken alle auteurs voor hun bijdragen en wensen de lezer veel plezier!

Ronald Cramer, Susanne van Dam, Rob van der Mei en Coby van Vonderen
CWI, december 2011

Inhoud

EERBETOON DOOR ROB VAN DER MEI

Herman te Riele

Een bijzonder mens

“Ik heb altijd het gevoel gehad dat ik iets terug moest doen voor de maatschappij.”, “Je kennis en vaardigheden overbrengen op jonge mensen verrijkt je leven.”, en “Het klinkt paradoxaal maar het (schijnbaar) toenemende atheïsme in de maatschappij versterkt op de een of andere manier mijn geloofsleven.” Het zijn zomaar wat uitspraken over een veelzijdige en innemende persoonlijkheid.

Eens een CWI-er, altijd een CWI-er

Wij waren al langer CWI-collega’s, maar hebben elkaar beter leren kennen toen je me op een blauwe maandag vroeg of ik zin had om het secretariaat van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) van je over te nemen. Nou kan ik me eerlijk gezegd nauwelijks voorstellen dat ik daar echt zin in had, maar blijkbaar heb ik in een overmoedige bui toch “ja” gezegd. Dat soort buien heb ik nogal eens. Zo kon het ook gebeuren dat ik voordat ik het in de gaten had lid van de Ondernemingsraad werd toen Wilmy van Ojik een keer bij me binnenstapte op zoek naar nieuwe OR-leden. Maar als je ja zegt, moet je niet zeuren.

Je was een fantastische collega, 100% betrouwbaar en iemand op wie je altijd kunt rekenen.

De bedoeling was dat ik jou zou doen vergeten. Terugkijkend durf ik wel te stellen dat dat *niet helemaal*, of beter gezegd *helemaal niet*, gelukt is. Jouw dossierkennis en accuratesse zijn nu eenmaal onovertroffen. Je bleef gelukkig ook altijd allerlei klussen doen die ik eigenlijk zou moeten doen. Het aanleveren van jaaroverzichten voor het NAW, de KWG Nieuwsbrief, statutenwijzigingen, noem maar op. En nooit een onvertogen woord over mijn matige functioneren als secretaris, en dat siert je. En ja, het KWG-bestuur kan nu eenmaal niet zonder jou, en daarom heb je je bij mijn vertrek alsnog laten overhalen om nog een extra termijn aan te blijven als bestuurslid, en als *het collectieve geweten van het KWG*. Wat een plichtsbesef. Ook dat siert je.

Herman is – en blijft ook na zijn pensionering – het collectieve geheugen van het KWG-bestuur.

Toch kijk ik met veel plezier terug op onze gezamenlijke KWG-tijd. Ik weet nog wel dat je een keer bijna ontplofte tijdens een vergadering. Je zat midden in de stress van de 5ECM-organisatie, toen er een verzoek binnen kwam voor de organisatie van een zo mogelijk nog groter congres in Nederland in 2014. Al gauw werd toen

Wat lacherig geopperd *dat dat misschien wel iets voor Herman zou zijn*. Hoe je daarop reageerde? Nou, laten we het er maar op houden dat je niet echt stond te popelen.

Dat atheïsme het geloof van een gelovige versterkt is ongelofelijk.

Je hebt prachtige bijdragen geleverd aan de wetenschap, in het bijzonder aan de getaltheorie. Je resultaten op het gebied van de Riemann-hypothese hebben je wetenschappelijke wereldfaam bezorgd. En de factorisatie van RSA-512 was zo spectaculair dat het de wereldpers haalde. Over maatschappelijke impact gesproken!

De *Te Riele hypothese* luidt: als twee getallen bevriend zijn, zijn ze dat voor altijd.

Bescheidenheid siert de mens: ik heb nooit geweten dat je zo actief was in de kerk. Je bent lector, zingt in twee kerkkoren en zit (hoe kan het ook anders) in het bestuur. Om met Louis van Gaal te spreken: dat zijn drie dubbele plussen. En tja, bij het kopje *opleiden van misdienaren* zet ik toch een vraagtekentje (grapje). Maar dat wordt weer goedgemaakt door de dubbele plus voor al het vrijwilligerswerk bij de bridge-club.

Zou Herman het na zijn persionering rustig aan gaan doen? De vraag stellen is ‘m beantwoorden. En daarom hoop ik dat je tijd zult blijven vinden om nog regelmatig op het CWI langs te komen. Beste Herman, bedankt voor je collegialiteit en voor alles wat je voor het CWI betekend hebt. Ik wens jou en Toke alle geluk in deze volgende mooie fase in jullie leven. Het ga jullie goed.

Het CWI blijft een geweldige plaats om te werken, maar zal wel anders zijn zonder Herman.

Gauß's Lattice Point Problem(s) Revisited
An invitation

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

Walter M. Lioen[1] and Jan van de Lune[2]

1 Introduction to the original Problem

In analytic number theory there is an abundance of unsolved problems. One of them is Gauß's Lattice Point Problem for the circle (see Gauß [6, pp. 269–291 (in particular p. 280)] or [7, p. 657]). Hejhal once wrote that this problem might very well be more difficult than the Riemann Hypothesis (cf. [10]). Let's recall what this problem is all about: For real $t \geq 0$ let $P(t)$ denote the number of lattice Points (x, y) in the circular disc $x^2 + y^2 \leq t$ (note that the radius of this disc is $\sqrt{t}$), and let $A(t)$ be the Area $(= \pi t)$ of the disc. The problem is to estimate the 'Error' $E(t) := P(t) - A(t)$ as $t \to \infty$. In [20, 19, 5] we find some history of this subject. The ultimate goal is to determine the infimum (θ) of all α satisfying $E(t) = \mathcal{O}(t^\alpha)$. Till today this is still an unsolved problem. It is clear that all (local) extremes of $E(t)$ occur at the points $t = n(\pm 0)$, so that we may restrict ourselves to the determination of $P(n)$ with $n \in \mathbf{N}$. In the past various (numerical) attempts have been made to get an impression of what θ might be. See [3, 12, 15, 17]. Various methods have been applied: Gauß's original root method[6], Tromp's step method[17]. So far Tromp's method has by far been superior in speed.

Writing $|E(t)| \leq C_\epsilon t^{\theta+\epsilon}$, the best bounds on θ are $\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{131}{416} \approx 0.314904$ (cf. [11]). It was Van der Corput[2] who was the first to prove that $\theta < \frac{1}{3}$.

Experimental results suggest that $|E(t)| = \mathcal{O}(t^{\frac{1}{4}} \log t)$ (as conjectured in [15] and confirmed in [17]).

[1] Walter.Lioen@sara.nl, SARA, P.O. Box 94613, 1090 GP Amsterdam, The Netherlands.

[2] j.vandelune@hccnet.nl, Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Netherlands (formerly at CWI, Amsterdam).

We propose to introduce a new method for the computation of $P(n)$, to wit: a fast *sieve* method based on [8, pp. 241–243, Section 16.9, formula (16.9.5), Theorem 278], which we already announced in [14, Section 7].

We have already written the main features of a program in Delphi Object Pascal and a Fortran version is in progress.

2 Generalization

Now we change notation: $P_2(t)$ will now denote the $P(t)$ of Section 1. Similarly $A_2(t) = A(t)$, $E_2(t) = E(t)$ and $\theta_2 = \theta$. The index 2 refers to the dimension (of the plane). We now define (in 3 dimensional space) $P_3(t)$ as the number of lattice points (x, y, z) satisfying $x^2 + y^2 + z^2 \leq t$, $V_3(t) :=$ the Volume of the pertinent sphere $= \frac{4}{3}\pi t^{\frac{3}{2}}$, and $E_3(t) := P_3(t) - V_3(t)$. Of course, also here the problem is to estimate the size of $E_3(t)$ as $t \to \infty$. Writing $|E_3(t)| \leq C_\epsilon t^{\theta_3+\epsilon}$, at the moment of writing the best bound on θ_3 is $\theta_3 \leq \frac{17}{28} \approx 0.607143$ (cf. [1]). Previous theoretical results can be found in [9, 18]. For earlier numerical work see [3, 16].

Since $P_2(t)$ can now be computed very fast, it seems worthwhile to have a go at $E_3(t)$. Summation over horizontal slices of the sphere yields $P_3(n) = P_2(n) + 2\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P_2(n-k^2)$. However, here is a nasty catch: the values of $P_2(n)$ must be saved, which is rather demanding on fast memory. A simple back of the envelope calculation suggests that at least memory-wise $n \leq 10^{10}$ is feasible using readily available 128–256 GB machines.

3 Invitation

We would like to *invite* the golden-ager (hopefully with a lot of time) to join the crowd in an attempt to extend the computations on $E_3(t)$.

References and related literature

[1] L.G. Arkhipova. Number of lattice points in a sphere. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 63(5):214–215, 2008.

[2] J.G. van der Corput. Neue zahlentheoretische Abschätzungen. *Math. Ann.*, 89:215–254, 1923.

[3] W. Fraser and C.C. Gotlieb. A calculation of the number of lattice points in the circle and sphere. *Math. Comp.*, 16:282–290, 1962.

[4] F. Fricker. *Einführung in die Gitterpunktlehre*. Birkhäuser, 1982.

[5] J. Galante. Gauss's circle problem. Senior thesis, University of Rochester, 2005. http://www.math.rochester.edu/undergraduate/sums/reu/2005_galante-joseph.pdf.

[6] C.F. Gauß. De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem. In *Werke*, volume 2. 1863.

[7] C.F. Gauß. *Disquisitiones Arithmeticae*. 1886.

[8] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford at the Clarendon Press, fourth edition, 1971.

[9] D.R. Heath-Brown. Lattice points in the sphere. In *Number theory in progress*, pages 883–892. Walter de Gruyter, Berlin, 1999.

[10] D.A. Hejhal. The Selberg trace formula and the Riemann zeta function. *Duke Math. J.*, 43:441–482, 1976.

[11] M.N. Huxley. Exponential sums and lattice points III. *Proc. London Math. Soc.*, 87(3):591–609, 2003.

[12] H.B. Keller and J.R. Swenson. Experiments on the lattice problem of Gauss. *Math. Comp.*, 17:223–230, 1963.

[13] E. Krätzel. *Lattice Points*. Kluwer, 1988.

[14] W.M. Lioen and J. van de Lune. Systematic computations on Mertens' conjecture and Dirichlet's divisor problem by vectorized sieving. In K.R. Apt, A. Schrijver, and N.M. Temme, editors, *From Universal Morphisms to Megabytes: A Baayen Space Odyssey*, pages 421–432, Amsterdam, December 20, 1994. CWI.

[15] J. van de Lune and E. Wattel. Systematic computations on Gauss' lattice point problem (in commemoration of Johannes Gualtherus van der Corput, 1890–1975). Report AM-R9008, CWI, 1990.

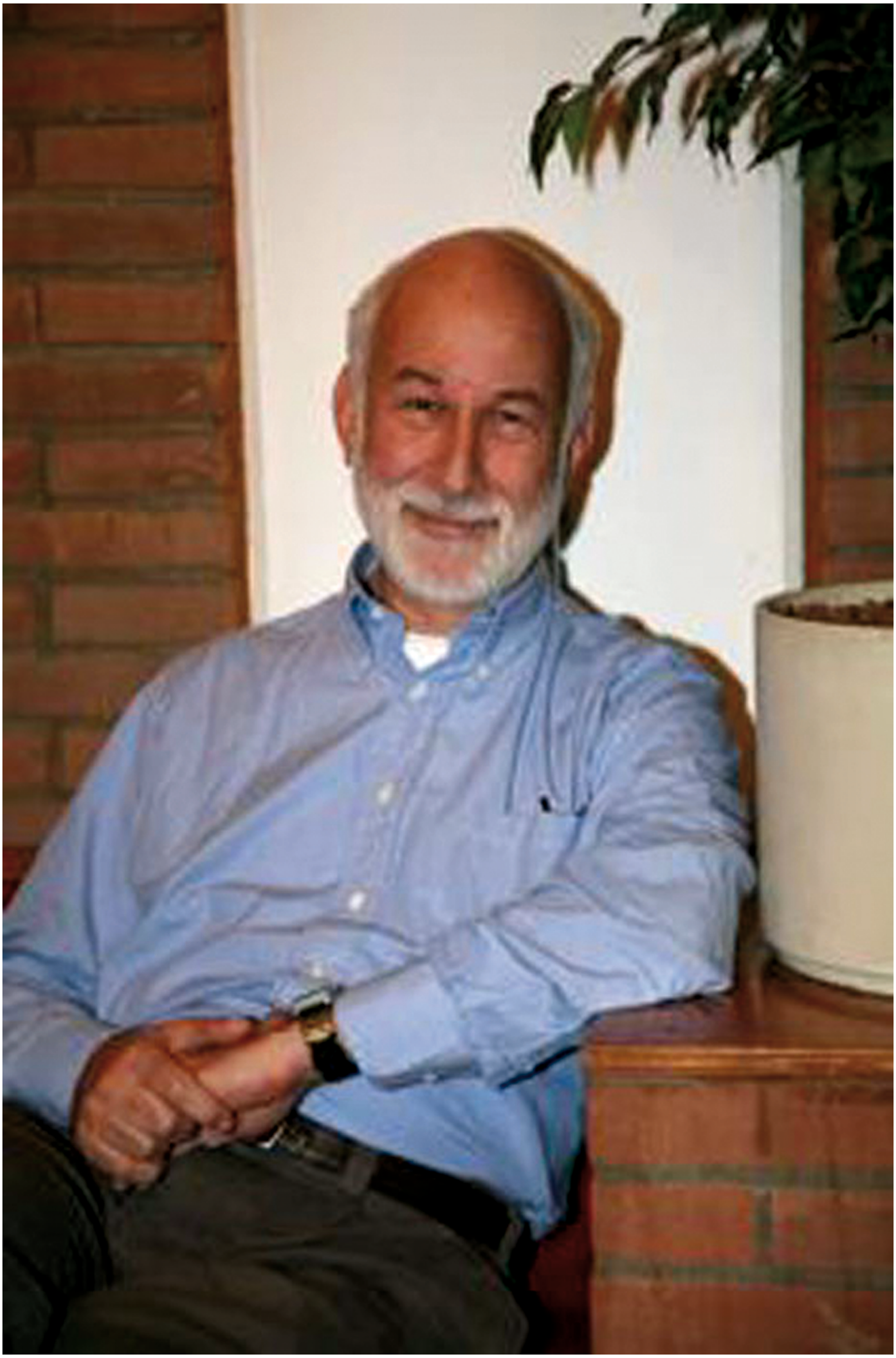
[16] W.C. Mitchell. The number of lattice points in a k-dimensional hypersphere. *Math. Comp.*, 20:300–310, 1966.

[17] J.T. Tromp. More computations on Gauss' lattice point problem. Report CS-R9017, CWI, 1990.

[18] K.-M. Tsang. Counting lattice points in the sphere. *Bull. London Math. Soc.*, 32:679–688, 2000.

[19] E.W. Weisstein. Gauss's circle problem. From MathWorld–a Wolfram web resource. http://mathworld.wolfram.com/GausssCircleProblem.html.

[20] J.R. Wilton. The lattice points of a circle: an historical account of the problem. *Mess. Math.*, 58:67–80, 1929.



Beste Herman,

Ik moet nog wennen aan het feit dat je het CWI verlaat. In mijn aanstelling, zowel in de jaren zeventig als vanaf ’87 was ik altijd bewust van je aanwezigheid op het CWI.

Eerst was het in verband met je e-mails over de tafeltennistoernooien. Ik moet bekennen dat ik aan geen enkele deelgenomen heb, maar ik vond het toch leuk dat iemand de moeite nam om zulke toernooien te organiseren, op eigen initiatief. Voor degene die deze activiteiten van je zijn vergeten, voeg ik een typische e-mail erover van je, van 9 jaar geleden.

Dan was je jarenlang de voorzitter van de bibliotheekcommissie (en ik lid vanaf, denk ik, 2001). Ik vond je een geweldige voorzitter. Dankzij jou en Ay waren de bijeenkomsten altijd heel prettig, informatief en, denk ik, nuttig.

Onlangs hadden wij ook gelegenheid om gezamenlijk in de commissie te zitten die de *Master thesis* van mijn UvA student moest beoordelen. Dankzij deze student heb ik vernomen dat je destijds ook aan het onderwerp van zijn scriptie (zetelverdeling) gewerkt hebt. Opnieuw vond ik je optredens heel prettig en informatief.

Je was altijd heel ‘low key’ over je onderzoek. Waaraan je werkte leerde ik soms gewoon van de ... dagelijkse kranten. Het feit dat je onderzoek zo vaak de pers haalde had natuurlijk ook een positief effect op mij. Ik kon dan met trots positief antwoord geven op vragen zoals: “Werk je dan ook bij dezelfde CWI”?

Ik vond het altijd een klein raadsel dat je geen enkele moeite nam om meer zichtbaar te zijn op het ‘management’ niveau van het CWI en eerlijk gezegd, vond ik het inspirend. Ten slotte, de functies van thema- of clusterleider zijn heel tijdrovend en de winst vanuit het onderzoeksperspectief is eigenlijk illusorisch. Dus in bepaalde zin heb je mijn houding in deze kwestie beïnvloed.

Ik wens je nog veel successen in de komende jaren en hoop je nog steeds vaak bij de printer of ergens anders in het CWI gebouw te mogen zien.

Het ga je goed,

Krzysztof Apt
Amsterdam
22 september 2011

From: ''Herman J.J. te Riele'' <Herman.te.Riele@cwi.nl>
To: pv-leden@cwi.nl
Subject: tafeltennis
Date: Wed, 23 Jan 2002 13:59:13 +0100 (MET)

Tafeltennistoernooi

(English below)

In de grijze oudheid organiseerde de PV jaarlijks het beroemde en gezellige

CWI Tafeltenniskampioenschap

(door sommigen wel eens oneerbiedig, maar niet geheel onterecht, Ping-Pongtoernooi genoemd).
Het wordt hoog tijd dat deze traditie nieuw leven wordt ingeblazen!

Bij voldoende belangstelling zal dit toernooi op vrijdag 1 februari a.s. in de Wethouder Verheij-Sporthal (Oranje-Vrijstaatkade, A'dam-Oost) worden gehouden, en wel vanaf 20 uur. Er zijn geen kosten aan verbonden.

Dit toernooi staat open voor alle CWI-ers en hun partner, maar ook voor oud-CWI-ers, dus: zegt het voort!
Als je mee wilt doen, stuur dan nog vandaag of morgen een mailtje naar herman@cwi.nl, zodat we snel kunnen beslissen of het toernooi kan doorgaan.

Table tennis tournament

In grey antiquity the CWI Staff Club used to organize the famous yearly

CWI Table-Tennis Championship

(sometimes also called, quite realistically: Ping-Pong tournament).
It is high time to restore this tradition!

Pending sufficient interest, this tournament will take place on Friday February 1, in the Wethouder Verheij-Sporthal (Oranje-Vrijstaatkade, A'dam-Oost), starting at 8 pm. Participation is free of costs.

This tournament is open for all CWI employees and partner but also for former CWI employees, so please pass it on!
If you wish to participate, send an email, today or tomorrow, to herman@cwi.nl, so that we can quickly decide whether the tournament will be on.

Herman te Riele


Voor opa Hempan
Veel liefs
Teun

A NOTE ON A RELATION BETWEEN THE RIEMANN HYPOTHESIS AND THE SUMMATORY FUNCTION OF $(|\mu(n)| - 6/\pi^2)$

TADEJ KOTNIK AND JAN VAN DE LUNE

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

1. Introduction

The numerical computations reported on in this note were motivated by a combination of the following considerations (A) and (B):

(A) The absolute values of the Möbius function, $|\mu(n)|$, can be bulk-computed very quickly by means of a sieve (one of the fastest we know of).

(B) **Theorem.** *If* $\Delta(x) := \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(|\mu(n)| - \frac{6}{\pi^2}\right) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ *for every* $\varepsilon > 0$, *then the Riemann Hypothesis is true.*

Before proving (B), we make a few historical remarks.

Writing $M(x) := \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n)$, it can be shown [1] that the Riemann Hypothesis is equivalent to $M(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. In 1911 Axer [2] showed that assuming the slightly stronger Stieltjes Hypothesis, namely that $M(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}})$, it follows that $\Delta(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{2}{5}})$. Although the Stieltjes Hypothesis has to date not been disproved, there are some indications that it might be false. In particular, it was proved that the (slightly stronger still) Mertens Hypothesis, $|M(x)| \leq x^{\frac{1}{2}}$, is false, as in 1985 Odlyzko and te Riele [3] showed that $\limsup M(x)/x^{\frac{1}{2}} > 1.06$, $\liminf M(x)/x^{\frac{1}{2}} < -1.009$, and in 2006 Kotnik and te Riele [4] improved this to $\limsup M(x)/x^{\frac{1}{2}} > 1.218$, $\liminf M(x)/x^{\frac{1}{2}} < -1.229$. In the light of these developments, the condition assumed by Axer in deriving his result may be questioned. This potential problem was overcome in 1980 by Montgomery and Vaughan [5], who developed a method allowing to show rather straightforwardly that the Riemann Hypothesis itself implies the stronger result $\Delta(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$, and with a more involved argument they were able to strengthen the exponent $\frac{1}{3}$ further to $\frac{9}{28} = 0.321428...$ Their result was published in 1981, and building upon their work, the exponent $\frac{9}{28}$ was improved in the same year by Graham [6] to $\frac{8}{25} = 0.32$, then in 1985 by Baker and Pintz [7] to $\frac{7}{22} = 0.318181...$, and in 1993 by Jia [8] to $\frac{17}{54} = 0.314814...$

It is interesting to note that in none of these works, the authors conjecture the actual order of magnitude of $\Delta(x)$, in the sense of the smallest value of the exponent ν for which $\Delta(x) = \mathcal{O}(x^{\nu+\varepsilon})$ is true. Moreover, we were also unable to find any work on the converse implication, i.e. on a value of ν that would imply the Riemann Hypothesis, as is the case of our theorem (B), of which we now give a proof.

Date: September 19, 2011.

Theorem. *If* $\Delta(x)=\mathcal{O}(x^{\frac14+\varepsilon})$, *then the Riemann Hypothesis is true.*

Proof. Let $s:=\sigma+it$ be a complex variable. For $\sigma>1$ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=\prod_p\frac{\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}{1-\frac{1}{p^s}}=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

so that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|-\frac{6}{\pi^2}}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}-\frac{6}{\pi^2}\zeta(s)=\zeta(s)\left(\frac{1}{\zeta(2s)}-\frac{6}{\pi^2}\right)=:\psi(s)\ .$$

At $s=1$, $\psi(s)$ is analytic, as the simple pole of $\zeta(s)$ is cancelled by the simple zero of $\frac{1}{\zeta(2s)}-\frac{6}{\pi^2}$. Since $\zeta(2s)\neq 0$ for $\sigma>\frac12$, it follows that $\psi(s)$ is analytic for $\sigma>\frac12$.

Now suppose that for every $\varepsilon>0$ we have

$$\Delta(x):=\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\left(|\mu(n)|-\frac{6}{\pi^2}\right)=\mathcal{O}(x^{\frac14+\varepsilon})\quad\text{as } x\to\infty\ .$$

Then for $\sigma>1$

$$\begin{aligned}\psi(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|-\frac{6}{\pi^2}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-0}^{n+1-0}\frac{1}{x^s}\,d\Delta(x)\\&=\int_{1-0}^{\infty}\frac{1}{x^s}\,d\Delta(x)=\left.\frac{\Delta(x)}{x^s}\right|_{1-0}^{\infty}-\int_{1-0}^{\infty}\Delta(x)\,dx^{-s}\\&=0-0-\int_{1-0}^{\infty}\Delta(x)\,(-s)\,x^{-s-1}dx=s\int_1^{\infty}\frac{\Delta(x)}{x^{s+1}}\,dx\ .\end{aligned}$$

Since by assumption $\Delta(x)=\mathcal{O}(x^{\frac14+\varepsilon})$, we find that $\psi(s)=s\int_1^\infty\frac{\Delta(x)}{x^{s+1}}\,dx$ is analytic for $\sigma>\frac14+\varepsilon$, and as ε may be taken arbitrarily small, it follows that $\psi(s)$ is analytic for $\sigma>\frac14$.

Now we proceed by contradiction: Suppose that the Riemann Hypothesis is not true, and let $\rho=\frac12+\alpha+i\beta$ be the zero of $\zeta(s)$ with the smallest $\beta>0$ and the largest α with $0<\alpha<\frac12$. (I.e., first take the smallest $\beta>0$ and then the largest corresponding α.)

Now consider the point $s=\frac{\rho}{2}=\frac14+\frac{\alpha}{2}+i\frac{\beta}{2}$. Then $\zeta(2s)=\zeta(\rho)=0$, so that $\frac{1}{\zeta(2s)}$ has a pole at $s=\frac{\rho}{2}$. Clearly, $\frac{1}{\zeta(2s)}-\frac{6}{\pi^2}$ then also has a pole there. Since $\frac{\rho}{2}=\frac14+\frac{\alpha}{2}+i\frac{\beta}{2}$ and $\psi(s)=\zeta(s)(\frac{1}{\zeta(2s)}-\frac{6}{\pi^2})$ is regular for $\sigma>\frac14$, it follows that $\zeta(s)$ must have a zero of at least the same order at $s=\frac14+\frac{\alpha}{2}+i\frac{\beta}{2}$. But then $\zeta(s)$ also has a zero at $s=(1-(\frac14+\frac{\alpha}{2}))+i\frac{\beta}{2}=\frac34-\frac{\alpha}{2}+i\frac{\beta}{2}$. Since $\frac12<\frac34-\frac{\alpha}{2}<1$ and $0<\frac{\beta}{2}<\beta$, this contradicts our assumption about the minimality of β. $\square$

2. The computational results

For $x\geq 1$ we define

$$q(x):=\frac{\Delta(x)}{x^{\frac14}}\ .$$

Thus, the sufficient condition for the validity of the Riemann Hypothesis can also be written as $q(x) = \mathcal{O}(x^{\varepsilon})$, and to investigate this condition numerically, we need to perform a systematic search for large extrema of $|q(x)|$. Since all positive maxima and negative minima of $q(x)$ occur at $x \in \mathbb{N}$, for our purpose we may restrict our computations of $q(x)$ to integer values of x.

The values of $q(n)$ for all $n \le N^2$ may be computed by a sieve-program, the functioning of which can be briefly outlined as follows:

(1) Precompute (by a sieve) all primes $p \le N$ and store their squares p^2.
[Sieving over the odd numbers we can reach $n = (2N+1)^2$.]

(2) Set $\texttt{nDone} = 0$ and declare a sieve block $\texttt{SB}$ as an array of length $\texttt{LSB} = N$ of integers.
[Or, equivalently, of Booleans.]

(3) Set $\texttt{MaxQ} = \texttt{MinQ} = 0$ and $\texttt{SB} = \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$.
[Or, equivalently, $\texttt{SB} = \{\texttt{True}, \texttt{True}, \ldots, \texttt{True}\}$.]

(4) For $p^2 \mid n$ set $\texttt{SB}[n] = 0$.
[Or, equivalently, $\texttt{SB}[n] = \texttt{False}$. $\texttt{SB}$ now contains the values of $|\mu(n)|$. Note that a complete factorization of n is not necessary.]

(5) For $\texttt{nDone} < n \le \texttt{nDone} + \texttt{LSB}$, compute $q(n)$.
If $q(n) > \texttt{MaxQ}$ then replace $\texttt{MaxQ}$ by $q(n)$,
else if $q(n) < \texttt{MinQ}$ then replace $\texttt{MinQ}$ by $q(n)$.

(6) Output the values $\texttt{MaxQ}$, $\texttt{MinQ}$, their pertaining values of n, and possibly some other relevant results.
[The maximal and the minimal value of $q(n)$ in the current sieve block.]

(7) If $n < N^2$ then increment $\texttt{nDone}$ by $\texttt{LSB}$ and go to (3).
[Note that we use the same sieve block $\texttt{SB}$ repeatedly.]

We wrote such a program using Delphi 6 (Borland Inc., Scotts Valley, CA, USA) and ran it on a PC with 2 GB of RAM. Tables 1 and 2 below present the maximal and the minimal value of $q(x)$ in 15 contiguous intervals spanning the range $1 \le x \le 5 \times 10^{14}$ (with $\texttt{LSB} = 53361000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11^2$).

x-range	x	$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \lvert\mu(n)\rvert$	$\Delta(x)$	$q(x)$
[1, 10)	7	6	+1.744...	+1.0725...
[10, 100)	43	29	+2.859...	+1.1165...
[100, 1000)	115	73	+3.088...	+0.9430...
[10^3, 10^4)	1663	1017	+6.017...	+0.9422...
[10^4, 10^5)	47523	28905	+14.480...	+0.9807...
[10^5, 10^6)	351115	213474	+21.675...	+0.8904...
[10^6, 10^7)	2015403	1225252	+33.895...	+0.8995...
[10^7, LSB)	10143015	6166263	+49.286...	+0.8733...
[LSB, 10 $\times$ LSB)	413384223	251307591	+118.359...	+0.8300...
[10 $\times$ LSB, $10^2\times$ LSB)	4804033147	2920502173	+224.733...	+0.8536...
[10^2 $\times$ LSB, 10^3 $\times$ LSB)	29109682663	17696565352	+334.792...	+0.8105...
[10^3 $\times$ LSB, 10^4 $\times$ LSB)	183141684519	111336794166	+667.699...	+1.0206...
[10^4 $\times$ LSB, 10^5 $\times$ LSB)	987483328243	600317878538	+670.064...	+0.6721...
[10^5 $\times$ LSB, 10^6 $\times$ LSB)	12693019531903	7716430579185	+1378.655...	+0.7304...
[10^6 $\times$ LSB, 10^7 $\times$ LSB)	214455677199819	130373418319553	+3324.378...	+0.8687...

Table 1: The maximal values of $q(x)$ in 15 intervals spanning the investigated x-range.

x-range	x	$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \|\mu(n)\|$	$\Delta(x)$	$q(x)$
[1, 10)	10 – 0	6	+0.528...	+0.2972...
[10, 100)	56	34	–0.043...	–0.0160...
[100, 1000)	380	229	–2.012...	–0.4557...
$[10^3, 10^4)$	1864	1130	–3.176...	–0.4833...
$[10^4, 10^5)$	80156	48715	–14.004...	–0.8323...
$[10^5, 10^6)$	436484	265330	–20.453...	–0.7957...
$[10^6, 10^7)$	1146476	696952	–21.832...	–0.6671...
$[10^7$, LSB)	17199380	10455914	–55.237...	–0.8577...
[LSB, 10 × LSB)	487335681	296264461	–107.180...	–0.7213...
[10 × LSB, 10^2× LSB)	3620494684	2200996604	–236.522...	–0.9642...
$[10^2$ × LSB, 10^3 × LSB)	20219949552	12292254976	–354.781...	–0.9408...
$[10^3$ × LSB, 10^4 × LSB)	379688379896	230822855814	–583.825...	–0.7437...
$[10^4$ × LSB, 10^5 × LSB)	744078020392	452345193748	–742.189...	–0.7991...
$[10^5$ × LSB, 10^6 × LSB)	11590475428980	7046164135224	–1426.117...	–0.7729...
$[10^6$ × LSB, 10^7 × LSB)	154953313738408	94200318939698	–3970.103...	–1.1252...

Table 2: The minimal values of $q(x)$ in 15 intervals spanning the investigated x-range.

The presented computational data of course cannot rigorously resolve the question whether $\Delta(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$, but they do not seem to contradict this estimate. In particular, the data shown in Fig. 1 could be interpreted as suggesting that perhaps $\Delta(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}} \log x)$, and even $|\Delta(x)| \le x^{\frac{1}{4}} \log x$ for all $x > 2$.

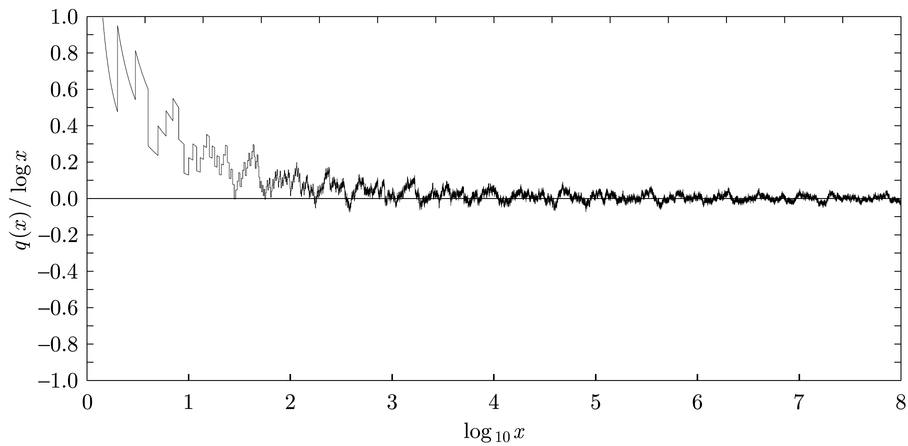


Figure 1: A plot of the function $q(x)/\log x$ in the x-range $[1, 10^8]$.

References

[1] E.C. Titchmarsh and D.R. Heath-Brown. *The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd edition.* Oxford University Press (1986) 370.

[2] A. Axer. Über einige Grenzwertesätze. *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien* **120/2a** (1911) 1253–1298.

[3] A.M. Odlyzko and H.J.J. te Riele. Disproof of the Mertens conjecture. *J. reine angew. Math.* **357** (1985) 138–160.

[4] T. Kotnik and H.J.J. te Riele. The Mertens conjecture revisited. *Lect. Notes Comp. Sci.* **4076** (2006) 156–167.

[5] H.L. Montgomery and R.C. Vaughan. On the distribution of square-free numbers. *Recent Progress in Analytic Number Theory*. Academic Press (1981) 247–256.
[6] S.W. Graham. The distribution of squarefree numbers. *J. London Math. Soc.* **24** (1981) 54–64.
[7] R.C. Baker and J. Pintz. The distribution of square-free numbers. *Acta Arith.* **46** (1985) 73–79.
[8] C.H. Jia. The distribution of square-free numbers. *Sci. China Ser. A* **36** (1993) 154–169.

University of Ljubljana, Faculty of Electrical Engineering, Tržaška 25, SI-1000 Ljubljana, Slovenia
E-mail address: tadej.kotnik@fe.uni-lj.si

Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Netherlands (Formerly at CWI, Amsterdam)
E-mail address: j.vandelune@hccnet.nl

Beste Herman,

Wij kennen elkaar al een behoorlijke lange tijd, sinds ik hier op het CWI rondloop. En nadat Mark Peletier het KWG aan jou heeft overgedragen hebben wij sindsdien veel met elkaar te maken gehad. Heb altijd erg fijn met je samengewerkt en zal de samenwerking missen. Het verzoek om een stukje te schrijven voor je Liber Amicorum kon ik natuurlijk niet zomaar voorbij laten gaan. Maar wat zal ik schrijven? Mag dan wel bekend zijn met LaTeX maar dat wil niet zeggen dat ik weet waar het over gaat. Ik heb gehoord van Susanne dat je van lekker eten houdt (wie niet zou je zegggen), maar ook het bereiden ervan. Van mij dus geen wetenschappelijk staaltje maar een lekker Indonesisch recept waar iedereen van smult, het is een makkelijk gerecht om klaar te maken.

Semur Daging (gesmoord vlees)
In kecap gestoofd stukjes rundvlees (rib- of sucadelappen), Indonesische hachee.

Ingrediënten:
500 gr rundvlees
1 pijpje kaneel
1/4 theel nootmuskaat
2 kruidnagels
1 tomaat
3 eetl kecap manis
(zoete soyasaus)
1/2 theel zout
600 ml water
2 eetl olie

Boemboe:
1 theel ketumbar (gemalen korianderzaad)
1 theel zwarte peperkorrels
4 kemiri noten (candle nuts)
5 teentjes knoflook
6 sjalotten
2 cm jahe (gemberwortel)
garnering:
1 eetl bawang goreng (gebakken uitjes)

Bereiding:
Snijd het vlees in stukjes en de tomaat in kleine partjes. Rooster de ketumbar, de peper en de kemiri droog in een koekenpan. Wrijf of maal de ingrediënten voor de boemboe fijn tot een pasta. Verhit in een wok/wadjan de olie en bak de boemboe voor 2 minuten. Voeg dan het vlees, de kaneel, de nootmuskaat en de kruidnagelen toe en bak dit voor 5 minuten. Voeg dan de tomaat, de kecap en het water toe en laat het geheel zachtjes 45 minuten sudderen tot dat het gaar is. Besprenkel het met de bawang goreng en serveer met rijst.

Tip:
Eventueel 2 grote vastkokende aardappelen in partjes snijden en meekoken, hardgekookte eieren die men heel even in de olie frituurt (anders vallen de eieren uit elkaar) en in de laatste 10 min. erbij doen. Rundergehakt kan ook gebruikt worden, kinderen vinden dat meestal erg lekker. Meng het gehakt dan met wat geraspte kokos en kruid het gehakt met wat gemalen kruidnagel, peper en wat zout. Heb je liever kip, dat kan ook heel goed, vind je 5 teentjes knoflook te veel, doe er dan wat minder in. Houd dan wel rekening met de kooktijd.
Eet smakelijk!!!

Minnie Middelberg

RUIMTE

Herman en Toke, vanaf nu nog meer tijd samen voor het ontdekken van mooie en leuke dingen.
Ik wens jullie daarbij heel veel plezier. Liefs, Susanne

A NOTE ON THE REAL PART OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

JUAN ARIAS DE REYNA, RICHARD P. BRENT, AND JAN VAN DE LUNE

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

Abstract. We consider the real part $\mathrm{Re}\,\zeta(s)$ of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ in the half-plane $\mathrm{Re}\,(s) \geq 1$. We show how to compute accurately the constant $\sigma_0 \approx 1.19$ which is defined to be the supremum of σ such that $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + it)$ can be negative (or zero) for some real t. We also consider intervals where $\mathrm{Re}\,\zeta(1 + it) \leq 0$ and show that they are rare. The first occurs for $t \approx 682112.9$, and has length ≈ 0.05. We list the first 50 such intervals.

1. Introduction

In this note we consider the real part of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ in the half-plane $H = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(s) \geq 1\}$. As usual, we write $s = \sigma + it$, so $\mathrm{Re}\,(s) = \sigma \geq 1$. We are mainly interested in the regions where $\mathrm{Re}\,\zeta(s) \leq 0$. Since $\lim_{\sigma\uparrow\infty} \zeta(\sigma + it) = 1$ (uniformly in t), $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + it)$ cannot be zero for arbitrarily large $\sigma > 1$. We define

$$\sigma_0 := \sup\{\sigma \in \mathbb{R} \,|\, (\exists t \in \mathbb{R})\, \mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + it) = 0\}.$$

Thus, $\mathrm{Re}\,\zeta(s) > 0$ if $\sigma > \sigma_0$. In van de Lune [9] it was shown that σ_0 is the (unique) positive real root of the equation

$$\sum_p \arcsin\left(\frac{1}{p^\sigma}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

where p runs through the primes (we adopt this convention throughout). In [9] it was also shown that $\sigma_0 > 1.192$ and that $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma_0 + it)$ never vanishes.

The main aim of this note is to show how σ_0 can be computed to arbitrarily high precision by an efficient algorithm. We also mention some results on the behaviour of $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + it)$ for $1 \leq \sigma < \sigma_0$, and in particular on the line $\sigma = 1$.

2. Accurate computation of the constant σ_0

In this section we assume that $\sigma \geq \sigma_1 > 1$, where σ_1 is a suitable constant (e.g. 1.1). We show how the constant σ_0 can be computed within a given error bound. There are three main steps.

(1) Give an algorithm to evaluate the *prime zeta-function* [5]

$$P(\sigma) = \sum_p p^{-\sigma},$$

for real $\sigma > 1$.

(2) Using step 1, give an algorithm to evaluate the function $f(\sigma)$ defined by

$$f(\sigma) = \sum_p \arcsin\left(\frac{1}{p^\sigma}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

(3) Use a suitable zero-finding algorithm to locate a zero of $f(\sigma)$ in a (sufficiently small) interval where $f(\sigma)$ changes sign, for example $[1.1, 1.2]$.

Step 1 is easy. From the Euler product for $\zeta(\sigma)$ and Möbius inversion, we have a formula essentially known to Euler [4, 1748]:

$$P(\sigma) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r} \log \zeta(r\sigma), \tag{1}$$

which is valid for $\sigma > 1$ (see Titchmarsh [13, eqn. (1.6.1)]). The series converges rapidly in view of the following Lemma.

Lemma 2.1. *For $\sigma \geq 2$, $0 < \log \zeta(\sigma) < 3/2^\sigma$ and $0 < P(\sigma) < 3/2^\sigma$.*

Proof. For $\sigma \geq 2$, we have

$$0 < \zeta(\sigma) - 1 < 2^{-\sigma} + 3^{-\sigma} + \int_3^\infty x^{-\sigma} \mathrm{d}x = 2^{-\sigma} + 3^{-\sigma} + \frac{3^{1-\sigma}}{\sigma - 1} < 3/2^\sigma,$$

so

$$0 < \log \zeta(\sigma) < \zeta(\sigma) - 1 < 3/2^\sigma.$$

The upper bound on $P(\sigma)$ follows similarly, using $P(\sigma) < \zeta(\sigma) - 1$. □

Using (1) and Lemma 2.1, we have

$$P(\sigma) = \log \zeta(\sigma) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r} \log \zeta(r\sigma),$$

where the r-th term in the sum is bounded in absolute value by $3/2^{r\sigma+1}$. Thus, we can evaluate $P(\sigma)$ accurately, for given $\sigma > 1$, using any good algorithm for the evaluation of $\zeta(\sigma)$, for example Euler-Maclaurin summation. If (1) is used to compute $P(\sigma)$, $P(3\sigma)$, $P(5\sigma), \ldots,$ then we should take care to compute the relevant terms $\log \zeta(r\sigma)$ only once.

For step 2, we observe that the arcsin series defining $f(\sigma)$ converges slowly and irregularly, since it is a sum over primes which to first order behaves like $\sum_p p^{-\sigma}$. The well-known "trick" is to express $f(\sigma)$

as a double series and reverse the order of summation, obtaining an expression which is mathematically equivalent but computationally far superior. For some similar examples, see Wrench [15, 1961].

For $|x| < 1$ we have

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k+1},$$

where

$$c_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2 (2k+1)} \qquad \text{for } k \geq 0.$$

Note that all c_k are positive so that $f(\sigma)$ is strictly convex. It is also clear that $f(\sigma)$ is strictly decreasing for $\sigma > 1$. From the expression for c_k, we see that, for $k \geq 1$,

$$c_k \leq \frac{1}{2(2k+1)}\,. \tag{2}$$

For $\sigma > 1$ it is easy to justify interchanging the order of summation in

$$f(\sigma) = \sum_p \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Big(\frac{1}{p^\sigma}\Big)^{2k+1} - \frac{\pi}{2}\,,$$

obtaining

$$f(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_p \frac{1}{p^{(2k+1)\sigma}} - \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P\big((2k+1)\sigma\big) - \frac{\pi}{2}\,. \tag{3}$$

From Lemma 2.1 and the inequality (2), we see that

$$0 < \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k P\big((2k+1)\sigma\big) < 2^{-(2K+3)\sigma},$$

so it is easy to determine K such that we can truncate the series in (3) to a finite sum over $k \leq K$ with a rigorous error bound.

If desired, we can substitute (1) into (3) and interchange the order of summation, obtaining

$$f(\sigma) = \sum_{j\geq 0} d_j \log\zeta((2j+1)\sigma) - \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

where

$$d_j = \sum_{k\geq 0, r\geq 1, (2k+1)r = 2j+1} \frac{c_k \mu(r)}{r}\,.$$

From the inequality $c_k \le 1/(2k+1)$ (valid for $k \ge 0$), it follows that $|d_j| \le 1$. Using Lemma 2.1, we can determine where to safely truncate the series (4).

For step 3, we can use a zero-finding algorithm which needs only function (not derivative) evaluations, and gives a guaranteed bound on the final result. For example, the method of bisection could be used, but would be slow, taking about $\log_2(1/\varepsilon)$ function evaluations to obtain a solution with error bounded by ε. In the secant method, a sequence (x_n), converging to a zero of f under suitable conditions, is obtained by computing the approximation x_n by linear interpolation using the two points $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ and $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$. It converges with order $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$, but does not always give a guaranteed bound on the error. A combination of bisection and linear interpolation, as in the algorithms of Dekker [3] or Brent [2], can give convergence about as fast as the secant method, but with the final result bracketed in a short interval where the function f changes sign.

3. Computational results

The second and third authors independently wrote programs implementing the ideas of §2, using Magma in one case and Mathematica 4 and 8 in the other case. The programs used different strategies to obtain a final interval where f changes sign (in one case taking advantage of the strict convexity of f). The output of the programs agrees to at least 500D. We give here the correctly rounded result to 100D:

$$\begin{aligned}\sigma_0 \approx 1.&19234\,73371\,86193\,20289\,75044\,27425\,59788\,34011\,19230\,83799\\ &94301\,37194\,92990\,52458\,64848\,30139\,24084\,99863\,83788\,36244\,.\end{aligned}$$

Programs and higher precision values are available from the authors.

4. The distribution of $\operatorname{Re}\zeta(\sigma+it)$ for $\sigma \ge 1$

Assuming that the limit exists, we define

$$d(\sigma) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\, m\{t \in [0,T] \,|\, \operatorname{Re}\zeta(\sigma+it) < 0\},$$

where m denotes Lebesgue measure. Informally, $d(\sigma)$ is the probability that $\zeta(s)$ has negative real part on a given vertical line $\operatorname{Re}(s) = \sigma$.

The results of Section 2 show that $d(\sigma) = 0$ for $\sigma \ge \sigma_0 \approx 1.19$. Here we briefly discuss the region $1 \le \sigma < \sigma_0$.

At least for those values of t that are accessible to computation, $\operatorname{Re}\zeta(\sigma+it)$ is "usually" positive for $\sigma \ge 1$. The function $d(\sigma)$ is conjectured to be continuous and monotonic decreasing from a positive value at $\sigma = 1$ to zero at $\sigma = \sigma_0$. Even on the line $\sigma = 1$, $\operatorname{Re}\zeta(\sigma+it)$ is usually positive [11]. We can prove that $d(1) < 1/4$, but a Monte Carlo computation suggests that the true value is much smaller. Based on 5×10^{11} pseudo-random trials, we estimate $d(1) = (3.80 \pm 0.01) \times 10^{-7}$. Similarly, we estimate $d(1.01) = (1.10 \pm 0.01) \times 10^{-7}$ and $d(1.02) \approx (2.66 \pm 0.04) \times 10^{-8}$, so it can be seen that $d(\sigma)$ decreases rapidly as we move to the right of $\sigma = 1$.

Although $\zeta(s)$ has a simple pole at $s = 1$, the Laurent series

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)$$

shows that $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$ has a positive limit $\gamma = 0.577\cdots$ (Euler's constant) as $t \to 0$.

On any fixed vertical line $\sigma > 1$, both $\zeta(\sigma+it)$ and $1/\zeta(\sigma+it)$ are bounded, in fact $\zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma) < |\zeta(\sigma+it)| \le \zeta(\sigma)$. However, the situation is different on the line $\sigma = 1$, as both $\zeta(1+it)$ and $1/\zeta(1+it)$ are unbounded. Their true order of growth is unknown. It follows from Titchmarsh [13, Theorem 11.9] and the continuity of $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$ that $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$ attains all real values. Nevertheless, the "usual" values are quite small. As a special case of [13, Theorem 7.2] we have the mean value theorem

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Using ideas as in the proof of [13, Theorem 7.2], we can prove that

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}\zeta(1+it)\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Thus, informally, we can say that the typical value of $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$ is close to 1. The values have a distribution with mean 1 and variance $\pi^2/6 - 1 \approx 0.645$.

In [9, Table 1], van de Lune gave a list of values of $t > 0$ such that $\operatorname{Re}\zeta(1+it) < 0$ and is (approximately) a local minimum. The list was not claimed to be exhaustive. The smallest t listed was $t = 682112.92$ with $\operatorname{Re}\zeta(1+it) \approx -0.003$. We have shown, using the "maximum slope principle" [10], that this is very close to the smallest t for which $\operatorname{Re}\zeta(1+it) \le 0$. More precisely, $\operatorname{Re}\zeta(1+it) > 0$ for $0 < t < 682112.8913$, and there is a local minimum of $-.0027652$ at $t \approx 682112.9169$. In applying the maximum slope principle we used the bound

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \arg\zeta(1+it)\right| = \left|\operatorname{Re}\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\right| \le \frac{3}{4}\log(t^2+4) + 7 \ \text{ for } \ t \ge 10.$$

TABLE 1. First 50 negative local minima of $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$

t	$\operatorname{Re}\zeta$	length	t	$\operatorname{Re}\zeta$	length
682112.9169	−0.0028	0.0529	8350473.4853	−0.0019	0.0451
1267065.1710	−0.0040	0.0655	8366684.0439	−0.0197	0.1322
1466782.0667	−0.0013	0.0391	8452317.9526	−0.0090	0.0900
1858650.0915	−0.0282	0.1686	8967566.5926	−0.0148	0.1336
2023654.7671	−0.0221	0.1389	9960968.8748	−0.0184	0.1373
2064996.2141	−0.0117	0.1076	11231380.7309	−0.0099	0.1042
2195056.7909	−0.0755	0.2718	11236680.3350	−0.0262	0.1595
2202620.3296	−0.0111	0.1159	11781932.0257	−0.0170	0.1288
2530662.6360	−0.0072	0.0865	11884021.9776	−0.0035	0.0564
3259774.5293	−0.0471	0.2098	12045289.3337	−0.0644	0.2498
3548283.4160	−0.0189	0.1459	12276788.1573	−0.0182	0.1476
4052438.9330	−0.0023	0.0474	12546625.7916	−0.0455	0.2031
4197235.0783	−0.0331	0.1977	12781127.5748	−0.0102	0.0964
5410820.7150	−0.0008	0.0307	13598773.5889	−0.0543	0.2317
6027913.8513	−0.0181	0.1325	13786262.5457	−0.0826	0.2635
6164063.0008	−0.0263	0.1603	13922411.7750	−0.0222	0.1418
6238849.4877	−0.0071	0.0827	14190358.4974	−0.0632	0.2214
6265907.4688	−0.0030	0.0522	14391623.0217	−0.0016	0.0437
6421627.2235	−0.0241	0.1651	14788310.5330	−0.0149	0.1132
7338152.4379	−0.0043	0.0656	14856540.3430	−0.0220	0.1442
7469838.9709	−0.0009	0.0305	15173904.7533	−0.0041	0.0800
7766995.0303	−0.0742	0.2840	15321273.7219	−0.0131	0.1181
7774558.3985	−0.0672	0.2705	16083163.0244	−0.0098	0.1038
7985493.9836	−0.0324	0.1728	16503899.3235	−0.0060	0.0680
8299958.2327	−0.0022	0.0432	16656258.8346	−0.0155	0.1329

Table 1 lists the first 50 local minima of $\operatorname{Re}\zeta(1+it)$ for which $t>0$ and $\operatorname{Re}\zeta(1+it)\le 0$ (no minima are exactly zero). The values in the table are rounded to 4 decimal places. The columns headed "length" give the lengths of the intervals containing t in which $\operatorname{Re}\zeta$ is negative. To 8 decimal places, the first interval, of length 0.05291225, is $(682112.89133824, 682112.94425049)$. The sum of the lengths of the first 50 intervals is 6.48390168, giving an estimate $d(1)\approx 3.85\times 10^{-7}$. This is close to our Monte Carlo estimate $d(1)\approx 3.80\times 10^{-7}$.

In this brief note we refrain from commenting on the region $\sigma\in[1/2,1)$, but refer the interested reader to the literature, such as Bohr and Jessen [1], Titchmarsh [13, §11.13], Tsang [14], Joyner [6], Laurinčikas [8], Steuding [12] and Kühn [7].

References

[1] H. Bohr and B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Mathematica **54** (1930), 1–35; *ibid* **58** (1931), 1–55.

[2] R. P. Brent, *Algorithms for Minimization without Derivatives*, Prentice-Hall, New Jersey, 1973. Reprinted by Dover, New York, 2002.

[3] T. J. Dekker, *Finding a zero by means of successive linear interpolation*, in *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra* (B. Dejon and P. Henrici, eds.), Interscience, New York, 1969.

[4] L. Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, Vol. 1, (original 1748, French translation 1796).

[5] C-E. Fröberg, *On the prime zeta function.* Nordisk Tidskrift für Informationsbehandling (BIT) **8**, 3 (1968), 187–202.

[6] D. Joyner, *Distribution Theorems of L-functions*, Pitman Research Notes in Mathematics **142**, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[7] P. Kühn, *On Selberg's central limit theorem*, Master Thesis, Department of Mathematics, ETH Zürich, Switzerland, March 2011.

[8] A. Laurinčikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Mathematics and its Applications **352**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[9] J. van de Lune, *Some observations concerning the zero-curves of the real and imaginary parts of Riemann's zeta function.* Afdeling Zuivere Wiskunde [Department of Pure Mathematics], Report ZW 201/83. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983. i+25 pp.

[10] J. van de Lune and H. J. J. te Riele, *Numerical computation of special zeros of partial sums of Riemann's zeta function*, Computational Methods in Number Theory, Part II, Math. Centrum Tracts, Vol. 155, Math. Centrum, Amsterdam, 1982, 371–387.

[11] D. C. Milioto, *A method for zeroing-in on* $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma+it)<0$ *in the half-plane* $\sigma>1$, arXiv:1001.2962v3, 20 Jan. 2010.

[12] J. Steuding, *Value-distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics **1877**, Springer, 2007.

[13] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd edition, edited by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford, 1986.

[14] K. Tsang, *The Distribution of the Values of the Riemann Zeta-function*, PhD Thesis, Department of Mathematics, Princeton University, Oct. 1984.

[15] J. W. Wrench, *Evaluation of Artin's constant and the twin prime constant*, Math. Comp. **15** (1961), 396–398.

Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Apdo. 41080-Sevilla, Spain

E-mail address: `arias@us.es`

Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

E-mail address: `abl@rpbrent.com`

Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Netherlands
(Formerly at CWI, Amsterdam)

E-mail address: `j.vandelune@hccnet.nl`

65

Wijze Raad

Liber Amicorum Herman Te Riele

Regelmatig denk ik terug aan de wijze raad die ik van Herman kreeg in januari 2006. Op dat moment be-
hoorde ik net tot het korps van jonge vaders die, als ze op reis gingen voor hun werk, 'iets leuks' mee terug
naar huis moesten nemen voor de kleine. Wij waren toen met Jan Karel naar het Institut des Hautes Études
Scientifiques (IHÉS) bij Parijs geweest voor een vergadering van ERCOM (zie voor meer hierover het Liber
van Jan Karel).

Op de terugweg was ik op de luchthaven op jacht naar een cadeautje voor mijn dochter Christina. Dat viel
niet mee. De keuze was beperkt en de prijzen waren ridicuul. Ik verzuchtte tegen Herman dat het niet mee-
viel om een 'iets leuks' te vinden. Wat zou hij doen?

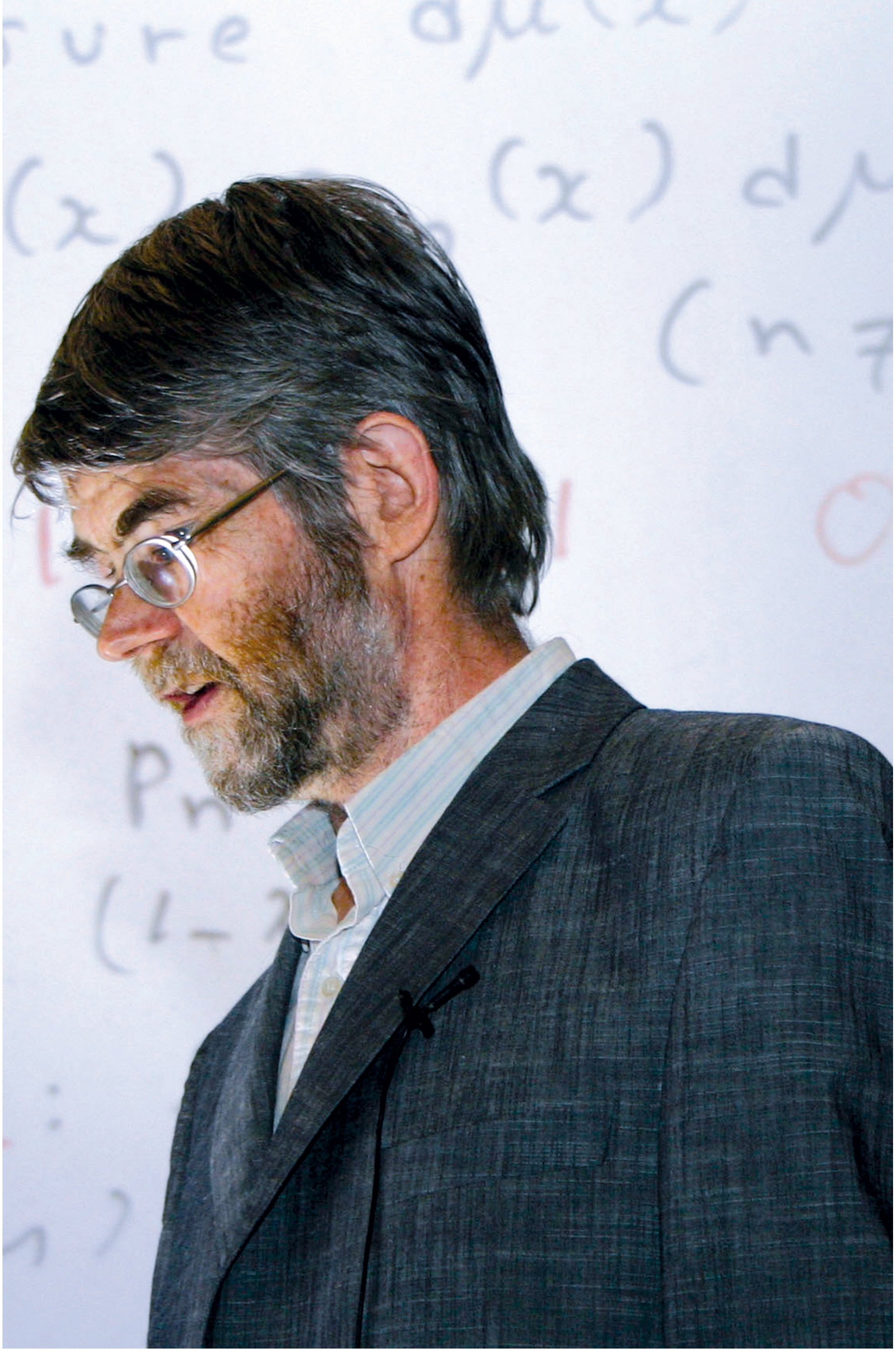
Op dat moment gaf Herman een even eenvoudige als briljante tip, die ik tot de dag van vandaag conse-
quent heb toegepast en waarvan ik in de toekomst ook zeker gebruik zal blijven maken. "Waarom koop je
niet zo'n magneetje voor op de koelkast? Die hebben ze overal, ze zijn niet zo duur zoals T-shirts van de
plek en het blijft leuk om te hebben want je kan ze verzamelen". Dus ik toog naar huis met een magnetische
Eiffeltoren en het dingetje viel goed in de smaak: het zag er vrolijk uit, werd door de kleine handjes aan een
minutieus onderzoek onderworpen en het wonderbaarlijk kleven aan metaal wakkert de bèta in elke peuter
aan. Door de jaren heen heeft Christina een aardige verzameling opgebouwd van alle unieke bestemmin-
gen. Al gauw raakte ik bedreven in het kopen op luchthavens bij de terugvlucht na een buitenlandse reis.

Herman's analyse bleek perfect: van elke bestemming is er wel eentje te vinden in de stad en/of op het
vliegveld. De kosten zijn beperkt tot doorgaans een euro of 3, maar met uitschieters in Warschau –te geef
voor minder dan een euro– en Nice –belachelijk duur aan de Côte d'Azur voor 7,95 euro–. En het laatste
argument: het blijft leuk, Christina is trots op haar verzameling, met voor elke reis een magneetje. Alhoewel,
we zijn wel steeds de klos met het volledig krijgen van Street Beanz, Superdieren, Smurfen en wat er zoal
meer wordt bedacht door de heren en dames marketeers.

Ook al treedt Herman toe tot het korps van ex-MC/CWI-ers, ik zal bij elke vlucht naar een nieuwe be-
stemming aan zijn tip van toen blijven denken. En bij de tip hoort de tipgever: een aimabele, behulpzame
man die met zijn mooie onderzoeksresultaten regelmatig het CWI een gezicht naar buiten heeft gegeven.
Door de jaren heen heb ik met Herman altijd plezierig samengewerkt en contact gehad.

Herman, geluk en gezondheid in je post-CWI leven met Toke, je kinderen en de kleinkinderen. Tot ziens!

Dick Broekhuis



Wiskunde in citaten uit de krant

door Tom Koornwinder, T.H.Koornwinder@uva.nl

Ik ken Herman te Riele al heel lang. Gedurende het grootste deel van mijn tijd op het MC/CWI (december 1968 – april 1992) was Herman daar ook werkzaam. Ook daarna hadden we geregeld professioneel contact of zagen we elkaar in de trein van of naar het Gooi.

In november 2009 brachten Herman en ik een intensieve week in Utrecht door als ambtelijk secretaries resp. lid van de visitatiecommissie voor het wiskundeonderzoek aan de algemene Nederlandse universiteiten.

Al vele jaren verzamel ik op een subpagina staff.science.uva.nl/~thk/quotations.html van mijn homepage citaten over wiskunde uit kranten en tijdschriften. Het gaat me daarbij niet zozeer over inhoudelijke wiskunde, maar over hoe de woorden *wiskunde* en *wiskundige* in allerlei maatschappelijke contexten gebruikt worden. In deze bijdrage heb ik de citaten gerubriceerd in een aantal categorieën en lever ik bij elke categorie wat commentaar.

Wiskunde en politiek

In het leven zijn gevoelens feiten. Je hoeft geen wiskunde gestudeerd te hebben om te beseffen dat de burgers van Amsterdam zich de afgelopen jaren minder veilig zijn gaan voelen.

> VVD-fractievoorzitter F. Houterman, Volkskrant 4 juli 1998, geciteerd in artikel *PvdA en VVD in Amsterdam pleiten voor messenverbod*

Milošević belegde 's avonds een bijeenkomst met de leiders van de Servische partijen, waarop hij volgens aanwezigen “kort en helder” sprak, als een “wiskundige”.

Artikel *De Dubbele Magneet*, NRC, 12 juni 1999

Toen ik de vraag kreeg wanneer Milocevic overstag gaat antwoordde ik: Dit is geen wiskunde. Je kunt het niet in de computer stoppen en dan het antwoord krijgen.

Minister Frank de Grave van Defensie in televisieprogramma *Buitenhof*, 13 juni 1999

Vice-president Gore bestreed Bush gisteren met zijn eigen wapen: hij beschuldigde de Texaan van fuzzy math, dubieuze rekenkunde.

Artikel *Bush houdt heel lichte voorsprong op Al Gore*, NRC, 16 oktober 2000

De Enigma werd gestolen tijdens een open dag in het Bletchley Park-Museum. Hier bekortten Britse en Poolse wiskundigen de oorlog met een paar jaar door de Duitse codes te breken.

Artikel *Gestolen Enigma is terug*, NRC, 18 oktober 2000

Niet verwonderlijk dat de Europese regeringsleiders kort na de "Slag van Nice", waarin politieke besluitvorming synoniem werd voor hogere wiskunde, besloten om een nieuwe poging te wagen om tot doorzichtiger systeem te komen.

Artikel *Nederland in EU een tikkeltje “gewichtiger”*, NRC, 2 november 2004

Ik vind dat de koningin het voortreffelijk doet. Zij sluit haast op een algebraïsche wijze aan op alle adviezen die ze krijgt.

Gerdi Verbeet (voorzitter Tweede Kamer) in interview, NRC, 15 december 2007

In een lang proces komen alle critici tot hun recht. En uit de schok van de opinies vloeit de waarheid voort. Het is de enige route die ik ken. In het politieke debat dan. Niet in de wiskunde. Daar is de waarheid ondubbelzinnig.

Alexander Rinnooy Kan (voorzitter SER) in interview, NRC, 29 december 2007

In de wereld van de toegepaste wiskunde maakte Alexander Rinnooy Kan snel carrière. Op zijn 31ste was hij hoogleraar aan de Erasmus Universiteit in Rotterdam en in 1984 ging hij naar het Massachusetts Institute of Technology in Boston. Daar verdiepte hij zich in de wetenschap van het onderhandelen en deed kennis op die hem de rest van zijn leven goed van pas zou komen. Hij leerde er, zei hij in eerdere interviews, wat je intuïtief al weet: dat onderhandelen de dominante omgangsvorm in ons soort samenleving is. En dat die geanalyseerd kan worden, waarmee de resultaten van onderhandelingen niet per se voorspelbaar worden, maar wel begrijpelijk zijn.

Artikel *Dus waarom zou deze wiskundige niet kunnen? Ervaren bestuurder is grootste polderaar van Nederland*, NRC, 20 oktober 2011

In het eerste citaat over Milošević en in het citaat van Verbeet over de koningin wordt het als positieve eigenschap gezien wanneer een niet-wiskundige als een wiskundige denkt of spreekt. Maar het tweede citaat over Milošević en het citaat van Rinnooy Kan laten blijken dat er in de politiek ook zaken zijn die niet met wiskunde behandeld kunnen worden. In het geval van Rinnooy Kan zegt het laatste citaat hierboven dat de kunst van het onderhandelen een wetenschappelijke, zelfs wiskundige basis heeft, wat polder-wiskundigen goed van pas kan komen. In het citaat van Houterman en het citaat over de EU-top in Nice wordt wiskunde als moeilijk gezien: sommige dingen kun je best snappen zonder wiskunde en als je te veel wiskunde in een kiessysteem stopt dan is het niet meer aan de burger te verkopen. Fuzzy math heeft bij veel wiskundigen een slechte reputatie, kennelijk ook bij het grote publiek (dat de meer technische betekenis van fuzzy math niet zal kennen). Hier maakt Gore behendig gebruik van. Het indrukwekkendste citaat in deze rubriek is misschien wel dat over Enigma, hoewel ik niet helemaal geloof in de claim dat de tweede wereldoorlog door het gebruik van Enigma met een paar jaar verkort is.

Wiskunde en economie

Leerlingen denken dat je met wiskunde alleen een saaie professor kunt worden. Maar banken zitten te springen om wiskundigen.

Henk Huijsmans (voorzitter Nederlandse Vereniging voor Onderwijs in de Natuurwetenschappen) geciteerd in artikel *Als het niet hoeft* … , NRC, 8 december 2007

Maar het probleem is dat risicomanagement tegenwoordig alleen met ellenlange formules en constructies rekent. Nooit gaan ze eens bij elkaar zitten en vragen zich met hun gezonde boerenverstand af: welk risico lopen we nu echt?

Gerrit Zalm in een interview in Sp!ts, 30 oktober 2008

Als de goden iemand willen vernietigen, leren ze hem wiskunde.

Artikel *Het korte leven en de dood van Planeet Financiën* door Niall Ferguson, Groene , 30 januari 2009

Ze worden de 'quants' genoemd, 'raketgeleerden' of rekenwonders. De wiskundigen, sterrenkundigen en theoretisch natuurkundigen die banken van de universiteiten plukken om financiële producten te ontwikkelen. Aan de combinatie van steeds snellere computers en de creatieve toepassing van wiskundige formules zijn de complexe 'gestructureerde producten' te danken die nu het rottende hart vormen van de financiële crisis.

Roel Janssen, NRC, 4 februari 2009

Zo moeilijk is het bankierswerk nu ook weer niet. Een mens moet er alert voor zijn en goed kunnen rekenen. Maar het zijn heus niet allemaal raketgeleerden die er werken en het vergt niet het talent dat artiesten of topsporters nodig hebben. De arbeid is vaak hard, lang en intensief, maar ga maar eens een weekje dekbedovertrekken verkopen op de Albert Cuyp. Dat is ook lang, hard en intensief.

Maarten Schinkel, NRC, 3 maart 2009

Wiskundige economen koken heel precies maar in kleine pannetjes met een minimum aan ingrediënten omdat anders de dynamiek te gecompliceerd wordt.

Eduard Bomhoff in artikel *Lesje in bescheidenheid voor economen*, NRC, 22 oktober 2011

Eind 2007, net voor de kredietcrisis, kon Henk Huijsmans de wiskunde-afstudeerders nog ongegeneerd wijzen op een carrière bij de bank (en passant de wiskunde-professoren stigmatiserend als saai), maar korte tijd daarna krijgen de financiële wiskundigen de schuld van de crisis, bij Ferguson en Janssen heel fel, bij Zalm wat vriendelijker, terwijl Schinkel hun intellect relativeert. Heel recent pakt Eduard Bomhoff (korte tijd minister voor de LPF) de wiskundige economen aan, de topdogs in de economische wetenschap die met de Nobelprijzen weglopen.

Wiskunde en Google

Het bedrijf is te academisch ingesteld, te veel een verzameling genieën. Ze denken dat alles is op te lossen met wiskunde.

Artikel *Sleutel tot de wereld* (over Google) in NRC, 27 juni 2003

De dominantie van Google op het gebied van zoekopdrachten vloeitvoort uit het vertrouwen van gebruikers dat ze betrouwbare, wiskundig kloppende resultaten voorgeschoteld krijgen.

Artikel *Overname Yelp plaatst Google wellicht voor problemen*, NRC, 21 december 2009

Het citaat uit 2003 heeft nog twijfels of Google er goed aan doet zo wiskundig te werk te gaan, maar het heeft gezien de verdere groei van Google geen gelijk gekregen. Volgens het tweede citaat zou dit wiskundige karakter zelfs het imago van Google bij de gebruiker verbeteren. Ik heb het nog maar zelden op andere plaatsen gezien dat een associatie met wiskunde tot imagoverbetering bij het grote publiek leidt.

Wiskunde en muziek

Wat vooral opvalt op zo'n festival is, dat geavanceerdheid in wis- en natuurkundige zin niet automatisch hoeft te betekenen dat er ook sprake is van vooruitstrevendheid in muzikale zin.

> Ernst Vermeulen, NRC, 14 oktober 1996, in bespreking van Microtonaal Festival

Van mijn klassieke uitstapjes heb ik geleerd hoe akkoordenschema's werken. Op een gegeven moment was het alsof ik de code had gekraakt, het schijnt heel wiskundig te zijn. Nu gebruik ik in mijn eigen muziek akkoorden die alle kanten uitvliegen.

> DJ en housemuzikant Laidback Luke over Klassieke muziek, NRC, 16 februari 2004

Als ik een stuk ga componeren dan probeer ik een wereld te scheppen. In die wereld moet alles kloppen, helemaal perfect zijn. Ik gebruik wiskundige formules om te componeren, want wiskunde is een perfecte afspiegeling van de natuur, en de natuur is perfect.

> Jonge componist Witte Wijsmuller (17) in artikel *Irritante muziek* van Mickey Hoyle, NRC, 19 februari 2005

Zoals Poesjkin al zei: met algebra maak je geen muziek. Muziek is een van de grootste wonderen.

Dmitri Ferschtman in een interview in NRC, 28 januari 2011. Hij doelt hier op een passage in de korte eenacter *Mozart en Salieri* van Poesjkin, waarin Salieri over zichzelf zegt:“In doodgedrilde klanken heb ’k anatomisch de muziek ontleed, heb harmonie aan algebra getoetst.” (vertaling uit *A.S. Poesjkin, Dramatisch werk en proza, De Russische Bibliotheek, G.A. van Oorschot, Amsterdam, 1958*)

Van deze vier citaten vinden er twee de wiskunde heel belangrijk als onderliggend principe bij componeren of improviseren, maar de andere twee (een luisteraar-criticus en een vertolker) zijn sceptisch over het behoud van de muzikaliteit bij teveel wiskunde. Ik ben geneigd met dit laatste kamp in te stemmen, zie ook het artikel *Can one hear the sound of a theorem?* door Rob Schneiderman in *Notices Amer. Math. Soc.*, August 2011.

Wiskunde als schoolvak

Herinner u — of weet, als ge dit nooit mocht hebben vernomen — dat wiskunde in-genen-dele 'n zogenaamd droog vak is …

> Multatuli, *Ideeën*, Derde Bundel (1871), uit Idee 599, geciteerd in het proefschrift *Mathematical methods for reflector designs* van Maurice Maes, Universiteit van Amsterdam, 1997.

Ik herinner me goed het geluk van het wiskundeproefwerk vroeger op school. Vooral als het om bewijzen ging, die opgaven die je begon te beantwoorden door op te schrijven, ‘gegeven’, ‘te bewijzen’ en dan ‘bewijs’. Tot slot het q.e.d. — heerlijk. En hoe de bel je dan altijd als uit een andere wereld haalde, en je jezelf met gloeiende wangen en nog bijna duizelig van concentratie terugvond in het klaslokaal. Je was er een uur lang niet geweest, althans, je had jezelf een uur lang niet gemerkt.

> Marjoleine de Vos in haar column *Dat je bent niet merken,* NRC, 21 juli 2004

In plaats daarvan denk ik terug aan het geluk van het wiskundeproefwerk — wiskunde was vroeger niet mijn lievelingsvak. Toch hadden bijlessen en ijverig leren op een gegeven moment gemaakt dat ik, ondanks geringe wiskundige aanleg, zag hoe je de opgaven aan moest pakken. Ik herinner me hoe ik aan het werk ging, hulplijnen construeerde, netjes, stap voor stap het bewijs opzette. Hoe tevreden stemmend het was te begrijpen waar je heen ging en aan het eind van een opgave te kunnen schrijven: q.e.d. En hoe dan ineens de bel ging, en je met rode wangen opkeek, verwonderd dat je in het wiskundelokaal zat, dat de wereld weer verder ging — je was één geworden met de sommen, de tijd was omgevlogen.

Marjoleine de Vos in artikel *Het ideaal van deze tijd is chaotisch gerommel. Multitasker doet niets goed*, NRC, 6 september 2008

Het wiskunde-examen (in Suriname) kan men zien als een vroegevoorloper van het inburgeringsexamen en het was vroeger een flink stuk pittiger. Nu hoef je alleen twee Nederlandse zinnen te kennen: “Waar is het postkantoor”, of: “Hoe hoog is de vertrekpremie?” Vroeger moest je alles weten van tangens, sinus en cosinus.

Anil Ramdas in zijn column *Geef ze de nul terug*, NRC, 8 november 2004

Hiermee laat het kabinet zien dat je een probleem voor het leven hebt als je met de kerncompetenties Nederlands, Engels en wiskunde niet uit de voeten kan.

Alexander Pechtold geciteerd in artikel *Calculerende scholier krijgt het lastiger*, NRC, 24 oktober 2008

Met een vak als wiskunde is het moeilijk om in populariteit op te boksen tegen een vak als gelukskunde. Als docent lift ik mee op dat succes, dus de wrevel begrijp ik. Zo iemand doet zijn stinkende best om hun de liefde voor de stelling van Pythagoras bij te brengen en dan kom ik even de show stelen met een les over ‘moeten’ en de stress die dat kan veroorzaken.

Artikel *Het verhaal van docent Theo Wismans over het nut van het verplichte vak gelukskunde*, NRC, 31 januari 2009

Wiskunde en gymnastiek zijn ook niet leuk en toch protesteert niemand tegen het nut van die vakken.

Marita Mathijsen in column *Een keten van menselijkheid*, NRC, 2 januari ‘10

Wiskunde is in het algemeen niet het meest populaire schoolvak, maar de citaten erkennen wel dat het een nuttig vak is. Met ingang van 2013 is een noodzakelijke voorwaarde voor slagen bij eindexamens havo en vwo dat minstens twee van de drie cijfers voor Nederlands, Engels en wiskunde voldoende zijn, terwijl een onvoldoende cijfer niet lager dan vijf mag zijn. Of in de huidige situatie iedereen met een vier voor wiskunde een probleem voor het leven zou hebben, zoals Pechtold suggereert, betwijfel ik. Misschien worden door deze nieuwe regel wel problemen voor het leven gecreëerd omdat geheide alfa's niet meer kunnen slagen voor het eindexamen. Overigens blijkt Marjoleine de Vos aan hergebruik van haar columns te doen. Niet zo erg, ook Bach en Mozart gebruikten hun eerdere composities opnieuw.

Diversen over wiskunde

In de wiskunde heb je die koraalrifjes, die allemaal niks met elkaar te maken hebben tot er iemand van het ene naar het andere zwemt, en in de natuurkunde heb je van die scholen vissen, die allemaal zo nu en dan ineens van richting veranderen. Ik denk niet dat het een beter is dan het andere, maar ik denk dat ze alle twee kortzichtig zijn.

Ingrid Daubechies geïnterviewd in *ITW Nieuws* 6 (1996), no. 3

Ik ben erachter gekomen dat de menselijke psyche dezelfde mathematische benadering vergt als tandheelkunde.

Interview met Hans Beekmans, de tandarts van het koninklijk huis, NRC, 27 december 2003

Vliegend boven Nederland zie ik zuiver wiskundige vormen. Een dorp. Rechthoekige velden. Een kanaal. Veel autowegen. Alweer het volgende dorp, met erg veel uitwaaierende nieuwbouw. En dat is dan mijn met een liniaal geconstrueerde vaderland. Maar sta je op de grond, dan blijken er, als door een wonder, nog wel wat aardige stukken te zijn. Een polder met rijen bomen. Of een rij duinen met wat bos. En bovenal is er de zee. Deze vergezichten zijn gespaard gebleven en het zijn onze allerlaatste illusies van ruimte.

Daan Remmerts de Vries in artikel *Er waait een nieuwe waan door ons land: de windmolenwaan*, NRC, 28 augustus 2004

De geest waait waar hij wil, maar als hij zich eerst moet laten tellen, fnuikt dat zijn vlucht.

Floris Cohen op blz. 279 van zijn boek *De herschepping van de wereld*, Uitgeverij Bert Bakker, 2008

Grappen maken is iets wiskundigs. Je denkt heel erg op twee niveaus: je speelt en je praat en tegelijk voel je wanneer iets moet komen. Zoiets kun je wel ontwikkelen, maar je moet ook geboren zijn met dat gevoel voor timing.

Interview met actrice Tjitske Reidinga, NRC Weekblad, 5 september 2009

Wiskunde is — anders dan politiek of management — schoon, eerlijk, onbetwist, rechtlijnig, consequent en creatief tegelijk en kan voor sommige vraagstukken prachtige elegante oplossingen hebben die tegelijkertijd compromisloos zijn. Wiskunde kent geen poldercultuur. Het grote misverstand is dat wiskunde een exclusieve bezigheid van de geest is: zij die wiskunde bedrijven zouden niets anders kunnen, en zij die iets anders kunnen zijn onbenullen op het mathematische vlak. Het is fout gedacht. Er zit wiskunde in iedere minuut van de dag, op iedere are van de wereld en in elke handeling van de mens. We realiseren het ons nauwelijks, omdat de wiskunde bescheiden is en niets claimt. Geen portretrecht, geen vlaktaks of bonus. De wiskunde dient, belangeloos, zonder oogmerk.

Joost Steins Bisschop in een column *Het jaar van de wiskunde*, Frankwatching, 9 januari 2011, eveneens gepubliceerd in het Financiële Dagblad

Een veelheid van meningen, over het algemeen positief over de wiskunde, soms van zulke onverwachte zijden als van een tandarts of een actrice. De beeldspraak van Ingrid Daubechiesis prachtig. Het citaat van Floris Cohen correspondeert mooi met dat van Dmitri Ferschtman over muziek.

Beroepspraktijk op de universiteit

Twintig jaar geleden kon een hoogleraar nog dingen doen die hij leuk vond.

Dr. Frank van Eijkern, Hypothese, september 1996, geciteerd in *De prof als aangestuurde werknemer*

Hij zit, een week na de prijsuitreiking, over zijn onderzoek te praten in zo’n werkkamer waarin je onmiddellijk kunt zien dat je in een universiteits-gebouw bent. De helft kleiner dan iedere werkkamer van een bestuurder bij Ahold of Aegon.

> Artikel *‘Je blijkt altijd ongelijk te hebben’. Kanker-onderzoeker Hans Cleversgelooft in het toeval*, NRC, 9 december 2000

In W&O van 19 oktober constateert Piet Borst (‘Meer domme studenten’) dat de gemiddelde kwaliteit van de studenten is afgenomen; immers een groeiend deel van de mensen in de studentenleeftijd gaat inderdaad studeren. Wat ik in Borsts artikel heb gemist is een soortgelijke overweging ten aanzien van hoogleraren. Ook daarvan zijn er nu meer dan tien keer zoveel als 65 jaar geleden, terwijl de bevolking maar verdubbeld is. Je kunt nu weliswaar professor worden in vakken als Globalisering, Vrijetijdsbesteding, Vrouwenstudies en Andragologie, maar het aantal hoogleraren in bijvoorbeeld de Wiskunde is ook met bijna een factor tien gestegen. We moeten constateren dat ook onder de hoogleraren sprake is van verdomming. Het feit dat collega Borst hierover zwijgt zou door kwaaddenkende lieden als een bevestiging van deze stelling kunnen worden gezien.

> Ingezonden stuk van Dr. F.W. Steutel, Em. Hoogleraar wiskunde Eindhoven, NRC, 26 oktober 2002

De SP was in het debat ook kritisch over de wetswijziging, omdat het een hoogleraar tot werken in een kas zou kunnen dwingen. “Het ademt de sfeer van de werkverschaffing uit de dertiger jaren”, zei Paul Ulenbelt. Maar de minister van Sociale Zaken vindt dat sommige Kamerleden te neerbuigend over zulk werk doen. Volgens hem kan het heel gezond zijn voor een hoogleraar of een advocaat om een tijd in een kas te werken of asperges te steken. “Er heerst hier een zeker dedain ten opzichte van arbeid. Aspergesteken is ook arbeid. Ik kan u dat zeer aanbevelen: het zijn uitstekende momenten om tot zelfreflectie te komen en tot inkeer.”

Artikel *Werkloze kan baan straks lastiger weigeren*, NRC, 4 maart 2009

In deze citaten kan Herman lezen wat hij ontlopen is door gedurende zijn hele loopbaan op het CWI te blijven en niet, zoals ik, naar de universiteit over te stappen.

A NOTE ON *ALMOST FLAT* NUMBERS

JUAN ARIAS DE REYNA AND JAN VAN DE LUNE

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

In this note we present a solution of the following

Problem. *For* $n \in \mathbb{N}$ *let* $\beta(n)$ *be the product of all prime divisors of* n *(not counting multiplicities).*

So, in the notation of Hardy & Wright, if $n = \prod p^e$ *then* $\beta(n) = \prod p$ *with* $\beta(1) = 1$.

A positive integer n *is called* flat *iff* $n = \beta(n)$ *(or, equivalently, iff* $|\mu(n)| = 1$*, where* $\mu(n)$ *is the Möbius function).*

A positive integer is called almost flat *iff* $n/\beta(n)$ *is prime.*

(A) Show that the sequence of almost flat numbers has a positive natural density (denoted by d_1 *), and indicate how this density can be computed to any degree of accuracy. (This is the case* $k = 1$ *in the next, more general problem (B).)*

(B) Let $\omega(n)$ *denote the number of different prime divisors of* $n \in \mathbb{N}$ *(not counting multiplicities), and let* k *be any (fixed) positive integer.*

Show that the sequence of all $n \in \mathbb{N}$ *such that* $q := q(n) := n/\beta(n)$ *is flat with* $\omega(q) = k$*, has positive natural density (denoted by* d_k *), and indicate how this density can be computed to any degree of accuracy.*

(B1) Solve this problem for $k = 2$.

(B2) How to proceed for $k \geq 3$*? Compute* d_3*,* d_4 *and* d_5.

Solution of (A), the case $k = 1$.

The generating Dirichlet series of the almost flat numbers is obtained by expanding

$$(1) \qquad \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q^{2s}} \frac{\prod_{p \text{ prime}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)}{1 + \frac{1}{q^s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q^s(q^s + 1)}, \qquad (s = \sigma + it, \sigma > 1).$$

Invoking the well-known Wiener-Ikehara Tauberian theorem (which applies indeed see [3, p. 259–266]), we find that the required natural density d_1 exists and equals

$$d_1 = \frac{6}{\pi^2} \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q(q+1)}. \tag{2}$$

The sum of the last series may be approximated by observing that

$$\begin{aligned} \sigma_1 := \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q(q+1)} &= \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q^2} \frac{1}{1+\frac{1}{q}} = \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{q \text{ prime}} \frac{1}{q^{2+n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n+2) \end{aligned} \tag{3}$$

where, for $s > 1$,

$$P(s) := \sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r} \log \zeta(rs) \tag{4}$$

(see Titchmarsh [4, p. 12, formula (1.6.1)]) and that, also for $s > 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu(r)}{r} \log \zeta(rs) \right| \le \frac{1}{r} \log \zeta(rs) < \frac{1}{r} \log\left(1 + \frac{1}{2^{rs}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{rs}}\right) < \\ < \frac{1}{r} \log\left(1 + \frac{3}{2^{rs}}\right) < \frac{3}{2^{rs}} \end{aligned}$$

so that, for $n \ge 2$,

$$P(n) < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \log \zeta(rs) < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2^{rs}} < \frac{3}{2^n - 1} \le \frac{4}{2^n}. \tag{5}$$

A combination of these ingredients is sufficient for a high precision computation of $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n P(n)$.

For $n \ge 2$ we may approximate $P(n)$ by evaluating $\sum_{r=1}^{R} \frac{\mu(r)}{r} \log \zeta(rn)$ for a sufficiently large R.

If we want an accuracy of ε then it suffices to take R such that $\sum_{r=R+1}^{\infty} \frac{1}{r} \log \zeta(rn) < \varepsilon$. It is easily seen that

$$R = \left\lfloor \frac{1}{n} \frac{\log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)}{\log 2} \right\rfloor \tag{6}$$

suffices. Using Mathematica we find

$\sigma_1 \approx 0.3302299262\ 6420324101\ 5094588086\ 7447606442\ 5941947407\ \ldots$

so that (recall that $d_1 = \frac{6}{\pi^2}\sigma_1$)

$d_1 \approx 0.2007557220\ 1926598699\ 6250723114\ 4047658535\ 3555535256\ \ldots$

Solution of (B1), the case $k = 2$.

Similarly as in (A) the required density d_2 equals

$$d_2 = \frac{6}{\pi^2} \sum_{p<q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)} \tag{7}$$

(p and q denoting primes).

The last series may also be written as

$$\sigma_2 := \sum_{p<q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{p<q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)} + \sum_{q<p} \frac{1}{q(q+1)p(p+1)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \neq q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{p,q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)} - \sum_{p=q} \frac{1}{p(p+1)q(q+1)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_p \frac{1}{p(p+1)}\Big)^2 - \sum_p \frac{1}{p^2(p+1)^2}\Big] = \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^4\left(1+\frac{1}{p}\right)^2}$$

(with $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{6} d_1$) and this in its turn may be reduced to a form "only" containing $P(n)$'s, so that we can compute σ_2 (and hence d_2) to any degree of accuracy. Indeed, it is easily verified that

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n P(n+3). \tag{8}$$

Using *Mathematica* we find that

$\sigma_2 \approx 0.0727869325\ 3120878610\ 0250493970\ 5431864431\ 8060075841\ \ldots$

so that

$d_2 \approx 0.0221245744\ 7327116398\ 0012002355\ 9483175788\ 6781598850\ \ldots$

Solution of (B2), the case $k \geq 3$.

For $k \geq 3$ we make use of the well-known (Girard-) Newton formulas. We briefly recall some pertinent details :

We consider (formally) the equation $f(x) = \sum_n (-1)^n \sigma_n x^n = 0$ with roots $\frac{1}{\alpha_k}$. In our application we will have $\alpha_n = \frac{1}{p_n(p_n+1)}$ where p_n is the n-th prime. Then we have

$$\sum_n (-1)^n \sigma_n x^n = \prod_n (1 - \alpha_n x) = 0, \quad \text{with} \quad \sigma_n = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_n} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_n}$$

(we assume here that $\sigma_0 = 1$). We define

$$S_k := \sum_n \alpha_n^k.$$

Although the (Girard-) Newton formulas usually express the sums S_n in terms of the coefficients σ_n, we will turn things around and express the (elementary symmetric functions) σ_n in terms of the (exponential sums) S_n. In order to do so we compute $f'(x)$ in two different ways :

$$f'(x) = \sum_n (-1)^n n\sigma_n x^{n-1}$$

and

$$f'(x) = -f(x)\sum_n \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n x} = -f(x)\sum_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^{k+1} x^k = -f(x)\sum_{k=0}^{\infty} S_{k+1}x^k.$$

Comparing coefficients we find that (see [1, Chap. 8, p. 166], [2, p. 140] or [5, p. 99])

$$(-1)^m m\,\sigma_m = -\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n \sigma_n S_{m-n} \tag{9}$$

which leads directly to the recurrence (with $\sigma_0 = 1$)

$$\sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m}(S_m - \sigma_1 S_{m-1} + \sigma_2 S_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1}\sigma_{m-1}S_1), \qquad (m \geq 1).$$

In this way we easily obtain, for example,

$$\sigma_1 = S_1$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3)$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{24}(S_1^4 - 6S_1^2S_2 + 3S_2^2 + 8S_1S_3 - 6S_4)$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{120}(S_1^5 - 10S_1^3S_2 + 15S_1S_2^2 + 20S_1^2S_3 - 20S_2S_3 - 30S_1S_4 + 24S_5).$$

For $k = 3$ we have to deal with the sum

$$\sigma_3 := \sum_p \frac{1}{p(p+1)} \sum_{p<q} \frac{1}{q(q+1)} \sum_{q<r} \frac{1}{r(r+1)}, \qquad (p, q, r \text{ primes}).$$

In this case we have :

$$\alpha_n = \frac{1}{p_n(p_n+1)}, \quad \sigma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{n<m} \alpha_m \sum_{m<r} \alpha_r = \tag{10}$$

$$= \sum_n \frac{1}{p_n(p_n+1)} \sum_{n<m} \frac{1}{p_m(p_m+1)} \sum_{m<r} \frac{1}{p_r(p_r+1)}$$

and

$$\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3).$$

Note that we can compute the $S_n = \sum_p \frac{1}{p^n(p+1)^n}$ by the formula

(11)

$$S_n = \sum_p \frac{1}{p^n(1+p)^n} = \sum_p \frac{1}{p^{2n}}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-n} = \sum_p \frac{1}{p^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}\frac{1}{p^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \sum_p \frac{1}{p^{2n+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} P(2n+k).$$

Proceeding similarly for $k > 3$ we find (using Mathematica)

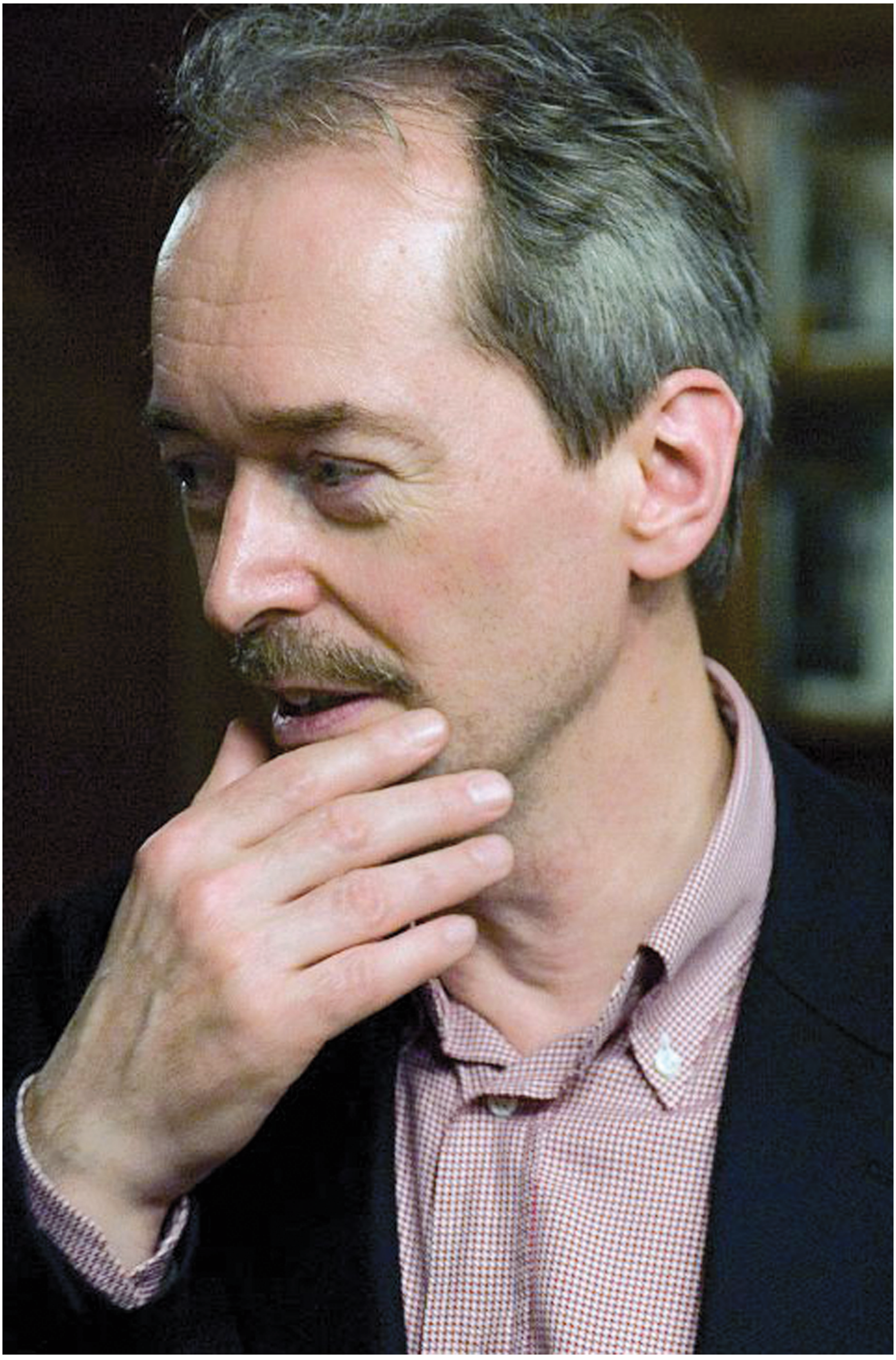
$d_1 = 0.2007557220\ 1926598699\ 6250723114\ 4047658535\ 3555535256\ \ldots$
$d_2 = 0.0221245744\ 7327116398\ 0012002355\ 9483175788\ 6781598850\ \ldots$
$d_3 = 0.0010728279\ 2166161493\ 7597184179\ 0511299854\ 7080207983\ \ldots$
$d_4 = 0.0000267593\ 5151889275\ 7741972284\ 4743787780\ 5157715943\ \ldots$
$d_5 = 0.0000003834\ 9005273872\ 2348794555\ 0178910921\ 5013442743\ \ldots$
$d_6 = 0.0000000034\ 4999551430\ 8580387444\ 6993630085\ 9120389312\ \ldots$
$d_7 = 0.0000000000\ 2082589566\ 1766505646\ 3194316856\ 4945749335\ \ldots$
$d_8 = 0.0000000000\ 0008875408\ 1001607125\ 3428410234\ 4454925913\ \ldots$
$d_9 = 0.0000000000\ 0000027791\ 2994465580\ 9631134694\ 5089946028\ \ldots$
$d_{10} = 0.0000000000\ 0000000066\ 0331441112\ 0947527899\ 3022631397\ \ldots$

References

[1] W. S. Burnside & A. W. Panton, *The Theory of Equations*, Vol. 1, Dover, 1960.
[2] N. Jacobson, *Basic Algebra*, Vol. 1, 2 ed., W. H. Freeman and Company, 1996.
[3] H. L. Montgomery & R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I, Classical Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
[4] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Second ed. revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
[5] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Vol. 1, Springer, 1991.

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,
Apdo. 1160, 41080-Sevilla, Spain
E-mail address: arias@us.es

Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Neterlands
(Formerly at CWI, Amsterdam)
E-mail address: j.vandelune@hccnet.nl



Van een afstand heb ik vaak met bewondering gekeken naar het werk van Herman e.s. Verleden, heden en toekomst waren steeds vertegenwoordigd: klassieke problemen werden aangepakt met moderne techniek en met relevantie voor toekomstige toepassingen. Het zegt volgens mij ook iets over Herman als mens, hij is niet iemand die de waan van de dag achterna holt, tegelijkertijd is hij niet van het heden vervreemd. En hij ziet zaken in perspectief, misschien daarom ook dat hij nu al afscheid kan nemen.

Het is jammer dat Dik Winter, met wie ik nog een tijd een kamer heb gedeeld, geen deel kon uitmaken van de festiviteiten.

Ik wens Herman en de zijnen plezierige jaren toe.

Paul de Zeeuw

Blaise Pascal

"Deux excès: exclure la raison,
n'admettre que la raison"

en

"C'est le cœur qui sent Dieu,
et non la raison"


Voor opa Herman,
Veel liefs
Emmelot

PNA5: The CWI Cryptology Group

Dear Herman,

Since we are the cryptology group, we cannot make it too easy for you and simply give you a plain-text message. Instead, our message to you is encrypted. Unfortunately, your great expertise in factoring large numbers will not be of any help to you for breaking the cipher; however, your skills in solving puzzles will.

According to rumor, it used to be that your colleagues first had to solve a puzzle before they could get a piece of your birthday cake. Also, in the recent CWI personeelsblad, you were challenging the reader with a mysterious message.

We therefore think it is only fair to finally turn the table on you and challenge you with the following puzzle.

Enjoy!

The Cryptology Group

```
KTPIA VDZTU DKVKW AEMFN TRKJA SWVXC XKVER TYRWZ LRHRK FADEZ KUZXH CSNXJ
UAVLG TCRYA CXPIS FXJZB MAPZV RFGWN ZIPJE FZTMV HDCOV FUBZE JQSCQ SHYIJ
ETKQY RFDJJ XVYGH WAPEM FDRZB APIEP OBFLI DTPZP HKPCV PHLDE XAXGV FVZGL
VLTTT EMYPH NHJEZ BLHBH DDXYU AMZXU KARFC KVKTJ MFNRG LRTJL RDLRV JWROV
MYPHN HSXVZ NOHAJ RUCQZ XTQTI HWAHK NGDLI RZQPL WDGXK AZTPC IRBEA HKHBX
TTSXR BUITI TTFVH UHLYB CQLHB PGVPI UGBUV NFNIN BHRDC RFZON USTCL FSQEL
HHNFN BZBPA WTTKP BGHSD VPZIA HIPHP MXIKF HJXPS EVSEH BEDWI VACEL IWZLT
MATSH DTEVM EEFQT JXVZV GAWTG BTFHK LWPGI PDRMP GTDXE FUXYB PERFG EYYXT
EWJAS MOTRI RGFBE VVNXK FGC
```

(Vigenère-9)

Dag Herman!

Ook voor jou is het zover. Na 41 jaar verlaat je het CWI voor een Welverdiend Pensioen zoals dat zo mooi heet.

Mijn eerste kennismaking met jou was toen jij net was aangesteld en mij als programma-adviseur mocht helpen met een ALGOL60-programma. Halverwege ons gesprek ontdekte ik de fout zelf, zodat ik je eigenlijk voor niks had bezocht, maar jij zei het helemaal niet erg te vinden.

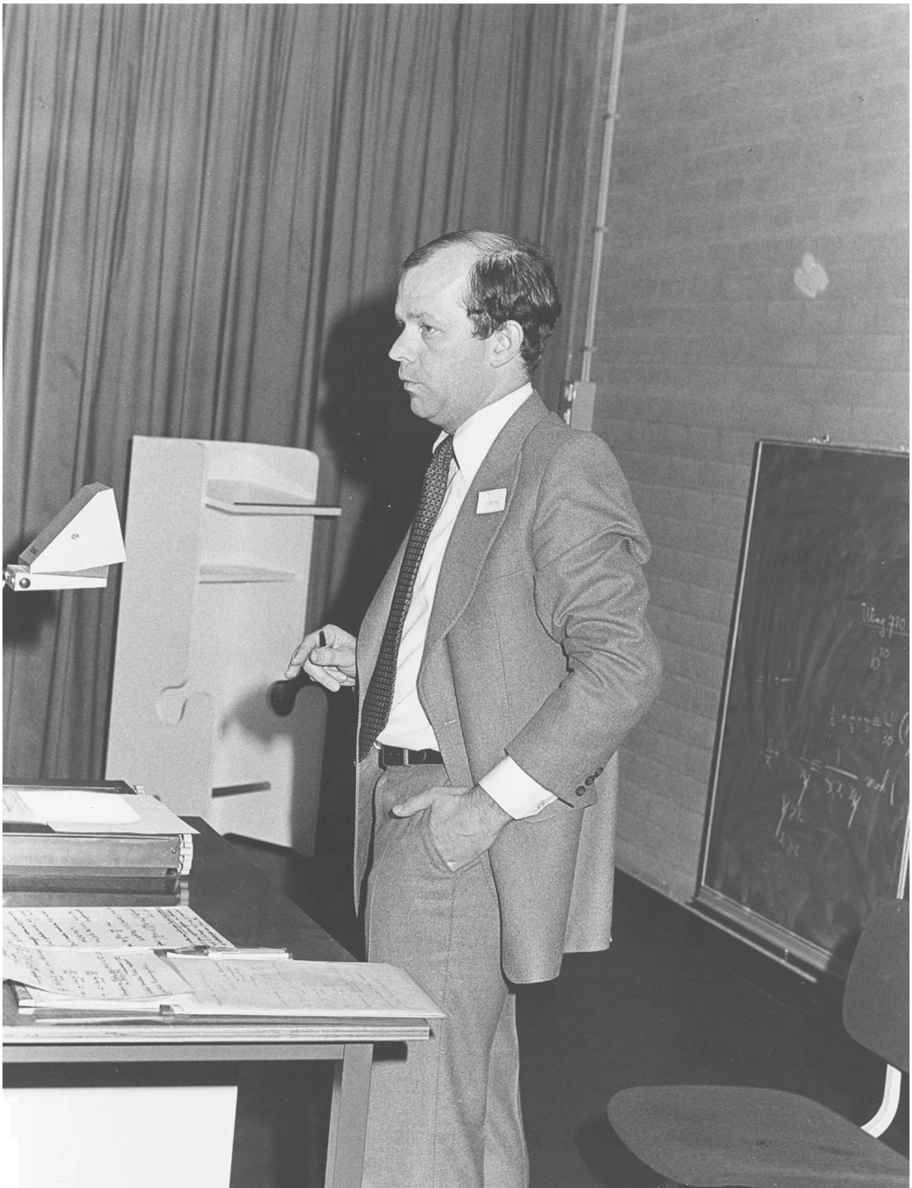
Later werden wij afdelingsgenoten, bij Numerieke Wiskunde. Wat jij daar deed (numerieke getaltheorie) was mij niet geheel duidelijk, maar je had er duidelijk veel plezier mee en promoveerde er ook nog in, als eerste van NW. Uren zat je met Jan van de Lune achter de computer om de nulpunten van de ζ-functie van Rieman te berekenen of voor andere rekenintensieve programma's. Ook hield je je bezig met perfecte, gladde, bevriende getallen, priemtweelingen en nog veel meer.

Na vijf jaar verliet ik NW en zagen we elkaar wat minder vaak. In 1999 haalde je ineens de wereldpers, toen je er met wat maatjes erin slaagde om een (qua tijdsduur) onkraakbaar geachte RSA-code binnen een paar maanden toch te kraken. Inderhaast werd midden in de zomer een persconferentie op het CWI georganiseerd, waar jij met o.m. Arjen Lenstra de pers te woord stond. Dat moet wel je "finest hour" zijn geweest. Je bleek ineens een geducht tegenspeler van cryptografen als David Chaum, Ronald Cramer, etc. Mogelijk hield je overplaatsing naar Ronalds afdeling vanuit je vertrouwde NW/MAS hiermee verband.

Eén anekdote over jou wil ik de lezers van dit Liber niet onthouden. We zaten met nog wat andere MC'ers in een hok ook bekend als terminalkamer in het oude MC-gebouw, toen de telefoon ging. Een medewerkster die nog nooit van jou had gehoord nam op en zei eerst: "Kriele?", vervolgens "Briele?" en toen eindelijk "O, Te Riele!" en gaf vervolgens de telefoon aan jou. Je zei glimlachend dat het wel vaker voorkwam dat je naam verkeerd werd verstaan, terwijl de anderen flink zaten te grinniken.

Ik moet afsluiten. Je verlaat nu het CWI, maar je zult je waarschijnlijk nog lang bezighouden met je vakgebied, dat nu je voltijdshobby is geworden.

Miente Bakker



Met Pensioen

Beste Herman,

Alhoewel je reeds lange tijd een doctorstitel draagt, promoveer je nu opnieuw: van (inmiddels) parttime CWI'er tot fulltime opa! De composieten en priemfactoren mag je achter je laten. Ook is de tijd aangebroken om je koffer te pakken en te reizen naar verre warme oorden, waar je prima kunt overwinteren en je euro-pensioen een fortuin waard is. Heerlijk uit eten, duiken tussen het koraal, een zeilboot huren, op safari, op een kameel door de woestijn, of met een boekje op een hagelwit strand, in de schaduw van de palmbomen...
...wat een geweldig vooruitzicht!

Het allerbeste!
Niek Bouman

TIJD

Beste Herman,

Als je met pensioen gaat krijg je veel tijd. Dat zegt men, ja. Maar wat is de werkelijkheid?

Toen ik met pensioen ging had ik veel zaken: klussen, puzzels, en vooral boeken, waarvan ik dacht: Daar kom ik na mijn pensionering wel aan toe. Ongelezen boeken had ik over van alles, waaronder ook over wiskunde en verwante terreinen.

We zijn drie jaar verder, en ik constateer dat er weinig van terecht is gekomen. De klussen (vooral opruimen) liggen nog te wachten. De puzzels, waarvoor ik ook de computer wilde laten werken, zijn nog altijd niet opgelost. En de wiskundeboeken? (Ik laat het woord ‘interessante’ hierbij weg, want ze zijn allemaal in hun soort interessant.) Ik heb wel enkele gelezen: *The music of the primes* (du Sautoy), waarin jij ook nog vermeld wordt, *Longitude* (Sobel), *Von Pythagoras bis Hilbert*.

Maar het meeste is nog altijd ongelezen. Boeken als: van Martin Gardner, van David Wells, van en over Einstein, *Histoire universelle des chiffres*, *Gamma*, *Fantasia mathematica*, *Galileo's daughter*, N*atuurkunde van 't vrije veld*, *From here to infinity*, *Stevin*, *Klassische Stücke der Mathematik*, *A beautiful mind*.

Als het je net zo vergaat als mij, dan kan ik wel voorspellen dat je het druk blijft hebben en dat veel voornemens nog lang op verwezenlijking zullen moeten wachten. En je zult je nooit vervelen, daar vertrouw ik op. Ik wens je toe dat je massa's tijd hebt, geniet ervan met Toke en met allen die je dierbaar zijn. En tot ziens!

Jan Kok, oktober 2011.

P.S. De foto, waar je ook op voorkomt, is uit 1976 van de Amstelkelder.


EXIT

Rode draad

Beste Herman,

Jij bent meer dan 25 jaar mijn collega geweest. Dat betekent dat jij al vele jaren op het MC/CWI werkte, toen ik als enthousiaste nieuweling mijn eerste schreden zette in de wereld van de wiskunde en informatica en haar beoefenaren.

Met welke vraag jij mij voor het eerst kwam opzoeken, kan ik mij niet meer precies herinneren. Wel weet ik nog heel goed dat het een vraag over het KWG was. Toen ongetwijfeld nog gewoon WG. Misschien was het wel een statutenwijziging, waarmee onze samenwerking begon. Er zouden nog vele onderwerpen volgen, want ook bij het (K)WG was altijd wel iets aan de hand.

Wat voor mij als een rode draad door al die jaren van samenwerken loopt, is jouw geduld. Jij zat er altijd tussenin, jij maakte de vertaalslag tussen adviezen en acceptatie van die adviezen; de vertaalslag tussen juridische noodzakelijkheden en wiskundige logica. En dat kan niet altijd even makkelijk geweest zijn voor je, want tussen het juridische en het wiskundige zit een groot grijs gebied. Jij overbrugde dat grijze gebied altijd met de grootste zorgvuldigheid en met eindeloos geduld. Jij ging vriendelijk en vastberaden richting doel, ook als ik weleens zuchtte.

Dank je wel voor al die jaren van bijzonder prettige en constructieve samenwerking!

Marlin van der Heijden

Gevarieerde contacten met Herman *Henk van der Vorst*

Mijn contacten met Herman waren van uiteenlopende aard, maar altijd plezierig.

Ik kende Herman al langer, maar we kwamen echt nauw in contact toen ik midden jaren tachtig adviseur werd bij het CWI en samen met Herman de Werkgroep Grootschalig Rekenen runde. Herman had de dagelijkse leiding van de CWI-groep die verder uit Dik Winter, Walter Lioen en Margreet Nool. De ex-CDC man Joost Schlichting zat er een tijdje bij, verder was Kees Dekker zeer regelmatige gast, evenals Dirk Dekker en Walter Hoffmann. We kwamen eens in de twee of drie weken bijeen voor een gezellige bijeenkomst waarop de vaste deelnemers of uitgenodigde gasten over hun werk vertelden. Ook vertelden we over artikelen die we hadden gelezen. De bijeenkomsten werden door anderen vaak druk bezocht en regelmatig was het zaaltje op de tweede verdieping geheel gevuld.

Onder de bezielende leiding van Herman werd er in het academisch jaar 1985-1986 zelfs een maandelijks colloquium georganiseerd bij het CWI (Colloquium on Numerical Aspects of Vector and Parallel Processors) met een gemiddelde deelname van ongeveer 75 deelnemers. Het leidde tot een lijvig boekwerk: *Algorithms and Applications on Vector and Parallel Computers*, door North-Holland in 1987 gepubliceerd, met Herman te Riele, Dirk Dekker en Henk van der Vorst als editors.

Een ander spraakmakend hoogtepunt was de grote *ACM International Conference on Supercomputing* te Amsterdam, in juni 1990. Herman heeft daarbij als leider van de locale organisatie werkelijk bergen werk verzet. Ik denk met zeer veel plezier aan deze jaren van samenwerking met Herman terug. Hoewel Herman's werkelijke belangstelling bij de getaltheorie lag, was zijn inzet voor het grootschalig rekenen geweldig en ongeveinsd. We moesten ooit eens acte de presence geven op een werkbijeenkomst met zusterinstituten van het CWI in Pisa. De Nederlandse afvaardiging bestond uit Herman, Walter Hoffmann en ikzelf. Meteen na aankomst 's avonds, togen Walter en ik naar de scheve toren, maar kon Herman niet mee, omdat hij de bijeenkomst van de volgende dag nog eens grondig wilde voorbereiden. Ook de dagen daarna kon hij daar geen tijd voor vrijmaken. Over inzet gesproken.

De samenwerking kwam tot een einde toen mijn adviseurschap werd be-eindigd doordat ik toetrad tot het bestuur van het CWI, ergens midden jaren negentig.
Recent heb ik nog weer eens intensief met Herman mogen samenwerken bij de visitatie van academisch wiskundig Nederland, waarbij ik voorzitter van de commissie was. Toen mij werd voorgesteld om Herman tot secretaris aan te stellen, sprong ik een gat in de lucht. En inderdaad, mede door de inzet van Herman, zijn kritische geest en zijn onverwoestbaar goede humeur, werd de visitatie tot een plezierig gebeuren, voor zover je bij een visitatie daarvan mag spreken. Ik heb Herman's inzet als een zeer grote steun ervaren.

Herman: ik wens je een plezierig after-65 leven toe en ik hoop je nog vele malen in goede gezondheid te ontmoeten.

CWI is the research institute of the Stichting Mathematisch Centrum

Aan: Eduard Looijenga

A'dam, 15 oktober 2003

Beste Eduard,

Hierbij stuur ik je de detacheringsovereenkomst m.b.t. Marco Swaen*) Ik wil deze zaken bekijken door het hoofd van onze Personeelsdienst, José Koster, maar die is er vandaag niet. Met het oog op de haast die geboden is stuur ik je de stukken al vast toe. Zodra ik het commentaar van José heb, laat ik je dat weten. Wat mij betreft ziet de overeenkomst er goed uit: Marco blijft gewoon in dienst van de Hogeschool van Amsterdam en de overeenkomst geldt voor één jaar. De kosten vind ik wel hoog voor de fte (zelfs al zijn de werkgeverslasten inbegrepen).
De volgende week ga ik naar een congres in Debrecen.

Hartelijke groet,

Herman te R.

*) in drievoud

CWI Centrum Wiskunde & Informatica

5 ECM : 5th European Congress of Mathematics

Beste Herman, 19-11-2011

Ben je heel gewoon, of eigenlijk heel bijzonder? Je kan denken aan gewoon omdat je er altijd bent, betrouwbaar, consciëntieus en betrokken. Maar dat maakt je tegelijkertijd ook heel erg bijzonder. Er zijn maar weinig mensen die zo veel activiteiten hebben ontwikkeld voor de Nederlandse wiskunde.. En dat is echt heel erg bijzonder! Van harte gefeliciteerd met je glanzende carrière. De Nederlandse wiskunde zal je niet vergeten.

Met vriendelijke groeten,

Jan van Mill

Hallo Herman,

Wat ik me vooral van jou zal blijven herinneren, is je vriendelijkheid!

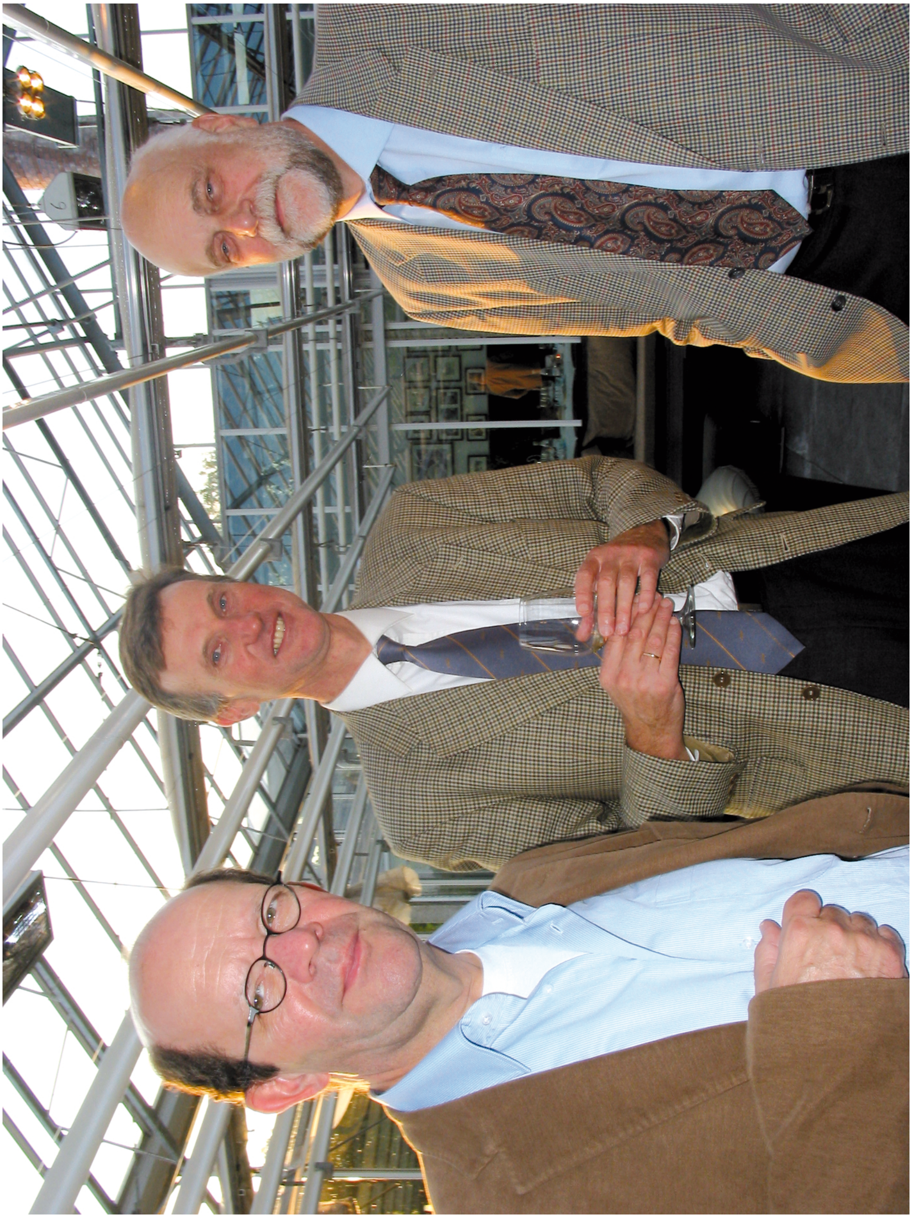
Maar daarnaast natuurlijk de Sinterklaas-vieringen bij Sara! Ik heb er 2x aan mogen deelnemen als de kleinste zwarte Piet! Hahaha! Wat was dat gezellig! Jammer dat dat er niet meer van komt! Want ... de Personeelsvereniging bestaat niet meer! Niemand durft zo’n goede penningmeester als jij op te volgen!

Een heel prettig, gezond en lang leven wens ik je toe, samen met je gezin. Geniet vooral!

Hoop je zo nu en dan nog op het CWI te zien. Ik zal je missen bij de receptie!

Veel liefs, kus,

Bikkie



Beste Herman,

We zijn beide in hetzelfde jaar bij het Centrum in dienst gekomen, jíj per 1 mei en ik drie-en-halve maand eerder. Beide werden we medewerker bij de numerieke sectie van de rekenafdeling. Dat heeft echter nooit tot wetenschappelijke samenwerking geleid. Als ik me goed herinner begon jij met het bestuderen van de Fast Fourier Transform terwijl ik me toen met stijve differentiaalvergelijkingen bezighield. Maar al snel was het duidelijk dat het gebruik van de computer in de getaltheorie jouw grote interesse had en daarin heb je een ongekende vaardigheid bereikt. In competities haalde je geregeld wereldrecords die bijv. bekend staan als het ontbinden van RSA-129, RSA-140 en RSA-155.

Competities in een moeilijk handwerk zijn, denk ik, zo oud als de mensheid en je kunt er eeuwige roem mee verwerven. En hoewel je bij de oude Grieken beroemd kon worden in de wiskunde en ook de getaltheorie wel bekend was, kan ik me op dat gebied bij hen geen wedstrijden voor de geest halen. Wedstrijden had je natuurlijk op het gebied van de sport, maar ook als vakman kon je in een competitie eeuwige roem verwerven. Zo was één van de wereldwonderen duidelijk het resultaat van zo'n competitie, zoals uit het volgende epigram blijkt. Het was hier Chares van Lindos, een leerling van de beeldhouwer Lysippus, die met de eer ging strijken. Hij construeerde –ongeveer 300 v.Chr.– de Kolossus van Rhodos, een bronzen beeld boven de haven van Rhodos, dat volgens de overlevering wel zo'n 30 meter hoog was.

We kunnen dit lezen in een epigram van een tijdgenoot, Posidippus van Pelle, die carrière maakte in Alexandrië.

De Rhodiërs wilden een zeer grote Helios plaatsen
twee maal zo groot. Maar Chares uit Lindos bepaalde
dat niet één handwerksman een nóg grotere dan dèze kolos
kon neerzetten. Toen die verwaande Myron
de grens van vier el had bereikt,
maakte Chares als eerste met zijn techniek een bronzen beeld
dat in afmetingen wel zo groot leek als de aarde.[†]

De herkomst van het epigram is merkwaardig. In de tweede eeuw v.Chr. gebruikte een mummiemaker een oude gedichtenbundel om een mummie op te vullen. Zo bleef de papyrusrol verborgen tot hij in de jaren 1990 teruggevonden werd.

[†] ἤθελον Ἠέλιον Ῥόδιοι περιμάκεα θεῖναι
δὶς τόσον, ἀλλὰ Χάρης Λίνδιος ὡρίσατο
μηθένα τεχνίταν ἔτι μείζονα τοῦδε κολοσσὸν
θήσειν· εἰ δὲ Μύρων εἰς τετράπηχυν ὅρον
σεμνὸς ἐκεῖνος ἀνῆκε, Χάρης πρῶτος μετὰ τέχνας
ζῷιον ἐχαλκούργει γᾶς μεγέθει παρισῶν.

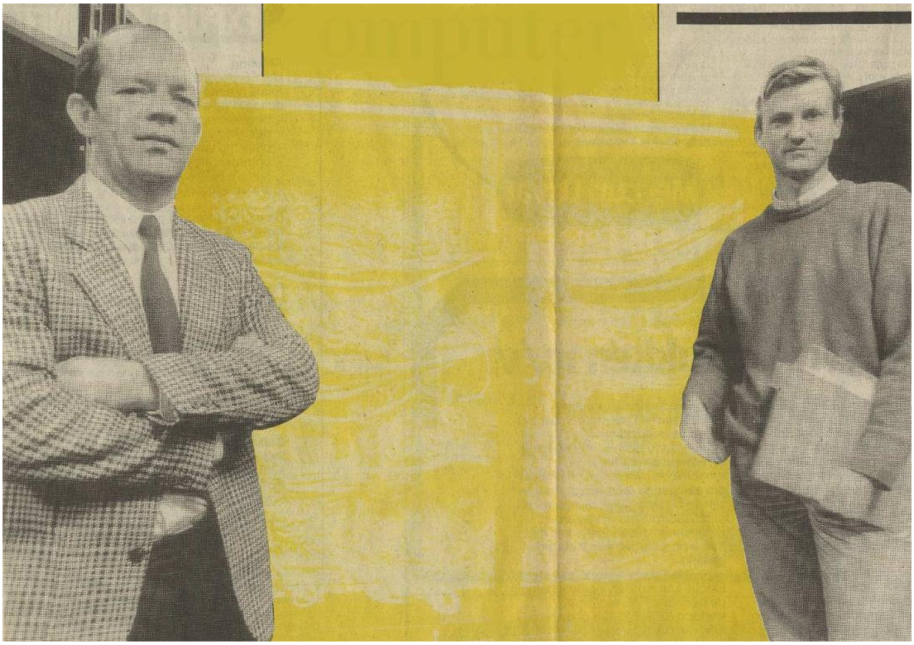
Op deze manier is een van de oudst overgebleven dichtbundels bewaard gebleven. De papyrus bevat 112 epigrammen, waarvan vele zeer beschadigd, en er staat geen auteur bij vermeld. Maar twee epigrammen blijken ook bekend uit andere bron en zijn het werk van Posidippus. Nu wordt algemeen aangenomen dat alle epigrammen van dezelfde auteur zijn.

De bundel bevat negen (misschien oorspronkelijk tien) categorieën. Het hier aangehaalde epigram komt uit de categorie over standbeelden (ἀνδριατοποιικά).

Nu hield je je natuurlijk niet alleen met wedstrijden in de getaltheorie bezig. Minder bekend is dat je ook gewerkt hebt op gebieden zoals: integraalvergelijkingen, supercomputing en magneto-hydrodynamische stromingen. Je was ongekend flexibel in het aanpakken van telkens nieuwe onderwerpen. Dat is een eigenschap die je, nu je meer vrije tijd gaat krijgen, ook heel goed kunt gebruiken. Ik ben er wel zeker van dat je, naast de aktiviteiten met de (klein)kinderen, het zingen en het bridgen, je ook met een paar nieuwe zaken zult bezighouden.

Je zult, net als ik, wel even moeten wennen aan de nieuwe situatie, maar je zult ook merken dat die ongekende nieuwe mogelijkheden biedt. Ik wens je toe dat je daar nog lang van mag profiteren.

Piet Hemker



CDC Cyber 205

Bouwer aan CWI-wetenschap en -gemeenschap

In de zomer van 1984, in de kamer waar nu Angelique Schilder zit, ontmoette ik Herman voor het eerst, tijdens een sollicitatie voor een promotieplaats in de Afdeling Numerieke Wiskunde. Herman was sous-chef van die afdeling. De ontmoeting was zeer hartelijk. De hartelijkheid bleek een constante te zijn, en gepaard te gaan met een grote bescheidenheid en gemeenschapszin.

Wat bescheidenheid betreft, in samenwerking met Rob Tijdeman heeft Herman meerdere jonge onderzoekers voor promotie aan de Universiteit Leiden klaargestoomd, volgens mij vrijwel belangeloos.

Bescheidenheid was soms ook echt gunstig voor Herman. In het boek De Telduivel [1] wordt niet Herman, maar zijn collega-onderzoeker Jan van de Lune, onder het pseudoniem Johnny van de Maan, als ietwat mal weggezet.

Als bijdragen van Herman aan de CWI-gemeenschap herinner ik me onder andere het volgende. Tijdens het 25-jarig CWI-jubileum van Piet van der Houwen luisterde hij het etentje ’s avonds op met een prachtig door hem gezongen lied, daarbij op de gitaar begeleid door promovendus Freddy Wubs. En toen het CWI eens een lustrum te vieren had, ik meen het 10e , was Herman de trekker van een in de hal van het CWI-gebouw aan te brengen muurversiering (het CWI-logo), een cadeau van het dankbare personeel aan haar werkgever. Waar maak je dat nog mee? Buitengewoon mooi, ook in de CWI-hal, vond ik Hermans bijdrage aan de roulerende kunst-en hobbyexpositie in de vitrine aldaar. Herman had er een speelgoedgebouw gemaakt, van echte miniatuursteentjes en ander echt mini-bouwmateriaal, speelgoed uit zijn jeugd meen ik. Ik heb m’n kinderen wel eens naar het CWI meegenomen om het te bewonderen. En begin ’89 haalde hij me bij een interview met een wetenschapsjournalist van het Algemeen Dagblad. Het paginagrote artikel [2] met bijgaande foto, genomen bij SARA’s CDC Cyber 205, deed m’n familie geloven dat ik toch wel met iets nuttigs bezig was.

Beste Herman, mede namens Wijnie wens ik je nog heel veel geluk, samen met Toke, je kinderen en kleinkinderen!

Barry Koren

---

[1] Hans Magnus Enzenberger, De Telduivel, De Bezige Bij, 2007

[2] Nico Baaijens, Supercomputer: onmisbare rekenreus, Algemeen Dagblad, 11 februari 1989.

24 oktober 2011

Beste Herman,

Eind van dit jaar gebeurt datgene wat je al enige tijd hebt aangekondigd, je gaat met pensioen. Ondanks dat ik dit al wist, is het toch schrikken toen ik ineens de aankondigingskaart ontving. CWI zonder Herman kan ik mij helemaal niet voorstellen.

Zo lang ik op het CWI werk was je er. Onze paden kruisten elkaar vaker want je was een zeer trouwe gebruiker van de bibliotheek. Maar soms ook buiten het CWI: de pizza maaltijd in een park van Stockholm tijdens 4ECM in 2004.

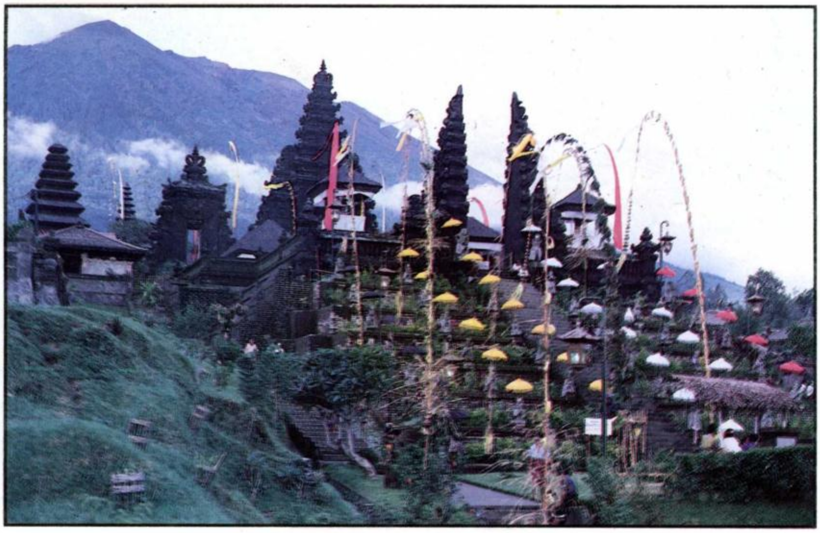
Met de bibliotheek was je altijd zeer betrokken en je hebt dan ook heel veel werk verricht voor ons: van aanschafbeoordeling tot jarenlange lidmaatschap van de Bibliotheekcommissie, en van 9 januari 1989 tot 29 januari 2008 als voorzitter daarvan.
Ook in je functie als Inspecteur der KWG Boekerij hebben wij zeer regelmatig met elkaar te maken.
Voor de geweldige medewerking gedurende al deze jaren wil ik je van harte bedanken.

De briefkaart die ik enige jaren geleden van je ontving toen jullie een reis naar Indonesia maakten, heb ik nog bewaard, en hopelijk vind je het leuk om deze terug te zien als herinnering aan die reis.

Ik wens jou en Toke nog vele mooie reizen, veel vreugde en waarschijnlijk ook een drukke tijd met al jullie kleinkinderen. Ik denk dat ik je op het CWI vast nog wel tegenkom.

Hartelijke groeten,

Ay



BALI

Pura Besakih is the oldest and most sacred temple in Bali

Bali, 7 mei 2005

Beste Ay,

Een hartelijke groet vanuit Bali, waar we nu al bijna 'n week verblijven. We genieten enorm van de cultuur, de natuur, de vriendelijke mensen en de Indonesische keuken. Jakarta is natuurlijk een ander ierhaal, maar daar genieten we van onze klein-kinderen (en hun ouders, niet te vergeten!) en het prachtige huis waar ze wonen. We hebben daar o.a. de Istiqlal moskee en de daartegenover liggende Kathedraal bezocht.

Tot weerziens op dinsdag na Pinksteren.

Herman en Toke

Mrs. Ay Ong
CWI
Kruislaan 413
1098 SJ Amsterdam
The Netherlands

Visit our website at : http://www.balicard.com AC - 146 © K. SUJANA

Lieve Herman,

wat een mijlpaal; met pensioen!
Voor jou iets waar je naar uit
kijkt, maar ook waar je tegen opkijkt.
Na zoveel dienstjaren bij het CWI,
zal je het ook heel erg gaan missen.
In 1971 begonnen bij het CWI en ze
altijd trouw gebleven. Dat siert je;
zoveel enthousiasme, plezier en
kundigheid 40 jaar lang.
Twee mooie dagen om je afscheid
te vieren bij het CWI, het stralende
middelpunt. Je hebt het verdiend!
Daarna genieten
van alle vrije tijd
en ik hoop dat we
je heel veel gaan
zien! Petje af.
Veel liefs
Marjol

Pijnacker, 27 oktober 2011

Bijdrage aan het Liber Amicorum van Herman te Riele
door Erik de Goede (Geesterwijk 4, 2641 LP Pijnacker, goede@ipact.nl)

Beste Herman,

Gelukkig bereikte mij via mijn ouders tijdig het bericht dat er een Liber Amicorum voor jou gemaakt wordt. Ik wil daar graag een bijdrage aan leveren.

De tijd vliegt. Het is alweer vijfentwintig jaar geleden dat ik bij het CWI in dienst trad als wetenschappelijk medewerker. Twee jaar later startte ik mijn promotieonderzoek voor Rijkswaterstaat over de drie-dimensionale ondiepwatergelijkingen. Ik kijk met veel voldoening op die periode terug. Ik heb het gevoel dat ik in die periode van zes jaar enorm veel geleerd heb, waar ik daarna veel profijt van heb gehad en nog steeds heb. Dan denk ik bijvoorbeeld aan het schrijven van wetenschappelijke artikelen, het geven van presentaties en met andere wetenschappers samenwerken.

Op een aantal vlakken heb jij daar een belangrijke bijdrage aan geleverd. Als souschef van Piet van der Houwen leverde jij een belangrijke bijdrage aan het reilen en zeilen van de Numerieke Wiskunde afdeling. Later heb ik begrepen dat dit in bepaalde periodes best lastig was, maar dat is in die tijd volledig langs mij heengegaan.

Bij mijn promotieonderzoek speelde supercomputing ook een belangrijke rol. In de tweede helft van de jaren 80 werden supercomputers steeds belangrijker. Jij leidde, samen met Henk van der Vorst, de werkgroep “Supercomputing”. Die bijeenkomsten waren zeer nuttig voor mij.

In die tijd volgden de supercomputers bij SARA zich in redelijk snel tempo op. Dat werd altijd feestelijk geopend met een of ander symposium. Naar mijn beleving dwong zo’n nieuwe supercomputer pas “ontzag” af als door jou, samen met Dik Winter en Walter Lioen weer een nieuw wereldrecord was behaald. Dat betrof meestal de priemfactorisatie van een enorm groot en moeilijk te factoriseren getal. Zo herinner ik mij nog dat jullie bij de introductie van de CDC CYBER205 zelfs in assembler hadden geprogrammeerd om het uiterste uit zo’n supercomputer te halen. Het resultaat was er dan ook altijd naar. Het ene gekraakte getal was nog indrukwekkender dan de andere.

Parallel rekenen is tegenwoordig een ingeburgerd begrip in scientific computing, maar dat was eind jaren 80 wel anders. Daarbij liep jouw werkgroep voorop. Ik herinner mij nog goed dat jullie een algoritme voor priemfactorisatie hadden dat geweldig goed parallel rekende. Jullie hadden een programma geschreven dat bij het CWI 's avonds (om een uur of zeven?) alle werkstations afliepen om te controleren of er iets gebeurde. Zo niet, dan werd het werkstation ingeschakeld om een (klein) deel van de priemfactorsatie te doen. Dat gebeurde niet alleen bij het CWI, maar bij tal van instituten wereldwijd! Hierdoor werd op honderden, misschien wel duizenden computers, aan hetzelfde probleem gewerkt. Dat maakte toentertijd veel indruk op mij. Dit moet toch een van de eerste applicaties geweest zijn op het gebied van massaal parallel rekenen.

Naast de hierboven beschreven “organisatorische” en “wetenschappelijke” ondersteuning tijdens mijn promotieonderzoek vind ik het ook belangrijk om te vermelden dat we goed met elkaar konden opschieten. Net zoals bij de andere CWI-ers was het met jou altijd heel prettig samenwerken.

Sinds enkele jaren weten we ook van elkaar dat we een gemeenschappelijke hobby hebben, namelijk bridgen. Sinds vorig jaar is er een fenomenaal softwareprogramma gelanceerd, namelijk BIC, oftewel bridgen via het Internet. Wij kunnen nu wekelijks de strijd aangaan met vele duizenden bridgers in Nederland, op tijdstippen dat het ons zelf het beste uitkomt. Je bent een meer dan verdienstelijk bridger. Ik neem aan dat je in de toekomst hier meer tijd aan gaat besteden, nu binnenkort jouw lange carrière bij het CWI ten einde komt. Het ga je goed!

Beste Herman,

Hier volgt mijn bijdrage voor je Liber Amicorum. Je belangstelling voor getaltheorie is groot, zoals bv. tot uitdrukking komt in je bijdragen over het berekenen van nulpunten van de Riemann Zeta-functie, het weerleggen van het vermoeden van Mertens, je bijdragen over bevriende getallen, je werk op het terrein van de toegepaste en toepasbare getaltheorie, ja zelfs gezondheidszorg. Ik heb wat lopen zoeken naar een geschikt onderwerp voor je Liber Amicorum, en meen dat gevonden te hebben in de Stelling van Hua. Recentelijk zijn daar nl. toepassingen op cryptografisch terrein uit voortgekomen, maar ook theoretisch valt er nieuws te melden.

Waar gaat het om?

In 1949 bewees Hua dat elke bijectieve afbeelding f van een delingsring A op een delingsring B welke niet alleen de optelling respecteert maar waarbij ook het beeld van de multiplikatieve inverse van een willekeurig niet-nul element a van A samenvalt met de multiplikatieve inverse van het beeld van die a, terwijl tevens de “1” op de corresponderende “1” wordt afgebeeld, in feite een isomorfie van ringen ofwel een anti-isomorfie van ringen is.

In boeken valt zulks bij Artin [1] en bij Jacobson [7] na te lezen. Artin past Hua’s resultaat toe om een bewijs voor een fundamentele stelling in de projectieve meetkunde te verkrijgen, zie blz. 85 van zijn boek. Jacobson vermeldt bovendien thema’s verwant met Hua’s resultaat, zie de eerste drie bladzijden van diens boek.

Bij Bourbaki, zie [2] blz. 146, is Hua’s vondst in een opgave terug te vinden, echter alleen daar, waar het commutatieve lichamen betreft van oneven karakteristiek doch waarbij tevens de nodige voorwaarde f(1) = 1 niet genoemd staat. In [5] poogt Gow Bourbaki’s manco te repareren, daarbij ook wat nieuws vermeldend. Doch hij blijkt onbekend te zijn met Hua’s Stelling, hetgeen tot uiting komt in (citaat) : “In conclusion, we suspect that it is quite likely that this question (d.w.z. Hua’s Stelling, (R.v.d.W)) has already been discussed in the literature, although we have not seen anything ourselves”. Voor bijdragen van recente datum, waarin onderwerpen á la Hua aan de orde komen, kan je terecht bij [3], [4] en [8]. In [8] staat vermeld dat de zogeheten inversie-afbeelding in eindige lichamen geschikt zijn voor cryptografische doeleinden onder verwijzing daarbij naar zekere elektronische literatuur.

De problematiek van afbeelden van de “1” op de “1” wordt in onderstaande Stelling 3 geheel omzeilt, maar de explicite waarde van f(1) speelt wel degelijk een rol op de achtergrond. Bovendien is juist in Stelling 3 het geordende product van drie elementen van belang terwijl in Hua’s Stelling “slechts” het geordende product van twee elementen wordt beschouwd.

Het is wellicht verrassend dat zulks, zo ben ik van mening, leidt tot wat elegantere uitspraken dan die welke aangetroffen worden in bestaande thematiek rond Hua's resulaat.

In detail gaat het hierom:

Definitie 1.

Laat op een zekere niet-lege verzameling V twee binaire operaties + en . gedefinieerd zijn die voldoen aan drie eisen, nl.

1) V is een abelse groep t.o.v. de operatie + (met 0 zij het eenheidselement van deze groep genoteerd);

2) de operaties + en . staan tot elkaar in verbinding via (a + b).c = (a.c) + (b.c), a.(b + c) = (a.b) + (a.c) voor alle alle a,b,c uit V;

3) er bestaat een element in V, genoteerd als 1, dat voldoet aan 1.a = a = a.1 voor alle a uit V.

Dan heet V een delingsring indien ook voldaan is aan:

4) 1 is verschillend van 0;

5) de verzameling der ongelijk-nul elementen van V met 0 uit V, is een (niet-noodzakelijk abelse) groep t.o.v. de operatie.

Opmerking.

In plaats van (a.b) + d schrijven we a.b + d, idem dito a + b.d voor a + (b.d) , en dergelijke. Kleine letters staan telkens voor elementen uit een delingsring.

Als voorbeelden van delingsringen heeft men bv.: de verzameling der reële getallen, de verzameling der rationele getallen t.o.v. de gebruikelijke operaties + en. Natuurlijk ook de verzameling der complexe getallen met de daar heersende bekende operaties binaire operaties “optellen” en “vermenigvuldigen”. Een voorbeeld van een delingsring waarvoor de “vermenigvuldigingsoperatie” niet commutatief is, is de zogeheten quaternionen-delingsring H, bestaande uit alle (2 x 2) - matrices met complexe coëfficiënten met (beschrijvend): linksboven een willekeurig element a uit de complexe getallen C, rechtsboven een willekeurig element b uit C, linksonder -(de complex geconjugeerde van b) en rechtsonder de complex geconjugeerde van a. Uiteraard der zaak vigeren in H hier de gebruikelijke optelling- en vermenigvuldigingsoperaties voor matrices.

Met het oog op het vervolg noemen we zonder bewijs enkele rekenregels en eigenschappen die bij dit verhaal over een zekere delingsring D, een rol spelen:

a) Bij iedere a uit D is er precies één element in D te vinden, genoteerd -a, zodat a + (-a) = 0; voorts geldt -(-a) = a;

b) voor iedere a uit D geldt a.0 = 0 = 0.a;
c) geoorloofde notatie: a.d.f staat voor (a.d).f, voor alle a,d en f uit D; inductief net zo voor meer dan drie elementen uit D;
d) (s.r) + ((-s).r) = (s + (-s)).r = 0.r = 0 voor alle s en r uit D; hieruit volgt (-s).r = -(s.r) en dus ook (-1).r = =(1.r)   = -r;
e) (-s).(-r) + ((-s.r) = 0 = (s.r) + ((-s).r); en dus (-s).(-r) = s.r voor alle s en r uit D;
f) D heeft geen nuldelers, d.w.z. uit a.b = 0 voor zekere a en b uit D volgt steeds dat tenminste één der a, b gelijk is aan 0.

Definitie 2.
Beschouw een afbeelding f van een delingsring naar zichzelf die voldoet aan aan de volgende drie eisen:
A) f(a + b) = f(a) + f(b) voor alle a en b uit D;
B) f(d) is ongelijk aan 0 voor alle d ongelijk aan 0 uit D;
C) Uit t.r = 1 voor zekere t en r uit D volgt steeds dat f(t).f(r) = 1 waar is. Zo'n f noem ik een endomorfisme. Geldt voor f ook nog dat aan f(1) = 1 is voldaan dan spreek ik over een Jordan-endomorfisme.

Opmerking.
Uit het voorgaande valt af te leiden dat voor zo'n endomorfisme f geldt die: f(1).f(1) = 1, dat f(0) = 0, dat (-1).f(a) = -f(a), dat
f(a) +f(-a) = f(a + (-a)) = f(0) = 0 en dat dus -f(a) = f(-a), dit alles voor alle a uit D. Omdat na te rekenen valt dat (f(1) + (-1)). (f(1) + 1) gelijk is aan 0,
zien we dat de waarde van f(1) gelijk is aan 1 of aan -1; immers, D heeft geen nuldelers.

In de nu volgende Stelling 3 staat te lezen dat elk endomorfisme van een delingsring een zeker type "behoud" dan wel "anti-behoud" oplevert ten opzichte van de operatie, onafhankelijk van de waarde van f(1).

Stelling 3.
Zij f een endomorfisme van een delingsring D. Dan is tenminste één der twee volgende uitspraken waar:
a) f(a.b.c) = f(a).f(b).f(c) voor alle a,b en c uit D;
b) f(a.b.c) = f(c).f(b).f(a) voor alle a,b en c uit D.

Schets van het bewijs van Stelling 3.
We weten dat f(1) = 1 of f(1) = -1 geldt. Splits als volgt.
Stel f(1) = 1.. Dan geldt volgens Hua, dat
ofwel voor alle a en b uit D is f(a.b) = f(a).f(b) vervuld,

ofwel voor alle a en b uit D is f(a.b) = f(b).f(a) vervuld.
In de reeds genoemde boeken van Jacobson en Artin staat het bewijs van Hua's Stelling zonder omhaal afgedrukt, technisch en doorwrocht (sommigen zouden zeggen: “nogal getruukt en bepaald niet mooi”). Maar dat bewijs gaat nergens een, zeg, tweedejaarsstudentenniveau te boven. Het bewijs van Stelling 3 voor het geval f(1) = 1 volgt nu vrijwel onmiddellijk.
Stel f(1) = -1. Definieer de afbeelding g van D naar zichzelf door middel van g(a) = f(-a) met a uit D. Dan is g een Jordan endomorfisme! Dus geldt voor g de Stelling van Hua, waaruit door omschrijven naar f het bewijs voor Stelling 3 volgt. Dit omschrijven is nogal een technische klus die ik je bespaar.
Hiermee is Stelling 3 geheel bewezen.

Er zijn een tweetal gevolgen, afhankelijk van het feit of een zeker natuurlijk n even of oneven is.

Gevolg 4. Laat f een afbeelding zijn waarvan sprake is in Stelling 3. Dan geldt voor elke oneven gehele n tenminste 3, dat
ofwel voor alle a1, a2, ... , an uit D geldt f(a1.a2.a3. ... .an) = f(a1) .f(a2). ... f(an);
ofwel voor alle a1, a2, ... , an uit D geldt f(a1.a2.a3. ... .an) = f(an) ... f(a3).f(a2).f(a1) (volledig retrograde, om zo te zeggen).

Het bewijs van Gevolg 4 (wat ik hier niet geef) volgt gemakkelijk via mathematische inductie door f(a1.a2.a3. ... .an) te schrijven als f(a1.a2.(a3. ... .an)), daarbij het resultaat van Stelling 3 toepassende; immers het aantal a's in de productuitdrukking a3. ... .an is oneven.

Gevolg 5. Laat f een afbeelding zijn waarvan sprake is in Stelling 3. Dan geldt voor elke even gehele n tenminste 2, dat
ofwel voor alle a1,a2, ..., an uit D geldt f(a1.a2. ... .an) = f(1).f(a1).f(a2). ... .f(an),
ofwel voor alle a1,a2, ... ,an uit D geldt f(a1.a2. ... .an) = f(1).f(an). ... . f(a2).f(a1) (volledig retrograde dus weer voor de rij der a’s).

Het bewijs van Gevolg 5, (wat ik hier, net zo als voor Gevolg 4, niet geef) volgt eveneens via mathematische inductie, maar is nogal behoorlijk technisch van aard. Ditmaal wordt Stelling 3 toegepast op de situatie f(a1.a2. ... .an) = f(b.c.an), waarbij b staat voor het geordende product van de eerste n-2 geordende rij elementen der ai’s, c staat voor het “één-naar-laatste” element a(n-1). Immers het aantal ai’s in de productuitdrukking a1.a2. ... . a(n-2) is even en tenminste gelijk aan 2 of anders is n=2 het geval. Voor n=2 beschouwen we Stelling 3 toegepast op de situatie f(a1.a2) = f(1.(a1.a2)) voor alle a1,a2 uit D tezamen met de opmerking dat f(1).u = u.f(1) geldt voor alle u uit D. Voor even n tenminste gelijk aan 4 en f(1) = 1 kan voor het te verkrijgen bewijs rechtstreeks gebruik gemaakt worden van het verkregen resultaat onder Stelling3, terwijl voor het geval dat de even n tenminste gelijk is aan 4 en f(1) de waarde -1 heeft, weer de omschrijving via het Jordan endomorfisme g middels g(a) = f(-a) voor alle a uit D dient te worden aangeroepen.

Slotopmerking.
In de formulering van Stelling 3 is sprake van een afbeelding f van een delingsring naar zichzelf. Op een voor de hand liggende manier kan men f definiëren op een delingsring wier beelden alle in een andere delingsring liggen. Aldus worden volledig analoge resultaten verkregen.

Literatuur.
[1] E.Artin, Geometric Algebra, Interscience Publ., 1957.
[2] N.Bourbaki, Algébre I, Herrmann, 1951.
[3] A.Caranti, F.Dalla Volta, M.Sala and F.Villani, Imprimitive permutation groups generated by round functions and key-alterating block ciphers; electronisch: CoRR abs/math/0606022 (2006).
[4] D.Goldstein, R.Guralnick, L.Small and E.Zelmanov, Inversion-invariant additive subgroups of division rings; Pacific Journal of Math., vol.227 (2006), blz. 287-294.
[5] R.Gow, A problem of Bourbaki on field theory, Bull.Irish Math.Soc., vol.35 (1995), blz. 75-76.
[6] L.-K,Hua, On the automorphisms of a sfield, Proc. of the Nat.Ac. Sciences USA, vol.35, (1949), blz. 386-389.
[6a] L.-K.Hua, Some properties of a sfield, Proc.of the Nat.Ac. of Sciences USA, vol.35 (1949), blz. 533-537.
[7] N.Jacobson, Structure and Representations of Jordan Algebras, AMS Colloquium Publications, vol.39 ,1968.
[8] S. Mattarei, Inverse-closed additive subgroups of fields, Israel Journ. of Math., vol. 159 (2007), blz. 343-347.

Herman, ik wens jou en je familie het allerbeste in de toekomst en we spreken elkaar vast wel weer op bijeenkomsten over wiskunde of anderszins.

Rob van der Waall

CWI

Centrum Wiskunde & Informatica

Workshop on Computational Number Theory

on the occasion of Herman te Riele's retirement from CWI

Location: **Turing room**
Date: **1 – 2 december 2011**

Program

Thursday, 1 December

12:00	Lunch
13:30	Opening

Session: Factoring large numbers

13:30	**Paul Leyland** (Brnikat Ltd., Cambridge)
14:00	**Peter Montgomery** (Microsoft US)
14:30	**Joppe Bos** (EPFL)
15:00	**Tea Break**
15:30	**Jason Papadopoulos** (3S Group Inc)
16:00	**Thorsten Kleinjung** (EPFL)
16:30	**Alexander Kruppa** (CWI)
17:00	**Closure**

Friday, 2 December

10:50	**Welcome**

Session: Computations on zeta and other functions

11:00	**Joost Batenburg** (CWI)
11:30	**Rob Tijdeman** (Universiteit Leiden)
12:00	**Pieter Moree (1)** (Max Planck Institute, Bonn)
12:30	**Lunch**
14:00	**Pieter Moree (2)**
14:30	**Andrew Odlyzko** (University of Minnesota)

Social session

15:00	**Farewell speeches** (by Herman himself and others)
16:00	**Reception** (ground floor new wing CWI building)

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) is the national research institute for mathematics and computer science in the Netherlands.

CWI is part of the Netherlands Organisation for Scientific Research (NWO).


CWI

Herman te Riele vs. de rest van de Wiskunde

Zonder te overdrijven kun je rustig stellen dat het gros van de Nederlanders zich niet zoveel kan voorstellen bij het werk van een wiskundige. Over het algemeen bestaat er toch dat imago van de verstrooide, wereldvreemde professor die allerlei onbegrijpelijke formules uitkraamt.

Wie thuis is in het wiskundige wereldje weet wel beter. Hoewel wiskundigen graag generaliseren, bestaat er binnen deze populatie een complexe structuur. Er bestaan diverse soorten wiskundigen, die zich dikwijls ook in geheel gescheiden deelverzamelingen begeven.

Allereerst zijn er natuurlijk de *zuivere* wiskundigen. Zuivere wiskunde houdt zich verre van onze vergankelijke realiteit, en wordt enkel voortgestuwd door de intrinsieke vragen die de wiskundige structuren *zelf* oproepen. Experimenten en grote berekeningen zijn zuivere wiskundigen vreemd, aangezien je daar nooit iets mee kunt bewijzen. Want stelling en bewijs, daar draait het om.

Daarnaast zijn er de *toegepast* wiskundigen. In tegenstelling tot de zuivere wiskundigen laten zij zich juist *inspireren* door onze *realiteit*. Onder hen bevinden zich de modelleerders, die graag een zo nauwkeurig mogelijk model – of juist een heel eenvoudig model – construeren van die werkelijkheid. Daarnaast zijn er de *rekenaars*, die juist vertrekken vanaf zo’n model en van daaruit de werkelijkheid simuleren en optimaliseren. In tegenstelling tot zuivere wiskunde wordt in de toegepaste wiskunde veel *gerekend*, met zware computers.

En dan is er ook nog een buitencategorie, genaamd *Herman te Riele*, die een bijzondere band heeft met zowel de zuivere als de toegepaste wiskunde: in plaats van de zware computers van de toegepast wiskundigen te gebruiken voor het rekenen aan “echte toepassingen”, maakte hij er een sport van om met behulp van veel computers te *bewijzen* dat wat de zuivere wiskundigen eigenlijk hopen te bewijzen *niet waar* is. Volgt u het nog?

Tot slot zijn er ook nog de *hobbywiskundigen*. Enkele daarvan (en niet ten nadele van de rest van de groep) doen hun uiterste best om te bewijzen dat wat gerenommeerde wiskundigen reeds hebben bewezen *tóch niet waar* is. Maar in contrast met zijn inzet om onbewezen wiskundige vermoedens te weerleggen, had Herman in zijn rol als secretaris van het Koninklijk Wiskundige Genootschap de twijfelachtige eer om uit te leggen dat de fundamenten van de reeds bekende wiskunde toch echt niet zo gauw ter discussie staan, en dat pi niet gelijk is aan 22/7.

Kortom, Herman te Riele was van alle markten thuis en kon bovendien met iedereen goed overweg. Door zijn inzet op vele gebieden speelde hij een verbindende rol binnen het Wiskunde-landschap van Nederland en daarbuiten.

Herman, ik wens je veel succes voor de toekomst en wie weet lezen we nog wel weer eens over je in de krant, als je in je vrije tijd ook wereldrecords gaat vestigen.

-Joost Batenburg

A NOTE ON PÓLYA'S OBSERVATION CONCERNING LIOUVILLE'S FUNCTION

RICHARD P. BRENT AND JAN VAN DE LUNE

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

Abstract. We show that a certain weighted mean of the Liouville function $\lambda(n)$ is negative. In this sense, we can say that the Liouville function is negative "on average".

1. Introduction

For $n \in \mathbb{N}$ let $n = \prod_{p|n} p^{e_p(n)}$ be the canonical prime factorization of n and let $\Omega(n) := \sum_{p|n} e_p(n)$. Here (as always in this paper) p is prime. Thus, $\Omega(n)$ is the total number of prime factors of n, counting multiplicities. For example: $\Omega(1) = 0$, $\Omega(2) = 1$, $\Omega(4) = 2$, $\Omega(6) = 2$, $\Omega(8) = 3$, $\Omega(16) = 4$, $\Omega(60) = 4$, etc.

Define Liouville's multiplicative function $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. For example $\lambda(1) = 1$, $\lambda(2) = -1$, $\lambda(4) = 1$, etc. The Möbius function $\mu(n)$ may be defined to be $\lambda(n)$ if n is square-free, and 0 otherwise.

It is well-known, and follows easily from the Euler product for the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, that $\lambda(n)$ has the Dirichlet generating function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

for $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. This provides an alternative definition of $\lambda(n)$.

Let $L(n) := \sum_{k \le n} \lambda(k)$ be the summatory function of the Liouville function; similarly $M(n) := \sum_{k \le n} \mu(k)$ for the Möbius function.

The topic of this note is closely related to Pólya's conjecture [12, 1919] that $L(n) \le 0$ for $n \ge 2$.

Pólya verified this for $n \le 1500$ and Lehmer [9, 1956] checked it for $n \le 600\,000$. However, Ingham [5, 1942] cast doubt on the plausibility of Pólya's conjecture by showing that it would imply not only the Riemann Hypothesis and simplicity of the zeros of $\zeta(s)$, but also the linear dependence over the rationals of the imaginary parts of the zeros

Date: October 5, 2011.

ρ of $\zeta(s)$ in the upper half-plane. Ingham cast similar doubt on the Mertens conjecture $|M(n)| \le \sqrt{n}$, which was subsequently disproved in a remarkable *tour de force* by Odlyzko and te Riele [11, 1985]. More recent results and improved bounds were given by Kotnik and te Riele [7, 2006]; see also Kotnik and van de Lune [6, 2004].

In view of Ingham's results, it was no surprise when Haselgrove showed [2, 1958] that Pólya's conjecture is false. He did not give an explicit counter-example, but his proof suggested that $L(u)$ might be positive in the vicinity of $u \approx 1.8474 \times 10^{361}$.

Sherman Lehman [8, 1960] gave an algorithm for calculating $L(n)$ similar to Meissel's [10, 1885] formula for the prime-counting function $\pi(x)$, and found the counter-example $L(906\,180\,359) = +1$.

Tanaka [14, 1980] found the smallest counter-example $L(n) = +1$ for $n = 906\,150\,257$. Walter M. Lioen and Jan van de Lune [*circa* 1994] scanned the range $n \le 2.5 \times 10^{11}$ using a fast sieve, but found no counter-examples beyond those of Tanaka. More recently, Borwein, Ferguson and Mossinghoff [1, 2008] showed that $L(n) = +1\,160\,327$ for $n = 351\,753\,358\,289\,465$.

Humphries [3, 4] showed that, under certain plausible but unproved hypotheses (including the Riemann Hypothesis), there is a limiting logarithmic distribution of $L(n)/\sqrt{n}$, and numerical computations show that the logarithmic density of the set $\{n \in \mathbb{N} | L(n) < 0\}$ is approximately 0.99988. Humphries' approach followed that of Rubinstein and Sarnak [13], who investigated "Chebyshev's bias" in prime "races".

Here we show in an elementary manner, and without any unproved hypotheses, that $\lambda(n)$ is (in a certain sense) "negative on average". To prove this, all that we need are some well-known facts about Mellin transforms, and the functional equation for the Jacobi theta function (which may be proved using Poisson summation). Our main result is:

Theorem 1. *There exists a positive constant c such that for every (fixed) $N \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{e^{n\pi x} + 1} = -\frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + O(x^N) \qquad \text{as} \quad x \downarrow 0.$$

Thus, a weighted mean of $\{\lambda(n)\}$, with positive weights initially close to a constant (1/2) and becoming small for $n \gg 1/x$, is negative for $x < x_0$ and tends to $-\infty$ as $x \downarrow 0$.

In the final section we mention some easy results on the Möbius function $\mu(n)$ to contrast its behaviour with that of $\lambda(n)$.

2. Proof of Theorem 1

We prove Theorem 1 in three steps.

Step 1. For $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{e^{n\pi x} - 1} = \phi(x) = \frac{\theta(x) - 1}{2},$$

where

$$\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi x}, \qquad \theta(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2\pi x}.$$

Step 2. For $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{e^{n\pi x} + 1} = \phi(x) - 2\phi(2x).$$

Step 3. Theorem 1 now follows from the functional equation

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

for the Jacobi theta function $\theta(x)$.

Proof of Theorem 1.

(1) In the following, we assume that $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, so the Dirichlet series and integrals are absolutely convergent, and interchanging the orders of summation and integration is easy to justify.

As mentioned above, it is well-known that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + p^{-s}\right)^{-1} = \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-2s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Define

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{e^{nx} - 1}, \qquad (x > 0).$$

We will use the well known fact that if two sufficiently well-behaved functions (such as ours below) have the same Mellin transform then the functions are equal.

The Mellin transform of $f(x)$ is

$$\begin{aligned} F(s) &:= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{e^{nx}-1}x^{s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^\infty \lambda(n)\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{nx}-1}\,\mathrm{d}x = \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s}\Big) \times \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \times \zeta(s)\Gamma(s) = \zeta(2s)\Gamma(s). \end{aligned}$$

We also have

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi\Big(\frac{x}{\pi}\Big)x^{s-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2x}\Big)x^{s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2s}}\Big) \times \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \zeta(2s)\Gamma(s), \end{aligned}$$

so the Mellin transforms of $f(x)$ and of $\phi(x/\pi)$ are identical. Thus $f(x) = \phi(x/\pi)$. Replacing x by πx, we see that

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{e^{n\pi x}-1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi x},$$

completing the proof of step (1).

(2) Observe that

$$\frac{1}{e^{n\pi x}+1} = \frac{1}{e^{n\pi x}-1} - \frac{2}{e^{2n\pi x}-1},$$

so, from step (1),

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{e^{n\pi x}+1} = \phi(x) - 2\phi(2x).$$

(3) Using the functional equation for $\theta(x)$, we easily find that

$$\phi(x) - 2\phi(2x) = -\frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\phi\Big(\frac{1}{x}\Big) - \sqrt{2}\,\phi\Big(\frac{1}{2x}\Big)\Big)$$

with $c = (\sqrt{2}-1)/2 > 0$, proving our claim, since the "error" term is bounded by $\phi(1/x)/\sqrt{x} \sim \exp(-\pi/x)/\sqrt{x} = O(x^N)$ as $x \downarrow 0$ (for any fixed exponent N). $\square$

3. Remarks on the Möbius function

We give some further applications of the identity

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z^2-1} \tag{$*$}$$

that we used (with $z = e^{n\pi x}$) in proving step (2) above.

Lemma 2. *For $|x| < 1$, we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x^n}{x^n+1} = x - 2x^2.$$

Proof. Assume that $|x| < 1$. It is well known that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x^n}{1-x^n} = x,$$

in fact this "Lambert series" identity is equivalent to the Dirichlet series identity $\sum \mu(n)/n^s = 1/\zeta(s)$. Writing $y = 1/x$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{y^n-1} = 1/y.$$

If follows on taking $z = y^n$ in our identity $(*)$ that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{y^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{y^n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{y^{2n}-1} = y^{-1} - 2y^{-2}.$$

Replacing y by $1/x$ gives the result. □

Corollary 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{2^n+1} = 0.$$

Proof. Take $x = 1/2$ in Lemma 2. □

If follows from Lemma 2 that

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x^n}{x^n+1} = -1,$$

so that one might say that in this sense $\mu(n)$ is negative on average. However, this is much weaker than what we showed in Theorem 1 for $L(n)$, where the corresponding sum tends to $-\infty$. The "complex-analytic" reason for this difference is that $\zeta(2s)/\zeta(s)$ has a pole (with negative residue) at $s = 1/2$, but $1/\zeta(s)$ is regular at $s = 1$.

References

[1] P. Borwein, R. Ferguson and M. J. Mossinghoff, *Sign changes in sums of the Liouville function*, Math. Comp. **77** (2008), 1681–1694.

[2] C. B. Haselgrove, *A disproof of a conjecture of Pólya*, Mathematika **5** (1958), 141–145.

[3] P. B. Humphries, *The Summatory Function of Liouville's Function and Pólya's Conjecture*, Honours Thesis, Department of Mathematics, The Australian National University, Canberra, October 2010.

[4] P. B. Humphries, *The Distribution of Weighted Sums of the Liouville's Function and Pólya's Conjecture*, arXiv:1108.1524, August 2011.

[5] A. E. Ingham, *On two conjectures in the theory of numbers*, Amer. J. of Mathematics **64** (1942), 313–319.

[6] T. Kotnik and J. van de Lune *On the order of the Mertens function*, Experimental Mathematics **13**:4 (2004), 473–481.

[7] T. Kotnik and H. J. J. te Riele *The Mertens conjecture revisited*, Proc. ANTS 2006, Lecture Notes in Computer Science **4076** (2006), 156–167.

[8] R. S. Lehman, *On Liouville's function*, Math. Comp. **14** (1960), 311–320.

[9] D. H. Lehmer, *Extended computation of the Riemann zeta function*, Mathematika **3** (1956), 102–108.

[10] E. D. F. Meissel, *Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde naturlicher Zahlen vorkommen*, Math. Ann. **25** (1885), 251-257.

[11] A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*, J. für die reine und angewandte Mathematik **357** (1985), 138–160.

[12] G. Pólya, *Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie*, Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung **28** (1919), 31–40.

[13] M. Rubinstein and P. Sarnak, *Chebyshev's bias*, Experimental Mathematics **3** (1994), 173–197.

[14] M. Tanaka, *A numerical investigation on cumulative sum of the Liouville function*, Tokyo J. Math. **3** (1980), 187–189.

Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

E-mail address: `polya@rpbrent.com`

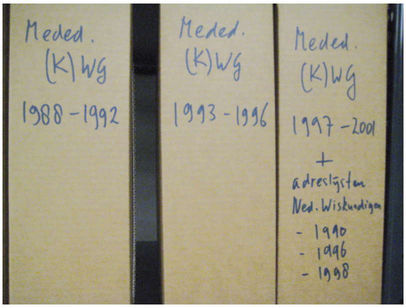
Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Netherlands
(Formerly at CWI, Amsterdam)

E-mail address: `j.vandelune@hccnet.nl`

Wij zijn Herman

(in het diepst van onze gedachten)

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is erg ingenomen met de pensionering van Herman te Riele bij het CWI – nu kan hij tenminste al zijn tijd aan ons eerbiedwaardige genootschap besteden!
Niet dat wij ooit te klagen hebben gehad over de inzet van Herman. In allerlei opzichten voldoet Herman aan het tegendeel van het beeld van de onzichtbare wiskundige die dankzij twee baantjes steeds kan claimen elders bezig te zijn: nee, Herman wist juist altijd en overal de indrukte wekken dat hij al het andere er wel even bij deed. Maar men moet zich niet om de tuin laten leiden: zoals een ander pseudoniemen gebruikt ter mystificatie, en om maar niet verantwoordelijk te worden gehouden voor zijn daden, zo bediende Herman zich slechts van verzonnen namen om te verbergen dat eigenlijk hij al het werk voor het KWG-bestuur deed: allerhande fictieve figuren met de meest onwaarschijnlijke namen (zoals ‘Minnie’ en ‘Reinie’ en ‘Hetty’ en ‘Bauke’) zouden zogenaamd velerlei taken uitvoeren voor KWG en NAW, en recentelijker ook voor WPD en PWN. Naast deze mensen, die natuurlijk niemand ooit in levende lijve gezien heeft, zijn er ook stromannen in het KWG-bestuur die op ledenvergaderingen wel degelijk stoffelijk aanwezig zijn, maar wier woorden en daden, als bij buikspreekpoppen, overduidelijk uit de koker van Herman komen.



Opmerkelijk, maar niet verwonderlijk in het licht van bovenstaande, is dat Herman ons nu, bij zijn afscheid van het CWI, opeens wil doen geloven dat er sprake is van een ‘thuisfront’ voor hem, met een echt huis en zelfs een heuse echtgenote – al te doorzichtig natuurlijk, vooral wanneer hij het doet voorkomen dat sommige van zijn dienstreizen in werkelijkheid bedoeld waren om ‘(klein)kinderen’ in een ver buitenland te bezoeken. Nee, iedereen weet dat Herman in feite woont, leeft, en werkt in het CWI, temidden van zijn aantekeningen, artikelen en archiefdozen (zie foto’s). Daarom wekte het nimmer bevreemding dat al die instituten-met-een-W hun domicilie kozen aan de Kruislaan: heeft iemand daar ooit een kantoor van deze instellingen gezien anders dan de kamer van Herman – *Mister W*– zelf?

	E	R	K			M		
		W			M		T	
	G				S			R
	M			T			I	
S			R				G	
	S		E			G		
		I			T	E	K	

Iedereen kent de aimabele Herman, schijnbaar het meest op zijn gemak aan de uitgebreide dis, nippend aan een glas wijn, af en toe een blik werpend op zijn bijna voltooide sudoku. Tot in de keuze van zijn favoriete onderwerp uit de getaltheorie wist hij zo de indruk te wekken van de volmaakte harmonie te genieten (de perfecte en bevriende getallen waren al die jaren zijn beste vrienden, buiten de archiefdozen). Doch, teneinde niet de verdenking van overmatige bovenmenselijkheid op zich te laden, liet hij onlangs sommige bordkartonnen bestuurders toch enige sputterende geluiden produceren (‘off-the-record’, vanzelfsprekend!): over Herman als ‘Pietje Precies’, die altijd als men dacht dat men de discussie zonder te veel kleerscheuren was doorgekomen nog even terugkwam met een dodelijk ‘maar ik wil er toch nog even op wijzen dat volgens de statuten ...’ of een vernietigend ‘in de vergadering van 19 maanden geleden hebben we juist vastgesteld dat ...’, hetgeen dan onmiddellijk een kanteling in de besluitvorming inluidde.

Een opsomming van de werkzaamheden van Herman in het kader van het (K)WG zou veel te veel ruimte vergen: van het produceren van alle drukwerk, tot het bemannen van de standjes op de Nationale Wiskunde Dagen, van het bijhouden en wijzigen van statuten van het genootschap tot het telkens weer opduikelen van geschikte stromannen als ‘voorzitter’ van het genootschap (nu eens een min of meer vooraanstaande hoofdstedelijke topoloog, dan weer een slechts vaag gekende halve informaticus uit de provincie), van het prepareren van elektronische mededelingen tot het aanleggen van adreslijsten van nederlandse wiskundigen, van het verzorgen van en publiceren over het Archief en de Boekerij, tot het bij nacht en ontij schoonmaken van het Blaricumse graf van illustere voorgangers – werkelijk niets was Herman de afgelopen jaren te veel. Wat een onvermoeide arbeid al niet te boven kwam!

Moeiteloos zal Herman er ook in slagen de komende decennia, zonodig middels het geliefde middel van statutenwijziging, deel uit te blijven maken van het bestuur. En de schaduw van Hermans pensionering werpt zich reeds veelbelovend vooruit: tijdens het komende Wintersymposium neemt Herman niet alleen de folders, de bemanning van de ontvangstbalie, de kaartverkoop en de promotie van lijfblad Nieuw Archief voor zijn rekening – neen, hij zal er ook de hoofdvoordracht nog wel even bij doen!

Zelfs dit stukje zou er zonder Herman helemaal niet geweest zijn.

Zo Stapel-t het 'bewijs' zich op: wij bestaan slechts in Herman.

En Herman: wij vinden ons geweldig!

Het bestuur van het KWG,
namens deze, strolieden
Joke Blom (beeld),
Wieb Bosma (tekst),
K.P. Hart (sudoku).


HERMAN
KWG
NEDERLANDS
BROUWERGRAF
MATHEMATISCH
BEEGER
SECRETARY
COMMITTEE
CONGRES
APRIL
WISKUNDE
STEUNPILAAR
WINTERSYMPOSIUM
DOCENTEN
SINCE
AMSTERDAM
MATERIAAL
SECM
ZORG
CONTACTEN
LECTURE
ORGANIZING
KWG-BESTUUR
NVVW
HENDRIK
INSPECTEUR
KWG-STAND
GROTE
ROYAL
UTRECHT
GENOOTSCHAP
BIJEENKOMSTEN
CHAIRMAN
FIFTH
TEUN
ARCHIEF
NAUWGEZET
VLIEGENDE-KEEPER
JAARDAG
GEWETENSVOL
BETROUWBAAR
ORGANISATOR
SURVEY
MISSEN
JAARVERGADERING
FUNCTIES
STATUTEN
WISKUNDE NODE
UNIVERSITEIT
NIEUW
BEHEERT
STANDS
TENTH
TOEGEWIJD
WISKUNDIG
INSPECTOR
14-18
MATHEMATICS
ONMISBAAR
SECRETARIS
ERVARING
PR
KONINKLIJK
JULY
BESTUUR
EVENEMENTEN
WISKUNDELERAREN
GEHEUGEN
DRUKKEN
SOCIETY
VELE
VOORGESCHIEDENIS
INZET
LOCAL
MATHEMATICAL
EUROPEAN
PAPER-EDITOR
BOEKERIJ
49TH
19-20
EPSILON
KOETSIER
CO-ORGANIZER
LIBRARY
WISKUNDIGEN
UNTIL
22-23
AANVOEREN
JAN
DUTCH
LECTURER
DAGEN
37STE
MANUSJE-VAN-ALLES
TOEKOMST
LENSTRA
ARCHIVIST
NMC
NATIONALE
PETJE-PRECIES
NWD
JARENLANGE
FOLDERS
LOYAAL
CONGRESS EXTERN
NATIONALE TAFEL
NOORDWIJKERHOUT

PROGRAMS FOR RIEMANN'S ZETA FUNCTION

JUAN ARIAS DE REYNA

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

This note is written on a recommendation of your friend and former colleague Jan van de Lune.

1. Computing $\zeta(s)$ to arbitrary high precision.

In this note I will present programs to compute $\zeta(s)$ and some related functions that I have implemented, and are now part of the free software `mpmath`, a Python library for multiprecision floating-point arithmetic. `mpmath` provides an extensive set of transcendental functions, unlimited exponent sizes, complex numbers, interval arithmetic, numerical integration and differentiation, root-finding, linear algebra, and much more. It can be used from within Sage, in which case some of the functions run faster than running them only in `mpmath`.

The need for implementing these functions must be sought in my drawings in [1]. The computations needed for these drawings were done with the commercial software Mathematica. But the computed values of the zeta function given by Mathematica may not be well supported by theory. Although the Riemann-Siegel formula is known to be valid for values off the critical line, there were no published bounds available for the error, similar to those of Gabcke [7] for the critical line.

Hence, I obtained these bounds in [2] and also made a detailed analysis of how to compute $\zeta(s)$ with a prescribed error ε. This analysis is contained in [3]. Then I implemented the function `zeta` in Python and it was included in `mpmath`.

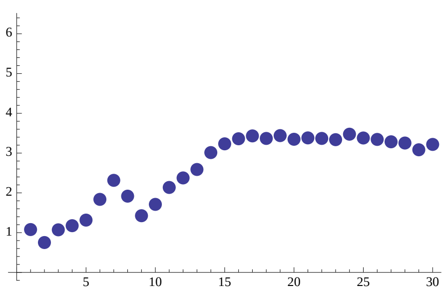


Figure 1

I also included the function `siegelz`. The resulting implementation is faster than that of Mathematica. For example, in

Fig. 1 I have represented the quotients of the times spent on computing the values of $\zeta(1+i\cdot 100000\cdot 2^n)$ to 180 decimal digits for $n=0$ to $n=30$, always using the same laptop, Mathematica version 7.0, and mpmath version 1.6 from within Sage. For $n=0$ the quotient of the times is 21.3. I have opted for not representing it in Fig. 1. My implementation goes directly to the computation because the study in [3] determines exactly what terms to compute and to what degree of precision to achieve the desired result. It appears that Mathematica may make some initial or partial computations of the terms and precision, then store those values to substantially reduce the time spent on subsequent computations. (On the computation of $\zeta(1+100000i)$ Mathematica spent 30.827 seconds and mpmath only 1.448. In the next computation, for $\zeta(1+200000i)$ the respective times are 2.852 and 2.647).

The above example is one in which Mathematica performs very well. For a related example consider Fig. 2. In this case we compute $Z(100000\cdot 2^n)$ for $n=0$ to $n=30$, again to 180 digits. In the first computation mpmath is much better, after that only for two values of n are the times of Mathematica better than those of mpmath, after which mpmath outperforms Mathematica.

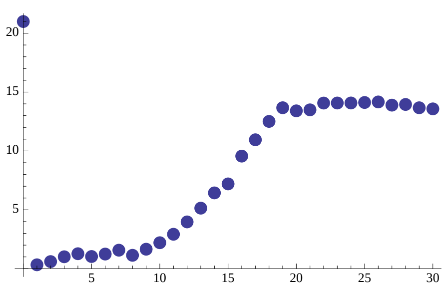


Figure 2

1.1. **Derivatives.** I observed that the terms of the Riemann-Siegel expansion as I have considered them in [2] are not analytic. This gave me the idea of how to implement also the derivatives of $\zeta(s)$. I included this implementation in the function `zeta` for the first four derivatives. The computation of the derivatives is not so well documented as that of $\zeta(s)$; however, I have no doubt that the theoretical foundation can be given rather easily.

We may observe the consistency of the program for computing the derivatives with a little program for computing the fourth derivative $Z^{(4)}(a)$ of the Riemann-Siegel $Z(t)$ function at $a=1234567890$:

```
from mpmath import *
for n in range(13,26):
    mp.dps = n
    y = siegelz( 1234567890, derivative = 4 )
    print "siegelz^(iv)( 1234567890 ) = ",y
```

We get

```
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.5347613385
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.53476133847
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338466
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.5347613384662
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.53476133846623
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338466232
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.5347613384662324
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.5347613384662324
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338466232399
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338466232399
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.5347613384662323239898
siegelz^(iv)( 1234567890 ) =  5176.534761338466232398981
```

Just observe the perfect rounding of the results. (Mathematica in this case, after some warnings about overflow in its computation, gives an erroneous value with real and *imaginary* parts of the order of 10^{2226}.)

The computation of the first four derivatives of $\zeta(s)$ is implemented as `zeta(s,derivative = m)`.

2. Zeros of zeta.

Some years ago Fredrik Johansson, the author of mpmath asked me for a program to compute zeros of zeta. This has not been implemented before (Mathematica includes a function `ZetaZero[n]` but it only gives numerical values for $1 \leq n \leq 10^7$).

To explain the procedure we need some definitions and facts. What is not explained here can be found in the references Turing [18], Lehman [12], Brent [4], Brent, van de Lune, te Riele, and Winter [5], van de Lune and te Riele [10], van de Lune, te Riele and Winter [11], Trudgian [17] and Edwards [6].

As is well known $\zeta(\frac{1}{2}+it) = e^{-i\vartheta(t)}Z(t)$, where $Z(t)$ and $\vartheta(t)$ are real functions. For $k \geq -1$ the Gram point g_k is the solution of the equation $\vartheta(g_k) = k\pi$ with $g_k > 7$. `mpmath` has implemented the function ϑ as `siegeltheta` and g_k as `grampoint` allowing for arbitrary real arguments.

The Gram point g_k is called *good* if $(-1)^k Z(g_k) > 0$; otherwise, it is called *bad*.

The interval $(g_k, g_{k+1}]$ is called a Gram interval. "Gram's law" is the observation that $Z(t)$ usually changes sign in each Gram interval, but this "law" has many exceptions.

A Rosser block of length k is an interval $B_j = (g_j, g_{j+k}]$ such that g_j and g_{j+k} are good Gram points and $g_{j+1}, \ldots, g_{j+k-1}$ are bad points.

The definition implies that in a Rosser block of length $k \geq 2$ there are at least $k-2$ zeros of $Z(t)$. (There may be "two missing.")

The Rosser block B_j of length k satisfies "Rosser's rule" if it contains at least k zeros of $Z(t)$. Although Rosser's rule fails infinitely often, it is very useful. For example, the first exception to Rosser's rule is $B_{13\,999\,525}$ of length 2.

Let $N(T)$ denote the number of zeros (counted according to their multiplicities) of $\zeta(s)$ in the region $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, and $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ adequately defined (see Titchmarsh [16, section 9.3]). We have also the relation

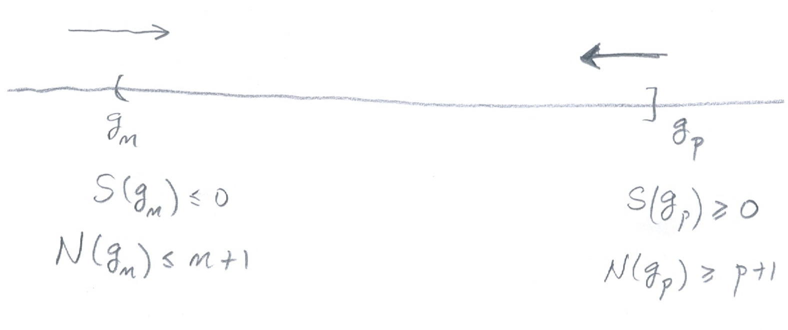
$$S(t) = N(t) - 1 - \frac{1}{\pi}\vartheta(t). \tag{1}$$

Gram's law holds in regions where $|S(t)| < 1$, Rosser's rule holds in regions where $|S(t)| < 2$.

The general strategy of our program `zetazero` is to locate a block of Gram intervals B for which we know the exact number of zeros, and containing the zero we are looking for. For this we use the following facts.

At a Gram point g_k we have $S(g_k) = N(g_k) - k - 1$. If $S(g_k) = 0$ we may say that for $(g_{-1}, g_k]$ we have one zero for each Gram interval. This is what (in mean) we may expect.

When $S(g_p) = a > 0$ we may say that a zeros corresponding to Gram intervals at the right of g_p have moved to the left. Analogously $S(g_n) = b < 0$ signifies that b zeros corresponding to Gram intervals to the left of g_n have moved to the right.



Our main tool will be a theorem that is the result of the work of Turing, Lehman and Brent. We quote the final form given by Brent:

Theorem 2.1. *If K consecutive Rosser blocks with union $(g_n, g_p]$ satisfy Rosser's rule, where*

$$K \geq 0.0061 \log^2 g_p + 0.08 \log g_p, \tag{2}$$

then $N(g_n) \leq n+1$, and $N(g_p) \geq p+1$.

Trudgian [17] proves that the Theorem is true also if we replace (2) by

$$K \geq 0.0031 \log^2 g_p + 0.11 \log g_p. \tag{3}$$

(Some time ago Herman drew my attention to this).

We see that the interval of the Theorem does not have fewer zeros than its length indicates.

If we had two consecutive intervals $(g_n, g_p]$ and $(g_p, g_q]$ to which the above Theorem applies, it would be certain that $N(g_p) = p+1$ or equivalently $S(g_p) = 0$. This is a key point for us.

The program finds an interval $(g_\ell, g_m]$ with $S(g_\ell) = S(g_m) = 0$ and containing our zero. Our zero γ_n is associated with the interval $(g_{n-2}, g_{n-1}]$ so that it will be zero number $n - \ell + 1$ contained in the interval $(g_\ell, g_m]$.

To obtain our interval $(g_\ell, g_m]$ we follow a different path when $n < 400\,000\,000$ or when $n \geq 400\,000\,000$. In the first case we benefit from the work done in [4], [5], [10], [11] and [9]. These authors have obtained a list of all Rosser exceptions for $n < 400\,000\,000$. I have written it in our program as a list `_ROSSER_EXCEPTIONS` some of whose terms are

```
...
[201184290, 201184293], '3(00)',
[201685414, 201685418], '(00)22',
[202762875, 202762878], '3(00)',
[202860957, 202860960], '3(00)',
...
```

For example, the second line means the following: The pattern (00)22 signifies that we have four Gram intervals: the first and second without zeros, the third and fourth with two zeros each. The notation (00) means here that the first two Gram intervals constitute a Rosser block. This Rosser block is a Rosser exception since it has no zeros instead of at least two. The first $[201685414, 201685418]$ says that these four Gram intervals form the interval $(g_{201685414}, g_{201685418}]$. Hence the Rosser exception here is the block $B_{201685414}$ of length two.

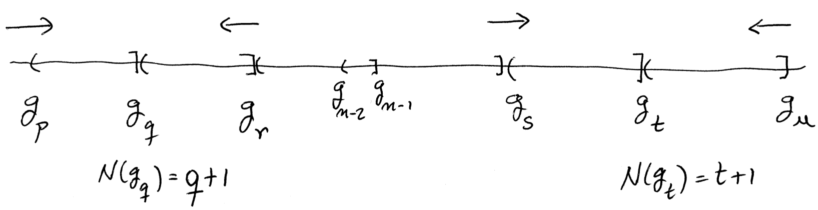
We know also that $S(g_{201685414}) = S(g_{201685418}) = 0$.

Hence when $n < 400\,000\,000$ we search in the list of Rosser exceptions. If we find in the list $[a, b]$ with $a \le n-2 < n-1 \le b$ we know that the interval $(g_a, g_b]$ contains $b-a$ zeros of which the $(n-a-1)$-st is the one we are searching for.

When $n < 400\,000\,000$ and is not in the list of Rosser exceptions, then the interval $(g_{n-2}, g_{n-1}]$ will be contained in a good Rosser block $(g_r, g_s]$, and our zero will be the $(n-r-1)$-th contained in the Rosser block $(g_r, g_s]$ that contains $s-r$ zeros.

When $n \ge 400\,000\,000$ we find (applying (2) or (3)) the number `nb` of good Rosser blocks satisfying Theorem 2.1.

We search starting from $n-1$ to the right to find 2`nb` adjacent good Rosser blocks to apply the Theorem, and starting from $n-2$ to the left to find 2`nb` adjacent good Rosser blocks to apply the Theorem. We will have the situation of the following figure.



By the Theorem we will know that $N(g_r) \ge r+1$ and $N(g_s) \le s+1$. If we find at least $s-r$ zeros in the interval $(g_r, g_s]$ we will have

$$s+1 = (r+1) + (s-r) \le N(g_r) + s - r \le N(g_s) \le s+1 \tag{4}$$

so that we will have $N(g_s) = s+1$ and then

$$r+1 \le N(g_r) \le N(g_s) - (s-r) = s+1-(s-r) = r+1 \tag{5}$$

so that also $N(g_r) = r+1$.

Hence, if we can separate $s-r$ zeros in $(g_r, g_s]$ our zero will be zero number $n-r-1$ in the block $(g_r, g_s]$ that contain $s-r$ zeros.

But it may be that the interval $(g_r, g_s]$ contains an exception to Rosser's rule, and this interval does not contain $s-r$ zeros. In this case we can obtain our zero as the $n-q-1$-th zero included in the block $(g_q, g_t]$ that will contain $t-q$ zeros.

Once separated, the zero can be computed to high precision. The program has an option 'info'. If we set 'info = True' then the program writes the pattern of zeros of the Rosser Block contained in the interval $(g_\ell, g_m]$ used to separate the zeros.

Easier than the computation of the zero is counting the number of zeros below a given T. Hence, in `mpmath`, besides `zetazero`, we have implemented also the function $N(T)$ called `nzeros` and $S(T)$ called `backlunds`.

3. Examples of use of the functions.

We will check some of the classical results. For example, Brent [4] says, there are precisely 75 000 000 zeros with $0 < t < 32\,585\,736.4$.

```
from mpmath import *
print nzeros(32585736.4)
```

gives us instantly the answer `75000000`.

The largest value of $S(t)$ cited in [11] is $S(t) = 2.313651$ associated with the Rosser block $B_{1\,333\,195\,692}$ of length 2. The maximum of $S(t)$ is always situated at the height of a zero of zeta, since at these points $S(t)$ increases just by 1. Hence (after some trials) we compute

```
from mpmath import *
mp.pretty = True
mp.dps = 30
zetazero(1333195695,info=True)
```

to get the interesting answer

```
        ((0.5 + 487931556.15100243042424864808j),
[1333195688, 1333195702], 6, '(1)(1)(1)(3)(00)(01112)(1)(1)(1)')
```

Then we compute $S(t)$ just after the zero

```
backlunds(mpf('487931556.15100243042424864809'))
```

and we get the value

$$S(t) = 2.3136513109845355492113939709 2$$

Gourdon [8] has been very useful in the composition of the program `zetazero`. In his paper we found many things to check our program. For example, he says: One Gram interval has been found containing 5 zeros of the Zeta function (at index 3 680 295 786 520). We tried to confirm this with the following little program:

```
from mpmath import *
from timeit import default_timer as clock
mp.siegelz = memoize(mp.siegelz)
mp.pretty = True
M=3680295786520
mp.dps=25
for n in range(0,10):
    M=3680295786520+n
    time0=clock()
    y = zetazero(M, info = True)
    time1=clock()
    print 'zero number ', M, '  is equal to ', y
    print 'computed in time ', round(time1-time0,3)
```

from which we get the result:

```
zero number  3680295786520   is equal to
((0.5 + 935203331168.8441852494293j),
[3680295786518, 3680295786523], 1, '(00)(5)(00)')
computed in time  467.768
zero number  3680295786521   is equal to
((0.5 + 935203331168.890443154703j),
[3680295786518, 3680295786523], 2, '(00)(5)(00)')
computed in time  88.083
zero number  3680295786522   is equal to
((0.5 + 935203331168.942043993996j),
[3680295786518, 3680295786523], 3, '(00)(5)(00)')
computed in time  464.087
zero number  3680295786523   is equal to
((0.5 + 935203331169.0406385758137j),
[3680295786518, 3680295786523], 4, '(00)(5)(00)')
computed in time  92.74
zero number  3680295786524   is equal to
((0.5 + 935203331169.0677885971269j),
[3680295786518, 3680295786523], 5, '(00)(5)(00)')
computed in time  104.108
zero number  3680295786525   is equal to
((0.5 + 935203331169.6059878126427j),
[3680295786518, 3680295786524], 6, '(00)(5)(00)(1)')
computed in time  141.907
zero number  3680295786526   is equal to
((0.5 + 935203331169.8976900813452j),
[3680295786518, 3680295786525], 7, '(00)(5)(00)(1)(1)')
computed in time  142.386
zero number  3680295786527   is equal to
((0.5 + 935203331170.222881423561j),
[3680295786518, 3680295786526], 8, '(00)(5)(00)(1)(1)(1)')
computed in time  154.217
zero number  3680295786528   is equal to
((0.5 + 935203331170.3511020085905j),
[3680295786518, 3680295786529], 9, '(00)(5)(00)(1)(1)(1)(210)')
computed in time  162.575
zero number  3680295786529   is equal to
((0.5 + 935203331170.4727708394046j),
[3680295786518, 3680295786529], 10, '(00)(5)(00)(1)(1)(1)(210)')
computed in time  155.854
```

Hence, indeed the Gram interval $(g_{3680295786520}, g_{3680295786521}]$ contains the five zeros with indices 3680295786520–3680295786524.

One of the difficulties for a program to compute zeros of zeta is the fact that there are some very close zeros. Gourdon [8, p. 24] contains a table with the closest zeros found by him. There are some surprising questions about the data given by Gourdon. This happens in all lines of his table, but we explain only the case of the second line where we found the minimal reported value of $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

$$\delta_n = 0.00007195, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = 0.00001703,$$

$$\gamma_n = 2124447368584.39307, \quad n = 8637740722916, \quad \varepsilon_n = 5.59 \cdot 10^{-8}.$$

To check these entries from Gourdon we compute several zeros around this point:

```
import mpmath

from mpmath import *
from timeit import default_timer as clock
mp.siegelz = memoize(mp.siegelz)
mp.pretty = True

M = 8637740722916
print "COMPUTING THE TWO NEAREST ZEROS GIVEN BY GOURDON"
mp.dps=32
for n in range(M,M+4):
    time0 = clock()
    y = zetazero(n, info = True)
    time1 = clock()
    print "zero number ", n, " is equal to ", y
    print 'computed in time ', round(time1-time0,3)
```

and get

```
COMPUTING THE TWO NEAREST ZEROS GIVEN BY GOURDON
zero number  8637740722916  is equal to
((0.5 + 2124447368583.985175823387348291 1j),
[8637740722914, 8637740722917], 1, '(1)(02)')
computed in time  150.798
zero number  8637740722917  is equal to
((0.5 + 2124447368584.392964661515291 1269j),
[8637740722909, 8637740722925], 7,
'(1)(1)(1)(1)(1)(1)(02)(1)(02)(1)(1)(20)(1)')
computed in time  557.065
zero number  8637740722918  is equal to
((0.5 + 2124447368584.392981706038605 0128j),
[8637740722909, 8637740722925], 8,
'(1)(1)(1)(1)(1)(1)(02)(1)(02)(1)(1)(20)(1)')
computed in time  257.125
zero number  8637740722919  is equal to
((0.5 + 2124447368584.632204282756108 1105j),
[8637740722915, 8637740722918], 3, '(02)(1)')
computed in time  79.513
```

(Observe that the timings depend very much on the zeros. Also the memoized function (see program) simplifies the task of computing a second near zero). In fact we find two very close zeros here.

$$\delta = 0.0000720136476678, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = 0.0000170445233139,$$
$$\gamma = 2124447368584.392964661515291l269, \quad n = 8637740722917$$

We see that Gourdon gives a different value of n with a difference of one unit. Gourdon's value of γ_n has an error of $0.0001053\dots$. Hence it is somewhat surprising that the value of the difference $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ is given only with an error 1.45×10^{-8}. These discrepancies occur in all examples in his table.

As a final challenge consider the computation of zero number 10^{16}.

```
from mpmath import *
from timeit import default_timer as clock
n = 10**16
mp.dps=33
time0 = clock()
y1,y2,y3,y4 = zetazero(n, info = True)
time1 = clock()
print "Zero number ",  n, " is the ", y3, "-th"
print "of the block ", y2
print "with zero pattern ", y4
print "its value is ", y1
print 'computed in time ', round(time1-time0,3)
```

we get

```
Zero number  10000000000000000  is the  1 -th
of the block  [9999999999999998, 10000000000000001]
with zero pattern  (210)
its value is  (0.5 + 1941393531395154.7112809113883108 1j)
computed in time  16885.63
```

The time is equal to 4 hours and 42 minutes.

Acknowledgements. I wish to express my thanks to Richard P. Brent, Patrick R. Gardner, and Jan van de Lune for their encouragements and linguistic assistance.

References

[1] J. Arias de Reyna, *X-Ray of Riemann's zeta-function*, ArXiv math.NT /0309433, (2003).
[2] J. Arias de Reyna, *High precision computation of Riemann's zeta function by the Riemann-Siegel formula, I.*, Math. Comp., **80** (2011), 995–2009.
[3] J. Arias de Reyna, *High precision computation of Riemann's zeta function by the Riemann-Siegel formula, II.*, (to appear).
[4] R. P. Brent, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip*, Math. Comp., **33** (1979), 1361–1372.

[5] R. P. Brent, J. van de Lune, H. J. J. te Riele and D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip II*, Math. Comp., **39** (1982), 681–688.
[6] H. M. Edwards, *Riemann's Theta Function*, Academic Press, 1974, [Dover Edition in 2001].
[7] W. Gabcke, *Neue Herleitung und explizite Restabschätzung der Riemann-Siegel Formel.* Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, Göttingen, 1979.
[8] X. Gourdon, *The 10^{13} first zeros of the Riemann zeta function and zeros computation at very large height*, (2004), available on the internet.
[9] J. van de Lune, *Sums of Equal Powers of Positive Integers*, Dissertation, Vrije Universiteit te Amsterdam, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1984.
[10] J. van de Lune and H. J. J. te Riele, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. III*, Math. Comp., **41** (1983), 759–767.
[11] J. van de Lune, H. J. J. te Riele and D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV*, Math. Comp., **46** (1986), 667–681.
[12] S. Lehman, *On the distribution of zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc., (3) **20** (1970), 303–320.
[13] F. Johansson et al., *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.14)*. (2010). `http://code.google.com/p/mpmath/`
[14] A. M. Odlyzko, *The 10^{20}-th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors*, (1992), available on the internet.
[15] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 4.5.3)* `http://www.sagemath.org`.
[16] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed. Revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
[17] T. Trudgian, *Improvements to Turing's method*, Math. Comp., **80** (2011), 2259–2279.
[18] A. M. Turing, *Some calculation of the zeta-function*, Proc. London Math. Soc., (3) **3** (1953), 99–117.

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,
Apdo. 1160, 41080-Sevilla, Spain
E-mail address: `arias@us.es`

Opa Herman

LIEVE OPA,

Hoera! Nog meer tijd voor gezellige fietstochten, hutten bouwen...

LOGEERPARTIJTJES, BOEKJES LEZEN,

dammen, Catannen, Casper het spookspel

NU MAAR HOPEN DAT WE HEEL SNEL WEER DICHTBIJ WONEN OM DAAR VAAK VAN TE GENIETEN!

Aan Herman te Riele bij zijn afscheid op 2-12-2011

Dirk Dekker

Beste Herman,

In 1970 werd je aangesteld als medewerker op de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, zoals vermeld in het jaarverslag 1970 van de Stichting Mathematisch Centrum:

> Verder werden in de functie van medewerker aangesteld de heer P.W. Hemker (per 15 januari), ir. H.J.J. te Riele (per 1 mei), J.D. Alanen, M.S. (per 1 juni), drs. D. Grune (per 1 augustus), drs. J. Wolleswinkel (per 1 oktober) en drs. C.G. van der Laan (per 1 december).

Ik was toen souschef van de numerieke sectie van de Rekenafdeling en heb je in die functie op het MC verwelkomd. De jaarverslagen 1970 en 1971 vermelden verder van jou de volgende onderzoekactiviteiten:

1970: Fast Fourier Transform, deels ten behoeve van opdrachtgevers;
1971: Getaltheorie, waarover het jaarverslag onder meer vermeldt:

> Tezamen met H.J.J. te Riele ontwikkelde J.D. Alanen een programma voor het factoriseren van zeer grote getallen.

Zo is het dus begonnen. Eerst werkte je als tweede man naast Alanen, later werd dit onderwerp een hoofdthema van je onderzoekloopbaan.

In datzelfde jaar 1971 verliet ik het MC en stapte ik over naar de UvA. Daarna hebben we toch regelmatig contact gehouden en met name samengewerkt op het gebied van numerieke programmatuur. Ik noem in het bijzonder het colloquium ‘Numerieke aspecten van vector- en parallel processors’ in 1985-1986, dat heeft geleid tot publicatie [1].

Als dank voor onze prettige samenwerking en contacten besluit ik deze bijdrage met een illustratie ontleend aan mijn getaltheorie-hobby, die ik (vooral) sinds mijn emeritaat beoefen. Deze hobby – ik heb er vaak met je over gesproken - betreft priemgetallen en priem-neven-idealen in de ring der gehelen van een kwadratisch lichaam. Voor theorie en algoritmen en plaatjes van priemgetallen (en priem-nevenidealen), zie mijn artikel [2] en voor verdere bijzonderheden, met o.a. een nederlandse tekst en progammatuur in

C, mijn website [3]. Het gaat mij vooral om de mooie plaatjes en de zeer gevarieerde patronen van priemgetallen voor lichamen van verschillende discriminanten.

Herman, voor ik het plaatje vertoon feliciteer ik je bij deze van harte met het bereiken van deze mijlpaal en wens ik je met Toke nog vele gelukkige jaren toe.

Dirk Dekker.

[1] H.J.J. te Riele, Th.J. Dekker, H.A. van der Vorst (editors), Algorithms and Applications on Vector and Parallel Computers; North-Holland (1987).

[2] T. J. Dekker, Primes in quadratic fields; arXiv:1001.5214 [math.NT] (2010) .

[3] http://www.science.uva.nl/~dirk.

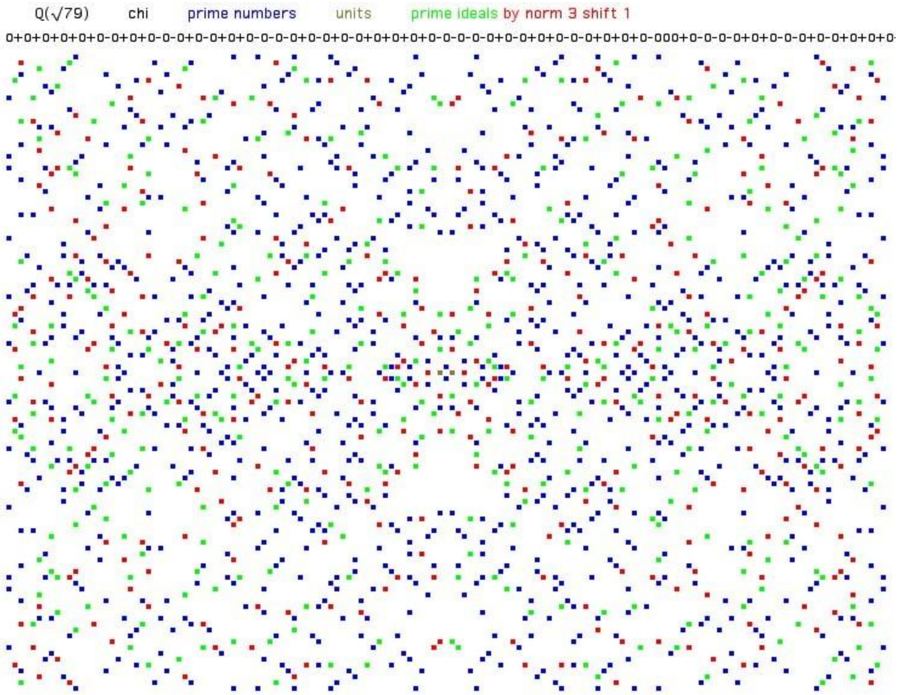
Hieronder volgt uit mijn collecties een plaatje van priemgetallen en priem-nevenidealen voor de ring der gehelen van het kwadratische lichaam $\mathbf{Q}(\sqrt{79})$, dat zijn dus de getallen

$$x + y\sqrt{79},$$

waarbij x en y gewone gehele getallen zijn. Deze ring heeft klassegetal 3, zodat ze, naast de klasse van hoofdidealen, twee klassen van nevenidealen bezit.

In dit plaatje worden de nevenidealen verkregen door hoofdidealen te delen door een geschikt gekozen priem-nevenideaal [norm, shift + $\sqrt{79}$], dat is het ideaal voortgebracht door norm en shift + $\sqrt{79}$, waarbij hier, zoals boven aan het plaatje vermeld, norm = 3 en shift = 1.

Dit komt hierop neer dat de priem-nevenidealen in het plaatje overeenkomen met de getallen waarvan de norm gelijk is aan 3 maal een priemgetal. In het plaatje zijn de priemgetallen blauw getekend, de eenheden grijs, priem-nevenidealen uit de ene klasse rood en die uit de andere geconjugeerde klasse groen. Bovendien wordt het karakter ‘chi’ van de desbetreffende ring (lichaam) bovenaan gegeven.


Q(√79)
chi
prime numbers
units
prime ideals by norm 3 shift 1
0+0+0+0+0+0-0+0+0-0-0+0-0+0+0-0-0-0+0-0+0-0+0+0+0+0+0-0-0-0-0+0-0+0+0-0-0-0+0+0+0-000+0-0-0-0+0+0-0-0-0+0-0+0+0+0-

==

A PROBLEM RELATED TO THE APPROXIMATION OF π BY ARCHIMEDES/HUYGENS

JUAN ARIAS DE REYNA AND JAN VAN DE LUNE

Dedicated to Herman J. J. te Riele on the occasion of his retirement from the CWI in January 2012

1. The problem and its origin.

It is well known that Archimedes approximated 2π (:= the length of the circumference of a circle having radius $r = 1$) by the lengths of inscribed and circumscribed regular n-gons.

Denoting the length of such an inscribed n-gon by ℓ_n and that of a circumscribed one by L_n we have

$$\ell_n = 2n \sin \frac{2\pi}{2n} \qquad \text{and} \qquad L_n = 2n \tan \frac{2\pi}{2n}. \tag{1}$$

Huygens considered the question: Which of ℓ_n and L_n is the best approximation of 2π and to what extent ?

It should be clear that $\ell_n < 2\pi < L_n$. So, for a suitable $\lambda \in (0,1)$ one should take $2\pi = \lambda \ell_n + (1-\lambda)L_n$.

From this it is easily seen that the best λ would be $\lambda = \frac{1}{\left(1+\frac{2\pi-\ell_n}{L_n-2\pi}\right)}$.

So, one should consider the ratio $\frac{2\pi-\ell_n}{L_n-2\pi}$, or as we actually did

$$\frac{L_n - 2\pi}{2\pi - \ell_n} = \frac{\tan\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}}.$$

Writing $x := \frac{\pi}{n}$ we are thus led to consider the (even) function $Q(x) := \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ for x close to 0.

It was known to Huygens that $Q(x) > 2$, and using l'Hôpital's rule it is easily seen that $\lim_{x\to 0} Q(x) = 2$.

Consequently one should (in this context) approximate 2π by $\frac{2}{3}\ell_n + \frac{1}{3}L_n$. Also note that $\frac{2}{3}\ell_n + \frac{1}{3}L_n > 2\pi$.

(A similar analysis holds for the areas a_n and A_n of the n-gons.)

For us it was just a matter of curiosity to have a closer look at the coefficients in the power series of the function $\frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ for x close to 0.

Invoking *Mathematica* we found (for various values of nMax) for example:

```
nMax = 30; (*  For example  *)
Normal[Series[(Tan[x] - x)/(x - Sin[x]), {x, 0, nMax}]]
```

$$2+\frac{9x^2}{10}+\frac{513x^4}{1400}+\frac{297x^6}{2000}+\frac{2\,595\,081\,x^8}{43\,120\,000}+\frac{136\,726\,449\,x^{10}}{5\,605\,600\,000}+\frac{7\,757\,835\,963\,x^{12}}{784\,784\,000\,000}+$$
$$\frac{4\,810\,522\,436\,537\,x^{14}}{1\,200\,719\,520\,000\,000}+\frac{228\,184\,846\,967\,215\,909\,x^{16}}{140\,532\,212\,620\,800\,000\,000}+\frac{924\,798\,350\,722\,118\,597\,x^{18}}{1\,405\,322\,126\,208\,000\,000\,000}+$$
$$\frac{423\,613\,976\,567\,459\,270\,644\,897\,x^{20}}{1\,588\,323\,173\,482\,805\,760\,000\,000\,000}+\frac{1\,716\,842\,780\,515\,524\,728\,374\,151\,x^{22}}{15\,883\,231\,734\,828\,057\,600\,000\,000\,000}+$$
$$\frac{126\,064\,430\,908\,322\,638\,705\,746\,667\,x^{24}}{2\,877\,667\,867\,251\,201\,024\,000\,000\,000\,000}+\frac{15\,852\,808\,185\,558\,085\,074\,420\,916\,349\,x^{26}}{892\,881\,980\,908\,641\,884\,160\,000\,000\,000\,000}+$$
$$\frac{6\,162\,379\,696\,360\,573\,178\,218\,943\,175\,357\,313\,x^{28}}{856\,398\,823\,168\,714\,776\,773\,222\,400\,000\,000\,000\,000}+\frac{324\,677\,394\,542\,156\,500\,969\,976\,683\,473\,676\,127\,x^{30}}{111\,331\,847\,011\,932\,920\,980\,518\,912\,000\,000\,000\,000\,000}$$

and (observing that all coefficients turned out to be positive) arrived at the *conjecture* that all coefficients c_n in the power series expansion

$$\frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{2n}$$

are strictly positive indeed.

We thus ran into the problem: If true, how can this be proved ?

2. A proof of the conjecture.

$Q(x)$ is a meromorphic function on the complex plane. Its poles are those of $\tan x$ at the points $x = (2n+1)\pi/2$ with n an integer and at the zeros of $x - \sin x$, except $x = 0$, which is a removable singularity of $Q(x)$.

We consider the square $R = [-2\pi, 2\pi]^2$. Inside this square there are only four poles of $Q(x)$: at the points $\pm\frac{\pi}{2}$ and $\pm\frac{3\pi}{2}$. To see this it suffices to show that $x - \sin x$ has only one (triple) zero inside R. This can be proved formally by computing the variation of the argument of $x - \sin x$ when moving along the rim of the rectangle with vertices at $\pm 2\pi \pm iT$ with T a big real number.

We compute the residues

$$\operatorname*{Res}_{x=\pi/2} Q(x) = \frac{2}{2-\pi}, \qquad \operatorname*{Res}_{x=-\pi/2} Q(x) = -\frac{2}{2-\pi},$$
$$\operatorname*{Res}_{x=3\pi/2} Q(x) = -\frac{2}{2+3\pi}, \qquad \operatorname*{Res}_{x=-3\pi/2} Q(x) = \frac{2}{2+3\pi}.$$

Hence, we may write

$$Q(x) = \frac{8}{\pi(\pi-2)}\frac{1}{1-4x^2/\pi^2} + \frac{8}{3\pi(2+3\pi)}\frac{1}{1-4x^2/9\pi^2} + h(x). \tag{2}$$

where h is analytic on R.

We thus find the following value for c_n

$$(3) \quad c_n = \frac{8}{\pi(\pi-2)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} + \frac{8}{3\pi(2+3\pi)}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{2n} + d_n,$$

$$\text{with} \quad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{h(z)}{z^{2n+1}}\,dz.$$

For $x \in \partial R$ we have $|Q(x) - h(x)| \le \frac{1}{4}$. In fact for $|x| > 2\pi$ we have

$$|Q(x) - h(x)| \le \frac{8}{\pi(\pi-2)}\frac{1}{16-1} + \frac{8}{3\pi(2+3\pi)}\frac{1}{16/9-1} = 0.244234\dots$$

Also, for $x \in \partial R$ we will show that $|Q(x)| \le 2$. Since Q is even, we only have to bound $Q(2\pi + iy)$ and $Q(x + 2\pi i)$ for $|y| < 2\pi$ and $|x| < 2\pi$.

First for y real and $|y| < 2\pi$ we have

$$Q(2\pi + iy) = \frac{-2\pi + i(\tanh y - y)}{2\pi + i(y - \sinh y)}.$$

Then $|Q(2\pi + iy)| \le 2$ is equivalent to

$$4\pi^2 + (\tanh y - y)^2 < 16\pi^2 + 4(\sinh y - y)^2$$

or

$$\tanh^2 y - 2y\tanh y < 12\pi^2 + 3y^2 + 4\sinh^2 y - 8y\sinh y.$$

So $|Q(2\pi + iy)| \le 2$ follows from the two elementary inequalities: $\tanh^2 y < 1$ and $8y\sinh y < 2 + 3y^2 + 4\sinh^2 y$.

On the other side of the rectangle, for $-2\pi < x < 2\pi$ we have

$$|Q(x + 2\pi i)| = \left|\frac{\tan(x+2\pi i) - x - 2\pi i}{x + 2\pi i - \sin(x+2\pi i)}\right| \le \frac{\coth 2\pi + |x + 2\pi i|}{\sinh 2\pi - |x+2\pi i|}$$

$$\le \frac{\coth 2\pi + 2\sqrt{2}\pi}{\sinh 2\pi - 2\sqrt{2}\pi} = 0.0381898\dots$$

It follows that on ∂R we have $|h(x)| \le |Q(x) - h(x)| + |Q(x)| \le 3$, so that

$$|d_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial R}\frac{3}{(2\pi)^{2n+1}}|dz| \le 24(2\pi)^{-2n-1}.$$

Hence with $|\theta| \le 1$

$$(4) \qquad c_n = \frac{8}{\pi(\pi-2)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} + \frac{8}{3\pi(2+3\pi)}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{2n} + \theta\cdot 24(2\pi)^{-2n-1}.$$

Since $8/(\pi(\pi-2))$ is about $2.23064\dots$ we have

$$c_n > 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} - 24\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n+1} > 0 \qquad \text{for all } n \ge 1$$

completing our proof.

3. Further observations.

In the previous Section we proved that in the power series expansion

$$\frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^{2n}$$

all c_n are positive.

Writing $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \, x^{2n-1}$ and $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \, x^{2n-1}$ we defined

$$T := \sum_{n=1}^{N} t_n \, x^{2n-1} \quad \text{and} \quad S := \sum_{n=1}^{N} s_n \, x^{2n-1}$$

and observed (using Mathematica) the following:
The coefficients q_n in the power series expansion

$$\frac{\tan x - T}{S - \sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \, x^{2n}$$

(1) are all positive if $N \equiv 1 \pmod 2$
(2) are all negative if $N \equiv 0 \pmod 2$.

We have no proof for this and leave a proof (or refutation) as a challenge to the interested reader. One may want to try things out by means of the following program.

```
In[1]:=
n = 3; (*  Also try some other  n ∈ N  *)
T = Normal[Series[Tan[x], {x, 0, 2 n - 1}]];
S = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 2 n - 1}]];
Print["f = ", f = (Tan[x] - T)/(S - Sin[x])];
nTerms = 24;  (*  For example  *)
Normal[Series[f, {x, 0, nTerms}]]
```

$$f = \frac{-x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \mathrm{Tan}[x]}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \mathrm{Sin}[x]}$$

Out[4]=
$$272 + 114 x^2 + \frac{6101 x^4}{132} + \frac{890\,149 x^6}{47\,520} + \frac{26\,000\,961\,209 x^8}{3\,424\,861\,440} + \frac{64\,491\,289\,360\,457 x^{10}}{20\,960\,152\,012\,800} +$$
$$\frac{30\,254\,970\,559\,608\,601 x^{12}}{24\,262\,182\,114\,508\,800} + \frac{208\,883\,539\,141\,611\,618\,143 x^{14}}{413\,311\,124\,757\,080\,309\,760} + \frac{7\,710\,587\,768\,733\,558\,650\,509\,987 x^{16}}{37\,644\,377\,242\,874\,874\,612\,940\,800} +$$
$$\frac{28\,124\,851\,654\,909\,083\,303\,025\,556\,651 x^{18}}{338\,799\,395\,185\,873\,871\,516\,467\,200\,000} + \frac{1\,995\,115\,035\,944\,689\,724\,814\,158\,752\,505\,297 x^{20}}{59\,300\,735\,738\,173\,875\,479\,270\,286\,950\,400\,000} +$$
$$\frac{59\,091\,732\,921\,225\,317\,488\,043\,271\,690\,096\,506\,747 x^{22}}{4\,333\,697\,767\,745\,746\,820\,025\,072\,570\,335\,232\,000\,000} + \frac{3\,507\,664\,213\,216\,293\,552\,099\,055\,375\,264\,386\,853\,121 x^{24}}{634\,730\,927\,560\,495\,429\,381\,430\,471\,959\,353\,753\,600\,000}$$

A similar analysis of the inner and outer areas a_n and A_n leads to “similar” observations.

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,
Apdo. 1160, 41080-Sevilla, Spain
E-mail address: arias@us.es

Langebuorren 49, 9074 CH Hallum, The Neterlands
(Formerly at CWI, Amsterdam)
E-mail address: j.vandelune@hccnet.nl


CWI

Het zal in 2001 geweest zijn dat bij de European Mathematical Society het idee ontstond dat het 5-de Europees Mathematisch Congres misschien in Nederland gehouden kon worden. Het KWG zag dat ook wel zitten, bedacht dat Amsterdam de voor de hand liggende locatie was, en benaderde de directeuren van de drie Amsterdamse wiskunde-instituten of zij een bidbook wilden maken. Die vonden alles prima als het geen geld kostte, en zij het niet zelf hoefden te doen. Drie gekken, Herman en wij tweeën lieten zich overhalen dat bidbook te schrijven. De rest is geschiedenis...

Op die geschiedenis willen we bij het afscheid van Herman wel even terugkijken. Waarom denken we achteraf eigenlijk dat wij toen gekken waren? Toen geloofden we dat we idealistisch waren: zo’n groot congres dachten we, is goed voor de Nederlandse wiskunde, zet Amsterdam op de kaart, en brengt mooie wiskunde naar ons land. Maar we dachten ook dat, als we het congres kregen toegewezen, er “echt belangrijke, vooraanstaande” wiskundigen zouden opstaan om het congres werkelijk te organiseren. Kortom een stevige klus voor een à twee jaar. Dom, dom, dom... Het werd een avontuur in alle opzichten, dat meer dan zeven jaar zou duren. Net als alle goed avonturen was het heel vaak heel spannend en, zoals het hoort, is het heel goed afgelopen.

Optimistisch als we waren namen we het grootste Europees congres tot dan toe als voorbeeld, en dachten dat we nog wel meer deelnemers zouden scoren. Dat betekende de RAI reserveren, een congresbureau zoeken, nadenken over sponsors, comités, en nog veel meer.

Eigenlijk werd al bij het maken van het bidbook duidelijk dat niemand het van ons zou overnemen als 5ECM naar Amsterdam zou komen. Het kwam en wij drieën werden zo het organizing committee. En daar stonden we dan. Dat we het geklaard hebben komt doordat we er altijd als een hecht team ingegaan zijn. De rolverdeling secretaris, penningmeester, voorzitter, is bijna door het lot bepaald en geen beslissing hebben we genomen zonder unanimiteit. Het spannendst was ongetwijfeld het financieel rond krijgen van het congres.
Het bezoek van het EMS-bestuur aan Amsterdam, de gevolgen van dat

bezoek voor de fee en het budget, en de slapeloze nachten die we er over hadden, staan ons nog helder voor de geest. Als Herman niet zo hard aan het legaat Lekkerkerker had gewerkt en het bestuur van het KWG had bewerkt om 5ECM ruimhartig te onder- steunen, was het niet gelukt het congres voor elkaar te krijgen. En wat Herman deed om het programma, het schema, de abstracts en de proceedings in elkaar te zetten, is veel meer dan wat we van hem verwachten mochten. Karakteristiek zijn de opmerkingen die hij maakte als er weer een arbeidsintensieve (rot)klus aankwam. “Zal ik dat even doen” of “dat kan ik wel doen”. Herman heeft dat vaak gezegd en we zijn hem er dankbaar voor! En het resultaat mocht er zijn. 5ECM is een groot succes geworden. De proceedings zijn er gekomen, en we zijn er ook nog positief uitgesprongen.

Herman bij de KWG-stand op 5ECM met Jan M. Broeders van “optische fenomenen”.

Veel leuke dingen waren er ook! We zijn met zijn drieën in Stockholm naar 4ECM geweest, om eens te kijken hoe dat gaat, zo’n groot congres. We waren meteen gebombardeerd tot afgevaardigden van het KWG en zaten dus eerst twee dagen saai te vergaderen in Uppsala over nauwelijks interessante zaken. Grappig was het wel om met zijn drieën te bepalen wat het vermoedelijk standpunt van het KWG over van alles en nog wat zou zijn. We hebben ook lang nagedacht of we John Kingman nu als Mr Kingman, John, of Sir John moesten aanspreken. In Stockholm was het spannender. We kwamen er achter dat zo'n congres met een manifestatie moet worden geopend en dat het echt onhandig is als je de halve campus over moet om naar een volgende voordracht te gaan.

De voordrachten waren leuk, nou ja meer voor analytici dan getal-theoretici:(en het was toch wel een beleving om in de hal ontvangen te worden waar de Nobelprijzen worden uitgereikt. En, niet te vergeten, daar presenteerden we voor het eerst, op een van Ari Laptev geleende Laptop, voor groot publiek 5ECM.

We kregen de smaak te pakken en gingen twee jaar later naar het ICM; eerst naar Santiago voor de council meeting, toen naar Madrid voor het echte congres. Waarom Herman dat met de bus deed, hebben wij nooit begrepen. Madrid was echt een groot evenement. De eerste dag was de rij voor de inschrijving ongeveer een kilometer lang, wij hadden weer wat geleerd, zo moest het niet.

Uiteindelijk kwam dan in de zomer van 2008 de spannendste week van het hele proces: het congres zelf. Vanaf zondag, bij de opbouw van de stand voor het KWG, was Herman in de RAI te vinden. Zoals altijd bleek ook nu weer dat wat Herman organiseerde op rolletjes verliep, en dat was eigenlijk de hele week zo. Hoe spannend de week ook was, er is flink gelachen en genoten. Een befaamd Frans wiskundige zorgde nog voor wat ophef, waarover achteraf ook met een glimlach herinneringen op te halen zijn. Dat doen we maar niet hier in geschrifte, dat is wat pijnlijk voor de betrokken fransoos.

Bij dat alles gaf Herman er duidelijk de voorkeur aan om niet al te veel in de spotlight te staan. Zijn geweldige talent om zaken te organiseren wordt daardoor mogelijk door velen niet zo snel gezien en gewaardeerd. Opmerkelijk is bijvoorbeeld hoe weinig Herman op de foto's staat die tijdens het 5ECM congres gemaakt zijn. We hebben ze laatst nog een keer doorgelopen en kwamen tot de conclusie dat Herman weliswaar op allerlei foto's op de achtergrond aanwezig is, maar zelden op de voorgrond. Dat past ook geheel in zijn karakter: heel actief op de achtergrond, maar Herman voelt zich wat ongemakkelijk als hij op de voorgrond in het centrum van de belangstelling staat. Dat zal op 1 en 2 december ook wel zo zijn.

Gelukkig hebben we wel fotografisch bewijs van de betrokkenheid van Herman, we kunnen niet nalaten een selectie hierbij te laten gaan. Zo zijn we in een vroeg stadium al bezig om de eindjes aan elkaar te knopen……

… en nemen we het er even van terwijl we lekker onderuit gezakt zitten te kijken naar Nederland-Zweden in Uppsala…..

….er viel af en toe wat te juichen, ook op latere momenten tijdens de organisatie van het congress….

……tijdens het congres was er natuurlijk wel even wat te regelen……

…was Herman ook duidelijk heel druk, bijvoorbeeld met de winnaar van de Brouwer-medaille P.A. Griffiths……

……………maar door de bank genomen, en vooral achteraf, zien we het toch zo:

Kortom: wij zijn van mening dat we als triumviraat prima gefunctioneerd hebben, en we denken met veel genoegen terug aan de lange periode waarin we samen met Herman zijn opgetrokken ten behoeve van de organisatie van 5ECM.

Jan Wiegerinck en André Ran


CWI

Beste Herman, familie, vrienden, kollega's,

Op zondag 5 januari, in het jaar 3 x 11 x 59 = 1947 werd te Den Haag geboren Hermanus Johannes Joseph te Riele.
Op dinsdag 5 januari 2 x 2 x 503 = 2012 wordt Herman te Riele, numeriek wiskundige en getaltheoreticus met internationale faam, 65 jaar. En over faam gesproken, wie heeft zichzelf niet eens gegoogeld? Ik heb het voor Herman gedaan en kom op ca. 50.000 bij Google (gemiddelde voor “H.J.J. te Riele” en “Herman te Riele”). Ter vergelijking, Marije en ik komen bij Google op “slechts” ca. 8000 en 4000 -> gemiddeld ca. 6.000 “hits”. (Waarbij dit sterk verwaterd is door niet-relevante resulaten en die van Herman er natuurlijk ook bij zitten, maar soit.)

Vandaag vieren we zijn afscheid t.a.v. zijn pensionering en blikken wij, Marije Elkenbracht-Huizing en Henk Boender, voormalige promovendi bij prof. Rob Tijdeman en Herman, heel kort terug op de tijd die wij met Herman mochten doorbrengen. Uitgebreid bijpraten kunnen we graag op de receptie. Bij deze gelegenheid onze hartelijke dank voor de uitnodiging hier op het CWI.

Persoonlijke herinneringen. Henks deel.

Al voor het begin van mijn promotie heb ik Herman leren kennen: Herman begeleidde Alex Sellink en mij in onze gezamenlijke afstudeerscriptie betreffende de kwadratische zeef, een algorithme ter ontbinding van grote gehele getallen. In die tijd, ca. 1992, betekende groot: ongeveer 80 tot 100 decimale cijfers. Ons programmeerwerk hebben we in de computerruimte van het CWI gedaan, waar je toen nog mocht roken, iets wat ik later heb opgegeven, het roken bedoel ik.

Alex besloot na zijn studie wiskunde te gaan promoveren op het gebied van computer science in Utrecht. Zelf heb ik het aanbod van mijn begeleiders graag aangenomen te promoveren op het gebied van de kwadratische zeef, onder de, laten we zeggen operationele leiding, van Herman. Ook Marije begon in die tijd als promovendus onder dezelfde condities. Dat gebeurde het grootste gedeelte van de week op het CWI. Daarmee was de overgang van de studie naar promotie naadloos. Dat was niet alleen inhoudelijk begrijpelijk, maar ook menselijk. Ik wist, dat ik met Herman een uitstekende begeleider gevonden had, die de tijd voor me nam. De deur stond bij hem altijd open. Kritiek, lof, aanwijzingen, tips uitte hij niet alleen duidelijk, maar ook op een prettige wijze.

Het aanknopen van kontakten was voor Marije en ik een belangrijk element. Herman heeft zich ervoor ingezet om Peter Montgomery, een expert op het gebied van de computationele getaltheorie, naar het CWI te halen zodat hij voor ons binnen handbereik was. We hebben er veel van geleerd. Wat ik verder van je heb geleerd, is het zuiver formuleren van bevindingen, o.a. in ons artikel "Factoring Integers with Large-Prime Variations of the Quadratic Sieve" in "Experimental Mathematics". Je hechtte grote waarde aan de correctheid van Engelse uitdrukkingen (het is: the set comprises prime numbers, niet: the set comprises OF prime numbers) en ik geloof dat je me het boek "Handbook of Writing for the Mathematical Sciences" aanbevolen had, wat ik nog steeds heb en ook buiten de wiskunde goed te gebruiken is.

Ook intern heb je je omgeven met medewerkers, die belangrijk voor ons onderzoek geweest zijn, bijvoorbeeld Dik Winter, die helaas niet meer is, en Walter Lioen, aan wie ik zelf ook veel heb te danken.

Ik kan geen samenvatting geven van al je werk en functies. Misschien mag ik een paar willekeurige hoogtepunten in een gedicht in het Duits samenvatten? Ik heb het "Kaputt" genoemd, omdat je in je werk het e.e.a. kapot gemaakt hebt...

Kaputt

M(x) durch Wurzel x ist immer klein, das hat sich Mertens ausgedacht. Aber weit gefehlt, seine Vermutung durch Herman gekracht. Auf geht's in die Zahlenwelt, die wir lieben.Zerlegst dabei die großen mit quadratischen Sieben. Können wir überhaupt noch sicher bezahlen? Erledigst du ja die größten mit dem Körper der algebraischen Zahlen!

Wel wil ik nog kwijt, dat ik minstens 56 publikaties heb geteld en dat je ook minstens 17 organisatorische functies hebt bekleed of nog bekleed, wat ik indrukwekkend vind. Je kan dus echt terugkijken op een prachtige wiskundige carrière en ik vermoed dat het bloed kruipt, waar het niet gaan kan, d.w.z. dat je je wiskundige activiteiten voort zult zetten. Misschien op een wat lager pitje, maar toch. Laat je niet verleiden om je thuis te bemoeien met dingen waar je echtgenote de scepter zwaait.

Geniet van je vrije tijd. Marije en ik wensen je daarbij heel veel plezier. Hartelijk dank.

Persoonlijke herinneringen. Marijes deel.

Na mijn afstuderen bij prof. Rob Tijdeman kwam er een promotieplaats beschikbaar die me bijzonder aansprak. De plaats zat in een samenwerkingsverband tussen prof. Tijdeman en Herman en ging over de Number Field Sieve, ook een algoritme om getallen in factoren te ontbinden. Ik solliciteerde met een presentatie over diophantische vergelijkingen, het onderwerp van mijn afstudeerscriptie. Toen ik er jaren later weer eens tegenaan liep, snapte ik er zelf niets meer van. Volgens mij een niet te volgen verhaal, maar kennelijk heb ik toen toch voldoende indruk gemaakt om aangenomen te worden.

Samenwerken, jouw uitstekende contacten met anderen in ons vakgebied heeft mij niet alleen veel kennis en inzicht maar ook veel plezier gebracht. Allereerst natuurlijk door Peter Montgomery op het CWI uit te nodigen. Jouw initiatief daartoe heeft de groep in het algemeen en mijn promotie in het bijzonder een enorme impuls gegeven. Ook Dik en Walter waren altijd bereid ons te helpen. Samenwerking met andere professionals was ook cruciaal in de wereldrecordpoging die we deden in 1996 om RSA-130 te ontbinden. De geslaagde poging haalde alle landelijke dagbladen. Een fantastische ervaring, bijzonder spannend, waar je ook sindsdien nog met veel inzet aan bent blijven werken. En sindsdien ben je er steeds mee bezig gebleven, getuige dat je in 2009 weer meedeed met de ontbinding van het huidige wereldrecord RSA-768, 232 cijfers. Op het ontbinden van RSA-896 met 270 cijfers stond tot voor kort een geldprijs van USD 75.000,-. Dat zou natuurlijk wel een mooi afscheidscadeau zijn geweest, maar ik zou niet verbaasd zijn dat zelfs zonder die geldprijs je ook weer betrokken zult zijn wanneer het volgende record gevestigd wordt.
Jij was de drijvende kracht achter de prima sfeer in het team, waar ook wel eens ruimte was voor andere dingen dan ontbinden. Walter heeft me zo nog geholpen een echte screensaver te maken. Een hele prestatie in 1993 toen dit soort zaken in vergelijking met vandaag nog in de

kinderschoenen stonden en ik aan mijn vrienden uitlegde wat email was. Ook vond je het geen enkel probleem om 3 steile trappen in een Amsterdams huis te beklimmen in mijn AIO kamer met het team een bord macaroni op schoot te eten. Dat was lang geleden!

Beste Herman, dank je wel voor de fantastische tijd die ik op het CWI heb gehad.


CWI

Beste Herman,

Ook jou valt het voorrecht ten deel in goede gezondheid 65 jaar te worden. Je kunt terugkijken op een mooie en afwisselende carrière. Je naam wordt door mijn vakgenoten geassocieerd met computationele getaltheorie met als hoogtepunten de weerlegging van het vermoeden van Mertens (tezamen met Odlyzko), de berekening van vele miljoenen nulpunten van de Riemann zeta-functie (tezamen met Van de Lune) en vele ontbindingen in priemgetallen van getallen waarvoor een prijs was uitgeloofd.

We hebben samen vijf promovendi begeleid, Marije Elkenbracht-Huizing, Henk Boender, Stefi Cavallar, Joost Batenburg en Willemien Ekkelkamp (de laatste samen met Arjen Lenstra). Met niemand anders heb ik zoveel mensen begeleid. Vier proefschriften hadden direct met het ontbinden van grote getallen te maken, dat van Joost betrof discrete tomografie. Het is mooi dat hij nu op het CWI werkzaam is en tijdens je afscheidssymposium ook een voordracht zal houden. Bij de vier anderen noem ik ook de naam van Peter L. Montgomery, die ons van goede ideeën voorzag, maar anderzijds verwachtte dat de promovendi bepaalde berekeningen op het CWI uitvoerden. Dat was vaak tijdrovend en niet altijd in het belang van de pomovendi, zodat ik wel eens aan de bel moest trekken. Altijd zijn we er in goede harmonie uitgekomen. Wat ik in je waardeer is je zorgvuldigheid, je aandacht en je toewijding. Ik dank je voor de samenwerking en je vriendschap.

Je zorgvuldigheid en toewijding werden ook door anderen opgemerkt en gewaardeerd. Je bent secretaris geweest van het (K)WG, van ERCOM en van het Europese Mathematische Congres in 2008, om maar een paar werkzaamheden van je te noemen.

Er breekt nu een tijd aan waarin je helemaal over je tijd kunt beschikken. Als de tekenen niet bedriegen zullen jullie (klein)kinderen en kerk daar een belangrijke plaats in krijgen. Toch verwacht ik niet dat je helemaal geen wiskunde meer zult doen. Waarschijnlijk geen grote factorisaties meer waarmee jij en het CWI de media halen, maar je bevriende getallen zul je toch niet vergeten, denk ik. Om je

wat denkvoer te geven heb ik wat vragen voor je. Van sommige zal het antwoord wel bekend zijn, maar vast niet van allemaal.
Schrijf $s(a) = \sigma(a)-a$, waarbij $\sigma(a)$ zoals gebruikelijk de som van de delers van a aangeeft. Maak de rij a, $s(a)$, $s^2(a)$, $s^3(a)$, … en ga door tot een 1 verschijnt of een getal dat al eerder is voorgekomen. Noteer de lengte van de cykel die daarna zou volgen met m. Als m=1, dan hebben we een perfect getal, als m=2 een bevriend paar. Hier zijn mijn vragen.

1. Bestaan er willekeurig grote m waarvoor je een cykel kunt vinden?
2. Is voor elke a de gegenereerde rij begrensd?
3. Bestaan er willekeurig lange rijen?
4. Kun je een goede ondergrens afhankelijk van n geven voor het kleinste getal dat een rij ter lengte > n genereert?

Wellicht ligt het meer in jouw lijn om de computer informatie over rijlengte n en cykellengte m te laten berekenen. Dat geeft dan toch al interessante deelantwoorden.

Het ga jou en je vrouw Toke goed. Ik hoop je af en toe nog te ontmoeten en bij te praten,

Rob Tijdeman.


CWI


CWI

CWI

Praethuys

Friday 2 December at 16.00 hours

(hall new wing)

in honour of

Herman te Riele's

retirement after 40+ years at CWI

Please join us for a toast on this special and happy occasion!

Ongrijpbaar en onplaatsbaar

Herman is ongrijpbaar en onplaatsbaar. Is hij numeriek wiskundige of getaltheoreticus? Of misschien beter numeriek ingenieur dan wel getalpracticus, want hij kreeg al die nieuwe algoritmen aan de praat.

Herman is niet in een hokje te stoppen. Hij heeft aan veel verschillende dingen gewerkt. Hij heeft doorbraken bereikt, wereldrecords gevestigd, de krant gehaald, voor zichzelf en voor het CWI, met het verifiëren van eindige versies van de Riemannhypothese en met het factoriseren van immens grote getallen. Hij heeft een aantal opmerkelijke promovendi begeleid, die dan, in de wonderlijke traditie die we in Nederland hebben, bij een ander moesten promoveren.

Herman is onderzoeker maar ook ondersteuner, of liever gezegd *a good citizen*, de beste die we hebben. Hij was al *souschef* voordat hij promoveerde. Souschef was een van de belangrijkste functies op het vroegere MC. De souschef deed het werk waar de chef voor betaald werd. Herman was de oprichter en de eerste voorzitter van de personeelsvereniging. Hij was lid van het trio dat enkele jaren geleden het ECM in Amsterdam organiseerde, een groot succes. Hij was secretaris van het KWG, het Koninklijk Wiskundig Genootschap. En dan mis ik nog het een en ander.

Toen ik werd gevraagd ERCOM voor te zitten, zei ik: ”Alleen als Herman secretaris wordt.” ERCOM is een groep directeuren van zo’n twintig Europese wiskunde-instituten.

Herman en ik gingen eind januari 2006 samen naar Barcelona om de zaak van de vorige voorzitter over te nemen. 's Middags werken, 's avonds een van de beste diners die ik ooit heb meegemaakt, en de volgende morgen hadden we vrij. We togen op weg naar de kathedraal van Gaudí. Herman had een plattegrond. “We moeten naar dát plein, daar zijn drie metrostations.” Een groot kaal plein, zonder metro, wel met drie musea. Op zoek naar openbaar vervoer kwamen we vervolgens langs de lokale boekhandel over grafisch ontwerp en typografie, waar ik een half uur doorbracht en de Spaanse vertaling van het befaamde essay van Stanley Morison, *Principios fundamentales de la tipografía*, vond.

Pas achteraf besefte ik dat Herman alleen maar had gedaan alsof hij de betekenis van de M op de kaart verkeerd interpreteerde. Het was een voorwendsel om mij langs de enige locatie in Barcelona te voeren die ik, zoals hij wist, nog interessanter vond dan die kathedraal die nooit afkomt.

Vier jaar lang heeft Herman mijn taak binnen ERCOM gemakkelijk en plezierig gemaakt. Ik zat de vergaderingen voor, Herman deed al het werk op de achtergrond en hij deed het perfect. Weer een voorbeeld van Herman die het werk doet terwijl een ander met de eer gaat strijken.

Veel dank voor alles, Herman! Het ga je goed.

Jan Karel Lenstra

Beste Herman

Wij kennen elkaar een heel werkzaam leven dat meer dan veertig jaar omspant. Deze lange tijdspanne geeft een mooi beeld van de technische ontwikkelingen in mijn vakgebied. Van de tekeningen met de pen via de gekalligrafeerde diploma's tot digitale ontwerpen zoals voor 5ECM. Ik vond het altijd prettig om met jou samen te werken.

Als actief sportman was ik altijd zeer onder de indruk van jouw prestaties tijdens de roemruchte CWI-tafeltennistoernooien waar jij altijd in de finale stond tegenover Chester Thomson of Piet Groeneboom. Zelf kon ik na de eerste ronde meteen aan de bar plaatsnemen na een snelle uitschakeling, meestal door Joke Sterringa.

Herman, als dank voor de prettige samenwerking en voor een concrete herinnering heb ik je opgenomen in de lijst van illustere CWI-Lambda-mannen en —vrouwen.

Uit ervaring kan ik je zeggen dat het post-CWI-tijdperk zich eerst voordoet als een afgrond maar als de eerste stap is gezet blijkt het een ondiepe geul te zijn. Ben je die gepasseerd en niet over het konijntje gestruikeld dan kun je het pad vinden dat naar een prachtig landschap leidt: het landschap van de vele mogelijkheden.

Maar misschien dat jij dat pad al lang hebt zien liggen.

Tobias Baanders


Restaurant Reflet
Restaurant Reflet
www.reflet.nl
Restaurant Reflet
www.reflet.nl

NH Grand Hotel Krasnapolsky
Amsterdam, 2 december 2011

Restaurant Reflet

*** Menu ***

Terrine van "Confit de Canard"
Pinot Gris tradition
Michel Fonné, Alsace AOC, France
***

Op de huid gebakken kabeljauwrugfilet
Saint Véran
Domaine Corsin, Bourgogne Magnum, France
***

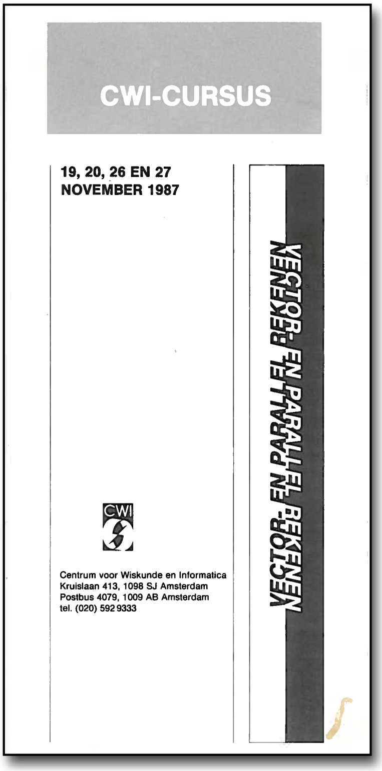
Rose gebraden reebout
Barbera d'Alba
Giacosa Fratelli, Neive Jeroboam, Italy
***

Koffie op drie verschillende manieren bereid
Mokka likeur
Wynand Fockink, Amsterdam

Grootschalig rekenen

Halverwege de jaren 80 van de vorige eeuw was er op het Mathematisch Centrum een werkgroep Grootschalig Rekenen. De directie vond dat het MC zich op dit terrein moest manifesteren en heeft jou, Herman, verzocht een werkgroep op te richten. In die tijd kwam de eerste supercomputer, de CDC Cyber 205, in Nederland bij SARA. De vector-computer kon 100 MFlop/s, 100 mega floating point operaties per seconde, uitvoeren voor eenvoudige bewerkingen als het optellen van twee vectoren, het uitrekenen van een inproduct en het bepalen van het grootste getal uit een reeks integers. Als je erg je best deed, operaties combineerde en als de vectoren complexe getallen bevatten, dan kon je zelfs in de buurt komen van de 200 MFlop/s.

Dit concept was zeer revolutionair, het vergde een totaal andere aanpak van programmeren. In Los Alamos kwam een groep o.l.v. Jack Dongarra met het voorstel om speciale routines te schrijven om dit soort *lopende band* berekeningen uit te voeren. Dit was de geboorte van BLAS, de bibliotheek van Basic Linear Algebra Subprograms. Eerst was er BLAS1, voor operaties op vectoren, later kwamen BLAS2 en BLAS3 waarmee je een veel hogere efficiëntie kon bereiken door i.p.v. vector-vector, matrix-vector en matrix-matrix-bewerkingen uit te voeren. Het slim gebruikmaken van de L1-, L2- en L3-caches speelden hierbij een belangrijke rol. Fabrikanten hadden de taak om te zorgen voor een zo slim mogelijke implementatie van deze basisbewerkingen voor hun eigen computer-architecturen. Programma's die gebruik maakten van deze standaard routines haalden daardoor op bijna alle machines een hoge performance.



De tijd heeft echter niet stil gestaan, 100 MFlop/s wordt tegenwoordig zonder kennis van vector-rekenen door bijna iedere desktop computer en laptop gehaald. De meeste programmeurs weten tegenwoordig niets meer van BLAS subroutines, de compilers zijn zo slim geworden, dat deze standaard bewerkingen herkend worden en er zonder al te veel moeite op vectorsnelheid gerekend wordt. Toch lukt het mij nog wel eens door het verwisselen van een binnen- en buitenloop, een onderdeel van een programma vele malen sneller te maken. De snelste machine nu kan in de buurt komen van tien petaflop/s.

Maar wat was de rol van NW3, waar jij leiding aan gaf, hierin? De vaste staf van NW3 bestond uit jou, Dik Winter, Walter Lioen en ondergetekende. Het is altijd duidelijk geweest dat jouw wetenschappelijke voorkeur bij getaltheorie lag en niet bij superomputing. Maar supercomputing en getaltheorie wist je uitstekend te combineren: iedere keer als er bij SARA een nieuwe, snellere computer geïnstalleerd werd, klopte men bij jou aan om de snelheid van de computer te testen. Keer op keer haalde je de wereldpers met een nieuw wereldrecord getalontbinden.. De hulp van Dik en Walter was hierbij onontbeerlijk. Dik , de wandelende debugger, kreeg ieder programma aan de praat. Walter zorgde er onder meer voor, dat de *idle time* van alle CWI workstations gebruikt kon worden om het voorwerk voor de blok-Gauss eliminatie op de nieuwe computer te doen. Zijn programmaatjes KOEST en TSOEK dienden er voor dat het programma, voor het ontbinden van zeer grote getallen, stilgezet, dan wel opgestart werd.

Zelf heb ik nooit meegewerkt aan je getaltheoretische programma's. Wel was ik een trouwe klant van de bijeenkomsten Grootschalig Rekenen een samenwerkingsverband met de Universiteit Utrecht en de Universiteit van Amsterdam. Henk van der Vorst heeft daar vele voordrachten gegeven over vector- en parallel rekenen, net als promovendi en vaste medewerkers uit Utrecht. De UvA werd vertegenwoordigd door Walter Hoffmann en Dirk Dekker en enkelen van hun promovendi en studenten. Regelmatig schoven ook andere NW-ers aan. Aan leden van de werkgroep Grootschalig Rekenen de taak de buitenwereld te onderwijzen in Supercomputing, vandaar dat er besloten werd tot een cursus Vector- en Parallel Rekenen.

Een van de hoogtepunten van onze samenwerking was het congres dat jij, Henk en ik in 1990 georganiseerd hebben aan de VU, en dat als titel droeg **1990 International conference on supercomputing.** Henk met zijn grote internationale bekendheid wist grote namen, als Tony Chan, Achmed Noor en Anthony Hey naar Amsterdam te halen. Vanuit Nederland was de deelname beperkt, Piet van der Houwen was keynote speaker en de groep van Henk Sips uit Delft gaf een presentatie. Ik mocht zorgdragen voor een aantal PC's zodat de deelnemers hun mail konden lezen en nog wat konden werken, want laptops waren nog geen gemeengoed in die tijd. Gelukkig heeft Dik mij daarbij geholpen, want zelf was ik niet zo handig. De conferentie werd gehouden in het 'Van Gogh'-jaar, een bezoek aan de grote tentoonstelling in het Kröller-Müller museum was een van de hoogtepunten. Het tweede deel van de tentoonstelling kon men het Van Gogh Museum in Amsterdam bezoeken. Het conferentiediner, een Indische rijsttafel, werd geserveerd op een rondvaartboot door de Amsterdamse grachten en in de Amsterdamse haven. Een brand in het havengebied zorgde er voor dat we in allerijl het havengebied moesten verlaten. Dat rondvaartboten niet gemaakt zijn om snel te varen, merkten we al snel. De rook sloeg de boot in en iedereen begon te hoesten en te proesten.

Herman, we hebben een lange geschiedenis samen. Wij zijn jarenlang buren geweest op het CWI, we zijn regelmatig samen op reis geweest. We hebben in meerdere projecten heel prettig samengewerkt. Jij was het die mij op mijn eerste werkdag in je functie van souschef van de afdeling NW rondleidde op het MC. Van de mensen aan wie je mij toen voorstelde zijn er nog maar zeer weinig werkzaam op het CWI. Met jouw vertrek wordt er voor mij ook een periode afgesloten.

Herman en Toke, het gaat jullie goed samen, ook namens Baas.

Margreet

Heeft NW wel een chef nodig?

“Heeft NW wel een chef nodig, Herman doet het toch allemaal al?”, dat waren woorden van mevrouw Reckman, hoofd personeelszaken, waarmee ze ergens begin 80-er jaren de afdeling NW met wijze raad bijstond. Mevrouw Reckman moederde graag over de wetenschappelijke afdelingen.

Maar laat ik bij het begin beginnen. Op 1 januari 1973 werd de Rekenafdeling van het toenmalige Mathematisch Centrum (MC) opgesplitst in twee nieuwe afdelingen, de afdeling Informatica en de afdeling Numerieke Wiskunde (NW). In tegenstelling tot de andere afdelingen van het MC, die zowel een chef als een sous-chef hadden, kregen deze nieuwe afdelingen (aanvankelijk) alleen een (full-time) chef en geen sous-chef.
De functie van sous-chef was in de 50-ger jaren door Prof. Hemelrijk, chef van de Afdeling Statistiek, voorgesteld. Alle afdelingen van het MC hadden toen namelijk een part-time chef met een hoofdbaan aan één van de universiteiten in Amsterdam. In de prakrijk waren deze chefs één dag in de week op het MC en om de dagelijkse leiding van een afdeling inhoud te geven, werden er full-time sous-chefs aangesteld. Nieuwe afdelingen met full-time chefs hadden dus geen recht op een sous-chef.
Maar ja, het geeft toch wel meer status aan een afdeling wanneer er twee man nodig zijn om de zaak in goede banen te leiden. Ik denk dat het in het voorjaar van 1973 is geweest dat Jaco de Bakker bij de Raad van Beheer van het MC het stuk “Waarom de Afdeling Informatica een sous-chef nodig heeft” indiende. Wat de preciese argumenten waren die aangevoerd werden, weet ik niet meer, maar zoals bijna altijd, Jaco kreeg zijn zin! Uiteraard kon NW niet achterblijven en het was ook direct duidelijk dat in dat geval jij de sous-chef zou moeten worden. We hebben dat toen niet heel formeel via de Raad van Beheer gespeeld, maar rechtstreeks in een gesprekje met Prof. van Wijngaarden, toenmalig directeur van het MC. Een *gesprekje*, want gesprekken met van Van Wijngaarden moest je altijd zo kort mogelijk houden. Dat gesprekje over “Waarom NW een sous-chef nodig had” vond plaats toen Van Wijngaarden en ik beneden op de lift van het MC stonden te wachten. We waren alleen, een uitgelezen kans omdat dat sous-chefschap ter sprake te brengen. Ik kan me nog herinneren dat hij tot slot zei, we waren toen al op de derde verdieping gearriveerd, “Het is toch eigenlijk opgelegd pandoer, maak het maar met Reckman in orde”. Zo werd je vanaf 1 november 1973 sous-chef

van de afdeling NW. Het was even zoeken om de preciese datum van 1 nov. te vinden, want mijn verzameling jaarverslagen heb ik in 2000 overgedaan aan iemand van het CWI, misschien wel aan jou, maar daar ben ik niet zeker van.
Met jouw benoeming werden we samen verantwoordelijk voor de dagelijkse leiding van de afdeling en kwam de afdelingsadministratie bij ons terecht, waarvan jij inderdaad een onevenredig groot deel voor je rekening nam. Bijvoorbeeld, het secretariaat van de Adviescommissie voor Toegepaste en Numerieke Wiskunde, de Bibliotheekcommissie, de classificatie van nieuwe aanwinsten op het terrein van de Numerieke Wiskunde, en nog heel wat meer van dat soort zaken, die ik niet meer weet omdat jij me die uit handen nam. Mevrouw Reckman hield dat kennelijk allemaal goed in de gaten, vandaar dat ze met de stelling kwam waar ik dit stukje mee begon!

Naast de administratieve klussen had het wetenschappelijk onderzoek natuurlijk de eerste prioriteit. Zodra jij, Piet Hemker en Jan Verwer gepromoveerd waren, kreeg de afdeling een vaste structuur met drie subgroepen, ieder met een eigen onderzoeksgebied en groepsleider. Met z'n vieren deelden we de verantwoordelijkheid voor de wetenschappelijke productie van de afdeling, waarin jij de leiding van de *Numerieke Getaltheorie* op je nam, Piet de groep *Randwaardegroep* leidde, en Jan en ik de *Beginwaardegroep* voor onze rekening namen. Deze driedeling hebben we gedurende het gehele verdere bestaan van de afdeling NW (24 jaar lang) aangehouden. Kennelijk waren de onderzoeksgebieden van deze groepen zo vruchtbaar dat we er al die jaren mee vooruit konden. En natuurlijk kwam het ook door het opmerkelijk kleine verloop onder de mensen met een vaste aanstelling in de afdeling.
Van al dat wetenschappelijk werk haalden alleen de resultaten uit jouw groep regelmatig de landelijke dagbladen. Dat heeft enorm bijgedragen aan het prestige van het MC/CWI in Nederland en dat straalde dan weer af op de afdeling NW. Jouw onderzoek heeft ook nooit negatief ter discussie gestaan in de diverse "Raden van Wijze Mannen". Hierbij denk ik aan de Raad van Beheer, later de Beleidsraad van het MC/CWI, de Raad van Advies, de Vakadviescommissie Toegepaste en Numerieke Wiskunde, en de Werkgroep Super Computers (WGS). Vooral de Raad van Advies en de Vakadviescommissie voor Numerieke Wiskunde, waarin hoogleraren van de diverse universiteiten en vooraanstaande onderzoekers uit de industrie zitting hadden, waren zeer invloedrijke commissies. Ik had altijd het gevoel dat via deze commissies, heel

wetenschappelijk Nederland over de schouders van de afdeling keek of de NWO-gelden wel goed besteed werden. Maar die commissies waren altijd lovend over de Numerieke Getaltheorie. Ook in de WGS, waarin subsidies voor computer-georiënteerde projecten toegekend werden, was er veel waardering voor de manier waarop in jouw projecten de grenzen werden opgezocht van de rekenkracht van de meest moderne supercomputers.

De onderzoeksgebieden van de drie NW-groepen waren zo verschillend van aard dat de meeste afdelingsleden zich beperkten tot het onderzoeksthema van hun groep en zich niet waagden op het onderzoeksterrein van een andere groep. Maar ook hier was jij de uitzondering. Daar heb ik zelf met name van kunnen profiteren. Zo hebben we in 1978 een NW-rapport over terugwaartse differentiatieformules voor Volterra-vergelijkingen geschreven (in 1981 gepubliceerd in Numerische Mathematik). Dat heeft toen geen vervolg gekregen omdat Paul Wolkenfelt, één van de promovendi in onze afdeling, in zijn onderzoek van Volterra-vergelijkingen goed op stoom kwam en alle aandacht “opeiste”. Paul promoveerde in het najaar van 1981. Begin 1981 was het plan opgevat dat hij na zijn promotie een CWI-tract op het gebied van Volterra-vergelijkingen zou gaan schrijven, samen met Hermann Brunner, een internationaal vooraanstaand specialist op dat terrein, toen verbonden aan de Universiteit van Fribourg. Helaas heeft de afdeling Paul niet kunnen behouden omdat NW al zoveel mensen met een vaste aanstelling in dienst had. Er moest meer doorstroming komen! Omdat het zonde was om niets te doen met de in de laatste 4 jaren opgebouwde kennis van Volterra-vergelijkingen, werd met Hermann Brunner overeengekomen om wat meer tijd uit te trekken en om er dan meteen maar een CWI-monograph van te maken. Dat zou dan een standaardwerk voor Volterra-vergelijkingen moeten worden. Tja, zonder Paul was dat wel erg ambitieus. Dus klopte ik weer bij jou aan. Het is typerend voor jouw opstelling in de afdeling, je weigerde nooit en stond altijd klaar om te helpen! Dus gingen we aan de slag en in hetzelfde jaar resulteerde dat in een bijdrage aan de Durham-conferentie van Christopher Baker (verbonden aan de Universiteit van Manchester). Die bijdrage is een soort blauwdruk geweest voor een omvangrijk artikel over lineaire meerstapsmethoden voor integraal- en integro-differentiaalvergelijkingen van Volterra-type dat in 1985 in Mathematics of Computation is verschenen. Het staat me nog bij dat je tijdens het schrijven van dat artikel wel eens opgemerkt hebt dat je je steeds weer warm moest lopen om het onderzoek weer op te

pakken. Maar ja, je had al zoveel geïnvesteerd in dat onderwerp dat het alleen met jou afgerond kon worden.
Ik zal me niet wagen aan een beschrijving van de nog veel belangrijker en grensverleggende resultaten die je in de Getaltheorie hebt bereikt. Dat zullen ongetwijfeld vele andere, beter ingevoerde, collegae van jou doen in *hun* bijdragen aan dit Liber Amicorum.

Naast onze onderlinge interactie hadden we natuurlijk ook intensief contact met Jan en Piet, de twee andere groepsleiders. Met enige regelmaat kwamen we bij elkaar om allerlei zaken te bespreken zoals als vacatures in de afdeling, het aanvragen van projecten, conferentie-bezoeken, etc. Nu ik dit stukje schrijf, realiseer ik me weer hoe goed de vier groepsleiders het met elkaar konden vinden. Op deze “stafvergaderingen” waren we het altijd zo roerend eens. Zelfs wanneer een delicaat onderwerp als de vaststelling van de reisbudgetten voor de drie subgroepen aan de orde kwam, was er bij mijn herinnering nooit een probleem.

Aan deze bijdrage mogen enkele foto's uit je CWI-tijd niet ontbreken. Ik kon in mijn CWI-fotoverzameling maar een paar foto's vinden waar jij opstaat. Ze voldoen niet aan de digitale eisen van vandaag, maar ik heb ze toch opgenomen:

Herman en Dirk Dekker
Tijdens een voordracht in maart 1989

Afscheid Lydia Verdonck, secr. NW
Herman, Margreet, Lydia, 30 aug. `91

Het einde van de afdeling Numerieke Wiskunde ligt al vele jaren achter ons. Eind 1996 werd de afdeling na 24 jaar opgeheven en werd onderdeel van de cluster MAS. Op 21 december zijn de groepsleiders en alle projectleiders, met echtgenotes, nog een keer bij elkaar gekomen voor een afsluitend etentje.

Hiervan nog een tweetal foto's waar Toke en jij opstaan:

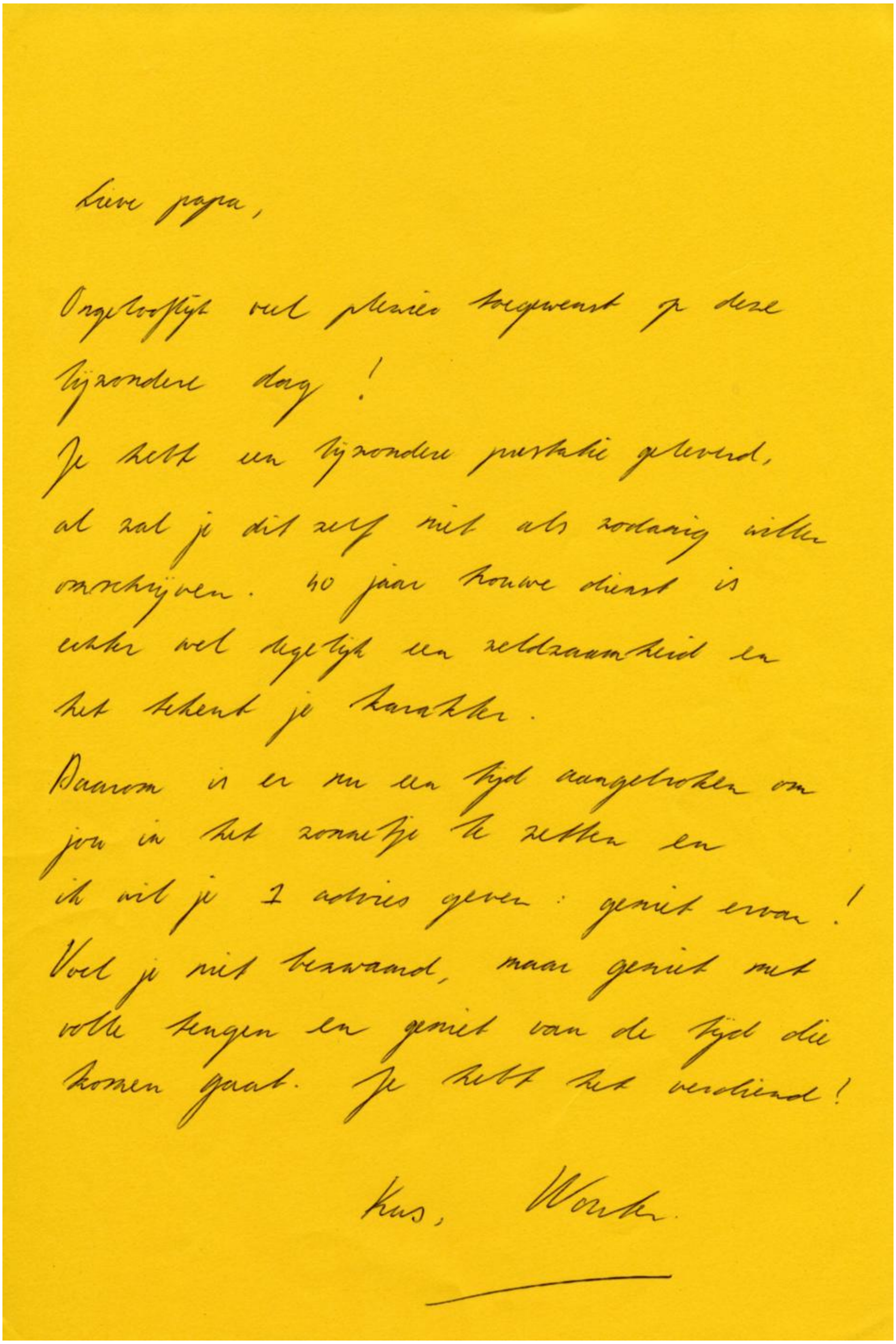
Akke, Toke, Leny en Ben

Barry, Wijnie en Herman

Tot zover onze contacten die rechtstreeks met ons werk op het MC/CWI verband hielden. Maar ook buiten de “werkuren” hadden we veel contact. Zo heb ik in de tijd dat je met de auto vanuit Hilversum naar het CWI ging vaak met je mee kunnen rijden. Dat was heel wat gerieflijker dan eerst met de fiets naar het station, een tijdje wachten op een regelmatig vertraagde trein, overstappen in Weesp, en dan van Muiderpoort weer op de fiets naar het CWI.
Verder hadden we, en hebben we nog steeds, regelmatig dinertjes over en weer. Hieraan hebben Aly en ik dierbare herinneringen en ik hoop dat we het nog heel lang volhouden. In jouw bijdrage aan mijn Liber Amicorum schreef je dat het mij wel overkwam dat ik bij jullie na het diner, onder het genot van een likeurtje en een sigaartje, zat weg te dommelen. Dat overkomt mij inderdaad wel meer, niet alleen bij jullie, en ik weet nog heel goed dat jullie zoon Wouter mij bij een volgende gelegenheid gered heeft. Die avond werd er geschaatst en dat werd op de televisie uitgezonden. Wouter kwam later op de avond naar huis speciaal om nog iets van het schaatsen te zien, niet wetende dat zijn ouders eters hadden. We hebben toen allemaal met volle aandacht naar het schaatsen gekeken en niemand kon mij op wegdommelen betrappen! Zou Herman dit allemaal zo geënsceneerd hebben?

Toke en Herman, we wensen jullie een mooie pensioentijd toe, in goede gezondheid met nóg meer tijd voor kinderen en kleinkinderen.

Piet van der Houwen.



Lieve papa,

Ongelooflijk veel plezier toegewenst op deze bijzondere dag!
Je hebt een bijzondere prestatie geleverd, al zal je dit zelf niet als zodanig willen omschrijven. 40 jaar trouwe dienst is echter wel degelijk een zeldzaamheid en het tekent je karakter.
Daarom is er nu een tijd aangebroken om jou in het zonnetje te zetten en ik wil je 1 advies geven: geniet ervan! Voel je niet bezwaard, maar geniet met volle teugen en geniet van de tijd die komen gaat. Je hebt het verdiend!

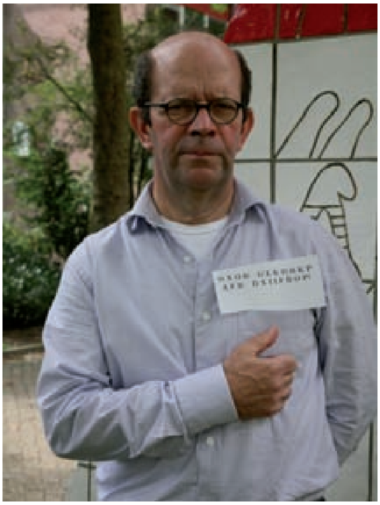
Kus, Wouter


Leven
met
Getallen
Herman te Riele
CWI

Herman te Riele

Leven met getallen

"Getaltheorie heb ik altijd als luxe beschouwd." Aan het woord is Herman te Riele, onderzoeker en al 41 jaar in dienst van het CWI/MC, die op 1 januari 2012 met pensioen gaat. "Die instelling is misschien terug te voeren op mijn jeugd. Mijn ouders leerden me om niet alleen maar leuke dingen te doen maar ook wat er moet, om ook iets terug te doen voor de maatschappij."



Herman te Riele.

"Ik kom uit Den Haag, uit een rooms-katholiek gezin met zes kinderen. Mijn vader werkte als ambtenaar bij de toenmalige Pensioenraad, nu het ABP. Hij rekende daar pensioenen uit, met de hand! Mijn jeugd was fijn, al hadden we het niet breed. De oorlog was net geweest en mijn familie had honger geleden. Je moest goed je best doen op school, dat was heel belangrijk. Op het gymnasium bij de jezuïeten (prima didactici) hoorde ik bij de besten van de klas. Ik had een heel goede leraar scheikunde en ook een leuke leraar wiskunde trouwens.

Ik heb altijd het gevoel gehad dat ik iets terug moest doen voor de maatschappij.

Als enige van het gezin ging ik studeren. Mijn ouders moesten zich er veel voor ontzeggen en ik kreeg ook een soort beurs. In Delft begon ik met de studie scheikunde. Dat leek me wel wat, met een witte jas in het lab staan. Maar ik was veel beter in wiskunde, dus dat werd het vanaf mijn tweede jaar. Toen ik op het Mathematisch Centrum (nu CWI) kwam werken, werd mijn studieschuld kwijtgescholden. Dat regelde mevrouw Reckman voor me.

Het MC vond ik meteen al een prima plek om te werken. Ik begon bij Gerrit-Jan Förch in 'de winkel', waar we onderzoekers van de VU en UvA hielpen bij het gebruik van de X8-computer van het MC (VU en UvA hadden toen nog geen computer). Ik raakte geïnteresseerd in getaltheorie en Aad van Wijngaarden, oud-directeur van het CWI, zag daar wel wat in: ik mocht bij hem promoveren. Jan van de Lune was mijn dagelijkse begeleider.

Mijn interesse ging (en gaat) uit naar getallen, zoals priemgetallen en aliquote rijen. Bij het laatste tel je de delers van een getal (behalve het getal zelf) bij elkaar op en die operatie ga je herhalen. Bij 6 krijg je 1+2+3=6, klaar. Bij 8 krijg je 1+2+4 = 7 en 7 heeft als enige deler, behalve zichzelf, 1. Soms groeit een aliquote rij, soms daalt hij en soms springen de termen heen en weer, zoals bij 220: de volgende term is 284 (reken maar na) en vervolgens duikt 220 weer op. Zo'n paar van getallen heet bevriend. Om de delers van een getal te bepalen moet je de priemfactoren kennen en dat probleem (ontbinden in priemfactoren) heeft me ongeveer m'n hele CWI-tijd bezig gehouden.

Na mijn promotie werd ik gevraagd als sous-chef op de afdeling Numerieke Wiskunde onder Piet van der Houwen. Ik werkte aan het numeriek oplossen van integraalvergelijkingen en later in de financiële wiskunde, voordat ik bij de cryptogroep van het CWI kwam. Via de ZWO-Werkgroep Gebruik Supercomputers en de latere Stichting NCF hebben wij altijd veel rekentijd op supercomputers gekregen en dat heeft veel publicaties op het gebied van Computational Number Theory opgeleverd. Walter Lioen heeft me daar lange tijd geweldig bij geholpen en met hem heb ik dan ook de meeste gezamenlijke publicaties.

Mijn belangrijkste resultaten? Even nadenken... Dat zijn – naast het begeleiden van vijf promovendi – toch wel de weerlegging van het Mertens vermoeden in 1985, onze berekeningen aan de Riemann-hypothese en de factorisatie van RSA-512. Als het vermoeden van Mertens juist zou zijn, dan zou de Riemann-hypothese – een van de belangrijkste openstaande hypotheses in de wiskunde – bewezen zijn. Dat onderzoek deed ik samen met Andrew Odlyzko van Bell Labs in de USA en Dik Winter regelde onze e-mail – een nieuw fenomeen dat veel tijd bespaarde. Het onderzoek haalde de voorpagina van de Herald Tribune. Ook de RSA-512-factorisatie haalde de voorpagina's en o.a. het RTL-tv-journaal. Aan onze records hebben trouwens veel CWI-ers indirect bijgedragen; buiten werktijd stonden (en staan) ongebruikte computers voor mij te rekenen. Dat zal binnenkort ophouden.

Naast mijn onderzoeks- en leidinggevende werk deed ik er veel bij. Voor het CWI, zoals werk voor het Koninklijk Wiskundig Genootschap, ERCOM, de personeelsvereniging, de bibliotheekcommissie (waar ik 28 jaar in gezeten heb) en voor conferenties zoals NMC en 5ECM (het grote Europese wiskundecongres in 2008) – maar ook in mijn vrije tijd. Ik ben actief in de kerk als lector, zing in twee kerkkoren, zit in het bestuur en heb misdienaars opgeleid. Bridgen is een van m'n hobby's, dus doe ik ook vrijwilligerswerk op een bridgeclub. Als ik hoogleraar was geworden, iets wat wel eens in de lucht heeft gehangen, had ik nooit al die dingen erbij kunnen doen.

Nu ik met pensioen ga, hoop ik nog een werkplek op het CWI te houden. Ik wil graag nog een boek schrijven over bevriende getallen. Toke en ik houden erg van wandelen en musea bezoeken. We hebben drie kinderen en vijf kleinkinderen en we passen regelmatig op.

Het CWI is een geweldige plaats om te werken.

Iets heel anders wat me altijd bezig heeft gehouden is het spanningsveld tussen geloof en wetenschap. Het klinkt paradoxaal maar het (schijnbaar) toenemende atheïsme in de maatschappij versterkt op de een of andere manier mijn geloofsleven.

Je kennis en vaardigheden aan jonge mensen overbrengen verrijkt je leven

Het CWI is een geweldige plaats om te werken. Wat ik het stomste vind? Eh… niets – het is een fantastisch instituut. Klein minpuntje: geen onderwijsverplichtingen. Je kennis en vaardigheden aan jonge mensen overbrengen verrijkt je leven en sociale contacten, en houdt je jong. Misschien ga ik nog wel eens voor de klas staan…"

Annette Kik