



CWI

Centrum Wiskunde & Informatica

Symmetrie

Vakantiecursus 2011



CWI syllabus 61

CWI Syllabi

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI)

Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

Telefoon +31 20 592 9333

Website: <http://www.cwi.nl/en/publications>

Contact: Coby.van.Vonderen@cwi.nl

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) is het nationale onderzoeksinstituut op het gebied van wiskunde en informatica. CWI maakt deel uit van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).



Centrum Wiskunde & Informatica

Symmetrie

Vakantiecursus 2011

26 en 27 augustus 2011 in Amsterdam

CWI syllabus 61

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in HAVO, VWO, en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde & Informatica te Amsterdam en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus is mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek.

ISBN: 987 90 6196 558 9
NUR-Code: 918

Copyright © 2011, Centrum Wiskunde & Informatica

Inhoud

<i>Docenten</i>	vi
<i>Leden Programmacommissie</i>	vii
J.J.O.O. Wiegerinck <i>Symmetrie</i>	1
J.M. Aarts <i>Symmetrie van de platonische lichamen</i>	3
S.J. Edixhoven <i>Snelle algoritmen in de getaltheorie</i>	19
J.P. Hogendijk <i>Enkele achtergronden van de middeleeuws Islamitische geometrische ornamentiek</i>	33
M. Kindt <i>Symmetrie in perspectief</i>	47
V. van der Noort <i>Waarom de vierdimensionale ruimte de mooiste van alle ruimtes is: quaternionen</i>	67
H.B. Posthuma <i>De classificatie van regelmatige vlakverdelingen</i>	77
J. Spandaw <i>Kansrijke symmetrie</i>	91
W.D. van Suijlekom <i>Symmetrie in de natuurkunde</i>	109

Docenten

Prof. dr. J.J.O.O. Wiegerinck
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam
J.J.O.O.Wiegerinck@uva.nl

Prof. dr. J.M. Aarts
Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft
Johannesaarts@gmail.com

Prof. dr. S.J. Edixhoven
Universiteit Leiden, Mathematisch Instituut
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
edix@math.leidenuniv.nl

Prof. dr. J.P. Hogendijk
Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut, Departement Wiskunde,
Faculteit Bètawetenschappen, Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht
J.P.Hogendijk@uu.nl

M. Kindt
Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, Faculteit Bètawetenschappen
Postbus 85170, 3508 AD Utrecht
M.Kindt@uu.nl

Dr. V. van der Noort
Universiteit Utrecht, Studium Generale
Postbus 80125, 3508 TC Utrecht
schaduwdirectie@yahoo.com

Dr. H.B. Posthuma
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde Universiteit van Amsterdam
Science Park 904, 1098 XH Amsterdam
H.B.Posthuma@uva.nl

Dr. J. Spandaw
Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI
Mekelweg 4, 2628 CD Delft
J.G.Spandaw@tudelft.nl

Dr. W.D. van Suijlekom
Radboud Universiteit Nijmegen, Institute for Mathematics
Astrophysics and Particle Physics
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
waltervs@math.ru.nl

Leden Programmacommissie Vakantiecursus

Jan Wiegerinck (voorzitter)

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam

J.J.O.O.Wiegerinck@uva.nl

Bram van Asch

Technische Universiteit Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

a.g.v.asch@tue.nl

Frits Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

F.Beukers@uu.nl

Marian Kollenveld

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

voorzitter@nvvw.nl

Jan van Maanen

Freudenthal Instituut, Aidadreef 12, 3561 GE Utrecht

maanen@fi.uu.nl

Kees Oosterlee

Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

C.W.Oosterlee@cwi.nl

Ionica Smeets

LIACS, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

ionica.smeets@gmail.com

Jeroen Spandaw

Technische Universiteit Delft, EWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft

J.G.Spandaw@tudelft.nl

Marco Swaen

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam

m.d.g.swaen@uva.nl

Symmetrie

Jan Wiegerinck

Korteweg - de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam

e-mail: J.J.O.O.Wiegerinck@uva.nl

De vakantiecursus bereikt dit jaar de pensioengerechtigde leeftijd, maar blijft altijd jong van geest! Het is jammer dat er wegens verbouwing van het Auditorium in Eindhoven geen mogelijkheid is om in dit jubileumjaar de cursus aan de TUE te geven. De faciliteiten in Amsterdam zijn gelukkig prima, er is voldoende plaats voor alle belangstellenden.

Dit jaar is het onderwerp symmetrie. Dit is een oud en eerbiedwaardig onderwerp binnen de wiskunde, maar net als de vakantiecursus blijft het hoogst actueel. Er verschijnen populaire boeken over symmetrie (*Finding Moonshine* van Marcus du Sautoy, in het Nederlands vertaald als “het Symmetriemonster”) en in het moderne wiskunde- en natuurkundeonderzoek kan de rol van symmetrie niet overschat worden. In het afgelopen jaar alleen al werd aan mijn universiteit door de vereniging van natuurkunde studenten een symposium over symmetrie in de natuurkunde georganiseerd, terwijl mijn collega Prof. Eric Opdam een zeer prestigieuze Europese subsidie verwierf voor het doen van onderzoek op het gebied van symmetrie.

Veel mensen zullen een symmetrisch object als zodanig herkennen, maar dat maakt het nog niet eenvoudig om symmetrie te definiëren. Een wiskundige manier is te zeggen dat het object een symmetriegroep heeft die uit meer dan n element bestaat. De elementen van die groep transformeren de ruimte, maar na zo'n transformatie lijkt er aan het symmetrisch object niets veranderd te zijn.

Symmetrie werd al bestudeerd door de oude Grieken. De voordracht van **Jan Aarts** begint precies daar, namelijk bij de Platonische lichamen in \mathbb{R}^n . Via de symmetrie-groepen van deze lichamen eindigt hij een dimensie hoger, en bijna in de moderne tijd.

Ook in de voordracht van **Vincent van der Noort** duiken de Platonische lichamen op en komen we in dimensie 4 terecht. Hier worden de symmetrieën in \mathbb{R}^4 gebruikt om die van \mathbb{R}^3 beter te begrijpen!

Klassiek is het onderwerp van **Jan Hogendijk**. Hij spreekt over symmetrie in de Middeleeuwse Islamitische kunst. Het gaat hier om de prachtige symmetrische decoraties zoals je die in bijvoorbeeld het Alhambra tegen komt. Hoe maakte de kunstenaars deze decoraties en hoe moeten wij deze duiden? Een verwant onderwerp komt in de voordracht van **Hessel Postuma** aan de orde. Deze gaat over symmetrieën in vlakverdelingen. Hij bespreekt de wiskundige classificatie van deze verdelingen.

Martin Kindt spreekt over de rol van symmetrie bij verschillende projecties zoals we die in de natuur ervaren en de meetkenden die daarmee geassocieerd kunnen worden. Denk hierbij aan de projectieve en de affine meetkunde.

Jeroen Spandaw belicht symmetrie in de kansrekening met verrassende resultaten als gevolg. Hoe maak je meer kans bij het *Rad van Fortuin*, hoe ga je “creatief” om met je belastingaangifte.

Echt van de laatste tijd zijn de onderwerpen die Bas Edixhoven en Walter van Suijlekom behandelen.

Walter van Suijlekom belicht de rol van symmetrie groepen in het Standaardmodel voor elementaire deeltjes. **Bas Edixhoven** spreekt over “snelle algoritmen in de getaltheorie”. De symmetriegroepen verschijnen hier als Galoisgroepen en vinden hun toepassing bijvoorbeeld in het berekenen van het aantal manieren waarop men een geheel getal n als som van k kwadraten kan schrijven.

Ik hoop dat dit programma velen van u zal aanspreken en dat u de kans kunt grijpen om aan de vakantiecursus deel te nemen!

Symmetrie van de Platonische lichamen

Jan M. Aarts

e-mail: johannesaarts@gmail.com

1 Wat is een regelmatig veelvlak?

Een *veelvlak* V is een begrensde deel van de ruimte dat de doorsnede is van een eindig aantal halfruimten; een veelvlak is dus een convex deel van de ruimte. Een halfruimte is begrensd door een vlak; dat deel van het vlak dat tot het veelvlak behoort noemen we een *zijvlak* van het veelvlak V . De niet-lege doorsnede van twee verschillende zijvlakken is een punt of een lijnstuk; zo'n punt noemen we een *hoekpunt* en zo'n lijnstuk een *ribbe* van V .

Een *regelmatig veelvlak van het type* $\{p, q\}$ is een veelvlak met de eigenschappen:

1. ieder zijvlak is een regelmatige p -hoek,
2. in ieder hoekpunt komen q zijvlakken samen.

2 Welke regelmatige veelvlakken zijn er?

We nemen een veelvlak V van het type $\{p, q\}$ in het oog; de som van de hoeken van de p -hoek is $(p - 2)\pi$, dus iedere hoek van de p -hoek is $(1 - 2/p)\pi$. In ieder hoekpunt komen q van die p -hoeken samen. Maar dan moet gelden: $q(1 - 2/p)\pi < 2\pi$, oftewel

$$(q - 2)(p - 2) < 4.$$

We vinden de volgende paren $\{p, q\}$ die voldoen aan de ongelijkheid:

$\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 3\}$, $\{5, 3\}$

Bij elk paar hoort een regelmatig veelvlak; deze veelvlakken zijn de *Platonische lichamen*. De Platonische lichamen zijn zo oud als de gewone meetkunde van Euclides. Zoals Coxeter het zo mooi zegt: *The history of the Platonic Solids is lost in the shadows of antiquity*. Hier volgt een overzicht van de Platonische lichamen.

$\{3, 3\}$, dit is de *tetraeder*, het regelmatige viervlak. Het heeft 4 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, 6 ribben en 4 hoekpunten.

$\{3, 4\}$, de *oktaeder*, het regelmatige achthoek. Het heeft 8 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, 12 ribben en 6 hoekpunten.

$\{3, 5\}$, de *ikosaeder*, het regelmatige twintigvlak. Dit heeft 20 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, 30 ribben en 12 hoekpunten.

$\{4, 3\}$, de *kubus*, het regelmatige zesvlak met 6 vierkanten als zijvlakken, 12 ribben en 8 hoekpunten.

$\{5, 3\}$, de *dodekaeder*, het regelmatige twaalfvlak met 12 regelmatige vijfhoeken als zijvlakken, 30 ribben en 20 hoekpunten.

Opgave. Maak een overzicht van de regelmatige betegelingen van het vlak.

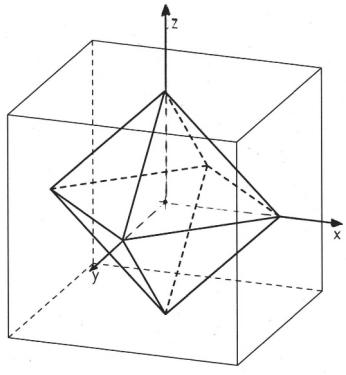
Al de Platonische lichamen zijn sferische oppervlakken, want

$$Z_2 - Z_1 + Z_0 = 2,$$

#zijvlakken - #ribben + #hoekpunten = 2,

de Euler-karakteristiek van al deze oppervlakken is gelijk aan 2.

We moeten nog aantonen dat deze veelvlakken ook bestaan. In de figuur zie

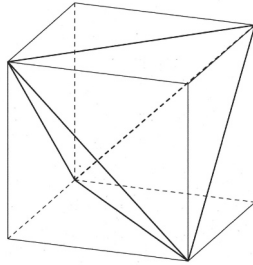


je een kubus. Bij geschikte keuze van de schaal op de assen zijn de hoekpunten achtereenvolgend: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. De twaalf ribben zijn de lijnstukken die telkens twee punten verbinden die in precies één coördinaat verschillen; elke ribbe heeft lengte 2.

De kubus en oktaeder zijn elkaars *dualen*: de hoekpunten van de oktaeder zijn de middelpunten van de zijvlakken van de kubus, te weten $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, -1)$. *Drie van deze punten vormen een gelijkzijdige driehoek die dienst doet als zijvlak van de oktaeder telkens wanneer de zijvlakken van de kubus waarin zij liggen een hoekpunt gemeenschappelijk hebben.*

3 Wat is symmetrie?

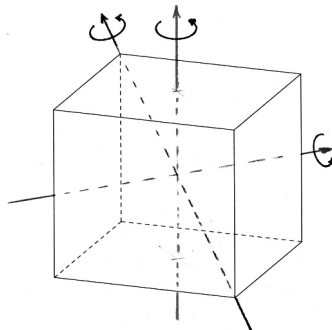
Een symmetrie van een veelvlak V is een isometrische afbeelding van V op zichzelf. Al de symmetrieën van V vormen, met de compositie als groepsoperatie, een groep: de *symmetriegroep* van V .



De symmetriegroep van de tetraeder T is de S_4 , de permutatiegroep van 4 elementen. We kunnen de tetraeder opvatten als deelverzameling van de kubus. Met de keuze van de coördinaten als in het vorige voorbeeld zijn de hoekpunten van de tetraeder bijvoorbeeld $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(-1, -1, -1)$ en $(1, -1, 1)$. Iedere symmetrie van de tetraeder brengt een permutatie van deze vier hoekpunten met zich mee. Iedere permutatie van de vier hoekpunten kan door affine voortzetting op een unieke wijze worden uitgebreid tot een isometrie van de tetraeder.

4 De symmetriegroep van de kubus

Het is de bedoeling om een opsomming te maken van alle symmetrieën van de kubus. We beginnen met een opsomming van de rotaties. Om te beginnen is er



de identieke afbeelding die elk punt op zijn plaats laat. In de figuur zijn enkele rotatieassen aangegeven.

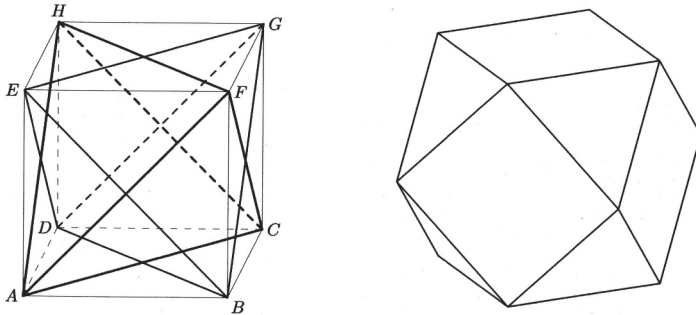
Allereerst is er de verbindingslijn tussen de middens van onder- en bovenvlak. Met deze lijn als as kun je drie niet-triviale rotaties uitvoeren: over 90° , 180° , en 270° (Linksom of rechtsom, dat maakt niet uit; zoals Wim Kan al zei: *Drie keer links is ook rechts.*) Dit kan zowel met de as van onder naar boven, als met de assen van links naar rechts en van voor naar achter. Zo krijgen we 9 rotaties.

Vervolgens zijn er rotaties om een lichaamsdiagonaal van de kubus, en wel over 120° en 240° . Er zijn 4 lichaamsdiagonalen die hierbij kunnen optreden. Dat zijn dus bij elkaar 8 rotaties.

Tenslotte zijn er rotaties om de verbindingslijnen van de middens van overliggende ribben, en wel over 180° . Er zijn 6 van zulke verbindingslijnen. Dat levert 6 rotaties.

Zo hebben we $1 + 9 + 8 + 6 = 24$ rotaties.

Elk van deze rotaties kan worden samengesteld met de puntspiegeling J , een spiegeling ten opzichte van het middelpunt van de kubus. Zo vinden we 48 isometrieën die de kubus in zichzelf overvoeren. Bekijken we nu in de volgende figuur het linker plaatje van de kubus dan zien we daarin een tetraeder $ACFH$ en een tegen-tetraeder $GEDB$.



Merk op dat in ieder zijvlak van de kubus twee tetraeder-ribben liggen, van elke tetraeder één. Daaruit kun je zien dat elke isometrie van de kubus de tetraeder $ACFH$ óf in zichzelf overvoert óf in de tegen-tetraeder. Omdat de tetraeder precies 24 symmetrieën heeft, is het duidelijk dat alle symmetrieën van de kubus zijn opgesomd.

5 Dualiteit

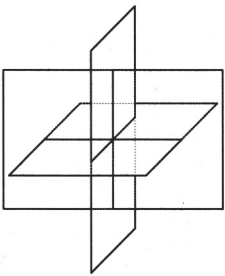
In paragraaf 2 is de oktaeder uit de kubus verkregen door ‘dualiseren’: als hoekpunten van de oktaeder kiezen we de middens van de zijvlakken van de kubus.

Opgave. Laat zien dat door dualiseren van de oktaeder de kubus ontstaat. Wat is de relatie tussen de eerste kubus en de laatste? Bewijs hiermee dat de kubus en oktaeder isomorfe symmetriegroepen hebben.

Door geschikte keuzen van een kubus en oktaeder is de doorsnede een half-regelmatig veertienvlak. Zie in de bovenstaande figuur het rechter plaatje. *Halfregelmatig* wil zeggen dat de figuur is opgebouwd uit meerdere typen van regelmatige veelhoeken (hier vierkanten en gelijkzijdige driehoeken) die in elk hoekpunt zijn samengevoegd volgens hetzelfde patroon (hier in cyclische volgorde een vierkant, driehoek, vierkant, driehoek.) Daarom noteert men het halfregelmatige veelvlak met $(4, 3, 4, 3)$. Dit veelvlak heet 14 zijvlakken, 24 ribben en 12 hoekpunten.

Opgave. Ga nu na dat de symmetriegroep van het halfregelmatige veertienvlak isomorf is met die van de kubus.

In de onderstaande figuur zien we in ieder coördinaatvlak een gouden rechthoek. Met $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ zijn dat:



in $x = 0$: de rechthoek met hoekpunten $(0, -1, \tau)$, $(0, 1, \tau)$, $(0, 1, -\tau)$, $(0, -1, -\tau)$;
in $y = 0$: de rechthoek met hoekpunten $(-\tau, 0, 1)$, $(\tau, 0, 1)$, $(\tau, 0, -1)$, $(-\tau, 0, -1)$;
in $z = 0$: de rechthoek met hoekpunten $(1, \tau, 0)$, $(1, -\tau, 0)$, $(-1, -\tau, 0)$, $(-1, \tau, 0)$.

Opgave. Ga na dat de genoemde twaalf punten de hoekpunten zijn van een ikosaeder, waarvan de ribbe de lengte 2τ heeft. Door dualiseren van de ikosaeder wordt de dodekaeder verkregen.

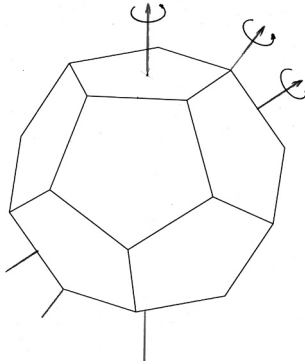
Door bij de ikosaeder kapjes rond de hoekpunten af te snijden op $1/3$ van de ribben ontstaat een half-regelmatig veelvlak $(5, 6, 6)$, beter bekend als voetbal of bucky ball. Deze figuur heeft dezelfde symmetriegroep als de dodekaeder (kijk naar de vijfhoeken!) Ook al zegt men dat de bal rond is, de symmetriegroep laat zien dat dit niet zo is.



6 De symmetriegroep van de dodekaeder

Om de symmetriegroep van de dodekaeder te onderzoeken beginnen we met de inventarisatie van de rotaties van de dodekaeder. Dit werk lijkt veel op wat

gedaan is bij de kubus. Denk eraan, de dodekaeder heeft 12 zijvlakken, 30 ribben en 20 hoekpunten.



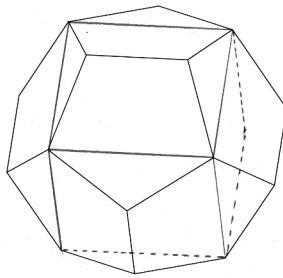
Om te beginnen is er de identieke afbeelding die elk punt op zijn plaats laat. In de figuur zijn enkele rotatieassen aangegeven.

Allereerst zijn er de verbindingslijnen tussen de middens van overstaande vlakken. Met zo'n verbindingslijn als as kun je vier niet-triviale rotaties uitvoeren: over 72° , 144° , 216° , 288° . Er zijn 6 assen die middens van overstaande zijvlakken verbinden. Zo krijgen we $6 \times 4 = 24$ rotaties.

Vervolgens zijn er rotaties om een lichaamsdiagonaal van de kubus, die overliggende hoekpunten verbindt en wel over 120° en 240° . Er zijn 10 lichaamsdiagonalen die hierbij kunnen optreden. Dat zijn dus bij elkaar 20 rotaties.

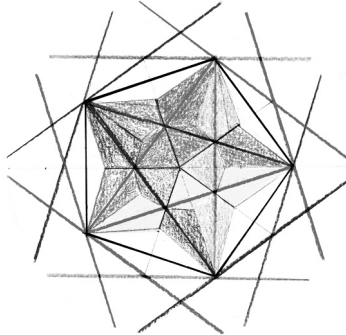
Tenslotte zijn er rotaties om de verbindingslijnen van de middens van overliggende ribben, en wel over 180° . Er zijn 15 van zulke verbindingslijnen. Dat levert 15 rotaties.

Zo hebben we alles bij elkaar $1 + 24 + 20 + 15 = 60$ rotaties.



Elk van deze rotaties kan worden samengesteld met de puntspiegeling J , een spiegeling ten opzichte van het middelpunt van de dodekaeder. Zo vinden we 120 isometrieën die de kubus in zichzelf overvoeren. Zijn dat nu alle symmetrieën? Ja, want we zullen laten zien dat de bovengenoemde rotaties alle rotaties van de dodekaeder zijn. Dat gaat niet helemaal vanzelf.

We merken op dat een kubus in de dodekaeder zó geplaatst kan worden dat in ieder zijvlak één ribbe van de kubus ligt. Uit de figuur kun je aflezen dat de dodekaeder uit de kubus gemaakt kan worden door op ieder zijvlak van de kubus een dakje te plaatsen, en wel om en om en zó dat de schuine vlakken van de dakjes in elkaar overlopen en regelmatige vijfhoeken vormen. In feite kun je 5 verschillende kubussen plaatsen in de kubus. We zullen nu eerst laten zien dat iedere rotatie van de dodekaeder een **even** permutatie van de kubussen met zich meebrengt.



We bekijken eerst de rotatie om een as die de middens van overstaande zijvlakken verbindt. Loodrecht neerkijkend op een van die zijvlakken zien we elk van de vijf kubussen, als een soort bergkam. In cyclische volgorde zien we de kleuren:

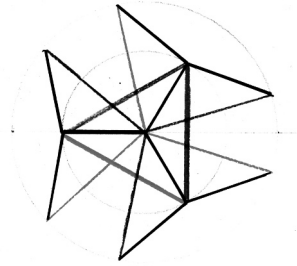
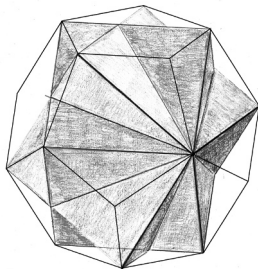
oranje-geel, blauw, rood, bruin, groen.

Na rotatie over 72° rechtsom zijn deze vervangen door achtereenvolgend:

groen, oranje-geel, blauw, rood, bruin.

Dit is een even permutatie van de oorspronkelijke volgorde. Omdat de overige rotaties om deze as door de middens ontstaan door iteratie van deze rotatie, zal iedere van deze rotaties een even permutatie van de kubussen induceren.

Vervolgens bekijken we een rotatie om de verbindingslijn van overliggende hoekpunten. We merken we op dat de 5 kubussen samen $5 \times 8 = 40$ hoekpunten hebben. Dat betekent dat ieder hoekpunt van de dodekaeder tot 2 kubussen behoort. In de volgende figuur links zie je hoe twee kubussen elkaar rond een hoekpunt doorsnijden.

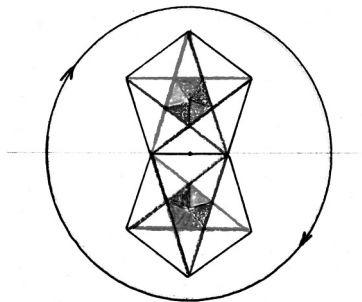


Kijken we nu in een hoekpunt in de richting van de rotatie-as dan zien we (rechter figuur) drie ribben die daar samenkomen onder een schijnbare hoek van 120° . Dit hoekpunt van de dodekaeder is ook hoekpunt van twee kubussen, de oranje en de bruine, die invariant zijn onder de draaiing over 120° . Bij de draaiing om de as worden de kubussen met de kleuren groen, blauw en rood cyclisch verwisseld. Dit induceert een even permutatie van de kubussen.

Terloops merken we op dat als een hoekpunt q tot twee kubussen behoort dat dan $J(q)$ ook tot deze twee kubussen behoort. Daaruit volgt weer dat als een zelfafbeelding F van de dodekaeder alle kubussen invariant laat (globaal, niet noodzakelijk puntsgewijs) dan $F(q) = q$, of $F(q) = J(q)$. Hieruit volgt de volgende belangrijke conclusie:

Twee verschillende rotaties van de dodekaeder induceren verschillende permutaties van de kubussen.

Tenslotte kijken we even naar de draaiing om een as door de middens van overliggende ribben. Zowel in de bovenste als in de onderste vijfhoek zie je



van elke kubus een ribbe. Om te weten welke ribben van de kubussen tot dezelfde kubus behoren, kun je denken aan de eerder gemaakte opmerking dat de dodekaeder uit zo'n kubus ontstaat door op elk zijvlak een dakje te plaatsen. In de bovenste vijfhoek zie je in cyclische volgorde de ribben van achtereenvolgend de

rode, groene, bruin, blauwe, oranje-gele

kubus. Na draaiing over 180° zijn deze vervangen door ribben van achtereenvolgend de

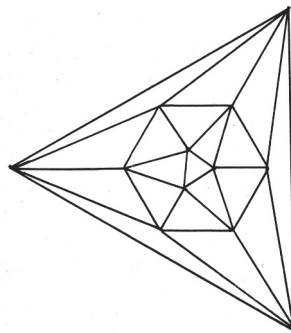
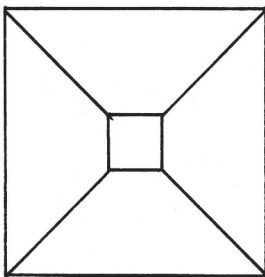
rode, bruine, groene, oranje-gele, blauwe ribben. Ook dit is een even permutatie van de kubussen.

Nu dit alles is vastgesteld, komen we even terug op de bewering dat de symmetriegroep van de dodekaeder 120 elementen heeft. Het aantal even permutaties van de vijf kubussen is 60, en we hadden al 60 rotaties. Er is dus een bijjectie tussen verzamelingen van de rotaties enerzijds en die van de even permutaties van 5 kubussen anderzijds. Deze bijjectie is zelfs een isomorfisme! De ondergroep van de rotaties heeft 60 elementen en dus heeft de symmetriegroep er 120.

Opgave. Toon aan dat er 10 tetraeders zijn waarvan de hoekpunten samen vallen met hoekpunten van de dodekaeder. Dit tiental kan gesplitst worden in twee vijftallen die elk samen alle hoekpunten van de dodekaeder 'bezetten'.

7 Schlegel-diagrammen

Tot nu toe hebben we de Platonische lichamen weergegeven met tekeningen die zijn uitgevoerd met het perspectief van parallelprojectie. We kijken nu daar de voorstelling met Schlegel-diagrammen. Dit opent de weg naar een bespreking van de vier-dimensionale regelmatige figuren. In de volgende figuur, links, is het *Schlegel-diagram* van de kubus getekend. Om te weten hoe je aan het diagram komt, moet je je voorstellen dat je de kubus bekijkt vanuit een punt dat onder het grondvlak ligt en wel heel dicht erbij. Je projecteert vanuit dit gezichtspunt de kubus op het grondvlak: in de figuur is het centrale vierkant het beeld van het bovenvlak, en de aaruit weglopende lijnen de opstaande ribben. Het grondvlak zelf wordt afgebeeld op het omhullende vierkant.



In het bovenstaande plaatje, rechts, is het Schlegeldiagram van het ikosaeder getekend.

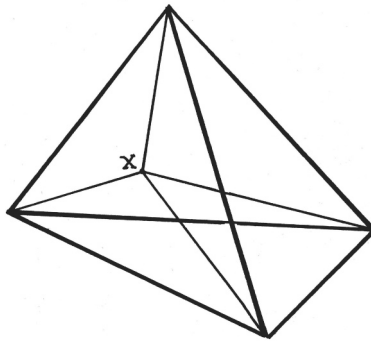
Opgave. Maak een schets van het Schlegeldiagram van de tetraeder en de oktaeder.

8 Regelmatige lichamen in dimensie vier

Bij de studie van regelmatige figuren in de hoger dimensionale ruimten is het vaak niet meteen duidelijk hoe de resultaten uit R^2 en R^3 ggeneraliseerd moeten worden. We beginnen eenvoudig.

8.1 5-simplex

Het 3-simplex is een driehoek, het 4-simplex is een tetraeder. In de figuur is



het Schlegel-diagram van het *5-simplex* weergegeven. Het heeft 5 hoekpunten: $Z_0 = 5$. Ieder viertal hoekpunten vormt een tetraeder. We bekijken het *Schlegel-diagram*: dik getekend is de buiten-tetraeder, opgespannen door 4 punten. Binnen deze tetraeder zijn er nog eens vier, elk opgespannen door één centraal punt X en een van de vier driehoeken die de tetraeder begrenzen. Het 5-simplex heeft dus 5 begrenzende hypervlakken, in dit geval 5 tetraeders: $Z_3 = 5$. Topologisch bezien is een 5-simplex een 4-dimensionale volle bol, de 5 tetraeders vormen samen de rand van de 4-dimensionale bol, en dus een 3-dimensionale sfeer. Omdat iedere tetraeder 6 zijvlakken heeft en elk zijvlak tot twee tetraeders behoort, vinden we $Z_2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ zijvlakken. Uit het Schlegel-diagram lezen we af dat iedere ribbe tot 3 tetraeders behoort. Het aantal ribben is dus: $Z_1 = \frac{5 \times 6}{3} = 10$. We vinden

$$Z_3 - Z_2 + Z_1 - Z_0 =$$

$$\#zjztetra - \#zjzvlakken + \#ribben - \#hoekpunten = 0,$$

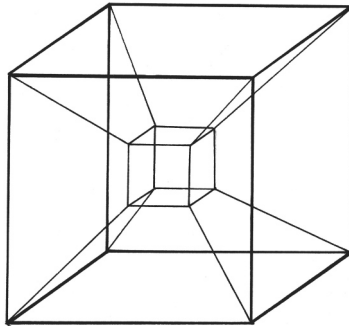
de formule van Poincaré-Euler.

Het 5-simplex is *regelmatig* als elk tweetal punten eenzelfde onderlinge afstand heeft. Zo vormen in R^5 de eenheidspunten op de assen, namelijk

$(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$ de hoekpunten van een regelmatig 5-simplex.

8.2 4-dimensionale kubus

In het Schlegel-diagram van de 4-dimensionale kubus zie je een binnenkubus en een buitenkubus. De *4-dimensionale kubus* is de verzameling van alle punten (x, y, z, t) in R^4 met $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$. Hierbij kunnen x , y , en z op de gebruikelijke wijze worden uitgelegd, de

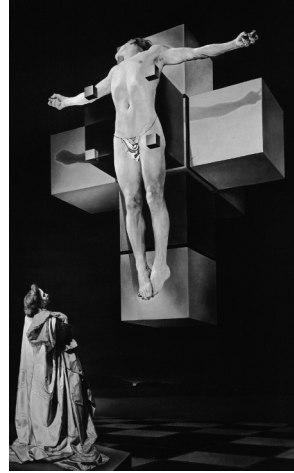


coördinaat t loopt van -1 voor de binnenkubus naar $+1$ voor de buitenkubus. De randkubussen zijn de punten van de 4-kubus met achtereenvolgend $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$, $t = 1$ en $t = -1$. Er zijn $Z_3 = 8$ 3d-kubussen, één binnenkubus, zes rondom de binnenkubus, en één buitenkubus. Iedere 3d-kubus heeft 8 zijvlakken en ieder zijvlak is deel van twee 3d-kubussen. Dus $Z_2 = \frac{8 \times 6}{2} = 24$, 6 vierkanten van de binnenkubus, 6 van de buitenkubus en 12 rondom. Iedere ribben behoort tot 3 kubussen en dus $Z_1 = \frac{8 \times 12}{3} = 32$. We tellen zo na dat $Z_0 = 2 \times 8 = 16$. Er komt

$$Z_3 - Z_2 + Z_1 - Z_0 = 8 - 24 + 32 - 16 = 0,$$

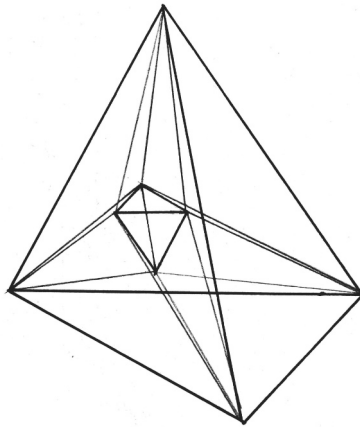
een bevestiging van de Poincaré-Euler formule.

Het Schlegel-diagram is niet de enige manier om de 4d-kubus in beeld te brengen. Zoals de 2-dimensionale uitslag van een gewone kubus gebruikt kan worden om de kubus met een vlakke figuur uit te beelden, zo kan het een dimensie hoger ook met de 4-dimensionale kubus. Dit is op fraaie wijze te zien in het *Corpus hypercubicus* van Salvador Dalí, de man die zoveel wiskunde in zijn werk doet. Het gebruikelijke kruis is vervangen door de uitslag in de ruimte van de 3-dimensionale rand (de acht 3d-kubussen) van de 4-dimensionale kubus.



8.3 16-tetraeder

De 4-dimensionale kubus is de generalisatie naar R^4 van de gewone kubus. Wat is nu de geschikte generalisatie van de oktaeder? Omdat de gewone kubus en oktaeder elkaars dualen zijn proberen we de duale te vinden van de 4d-kubus (zo die er is). De hoekpunten van de gezochte figuur zijn de middelpunten van de randkubussen, namelijk, $(-1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 0, 1)$, dus $Z_0 = 8$. Omdat bijvoor-



beeld de 3d-kubussen $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $t = -1$ het punt $(1, -1, 1, -1)$ gemeenschappelijk hebben, behoort de tetraeder met de hoekpunten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, -1)$ tot de figuur. Op deze wijze vinden we 16 tetraeders in de figuur. In het diagram zijn dit de binnen-tetraeder (1),

de buiten-tetraeder (1),
 de verbindingen van de hoekpunten van de buiten-tetraeder met de overliggende driehoek van de binnen-tetraeder (4),
 de verbindingen van de hoekpunten van de binnen-tetraeder met de overliggende driehoek van de buiten-tetraeder (4),
 de verbindingen van de ribben van de binnen-tetraeder met de overliggende (gekruiste) ribben van de buiten-tetraeder (6).
 Dus $Z_3 = 16$. Verder $Z_2 = \frac{16 \times 4}{2} = 32$ en $Z_1 = \frac{16 \times 6}{4} = 24$. Nu vinden we

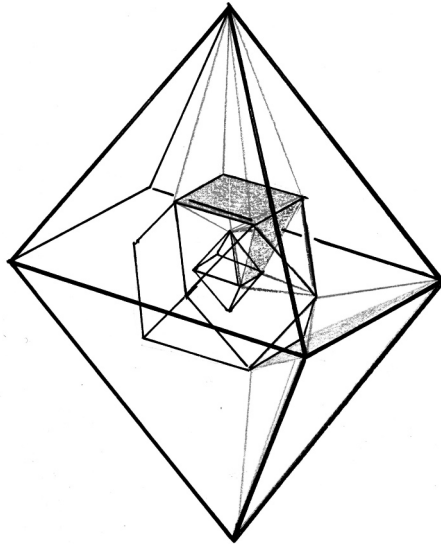
$$Z_3 - Z_2 + Z_1 - Z_0 = 16 - 32 + 24 - 8 = 0,$$

nogmaals een bevestiging van de formule van Poincaré-Euler. Verder zien we, in overeenstemming met de theorie van de Poincaré-dualiteit uit de algebraïsche topologie dat:

$$Z_k(\text{4d-kubus}) = Z_{3-k}(\text{16-tetraeder}).$$

Opgave. Toon aan dat het 5-simplex met zichzelf dual is.

8.4 24-oktaeder



Er is in de R^4 nog een lichaam dat met zichzelf dual is, namelijk de *24-oktaeder*. Aan de hand van een gedeeltelijk getekend Schlegel-diagram leg ik uit hoe de 24 oktaders getekend kunnen worden. Zoals altijd is er een (heel kleine) binnen-oktaeder en een (forse) buiten-oktaeder. Deze oktaeders zijn zó

geplaatst dat de zijvlakken van beide oktaeders parallel zijn. Tussen de twee oktaeders is een mediaan halfregelmatig 14-vlak geplaatst, (7).

In rood is een oktaeder getekend die overliggende hoekpunten van binnen- en buiten-tetraeder verbindt via een vierkant van het mediane 14-vlak. Van dit type van oktaeder zijn er 6.

Tussen de buiten-oktaeder en het 14-vlak kan ik 8 oktaeders plaatsen; één van deze oktaeders is met een groene kleur aangegeven. De driehoeken van de buiten-oktaeder liggen tegenover driehoeken van het mediane 14-vlak, en overstaande driehoeken zijn 180° ten opzichte van elkaar gedraaid. De evenwijdige zijden van overstaande driehoeken zijn de zijden van een vierkant. Het vierkant wordt aangevuld tot een oktaeder door het vierkant te verbinden met het derde hoekpunt van de betreffende driehoeken.

Op dezelfde wijze kan ik 8 tetraeders maken tussen het mediane 14-vlak en de centrale oktaeder. Een ervan is met een blauwe kleur aangegeven.

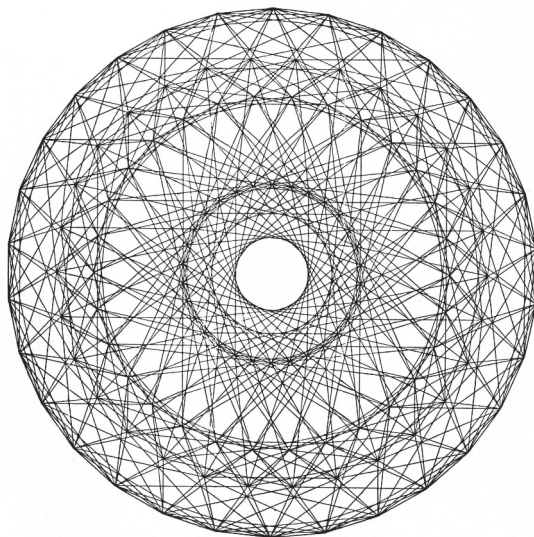
De 24-oktaeder heeft dus een 3-dimensionale rand die is opgebouwd uit 24 oktaeders. Via de gebruikelijke berekeningen of gewoon door slim tellen met behulp van de figuur vind ik $Z_3 = 24$, $Z_2 = 96$, $Z_1 = 96$, $Z_0 = 24$.

Zijn dit nu alle regelmatige lichamen in dimensie vier? Nee er is nog meer!

8.5 120-dodekaeder en 600-tetraeder

Er is nog een vierdimensionale figuur, namelijk de 120-dodekaeder. Zijn 3d-rand bestaat uit 120 dodekaeders: $Z_3 = 120$. De figuur is zo gecompliceerd dat de hier ontwikkelde wijze van representatie niet veel helpt om ons inzicht in de structuur van de 120-dodekaeder te vergroten. We berekenen op de gewone wijze dat $Z_2 = \frac{120 \times 12}{2} = 720$ en $Z_3 = \frac{120 \times 30}{3} = 1200$. En dan helpt de formule van Poincaré-Euler ons aan $Z_0 = 600$. De duale van de 120-dodekaeder is de *600-tetraeder*. In de volgende figuur is een projectie van deze figuur in R^3 te zien. Gebruik makend van de Poincaré dualiteit vinden we dat er in deze figuur 1200 driehoeken zijn, 720 ribben en 120 hoekpunten. Niet alleen onder wiskundigen, maar ook onder kunstenaars groeide de vreugde om de ontdekking van een nieuw terrein voor onderzoek dat ontsloten was. Zoals Theo van Doesburg zei: *une nouvelle dimension pénètre notre conscience scientifique et plastique*

Toch heeft het verhaal een teleurstellend einde. Bij het onderzoek naar regelmatige lichamen in dimensie 5 en hoger blijkt dat alleen de regelmatige figuren als 5-simplex, 4d-kubus en 16-tetraeder op de voor de hand liggende wijze kunnen worden generaliseerd naar hogere dimensies.



The four-dimensional polytope $\{3, 3, 5\}$, drawn by van Oss

Wat ga ik nu lezen?

Als je het werken met regelmatige figuren interessant vindt probeer dan wat geld opzij te leggen om het volgende boek aan te schaffen:

MAGNUS J. WENNIGER, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press. Ga dan ook langs bij de kantoorboekhandel om karton, lijm en schaar aan te schaffen om de modellen zelf te maken. Kijk of je ook kunt vinden (het ligt vaak in de ramsj):

DORIS SCHATTSCHNEIDER UND WALLACE WALKER, *Kaleidozykeln*, Taco. Omdat dit boek voorgeknipte bouwplaten heeft kun je meteen aan de slag. Er is ook nog een Dover boekje (meestal niet zo duur) over regelmatige figuren:

ALAN HOLDEN, *Shapes, Space and Symmetry*, Dover. Zeer de moeite waard, met fraaie tabellen en diagrammen is

H.M. CUNDY AND A.P. ROLLETT, *Mathematical Models* Tarquin.

Het volgende boek is gewoon fantastisch en vertelt van alles over heel de wiskunde. Het is geschreven door de grootste wiskundige ooit.

DAVID HILBERT UND STEPHAN COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie*, Springer.

Ben je geïnteresseerd in de harde wiskunde van dit alles, dan zijn er bijvoorbeeld

WILLARD MILLER, JR, *Symmetry groups and their applications*, Academic Press, met een uitvoerige behandeling van toepassingen in de kristallografie en

H.S.M. COXETER, *Regular Polytopes*, Dover, met veel aandacht voor theorie betreffende de hogere dimensies. Over de impact van deze wiskundige ontwikkelingen op de kunst kun je lezen in

LINDA DALRYMPLE HENDERSON, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press.

Snelle algoritmen in de getaltheorie

Bas Edixhoven

Universiteit Leiden

email: edix@math.leidenuniv.nl

Samenvatting

De auteur van deze tekst is bijzonder blij met de resultaten die hij en zijn medewerkers recentelijk hebben behaald in [Ed-Co], [Bruin] en [Varma], op het gebied van snelle algoritmen in de getaltheorie. Er heeft hier een doorbraak plaatsgevonden die bepaalde objecten toegankelijk heeft gemaakt voor berekeningen. Deze objecten komen uit de Galoistheorie en zijn van groot belang in de getaltheorie. Ze spelen bijvoorbeeld een belangrijke rol in Wiles' bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. Men kan deze objecten uitrekenen met computeralgebra (symbolische rekenmachines), maar dat leidt tot exponentiële groei in de rekentijd. Rekenen met benaderingen met voldoende grote precisie leidt tot algoritmen waarvan de rekentijd slechts polynomiaal groeit.

Het doel van deze tekst is de objecten waarom het gaat zo eenvoudig mogelijk te beschrijven, en het geheel in een historische context te plaatsen door te beginnen met een toepassing op het volgende klassieke probleem. Hoe snel kan men uitrekenen op hoeveel manieren een geheel getal n geschreven kan worden als som van d kwadraten van gehele getallen? Beroemde wiskundigen zoals onder andere Diophantus, Fermat, Legendre, Gauss, Jacobi, Eisenstein, en Liouville hebben voor d gelijk aan 2, 4, 6, 8 of 10 formules gegeven waarmee deze aantallen snel berekend kunnen worden. Daarna is zonder succes geprobeerd dit uit te breiden naar grotere even getallen. Met hedendaagse kennis begrijpen we nu dat er dan geen dergelijke formules meer bestaan, maar dat de gezochte aantallen toch snel kunnen worden uitgerekend.

De bijbehorende voordracht zal veel voorbeelden bevatten, waaronder ook computerberekeningen. Advies aan de lezer: deze tekst bevat vast teveel stof en het gaat over een moeilijk onderwerp, dus probeer niet teveel alles te begrijpen, maar zie het meer als een overdadig buffet en kies eruit wat u lekker vindt.

1 Een klassieke vraag

We beginnen met een klassieke vraag: op hoeveel manieren een geheel getal n geschreven kan worden als som van d kwadraten van gehele getallen. Voor $d = 1$ zijn we snel klaar: als n geen kwadraat is dan kan het niet (dus op 0

manieren), als n wel een kwadraat is (zeg van een geheel getal x) dan kan het op twee manieren ($n = x^2$ en $n = (-x)^2$) als $n \neq 0$ en anders op één manier.

Voor $d = 2$ kunnen we bijvoorbeeld opmerken dat 1 op 4 manieren geschreven kan worden als som van 2 kwadraten: $(\pm 1)^2 + 0^2$ en $0^2 + (\pm 1)^2$. Ook voor 2 is het aantal manieren 4: $(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$.

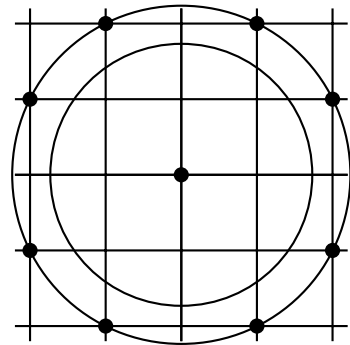
Om wat makkelijk over deze vraag te kunnen praten laten we $r_d(n)$ het gevraagde aantal zijn. In formuletaal:

$$r_d(n) := \#\{x \in \mathbb{Z}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = n\}. \quad (1.1)$$

De stelling van Pythagoras geeft ons ook een meetkundige interpretatie van de vraag naar $r_d(n)$:

voor $n \geq 0$ is $r_d(n)$ het aantal punten in \mathbb{Z}^d op afstand \sqrt{n} van de oorsprong, met andere woorden, het aantal punten van de doorsnede met \mathbb{Z}^d van de bolschil in \mathbb{R}^d om 0 met straal \sqrt{n} .

In dimensie 2 is deze interpretatie makkelijk te tekenen. Bijvoorbeeld kan 5 op 8 manieren geschreven worden als som van 2 kwadraten: op 4 manieren als $(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$ en op nog eens 4 manieren als $(\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$. Maar bijvoorbeeld kan 3 niet geschreven worden als som van 2 kwadraten, want de enige kwadraten kleiner of gelijk aan 3 zijn 0 en 1, en daar gaat het niet mee. Ook 6 en 7 zijn geen som van 2 kwadraten, maar 8 weer wel. In dimensie 3 kunnen we ons ook nog wel voorstellen hoe voor een paar kleine waarden van n de doorsnede van een bolschil van straal \sqrt{n} om de oorsprong met het rooster \mathbb{Z}^3 eruit ziet, maar als n groter wordt, en nog meer als de dimensie groter wordt, dan schiet ons voorstellingsvermogen tekort en kan alleen rekenen het antwoord geven.



Figuur 1: $r_2(5) = 8$

2 Oude resultaten en formules in even dimensies $d \leq 12$

De geschiedenis van de vraag naar de getallen $r_d(n)$ gaat ver terug, en bekende wiskundigen hebben zich hiermee bezig gehouden (voor meer detail verwijzen we naar Hoofdstuk XX in [Ha-Wr]). Al in de 3e eeuw gaf Diophantus van Alexandrië de volgende identiteit¹:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \quad (2.1)$$

¹Vraag aan de lezer: ziet u een verband met complexe getallen?

Uit deze identiteit volgt dat als n en m beide een som van twee kwadraten zijn, dan zo ook hun product. De vraag welke n dan de som van twee kwadraten zijn is daarmee teruggebracht tot priemgetallen. Wat experimenteren (bekijk bijvoorbeeld alle priemgetallen onder de 100) leidt al snel tot het vermoeden dat een priemgetal p een som van 2 kwadraten is precies dan als p niet rest 3 geeft na deling door 4. Eén van de twee implicaties is makkelijk: een kwadraat van een even getal is deelbaar door 4 (want $(2x)^2 = 4x^2$), en dat van een oneven getal geeft rest 1 na deling door 4 (want $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$), dus kan een som van twee kwadraten niet rest 3 geven na deling door 4.

De implicatie in de andere richting werd bewezen door Pierre de Fermat (jurist te Toulouse) in de 17e eeuw: ieder priemgetal dat rest 1 geeft na deling door 4 is een som van twee kwadraten.

Algemener bewees Fermat dat voor $n \geq 1$ geldt dat $r_2(n) \neq 0$ precies dan als iedere priemdeeler p van n die rest 3 geeft na deling door 4 tot een even macht voorkomt in de ontbinding van n in priemfactoren.

Adrien-Marie Legendre gaf in 1798 een formule voor $r_2(2^a m^2)$. Carl Friedrich Gauss gaf in 1801 een algemene formule voor $r_2(n)$, en zelfs een formule voor $r_3(n)$, maar uit die laatste formule bleek al dat $r_d(n)$ voor oneven d meer gecompliceerd zijn dan voor even d . Vanaf nu bekijken we dan ook alleen nog maar even d .

Een *mooie* formule voor $r_2(n)$ werd in 1829 gegeven door Carl Gustav Jacob Jacobi, die voor $n > 0$ beweest:

$$r_2(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d), \quad \text{waar} \quad \chi(d) = \begin{cases} 0 & \text{als } d \text{ even is,} \\ 1 & \text{als } d = 4r + 1, \\ -1 & \text{als } d = 4r + 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

De notatie $\sum_{d|n}$ betekent dat er gesommeerd wordt over de positieve delers d van n . Bijvoorbeeld zijn de delers van 3 de getallen 1 en 3, en krijgen we

$$r_2(3) = 4 \cdot (\chi(1) + \chi(3)) = 4 \cdot (1 + (-1)) = 0,$$

hetgeen inderdaad klopt. Voor $n = 5$ vinden we: $r_2(5) = 4 \cdot (\chi(1) + \chi(5)) = 4 \cdot 2 = 8$, wat natuurlijk ook klopt.

Voor $d = 4$ beweest Jacobi een nog mooiere formule:

$$r_4(n) = 8 \sum_{2 \nmid d|n} d + 16 \sum_{2 \nmid d|(n/2)} d, \quad (2.3)$$



waarin $\sum_{2 \nmid d|n}$ betekent dat er gesommeerd wordt over de oneven delers d van n , en waar we afspreken dat als $n/2$ niet geheel is dat getal ook geen delers heeft en de som $\sum_{2 \nmid d|(n/2)} d$ nul is.

Laten we een paar voorbeelden bekijken. Het getal 1 kan op 2·4 manieren geschreven worden als som van 4 kwadraten, want $1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$, en de (± 1) kan op 4 verschillende plekken staan. En inderdaad geeft Jacobi's formule $r_4(1) = 8 \cdot 1 = 8$.

We hebben $r_4(2) = \binom{4}{2} \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24$, want $2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2$, met $\binom{4}{2}$ mogelijkheden voor de plaatsen van de twee nullen, en 4 mogelijke tekens. Dat klopt precies met Jacobi's formule: $8 + 16 = 24$. De lezer wordt van harte aanbevolen zelf nog een paar voorbeelden uit te werken. Het is natuurlijk een wonder dat zulke formules bestaan. Verderop zal iets over dit wonder worden geopenbaard, maar eerst gaan we verder omhoog in dimensie.

Uit werk van Jacobi, Ferdinand Eisenstein en Henry Smith volgt dat:

$$\begin{aligned} r_6(n) &= 16 \sum_{d|n} \chi(n/d) d^2 - 4 \sum_{d|n} \chi(d) d^2, \\ r_8(n) &= 16 \sum_{d|n} d^3 - 32 \sum_{d|(n/2)} d^3 + 256 \sum_{d|(n/4)} d^3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ook hier wordt de lezer aangeraden een paar kleine gevallen zelf uit te werken.

In 1865 vond Joseph Liouville een formule voor $r_{10}(n)$, in termen van de Gaussische gehele getallen $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} : a \text{ en } b \text{ in } \mathbb{Z}\}$. Deze deelverzameling van \mathbb{C} is gesloten onder optellen en vermenigvuldigen. Voor $d = a + bi$ in $\mathbb{Z}[i]$ schrijven we $|d|$ voor de absolute waarde van d als complex getal, dus $|d|^2 = a^2 + b^2$. Dan luidt de formule van Liouville als volgt:

$$r_{10}(n) = \frac{4}{5} \sum_{d|n} \chi(d) d^4 + \frac{64}{5} \sum_{d|n} \chi(n/d) d^4 + \frac{8}{5} \sum_{d \in \mathbb{Z}[i], |d|^2 = n} d^4. \tag{2.5}$$

De derde som in Liouville's formule is van een andere soort dan de eerste twee sommen. Voor elke term d^4 van de derde som geldt dat $|d^4| = |d|^4 = (|d|^2)^2 = n^2$, terwijl in de voorafgaande sommen de absolute waarden van de termen tussen 1 en n^4 variëren.

De volgende stap werd gezet door James Whitbread Lee Glaisher in 1907. Hij gaf formules voor $r_d(n)$ voor alle even d van 12 tot en met 18. We geven als voorbeeld de formule voor $d = 12$, zoals geïnterpreteerd door Srinivasa Ramanujan 1916:

$$r_{12}(n) = 8 \sum_{d|n} d^5 - 512 \sum_{d|(n/4)} d^5 + 16a_n, \tag{2.6}$$



Figuur 2: Jacobi

waar:

$$\sum_{n \geq 1} a_n q^n = q \prod_{m \geq 1} (1 - q^{2m})^{12} \quad \text{in } \mathbb{Z}[[q]]. \quad (2.7)$$

De notatie $\prod_{m \geq 1}$ betekent dat de factoren $1 - q^{2m}$ vermenigvuldigd moeten worden, over alle gehele $m \geq 1$, en “in $\mathbb{Z}[[q]]$ ” betekent dat dit product gezien moet worden als een machtreeks in de variabele q waarbij er niet op convergentie wordt gelet: het product wordt dan ook een formele machtreeks genoemd.

Om bijvoorbeeld a_1 tot en met a_5 uit te rekenen merken we op dat alle factoren $(1 - q^{2m})$ met $m > 2$ er niet toe doen, en is het genoeg om het product $q(1 - q^2)^{12}(1 - q^4)^{12}$ uit te werken, en alle termen met q^i waarin $i > 5$ is weg te laten:

$$q(1 - q^2)^{12}(1 - q^4)^{12} = q - 12q^3 + 54q^5 + O(q^7). \quad (2.8)$$

We zien dus dat $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -12$, $a_4 = 0$, en $a_5 = 54$. Het is duidelijk dat deze formule voor $r_{12}(n)$ weer van een andere soort is dan die voor lagere even d . We gaan nu uitleggen waarom we Glaishers formule echt minder waard vinden dan de voorgaande.

3 Algoritmisch perspectief op het klassieke probleem

In Sectie 2 hebben we formules gezien voor $r_d(n)$ voor even d van 2 tot 12. De vraag die we nu willen stellen is hoe nuttig deze formules zijn voor het berekenen van de getallen $r_d(n)$, waarbij we rekening houden met hoe lang die berekeningen dan duren.

We beginnen met het bekijken van het eenvoudigste geval: $d = 1$. In Sectie 1 merkten we al op dat $r_1(n) = 0$ als n geen kwadraat is, $r_1(0) = 1$ en $r_1(n) = 2$ als $n > 0$ en een kwadraat is. Laten we nu eens kijken hoe snel we kunnen uitrekenen of een geheel getal $n > 0$ (willekeurig groot, denk aan minstens honderden cijfers!) een kwadraat is, dat wil zeggen, of er een geheel getal m is zodat $m^2 = n$. Anders gezegd, we moeten beslissen of het reële getal \sqrt{n} geheel is. Een manier om dit te doen is als volgt, waarbij we gebruiken dat de functie $x \mapsto x^2$ van $(0, \infty)$ naar \mathbb{R} strikt stijgend is. We weten dat $0 \leq \sqrt{n} \leq n$. Laat $m = \lfloor n/2 \rfloor$, d.w.z., $n/2$ naar beneden afgerond. We berekenen m^2 en beslissen of $m^2 \geq n$ of $m^2 \leq n$. Als $m^2 \geq n$, dan weten we dat $0 \leq \sqrt{n} \leq m$, en anders dat $m \leq \sqrt{n} \leq n$, in beide gevallen is \sqrt{m} in een interval van lengte hoogstens $(n + 1)/2$ en met gehele eindpunten. We herhalen deze stappen totdat we een interval $[a, b]$ hebben van lengte hoogstens 1 en met gehele eindpunten waarin \sqrt{n} ligt. Dan berekenen we a^2 en b^2 en weten we of n een kwadraat is.

Hoeveel rekentijd kost ons dit? Om hier antwoord op te geven moeten we eerst kijken hoeveel tijd de gebruikte operaties ons kosten. Als we met de methode van de lagere school twee gehele getallen a en b optellen, dan kost ons dit hoogstens r elementaire optellingen die we uit ons hoofd kennen, waarbij

r het maximum is van het aantal cijfers van a en b . Uitrekenen van het product ab kost hoogstens ongeveer r^2 elementaire operaties. De deling $\lfloor a/2 \rfloor$ kost hoogstens r operaties, en zo ook $a - b$ en het kijken of $a - b = 0$. Het aantal intervallen dat we construeren tijdens de berekening is hoogstens ongeveer $\log_2(n)$, want (op een klein beetje na) wordt de lengte iedere keer gehalveerd. Het aantal cijfers van de getallen die in onze berekeningen voorkomen is hoogstens $1 + \log_{10} n$. De uitkomst is dan dat de berekening hoogstens ongeveer $3(\log_2 n)(\log_{10} n)^2$ elementaire operaties kost. Iets minder nauwkeurig gezegd: de berekening kost hoogstens $c \cdot (\log n)^3$ tijd, voor één of ander getal c . Nog minder nauwkeurig gezegd: de rekentijd is hoogstens polynomiaal in $\log n$. Het is goed om over $\log n$ na te denken als het aantal cijfers van n (op de factor $1/\log 10$ na, dan).

Men zou kunnen denken dat het handig is om de ontbinding van n in priemfactoren te gebruiken, want daaruit volgt meteen of n een kwadraat is of niet. Jammer genoeg hebben de snelst bekende algoritmen om n te factoriseren een rekentijd die veel harder groeit dan polynomiaal in $\log n$ (namelijk $\exp(c \cdot (\log n)^{1/3})$); zie “General number field sieve” op Wikipedia. Dat maakt deze methode veel langzamer dan de voorgaande. Er is ook een positieve kant hieraan: in de cryptografie is het RSA protocol gebaseerd op het feit dat we niet zo snel kunnen factoriseren.

Laten we nu eens terugkijken naar de formules voor $r_2(n), \dots, r_8(n)$. Daarin moet gesommeerd worden over de delers van n , en om dat te doen moeten we de factorisatie van n kennen. Het wordt dan interessanter om de gestelde vraag “Hoe snel kunnen we $r_d(n)$ uitrekenen?” iets aan te passen tot:

Hoe snel kunnen we $r_d(n)$ uitrekenen als de ontbinding van n in priemfactoren gegeven is?

Het antwoord op deze vraag is bevredigend voor d in $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, namelijk dat dat kan in tijd polynomiaal in $\log n$, maar daarvoor is het wel nodig de formules voor $r_d(n)$ iets anders op te schrijven, want het kost teveel tijd alle delers af te lopen. De functie χ uit (2.2) is multiplicatief: voor alle d_1 en d_2 in \mathbb{Z} geldt $\chi(d_1 d_2) = \chi(d_1)\chi(d_2)$. Laat nu p_1, \dots, p_r de verschillende priemfactoren van n zijn, en e_1, \dots, e_r hun exponenten in de ontbinding van n . Dan geldt, bijvoorbeeld:

$$r_2(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d) = 4 \prod_{i=1}^r (\chi(1) + \chi(p_i) + \dots + \chi(p_i^{e_i})). \quad (3.1)$$

Omdat voor alle i geldt dat $p_i \geq 2$ hebben we $2^r \leq n$, dus $r \leq \log_2 n$, en zo ook $2^{e_i} \leq n$, dus $e_i \leq \log_2 n$. Het berekenen van $r_2(n)$ kost een tijd die hoogstens polynomiaal is in $\log n$. Hetzelfde argument werkt voor d in $\{4, 6, 8\}$. Voor $d = 10$ kan men iets dergelijks doen met de ontbinding van n in priemfactoren in $\mathbb{Z}[i]$ (bijvoorbeeld $2 = (1+i)(1-i)$, $5 = (2+i)(2-i)$, 3 is priem). De ontbinding in $\mathbb{Z}[i]$ van een priemgetal p in \mathbb{Z} kan berekend worden in tijd polynomiaal in $\log p$, maar daarvoor is wat algebra en elementaire getaltheorie nodig.

Daarentegen is het uitrekenen van de a_n in (2.7) door het uitwerken van het product een kostbare operatie. Om a_n uit te rekenen moet de coëfficiënt van q^n in $q \prod_{m=1}^{n/2} (1 - q^{2m})^{12}$ worden uitgerekend. In deze berekening mogen steeds alle termen waarin q^i met $i > n$ voorkomt weggelaten worden, maar dan moeten nog steeds polynomen van graad n vermenigvuldigd worden en dat betekent dat de tijd minstens lineair in n groeit, dus exponentieel in $\log n$. De conclusie is dat Glaishers formule ons niet in staat stelt om $r_{12}(n)$ uit te rekenen in tijd polynomiaal in $\log n$. Zelfs niet als de factorisatie van n gegeven is (maar dat doet er nu niet toe).

Tot slot van deze sectie merken we op dat het snel uitrekenen van $r_4(n)$ bijna neerkomt op het factoriseren van n . In ieder geval voor getallen $n = pq$ met p en q verschillende priemgetallen > 2 (de n die voor het RSA protocol gebruikt worden zijn van deze vorm), want dan geldt:

$$r_4(n) = 1 + p + q + n, \tag{3.2}$$

en als we $p + q$ en pq kennen, dan weten we hoe we p en q kunnen berekenen via de abc-formule, of via $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$.

4 Een gevolg van het recente onderzoek

Ila Varma, een masterstudente in Leiden in 2009-2010, liet in haar scriptie [Varma] zien dat voor geen enkele even $d > 10$ er een “elementaire formule” is voor $r_d(n)$ zoals we hebben voor $d \leq 10$. Natuurlijk moet het begrip “elementaire formule” precies gedefinieerd worden voordat er sprake is van een wiskundige uitspraak, en een bewijs. Verderop zullen we hierover iets kunnen zeggen.

Aan de positieve kant laten [Ed-Co] en [Bruin] zien dat voor iedere even d de getallen $r_d(n)$ tòch uitgerekend kunnen worden in een tijd die hoogstens polynomiaal is in $\log n$, als de factorisatie van n is gegeven.

De conclusie is dan ook:

Vanuit algoritmisch perspectief is het klassieke probleem van het snel uitrekenen van $r_d(n)$ voor even d en n gegeven met ontbinding is priemfactoren opgelost voor alle even d . De vraag naar formules heeft een negatief antwoord, maar voor berekenen maakt dat negatieve antwoord niet uit en hebben we nu een positief antwoord.

De volgende sectie geeft wat inzicht in waar deze vooruitgang vandaan komt, welke wiskundige objecten hieraan bijdragen.

5 Tweedimensionale Galoisrepresentaties

Lieve lezer, schrik alsjeblieft niet teveel bij het lezen van de titel van deze sectie, en stop niet hier met lezen. Het doel is juist om in simpele termen uit te leggen

wat deze objecten zijn, en dat zal niet moeilijker zijn dan complexe getallen en 2 bij 2 matrices. We moeten nu dieper inzoomen op de complexe getallen, omdat we die nodig hebben om symmetrie in de getaltheorie te kunnen zien.

We schrijven (zoals hierboven) \mathbb{C} voor de verzameling van complexe getallen. We vatten \mathbb{C} op als het reële vlak, met basis 1 en i . Elementen van \mathbb{C} zijn dan uniek te schrijven als $a + bi$ met a en b in \mathbb{R} . De optelling geschiedt coördinaatsgewijs:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (5.1)$$

en de vermenigvuldiging ligt vast door te eisen dat die lineair is over \mathbb{R} in beide factoren en dat $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (5.2)$$

De absolute waarde van $a + bi$ is gedefinieerd als:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5.3)$$

en voor alle complexe getallen z en w geldt dan:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad (5.4)$$

We kunnen in \mathbb{C} ook delen (behalve door 0):

$$1/(a + bi) = (a - bi)/(a^2 + b^2). \quad (5.5)$$

En complexe getallen kunnen in poolcoördinaten geschreven worden:

$$r \cdot e^{i\phi} = r \cos(\phi) + ir \sin(\phi) \quad (5.6)$$

De e -macht e^z van een complex getal is gegeven door de machtreeks:

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \quad (5.7)$$

Deze machtreeks convergeert, dat wil zeggen, de rij van partiële sommen convergeert, waarbij de afstand tussen twee complexe getallen z en w gelijk is aan $|z - w|$. Voor alle z en w in \mathbb{C} geldt dan dat $e^{z+w} = e^z e^w$, en daaruit volgt dan weer dat vermenigvuldiging van complexe getallen in poolcoördinaten neerkomt op het vermenigvuldigen van de absolute waarden en het optellen van de argumenten.

Voor de symmetrie in de getaltheorie moeten we het afstandsbegrip op \mathbb{C} loslaten, en alleen naar algebraïsche eigenschappen kijken: optelling en vermenigvuldiging. We moeten dus kijken met de bril van de getaltheoreticus. De symmetrieën van \mathbb{C} heten dan *automorfismen*.

Automorfismen van \mathbb{C} zijn afbeeldingen $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die voldoen aan:

1. $\sigma(z + w) = \sigma(z) + \sigma(w)$,
2. $\sigma(z \cdot w) = \sigma(z) \cdot \sigma(w)$,
3. σ heeft een inverse afbeelding.

Het volgt dan dat:

$$\sigma(0) = \sigma(0 + 0) = \sigma(0) + \sigma(0), \quad \text{dus } \sigma(0) = 0. \quad (5.8)$$

En ook:

$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1) \cdot \sigma(1), \quad \text{dus } \sigma(1) = 1 \text{ of } \sigma(1) = 0, \text{ dus } \sigma(1) = 1, \quad (5.9)$$

want $\sigma(1)$ is verschillend van $\sigma(0)$.

We kennen twee automorfismen van \mathbb{C} : de identiteit $\text{id}_{\mathbb{C}}: z \mapsto z$, en de complexe conjugatie: $\sigma(a + bi) = a - bi$, ook wel geschreven als $z \mapsto \bar{z}$. Deze twee automorfismen zijn de enige twee die continu zijn. Maar het is bekend (na 3 colleges algebra op de universiteit) dat de verzameling $\text{Aut}(\mathbb{C})$ van automorfismen van \mathbb{C} heel groot is (even groot als de verzameling van alle deelverzamelingen van \mathbb{C}). Toch kennen we van geen van al die andere automorfismen een expliciete beschrijving. Ook van de algebraïsche eigenschappen van bekende complexe getallen weten we niet veel. We weten dat e en π transcendent zijn: ze zijn geen nulpunt van een polynoom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ met alle a_i in \mathbb{Q} . Daaruit volgt dat er een $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ is met $\sigma(e) = \pi$, en ook dat er een $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ is met $\sigma(\pi) = e$. Maar we weten niet of e en π algebraïsch onafhankelijk zijn (of er een polynoom $f \neq 0$ in $\mathbb{Q}[x, y]$ is zodat $f(e, \pi) = 0$; iedereen verwacht van niet, maar niemand heeft een bewijs), en dus ook niet of er een $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ is die e en π verwisselt.

Daarentegen is het opmerkelijk dat \mathbb{R} maar één automorfisme heeft, de identiteit. Dit te bewijzen is een interessante opgave, die niet zo moeilijk is (laat $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{R})$, bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt dat $\sigma(n) = n$, dan dat voor alle x in \mathbb{Q} geldt dat $\sigma(x) = x$, en dan dat σ de ordening op \mathbb{R} vastlaat: als $x \leq y$ dan is er een z zodat $y = x + z^2$, en dan $\sigma(y) = \sigma(x) + \sigma(z)^2 \dots$).

Elementen van $\text{Aut}(\mathbb{C})$ kunnen worden samengesteld: voor σ en τ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ is ook de samenstelling $(\sigma \circ \tau): z \mapsto \sigma(\tau(z))$ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$. Tenslotte: voor alle p/q in \mathbb{Q} geldt dat $\sigma(p/q) = p/q$. We zijn nu klaar voor de symmetrieën van de getaltheorie.

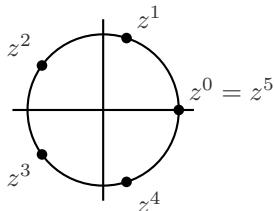
Laat $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ een veelterm zijn met alle a_i in \mathbb{Q} . Dan zegt de hoofdstelling van de algebra dat de vergelijking $f(z) = 0$ precies n oplossingen in \mathbb{C} , met multipliciteiten geteld. We schrijven Wortels(f) voor de verzameling wortels van f . Voor σ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ en z in Wortels(f) geldt dan:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(0) = \sigma(f(z)) = \sigma(z^n + \dots + a_1z + a_0) \\ &= \sigma(z^n) + \dots + \sigma(a_1z) + \sigma(a_0) \\ &= \sigma(z)^n + \dots + \sigma(a_1)\sigma(z) + \sigma(a_0) \\ &= \sigma(z)^n + \dots + a_1\sigma(z) + a_0 = f(\sigma(z)), \end{aligned} \quad (5.10)$$

dus $\sigma(z)$ is in $\text{Wortels}(f)$. De conclusie is dat iedere σ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ de elementen van $\text{Wortels}(f)$ permuteert. De *Galoisgroep van f* is dan gedefinieerd als de verzameling $\text{Gal}(f)$ van permutaties van $\text{Wortels}(f)$ gegeven door elementen van $\text{Aut}(\mathbb{C})$; omdat deze gesloten is onder samenstelling heet die verzameling dan een groep.

Deze constructie, die we te danken hebben aan Évariste Galois, rond 1830, lijkt te abstract om enig nut te hebben, maar het tegendeel is waar. Galois liet al zien dat $\text{Gal}(f)$ bepaalt of de wortels van f te verkrijgen zijn door een eindig aantal keer de operaties $+$, $-$, \cdot , $/$ en r -de worteltrekken voor willekeurige gehele $r \geq 1$ toe te passen en te beginnen met $1, a_{n-1}, \dots, a_0$ (denk aan een rekenmachine met de a_i in een aantal registers, en de knoppen $+$, $-$, \cdot , $/$ en $x^{1/r}$ (radicalen!)). Hieruit volgt bijvoorbeeld dat vergelijkingen van graad 5 of hoger niet met radicalen oplosbaar zijn, materie die aan de universiteit in het 2e of 3e jaar onderwezen wordt. Er zijn algoritmen om Galoisgroepen uit te rekenen, en sinds kort schijnt er een praktisch algoritme te zijn voor polynomen van willekeurige graad, maar de details hierover moeten nog gepubliceerd worden (Claus Fieker en Jürgen Klüners). Het gratis downloadbare programma (met alle documentatie) PARI/GP (zie [PARI]) heeft het commando `polgalois` dat deze taak uitvoert voor polynomen van graad tot en met 11.

Laten we een paar voorbeelden van Galoisgroepen bekijken. Als alle wortels van f in \mathbb{Q} liggen, dan zijn ze allemaal vast onder alle elementen van $\text{Aut}(\mathbb{C})$, en is $\text{Gal}(f)$ de triviale groep, met precies één element, de identiteit. Omgekeerd is ook waar: als $\text{Gal}(f)$ triviaal is, dan is $\text{Wortels}(f)$ bevat in \mathbb{Q} . Als f van graad 2 is en geen wortel in \mathbb{Q} heeft, dan bestaat $\text{Gal}(f)$ uit de identiteit en de verwisseling van de twee wortels. Deze verwisseling komt van de complexe conjugatie als de discriminant van f negatief is.



Figuur 3: $n = 5$

Belangrijke voorbeelden voor ons zijn de cyclotomische (cirkeldeling) polynomen. Laat $n > 1$, laat $f = x^n - 1$, en laat $z = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. Dan is de afbeelding:

$$\{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \text{Wortels}(f), \quad a \mapsto z^a \quad (5.11)$$

bijgetief, en noemen we die een *labelling* van de wortels. Hiernaast is een plaatje voor het geval $n = 5$. De algebraïsche relaties die er tussen de wortels van f zijn (het zijn allemaal machten van de wortel z) geven beperkingen op de permutaties gegeven door elementen σ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$. Voor zo'n σ geldt dat $\sigma(z^a) = \sigma(z)^a$, dus is de permutatie gegeven door σ bepaald door wat σ met z doet. Voor iedere σ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ is er een unieke k in $\{0, \dots, n-1\}$ met $\sigma(z) = z^k$. Omdat $z^n = 1$ en $z^d \neq 1$ voor alle d met $1 \leq d < n$, hebben we $\text{ggd}(k, n) = 1$. Het volgt dan uit werk van Gauss dat de Galoisgroep $\text{Gal}(x^n - 1)$ precies uit de permutaties bestaat die van de vorm zijn $a \mapsto ka \pmod n$, met $0 \leq k < n$ en $\text{ggd}(n, k) = 1$. Hierin staat $b \pmod n$ voor de rest na deling van b door n . Bijvoorbeeld geeft de

complexe conjugatie vermenigvuldiging met -1 (eigenlijk, met $n-1$, maar dat geeft dezelfde resten modulo n), want $\bar{z} = \overline{e^{2\pi i/n}} = e^{-2\pi i/n} = z^{-1}$. Conclusie: in termen van de labelling is $\text{Gal}(f)$ gegeven door vermenigvuldigingen in het getal systeem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de getallen $\{0, 1, \dots, n-1\}$ met optelling en vermenigvuldiging modulo n .

We komen nu bij een van onze twee hoofddoelen: het zo eenvoudig mogelijk beschrijven van wat 2-dimensionale Galoisrepresentaties zijn. Om die te definiëren is er nog één ingrediënt nodig: een geheel getal $n > 1$ zodat we het getalsysteem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hebben. In plaats van vermenigvuldigingen met elementen van $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zoals in $\text{Gal}(x^n-1)$ willen we nu vermenigvuldigingen met 2 bij 2 matrices.

Een 2-dimensionale Galoisrepresentatie mod n bestaat uit een polynoom

$$f = x^{n^2} + \dots + a_1x + a_0$$

van graad n^2 , met a_i in \mathbb{Q} , en een labelling van Wortels(f) met vectoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ met v_1 en v_2 in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, zodat $\text{Gal}(f)$ bestaat uit vermenigvuldigingen met matrices:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}.$$

Deze objecten spelen de hoofdrol in Andrew Wiles's bewijs van Fermat's laatste stelling (1993-1994). Sinds 40 jaar is er theorie over waar dit soort representaties vandaan komen: modulaire vormen, d.w.z., Langlands' programma. Een goede vraag is: kan men de Galoisrepresentaties waarvan het Langlands programma het bestaan garandeert ook efficiënt uitrekenen? Antwoord: het lijkt erop van wel. Een belangrijk verschil met het geval van eenheidswortels is dat bij het vermenigvuldigen van 2 bij 2 matrices de volgorde er toe doet (de vermenigvuldiging is niet commutatief) terwijl $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wel commutatief is.

6 Maar wat hebben de $r_d(n)$ nu met Galoisrepresentaties te maken?

Hoe kan het nu dat Galoisrepresentaties zoals beschreven in de vorige sectie ook maar *iets* te maken hebben met de getallen $r_d(n)$? Inderdaad, dit is diepe materie, die ik zelf niet eerder dan aan het eind van mijn 5-jarige intensieve wiskundestudie ben begonnen te leren. Ik kan er hier dan ook geen uitleg over geven, behalve dan paar feiten die het gevraagde verband geven.

We bekijken het geval $d = 12$, het kleinste even getal waarin er geen elementaire formule is voor $r_d(n)$, vanwege de term a_n , de coëfficiënt van q^n in het product $q \prod_{m \geq 1} (1 - q^{2m})^{12}$, zie (2.7). Een beroemd resultaat van Pierre Deligne, in 1968, bouwend op werk van Goro Shimura, Martin Eichler, Alexander Grothendieck en nog anderen, zegt het volgende.

Voor iedere $m > 1$ bestaat er een 2-dimensionale Galoisrepresentatie, dus een polynoom $f = x^{m^2} + \dots + f_1x + f_0$, met de coëfficiënten f_i in \mathbb{Q} , en een labelling van Wortels(f) met vectoren $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ met v_1 en v_2 in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, zodat $\text{Gal}(f)$ bestaat uit vermenigvuldigingen met matrices, en zodat voor ieder priemgetal $p \nmid m$ het getal a_p modulo m snel berekend kan worden uit f .

Het hoofdresultaat van [Ed-Co] en [Bruin] is dat de polynomen f waarvan Deligne het bestaan heeft aangetoond snel uitgerekend kunnen worden: in tijd polynomiaal in m .

Door a_p uit te rekenen modulo priemgetallen l tot een grens B krijgen we via de Chinese reststelling a_p modulo het product P van al deze priemgetallen. Dit product P is van de orde van grootte e^B . Een bovengrens voor $|a_p|$ is ook bekend: $|a_p| \leq 2p^{5/2}$ (alweer een beroemd resultaat van Deligne). Als P groter is dan $4p^{5/2}$, de lengte van het interval $[-2p^{5/2}, 2p^{5/2}]$, dan weten we a_p zelf, en niet alleen modulo P . Daaruit volgt dat het voldoende is om B van de orde van grootte $(5/2) \log p$ te nemen. Het eindresultaat is dan dat a_p uitgerekend kan worden in een tijd die hoogstens polynomiaal in $\log p$ is. Bekende formules laten zien hoe a_n uit te drukken is in de a_p waar p de priemdelers van n doorloopt. Dus, voor n gegeven met priemfactorisatie kan dan a_n uitgerekend worden in tijd polynomiaal in $\log n$.

Tot slot een opmerking over de terminologie van “elementaire formule voor $r_d(n)$ ”. Voor alle even d zijn de getallen $r_d(n)$ te berekenen in tijd polynomiaal in $\log n$ (als de priemfactorisatie van n gegeven is), met behulp van 2-dimensionale Galoisrepresentaties. De elementaire gevallen zijn precies die waarin het al kan met behulp van 1-dimensionale Galoisrepresentaties. In dat geval zijn er ook expliciete en nuttige formules, zoals we hebben gezien.

7 Een voorbeeld van Johan Bosman

Het polynoom

$$\begin{aligned}
 f = & x^{24} - 2x^{23} + 115x^{22} + 23x^{21} + 1909x^{20} + 22218x^{19} + 9223x^{18} + 121141x^{17} \\
 & + 1837654x^{16} - 800032x^{15} + 9856374x^{14} + 52362168x^{13} - 32040725x^{12} \\
 & + 279370098x^{11} + 1464085056x^{10} + 1129229689x^9 + 3299556862x^8 \\
 & + 14586202192x^7 + 29414918270x^6 + 45332850431x^5 - 6437110763x^4 \\
 & - 111429920358x^3 - 12449542097x^2 + 93960798341x - 31890957224
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

heeft Galoisgroep $\text{PGL}_2(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})$, de groep van inverteerbare 2 bij 2 matrices met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$, op scalaire veelvouden na, voor een geschikte labelling van de wortels met de 24 lijnen door de oorsprong in $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^2$.

Referenties

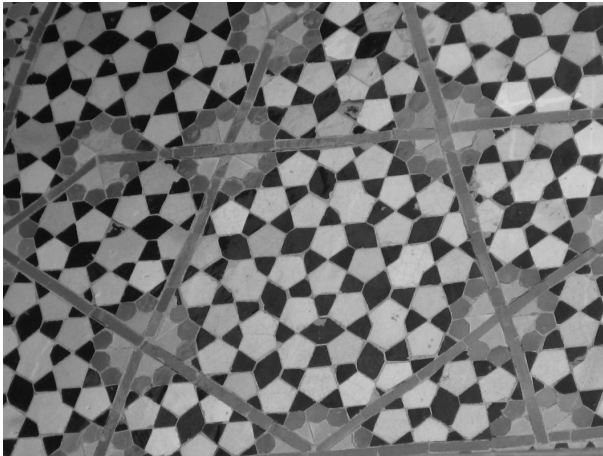
- [Bruin] Peter Bruin. *Modular curves, Arakelov theory, algorithmic applications*. Proefschrift, Leiden, September 2010. On-line beschikbaar op:
<http://hdl.handle.net/1887/15915>
- [Ed-Co] Bas Edixhoven and Jean-Marc Couveignes, editors. *Computational aspects of modular forms and Galois representations*. With contributions by Johan Bosman, Jean-Marc Couveignes, Bas Edixhoven, Robin de Jong, and Franz Merkl. Volume 176 of “Annals of Mathematics Studies”, Princeton University Press, 2011. On-line beschikbaar op:
<http://www.math.univ-toulouse.fr/~couveig/book.htm>
- [Ha-Wr] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Fifth edition. Clarendon Press, New York, 1979.
- [PARI] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, and M. Olivier. *User’s guide to PARI/GP (version 2.3.1)*. <http://pari.math.u-bordeaux.fr>.
- [Varma] Ila Varma. *Sums of Squares, Modular Forms, and Hecke Characters*. Master scriptie, Leiden, juni 2010. On-line beschikbaar op:
<http://www.math.leidenuniv.nl/nl/theses/196/>

Enkele achtergronden van de middeleeuws Islamitische geometrische ornamentiek

Jan P. Hogendijk
Universiteit Utrecht
email: J.P.Hogendijk@uu.nl

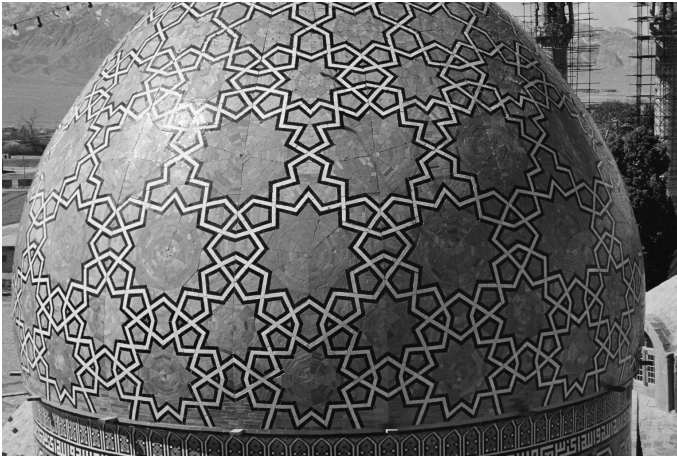
Inleiding

Overall in de Islamitische wereld zijn prachtige geometrische patronen te zien in middeleeuwse moskeeën en paleizen. Geometrische ornamenten werden al vroeg in de Islamitische traditie gebruikt. De patronen werden steeds ingewikkelder en waren afhankelijk van lokale tradities. In de Westarabische kunst (Spanje, Marokko) zijn de patronen bij voorkeur gebaseerd op regelmatige zes-hoeken en achthoeken, en ook regelmatige veelhoeken met 12, 24, 16, en 32 zijden. Veel voorbeelden zijn te vinden in het Alhambra in Granada. In Iran en aangrenzende gebieden hadden de ontwerpers een voorliefde voor de vijfhoek en tienhoek. Patronen met regelmatige zevenhoeken, negenhoeken, elfhoeken en dertienhoeken zijn zeldzaam maar komen wel voor. De Islamitische geometrische ornamentiek bereikte een hoogtepunt in de stad Isfahan in Iran. Driedimensionale versies van geometrische patronen zijn te vinden op de bui-



Figuur 1: Detail van mozaïek in de Darb-e Imam, Isfahan. Foto J.P. Hogendijk.

tenkant van sommige koepels. Het bekendste voorbeeld is de koepel op het graf van de soefi-heilige Shah Nematollah Vali (1330-1431) in Mahan, Iran.



Figuur 2: Graftombe van Shah Nematollah Vali in Mahan, Iran. Foto J.P. Hogendijk.

Een andere driedimensionale geometrische kunstvorm is de muqarnas, oorspronkelijk een soort stalactietengewelf. In het begin was de functie van muqarnas om in een vierkant gebouw met een cirkelvormige koepel, een mooie overgang van de verticale muren naar de ronde koepel te maken. De muqarnas ging al gauw een eigen leven leiden, en soms is de hele binnenkant van de koepel met een stalactietengewelf overdekt. Ook hiervan zijn prachtige voorbeelden in het Alhambra te vinden. In dit artikel gaan we niet verder op muqarnas in (om een indruk te krijgen zie [Hogendijk 2004], en op het internet staan prachtige platen).

De Islamitische geometrische kunst heeft in de moderne tijd velen geïnspireerd. M.C. Escher (1898-1972) maakte een studie van de kunst in het Alhambra en ontwikkelde op basis daarvan een eigen manier om het vlak te vullen met figuren. Islamitische geometrische ornamenten laten zich uitstekend gebruiken om wiskundige begrippen zoals “symmetrie” en ook “aperiodieke betegelingen” uit te leggen en leuke opgaven voor leerlingen te maken. De Texelse wiskundeleraar Goossen Karssenbergh is bezig om in het kader van een NWO-project leraar in onderzoek lesmateriaal hierover te maken voor diverse niveaus in het middelbaar onderwijs.

In dit artikel gaan we in op enkele achtergronden van de middeleeuws Islamitische kunst. We vragen ons af hoe de middeleeuws Islamitische kunstenaars hun geometrische kunst ontwierpen en uitvoerden. Maakten zij daarbij gebruik van symmetrieën of andere methoden, of deden ze alles op het gevoel? Waren ze wiskundig geschoold, en op welke manier? Welke wiskundige begrippen kenden ze? Had hun kunst een bepaalde diepere bedoeling of betekenis?

Wij zullen deze vragen onderzoeken op grond van bewaarde middeleeuwse bronnen. Die zijn er niet zoveel en daarom zullen we alleen een paar aanwijzingen vinden en geen definitieve antwoorden. Dat maakt deze kunst er alleen maar mysterieuzer op.

Welke wiskunde gebruikten de ontwerpers?

Sommige moderne Islamitische geleerden en handwerkers zeggen, dat de Islamitische geometrische kunst niet zozeer met bewuste methoden te maken had. De kunstenaars zouden door hun gevoel zijn geleid en God (of hun geloof in God) zou er voor gezorgd hebben dat de kunstwerken perfect uitkwamen. Er zou dus geen wiskunde en geen methode nodig zijn.

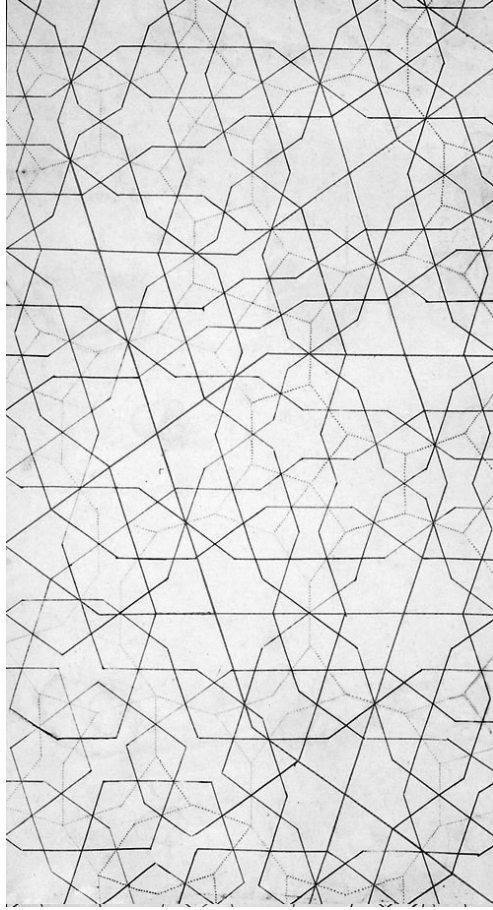
Deze opvatting komt niet overeen met de ervaring van de schrijver van dit artikel. Wie wel eens geprobeerd heeft, een ingewikkeld middeleeuws Islamitisch patroon precies na te tekenen, weet dat dit een oefening in nederigheid is. En daarna is het weer een nieuwe opgave om zo'n patroon zo te construeren dat het precies in een gegeven ruimte past.

Laten we eens kijken naar wat de middeleeuwse Islamitische bronnen zeggen over het construeren van geometrische kunst. Die bronnen zijn er in twee categorieën.

De eerste categorie bestaat uit werktekeningen zonder tekst. Het bekendste voorbeeld is een boekrol die in de bibliotheek van het Topkapıpaleis in Istanbul wordt bewaard en die daarom de Topkapirol (Engels: Topkapı scroll) wordt genoemd. Hij is gepubliceerd in een facsimile editie (zie literatuurlijst) en ook gedeeltelijk op het internet beschikbaar. De Topkapirol is 29,5 m lang en 33 cm breed en bestaat uit stukken papier die aan elkaar zijn gelijmd. Op de rol staan tekeningen van tweedimensionale mozaïekpatronen en ook horizontale projecties van (driedimensionale) muqarnas. De rol is vermoedelijk in de zestiende eeuw in de stad Tabriz in noordwest Iran vervaardigd. Er zijn maar weinig andere boekrollen en werktekeningen zoals de Topkapirol bekend. Mogelijk bestaan er veel meer van zulke tekeningen die op zolders van moskeeën of in kelders van bibliotheken op ontdekking liggen te wachten.

In de Topkapirol staan alleen figuren, zonder instructies over hoe deze moeten worden getekend. Figuur 3 is een interessante tekening van een tweedimensionaal patroon uit de Topkapirol. De tekening bestaat uit zwarte en rode lijnen en stippellijnen. De zwarte en rode lijnen zijn niet te onderscheiden op Figuur 3, maar wel op de kleurenfoto in het artikel [11] dat via het internet toegankelijk is, zie de literatuurlijst. Het patroon waar het uiteindelijk om zou gaan zijn de zwarte lijnen. De stippellijnen zouden hulplijnen geweest kunnen zijn om het patroon te kunnen tekenen.

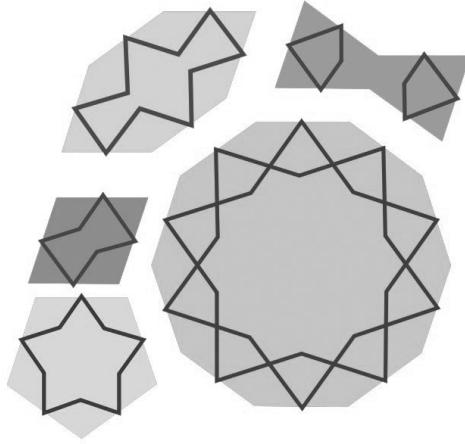
De stippellijnen in Figuur 3 vormen vijf verschillende figuren die in de moderne literatuur bekend staan als *giriḥ* tegels. Deze tegels zijn apart getekend in Figuur 4. De zijden van deze vijf tegels zijn even lang, en de patronen waar het uiteindelijk om gaat zijn opgebouwd uit de vette lijnen in Figuur 4. Deze vette lijnen gaan door de middelpunten van de zijden van de tegels. Door de



Figuur 3: Een patroon uit de Topkapı Scroll [9, p. 300].

vijf *girih*-tegels op de juiste manier aan elkaar te leggen vormen de vette lijnen mooie patronen. Dat is in Figuur 3 gebeurd.

Het blijkt dat met deze *girih*-tegels aperiodieke betegelingen kunnen worden gelegd [11], [3]. Deze ontdekking is de afgelopen twintig jaar diverse keren gedaan en heeft geleid tot nieuwe belangstelling voor Islamitische geometrische kunst, die nu ook gebruikt kan worden om aperiodieke betegelingen uit te leggen [14]. Sommige moderne auteurs beweren dat de middeleeuwse ontwerpers vanaf de twaalfde eeuw met deze *girih*-tegels werkten en ook met aperiodiciteit bekend geweest moeten zijn. Een voorbeeld hiervan zou te vinden zijn in het mozaiek in de Darb-e Imam in Figuur 1. Echter, de patronen op de Darb-e Imam beslaan samen een zo klein gedeelte van het vlak dat niet kan worden uitgemaakt of de ontwerper een aperiodiek patroon wilde maken. En er blijkt nergens uit middeleeuwse Islamitische teksten dat men bekend was met het begrip



Figuur 4: De vijf girih-tegels uit Figuur 3.

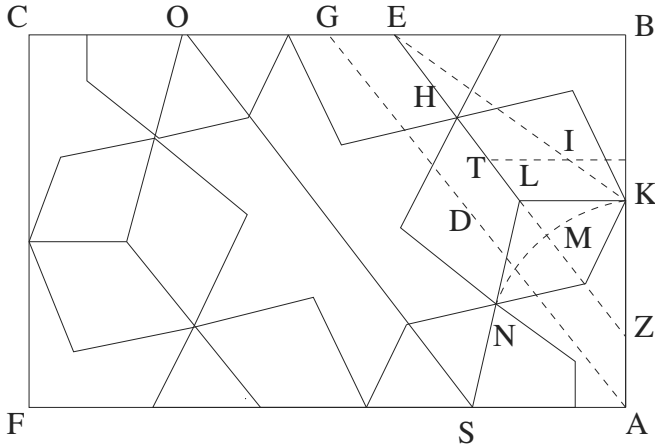
aperiodiciteit; ook niet met het begrip periodiciteit trouwens. We kunnen alleen het volgende zeggen. De ontwerpers in Iran hebben op een gegeven moment ontdekt dat wanneer zij een groot patroon met vijfhoeken en tienhoeken hadden ontworpen, de elementen van dit grote patroon daarna met een soortgelijk patroon op kleinere schaal kunnen worden gevuld. Dit principe is overal in Isfahan te zien.

We keren terug naar de bronnen. De tweede categorie bestaat uit werktekeningen met tekst waarin staat hoe de tekening moet worden vervaardigd. Het enige bekende voorbeeld is een Perzisch manuscript van 40 bladzijden, dat nu in Parijs wordt bewaard in de Bibliothèque Nationale. Hieronder een voorbeeld van een tekening (Figuur 5) met bijbehorende tekst uit het manuscript. De tekst is recept-achtig en geeft geen verdere uitleg van de bijbehorende wiskunde, bijvoorbeeld de constructie van een hoek van $\frac{3}{7} \cdot 90^\circ$.

“Maak hoek BAG drie zevende van een rechte hoek. Deel lijn AG doormidden in punt D . Pas BE af gelijk aan AD . Markeer lijn EZ evenwijdig aan AG . Trek (een willekeurige) lijn TI evenwijdig aan BE , deel TE doormidden in punt H , en maak TI gelijk aan TH . Verleng EI tot hij lijn AB doorsnijdt in punt K . Markeer KL evenwijdig aan BE . Met middelpunt Z cirkel boog KMN zodat het stuk KM gelijk is aan MN . Op lijn AF neem punt S (hoe wordt niet gezegd) en dat is het middelpunt van een zevenhoek. Voltooi de constructie als God de Verhevene het wil.

En anders construeer hoek ELN gelijk aan hoek ELK en met de lijn LN vind het middelpunt S .

En anders snijd EO af gelijk aan EL , zodat punt O het middelpunt van een zevenhoek is. En maak lijn OS evenwijdig aan GA en gelijk aan AG (in het handschrift staat AD). En dan is punt S het middelpunt van een tweede zevenhoek. En anders laat GO gelijk zijn aan AS . God weet het het beste.” Dit

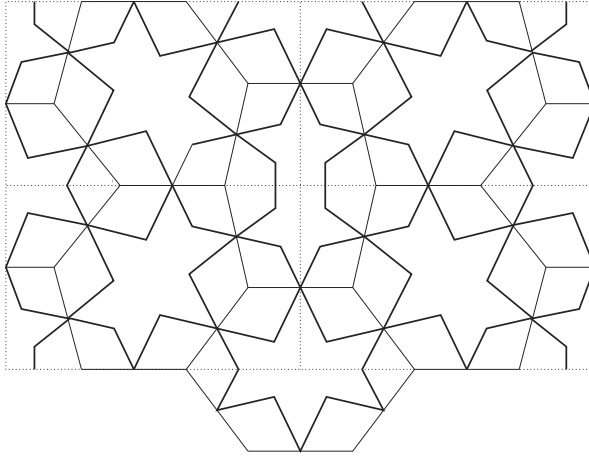


Figuur 5: Moderne weergave van de tekening uit het Perzische handschrift Parijs, B.N. Ancien Fonds 169, f. 192a. Onderbroken lijnen zijn ook onderbroken in het handschrift.

voorbeeld is interessant omdat de tekening hoort bij een patroon dat ook op een gebouw voorkomt. Ik heb het in 2004 gevonden in de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee in Isfahan. We kunnen daaraan zien hoe de tekening werd toegepast. Het patroon in de rechthoek werd als een soort ‘fundamenteaalgebied’ beschouwd. Kopieën van het fundamenteaalgebied en het spiegelbeeld daarvan werden naast elkaar gelegd en het resultaat was dan een patroon als in Figuur 6. Het patroon is interessant omdat er regelmatige zevenhoeken in voorkomen. Zie voor een kleurenfoto [7], via het internet toegankelijk. De vette lijnen in Figuur 6 komen voor in het patroon in de Vrijdagmoskee, maar de dunne lijnen en stippellijnen niet. In het handschrift wordt nergens uitgelegd hoe de kopieën van het fundamenteaalgebied en de gespiegelde daarvan aan elkaar moeten worden gelegd. Vermoedelijk hoorde bij de tekst in het handschrift een uitgebreide mondelinge uitleg.

De dunne lijnen in Figuur 6 kunnen als twee nieuwe zeshoekige *giri*h-tegels worden beschouwd die bij het ontwerp gebruikt zouden kunnen zijn. Als we $\alpha = \frac{180}{7}$ noteren dan zijn de hoeken in deze *giri*h-tegels $4\alpha, 5\alpha, 5\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 5\alpha$ en $4\alpha, 4\alpha, 6\alpha, 4\alpha, 4\alpha, 6\alpha$. Het patroon heeft een leuke symmetrie doordat de eerste *giri*h-tegel in twee schuine en een liggende positie voorkomt. Ook over deze symmetrie staat niets in het handschrift. In het mozaïek in de Vrijdagmoskee zijn deze dunne lijnen niet te zien, en het is duidelijk dat ze niet in het productieproces van het mozaïek voorkwamen (zie de kleurenfoto in [7]). Bij de Darb-i Imam (Figuur 1) lijkt uit de foto te volgen dat de vijf *giri*h-tegels ook niet in het productieproces werden gebruikt [11].

We komen straks terug op de vraag welke wiskunde de ontwerpers en de makers gebruikten. Maar we kunnen nu in elk geval concluderen dat de mid-



Figuur 6: Het patroon uit het Parijse handschrift aan elkaar gelegd.

deleeuws Islamitische kunstenaars in het algemeen wel methodes gebruikten. Het is niet uitgesloten dat enkele genieën alles op het gevoel tekenden maar voor de gewone maker van geometrische decoraties was dit een brug te ver.

Waren de ontwerpers wiskundig geschoold?

We vragen ons eerst af hoe de geometrische ornamentiek zich verhoudt tot wat bekend is over middeleeuws Islamitische wiskunde en wiskundigen. Waren de ontwerpers van de patronen zelf wiskundigen? Hadden zij op een of andere manier wiskunde bestudeerd en welke wiskunde was dat? Wat was eigenlijk de positie van wiskundigen in de middeleeuws Islamitische wereld?

Om met de laatste vraag te beginnen: in die tijd werd weinig wiskunde gebruikt in de landmeetkunde en voor administratieve doeleinden. Wat kennis van het rekenen en een paar meetkundige vuistregels waren voldoende. Er werd wel aan wiskunde van hoger niveau gedaan, namelijk algebra (kwadratische en kubische vergelijkingen), een beetje getallenleer, veel meetkunde in de stijl van de Grieken, en veel trigonometrie. Deze meetkunde en trigonometrie werd gebruikt door sterrenkundigen, die hun levensonderhoud verdienden als astroloog of als privéleraar. Er bestond zelfs een soort standaard leerplan meetkunde voor gebruik in de sterrenkunde, dat doorlopen werd onder leiding van een privéleraar. Men begon met Arabische vertalingen van Griekse wiskundige werken. Eerst de *Elementen* en de *Data* van Euclides, en dan Archimedes *Over de Bol en de Cylinder* en de *Cirkelmeting*. Wanneer de student deze boeken had doorgewerkt had hij (of in een enkel geval zij) in elk geval een goed idee van wat een meetkundig bewijs is. Daarna stonden een paar boeken over meetkunde op de bol op het programma, zoals de *Sphaerica* van Theodosius en de *Sphaerica* van Menelaus. Dit laatste boek ging over boldriehoeksmetkunde en

gebruikte de verouderde trigonometrische functie "kooorde". Daarom konden in plaats hiervan ook modernere Arabische boeken worden gelezen die gebruik maakten van sinus en cosinus. Vervolgens kon men beginnen aan de eigenlijke sterrenkunde. In het ideale geval las de student nu de hele *Almagest* van Ptolemaeus. Dit dikke boek was zwaar verteerbaar en ook verouderd en het was teveel voor de gemiddelde student. Gelukkig waren er ook veel Arabische boeken over sterrenkunde. In elk geval leerde iedere would-be sterrenkundige of astroloog hoe om te gaan met minstens één Arabisch sterrenkundig handboek met circa 100 bladzijden tabellen en een astrolabium. Hiermee kon de sterrenkundige de posities van hemellichamen op elk moment berekenen. Wie astroloog wilde worden moest vervolgens nog een hele literatuur doorwerken over astrologische interpretaties.

Een beroep "wiskundige" bestond niet in de middeleeuws Islamitische wereld. De meeste wiskundig geschoolden werkten als sterrenkundige, astroloog, of privéleraar, en sommigen hielden zich in leven met het kopiëren en verkopen van handschriften.

We keren nu terug naar de geometrische kunst. De ornamenten zijn duidelijk van een hoger wiskundig gehalte dan wat nodig is voor landmeten en administratie. De vraag die nu rijst is of de ontwerpers en makers van zulke ornamenten dezelfde wiskundigen waren die ook aan sterrenkunde deden, of dat het om een heel andere groep gaat. We krijgen enig inzicht in deze vraag dankzij de Iraanse meetkundige en sterrenkundige Abu'l-Wafa al-Buzjani (940-998). Deze man kwam uit de stad Buzjan (nu verlaten) ten oosten van Meshed, nabij de tegenwoordige grens met Afghanistan en hij werkte, zoals vele geleerden uit zijn tijd, in Irak. Hij schreef een speciaal boek "Over de meetkundige constructies die de handwerkslieden en bouwers nodig hebben". Volgens hem waren er twee groepen: de meetkundigen die wel theoretische bewijzen konden geven maar weinig ervaring hadden in praktisch tekenen, en de makers van ornamenten die praktisch konden tekenen maar geen benul hadden van bewijzen, en die daardoor niet konden onderscheiden tussen exacte en benaderende constructies [10]. Abu'l-Wafa had geen hoge pet op van de meetkundekennis van deze laatste groep mensen en probeerde hen door middel van zijn eigen boekwerk op te voeden tot het gebruik van exacte wiskundige constructies van vijfhoeken en andere figuren. Hij gaf ook een paar constructies met een passer met vaste opening. Hiermee vermeed hij het steeds opnieuw instellen van een passer, waardoor fouten en onnauwkeurigheden konden ontstaan. Abu'l-Wafa gaf geen bewijzen in zijn boek omdat die toch niet aan zijn doelgroep besteed waren.

Het Perzische handschrift dat hierboven is genoemd (Figuur 5 en 6) is volgens de Turkse historicus Özdural [10] ook het werk van iemand die geschoold was in de Griekse wiskunde. Omdat in het handschrift geen onderscheid wordt gemaakt tussen exacte en benaderende constructies, denk ik dat Özdural ongelijk heeft en dat het handschrift eerder het product is van een maker van ornamenten die geen uitgebreide kennis had van de *Elementen* van Euclides. Het enige dat aan Euclides herinnert is het feit dat de auteur punten in de

Figuur aangeeft met letters $A, B, G \dots$.

Uit de neerbuigende houding van Abu'l-Wafa kunnen we niet de conclusie trekken dat alle ontwerpers van geometrische patronen een belabberde kennis van klassiek Griekse meetkunde hadden. Sommige patronen zouden kunnen zijn ontworpen door auteurs die het leerplan voor sterrenkundige hadden doorlopen. In een klein tekstje over algebra construeert de wis- en sterrenkundige Omar Khayyām (1048-1131) een rechthoekige driehoek waarbij een van de rechthoekszijden plus de hoogtelijn gelijk is aan de basis [5]. Dit probleem loopt algebraïsch uit op een derdegraads vergelijking en Khayyām haalt er een kegelsnede bij om het te construeren. Hetzelfde probleem wordt ook in het Perzische manuscript genoemd, waar wordt vermeld dat een andere wis- en sterrenkundige Ibn al-Haytham (965-ca. 1040) het ook met een kegelsnede had opgelost. Helaas is het patroon dat uit deze driehoek ontstaat niet erg mooi, en het is geen wonder dat het nooit aangetroffen is op een echt gebouw. Toch geven deze voorbeelden aan dat twee van de grootste Islamitische wiskundigen zich met geometrische ornamentiek bezig hielden. Het is goed mogelijk is dat Khayyām de ontwerper is van het patroon met de zevenhoeken van Figuur 6 hierboven. Hij was in Isfahan toen de noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee rond 1080 gebouwd werd en hij was bevriend met de opdrachtgever.

In de meeste Arabische teksten over Euclidische meetkunde wordt niets over geometrische ornamenten gezegd, Daarom zijn Khayyām en Ibn al-Haytham vermoedelijk meer uitzondering geweest dan regel. Waarschijnlijk zijn er, zoals Abu'l-Wafa zegt, toch twee verschillende tradities geweest: van geleerde wis- en sterrenkundigen, en van makers en ontwerpers van patronen. De patronen kunnen mondeling van vader op zoon zijn doorgegeven in families van handwerkers, en misschien werden de constructiemethoden geheim gehouden uit concurrentieoverwegingen. Ook in de moderne tijd bestaan zulke handwerkers nog, al worden het er wel steeds minder. In het moderne Iran worden de ontwerpen met de computer gemaakt.

Dit alles maakt het beantwoorden van de vraag “hoe dachten de kunstenaars” er niet eenvoudiger op. Bij Euclides en in de rest van de Griekse wiskunde wordt nergens over symmetrieën gesproken. Dit had er misschien mee te maken dat de Grieken wiskunde als een eeuwige wetenschap beschouwden waarin veranderingen en bewegingen niet waren toegestaan. Ook het begrip “afbeelding” komt in de Griekse en Islamitische teksten niet voor. Wel bestaat er het idee van congruente driehoeken en gelijkvormige driehoeken. Maar de ontwerpers waren niet geschoold in de *Elementen* van Euclides. Zij hadden een ander soort wiskundekennis die grotendeels niet op schrift is vastgelegd. Zulke schriftloze tradities bestaan ook in andere culturen en worden soms enigszins denigrerend “ethnomathematics” genoemd. In elk geval krijgen we uit andere stukken van het Perzische handschrift het idee dat de auteur goed kon werken met congruente figuren en het opknippen van figuren. Ook ben ik - anders dan Abu'l-Wafa - vol bewondering voor benaderingsconstructies uit het Perzische handschrift [5]. Maar voor de rest is de vraag wat voor wiskundige begrippen ze precies gebruikten, (nog) niet goed te beantwoorden wegens gebrek aan

authentieke bronnen. Jammer maar het is niet anders.

Sommige onderzoekers hebben zich afgevraagd of de middeleeuws Islamitische kunstenaars beïnvloed kunnen zijn door de wiskunde van India. Dit is in principe best mogelijk omdat er op grote schaal kennis over wiskunde en sterrenkunde vanuit India in de Islamitische cultuur is terechtgekomen. Omstreeks 775 werden zelfs delegaties Indiase wetenschappers aan het hof van de kalief in Bagdad uitgenodigd. Tussen 1970 en 1980 meenden moderne onderzoekers een verband te hebben gevonden tussen Islamitische geometrische kunst en de oude Vedische wiskunde. Deze opvatting werd breed geëtaleerd in een tentoonstelling *Islamathematica* die op diverse plaatsen is gehouden, onder andere in Rotterdam in het Museum Boymans van Beuningen in 1978 [12]. Het verband dat de onderzoekers hadden gelegd was helaas niet met authentieke Vedische wiskunde uit de periode rond 500 voor Christus, maar met het rekensysteem dat zogenaamd was ‘herontdekt’ uit de Veda’s door Goeroe Sri Bharati Krsna Tirthaji (1884-1960). Goeroe Tirthaji was een oplichter en een echt verband tussen Islamitische geometrische kunst en oude Indiase wiskunde is (nog) niet gevonden.

Had de Islamitische geometrische ornamentiek een diepere betekenis?

De Islamitische geometrische ornamentiek was voor een groot deel sacrale kunst. Het geometrische karakter van deze sacrale kunst had te maken met het verbod op het afbeelden van levende wezens in de Hadith (overlevering) over het leven van de Profeet Mohammad. Men hield zich lang niet overal in de middeleeuws Islamitische samenleving aan dit verbod, maar wel in de moskee en in andere religieuze gebouwen zoals graftomben.

De handwerkers die de geometrische kunst vervaardigden behoren of behoorden soms tot mystieke Islamitische ordes. Zou deze kunst ook een mystieke of religieuze betekenis kunnen hebben? We geven twee voorbeelden van zo’n opvatting.

De bekende Shiïtische filosoof Seyyed Hossein Nasr zegt in zijn boek *Islamic art and Spirituality* het volgende over Islamitische kunst:

“this art makes manifest, in the physical order directly perceivable by the senses, the archetypal realities and acts therefore as a ladder for the journey of the soul from the visible and the audible to the Invisible which is also Silence transcending all sound” [8, p. 6].

Moderne lezers fronsen misschien hun wenkbrauwen bij deze opvattingen. Maar dit is hetgeen over deze kwestie gezegd wordt door een auteur met een briljante academische reputatie (zie de Wikipedia-pagina van Seyyed Hussein Nasr), wiens boeken bij gerenommeerde uitgeverijen verschijnen. Dit geldt ook voor ons tweede voorbeeld, de auteur Keith Critchlow en zijn boek *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*, een standaardwerk over Islamitische geometrische patronen. Critchlow legt onder andere een verband met magische vierkanten [2, pp. 42-56]. Een magisch vierkant van orde n is een

vierkant waarin de getallen 1 tot en met n^2 opgesteld worden in n kolommen en rijen zodat de som van de getallen in elke kolom en rij en in de beide diagonalen gelijk is aan een vast getal $M = \frac{n}{2}(n^2 + 1)$. Critchlow presenteert een rij magische vierkanten van orde 3 tot en met 9 die in de middeleeuwen in de Islamitische wereld en Europa verband werden gebracht met Saturnus, Jupiter, Mars, Zon, Venus, Mercurius en de Maan. Hij beschouwt elk vierkant als het archetype van het bijbehorende hemellichaam. De getallen in elk vierkant kunnen op allerlei manieren met elkaar vergeleken worden. Zo leidt hij uit elk magisch vierkant een aantal patronen af die volgens hem dan met deze hemellichamen te maken hebben. In de inleiding zegt hij over de betekenis van dit alles: “Islam’s concentration on geometric patterns draws attention away from the representational world . . . to one of pure forms, giving insight into the workings of the inner self and their reflection in the universe. Whereas the experienced world . . . is of necessity in three dimensions, the paradisiac world, or world of motivating intelligences, exists two-dimensionally only, the principle being that as archetypes are released from the limitations of existentiality, so also is their confinement within dimensions . . .” [2, p. 8].

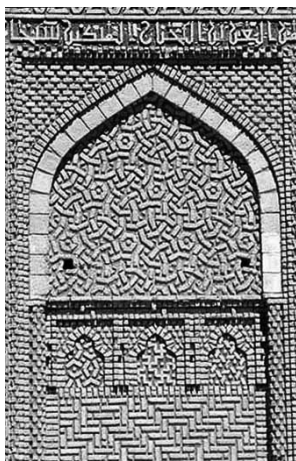
In het voorwoord van dit boek prijst Seyyed Hossein Nasr het boek van Critchlow aan als “a means of awakening of many people to dimensions of both art and science long forgotten but now sought by those who have become aware of the shortcomings of a partial knowledge of things which for some time has been parading as a totalitarian and all-pervading science.” [2, p. 6] Uit de andere boeken van Nasr blijkt dat hij eigenlijk weer terug wil naar het geocentrische Ptolemaïsche wereldbeeld uit de tijd van de middeleeuwse Islam.

Het wordt misschien eentonig, maar de opvatting van Critchlow over magische vierkanten wordt niet gesteund door de middeleeuwse bronnen. Magische vierkanten werden uitgebreid onderzocht door de wiskundigen in de middeleeuws Islamitische traditie. Een grote hoeveelheid teksten over dit thema is gepubliceerd door Jacques Sesiano [13]. Een verband tussen magische vierkanten en geometrische ornamentiek wordt door de middeleeuwse auteurs nergens genoemd.

Een andere, naar mijn idee meer serieus te nemen opvatting, is ontwikkeld door Carol Bier. Deze Amerikaanse onderzoekster is gespecialiseerd in de geschiedenis van textiel en zij heeft de Islamitische geometrische ornamentiek in verband gebracht met patronen die (als het ware automatisch) ontstaan bij het knopen van tapijten en het weven van stoffen. Haar idee over de betekenis is dat de geometrische ornamenten vaak te vinden zijn op religieuze bouwwerken waarop ook Koranverzen staan afgebeeld. Als de ornamenten een betekenis hebben, zouden de Koranverzen hiervoor een sleutel kunnen zijn. Zij vindt hiervan een voorbeeld in twee 11e-eeuwse graftorens in Kharragan, halverwege tussen Qazwin en Hamadan in noordwest Iran [1]. De torens in Kharragan zijn in 2002 beschadigd door een aardbeving. Voor 2002 waren het achthoekige gebouwen van 13 meter hoog die bedekt waren met een enorme hoeveelheid decoratieve patronen in baksteen. Rond elk van beide gebouwen liep boven de patronen een band waarin de volgende Koranverzen in steen waren afgebeeld

(uit soera 59, verzen 21 tot 24):

“Als Wij deze Koran tot een berg hadden neergezonden, dan had jij hem zich zien verootmoedigen en uit vrees voor God zien barsten. Dit zijn de vergelijkingen (voorbeelden, patronen) die Wij voor de mensen maken; misschien zullen zij nadenken. Hij is God; er is geen god dan Hij, de kenner van het verborgene en het waarneembare, de erbarmer, de barmhartige. Hij is God; er is geen god dan Hij, de koning, de allerheiligste, de instandhouder, de veiligheidgever, de bewaker, de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven als Hij is boven wat zij aan Hem als metgezellen toevoegen. Hij is God, de schepper, de maker, de vormgever. Hem komen de mooiste namen toe. Hem prijst wat er in de hemelen is en wat er op de aarde is en Hij is de machtige, de wijze.” Carol Bier stelt dat de bouwers van deze torens het Ara-



Figuur 7: Een van de acht kanten van een van de torens, met boven de patronen de woorden uit de Koran “. . . de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven . . .”

bische woord *amthāl*, vergelijkingen, letterlijk geïnterpreteerd kunnen hebben als patronen. In de middeleeuwen was volgens Bier de “wereld van patronen” in de Perzische mystiek een wereld tussen de zintuigelijk waarneembare wereld en het Goddelijke. De verzen hierna gaan over de “mooiste namen” van God, ook een belangrijk thema in de Islamitische mystiek. Dit alles zou kunnen betekenen dat de bedoeling van decoratieve patronen was om de aandacht van de toeschouwer te verleggen van de zichtbare driedimensionale wereld naar een hogere wereld. Ditzelfde is ook het doel van sommige rituelen in Islamitische mystieke ordes.

Aan elke lezer of lezeres die dit onderwerp verder wil exploreren zou ik aanraden om een reis naar Iran te maken. Dit is de beste manier om zelf het hypnotiserende effect van de geometrische ornamenten te ervaren. Iedereen die het interieur van de Lotfollah moskee in Isfahan op zich heeft laten inwerken,

begrijpt hoe men op het idee kan komen om Islamitische geometrische patronen in verband te brengen met een hogere wereld.

Literatuur

Referenties

- [1] Carol Bier, Art and Mithāl: Reading Geometry as Visual Commentary, *Iranian Studies* 41 (2008), 491-509.
- [2] Keith Critchlow, *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*. Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames and Hudson, 1976, vele herdrukken.
- [3] Peter R. Cromwell, The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament, *Mathematical Intelligencer* 31 no. 1 (2009), 36-56.
- [4] www.jphogendijk.nl/publ.html
- [5] J.P. Hogendijk, Een workshop over Iraanse mozaïeken, *Nieuwe Wiskrant* 16 (1996) no. 2, 38-42, internet: zie [4].
- [6] J.P. Hogendijk, Wiskunde en Islamitische kunst: werk in uitvoering: *Euclides* 79 (2004), 135-137, internet: zie [4].
- [7] J.P. Hogendijk, Ancient and modern secrets of Isfahan. *Nieuw Archief voor Wiskunde* fifth series, 9 (juni 2008), 121, internet: zie [4].
- [8] Seyyed Hussein Nasr, *Islamic Art and Spirituality*, New York: State University Press, 1987.
- [9] Gülru Necipoğlu, *The Topkapı Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture*. Santa Monica, Ca., Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995.
- [10] Alpay Özdural, Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World, *Historia Mathematica* 27 (2000), 171-201.
- [11] Sebastian R. Prange, The tiles of infinity, *Saudi Aramco World* 60, September/October 2009, 24-31, internet: <http://www.saudiaramcoworld.com/issue/200905/the.tiles.of.infinity.htm>
- [12] Fred Ros e.a., *Islamathematica*, Rotterdam: Museum voor land- en volkenkunde, 1973.
- [13] Jacques Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays Islamiques*. Lausanne 2004.

- [14] R. Tennant, Medieval Islamic Architecture, Quasicrystals and Penrose and Girih Tiles: Questions from the Classroom, *Symmetry, Culture and Science: Issue on Symmetry and Islamic Art*, 2009, pp. 1-8,
internet: <http://home.earthlink.net/~mayathelma/>

Symmetrie in Perspectief

Martin Kindt

Universiteit Utrecht

e-mail: M.Kindt@uu.nl

1 Drie keer instappen

Meetkunde is zo rijk geschakeerd dat het moeilijk kiezen is wat je daarvan op school wilt onderwijzen. Het is daarom misschien niet zo vreemd dat in de afgelopen zestig jaar het meetkundeprogramma voor de bovenbouw van het vwo regelmatig ingrijpend is gewijzigd. Zo passeerden achtereenvolgens Beschrijvende meetkunde, Stereometrie, Analytische (vlakke) meetkunde, Vectormeetkunde (vlak en ruimte), Ruimte-meetkunde en Vlakke (afstands)meetkunde de revue. De Projectieve meetkunde, die sinds Felix Klein in 1872 het Erlanger Programm ontvouwde, de ‘moeder van alle meetkenden’ genoemd zou kunnen worden, is weliswaar een poosje keuzeonderwerp bij wiskunde II geweest, maar heeft zich nooit kunnen vestigen in het reguliere onderwijs (wel figureert het vak op de ‘vrije school’). En dat er twee Niet-euclidische meetkenden bestaan, blijft voor de leerling verborgen, tenzij hij of zij de mooie ‘zebra’ over dit onderwerp wil doorwerken. En dan is er ook nog de Affiene meetkunde die evenals de Projectieve meetkunde zijn oorsprong vindt in het projecteren van ruimtelijke objecten op een plat vlak. In dit verhaal richt ik me op de laatste twee genoemde typen meetkunde. Voordat ik de lezer daarvan wil laten proeven, wil ik hem eerst laten instappen via een drietal ‘realistische sommen’ die ontleend zijn aan vroeger ontwikkelwerk op het Freudenthal Instituut.

[1] *De zon beschijnt een massieve kubus en geeft daarvan een veelhoekige schaduw op een plat vlak, zoals te zien op de foto. Kan zo’n schaduw een vijfhoek zijn?*



[2] *Drie verticale paaltjes van twee aan twee ongelijke lengte staan op een vlak stukje grond en niet op één lijn. Langs de toppen van de paaltjes worden touwen gespannen die met pennen in de grond worden bevestigd. Verklaar waarom de drie pennen op één lijn moeten liggen. Hoe verandert de ligging van die lijn als van alle paaltjes een even groot stuk wordt afgezaagd?*

[3] De bogen van de bekende Golden Gate Bridge in San Francisco zijn parabolen.

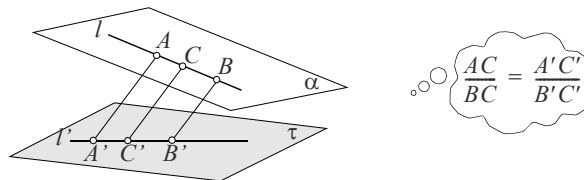


Hoe kan in de foto de symmetrie-as van zo'n parabool worden 'geconstrueerd'?
Is zo'n boog op de foto zelf ook parabolisch?

2 Affiene eigenschappen

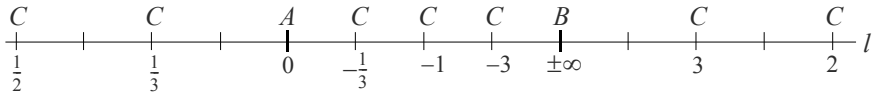
Bij de oplossing van opgave [1] speelt 'parallelprojectie' de hoofdrol. Bekeken door een mathematische (zonne)bril zijn de projecterende stralen op te vatten als parallelle rechten. Bij zo'n projectie worden segmenten van eenzelfde lijn verhoudingstrouw op lijnsegmenten afgebeeld. Dat betekent dat de projectie van het midden van een lijnstuk het midden van het beeldlijnstuk is, zodat de projectie van een *puntsymmetrisch* veelvlak (zoals een kubus) een puntsymmetrische veelhoek (noodzakelijk met een *even* aantal hoekpunten!) is. Daarom is een vijfhoek niet mogelijk.

Eigenschappen (zoals het puntsymmetrisch zijn van een figuur) die behouden blijven bij parallelprojectie worden *affien* genoemd. Ik beperk me nu tot figuren in een vlak α (niet parallel met de projectierichting) die via parallelprojectie worden afgebeeld op een tafereel τ . De vlakken α en τ liggen daarbij in de gewone euclidische ruimte. Om te beginnen is het duidelijk dat het *collineair* zijn van een serie punten A, B, C, \dots een affiene eigenschap is. De projecterende stralen van punten van een lijn l liggen in één vlak, het zogeheten *projecterende vlak* van l . De projecties van de punten van l liggen op de snijlijn l' van dit vlak met τ . Die lijn l' is dan de projectie van de lijn l .



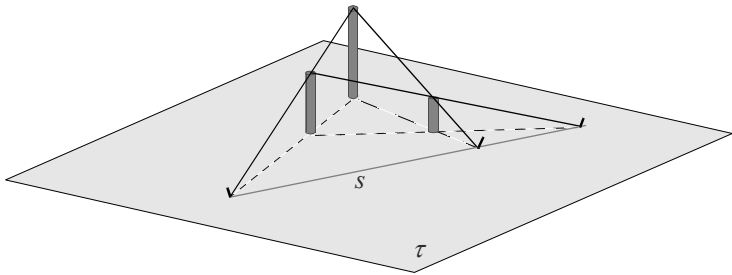
Uit een bekende stelling van de euclidische meetkunde volgt direct dat de verhouding van de lijnsegmenten AC en BC gelijk is aan de verhouding van $A'C'$ en $B'C'$. Voor het vervolg is het handig om af te spreken dat de verhouding van de segmenten AC en BC *negatief* gerekend wordt als C tussen A en B ligt en *positief* als C op een der verlengden van het lijnstuk AB ligt; in het eerste geval zegt men dat C het lijnsegment *intern* verdeelt, in het tweede geval spreekt men van een *externe* verdeling.

De ‘gerichte verhouding’ $AC : BC$ wordt vaak genoteerd als (ABC) . Een belangrijk voordeel van het opereren met gerichte verhoudingen is dat bij variatie van het punt C op de drager van AB , zijn positie ondubbelzinnig bepaald is door het getal (ABC) .

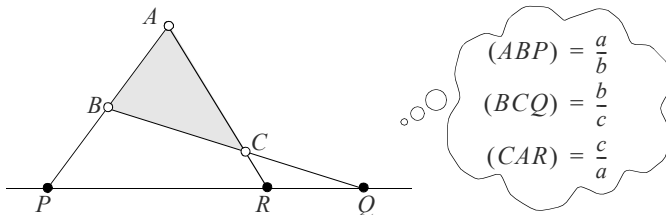


In de figuur zijn een aantal waarden van (ABC) aangegeven bij verschillende posities van C . Merk op dat $(ABC) = -1$ dan en slechts dan als C het midden is van AB . Verder geldt: als C tot B nadert, dan nadert (ABC) tot ∞ of $-\infty$, al naar gelang C zich buiten of binnen het lijnsegment AB beweegt. De waarde 1 wordt niet aangenomen door (ABC) , maar wel willekeurig dicht benaderd als C zich onbeperkt ver van A en B af beweegt. Dan merk ik nog op dat de volgorde van A, B en C in (ABC) belangrijk is; de zes permutaties van dit drietal leveren zes verschillende waarden, tenzij een van de drie precies midden tussen de andere twee ligt. Verwisseling van A en B in (ABC) leidt tot omkering van de waarde: $(BAC) = 1/(ABC)$.

Opgave [2] kan ook in verband worden gebracht met een affiene eigenschap. In de oplossing spelen *incidentierelaties* de hoofdrol. Als een punt op een lijn (in een vlak) ligt, zeggen we dat punt en lijn (vlak) incident zijn. Net zo met lijn en vlak. In zoverre heeft past ook deze opgave bij het thema ‘symmetrie’, dat incidentie een symmetrische relatie is die tussen punten, lijnen en vlakken kan bestaan: P incident l impliceert l incident P , net zo voor punt en vlak en voor lijn en vlak. De toppen van de paaltjes zijn niet incident met één en dezelfde lijn en bepalen dus precies één vlak γ , waarmee dan de drie verbindingslijnen incident zijn. De snijlijn van γ met het vlak τ is nu de lijn (s) waarop de drie pennen liggen. Verkorting van de paaltjes met eenzelfde stuk, leidt tot een translatie van γ , dus tot een evenwijdige verschuiving van s .



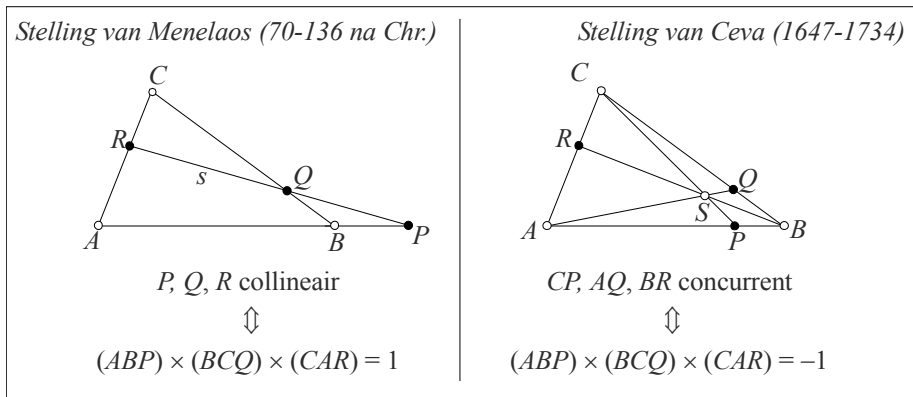
Ik noem de lengten van de paaltjes nu a, b en c en de voetpunten A, B en C . De posities van de pinnen geef ik aan met P, Q en R en ik bekijk het ‘bovenaanzicht’:



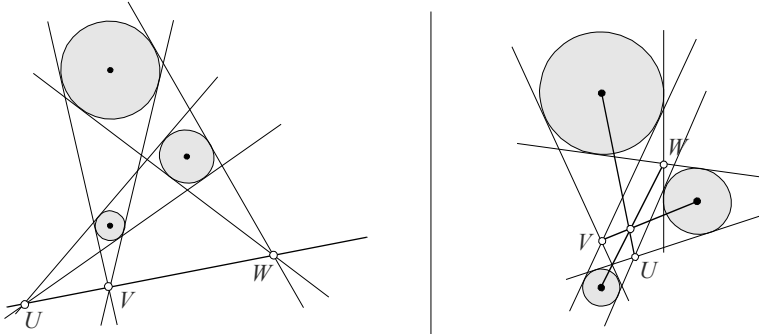
Het product van (ABP) , (BCQ) en (CAR) is blijkbaar gelijk aan 1. Beschouw ik het vlak τ als een vliegend tapijt waarbij één van de drie paaltjes (zeg die met lengte c) aan de onderkant hangt, dan veranderen zowel (BCQ) en (CAR) slechts van teken en blijft het product van de drie gelijk aan 1.

Dus als P , Q en R respectievelijk op de dragers van de zijden driehoek ABC liggen, zó dat P , Q en R collineair zijn, dan is het product van de verhoudingen waarin P , Q en R de zijden van de driehoek verdelen, intern of extern, gelijk aan 1.

Het omgekeerde van deze stelling is ook waar: als het product van (ABP) , (BCQ) en (CAR) gelijk is aan 1, dan liggen P , Q en R op één lijn. Bij de formulering en het bewijs hiervan betaalt zich de afspraak over de gerichte verhouding uit! De zojuist genoemde stelling staat bekend onder de naam stelling van Menelaos. Deze stelling wordt vaak in één adem genoemd met die van Ceva (waar ik straks nog even op terugkom).



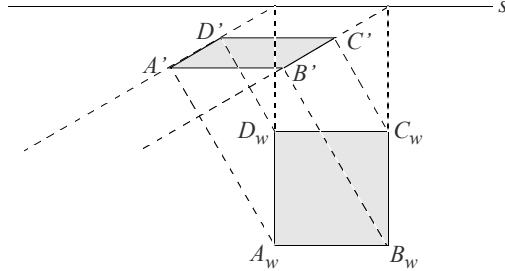
Merk op dat de gerichte verhoudingen in de producten cyclisch geordend zijn. Een mooie toepassing van de stelling van Menelaos is het bewijs van het collineair zijn van de drie uitwendige vermenigvuldigingscentra U , V en W bij drie ongelijke cirkels.



Het bewijs verloopt dan via de driehoek gevormd door de drie middelpunten. De drie inwendige gelijkvormigheidscentra zijn niet collineair, maar er is toch iets moois: de drie lijnen die zo'n punt verbinden met het middelpunt van de derde cirkel zijn concurrent, als gevolg van de stelling van Ceva!

3 Affiene transformaties

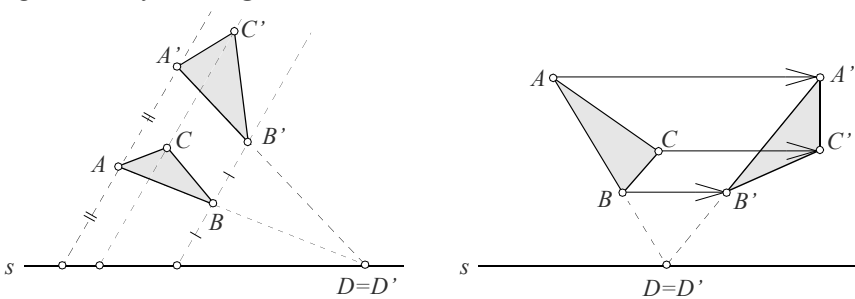
Bij het verdwijnen van de Beschrijvende Meetkunde uit het leerplan HBS-B in 1958 werd, als doekje voor het bloeden, in de stereometrieboeken een hoofdstuk 'scheve projectie' opgenomen. Daarin kon men dan een figuur als hieronder getekend komen:



Het betreft de parallelprojectie $A'B'C'D'$ van het vierkant $ABCD$ (grondvlak van een kubus) gelegen in een horizontaal vlak H , op een verticaal vlak, het tafereel τ . Na wenteling van het vlak H om de snijlijn $s = H \cap \tau$ komt $ABCD$ als $A_w B_w C_w D_w$ in τ terecht en kan men spreken van een transformatie van τ die $A_w B_w C_w D_w$ afbeeldt op $A'B'C'D'$. Deze transformatie kenmerkt zich door twee eigenschappen:

- (1) *Verbindingslijnen van corresponderende punten zijn parallel.*
- (2) *Snijpunten van corresponderende rechten liggen op één lijn (s).*

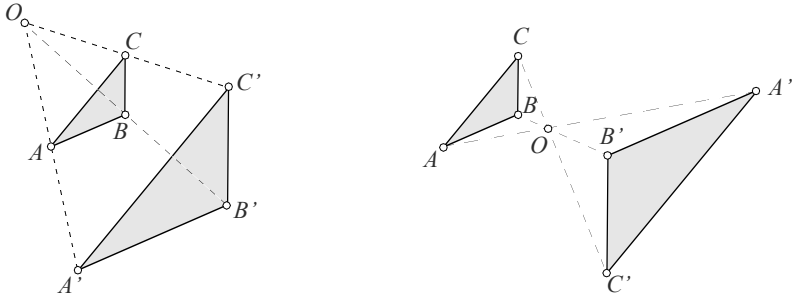
Een gevolg hiervan is dat verhoudingen van segmenten van dezelfde lijn of van evenwijdige lijnen niet veranderen en dat is voordelig bij stereometrisch tekenen. Deze transformatie is een voorbeeld van een affiene transformatie. In sommige leerboeken gebruikte men de term *affiniteit* en heette de lijn s de *as* van de affiniteit. Andere voorbeelden van affiene transformaties zijn: de *axiale vermenigvuldiging* en de zogenaamde *afschuiving*.



Links is een 'scheve axiale vermenigvuldiging' met as s en factor 2 in beeld gebracht. Rechts is een 'afschuiving' verbeeld met as s ; ieder punt wordt verschoven over een vector parallel met de lijn s , maar de lengte van de vector varieert en is evenredig met de afstand tot s , terwijl voor punten aan weerszijden van s de vectoren tegengesteld gericht zijn. In beide situaties zijn de verbindingslijnen van corresponderende punten parallel en snijden corresponderende lijnen elkaar op de as .

Nog weer een ander voorbeeld van een affiene transformatie is de *centrale vermenigvuldiging* (of *homothetie*). De regels daarbij zijn als het ware symmetrisch ten opzichte van die bij de vorige drie transformaties, namelijk:

- (1) *Verbindingslijnen van corresponderende punten zijn concurrent.*
- (2) *Corresponderende lijnen zijn parallel (of samenvallend).*



Kenmerkend voor affiene transformaties in het algemeen zijn de eigenschappen:

- (A1) *Als de punten A, B, C collineair zijn, zijn de beeldpunten A', B', C' dat ook en geldt er $(ABC) = (A'B'C')$*
- (A2) *Als de lijnen a, b, c concurrent cq. parallel zijn, zijn de beeldlijnen a', b', c' ook concurrent cq. parallel.*

Er geldt dat de verzameling affiene transformaties van een vlak τ met de bewerking ‘samenstellen’ (na elkaar uitvoeren) een *groep* is.

Inderdaad:

- (a) *De identieke transformatie is affien.*
- (b) *De inverse van een affiene transformatie is affien.*
- (c) *Het product van twee affiene transformaties is affien.*

Twee figuren F_1 en F_2 worden *affien verwant* genoemd als er een affiene transformatie A bestaat, zó dat $A(F_1) = F_2$.

De groepeigenschap van de verzameling affiene transformaties staat er borg voor dat de relatie ‘affien verwant’ *reflexief*, *symmetrisch* en *transitief* is, met andere woorden dat affiene verwantschap een *equivalentierelatie* is.

Het idee dat Felix Klein in zijn Erlanger Programm ontwikkelde, kwam er op meer dat een ‘meetkunde’ de studie is van die eigenschappen die bewaard blijven onder transformaties van een zekere groep.

Zo bestudeert de Affiene meetkunde de eigenschappen die bewaard blijven onder de affiene transformaties en wordt het domein van de klassieke Euclidische meetkunde bepaald door de groep van gelijkvormigheidstransformaties.

Die laatste groep is een ondergroep van de ‘affiene groep’ en dat betekent dat affiene eigenschappen automatisch ook euclidische eigenschappen zijn.

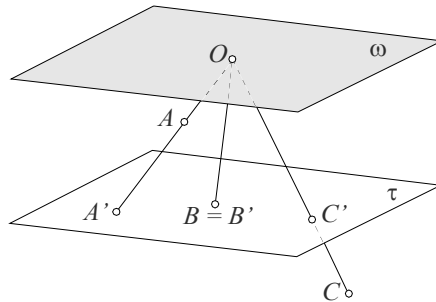
Ik merk nog op dat de gelijkvormigheidsgroep ook weer allerlei interessante ondergroepen heeft, zoals de groep van de afstandstrouwe transformaties (*isometrieën*).

4 Projectieve meetkunde is kijkmeetkunde

Het instapprobleem [3] heeft betrekking op een fotografische afbeelding, wiskundig gezegd op een zogenaamde *centrale projectie*.

Bij centrale projectie worden punten en lijnen in de ruimte vanuit een centrum O via projecterende stralen (kijklijnen) en projecterende vlakken (kijkvlakken) geprojecteerd op een tafereel τ . Alle punten en alle lijnen?

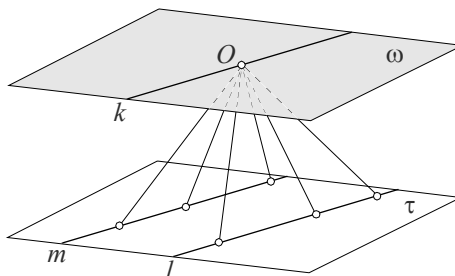
Een straal door O die parallel is met τ treft het tafereel niet, als we de euclidische ruimte als uitgangspunt nemen. Alle stralen met deze eigenschap vormen een vlak, zeg ω . De punten van dit (kijk)vlak verdwijnen als het ware bij de centrale projectie en daarom wordt vlak het *verdwijnvlak* genoemd.



Kijklijnen (met uitzondering van die in het verdwijnvlak) worden in τ vertegenwoordigd door punten; kijkvlakken (met uitzondering van ω) worden in τ vertegenwoordigd door rechte lijnen. Het wereldje van kijklijnen en kijkvlakken is blijkbaar wat groter dan τ . In dat wereldje gelden de volgende regels:

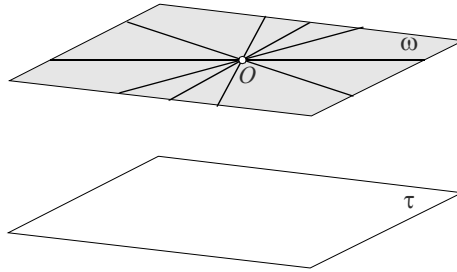
- (1) *Elk tweetal kijklijnen is incident met precies één kijkvlak (het 'verbindingsvlak' van die lijnen).*
- (2) *Elk tweetal kijkvlakken is incident met precies één kijklijn (de 'snijlijn' van die vlakken).*

De vertaling van deze regels in de wereld van τ loopt mis, tenzij we τ wat groter maken. Dit wordt gedaan door aan elke lijn l in τ één zogenaamd oneigenlijk punt L_∞ toe te voegen. Dat punt correspondeert dan met de kijklijn (in ω) die parallel is met l . Twee evenwijdige lijnen in τ snijden elkaar nu in hun oneigenlijke punt, omdat de corresponderende kijkvlakken elkaar snijden in de lijn in ω die parallel is met die beide lijnen.



k is kijklijn naar het oneigenlijke punt van l en m

In de figuur is het projecterende vlak van l voorgesteld door een (deel van) een *waaier* met top O . De opvatting van een rechte lijn in τ als verzameling (*reeks*) van punten komt overeen met de opvatting van een kijkvlak als een waaier van kijklijnen. Er is één speciale waaier van kijklijnen, namelijk de waaier (met top O) in het vlak ω . Dit is de waaier die correspondeert met de reeks van oneigenlijke punten van τ en het is daarom dat we de verzameling oneigenlijke punten van τ tot rechte lijn verklaren: de oneigenlijke rechte van τ , die ik wel aanduid met t_∞ .



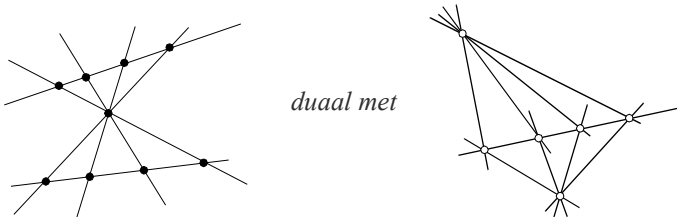
ω is kijkvlak naar de oneigenlijke rechte van τ

Het tafereel τ , uitgebreid met oneigenlijke punten (of *richtingen*) en de oneigenlijke rechte (verzameling van alle richtingen) is een model (τ^+) van het *projectieve vlak*. Punten en lijnen, eigenlijke zowel als oneigenlijke, worden wel *projectieve punten* en *projectieve rechten* genoemd.

De eerder genoemde regels voor kijklijnen en kijkvlakken hebben hun vertaling in τ^+ .

- (1) *Elk tweetal projectieve punten is incident met precies één projectieve rechte (de 'verbindingslijn' van die punten).*
- (2) *Elk tweetal projectieve rechten is incident met precies één projectief punt (het 'snijpunt' van die rechten).*

Dat is mooi, om niet te zeggen volmaakt. Vervang in de eerste regel punt door rechte en rechte door punt en je krijgt de tweede. Dit is een type symmetrie dat we aanduiden met *dualiteit*. Dit dualiteitsprincipe maakt dat je in de projectieve meetkunde bij iedere stelling een duale stelling cadeau krijgt. Dat heeft sommige meetkundigen (Von Staudt bijvoorbeeld) ertoe gebracht om de leerstof in twee kolommen naast elkaar te plaatsen. De rechter kolom was dan de duale vertaling van de eerste. Voor de beginner in het vak is het een goede oefening om duale 'configuraties' te tekenen, zoals:

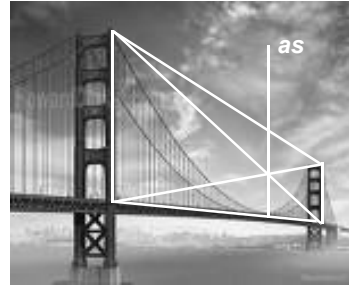


Ook is het nuttig om een 'woordenlijst' te maken, zo van: puntenreeks-lijnenwaaier, snijpunt-verbindingslijn, collineair-concurrent, enzovoort.

Buiten de verzameling bestaande uit alle kijklijnen en alle kijkvlakken en het uitgebreide tafereel τ^+ zijn er verschillende andere modellen van het projectieve vlak, maar die laat ik hier buiten beschouwing. Als werkmodel voor constructies en figuren is τ^+ het meest verkieslijk. Het opereren met oneigenlijke punten bij constructies en redeneringen of bewijzen in τ^+ is dan even wennen. Als eerste oefening kan regel (1) worden bekeken. Voor twee eigenlijke punten is dit het eerste postulaat van Euclides. Is er sprake van één eigenlijk en één oneigenlijk punt dan vertolkt de regel het befaamde (vijfde) parallellenpostulaat. Zijn beide punten oneigenlijk dan is hun verbindingslijn de oneigenlijke rechte. Ook bij regel (2) zijn drie gevallen te onderscheiden.

5 Dubbelverhouding

In de figuur hiernaast is de oplossing van het derde instapprobleem getekend. De figuur die wordt gevormd door twee staanders van de brug, het wegdek en de lijn door de de hoogste punten van de staanders is in werkelijkheid een rechthoek. Via de diagonalen van die rechthoek wordt de symmetrie-as van de parabool gevonden. Lastiger is de vraag of de kromme lijn op de foto parabolisch van karakter is; de beantwoording daarvan stel ik even uit.



Zeker is dat centrale projectie veel meetkundige eigenschappen aantast. Het meest in het oog springend is misschien dat - in tegenstelling tot wat er gebeurt bij parallelprojectie - gelijke segmenten van één lijn meestal niet als gelijke segmenten worden afgebeeld. Begrippen of eigenschappen die die wel bestand zijn tegen centrale projectie worden *projectieve begrippen of eigenschappen* genoemd.

De gerichte verhouding (ABC) van drie collineaire punten A , B en C is duidelijk geen projectief begrip en de stelling van Menelaos behoort dan ook niet tot het domein van de projectieve meetkunde, omdat daarin sprake is van zulke verhoudingen.

Wèl projectief invariant is het product van drie verhoudingen, cyclisch geordend, die door een lijn (*transversaal*) van de zijden van een driehoek worden afgesneden. Het is dus denkbaar dat een algebraïsche uitdrukking in een aantal gerichte verhoudingen, zelf wel een projectieve grootte is, hoewel de bestanddelen dat niet zijn.

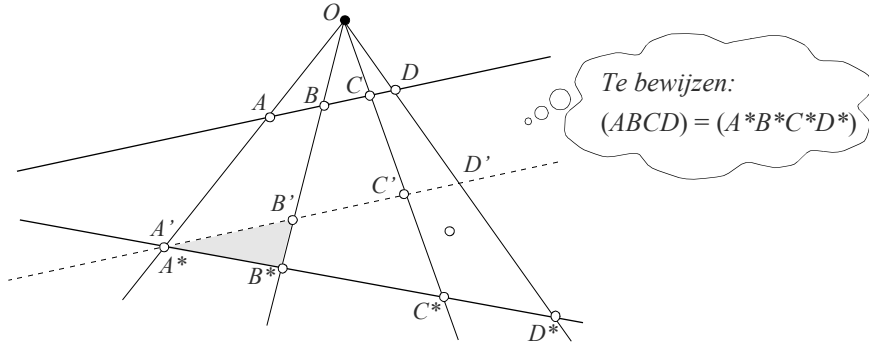
De Griek Pappos die aan het eind van de 3de eeuw na Chr. leefde, vond al uit dat de *dubbelverhouding* (Engels: *cross ratio*) van vier collineaire punten zo'n grootte is. Het komt er op neer dat bij vier collineaire punten A , B , C en D de *verhouding van de verhoudingen* (ABC) en (ABD) wèl bestand is tegen centrale projectie.

De gebruikelijke notatie voor de dubbelverhouding van A , B , C en D is ($ABCD$).

Er geldt:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

De invariantie van $(ABCD)$ onder centrale projectie kan worden bewezen met behulp van de stelling van Menelaos.



Er moet dan worden bewezen: $(ABC) : (ABD) = (A^*B^*C^*) : (A^*B^*D^*)$.

Evenwijdige verplaatsing van de drager l van de punten A, B, C en D naar het punt A^* geeft de lijn l' met het puntenviertal $A'(=A^*), B', C'$ en D' .

Omdat $l \parallel l'$ geldt: $(ABC) = (A'B'C')$ en $(ABD) = (A'B'D')$, dus $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Er blijft dus nog te bewijzen dat $(A'B'C'D') = (A^*B^*C^*D^*)$.

Ik pas nu de stelling van Menelaos toe op driehoek A^*B^*B' met transversaal OC .

$$(A^*B^*C^*) \times (B^*B'O) \times (B'A'D') = 1$$

Nog een keer, maar nu met transversaal OD :

$$(A^*B^*D^*) \times (B^*B'O) \times (B'A'D') = 1$$

Deling van het eerste product door het tweede en verwisseling van A' en B' geeft:

$$(A^*B^*C^*) : (A^*B^*D^*) = (A'B'C') : (A'B'D')$$

waarmee het bewijs is geleverd.

Op deze wijze is er een projectieve grootte gevonden die als instrument kan dienen bij het bewijzen van projectieve stellingen. In het vervolg van dit verhaal zal ik daar dankbaar gebruik van maken; daarbij is het handig om een paar eigenschappen van de dubbelverhouding te kennen.

Om te beginnen geldt, als gevolg van de 1-1-duideligheid van de functie $X \rightarrow (ABX)$, waarbij het punt X zich over de lijn AB beweegt:

$$\text{als } (ABCX) = (ABCY), \text{ dan } X = Y$$

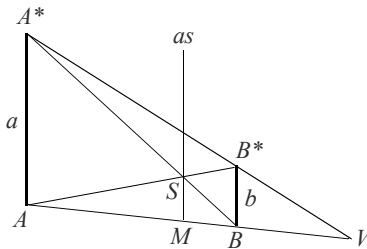
Permutatie van vier collineaire punten A, B, C en D kan een andere dubbelverhouding opleveren, maar dat hoeft niet. Verwisseling van het eerste puntenpaar of van het tweede puntenpaar heeft omkering van de dubbelverhouding tot gevolg:

$$(BACD) = 1/(ABCD) = (ABDC)$$

Een gevolg hiervan is dat verwisseling van zowel het eerste als het tweede paar de dubbelverhouding onveranderd laat:

$$(ABCD) = (BADC)$$

Ik keer terug naar de Golden Gate Bridge. Die geeft aanleiding tot de beschouwing van een zeer bijzondere dubbelverhouding. Bekijk nogmaals het model van de situatie, waarbij wegdek en staanders tot rechte lijnen zijn verschaald:



$$(ABM) = \frac{AM}{BM} = -\frac{a}{b}$$

$$(ABV) = \frac{AV}{BV} = \frac{a}{b}$$

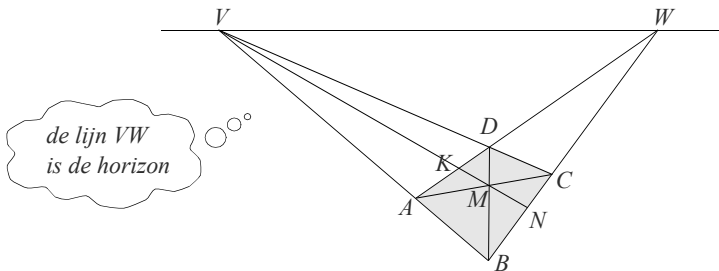
De lijnen AB en A^*B^* die in werkelijkheid parallel zijn snijden elkaar op de foto in het vluchtpunt V . Blijkbaar geldt (zie figuur): $(ABM) = -(ABV)$ ofwel $(ABMV) = -1$

Een puntenviertal met dubbelverhouding -1 wordt *harmonisch* genoemd.

Harmonische puntenviertallen duiken op veel plaatsen op, ze spelen bijvoorbeeld een voorname rol in de theorie van pool en poollijn van een kegelsnede.

Ik beperk me hier tot wat de stelling van de *volledige vierhoek* wordt genoemd.

Onderstaande figuur is de perspectiefvoorstelling van een parallellogram $ABCD$ met zijn middelpunt M . De lijn die M verbindt met het vluchtpunt V van de lijnen AB en CD is in werkelijkheid parallel met AB en CD en deelt de zijden BC en AD midden-door (in K en N). De puntenviertallen $ADKW$ en $BCNW$ zijn daarom harmonisch.



In de termen van de projectieve meetkunde is $ABCD$ een *volledige vierhoek* (4 hoekpunten, 6 verbindingslijnen of zijden) en zijn V , W en M de diagonaalpunten daarvan. De drie lijnen VM , WM en VW zijn de *diagonaallijnen* van de volledige vierhoek.

De stelling die vanuit de perspectiefvoorstelling is ontdekt, luidt nu:

Twee diagonaallijnen en twee zijden van een volledige vierhoek die samenkomen in een diagonaalpunt, snijden de andere zijden volgens harmonische puntenviertallen.

Een typisch projectief-meetekundig bewijs van deze stelling gaat zó.

Centrale projectie uit V geeft $(ADKW) = (BCNW)$.

Centrale projectie uit M geeft $(ADKW) = (CBNW)$.

Conclusie: $(BCNW) = (CBNW)$. Anderzijds geldt: $(CBNW) = 1/(BCNW)$

Dus $(BCNW)^2 = 1$ en omdat B , C , N en W verschillende punten zijn: $(BCNW) = -1$.

Via de volledige vierhoek kan ook het verband worden gelegd tussen de stellingen van Menelaos en Ceva. Let op driehoek BCV met de transversaal AW .

Volgens Menelaos geldt:

$$(BCW) \times (CVD) \times (VBA) = 1$$

In verband met $(BCNW) = -1$, dus $(BCN) = -(BCW)$, geldt ook:

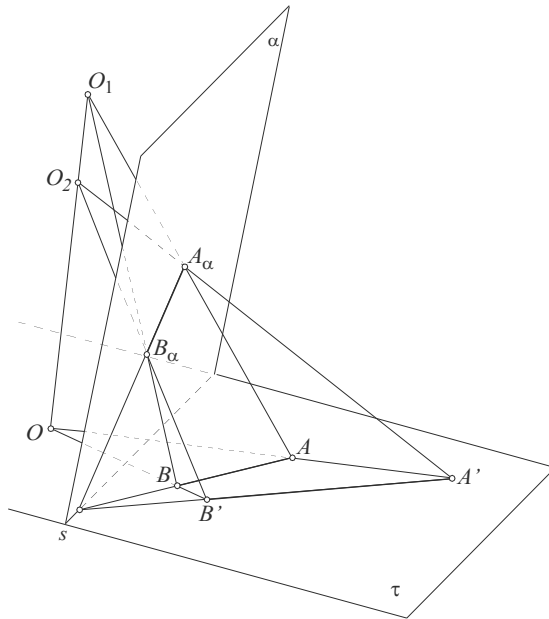
$$(BCN) \times (CVD) \times (VBA) = -1$$

en dat is juist wat de stelling van Ceva (toegepast op driehoek BCV) zegt.

6 Centrale collineaties

Projectieve transformaties zijn transformaties van het projectieve vlak waarbij
 (P1) *collineariteit van punten (en concurrentie van rechten) gehandhaafd blijft.*
 (P2) *de dubbelverhouding van puntenviertallen invariant is.*

Voor de introductie van een bijzonder type projectieve transformatie maak ik een uitstapje naar de euclidische ruimte. In de figuur is te zien hoe de punten van een vlak α vanuit twee verschillende centra (O_1 en O_2) zijn geprojecteerd op een tafereel τ . Op die wijze krijgt ieder punt A_α (van α) twee projecties A en A' (in τ).



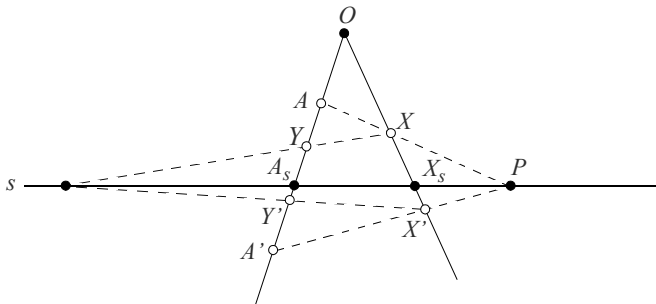
De afbeelding die A op A' , B op B' , ... afbeeldt, is een projectieve transformatie van τ . Die transformatie wordt *centrale collineatie* genoemd. Elementaire stereometrie leert:
 (C1) *Verbindingslijnen van corresponderende punten door een vast punt O gaan.*
 (C2) *Snijpunten van corresponderende lijnen op een vaste lijn s liggen.*

Het punt O wordt het *centrum* van de transformatie genoemd; het is het snijpunt van van de lijn O_1O_2 met τ . De lijn s is de *as* van de centrale collineatie, het is de snijlijn van de vlakken α en τ . In plaats van centrale collineatie zou je eigenlijk net zo goed van ‘axiale collineatie’ kunnen spreken.

De ligging van het centrum en de as leggen een centrale collineatie nog niet vast. Dat is direct te begrijpen uit de ruimtelijke figuur op de vorige bladzij. Verplaatsing van O_2 langs de lijn OO_1 geeft een andere transformatie van τ^+ met dezelfde as en hetzelfde centrum. Echter, is er buiten de as en het centrum één paar origineel, beeld gegeven, dan is de centrale collineatie volledig bepaald!

Stel dat het paar A, A' gegeven is en dat X niet op de lijn OA ligt.

Dan is het beeldpunt X' te vinden via het punt $P = AX \cap s$:



Via het paar X, X' kan vervolgens bij Y op de lijn OA het beeldpunt Y' worden bepaald.

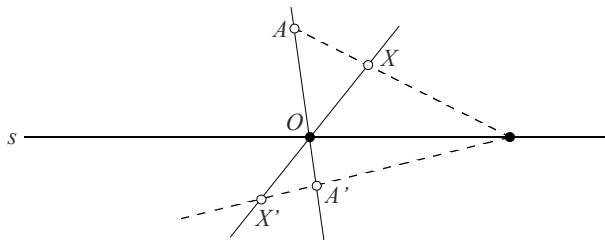
Nu geldt (centrale projectie uit P) dat $(OA_sAA') = (OX_sXX')$.

Stel $(OA_sAA') = \delta$, dan geldt blijkbaar voor elk punt X buiten O en s dat $(OX_sXX') = \delta$.

Het getal δ noem ik de *reden* van de centrale collineatie. Het is duidelijk dat dit getal, samen met het centrum O en de as s , de centrale collineatie vastlegt.

De inverse van een centrale collineatie Γ is zelf ook weer een centrale collineatie. Als δ de reden is van Γ , dan volgt uit een eigenschap van de dubbelverhouding dat $1/\delta$ de reden is van Γ^{-1} .

Ik vergeet nu de ruimtelijke introductie en promoveer de eigenschappen C1 en C2 tot definiërende eigenschappen van de centrale collineatie. Die regels zeggen niets over de onderlinge ligging van O en s . Welnu, het is niet uitgesloten dat O en s incident zijn; in dat geval spreekt men van een *speciale centrale collineatie* in tegenstelling tot een ‘gewone’ centrale collineatie, waarbij O buiten s ligt.



Bij de speciale centrale collineatie valt X_s voor elk punt X buiten s samen met O en is de transformatie niet bepaald door de waarde van δ ; die zou men voor alle speciale collineaties als 1 kunnen bestempelen, en is dus niet onderscheidend.

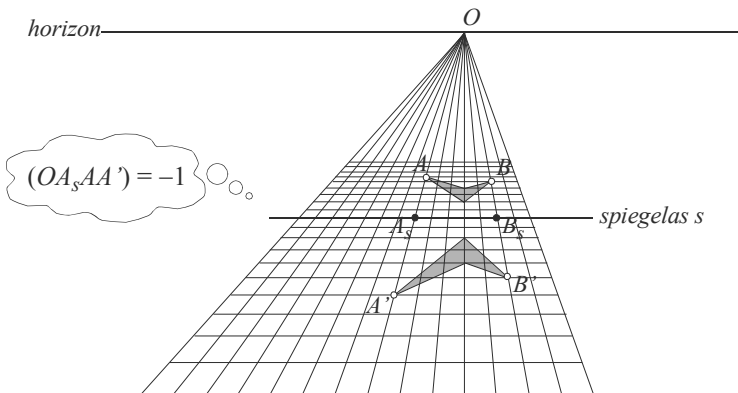
Ik keer nu even terug naar de paragraaf over de affine transformaties. De daar gegeven voorbeelden zijn alle op te vatten als centrale collineaties. Bij de eerste twee is het centrum een oneigenlijk punt van τ^+ . Bij de centrale vermenigvuldiging is de as van de centrale collineatie de oneigenlijke rechte. Bij de afschuiving zijn centrum en as beide oneigenlijk en is er sprake van een speciale centrale collineatie.

Projectieve transformaties waarbij rechten op rechten worden afgebeeld worden ook *collineaties* genoemd. De collineaties van τ^+ vormen een groep: de *projectieve groep*. De centrale collineaties vormen daarvan een deelverzameling, maar geen ondergroep. De affine groep is wel een ondergroep van de projectieve groep, namelijk van die transformaties die de oneigenlijke rechte als geheel (niet noodzakelijk puntsgewijs) invariant laten. De gelijkvormigheidsgroep is, zoals eerder opgemerkt, daar weer een ondergroep van en zo laten de verschillende meetkenden (ook de niet-euclidische meetkenden!) zich classificeren via ondergroepen van de projectieve groep.

7 Involuties

Beschouw nu een gewone centrale collineatie Γ , dus met centrum en as die niet incident zijn. Als de reden δ gelijk is aan -1 , is Γ zijn eigen inverse. In dat geval spreekt men van een *involutorische centrale collineatie*.

Als ik de euclidische spiegeling ten opzichte van een as in een perspectiefvoorstelling breng, bijvoorbeeld door een vierkantjesrooster in perspectief te tekenen, krijg ik zo'n involutorische centrale collineatie.



Het centrum O is nu het vluchtpunt van de loodlijnen op de spiegelas s .

Bepik ik vervolgens mijn blik tot een rechte l door O , dan heb ik te maken met een transformatie van l die dubbelverhoudingen van puntenviertallen op l invariant laat en die bovendien zijn eigen inverse is. Een dergelijke 1-dimensionale transformatie wordt *involutie* genoemd.

Om te bewijzen dat een 1-dimensionale projectieve transformatie (of ‘projectiviteit’) van een lijn l een involutie is, hoeft slechts aangetoond te worden dat de transformatie één puntenpaar verwisselt.

Dat is fraai te bewijzen via de eigenschappen van de dubbelverhouding.

Stel Φ_l is een projectieve transformatie van l met $\Phi_l(A) = B$, $\Phi_l(B) = A$ en $\Phi_l(X) = Y$. Ik wil bewijzen: $\Phi_l(Y) = X$ en stel daartoe $\Phi_l(Y) = Z$.

Uit de invariante van dubbelverhoudingen onder Φ_l volgt: $(ABYX) = (BAZY)$.

Verwisseling van zowel het eerste als het tweede puntenpaar geeft dezelfde dubbelverhouding, dus $(BAZY) = (ABYZ)$.

Volgens het eerste axioma van Euclides (‘twee grootheden gelijk aan een derde, zijn onderling gelijk’) volgt nu: $(ABYX) = (ABYZ)$ en dus $Z = X$! Klaar.

De involutie op l die voortvloeit uit de ‘projectieve spiegeling’ heeft twee invariante punten (‘dubbelpunten’): het punt O en het snijpunt S van l met de spiegelas s .

Als Y het beeld is van X , geldt $(OSXY) = -1$ of zoals we zeggen: origineel en beeld vormen samen met de dubbelpunten O en S een *harmonisch vieretal*.

Zo’n involutie kan worden voorgesteld door een symmetrische formule.

Maak van OS een getallenlijn door O met 0 , S met 1 , X met x en Y met y te laten corresponderen. Uit $(OSX) = -(OSY)$ volgt dan

$$\frac{x}{x-1} = -\frac{y}{y-1} \quad \text{ofwel} \quad 2xy = x+y$$

Deze vorm kan voor x en y (beide $\neq 0$) eleganter worden geschreven als $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

Het kan nog mooier als ik O de coördinaat -1 en S de coördinaat 1 geef.

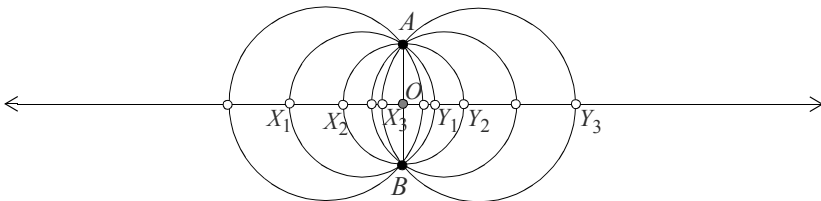
De lezer kan nagaan dat het resultaat dan $xy = 1$ is.

Merk op dat het oneigenlijke punt van l wordt afgebeeld op met het midden van OS .

Een algemene (en symmetrische) formule voor een involutie van de getallenlijn is:

$$axy + b(x+y) + c = 0 \quad \text{met} \quad b^2 \neq ac$$

De dubbelpunten worden daarbij gevonden uit $ax^2 + 2bx + c = 0$. Een involutie met twee invariante punten, dus waarbij $b^2 > ac$, wordt wel een *involutie van de eerste soort* genoemd (en ook wel een hyperbolische involutie, maar dat heeft niets te maken met de hier vertoonde formules!). In het geval $b^2 < ac$, zijn er geen reële dubbelpunten en spreekt men van een *involutie van de tweede soort* (of elliptische involutie). Een voorbeeld van zo’n tweede-soort-involutie krijg ik door een cirkelbundel te snijden met de as van die bundel.



Elke cirkel van de bundel (met basispunten A en B) snijdt de as volgens een puntenpaar en die paren vormen een involutie. Laat O het middelpunt van de kleinste cirkel zijn (met straal r) en maak van de as een getallenlijn met de nul in het punt O . Als (x,y) een getallenpaar is dat correspondeert met de punten volgens welke een exemplaar uit de bundel de as snijdt, dan geldt $xy = -r^2$. Die vergelijking zegt dat er inderdaad sprake is van een involutie en dat er geen reële dubbelpunten zijn. Dat laatste volgt natuurlijk ook uit het feit dat de kleinste cirkel uit de bundel een positieve straal heeft. Het met O corresponderende punt is het oneigenlijke punt van de as.

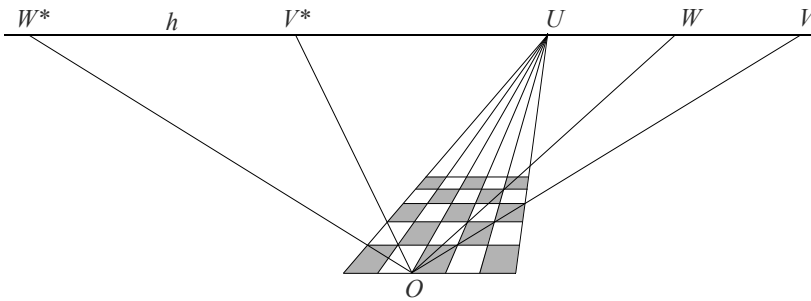
Het kan nog wat algemener.

Iedere lijn l die niet parallel is met de lijn AB en niet door A of B gaat, snijdt de cirkelbundel volgens een involutie. Als S het snijpunt van zo'n lijn met AB is, geldt voor een puntenpaar XY dat $SX \cdot SY$ constant is, namelijk gelijk aan $SA \cdot SB$.

De soort van de involutie hangt af van de plaats van S op AB .

Ligt S buiten het lijnstuk AB dan is de involutie van de eerste soort. Er zijn dan twee cirkels die raken aan de lijn l en de bijbehorende raakpunten zijn dan dubbelpunten van de involutie. Ligt S tussen A en B , dan zijn er geen dubbelpunten.

Terug naar de situatie waarbij S het midden is van AB . De lijnen AX en AY zijn dan onderling loodrecht en de involutie $X \leftrightarrow Y$ wordt daarom wel *orthogonaal* genoemd. Zo'n orthogonale involutie kan ook zichtbaar worden gemaakt als een involutie van vluchtpunten op de horizon (h) van een coördinatenvlak in perspectiefvoorstelling. In de figuur zijn twee paren VV^* en WW^* van zo'n involutie aangegeven..

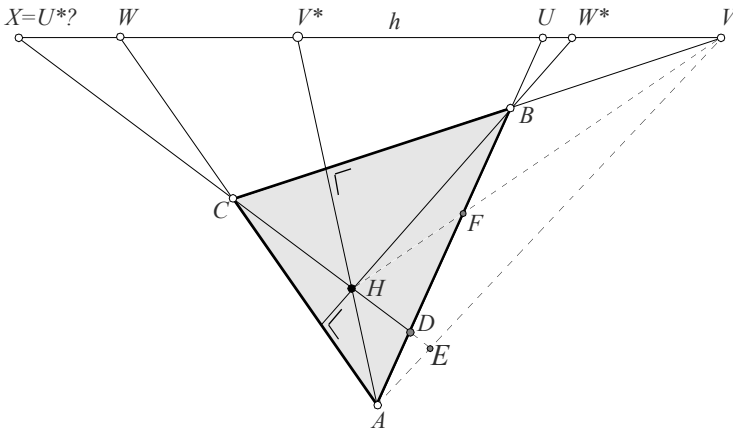


Een natuurlijk coördinatisering van de lijn h wordt verkregen door elk vluchtpunt te koppelen aan de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn. Zo kan ik de punten V , V^* , W en W^* respectievelijk de coördinaat 1 , -1 , 2 , $-\frac{1}{2}$ geven. Merk op dat het punt met coördinaat 0 correspondeert met de horizontale richting (het oneigenlijke punt van h) en dat het beeldpunt in de involutie (U) de coördinaat ∞ mag hebben.

Noem ik de coördinaten van twee corresponderende vluchtpunten x en y , dan geldt volgens een bekende formule uit de analytische meetkunde: $xy = -1$.

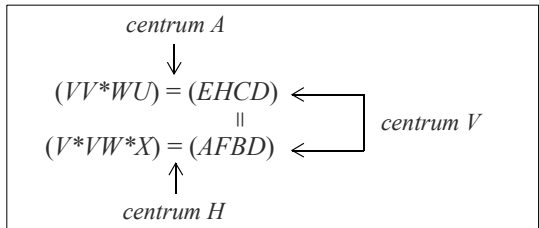
Omdat geen enkele lijn loodrecht op zichzelf staat heeft de involutie geen invariante punten en dat wordt door de formule bevestigd.

Als toepassing van deze orthogonale involutie bewijs ik nu een fameuze stelling uit de klassieke meetkunde, namelijk dat de drie hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn. Daar zijn allerlei mooie bewijzen van, bijvoorbeeld via de concurrentie van de middelloodlijnen of van de bissectrices van een hulpdriehoek. Ook lukt het goed met de stelling van Ceva. En dan zijn er verschillende projectieve bewijzen waarvan er hier een uit de doeken wordt gedaan.



De figuur toont driehoek ABC in een perspectiefvoorstelling met horizon h . De vluchtpunten van de zijden AB , BC en CA zijn achtereenvolgens U , V en W . De hoogtelijnen uit A en B (met vluchtpunten V^* en W^*) snijden elkaar in H . De paren VV^* en WW^* behoren tot een (orthogonale) involutie op h . Laat U^* het beeldpunt zijn van U bij die involutie en er moet worden bewezen dat U^* het vluchtpunt is van de lijn CH . Bij het bewijs gebruik ik de hulplijnen en hulppunten HV , AV , D , E en F (zie figuur). Verder noem ik het vluchtpunt van CH tijdelijk X . Bekijk het puntenviertal VV^*WU . Centrale projectie van dit viertal vanuit A op de lijn CH geeft het viertal $EHCD$. Neem nu het viertal V^*VW^*X . Centrale projectie van dit viertal vanuit H op de lijn AB geeft het viertal $AFBD$. De viertallen $EHCD$ en $AFBD$ kan ik op elkaar projecteren via het centrum V .

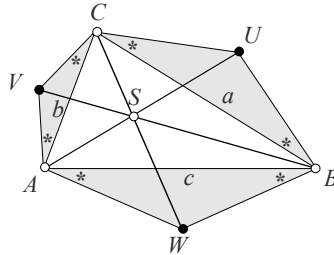
Zo komt er:



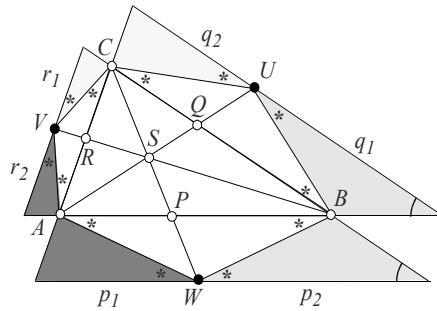
Conclusie: $(VV^*WU) = (V^*VW^*X)$.
 VV^*WU wordt door de orthogonale involutie afgebeeld op $V^*VW^*U^*$,
 dus: $(VV^*WU) = (V^*VW^*U^*)$.
 En dus ook: $(V^*VW^*X) = (V^*VW^*U^*)$ met als gevolg $X = U^*$.

De concurrentie van de drie hoogtelijnen van een driehoek kan worden opgevat als een bijzonder geval van de volgende stelling:

Als op de zijden van een driehoek ABC buitenwaarts drie gelijkvormige symmetrische driehoeken worden geplaatst, waarbij de zijden van ABC de bases zijn van die driehoeken, dan gaan de lijnen die A, B en C met de toppen van de driehoeken verbinden door één punt.



De stelling kan worden bewezen met de stelling van Ceva, via hulplijnen door U, V, en W respectievelijk evenwijdig aan BC, CA en AB.



Er geldt: $(ABP) = -p_1/p_2$, $(BCQ) = -q_1/q_2$ en $(CAR) = -r_1/r_2$

De grijze driehoekjes in de figuur zijn twee aan twee gelijkvormig en daaruit volgt:

$$p_1/r_2 = WA/VA = c/b, \quad q_1/p_2 = UB/WB = a/c, \quad r_1/q_2 = VC/UC = b/a$$

zodat

$$(ABP) \times (BCQ) \times (CAR) = -p_1 q_1 r_1 / p_2 q_2 r_2 = -1$$

Ik weet nu dat als U, V en W over de middelloodlijnen van BC, CA en AB bewegen, waarbij de hoeken die UB, VC en WA maken met BC, CA en AB onderling gelijk zijn, de lijnen AU, BV en CW door één punt S gaan.

Bijzondere gevallen treden op bij hoeken van 0° , 60° en 90° .

In het eerste geval is S het zwaartepunt, in het tweede geval het zogenaamde punt van Fermat en in het derde geval ... het hoogtepunt van de driehoek.

Omdat die drie bijzondere gevallen zich afzonderlijk laten bewijzen, kan daarvan gebruik worden gemaakt bij een projectief bewijs van bovengenoemde stelling.

Het komt er dan op neer dat de drie lijnenwaaiers AU, BV en CW via een projectieve transformatie op elkaar worden afgebeeld en omdat de corresponderende stralen in drie gevallen concurrent zijn, zijn ze dat in alle gevallen. De laatste conclusie vergt wel meer kennis van de projectieve meetkunde dan hier is aangekaart.

8 Uitstap: van ‘para’ naar ‘hyper’

Als je van een afstand naar de bovenrand van een beker met cirkelvormige bovenrand kijkt, zie je meestal een ellips. Dat komt dan omdat de kijkkegel (projecterende kegel) het tafereel snijdt volgens een ellips. Maar de centrale projectie van een cirkel kan even goed een parabool of hyperbool zijn. In de projectieve meetkunde wordt dan ook geen onderscheid gemaakt tussen de verschillende typen kegelsnede.

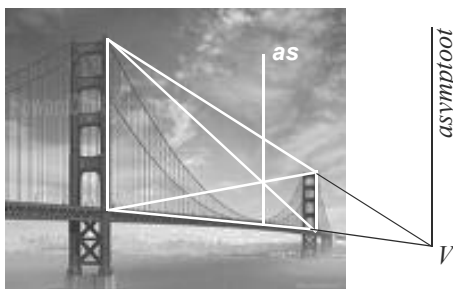
Ik keer terug naar een parabool van de Golden Gate Bridge. Het is met het blote oog niet goed te zien, maar het is wel waar: op de foto verschijnt die als hyperbool. Voor een bewijs volstaat het om aan te tonen dat de projectie van de brug-parabool op het tafereel van de foto *twee* oneigenlijke punten bevat. De redenering gaat dan als volgt. Het tafereel τ (vlak van de foto) maakt een scherpe hoek met het vlak β door (de tot lijnen gereduceerde) staanders van de brug. Het tafereel is parallel met het verdwijnsvlak ω (door het oog O). De parabool snijdt, na voortzetting, het vlak ω op de snijlijn van ω en β . Dat levert het eerste oneigenlijke punt van zijn beeld in τ .

De parabool op de brug heeft zelf ook een oneigenlijk punt (in β), dat is namelijk het oneigenlijk punt van zijn symmetrie-as. Omdat die symmetrie-as parallel is met τ , is de projectie van dit oneigenlijke punt een oneigenlijk punt in τ . Dat is dan het tweede oneigenlijke punt van het paraboolbeeld.

Omdat de centrale projectie van een kegelsnede weer een kegelsnede is, weet ik zeker dat de boog van de Golden Gate Bridge op de foto een deel van een hyperbooltak is.

Hoe zit het met de asymptoten van die hyperbool?

Het tweede oneigenlijke punt in de zojuist afgestoken redenering garandeert dat een van de asymptoten verticaal is. Die asymptoot kan in de foto worden geconstrueerd als de ‘vluchtlijn’ van het vlak β . Die lijn gaat door het vluchtpunt V van het wegdek.



De scheve asymptoot is de projectie van de raaklijn aan de voortgezette parabool in het snijpunt met ω . Die is in de foto niet te construeren bij gebrek aan gegevens over de positie van het oog van de camera.

Omdat de Analytische meetkunde een revival gaat beleven in het vwo, wil ik nog wat tekenen en rekenen aan dit probleem. Op de volgende bladzijde is een 3-dimensionaal coördinatenstelsel $Oxyz$ getekend, met daarin het vlak β (vergelijking $x + y = 0$) evenwijdig aan het vlak van tekening.

Als tafereel τ is het vlak $x = 0$ gekozen en de positie van het oog E is $(1, 1, 1)$. De parabool op de brug krijgt de parametervoorstelling

$$(x, y, z) = (-t, t, (t-1)^2 + 2)$$

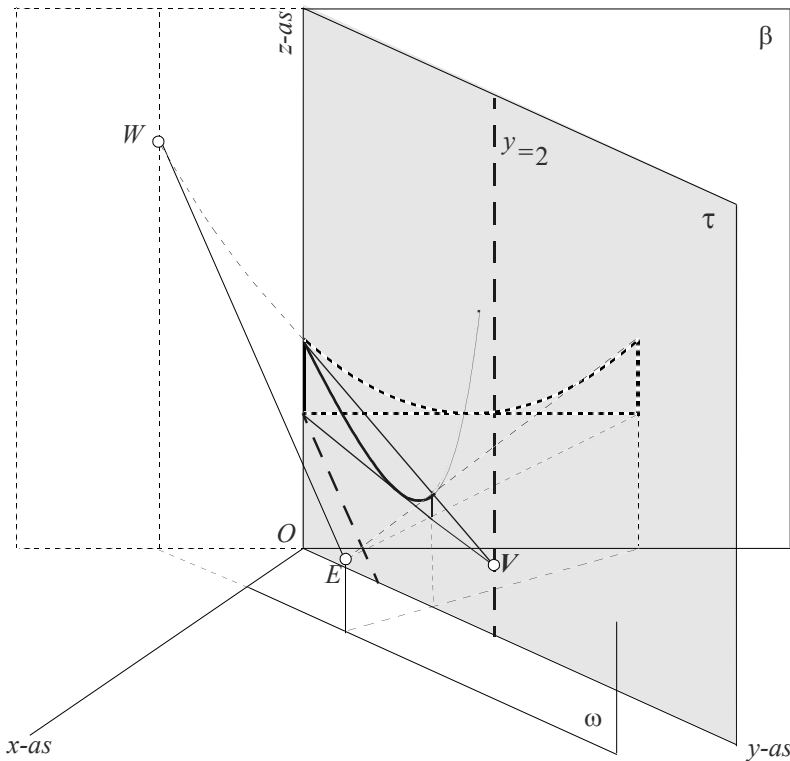
Het beeld bij centrale projectie vanuit E heeft dan als parametervoorstelling

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{2t}{t+1}, \frac{t^2 - t + 3}{t+1}\right)$$

Eliminatie van t geeft in het Oyz -vlak de vergelijking:

$$z = 2 - \frac{5}{2}y + \frac{2}{2-y}$$

Inderdaad, een hyperbool, en wel met de asymptoten $y = 2$ en $z = 2 - \frac{5}{2}y$. De lijn $y = 2$ in τ is hieronder geconstrueerd.



Het verdwijnpunt W van de parabool (op $\beta \cap \omega$) heeft de coördinaten $(1, -1, 6)$ en een richtingsvector van de lijn EW is dus $(0, -2, 5)$; dat is in overeenstemming met de richtingscoëfficiënt van de gevonden scheve symptoot. Projectie uit E van de raaklijn in W aan de parabool in β levert behalve nogmaals die richtingscoëfficiënt, ook de constante 2 uit de vergelijking op. Dat die asymptoot, waarvan een stukje is getekend in de figuur, hier door het voetpunt van de staander gaat, berust op toeval.

Waarom de vierdimensionale ruimte de mooiste van alle ruimtes is: quaternionen

Vincent van der Noort

Universiteit Utrecht, Studium Generale

e-mail: schaduwdirectie@yahoo.com

In mijn lezing heb ik een aantal argumenten voor de (impliciete) bewering in de titel gegeven, maar voor het mooiste aspect van de vierdimensionale ruimte, namelijk dat je de punten in die ruimte als getallen, de quaternionen, kunt opvatten, bleef weinig tijd meer. Daarom ga ik daar in deze tekst dieper op in, in plaats van de voorbeelden uit mijn lezing nog een keer te vertellen. Figuren waarnaar verwezen wordt staan aan het einde van de tekst.

Onderstaande tekst verscheen in iets andere vorm ook in het boek *Getallen zijn je beste vrienden*, (uitg. Atheneum – Polak en van Gennep, 2011) van Vincent van der Noort waarin ook meer over de andere voorbeelden uit de lezing te vinden is.

U kent als het goed is de complexe getallen. Aan de ene kant zijn de complexe getallen het eindpunt van een lange ontwikkeling waarin mensen schaamteloos steeds meer nieuwe soorten getallen (niet-gehele getallen, negatieve getallen etc.) verzonnen hebben. Als je alleen maar natuurlijke getallen kent is het makkelijk een vraag te verzinnen waarop het antwoord een nog onbekend getal is zoals ‘Bij welk getal moet je 3 optellen om 2 te krijgen?’ of ‘Welk getal moet je met zichzelf vermenigvuldigen om 3 te krijgen?’. Als je eenmaal de complexe getallen tot je beschikking hebt, kun je ophouden met nieuwe getallen te verzinnen: alle antwoorden op dit soort vragen zijn zelf weer complexe getallen. De complexe getallen zijn gelukkig met elkaar en hebben niemand anders nodig, een resultaat dat bekend staat als de Hoofdstelling van de Algebra.

Aan de andere kant werpen de complexe getallen ook weer een nieuw licht op een gebied dat ogenschijnlijk niet zo gek veel met getallen te maken heeft: vlakke (twee-dimensionale) meetkunde. Door de punten van het vlak als getallen te zien, zijn allerlei meetkundig interessante bewerkingen (draaiingen, spiegelingen, uitrekkingen, verschuivingen en ingewikkeldere vervormingen die daaruit samengesteld kunnen worden) opeens heel makkelijk te beschrijven in termen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Eigenlijk hebben we iets vergelijkbaars al bij de reële getallen, die je kunt zien als punten op de (eendimensionale) lijn. Het verschuiven van een stukje lijn over een afstand 3 komt neer op het optellen van 3 bij alle getallen uit het stukje lijn. Het spiegelen van een stukje getallenlijn in 0 komt neer op het vermenigvuldigen van alle getallen in dat stukje lijn met -1 . Nu leven we niet

in een één- of tweedimensionale wereld maar in een driedimensionale. En meetkunde in drie dimensies, zeker wanneer we gaan draaien, spiegelen en vervormen, is een stuk ingewikkelder moeilijker voor je te zien dan meetkunde in twee dimensies. Gezien het succes van het complexe vlak, zou het ontzettend handig zijn als er nog meer getallen bestonden buiten de complexe getallen die we al kennen, getallen die met zoveel zijn dat ze een hele *driedimensionale* ruimte opvullen. Idealiter zouden ingewikkelde draaiingen en vervormingen in de ruimte dan te beschrijven zijn als het optellen en vermenigvuldigen van deze getallen. Er is, kortom, wel degelijk een markt voor meer getallen dan de complexe, alleen komt de motivatie nu niet van hun eigenschappen als getal, maar uit de meetkunde.

Deze geniale gedachte is niet van mezelf, maar van de Ierse wiskundige William Rowan Hamilton (1805-1865). Zoals gezegd riep het gebruik van plaatjes in wiskundige bewijzen in de negentiende eeuw vooral wantrouwen op. De meetkundige eigenschappen van complexe getallen werden wel gebruikt om hun eigenschappen als getal beter te begrijpen, maar het bleef een hulpmiddel. Hamilton echter draaide zijn hoofd honderdtachtig graden en beschouwde de getaleigenschappen als handig hulpmiddel om meetkunde te doen. Zo handig zelfs dat hij er van overtuigd was dat er meer getallen moesten zijn die het begrijpen van meetkunde in drie dimensies moesten vereenvoudigen. Nieuwe getallen, niet omdat de getallen daarom vragen, maar de meetkunde – een revolutionair idee.

Hamilton was dan ook niet de minste. Hij was een van die zeldzame genieën die op enig punt in hun leven meer talen spreken dan ze jaren oud zijn (in zijn geval op zijn dertiende) en ook gedichten in al die talen schreef (hoewel zijn vriend Wordsworth zijn werk geen poëzie vond). Op zijn achttiende, zonder ooit naar school geweest te zijn (hij kreeg eerder les van zijn oom) werd hij aan de universiteit van Cambridge toegelaten, waar hij stevast alle prijzen voor beste student won. Niet alles wat hij aanraakte veranderde echter in goud. Kort na zijn aankomst in Cambridge werd hij verliefd op Catherine Disney, de dochter van een vriend van zijn oom. Vanaf het begin was het duidelijk was dat het niets kon worden: haar vader was tegen een huwelijk omdat hij meende dat zo'n student nooit uitzicht op een vaste baan met een degelijk salaris zou hebben. Dit was een beetje voorbarig geredeneerd: op zijn tweeëntwintigste (!) werd Hamilton hoogleraar sterrenkunde. Toen was het echter al te laat. In de lente na haar ontmoeting met Hamilton, trouwde Catherine met een vijftien jaar oudere priester, die haar in de ogen van de familie Disney meer zekerheid kon bieden. Een jaar lang werd William verteerd door verdriet, wat zich er onder andere in vertaalde dat hij niet langer alleen maar A's (tien) voor zijn tentamens haalde, maar A-minnen.

Na zijn afstuderen ging het beter met Hamilton, hij deed de ene briljante natuurkundige ontdekking na de andere en trouwde met Helen Maria Bayly, een buurvrouw van het observatorium waar hij sinds zijn benoeming tot Royal Astronomeer of Ireland woonde. Samen kregen ze drie kinderen.

Zijn neiging tot grootse meeslepende ongelukkige liefdes was Hamilton echter nog niet kwijt, en nu hij een vrouw en kinderen had vond hij die in de vorm van het bovengenoemde idee dat er getallen moeten bestaan die met zo velen zijn, meer nog

dan de complexe getallen, dat ze alle punten van een driedimensionale ruimte in beslag nemen. Een spectaculair idee zoals gezegd, maar tussen het hebben van een goed idee en het doen van een revolutionaire uitvinding ligt nog een lange weg. Hamilton besteedde zestien jaar van zijn leven aan het zoeken van deze getallen, zonder enig succes. Dit maakte zijn obsessie er niet minder om. Iedere ochtend aan het ontbijt vroegen zijn kinderen ‘En vader, kunt u al drietallen¹ vermenigvuldigen?’ En iedere ochtend moest hij hen, of eigenlijk zichzelf, teleurstellen. U kunt zich voorstellen wat een lijdensweg dit geweest moet zijn voor het gezin Hamilton.

In moderne ogen lijkt de lijdensweg van Hamilton een beetje vreemd: de nieuwe getallen waar hij naar op zoek was bestonden nog niet, sterker nog, niemand had er ooit over nagedacht, hij was dus in de perfecte positie om ze zelf te verzinnen. Net als de mythische uitvinder van het schaakspel had hij gewoon de spelregels kunnen opstellen volgens welke de punten in de ruimte met elkaar vermenigvuldigd werden en deze nieuwe getallen een mooie naam kunnen geven. Een makkelijk voorbeeld is de vermenigvuldiging \star die je krijgt door ‘coördinaatsgewijs’ te vermenigvuldigen: $(2, 3, 4) \star (5, 6, 7) = (2 \cdot 5, 3 \cdot 6, 4 \cdot 7) = (10, 18, 21)$. Een ander, meer meetkundig voorbeeld, is de vermenigvuldiging \diamond waarbij je een lijn trekt tussen de twee getallen die je wilt vermenigvuldigen en het product intekent op diezelfde lijn, precies tussen de twee punten in.

Op het eerste gezicht zijn er wel duizend van dit soort vermenigvuldigingsregels te bedenken en waarschijnlijk heeft Hamilton dat ook gedaan. Maar kennelijk had hij bij allemaal het gevoel dat de resulterende ‘vermenigvuldiging’ een leuk gedachte-spelletje was, maar niet een *echte* vermenigvuldiging van echte *getallen*. Naar wat voor eisen hij precies aan een getal stelde, kunnen we alleen maar raden. Wel kunnen we zelf argumenten verzinnen waarom de vermenigvuldigingen \diamond en \diamond niet deugen (en niemand die dus ooit gebruikt): als we punten op de ruimte vermenigvuldigen met vermenigvuldiging \diamond is er geen enkel punt dat de rol van het getal 1 kan spelen in de zin dat $1 \diamond x = x$ voor alle getallen x . De getallenlijn uitbreiden naar meer dimensies is leuk, maar als dat betekent dat je het getal 1 moet opofferen, dan gooi je het kind met het badwater weg.

De vermenigvuldiging \star heeft dit probleem niet maar hier speelt het probleem dat je niet kunt delen: $(2, 2, 4) \star (5, 0, 0) = (10, 0, 0)$ maar $(2, 12, 6) \star (5, 0, 0)$ is óók gelijk aan $(10, 0, 0)$. Wat is dan $(10, 0, 0)$ gedeeld door $(5, 0, 0)$? $(2, 2, 4)$ of $(2, 12, 6)$? We zullen het nooit weten. Tegenwoordig is bekend dat wat voor gekke vermenigvuldiging je ook aan de punten van een driedimensionale ruimte oplegt, je nooit zult kunnen delen. Maar Hamilton was zich hier (in elk geval in het begin van zijn zoektocht) niet van bewust. Hij dacht helemaal niet in termen van ‘gekke vermenigvuldigingen’, hij was gewoon op zoek naar de enige juiste uitbreiding van het complexe getallenvlak naar drie dimensies.

¹ Net als moderne wiskundigen dacht Hamilton na over een punt in de driedimensionale ruimte als een rijtje van drie getallen (de coördinaten zouden we tegenwoordig zeggen).

Dit hoofdstuk dreigt een tragedie te worden van het type ‘briljante wiskundige vergooit zijn leven aan onoplosbaar probleem’², maar dat wordt het niet. In dit geval komt er na zestien jaar van frustratie en zeurende kinderen namelijk een onverwacht happy end. Plaats van handeling is het Royal Canal in Dublin waar Hamilton met zijn vrouw een wandelingetje maakt. Ik citeer Hamilton zelf nu: ‘*And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triples (...) An electric circuit seemed to close, and a spark flashed forth.*’

Uitzinnig van vreugde pakt Hamilton zijn zakmes en kerft zijn magische formule

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

in de dichtstbijzijnde brug: de Brougham Bridge. De inscriptie is overigens nooit teruggevonden, maar nog steeds houden Ierse wiskundigen ieder jaar een wandeltocht naar deze plek om Hamilton te eren en inspiratie op te doen. Voor het gemak heeft de Irish Mathematical Society maar een plaquette met de bovenstaande tekst op de brug aangebracht.

Wat was Hamiltons bevrijdende inzicht? Op het beslissende moment beseftte hij dat zijn pogingen om de getallen naar drie dimensies uit te breiden vergeefs waren, maar dat als hij een stap verder ging en de getallenlijn uitbreidde naar vier dimensies alles opeens perfect in elkaar viel. Naast de gewone reële getallen en de wortel i van -1 , introduceerde Hamilton *nog* twee wortels van -1 die hij j en k noemde. Vandaar zijn formule $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Alle getallen die je met behulp van 1 , i , j en k kunt maken vullen een vierdimensionale ruimte op en noemde hij *quaternionen*. Een willekeurig quaternion bestaat uit een aantal keer 1 plus een aantal keer i plus een aantal keer j plus een aantal keer k , we kunnen het dus schrijven als $a + bi + cj + dk$ met a , b , c en d vertrouwde, reële getallen. Een van mijn favoriete quaternionen is $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$; we komen hier later op terug.

Het idee om -1 allemaal extra wortels te geven lijkt op het eerste gezicht een beetje vreemd. In de complexe getallen heeft -1 maar twee wortels i en $-i$. Dat is geen bijzondere eigenschap van -1 : ieder complex getal behalve nul heeft precies twee wortels (4 heeft bijvoorbeeld de wortels 2 en -2) en daar moeten ze het mee doen. Dat is niet voor niets. Als we bijvoorbeeld de vermenigvuldiging $(i + j)(i - j)$ uitschrijven vinden we $i \cdot i + j \cdot i - i \cdot j - j \cdot j = -1 + ji - ij - (-1) = ji - ij$. Dit lijkt gelijk te zijn aan 0 en dat willen we niet. $0 \cdot (i - j)$ is immers *ook* gelijk aan 0 en dus weten we niet wat 0 gedeeld door $i - j$ is: $i + j$ of toch 0 ? Hamilton loste dit probleem op een bijzonder elegante manier op. $ji - ij$ is niet gelijk aan nul, stelde hij, want ij is niet gelijk aan ji ! Om precies te zijn: i keer j is gelijk aan k , maar j keer i is gelijk aan $-k$. Op dezelfde manier is $jk = i$ maar $kj = -i$ en tot slot $ki = j$ maar $ik = -j$. Dit is wat zijn laatste vergelijking $ijk = -1$ uitdrukt. Tegenwoordig worden deze regels

² Lees bijvoorbeeld de roman Oom Petros en het vermoeden van Golbach van Apostolis Doxiadis.

vaak weergegeven in het schema van Figuur 1. Terugkomend op het voorbeeld is $(i + j)(i - j)$ dus niet gelijk aan 0 maar aan $-2k$.

De gedachte dat x keer y niet hetzelfde hoeft te zijn als y keer x was volkomen nieuw en baanbrekend. We zijn zo gewend dat 4 keer 3 hetzelfde is als 3 keer 4 dat we er niet meer bij nadenken. Maar het is precies wat nodig is om quaternion-vermenigvuldiging te laten werken. Overigens is binnen de quaternionen $4 \cdot 3$ nog steeds het zelfde als $3 \cdot 4$ net zoals $4 \cdot j$ hetzelfde is als $j \cdot 4$, meestal $4j$ genoemd.

Hamilton besloot zijn rest van zijn leven aan de bestudering van quaternionen te wijden. Gezien zijn grote talent voor wis- en natuurkunde misschien jammer, maar persoonlijk kan ik het wel begrijpen. Quaternionen zijn mijn grote wiskundige jeugdliefde. Rekenen met quaternionen is leuk – het is net alsof je opnieuw leert rekenen en alles weer nieuw en spannend is. Door dat x keer y niet altijd hetzelfde is als y keer x moet je je aandacht iets beter erbij houden en doordat alle getallen uit vier delen bestaan kun je van te voren moeilijk voorspellen wat de uitkomst van een berekening wordt. Hierdoor ontdek je soms mooie nieuwe en onverwachte structuren. Bovendien geeft het beeld van quaternionen als punten in een vierdimensionale ruimte je het gevoel dat je je echt iets kunt voorstellen bij de berekeningen.

Zoals de tweedimensionale wereld van de complexe getallen door twee assen beschreven wordt: een reële as en een imaginaire as, zo hebben we in de vierdimensionale ruimte van de quaternionen vier assen: een door 1 (waarop de gewone reële getallen liggen), een door i , een door j en een door k . Als we terugdenken aan de beschrijving van de vierdimensionale platonische lichamen in de lezingen dan zien we dat de acht punten die op afstand 1 van de oorsprong op deze assen liggen: $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ samen de hoekpunten van een vierdimensionale octaëder vormen. Als we de hoekpunten van deze octaëder als getallen zien die we kunnen vermenigvuldigen, ontdekken we iets leuks: zolang we bij vermenigvuldigen blijven en niet optellen hebben we buiten deze acht getallen niets nodig. Het product van twee van de hoekpunten van de vierdimensionale octaëder is weer een van die acht hoekpunten. Samen leven ze in hun eigen blije wereldje waar de rest van de quaternionen niets te zoeken heeft. Je kunt je afvragen of de hoekpunten van de vierdimensionale kubus ook deze eigenschap hebben. Er zijn natuurlijk een hoop plekken in de vierdimensionale ruimte waar je een vierdimensionale kubus kunt neerleggen, maar wij kiezen hier even voor de kubus met hoekpunten $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \pm \frac{1}{2} j \pm \frac{1}{2} k$. Overal waar \pm staat kunt u plus of min invullen, in totaal geeft dit dus zestien verschillende combinaties: de zestien hoekpunten van een vierdimensionale kubus. Voordeel van deze keuze is dat de kubus middelpunt 0 heeft en ribben van lengte 1 die parallel lopen aan de assen.

De vraag was of er iets bijzonders gebeurt als we de punten van de kubus met elkaar vermenigvuldigen en op het eerste gezicht lijkt het antwoord nee. Als we het al eerder genoemde getal $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k$ met zichzelf vermenigvuldigen vinden we (reken u even mee) als antwoord $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k$ wat één stapje verderop in de kubus ligt. Maar als we dit nog een keer met $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k$ vermenigvuldigen komen we opeens uit op -1 ! Op zich heel bijzonder, maar dit getal ligt niet meer in de kubus. Voegen we echter de zestien punten van de vier-

dimensionale kubus samen met de acht punten van de vierdimensionale octaëder hierboven, dan blijkt dat de vierentwintig quaternionen die we zo krijgen wel weer samen een afgesloten wereldje vormen: welke twee van deze getallen je ook kiest, het product is altijd weer een van die vierentwintig. Bovendien blijkt dat deze vierentwintig getallen samen de hoekpunten van het kleinste uitzonderlijke platonische lichaam vormen: de vierentwintigcel.

Al deze vierdimensionale meetkunde is leuk, maar waar het Hamilton natuurlijk om te doen was, was het begrijpen van driedimensionale meetkunde. We leven tenslotte in een driedimensionale wereld. Ook hier staan de quaternionen hun mannetje. Hamilton introduceerde de zogenaamde *pure quaternionen*, quaternionen van de vorm $bi + cj + dk$ die je overhoudt als je alle reële getallen negeert. Deze vormen een driedimensionale ruimte (binnen de vierdimensionale ruimte van alle quaternionen kun je de pure quaternionen zien als het driedimensionale 'vlak' dat loodrecht op de lijn van reële getallen staat) en het was deze ruimte waarbinnen Hamilton zijn meetkunde deed.

Alle 'starre' bewegingen in de driedimensionale ruimte zijn een samenstelling van draaiingen, spiegelingen en verschuivingen en alle drie laten die zich eenvoudig met quaternionen beschrijven. Verschuivingen zijn het makkelijkst. Een verschuiving van de driedimensionale wereld is gewoon het bij elk punt optellen van een vast puur quaternion. Dan spiegelingen. Een bijzondere rol weggelegd voor de bolschil van pure quaternionen op afstand 1 van de oorsprong. Elk punt u op deze bol definieert een vlak: we tekenen de lijn door 0 en u en bekijken het vlak door 0 in de driedimensionale ruimte dat daar loodrecht op staat. (Figuur 2.) Als we willen weten wat spiegelen in dit vlak is, hebben we aan u genoeg. Als we een willekeurig puur quaternion x bekijken dan is het punt dat we vinden door x in het vlak beschreven door u te spiegelen gelijk aan de uitkomst van de vermenigvuldiging uxu . Dit is niet korter te schrijven als u^2x omdat ux en xu niet hetzelfde hoeven te zijn. Echter, de symmetrische notatie uxu past natuurlijk ook veel beter bij het fenomeen spiegelen, dus erg rouwig kunnen we hier niet om zijn.

Met quaternionen kunnen we dus heel snel en makkelijk uitrekenen hoe je een punt (of een verzameling punten) spiegelt in een willekeurig vlak door de oorsprong. Omdat we ook begrijpen hoe verschuivingen werken, is spiegelen in willekeurig vlak in de ruimte een fluitje van een cent geworden. Het mooiste van alles zijn echter draaiingen. Hiervoor is het nodig te begrijpen hoe deling in de quaternionen werkt.

Zoals ik hierboven beschreef vermoed ik dat Hamilton een vermenigvuldiging pas als vermenigvuldiging wilde accepteren op het moment dat hij ook een vorm van deling toelaat. Bij quaternionvermenigvuldiging is dit inderdaad het geval. Wel moeten we een klein beetje voorzichtig zijn: het feit dat xy niet altijd hetzelfde is als yx werpt ook zijn schaduwen in de wereld van het delen. Laten we met het goede nieuws beginnen: voor ieder quaternion q (behalve 0) kunnen we zonder twijfel of dubbelzinnigheid het quaternion $1/q$ uitrekenen. Meestal wordt dit quaternion niet genoteerd als $1/q$ maar als q^{-1} , de 'inverse' van q . Als $q = a + bi + cj + dk$ (hierin zijn a, b, c, d reële getallen) dan is $q^{-1} = 1/(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (a - bi - cj - dk)$. U

kunt zelf nagaan dat $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Met iets meer moeite is ook te zien dat q^{-1} het enige quaternion is dat deze eigenschap heeft en dus de naam ‘1 gedeeld door q ’ verdient.

Omdat delen door q het zelfde is als vermenigvuldigen met zijn inverse (10 gedeeld door 2 is hetzelfde als 10 keer $\frac{1}{2}$; 9 gedeeld door 3 is hetzelfde als $\frac{1}{3}$ keer 9) weten we ook hoe we een willekeurig quaternion r door een quaternion q moeten delen: delen door q is gewoon vermenigvuldigen met q^{-1} . Omdat rq^{-1} en $q^{-1}r$ niet hetzelfde hoeven te zijn, moeten we onderscheid maken tussen ‘ r van links door q delen’ en ‘ r van rechts door q delen’, maar zolang we netjes blijven zeggen welke vorm van delen we gebruiken werkt alles perfect.³

Terug naar draaiingen. Als we een puur quaternion x van links vermenigvuldigen met een niet-nul quaternion q en vervolgens weer van links door q delen, is het antwoord vanzelfsprekend weer gelijk aan x . Als we x nu opnieuw van links met q vermenigvuldigen maar dit keer van rechts door q delen, dan hoeft de uitkomst qxq^{-1} niet per se gelijk te zijn aan x , maar ons rechtvaardigheidsgevoel zegt dat hij ook niet al te veel van x kan verschillen. Dat gevoel klopt, qxq^{-1} is weer een puur quaternion en ligt het op dezelfde afstand van 0 als x . Dat betekent dat de overgang van x naar qxq^{-1} zich (op meerdere manieren) meetkundig laat beschrijven als een draaiing over een zekere hoek om een zekere as door de oorsprong. En nu komt het wonder: één van die draaiingen heeft de magische eigenschap dat als we een ander willekeurig puur quaternion y nemen, de overgang van y naar qyq^{-1} zich laat beschrijven als een draaiing om dezelfde as en over dezelfde hoek. Die as en hoek hangen dus alléén van q af – het quaternion q definieert kortom een draaiing om de oorsprong in de driedimensionale ruimte. Ieder quaternion definieert een draaiing, en omgekeerd wordt iedere draaiing beschreven door een quaternion.⁴ Een draaiing om de as door i over een hoek van negentig graden wordt bijvoorbeeld beschreven door het quaternion $1 + i$. Laten we dit los op j dan verwachten we in k uit te komen en inderdaad: $(1 + i)j(1 + i)^{-1} = (1 + i)j(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = 1j\frac{1}{2} + 1j(-\frac{1}{2}i) + ij\frac{1}{2} + ij(-\frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}j = k$. Als we dit op $i + j + k$ loslaten, verwachten we in $i - j + k$ uit te komen (zie Figuur 3) en u kunt zelf narekenen dat ook dat klopt.

Een onmiddellijk gevolg van de beschrijving van draaiingen als quaternionvermenigvuldiging is dat als ik de wereld eerst draai volgens quaternion q en vervolgens volgens quaternion r (dus mogelijk om een totaal andere as en hoek) ik het resultaat ook had kunnen verkrijgen door maar één keer te draaien (om weer een andere as): de draaiing die behoort bij het quaternion rq .

Hoewel dat gegeven (de ogenschijnlijk onnavolgbare verplaatsing van punten in de ruimte die je krijgt door twee draaiingen na elkaar uit te voeren is netto het

³ Een voorbeeld. De inverse i^{-1} van i is $-i$, want $(-i)i = -(-1) = 1$. Dit geeft twee verschillende vormen van ‘ k gedeeld door i ’: k van links gedeeld door i is $i^{-1}k = (-i)k = j$ en k van rechts gedeeld door i is $k i^{-1} = k(-i) = -ki = -j$. Merk op dat beide interpretaties van ‘ k gedeeld door i ’ aansluiten bij ons idee hoe delen zich tot vermenigvuldigen dient te verhouden: $k/i = j$ ‘want’ $ij = k$ en $k/i = -j$ ‘want’ $(-j)i = k$.

⁴ Door oneindig veel quaternionen zelfs, want q en $2q$ en $-q$ en aq voor ieder ander reëel getal a definiëren allemaal dezelfde draaiing.

resultaat van één simpele draaiing) mogelijk al vóór Hamilton bekend was, blijf ik het een verrassend resultaat vinden.

Opkomst, ondergang en wonderbaarlijke wederopstanding van de quaternionen

Zoals gezegd wijdde Hamilton de rest van zijn leven aan quaternionen, wat onder andere resulteerde in verschillende dikke boeken. Gelukkig voor hem misten de quaternionen hun impact niet. Natuurkundigen waren dol op de snelle manier om draaiingen en andere bewegingen in de ruimte te beschrijven en wiskundigen zagen hun ogen geopend worden door deze nieuwe meetkundige manier van over getallen na te denken en stortten zich massaal op de zoektocht naar getallen in acht en zestien dimensies.⁵ De Verenigde Staten bepaalden zelfs dat quaternionen de (enige) wiskunde was die alle studenten aan hun universiteiten moesten leren. Eind negentiende eeuw gingen de quaternionen aan hun eigen succes ten onder. Een van die Amerikanen, de natuurkundige Gibbs, merkte op dat hij als natuurkundige in de praktijk alleen maar pure, driedimensionale quaternionen vermenigvuldigde en nooit volledige quaternionen met vier termen. Niet zo gek natuurlijk, want we leven in een driedimensionale wereld en niet in een vierdimensionale. De uitkomst van zo'n vermenigvuldiging is meestal wel een quaternion met vier termen, zeg $a + bi + cj + dk$. Gibbs, met zijn kritische blik, ervoer echter dat hij en zijn collega's in sommige berekeningen alleen maar het reële deel (a) van deze uitkomst nodig hadden en in andere alleen het quaterniondeel ($bi + cj + dk$) maar nooit het quaternion als geheel. Het reële deel van een quaternion is een getal, iets dat we al ons hele leven kennen en liefhebben. Het quaterniondeel is een punt in de ruimte, iets waar we al evenzeer vertrouwd mee zijn. Het quaternion als geheel daarentegen leeft in een onzichtbare vierdimensionale ruimte en is daarmee een angstaanjagend abstract concept waar de meeste van Gibbs' studenten een hoop moeite mee hadden. Zou het niet veel makkelijker zijn, zo redeneerde hij, als je uit twee punten in de ruimte u en v meteen het reële deel en het quaterniondeel van uv kunt rekenen zonder ooit het product uv (of de hele gedachte dat punten in de ruimte ook getallen zijn) nodig te hebben? Zo gezegd zo gedaan. Gibbs introduceerde de notatie $u \cdot v$ voor het reële deel van uv en de notatie $u \times v$ voor het quaterniondeel en beschreef zijn nieuwe bewerkingen (het 'inproduct') en \times (het 'uitproduct') op zo'n manier dat de dingen die je vermenigvuldigde geen getallen waren, maar gewoon punten in de ruimte.

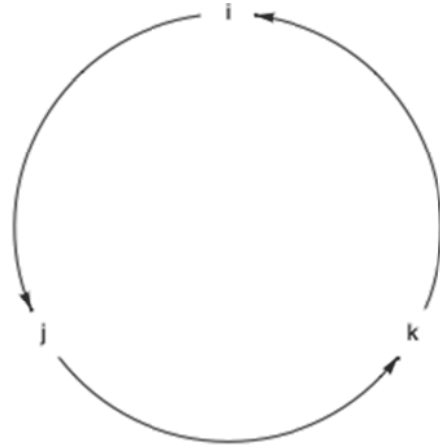
⁵ Deze zoektocht duurde echter maar een paar jaar omdat de uitkomst wat teleurstellend bleek. Iedere keer dat je de dimensies verdubbelt betaal je een prijs. Bij de overgang van reëel naar complex verlies je de notie van groter en kleiner. Bij de overgang naar quaternionen verlies je de regel $xy = yx$. Daar is nog wel mee te leven. Bij de volgende stap, naar de *octonionen* in acht dimensies, verlies je een eigenschap van getallen die zo vanzelfsprekend is dat niemand er voor de ontdekking van octonionen in 1843 ooit bij stil gestaan had, namelijk dat $(xy)z = x(yz)$. (Dus, als we $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ nemen, dat $12 \cdot 5 = 3 \cdot 20$ wat inderdaad waar is.) De afwezigheid van deze eigenschap maakt dat bijna niemand zin heeft iets aan octonionen uit te rekenen en ze als een volkomen curiositeit beschouwd worden, meer dan als getallen.

Gibbs nieuwe notaties werden een doorslaand succes. Mensen willen immers efficiënt hun berekeningen doen en zijn, op een enkele verdwaasde romanticus als ik na, niet geïnteresseerd in de magische getallenwereld die erachter schuilgaat. Nog steeds horen het in- en uitproduct tot de eerste dingen die je leert als je wis- of natuurkunde gaat studeren en lijken de quaternionen volkomen in de vergetelheid geraakt. Eind twintigste eeuw echter sloegen de quaternionen genadeloos terug. Zoals gezegd beschrijft ieder quaternion een draaiing. In veel natuurkundige toepassingen waar iets draait hoef je niets aan die draaiing uit te rekenen, je wilt hooguit weten om welke as de draaiing plaatsvindt en wat de snelheid is. In de wereld van de computergraphics en virtual reality is het echter andere koek. Een vluchtsimulator die de bestuurder het idee wil geven in een rare richting over de kop te slaan moet in een fractie van een seconde van ieder punt in de (virtuele) ruimte berekenen waar hij naartoe gedraaid wordt. Dat is precies waar quaternionen goed in zijn: je vermenigvuldigt ieder punt van links met q en van rechts met q^{-1} , waar q het quaternion is dat de gewenste draaiing beschrijft, en klaar is kees. Een meer voor de hand liggende manier om draaiingen te beschrijven is van drie standaard referentiepunten in de ruimte (zeg $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$) te vertellen waar ze naartoe gedraaid worden. De eindpositie van de andere punten is hier dan makkelijk uit te berekenen. Voor het beschrijven van een willekeurige draaiing heb je dan negen getallen nodig: drie voor de nieuwe plek van $(1, 0, 0)$, drie voor de nieuwe plek van $(0, 1, 0)$ en drie voor de nieuwe plek van $(0, 0, 1)$. Met een quaternion heb je maar vier getallen nodig.

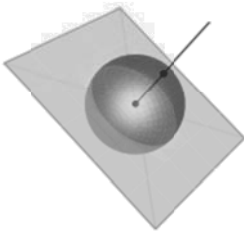
Dit lijkt niet zo'n groot verschil, maar wie veel quaternionen wil vermenigvuldigen om zo ingewikkelde samengestelde draaiingen te vinden is een stuk sneller klaar dan wie evenzovele blokken van drie bij drie getallen (matrices) vermenigvuldigt.

En in de wereld van de computer moet alles snel, sneller, snelst – een piloot in opleiding wil niet dat wanneer hij aan de stuurknuppel trekt de gevolgen van zijn actie plop plop plop met één beeldje per seconde binnen komen druppelen.

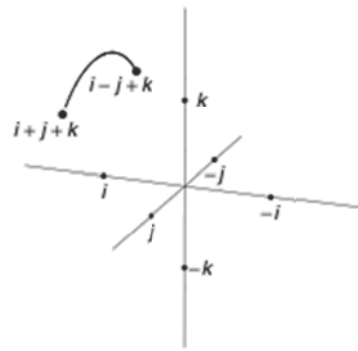
Het gaat wat ver om te zeggen dat quaternionen levens redden, maar als u morgen een computerspeltje speelt en het valt u op hoe vloeiend en geloofwaardig alle driedimensionale bewegingen eruit zien, denkt u dan nog eens aan Hamilton en wat een ellende hij heeft moeten doorstaan om dit mogelijk te maken.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

De classificatie van regelmatige vlakverdelingen

Hessel Posthuma

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam

e-mail: H.B.Posthuma@uva.nl

Samenvatting

In dit college behandelen we de wiskundige theorie achter vlakverdelingen en betegelingen. Deze gaat uit van het begrip symmetrie. Vanuit dit gezichtspunt behandelen we Conway's meetkundige bewijs van de classificatiestelling van dit soort patronen.

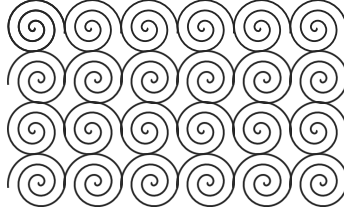
1 Inleiding: regelmatige vlakverdelingen

Vlakverdelingen komen we op tal van plekken tegen. De meest dagelijkse voorbeelden zijn natuurlijk de betegelingen van straten en muren. Ook in de architectuur en kunst zijn vele voorbeelden te vinden. Het Alhambra paleis in Granada is bekend om de mozaïeken op de muren, en de kunstenaar M.C. Escher gebruikte het idee van vlakverdelingen in veel van zijn werken.

Figuur 1 geeft een schematisch voorbeeld van zo'n vlakverdeling. Wat onmiddellijk opvalt is de hoge mate van symmetrie die dit soort patronen heeft. Deze symmetrie is precies de kern van de wiskundige zienswijze op zulke patronen, zoals we verderop zullen uitleggen. Het is een feit dat er maar 17 verschillende van dit soort vlakverdelingen zijn. Dit werd voor het eerst in 1891 bewezen door de russische wiskundige Evgraf Fedorov, en later in 1924 onafhankelijk door de Hongaarse wiskundige George Pólya.

Het doel van dit college is het moderne bewijs van deze classificatiestelling van de Engelse wiskundige John Horton Conway uit te leggen. Het aantrekkelijke aan zijn argument is dat het gebruik maakt van elementaire begrippen uit de meetkunde en topologie, en leidt daarom tot dieper inzicht.

De wiskundige abstractie van het begrip symmetrie is die van een *groep*. De theorie hieronder beschrijft een voorbeeld van de vermenging van de groepentheorie met meetkunde, die een lange geschiedenis heeft. Als eerste stelde de Duitse wiskundige Felix Klein in 1872 voor om de theorie van groepen toe te passen om niet-Euclidische meetkundes te beschrijven en classificeren in zijn zogenaamde "Erlangenprogramma". Dit is een zeer invloedrijk idee geweest, en speelt in zekere zin nog steeds een rol in de moderne wiskunde.



Figuur 1: Een regelmatige vlakverdeling

Over vlakverdelingen en betegelingen is veel informatie te vinden in de literatuur en op het web. De Wikipedia pagina [3] is een goed beginpunt op het internet; hij bevat veel voorbeelden van alle 17 patronen. Conway's bewijs is voor het eerst gepubliceerd in [1]. Het recente boek [2] geeft een heel aantrekkelijke uitleg aan de hand van vele illustraties, en gaat nog veel verder.

2 Symmetrieën in het Euclidische vlak

We beginnen met een discussie over de symmetrieën van het Euclidische vlak. We schrijven (x, y) om een punt in \mathbb{R}^2 aan te geven, maar soms schrijven we ook kort \vec{a} voor een vector in \mathbb{R}^2 . De symmetrieën van het Euclidische vlak kunnen als volgt onderverdeeld worden:

1. *Translaties*. Kies een vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Translatie over deze vector is gedefinieerd als

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b).$$

2. *Rotaties*. Voor een rotatie kiezen we een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alsmede een hoek $\theta \in [0, 2\pi)$. Kiezen we de oorsprong als draaipunt, dit kunnen we altijd door middel van een translatie realiseren, dan is de rotatie gegeven door

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

3. *Spiegelingen*. Een spiegeling is bepaald door de keuze van een lijn $L \subset \mathbb{R}^2$. Spiegeling in de x -as is bijvoorbeeld gegeven door

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

4. *Glijspiegelingen*. Een glijspiegeling is de samenstelling van een translatie met een spiegeling in de lijn die bepaald is door de translatievector. De glijspiegeling met vector $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ is bijvoorbeeld gegeven door

$$(x, y) \mapsto (x + 1, -y).$$

Deze symmetrieën hebben de gemeenschappelijke eigenschap dat ze de *Euclidische afstand*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

behouden. Omgekeerd geldt dat een transformatie in \mathbb{R}^2 die afstandsbehoudend is, noodzakelijk één van de bovenstaande vorm is.

Uiteraard kunnen we symmetrieën samenstellen: als we de ene transformatie na de ander uitvoeren volgt eenvoudig dat de afstand (1) behouden blijft. Daarom is de samenstelling weer een symmetrie van de lijst (1)–(4). We zien nu onmiddellijk dat de lijst (1)–(4) niet minimaal is onder deze operatie aangezien een glijspiegeling per definitie de samenstelling van een translatie en een spiegeling is. Sterker nog:

Stelling 2.1 (De drie spiegelsstelling). *Elke isometrie in \mathbb{R}^2 is het product van één, twee of drie spiegelingen. Samenstellingen van twee spiegelingen corresponderen met rotaties en translaties.*

In het vervolg schrijven we kort T voor een willekeurige symmetrie van het Euclidische vlak, dus een element van de lijst (1)–(4). Dit is een afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heet een vast punt van een symmetrie T als het onder T op zichzelf afgebeeld wordt: $T(x, y) = (x, y)$. We zien onmiddellijk dat translaties en glijspiegelingen geen vaste punten hebben, een rotatie maar één vast punt, namelijk het draaiingspunt, en ten slotte dat spiegelingen een lijn aan vaste punten hebben: de lijn waarin gespiegeld wordt.

Opmerking 2.2. Het wiskundige synoniem voor symmetrie is die van een *groep*. We zullen de precieze definitie hier niet geven, maar dit is de formalisatie van de volgende eigenschappen van de bovenstaande symmetrieën:

- We kunnen symmetrieën *samenstellen*. Notatie: $T_1 \circ T_2$
- Samenstelling met de *identiteitstransformatie* $id : (x, y) \mapsto (x, y)$ laat een symmetrie onveranderd. In wiskundige notatie:

$$id \circ T = T = T \circ id,$$

voor elke symmetrie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- Voor elke symmetrie T is er een *inverse* T^{-1} die voldoet aan

$$T \circ T^{-1} = id = T^{-1} \circ T.$$

Opgave 2.3. Wat zijn de inverses van de symmetrieën (1)–(4)?

Opgave 2.4. Laat zien dat alle symmetrieën (1) – (4) inderdaad de afstand (1) behouden.

Opgave 2.5. Wanneer is een samenstelling van twee spiegelingen een rotatie en wanneer een translatie? In het eerste geval: hoe kunnen het draaiingspunt en de hoek bepaald worden uit de twee spiegelsassen? In het tweede geval: op welke manier leggen de spiegelsassen de translatievector vast?

3 Het classificatieprobleem

We richten ons nu op het eigenlijke onderwerp: vlakverdelingen van \mathbb{R}^2 . Dit zijn patronen die het hele Euclidische vlak overdekken. We kunnen denken aan patronen zoals die te vinden zijn op behangpapier. Hoewel we natuurlijk in de praktijk slechts een eindig deel van zo'n patroon op een muur zien, is het duidelijk dat het patroon in principe tot in het oneindige is voort te zetten.

De wiskundige kijk op dergelijke patronen is door middel van de symmetrie die ze vertonen. Preciezer: we beschouwen alle symmetrieën van het Euclidische vlak die het patroon op zichzelf afbeelden. Deze vormen weer een groep, wat neerkomt op het feit dat als twee symmetrieën T_1 en T_2 een patroon in zichzelf overvoeren, hun samenstelling $T_1 \circ T_2$ dat ook doet. Een fundamentele aanname is nu:

<i>Er bestaan twee vectoren in verschillende richtingen waarover we kunnen transleren.</i>	(★)
--	-----

Dit wil zeggen dat onze vlakverdeling *regelmatig* is. Aan het eind zullen we nog ingaan op de *onregelmatige* vlakverdelingen.

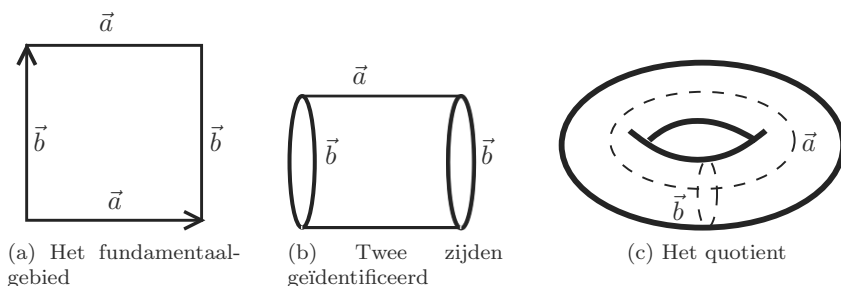
Gebruik makend van de symmetrieën kunnen we nu een *fundamenteaalgebied* kiezen: dit is een gebied $A \subset \mathbb{R}^2$ met de volgende twee eigenschappen:

- 1) Als we alle symmetrieën van het patroon loslaten op A overdekken we de hele \mathbb{R}^2 . In formules: voor elke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is er een symmetrie T alsmede een punt $(x_0, y_0) \in A$ zodanig dat $T(x_0, y_0) = (x, y)$.
- 2) Er is geen kleiner gebied $A' \subset A$ met eigenschap 1).

In voorbeelden ziet men makkelijk dat zo'n fundamenteaalgebied inderdaad bestaat, maar niet uniek is: er zijn vele gebieden die aan beide bovenstaande voorwaarden voldoen. Maakt men echter een keuze, dan is het handige van een fundamenteaalgebied dat het, tezamen met de symmetriegroep het hele patroon vastlegt. Het fundamenteaalgebied geeft de details van het patroon, terwijl de symmetriegroep bepaalt hoe deze zich herhalen naarmate het patroon het vlak vult. Dit heet ook wel een *periodieke betegeling*: het fundamenteaalgebied is een tegel en de symmetriegroep vertelt ons op welke wijze deze “gelegd” moet worden.

De wiskundige zienswijze op vlakverdelingen via symmetrieën leidt tot het volgende begrip van equivalentie: we beschouwen twee vlakverdelingen als *equivalent* als ze dezelfde symmetrieën hebben. Met andere woorden, wat van belang is, is de manier waarop een patroon zichzelf herhaalt als het het vlak vult, niet de details van het figuur zelf. Inderdaad correspondeert dit precies met het begrip waarmee we intuïtief twee vlakverdelingen als “hetzelfde” ervaren. Een rondgang langs voorbeelden kan de lezer hier snel van overtuigen.

Nu we een precies begrip van equivalentie hebben, dient de volgende natuurlijke vraag zich onmiddellijk aan: *hoeveel verschillende vlakverdelingen op*



Figuur 2: Het quotiënt van een patroon met alleen translatiesymmetrie.

de \mathbb{R}^2 bestaan er eigenlijk? Het antwoord op deze vraag werd al in 1891 gegeven door Fedorov en is een klassiek resultaat in de wiskunde:

Stelling 3.1. *Er bestaan precies 17 verschillende periodieke betegelingen van \mathbb{R}^2 .*

Onafhankelijk van Fedorov, gaf Polya in 1924 een alternatief bewijs. Hier geven we het meetkundige argument van Conway [1] om deze classificatie te bewijzen.

4 De Quotiëntconstructie

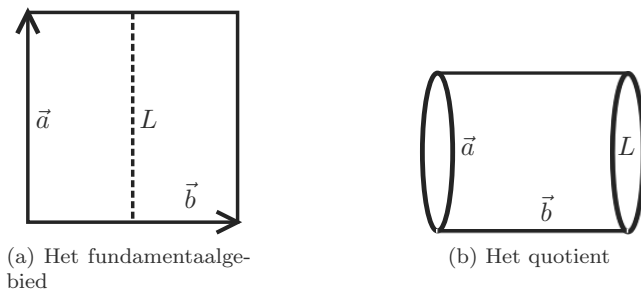
De eerste stap in het argument behelst een constructie die vaak voorkomt in de wiskunde: als er symmetrie in het spel is proberen we die “uit te delen”. Formeel gaat dit als volgt. We bekijken een specifieke vlakverdeling en definiëren de volgende equivalentierelatie op \mathbb{R}^2 :

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{Er is een symmetrie } T \text{ met } T(x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Vervolgens bekijken we de ruimte van *equivalentieklassen*, in dit geval ook wel *banenruimte* genoemd. Dit betekent dat we verschillende punten in één klasse letterlijk willen identificeren. In de praktijk gaat dit als volgt:

- Kies een fundamenteelgebied.
- De symmetrieën van het patroon zullen delen van de rand van dit gebied afbeelden op de rand.
- Plak de randen van het fundamenteelgebied aan elkaar volgens bovenstaande identificaties.

Laten we wat voorbeelden bekijken:



Figuur 3: Het quotient van 2 translaties en 2 spiegelingen.

Voorbeeld 4.1 (Translaties). Uit de aanname (\star) blijkt dat het minimale voorbeeld, dat wil zeggen dat het minst symmetrisch is, alleen translaties over twee vectoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ bevat. Het is eenvoudig in te zien dat een keuze van fundamentaalgebied nu een parallellogram is, opgespannen door \vec{a}, \vec{b} , we nemen voor het gemak een vierkant. In figuur 2 wordt het quotient geconstrueerd door eerst de translatie over \vec{b} “uit te delen” en vervolgens die over \vec{a} . We plakken alle zijden aan elkaar; dit is een torus. (Notatie T^2).

Voorbeeld 4.2 (Translaties en twee spiegelingen). Een iets gecompliceerder patroon heeft naast twee translaties, ook twee spiegelingssassen. Aangezien we nu meer symmetrie hebben, is het fundamentaalgebied kleiner. We tekenen eerst een fundamentaalgebied van de translatiesymmetrieën, voor het gemak als een vierkant in Figuur 3a, met translatievectoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. We nemen aan dat de spiegelingssassen de lijn opgespannen door \vec{a} en L zijn. Het volgt nu dat een fundamentaalgebied gegeven is door de rechthoek opgespannen door de vectoren \vec{a} en $\frac{1}{2}\vec{b}$, precies de helft van het fundamentaalgebied van de translatiesymmetrie. Dientengevolge hoeven maar twee randen aan elkaar geplakt te worden. Het quotient is in dit geval een cylinder. Dit is een ruimte die twee randen heeft: precies de spiegelingssassen van de twee spiegelingen!

Voorbeeld 4.3 (Translaties en rotaties). Er is ook een betegeling die naast twee translaties nog drie onafhankelijke draaiingen heeft. Laten we de translaties in \mathbb{R}^2 over de vectoren $\vec{a} = (3, 0)$ en $\vec{b} = (0, 2)$ nemen. We plaatsen de draaiingspunten $(0, 0)$, $(2, 0)$ en $(1, 2)$ en alle drie rotaties zijn over 120° . Een geschikte keuze van fundamentaalgebied is nu het parallellogram opgespannen door de vectoren $(1, 2)$ en $(2, 0)$. De twee rotaties in $(1, 2)$ en $(2, 0)$ identificeren elk twee zijden van dit parallellogram zodat het quotient een soort driehoekig kussen wordt. Merk op dat de vaste punten van de rotaties precies corresponderen met de drie “kegelpunten” die deze ruimte heeft.

Opgave 4.4 (Translaties en een glijspiegeling). Het meest eenvoudige patroon met een glijspiegeling heeft twee translaties, we nemen $\vec{a} = (2, 0)$ en $\vec{b} = (0, 2)$, en een glijspiegeling met een vector die begint in $(1, 0)$ en eindigt in $(1, 1)$. Vind

een fundamenteaalgebied en laat zien dat het quotient van zo'n betegeling de Möbiusband is.

5 Orbifolds

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat het uitdelen van symmetriegroepen van betegelingen leidt tot een breed scala aan meetkundige objecten. Hier gaan we iets dieper in op de structuur die ze gemeen hebben. We onderscheiden weer enkele gevallen:

De symmetrieën hebben geen vaste punten. Met andere woorden, onze symmetriegroep bestaat alleen uit translaties en/of glijspiegelingen. In dit geval kan men laten zien dat in de quotientruimte elk punt de volgende eigenschap heeft:

<i>In een kleine omgeving ziet de ruimte er uit als (een deel van) \mathbb{R}^2.</i>	(★★)
---	------

Wiskundig heet dit een tweedimensionale *variëteit*, ook wel een *oppervlak*. Om een eenvoudig voorbeeld te geven uit de dagelijkse praktijk: het oppervlak van een bol is een variëteit. Als we om ons heen kijken lijkt het aardoppervlak een tweedimensionale vlakke ruimte, terwijl we feitelijk op het oppervlak van een bol leven. *Lokaal* kunnen we \mathbb{R}^2 als model gebruiken, terwijl *globaal* de structuur anders kan zijn. Dit onderscheid tussen lokaal en globaal wordt belangrijk als we topologie in het spel brengen in het volgende hoofdstuk.

Een andere opmerking is dat we in de voorbeelden hierboven gezien hebben dat glijspiegelingen ervoor kunnen zorgen dat ons oppervlak geen binnen- of buitenkant heeft, zoals bij de Möbiusband. Wiskundig heet dit dat de variëteit *niet-oriënteerbaar* is.

Er zijn symmetrieën met vaste punten. Dit is het algemene geval, zoals we hierboven gezien hebben. We hebben nu dus ook rotaties en spiegelingen in onze symmetriegroep. Uit de voorbeelden blijkt dat het quotient nu grillige vormen aan kan nemen. De vaste punten van symmetrieën hebben niet de eigenschap die in (★★) beschreven wordt en worden daarom ook *singulier* genoemd. We geven een lijst met mogelijkheden:

Singulariteit	Bijbehorende symetrie
kegelpunt	Vast punt van een rotatie
rand	As van een spiegeling
hoekpunt	Snijpunt van spiegelingssassen

Inderdaad zien we dat voor een kegel- of hoekpunt of een punt of de rand, een kleine omgeving er niet uitziet als een plat vlak: vanuit een punt op een rand kunnen we niet in alle richtingen weglopen, en een omgeving van de top

van een kegel is niet “plat te drukken”. Technisch gesproken zeggen we dat een ruimte in deze punten niet *glad* is.

We zien dus dat het quotient over het algemeen geen gladde variëteit is, maar iets algemener wat ook wel een *orbifold* genoemd wordt. We zullen hier geen algemene definitie van orbifolds geven. Voor ons volstaat dat dit tweedimensionale meetkundige ruimtes zijn die bijna overal voldoen aan eigenschap ($\star\star$), maar ook singulariteiten kunnen hebben van de vorm als boven in de tabel.

6 De Eulerkarakteristiek

Topologie is een onderdeel van de wiskunde dat de globale eigenschappen van meetkundige ruimtes onderzoekt. Het wordt soms ook wel rubbermeetkunde genoemd aangezien het (continu) vervormen van objecten vanuit topologisch oogpunt geen effect heeft: het oppervlak van een bol is topologisch equivalent aan dat van een kubus.

De *Eulerkarakteristiek* van een ruimte is een geheel getal dat ongevoelig is voor dit soort vervormingen. Zij neemt dus dezelfde waarde aan voor topologisch equivalente ruimtes en kan gebruikt worden om topologisch inequivalente ruimtes te onderscheiden. Zij is vernoemd naar haar ontdekker Leonhard Euler (1707–1783).

We hebben hierboven gezien dat het quotient van een betegeling van \mathbb{R}^2 over het algemeen een orbifold is en een glad oppervlak als de symmetrieën geen vaste punten hebben. We leggen nu eerst uit hoe de Eulerkarakteristiek van een glad oppervlak uit te rekenen en daarna behandelen we het geval van een orbifold.

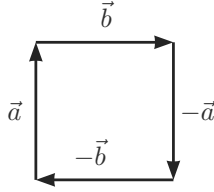
Zij X een tweedimensionale variëteit. We tekenen op X een aantal punten, die we verbinden met een aantal lijnen zodanig dat:

1. lijnen elkaar niet kruisen,
2. elke twee punten via een aantal opeenvolgende lijnen met elkaar verbonden zijn,
3. als we X open knippen langs de lijnen, we een aantal vlakken overhouden die we plat kunnen leggen.

We noemen zo’n verzameling punten en lijnen een *graaf* of *tekening* op X . Schrijf nu F (“faces”) voor het aantal vlakken dat we overhouden, E (“edges”) voor het aantal lijnen en V (“vertices”) voor het aantal punten. De Eulerkarakteristiek is nu gedefinieerd als

$$\chi := V - E + F. \tag{2}$$

Men kan laten zien dat dit getal onafhankelijk is van de keuzes die hierboven gemaakt zijn: elke andere verzameling punten en lijnen die voldoet aan de bovenstaande eigenschappen geeft hetzelfde getal.



Figuur 4: Constructie van het projectieve vlak

Voorbeeld 6.1 (De Eulerkarakteristiek van een torus). Om de Eulerkarakteristiek van een torus te berekenen gebruiken we de graaf die al getekend is op het figuur 2c: we hebben 1 vertex, 2 lijnen, gegeven door het beeld van de vectoren \vec{a} en \vec{b} . Als we de torus openknippen volgens deze tekening vinden we 1 vlak, namelijk precies het fundamenteaalgebied! De Eulerkarakteristiek is dus gegeven door:

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0.$$

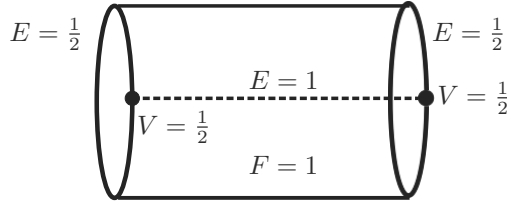
Opgave 6.2. Laat zien dat het boloppervlak S^2 Eulerkarakteristiek $\chi = 2$ heeft. Een voetbal is gemaakt uit regelmatige vijf- en zeshoeken. Hoeveel vijfhoeken moeten we daar voor gebruiken?

Opgave 6.3. Het reëel projectieve vlak \mathbb{RP}^2 kan geconstrueerd worden door in een vierkant de zijden aan elkaar te plakken zoals aangegeven in Figuur 4. Op het eerste gezicht lijkt dit op de constructie van een torus zoals in Voorbeeld 2c, maar het verschil is dat hier bij beide plakconstructies één van de zijden gedraaid wordt. Het resultaat is een niet-oriënteerbaar oppervlak dat niet in de \mathbb{R}^3 getekend kan worden zonder zelfdoorsnijdingen. Laat zien dat $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$.

Voor orbifolds ligt de zaak iets gecompliceerder, aangezien de singulariteiten op bijzondere wijze bijdragen aan de Eulerkarakteristiek. Dit gaat als volgt. We volgen weer dezelfde procedure en tekenen punten en lijnen op onze orbifold zo dat aan de voorwaarden (1)–(3) is voldaan, maar ook dat:

- (4) hoekpunten en kegelpunten punten op onze tekening zijn,
- (5) randen lijnen in onze tekening zijn.

We berekenen nu de *orbifold-Eulerkarakteristiek* χ_{orb} volgens dezelfde formule (2) waarbij punten en lijnen meetellen als $1/k$ waarbij k het aantal symmetrieën is dat de punten of lijnen vast laat. Voor een “gewone” lijn is dat dus 1 (voor de identiteitssymmetrie), voor een lijn op de rand $1/2$ (identiteit + een spiegeling). Een kegelpunt die een vast punt is van een rotatie over 120° telt mee met een factor $1/3$, en een hoekpunt waar n spiegelingssassen snijden heeft als wegingsfactor $1/2n$. We zien dus dat de orbifold-Eulerkarakteristiek geen geheel getal is maar *rationaal*.



Figuur 5: De orbifold-Eulerkarakteristiek van een cylinder

Voorbeeld 6.4 (De orbifold-Eulerkarakteristiek van een cylinder). We bekijken het voorbeeld van een cylinder, een orbifold met twee randen en geen kegel- of hoekpunten. We nemen de tekening met 2 punten en 3 lijnen zoals aangegeven in figuur 5. Hiermee krijgen we

$$\chi_{orb} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = 0.$$

Opgave 6.5. Bereken de orbifold-Eulerkarakteristiek van Voorbeelden 4.2 en 4.3 en van Opgave 4.4.

7 De classificatie

We hebben in het voorgaande gezien dat het quotient van een betegeling een orbifold is en hebben enkele voorbeelden geconstrueerd. Deze blijken alle orbifold-Eulerkarakteristiek $\chi_{orb} = 0$ te hebben. Dit is geen toeval, getuige de volgende stelling:

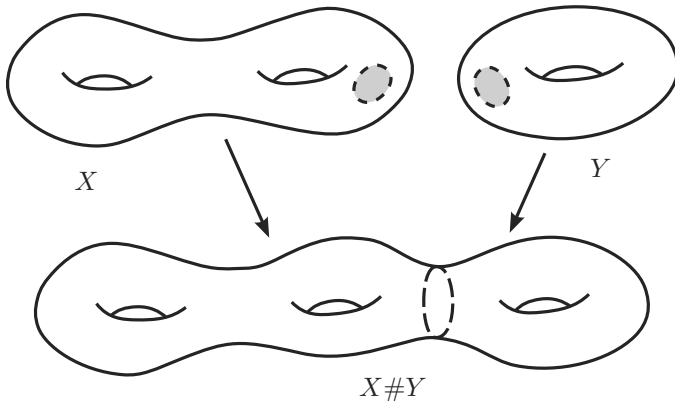
Stelling 7.1 (Conway). *a) Het quotient van een periodieke betegeling van \mathbb{R}^2 is een orbifold met Eulerkarakteristiek $\chi_{orb} = 0$.*

b) Omgekeerd is elke compacte tweedimensionale orbifold met $\chi_{orb} = 0$ het quotient van een betegeling van \mathbb{R}^2 .

“Compactheid” is een technische conditie die informeel zegt dat we niet in een richting naar oneindig kunnen lopen. Het Euclidische vlak zelf is om deze reden niet compact.

Voor een bewijs van deze stelling verwijzen we naar [2]. Merk op dat de stelling in principe een methode geeft om een vlakverdeling van \mathbb{R}^2 te construeren: neem een stuk papier en vouw en plak een orbifold met Euler karakteristiek $\chi_{orb} = 0$. Kies een graaf die de Eulerkarakteristiek berekent en knip de orbifold open na beschildering. We hebben nu een vlakke tegel die past in een betegeling van \mathbb{R}^2 .

We zien uit de stelling dat de classificatie van betegelingen van \mathbb{R}^2 hetzelfde is als de classificatie van tweedimensionale orbifolds met Eulerkarakteristiek



Figuur 6: De samenhangende som van twee oppervlakken.

nul. We richten ons daarom nu op dit laatste classificatieprobleem en beginnen met oppervlakken. Daarvoor hebben we de volgende operatie nodig: voor twee oppervlakken X en Y , kiezen we een kleine schijf D in zowel X en Y , knippen deze uit en plakken de resulterende oppervlakken langs de rand van de schijf aan elkaar. Het resultaat is een nieuw oppervlak, de *samenhangende som* $X \# Y$. Figuur 6 illustreert deze procedure. Merk verder op dat de samenhangende som met het boloppervlak een oppervlak niet verandert; $S^2 \# X = X$.

Opgave 7.2. Laat zien dat $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ de Kleinse fles is.

Opgave 7.3. Laat zien dat de volgende gelijkheid voor de Eulerkarakteristiek geldt:

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2. \quad (3)$$

De classificatie van oppervlakken ziet er nu als volgt uit:

Stelling 7.4 (Dehn–Heegard (1907)). *Alle compacte oppervlakken (zonder rand) zijn van de volgende vorm:*

1. het boloppervlak S^2 ,
2. de samenhangende som van g tori T^2 ,
3. de samenhangende som van k projectieve vlakken $\mathbb{R}P^2$.

In opgave 6.2 hebben we al gezien dat de Eulerkarakteristiek van het boloppervlak 2 is. Aangezien een torus Eulerkarakteristiek 0 heeft, volgt uit vergelijking (3) dat de samenhangende som van g tori Eulerkarakteristiek $2 - 2g$ heeft. De oppervlakken van de vorm (3) hebben $\chi = 2 - k$.

De classificatie van tweedimensionale orbifolds is nu niet moeilijk meer. We beginnen met het boloppervlak S^2 . We kunnen nu de volgende operaties uitvoeren:

o	××	*×	**	2222	22×	22*	2*22	*2222	333	3*3	*333	442	4*2	*442	632	*632
---	----	----	----	------	-----	-----	------	-------	-----	-----	------	-----	-----	------	-----	------

Tabel 1: De 17 orbifolds met $\chi_{orb} = 0$.

1. *Het toevoegen van een “hendel”*. Dit is het nemen van een samenhangende som met een torus, $\#T^2$.
2. *Het toevoegen van een “kruiskap”*. Dit is het nemen van een samenhangende som met $\mathbb{R}P^2$.
3. *Het toevoegen van een kegel*. Knip weer een schijf uit, en plak een kegel met gegeven orde op de rand
4. *Het uitknippen van een rand*. We knippen weer een schijf uit. Als we willen, kunnen we een aantal punten op de rand tot hoekpunten promoveren. Als we dat doen, specificeren we wel weer de orde van het hoekpunt.

Elke tweedimensionale orbifold is te verkrijgen door herhaaldelijk toepassen van deze operaties. Aan de hand van deze classificatie heeft Conway de volgende notatie ingevoerd voor tweedimensionale orbifolds. We schrijven:

$$o \dots o n_1 \dots n_k * m_1 \dots m_l * \dots * p_1 \dots p_q \times \dots \times,$$

met o voor elke hendel die we toevoegen, n voor elk kegelpunt van orde n , $*m_1 \dots m_l$ staat voor een rand met l hoekpunten, elk van orde m_i , $i = 1, \dots, l$, en ten slotte \times voor het toevoegen van een kruiskap.

De Eulerkarakteristiek van het boloppervlak is 2 en het is eenvoudig in te zien dat elk van de bovenstaande operaties de orbifold-Eulerkarakteristiek verminderen. Om precies te zijn, wordt de orbifold-Eulerkarakteristiek gegeven door:

$$\chi_{orb} = 2 - D,$$

waarbij D het totaal is van de bijdragen in de volgende tabel die corresponderen met de operaties (1)–(4) hierboven.

Meetkundige eigenschap	Notatie	Bijdrage
hendel	o	2
kruiskap	\times	1
kegelpunt van orde n	n	$\frac{n-1}{n}$
rand	$*$	1
hoekpunt van orde n	n	$\frac{n-1}{2n}$
	Totaal:	D

Opgave 7.5. Laat aan de hand van de definitie van de orbifold-Eulerkarakteristiek zien dat de bijdrage D inderdaad gegeven is door de getallen in de derde kolom.

Met deze observatie is ons classificatieprobleem gereduceerd tot een zuiver combinatorisch probleem: op welke manier kunnen we de getallen in de bovenstaande tabel combineren zodat ze precies optellen tot 2? Het is niet moeilijk in te zien dat er slechts eindig veel mogelijkheden zijn. Het blijken er precies 17 te zijn, de tabel 1 geeft de complete lijst. Hiermee is het bewijs van Stelling 3.1 voltooid.

Opgave 7.6. De orbifold Euler karakteristiek is direct uit de orbifold-notatie af te lezen. Ga na dat inderdaad $\chi_{orb} = 0$ voor alle orbifolds in tabel 1. Welke orbifolds corresponderen met de Voorbeelden 4.1, 4.2, en 4.3 en Opgave 4.4?

Opgave 7.7. Welk orbifold in de lijst correspondeert met de vlakverdeling in Figuur 1?

8 En verder?

We sluiten af met enkele korte opmerkingen over andere betegelingen.

8.1 Wat als $\chi_{orb} \neq 0$?

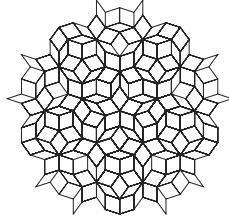
Uit de classificatie van tweedimensionale orbifolds blijkt overduidelijk dat het gros Euler-karakteristiek ongelijk aan nul heeft. Verrassend genoeg blijken ook deze betegelingen te classificeren. We maken een onderscheid tussen orbifolds met $\chi_{orb} < 0$ en $\chi_{orb} > 0$. Orbifolds van de eerste soort corresponderen met *betegelingen van het boloppervlak* S^2 . Net als voor de \mathbb{R}^2 zien we snel in dat dit er weer eindig veel zijn, ditmaal vinden we 14 patronen. Orbifolds met $\chi_{orb} > 0$ classificeren *betegelingen van het hyperbolische vlak* en nu zien we dat hier oneindig veel van zijn. Een veel gebruikt model voor de hyperbolische ruimte is de zogenaamde Poincaré-schijf, en in deze gedaante zijn dit soort betegelingen bekend door het werk van M.C. Escher, met name zijn CIRKEL LIMIET I–IV

8.2 Niet-regelmatige vlakverdelingen

Voor de theorie hierboven is de aanname (\star) essentieel. Er bestaan echter ook betegelingen die niet aan dit axioma voldoen, de zogeheten *niet-periodieke betegelingen!* De bekendste zijn misschien wel de Penrose-betegelingen, een voorbeeld is te zien in Figuur 7.

Vanuit het oogpunt van de definitie in sectie 3 zouden we zeggen dat dit soort betegelingen weinig tot geen enkele symmetrie hebben. Vandaar dat de aanpak zoals hierboven beschreven voor regelmatige betegelingen meteen spaak loopt: de symmetriegroep is te klein, en daarmee het quotient te “grof” om de volledige structuur van de betegeling te beschrijven.

Dit is niet het einde van het verhaal. Het moderne standpunt is dat het begrip symmetrie zoals we gebruiken hebben te rigide is. Een flexibeler begrip



Figuur 7: Een Penrose-betegeling

van symmetrie is de volgende: we zeggen dat er een symmetrie is van $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ naar $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ als:

Er zijn kleine omgevingen $U_{(x_1, y_1)}$ van (x_1, y_1) en $U_{(x_2, y_2)}$ van (x_2, y_2) en een Euclidische symmetrie T die de betegeling op $U_{(x_1, y_1)}$ afbeeldt op die van $U_{(x_2, y_2)}$ en $T(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Dit is een lokale versie van het begrip dat we hiervoor gebruikten: daar was vereist dat de symmetrieën *globaal*, dus op de hele \mathbb{R}^2 , de betegeling in zichzelf overvoeren, hier hoeft dat slechts voor een deel te gelden. Ineens blijkt nu dat de Penrose-betegeling van figuur 7 zeer veel symmetrie heeft!

We betalen wel een prijs voor deze versoepeling: aan de axiomas in Opmerking 2.2 is nu niet meer voldaan. Bijvoorbeeld, de samenstelling tussen twee symmetrieën is niet altijd meer gedefiniëerd, we kunnen alleen de samenstelling nemen van een symmetrie van (x_1, y_1) naar (x_2, y_2) met een symmetrie van (x_2, y_2) naar (x_3, y_3) , dus als het beeld van de eerste symmetrie gelijk is aan het origineel van de tweede. De juiste uitwerking van de eigenschappen leidt tot de definitie van een *groepoïde*. Verassend genoeg is hiermee de meetkunde van het quotient nog steeds te beschrijven, alhoewel het geen orbifold meer is. Hiervoor heeft men echter wel de zogeheten *niet-commutatieve meetkunde*, ontwikkeld door de Franse wiskundige Alain Connes, nodig. Dit is een zeer actief onderzoeksgebied in de wiskunde op het moment.

Referenties

- [1] J.H. Conway. The orbifold notation for surface groups. In: *Groups, combinatorics & geometry (Durham, 1990)*, p. 438447, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 165, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [2] J.H. Conway, H. Burgiel en C. Goodman-Strauss. *The symmetry of things* A.K. Peters Ltd. 2008.
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group.

Kansrijke symmetrie

Jeroen Spandaw ¹
Technische Universiteit Delft
e-mail: J.G.Spandaw@tudelft.nl

1 Inleiding

Waarom zeggen we dat bij een zuivere dobbelsteen de kans op een zes gelijk is aan $\frac{1}{6}$? Omdat de symmetrie van een dobbelsteen suggereert dat alle zes mogelijke uitkomsten een gelijke kans hebben natuurlijk. (We gaan er blijkbaar van uit dat de kans dat de dobbelsteen op een ribbe of een hoekpunt blijft liggen gelijk is aan nul. . .). We zien in dit eenvoudige voorbeeld dat we symmetrie nodig hebben om de kansen te rechtvaardigen. Een *echte* dobbelsteen is misschien niet helemaal zuiver, maar bij gebrek aan meer informatie lijkt het het beste om in ons wiskundig model van de dobbelsteen (d.w.z. de kansverdeling) uit te gaan van gelijke kansen. We zien hier een verschil tussen de “werkelijkheid” en ons wiskundig model.

Laten we nu eens met twee dobbelstenen gaan gooien en naar de kans vragen dat de som van de ogen gelijk is aan 10. We passen de kansdefinitie van Laplace toe: *de kans is gelijk aan het aantal gunstige mogelijkheden gedeeld door het totaal aantal mogelijkheden*. Wel, er zijn 11 mogelijke sommen, waarvan er precies één gunstig is, dus de kans is gelijk aan $1/11$. Een leerling die dit opschrijft, zal weinig punten verdienen. Het schoolantwoord luidt: er zijn 36 uitkomsten (de 36 geordende paren) waarvan er drie (namelijk (6, 4), (5, 5) en (4, 6)) de goede som geven, dus het antwoord is $3/36$. We zien hier opnieuw de rol van symmetrie bij het rechtvaardigen van een wiskundig model van de werkelijkheid: uit symmetrieoverwegingen gaan we ervan uit dat alle 36 paren een gelijke kans hebben.

Ik geef onmiddellijk toe dat in de praktijk blijkt dat het schoolmodel de realiteit beter beschrijft dan mijn 11-sommen-model, maar ook het schoolmodel is niet meer dan een wiskundig model van de werkelijkheid. Om ons model te rechtvaardigen kunnen we ons beroepen op validatie in de praktijk of op symmetrieargumenten. Laplace wist dat al. Hij benoemde bij zijn kansdefinitie de cruciale extra voorwaarde dat *er geen reden is om aan te nemen dat de kansen van de uitkomsten verschillen*. Let op de voorzichtige formulering: we weten niet zeker of de kansen gelijk zijn, er is alleen onvoldoende reden om aan te nemen dat ze verschillen!

De kansdefinitie van Laplace is dus niet gedachteloos toe te passen. Je moet rechtvaardigen dat het niet onredelijk is om te veronderstellen dat de

¹Dank aan Leo Breebaart voor de Python-simulatie, aan Rogier Brussee voor discussie over Benford, aan Bas Edixhoven die mij vertelde over het curieuze gedrag van 3-dimensionale rotaties, aan Klaas-Pieter Hart voor L^AT_EX-hulp, aan Ben de Pagter van wie ik leerde over Hermann Weyls gelijkverdelingswet en aan Wikipedia voor het Benford-voorbeeld met inwoneraantallen en de informatie over Bertrands paradox.

uitkomsten in je model (de 11 sommen of de 36 paren) gelijke kansen hebben. Daarbij moet je buiten de wiskunde treden: de context bepaalt tenslotte of je model ervan redelijk is of niet.

Er is nog een tweede probleem met Laplace: Wat doe je als er oneindig veel mogelijkheden zijn? Op school komen we dat tegen bij de normaalverdeling. In deze voordracht zullen we een paar van dergelijke voorbeelden bekijken. We zullen kijken naar de rol van symmetrieoverwegingen bij de rechtvaardiging van een wiskundig kansmodel.

2 De kans op een stompe driehoek

Wat is de kans op een stompe² driehoek? Om deze vraag te beantwoorden zou je een aantal personen kunnen vragen om een “willekeurige” driehoek te tekenen en vervolgens te gaan tellen. Een dergelijk experiment met 33 studenten in een college vakdidactiek leverde 13 stompe en 19 scherpe driehoeken op. (Eén student claimde dat zijn willekeurige driehoek een rechte hoek bezat! Hoe groot is de kans daarop volgens u?) Dit suggereert dat de kans op een stompe driehoek kleiner is dan de kans op een scherpe driehoek. Als we hier een binomiale toets op loslaten met $p = \frac{1}{2}$, dan vinden we een binomiale overschrijdingskans $\text{binomcdf}(33, 1/2, 13) \approx 0.15$, dus erg overtuigend is ons bewijsmateriaal nog niet.

In plaats van dergelijke experimenten, die hoogstens iets zeggen over het beeld dat studenten hebben van een “willekeurige” driehoek, kunnen we ook proberen de kans op een stompe driehoek theoretisch te bepalen. Daarvoor gaan we eerst de verzameling \mathcal{D} van alle driehoeken bepalen en vervolgens kijken hoe de verdeling daarvan in stompe en scherpe driehoeken is. Natuurlijk zijn er oneindig veel driehoeken. We kunnen de verzameling wat verkleinen door gelijkvormige driehoeken als identiek te beschouwen. Onze vraag, stomp of scherp, hangt tenslotte alleen van de drie hoeken α , β en γ af. We kunnen een driehoek dus beschouwen als een drietal (α, β, γ) positieve reële getallen waarvan de som gelijk is aan $\pi = 180^\circ$.³

De verzameling⁴

$$\mathcal{D} := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, \pi]^3 \mid \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$$

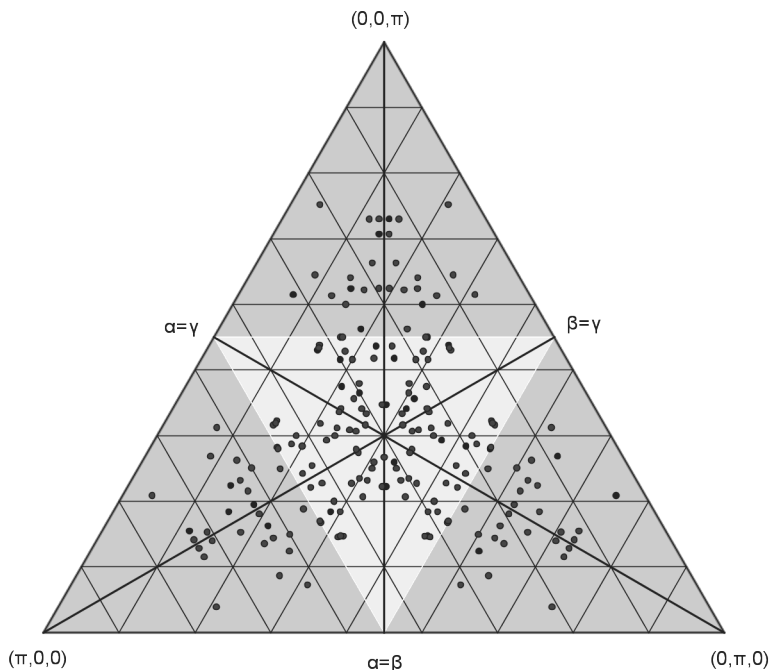
van alle driehoeken (waarbij gelijkvormige driehoeken als identiek worden beschouwd) is mooi symmetrisch: we kunnen de drie hoeken α , β , γ permuteren. Daarbij blijven stompe driehoeken stomp en scherpe driehoeken scherp. Als we willen, kunnen we er dus voor zorgen dat $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. De deelverzameling \mathcal{D} van \mathbf{R}^3 is gemakkelijk te visualiseren: het is de gelijkzijdige driehoek in

²Een stompe driehoek is een driehoek met een stompe hoek.

³Ik definieer een graad als het getal $\pi/180$. Dan is 180° gelijk aan het getal π . (Een radiaal is gelijk aan het getal 1.) Door dit consequent toe te passen, mag ik met graden en radialen door elkaar werken. Ik vind dat handig, want ik denk in graden en reken in radialen.

⁴Het is onbelangrijk of we de rand van de driehoek wel of niet meenemen in de definitie van \mathcal{D} .

het vlak $\alpha + \beta + \gamma = 0$ met hoekpunten $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$ en $(0, 0, \pi)$. Zie de figuur hieronder, waarin we de 33 studentendriehoeken hebben ingetekend. De verzameling \mathcal{D} van alle driehoeken blijkt dus zelf een driehoek te zijn! Ieder punt (α, β, γ) van de driehoek \mathcal{D} bepaalt een driehoek (tot op gelijkvormigheid) en op deze manier krijgen we alle driehoeken. Door de hoeken te permuteren corresponderen vrijwel alle driehoeken met een baan van zes punten in \mathcal{D} . Deze zes punten corresponderen met de zes permutaties van α, β, γ . In de figuur correspondeert het verwisselen van α en β met spiegeling in de lijn $\alpha = \beta$, etcetera. Een punt op één van de spiegellijnen $\alpha = \beta$, $\alpha = \gamma$ of $\beta = \gamma$ correspondeert met een gelijkbenige driehoek; het middelpunt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ van de driehoek correspondeert natuurlijk met “de” gelijkzijdige driehoek.



In de verzameling \mathcal{D} bevinden zich de stompe driehoeken bij de drie hoekpunten $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$ en $(0, 0, \pi)$. De scherpe driehoeken bevinden zich rond het middelpunt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ van \mathcal{D} . De grens tussen het stompe en scherpe gebied wordt gevormd door de verzameling rechte driehoeken. Deze grens is eenvoudig aan te geven: het is de gelijkzijdige driehoek met hoekpunten $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi)$ en $(0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. In de figuur hierboven hebben we het

gebied dat met stompe driehoeken correspondeert donderder aangegeven. We zien onmiddellijk dat de verzameling scherpe driehoeken vier keer zo klein is als de totale verzameling \mathcal{D} . We concluderen dus:

$$P(\text{stompe driehoek}) = \frac{3}{4}.$$

We hebben nu niet geëist dat $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Als we dat wel doen, dan blijft slechts een zesde deel van \mathcal{D} over (een 90° - 60° - 30° -driehoek). Natuurlijk geldt hier dezelfde verhouding tussen het scherpe en stompe gedeelte, namelijk 1 : 3.

We hebben nu een theoretische kans uitgerekend. Hoe serieus moeten we deze kans nemen? We zijn er van uitgegaan dat de kans op een deelverzameling van \mathcal{D} evenredig is met de oppervlakte van die deelverzameling. Als we dat accepteren, dan vinden we dat de kans op een rechte driehoek nul is. (Daarom was ik verbaasd over die student met een rechte driehoek. Ik ben er zeker van dat zijn “rechte hoek” niet *exact* recht was.) Om dezelfde reden heb ik me in het bovenstaande niet erg druk gemaakt over de rand van \mathcal{D} , corresponderend met $\alpha\beta\gamma = 0$. Of je die randpunten nu wel of niet meeneemt in je beschouwingen, de kansen veranderen er niet door.

Maar hoe redelijk is de veronderstelling dat de kans op een bepaalde deelverzameling van \mathcal{D} evenredig is met de oppervlakte van dat deel? Misschien moeten we sommige delen van \mathcal{D} wel meer gewicht toekennen dan andere... Het experiment met de 33 studenten suggereert immers dat zij driehoeken in het centrum van \mathcal{D} willekeuriger vinden dan driehoeken aan de randen van \mathcal{D} .

Een alternatieve manier om een willekeurige driehoek te produceren is als volgt. Neem een random generator die een hoek α tussen 0 en π produceert. Vervolgens laat je door een random generator een hoek β tussen 0 en $\pi - \alpha$ produceren. Tot slot nemen we γ gelijk aan $\pi - \alpha - \beta$. In het (α, β) -vlak krijgen we de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(0, \pi)$. We kunnen allerlei kansverdelingen op de intervallen $(0, \pi)$ en $(0, \pi - \alpha)$ bedenken, maar laten we de eenvoudigste nemen: de uniforme kansverdeling waarbij de kans op een deelinterval evenredig is met de lengte ervan. Een scherpe driehoek heeft $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Omgekeerd, als $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dan geeft $\beta \in [0, \pi - \alpha]$ precies dan een scherpe driehoek als $\frac{1}{2}\pi - \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Dus bij zo'n α is de voorwaardelijke kans op een scherpe driehoek gelijk aan $\frac{\alpha}{\pi - \alpha}$. De kans op een scherpe driehoek is dus gelijk aan

$$P(\text{scherpe driehoek}) = \int_{\alpha=0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\alpha}{\pi - \alpha} \frac{d\alpha}{\pi} = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0.193.$$

De kans op een stompe driehoek is dus $\frac{3}{2} - \ln(2) \approx 0.807$. We vinden andere kansen, maar opnieuw zijn stompe driehoeken waarschijnlijker.

Misschien is het volgende wel een betere definitie van een “willekeurige” driehoek: Kies hoekpunten A , B en C in een 2-dimensionale normale verdeling onafhankelijk van elkaar, dus de zes coördinaten zijn onafhankelijk en allemaal normaal verdeeld met dezelfde μ en σ . Een simulatie in Python met een miljard

driehoeken gaf

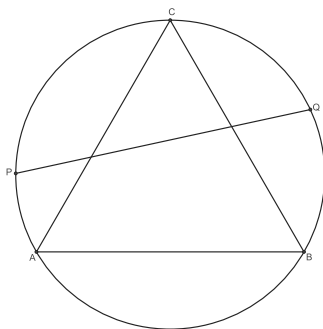
$$P(\text{stompe driehoek}) \approx 0.749995.$$

Ik vermoed dat het exacte antwoord $\frac{3}{4}$ is, net als in ons allereerste argument!

De moraal van dit verhaal is dat je een kansverdeling moet *kiezen*. Deze keuze is je wiskundige vertaling van het begrip “willekeurig”. De kansdefinitie van Laplace is bij oneindig veel uitkomsten in ieder geval niet toepasbaar. Of het model past bij de “werkelijkheid” hangt ervan af hoe je in die werkelijkheid een willekeurige driehoek kiest. Helaas is symmetrie niet altijd voldoende om de kansverdeling vast te leggen. In de paragraaf over rotaties zullen we voorbeelden zien waar symmetrieoverwegingen wél een “meest symmetrische” kansverdeling vastleggen, zelfs bij oneindig veel uitkomsten.

3 De kans op een lange koorde

We bekijken een tweede probleem over kansrekening in de meetkunde. Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en straal r en een ingeschreven gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$. Hoe groot is de kans dat een willekeurige koorde PQ langer is dan de zijde AB ? We noemen zo’n koorde een *lange koorde*.



3.1 Redenering #1

Wegens symmetrie mogen we aannemen dat het punt P samenvalt met het punt C . De koorde PQ is lang als Q op de boog AB ligt. De kans op een lange koorde is dus $\frac{1}{3}$.

3.2 Redenering #2

De koorde ligt vast door zijn middelpunt N .⁵ De koorde is lang als de afstand tussen N en M minder dan $\frac{1}{2}r$ is. De kans op een lange koorde is dus $\pi(\frac{1}{2}r)^2/\pi r^2 = \frac{1}{4}$.

3.3 Redenering #3

We maken opnieuw gebruik van het feit dat de koorde PQ bepaald wordt door zijn middelpunt N . Vanwege de symmetrie mogen we aannemen dat de koorde parallel aan AB is. Het middelpunt ligt dus op de middellijn door C , loodrecht op AB . De helft van deze middellijn correspondeert met lange koorden, dus de kans op een lange koorde is $\frac{1}{2}$.

3.4 Discussie

Drie redeneringen, drie antwoorden! Wat is nou het goede antwoord? Dat hangt er natuurlijk van af wat je onder “willekeurige koorde” verstaat! De drie redeneringen geven daar verschillende invullingen aan. In het eerste geval nemen we aan dat de twee eindpunten P en Q van de koorde onafhankelijk en uniform verdeeld zijn over de rand. In het tweede geval nemen we aan dat het middelpunt N van de koorde uniform verdeeld is over de cirkelschijf. In het derde geval nemen we aan dat het middelpunt N uniform verdeeld is over de middellijn. Voor al deze veronderstellingen valt wel wat te zeggen. Op Wikipedia vind je onder het lemma “Bertrand’s paradox” plaatjes van de verdeling van N voor de drie redeneringen. U vindt daar ook symmetrieargumenten voor redenering 3: deze heeft de meeste symmetrie.

Misschien kunnen we experimenteel bepalen wat de “echte” kans op een lange koorde is?⁶ Daartoe moeten we bepalen hoe we willekeurige koorden gaan genereren en dat komt in feite neer op de keuze van een kansverdeling. Verschillende experimentele implementaties van het begrip “willekeurige koorde” geven verschillende antwoorden, waaronder de drie genoemde. Voor een uitgebreidere discussie, zie [4].

4 Een Rad van Fortuin in 3 dimensies

In ouderwetse spelshows werd aan een cirkelschijf gedraaid om een prijs te bepalen. Zo’n schijf is verdeeld in een aantal even grote taartpunten. Uit symmetrieoverwegingen ligt het voor de hand om aan te nemen dat iedere taartpunt een gelijke kans heeft. Deze kansverdeling is de meest symmetrische: ze is invariant onder rotaties. Anders dan in Bertrands paradox uit de vorige

⁵Behalve natuurlijk als N samenvalt met het middelpunt M van de cirkel, maar we gaan er van uit dat die kans 0 is.

⁶Volgens het genoemde lemma op Wikipedia heeft zelfs de bekende topwiskundige Marc Kac zich daarmee onledig gehouden!

paragraaf is er nu dus één door symmetrie uitverkoren kansverdeling. Dit geldt algemener voor compacte Liegroepen. Ik ga u nu niet vervelen met een betoeg over deze mooie wiskundige objecten. Het is voldoende als u begrijpt dat de rotaties een compacte groep vormen: de compositie van twee rotaties is weer een rotatie, er is een identiteitselement dat niets doet (de rotatie over 0°), en de inverse van een rotatie is ook een rotatie. Compactheid is een technischer begrip uit de topologie. Het betekent min of meer “gesloten en begrensd”.

Hoe werkt dit als we één dimensie hoger gaan werken? In plaats van een cirkelschijf draaien we een bol. We nemen aan dat de bol vrij kan draaien om zijn middelpunt. Ik stel me een spiegelgladde, homogene bol die bijna wrijvingsloos over een olielaagje roteert of een glad pingpongballetje dat door een luchtstroom op zijn plaats wordt gehouden. Enerzijds moeten de bollen perfect glad en homogeen zijn; anderzijds is wat wrijving nodig omdat de bol ooit tot stilstand moet komen om de rotatie te bepalen. We interesseren ons niet voor het proces, maar alleen voor de uiteindelijke rotatie. Je moet dus markeringen (hoeveel?) op de bol zetten en dan de begin- en eindstand vergelijken.

Een dergelijke draaiing wordt beschreven door een draaiingsas en een draaiingshoek φ om die as. Door de as een oriëntatie te geven, kunnen we aannemen dat de rotatie met de klok mee is over een hoek tussen 0 en $\pi = 180^\circ$. (De aarde draait met de klok mee als je de as vanuit het centrum van de aarde naar de noordpool laat wijzen en tegen de klok in als je de as naar de zuidpool laat wijzen.) Om dezelfde reden⁷ als in het 2-dimensionale geval van de cirkelschijf bestaat er een unieke rotatie-invariante kansverdeling op de verzameling van alle rotaties van de bol. Dit is de kansverdeling waarmee we in deze paragraaf werken.⁸ Hieruit volgt onmiddellijk dat alle draaiingsassen even waarschijnlijk zijn. (Dit is wat slordig geformuleerd, maar een exacte wiskundige formulering laat het ingewikkelder lijken dan het is.) De kansverdeling van de draaiingsassen is dus saai (uniform).

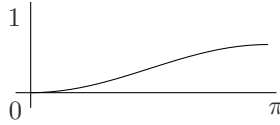
De kansverdeling van de draaiingshoeken is gelukkig een stuk interessanter. Het blijkt dat niet alle draaiingshoeken φ even waarschijnlijk zijn: grote rotatiehoeken zijn waarschijnlijker dan kleine! Op het eerste gezicht lijkt dat vreemd, maar bij nader inzien valt dat wel mee: er is tenslotte maar één rotatie met $\varphi = 0$, terwijl er oneindig veel rotaties zijn met $\varphi = \pi = 180^\circ$. De kansverdeling op $[0, \pi]$ blijkt er als volgt uit te zien:

De kansdichtheid is $f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sin^2(\frac{1}{2}\varphi)$, dus $P(\alpha < \varphi < \beta)$ is gelijk aan $\frac{2}{\pi} \int_\alpha^\beta \sin^2(\frac{1}{2}\varphi) d\varphi$ voor $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$. In de appendix wordt geschetst hoe deze kansverdeling kan worden berekend.

Na enige tijd krijgen de deelnemers van het 3-dimensionale Rad van Fortuin in de gaten dat grote draaiingshoeken waarschijnlijker zijn. Dit kost de producers te veel geld, dus zij besluiten om het spel aan te passen. Eerst krijgt de bol een willekeurige draai en wordt de rotatie bepaald. Vervolgens wordt de bol nogmaals op dezelfde manier geroteerd. De draaiingsas blijft dus gelijk, terwijl

⁷De 3D-rotaties vormen een 3-dimensionale compacte Liegroep.

⁸Ik weet niet hoe goed deze kansverdeling de rotaties van een fysisch 3-dimensionaal Rad van Fortuin beschrijft.



Figuur 1: De kansdichtheid van φ op $[0, \pi]$

de draaiingshoek wordt verdubbeld. Bij die verdubbeling moeten we rekening houden met het feit dat wij de draaiingshoeken altijd tussen 0 en 180° nemen. Als voorbeeld bekijken we de rotatie om de noordpool over 100° met de klok mee. De dubbele rotatie is een rotatie over 200° om de noordpool met de klok mee, ofwel een rotatie over 160° om de noordpool tegen de klok in, ofwel een rotatie over 160° om de zuidpool met de klok mee. Dus zowel rotaties over 80° als rotaties over 100° geven na verdubbeling rotaties over 160° . De verdubbeling van de rotatiehoek zorgt er dus voor dat supplementaire hoeken op één hoop worden gegooid.

Hoe ziet nu de kansverdeling van de hoeken er uit? Als voorbeeld berekenen we de kans dat de verdubbelde hoek ψ tussen 100° en 110° ligt. Dit betekent dat de oorspronkelijke draaiingshoek φ in $[50^\circ, 55^\circ]$ ligt of in $[125^\circ, 130^\circ]$. (Deze intervallen zijn complementair.) De kans hierop is dus

$$P(100^\circ < \psi < 110^\circ) = \frac{2}{\pi} \int_{50^\circ}^{55^\circ} \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_{125^\circ}^{130^\circ} \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi.$$

De tweede term is gelijk aan

$$\frac{2}{\pi} \int_{50^\circ}^{55^\circ} \sin^2\left(\frac{1}{2}(\pi - \varphi)\right) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{50^\circ}^{55^\circ} \cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi$$

We vinden dus

$$P(100^\circ < \psi < 110^\circ) = \frac{2}{\pi} \int_{50^\circ}^{55^\circ} \left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right) d\varphi = \frac{10}{180}.$$

Je vindt dezelfde kans voor andere ψ -intervallen van 10° . De crux is natuurlijk dat de kansdichtheid constant is geworden. De kans op een ψ -interval is dus evenredig met de lengte van dat interval:

$$P(\alpha < \psi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{\pi}$$

als $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$. In het verdubbelde 3-dimensionale Rad van Fortuin zijn dus alle draaiingshoeken even waarschijnlijk. Fijn voor de producenten!⁹

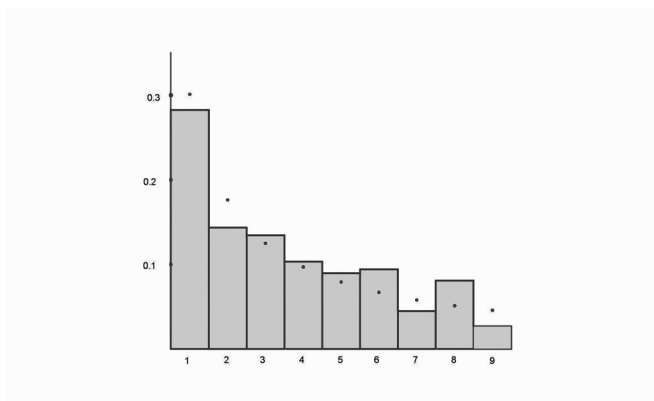
⁹Hoe zouden 4- en hoger-dimensionale Raderen van Fortuin zich gedragen?

5 De Wet van Benford

5.1 Een empirische wet

In de vorige paragrafen hebben we gekeken naar toepassingen van symmetrie op kansrekening in een meetkundige context. In deze paragraaf verlaten we de meetkunde en bekijken we een heel ander soort toepassing van symmetrie bij de berekening van kansen: de Wet van Benford. Het is lastig om deze wet mathematisch exact te formuleren (zie bijvoorbeeld [1]), maar een voorbeeld maakt duidelijk waar het om gaat.

We bekijken de inwoneraantallen van 223 landen. Deze variëren van 50 voor de Pitcairn-eilanden tot 1.4 miljard voor China (bron: Wikipedia). Vervolgens nemen we het eerste (meest significante) cijfer van deze 223 getallen. Het bijbehorende histogram ziet er als volgt uit (de stippen worden later uitgelegd):



We zien dat kleine begincijfers frequenter zijn dan grote begincijfers. Intuïtief is dat wel plausibel: kijk bijvoorbeeld naar de overgang van begincijfer 9 naar begincijfer 1, zeg de overgang van 900 naar 1000. Het stuk van 1000 tot 2000 met begincijfer 1 is 10 keer zo groot als het stuk van 900 tot 1000 met begincijfer 9, dus het is niet zo vreemd dat het cijfer 1 vaker voorkomt als begincijfer dan het cijfer 9. Maar we kunnen veel meer zeggen over de verdeling van de kansen $p(n)$ op de verschillende begincijfers n , dankzij symmetrie.

Als voorbereiding gaan we de positieve reële lijn oprollen. Het idee is dat vermenigvuldiging met een macht van 10 de begincijfers niet verandert. Voor ons probleem mogen we bijvoorbeeld de getallen

$$\dots, 0.01\pi, 0.1\pi, \pi, 10\pi, 100\pi, \dots$$

identificeren. Door met een geschikte macht van 10 te vermenigvuldigen, mogen we veronderstellen dat $x \in [1, 10]$. Het voordeel is dat $[1, 10]$ een gesloten en begrens interval is. Hierdoor gedragen integralen zich beter: de integraal van een continue functie is altijd eindig over $[1, 10]$, maar dat geldt niet voor $(0, \infty)$. Een ander, verwant voordeel is dat we de begincijfers maar “één keer tellen”.

Dit is analoog aan de situatie waarin we de ruimte \mathcal{D} bekeken die driehoeken parametrizeert: als we de gehele gelijkzijdige driehoek \mathcal{D} namen, werd (bijna) iedere driehoek zes keer geteld; door over te gaan op de kleinere 90° - 60° - 30° -driehoek werd iedere driehoek nog maar één keer geteld. Zoals we \mathcal{D} opdeelden in 6 driehoekjes die we door spiegelen konden identificeren met een uitverkoren 90° - 60° - 30° -driehoekje, zo hebben we nu $(0, \infty)$ opgedeeld in oneindig veel intervallen $[10^k, 10^{k+1}]$, die we identificeren met het uitverkoren interval $[1, 10]$ door vermenigvuldiging met een geschikte macht van 10. Het verschil is dat er nu op de positieve getallenlijn sprake is van oneindige in plaats van zesvoudige overtelling.

Terug naar het oprollen van $(0, \infty)$. Om het af te maken moeten we de punten 1 en 10 nog aan elkaar plakken, waardoor het interval $[1, 10]$ een cirkel wordt. Een punt x op deze cirkel correspondeert met de familie $\{10^k \cdot x | k \in \mathbf{Z}\}$. U kunt dit oprollen van $(0, \infty)$ chiquer formuleren in termen van equivalentie-classes (en quotiënttopologie) als u daar behoefte aan hebt.

Nu we het oprollen achter de rug hebben, zijn we toe aan het essentiële symmetrieargument. Laten we een ander voorbeeld bekijken: de lengte van alle rivieren op aarde. Als er een “universele” kansverdeling voor de begincijfers bestaat, dan geldt deze verdeling onafhankelijk van de eenheid van lengte. Wat gebeurt er als we de eenheid van lengte veranderen van kilometers in Engelse mijlen? Alle getallen in de lijst worden dan gedeeld door $c = 1.609344$. Alle getallen veranderen dus, vrijwel alle begincijfers veranderen, maar de verdeling van de begincijfers verandert niet.

Wat voor $c = 1.609344$ geldt, geldt voor iedere andere $c > 0$, tenminste als we een waarlijk universele kansverdeling van begincijfers hebben. Stel nu dat er een nette functie $f(x)$ bestaat zodat

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

voor $1 \leq \alpha < \beta \leq 10$. We willen dat voor iedere $c > 0$ geldt:

$$P(\alpha < x/c < \beta) = P(\alpha < x < \beta),$$

dus

$$\int_{c\alpha}^{c\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

De uniforme kansdichtheid met constante f voldoet hier niet aan, maar $f(x) = 1/x$ wel, want

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln(\beta/\alpha)$$

verandert niet als we α en β met dezelfde factor vermenigvuldigen.¹⁰ Er is nog één kleinigheid: we moeten door $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = \ln(10)$ delen om de totale kans

¹⁰Hier is een verband met de paragraaf over het Rad van Fortuin. Onze cirkel is een compacte Liegroep met vermenigvuldiging als groepsbewerking. Dus er is een unieke kansmaat die invariant is onder de groepsbewerking. Op de schaalfactor $\ln(10)$ na wordt deze maat gegeven door het integreren van de functie $f(x) = 1/x$.

op 1 normeren:

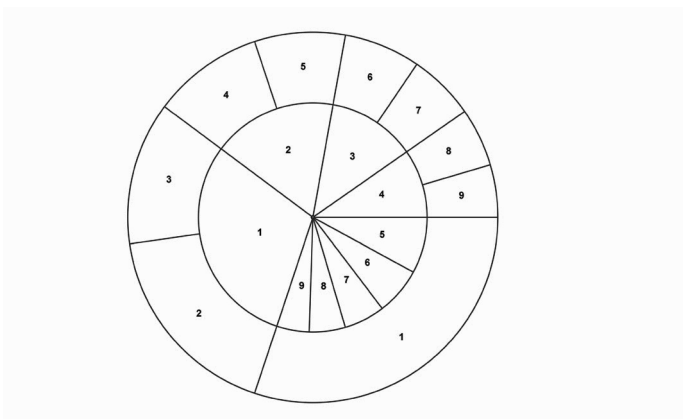
$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\ln(10)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{\ln(10)} = \log_{10}(\beta/\alpha).$$

Nu kunnen we de kans $p(n)$ op begincijfer n uitrekenen. Een getal $x \in [1, 10)$ heeft begincijfer n als x in $[n, n + 1)$ ligt, dus:

$$p(n) = \frac{1}{\ln(10)} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log_{10} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Voor begincijfer 1 vinden we $p(1) \approx 0.301$, voor begincijfer 2 vinden we $p(2) \approx 0.176$, enzovoorts. Dit zijn de kansen op de verschillende begincijfers volgens de Wet van Benford. De stippen in het histogram hierboven geven de Benford-frequenties aan. We zien dat de bevolkingsaantallen zich redelijk aan Benford houden.

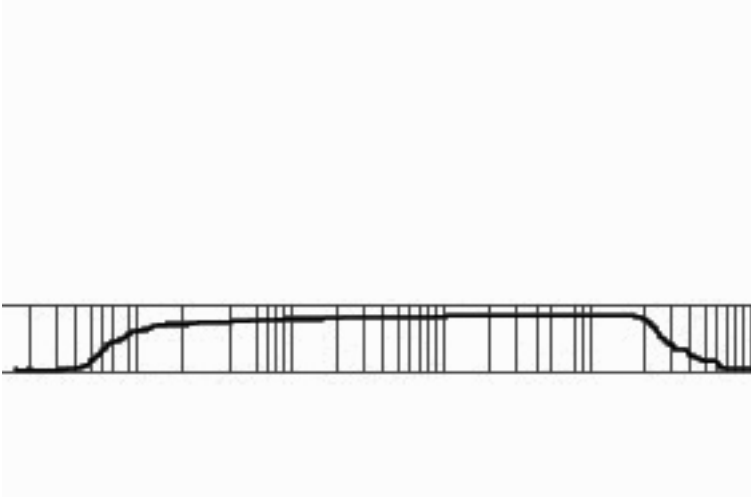
Voordat we ingaan op de vraag in welke omstandigheden de Wet van Benford (bij benadering) geldt, kijken we nogmaals naar de schalingsinvariantie. Als voorbeeld bekijken we $c = 2$. Getallen met begincijfer 1 krijgen dan begincijfer 2 of 3, dus er moet gelden $p(1) = p(2) + p(3)$. En inderdaad geldt $\log_{10}(2) = \log_{10}(3/2) + \log_{10}(4/3)$. Analoog vinden we $p(2) = p(4) + p(5)$, $p(3) = p(6) + p(7)$ en $p(4) = p(8) + p(9)$. Dit kunnen we mooi uitdrukken in een cirkeldiagram:¹¹



Als we de logaritmische cirkel weer uitrollen, krijgen we een eindeloze logaritmische lijn.¹²

¹¹Toen ik dit aan mijn vader liet zien, herkende hij hierin de logaritmische rekenschijf waarmee hij een halve eeuw eerder had gewerkt.

¹²Een mooier plaatje vindt u op Wikipedia onder het lemma “Benford’s Law”. Daar komt ook het idee van deze uitleg vandaan.



We verwachten dat de Wet van Benford bij benadering geldt als de data over voldoende machten van 10 min of meer constant is en aan de randen voldoende snel nul wordt.¹³ De dikke lijn geeft een voorbeeld dat aan deze voorwaarden voldoet. De verhouding van de frequenties van de begincijfers is dan ongeveer gelijk aan de verhouding van de breedte van de stroken. Daaruit volgt dat $p(n) = \log_{10}(1 + 1/n)$.

5.2 Benford en Weyl

We hebben niet geprobeerd de Wet van Benford mathematisch exact te formuleren (zie [1]). In deze paragraaf kijken we naar een bekende, verwante, exacte en toch niet moeilijk te formuleren stelling van Hermann Weyl (1885 – 1955), de *gelijkverdelingsstelling*. Deze zegt het volgende. Neem een irrationaal getal $q \in \mathbf{R}$ en kijk naar de resten $\langle kq \rangle$ van de veelvouden kq (met $n = 1, 2, 3, \dots$) modulo 1. (“Rest modulo 1” betekent dat je alleen naar het deel achter de komma kijkt.) Voor $q = \pi$ vind je bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= 0.1415926535 \dots \\ \langle 2q \rangle &= 0.28318530 \dots \\ \langle 3q \rangle &= 0.42477796 \dots\end{aligned}$$

Neem nu een intervalletje (α, β) met $0 \leq \alpha < \beta < 1$. Hoe groot is de “kans” dat een $\langle kq \rangle$ voor een “willekeurige” k in dit intervalletje valt? Het antwoord van Hermann Weyl is: die “kans” is gelijk aan de lengte $\beta - \alpha$ van dat intervalletje. Preciezer, als we kijken naar de relatieve frequentie

$$\frac{1}{N} \#\{k \in \{1, \dots, N\} \mid \langle kq \rangle \in (\alpha, \beta)\}$$

¹³Er wordt wel eens gezegd dat de belastingdienst de Wet van Benford zou gebruiken om aangiften te controleren. Ik betwijfel echter of de getallen in mijn aangiften wel voldoen aan deze voorwaarden. . .

van de k 's in $\{1, \dots, N\}$ waarvoor $\langle kq \rangle \in (\alpha, \beta)$ geldt, dan zegt Weyl dat deze relatieve frequentie naar $\alpha - \beta$ convergeert als $N \rightarrow \infty$. Hiermee is meteen duidelijk wat we met “kans” bedoelen in deze context, hoewel we geen kansverdeling op de natuurlijke getallen hebben aangegeven.

Als toepassing van deze stelling kijken we naar machten van 7:

7, 49, 343, 2401, 16807, 117649, 823543, 5764801, 40353607, 282475249, ...

Hoe groot is de “kans” dat een “willekeurige” macht van 7 met een 4 begint? Zo'n macht is van de vorm

$$7^k = r \cdot 10^m$$

met $m = 0, 1, 2, \dots$ en $4 \leq r < 5$. We nemen de 10-log aan beide zijden:

$$k \log_{10}(7) = \log_{10}(r) + m.$$

De rest modulo 1 van $k \log_{10}(7)$ is dus $\log_{10}(r)$. Deze rest moet tussen $\log_{10}(4)$ en $\log_{10}(5)$ liggen. Volgens Weyl is de kans daarop gelijk aan de lengte van het interval, dus

$$P(7^k \text{ begint met een } 4) = \log_{10}(5/4).$$

(U kunt het voorbeeld zelf generaliseren naar andere machten en andere begincijfers.) De begincijfers van de machten van 7 gedragen zich dus precies volgens de Wet van Benford! Anders dan de empirische Wet van Benford, hebben we nu dankzij Hermann Weyl een exact geformuleerde wiskundige stelling.

Appendix: Berekening van de kansverdeling van de draaiingshoek φ

In deze appendix schetsen we een afleiding van de kansdichtheid $\frac{2}{\pi} \sin^2(\frac{1}{2}\varphi)$ van de draaiingshoek φ van 3-dimensionale rotaties. Deze berekening staat los van de rest van de tekst.

Quaternionen en 3-dimensionale rotaties

Twee-dimensionale rotaties zijn gemakkelijk te beschrijven door middel van complexe getallen: als we het vlak identificeren met \mathbf{C} dan zijn de te roteren punten willekeurige complexe getallen z en de rotaties zijn complexe getallen q met absolute waarde $|z| = 1$. In drie dimensies geldt iets vergelijkbaars, alleen hebben we nu quaternionen nodig in plaats van complexe getallen. Een quaternion is per definitie een matrix van de vorm

$$q = \begin{pmatrix} v & -\bar{w} \\ w & \bar{v} \end{pmatrix},$$

waarbij v en w complexe getallen zijn. We kunnen quaternionen optellen en vermenigvuldigen. (Je gaat eenvoudig na dat het matrixproduct van twee quaternionen weer een quaternion is.) Alle bekende rekenregels gelden, behalve commutativiteit. De vier belangrijkste quaternionen zijn

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze vier quaternionen vormen een basis voor de vectorruimte \mathbf{H} . Als $v = t + ix$ en $w = z + iy$, dan geldt

$$q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Er geldt dus: $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$. Verder geldt:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Deze rekenregels leggen de gehele vermenigvuldiging vast, dus vanaf nu kunnen we de matrices vergeten, als we dat zouden willen. (Dat is de manier waarop Hamilton (1805 – 1865) quaternionen voor het eerst definieerde.) De determinant van de matrix q is $|v|^2 + |w|^2$. Hieruit volgt dat alle quaternionen behalve 0 inverteerbaar zijn. We definiëren de absolute waarde van q als $|q| := \sqrt{|v|^2 + |w|^2}$. Net als bij de complexe getallen geldt:

$$|q|^2 = q\bar{q},$$

waarbij de geconjugeerde \bar{q} van $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ wordt gedefinieerd als $\bar{q} := t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$.

Zoals complexe getallen z met $|z| = 1$ rotaties beschrijven in 2 dimensies, zo beschrijven quaternionen q met $|q| = 1$ rotaties in 3 dimensies. De 3 dimensionale ruimte $V \cong \mathbf{R}^3$ waarin deze rotaties leven is de vectorruimte

$$V := \{q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \mid t = 0\}$$

van pure quaternionen. Dit is de 3-dimensionale deelvectorruimte V van \mathbf{H} die wordt opgespannen door de vectoren \mathbf{i} , \mathbf{j} en \mathbf{k} .¹⁴ Gegeven een quaternion q met $|q| = 1$ bekijken we de afbeelding

$$R(q): \mathbf{v} \mapsto q\mathbf{v}q^{-1}: V \rightarrow V.$$

Hier staat gewoon een vermenigvuldiging van quaternionen in \mathbf{H} . Merk op dat q en $-q$ dezelfde afbeelding definiëren: $R(-q) = R(q)$.

Als voorbeeld onderzoeken we de afbeelding $R(q)$ bij $q = \cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)$. De basisvector \mathbf{i} wordt op zichzelf afgebeeld, want $q\mathbf{i}q = \mathbf{i}$. De basisvector \mathbf{j}

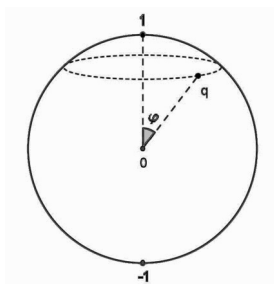
¹⁴Hier ligt de oorsprong van het begrip “vector” en van de veelgebruikte notatie \mathbf{i} , \mathbf{j} en \mathbf{k} voor de standaardbasis van \mathbf{R}^3 .

gaat naar

$$\begin{aligned}
 q\mathbf{j}\bar{q} &= (\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) \cdot \mathbf{j} \cdot (\cos(\varphi) - \mathbf{i}\sin(\varphi)) \\
 &= (\mathbf{j}\cos(\varphi) + \mathbf{k}\sin(\varphi)) \cdot (\cos(\varphi) - \mathbf{i}\sin(\varphi)) \\
 &= (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))\mathbf{j} + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathbf{k} \\
 &= \cos(2\varphi)\mathbf{j} + \sin(2\varphi)\mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Analoog bereken je $q\mathbf{k}\bar{q} = \cos(2\varphi)\mathbf{k} - \sin(2\varphi)\mathbf{j}$. We zien dus dat $R(q)$ een rotatie is om de \mathbf{i} -as over 2φ . Deze hoekverdubbeling is een algemeen verschijnsel en hangt samen met de bovengenoemde “verdubbeling” $R(-q) = R(q)$.

De eenheidsquaternionen vormen een 3-dimensionale sfeer (de rand van de 4-dimensionale eenheidsbol) in $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$. We leggen 1 in de noordpool van deze bol. Vanwege $R(-q) = R(q)$ mogen we aannemen dat q op het noordelijk halfrond ligt, dus voor de t -coördinaat van $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ geldt $t \geq 0$. Hier is een poging om de 4-dimensionale bol in 2 dimensies weer te geven:



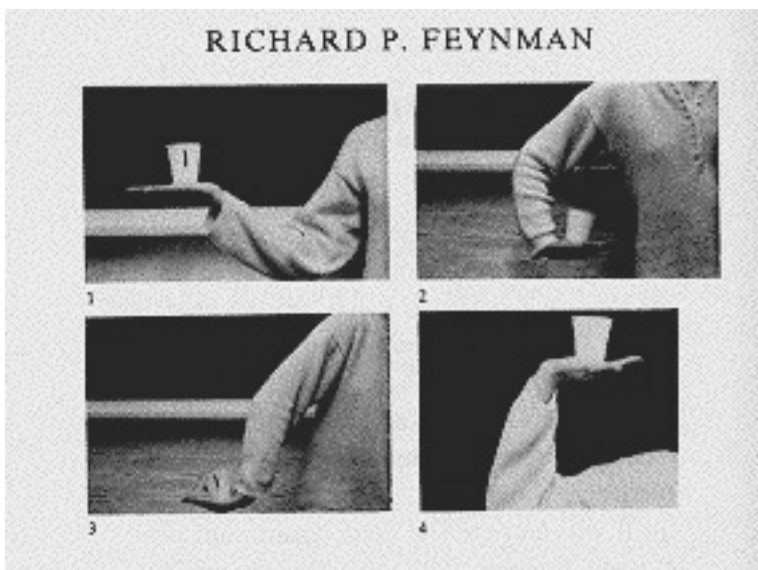
De verticale as is de t -as; loodrecht daarop staan de \mathbf{i} -, \mathbf{j} - en \mathbf{k} -as. De 4-dimensionale bol bestaat uit alle quaternions $q \in \mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ met $|q| \leq 1$. De rand van deze massieve 4-dimensionale bol bestaat uit alle $q \in \mathbf{H}$ met $|q| = 1$; deze rand heeft dimensie 3. De gestippelde “parallel” is de doorsnede met het hypervlak $\{t = t_0\}$. Het bestaat dus uit alle quaternions $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ waarvoor $t = t_0$ en $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. De parallel is dus isomorf met de 2-dimensionale sfeer $\{x, y, z\} \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1 - t_0^2\}$. In het plaatje geldt $t_0 = \cos(\varphi)$, dus deze 2-dimensionale sfeer heeft straal $\sin(\varphi)$.

Analoog aan onze berekeningen hierboven kun je aantonen dat $R(q)$ een rotatie is over 2φ . (De rotatieas wordt opgespannen door het pure vectorge-deelte $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ van $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.) Als q op “breedtegraad” φ ligt (zie plaatje), dan is de rotatiehoek van $R(q)$ dus gelijk aan 2φ . De parallel op “breedtegraad” φ is een 2-dimensionale sfeer¹⁵ met straal $\sin(\varphi)$. De kansdichtheid blijkt nu recht evenredig te zijn met de oppervlakte van deze sfeer, dus met $\sin^2(\varphi)$. De kansdichtheid op rotatiehoek φ is dus evenredig met $\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)$.

¹⁵dus de rand van een massieve 3-dimensionale bol

Het verrassende gedrag van rotaties over 360°

De beschrijving van 3-dimensionale rotaties door middel van eenheidsquaternionen heeft nog andere interessante toepassingen, bijvoorbeeld in de informatica (computer graphics) en in de theoretische natuurkunde. Bepaalde elementaire deeltjes zoals electronen, protonen, neutronen en quarks hebben volgens fysici de merkwaardige eigenschap dat ze na een rotatie over 360° niet “terug bij af” zijn; daarvoor is een rotatie over 720° nodig. Zoals Feynman aantoonde op de volgende plaatjes, geldt iets vergelijkbaars voor plastic bekertjes.



Deze fotoserie geeft een proces weer: op ieder tijdstip τ hebben we een rotatie $R(\tau)$. Als we deze rotatie door een eenheidsquaternion $q(\tau)$ representeren, dan correspondeert de eerste rotatie over 360° met een pad van de noordpool 1 naar de zuidpool -1 . Pas door nog eens over 360° te roteren komen we terug in de noordpool. Blijkbaar wordt de toestand van het bekertje op tijdstip τ gegeven door de rotatie $R(\tau)$ en de toestand van de pezen in Feynmans arm door het quaternion $q(\tau)$. Halverwege, op foto 3, is het bekertje terug bij af (dus $R(\tau)$ is de identiteit), maar de arm is verdraaid (dus $q(\tau) \neq 1$).

De kracht van symmetrie

Intussen lijken we vrij ver afgedwaald van het thema van deze tekst, de rol van symmetrie in de kansrekening, maar niets is minder waar! Volgens de zogenaamde spin-statistiek-stelling van Wolfgang Pauli (1900 – 1958) bepaalt het gedrag van elementaire deeltjes onder rotaties van 360° hun statistisch gedrag: de hierboven genoemde deeltjes volgen de zogenaamde Fermi-Dirac-statistiek, terwijl deeltjes die wél invariant zijn onder rotaties van 360° de zogenaamde

Bose-Einstein-statistiek volgen. Deeltjes van het eerste type heten *fermionen*, deeltjes van het tweede type heten *bosonen*. Het zou te ver voeren om hier nu verder op in te gaan.¹⁶ Ik volsta met de opmerking dat als de twee dobbelstenen uit de inleiding zich als bosonen zouden gedragen, de toestanden (4, 6) en (6, 4) niet te onderscheiden zouden zijn. De kans dat de som van de ogen van twee bosonische dobbelstenen gelijk is aan 10, is daarom niet $\frac{3}{36}$ maar $\frac{2}{21}$.

Ook in de statistische fysica worden dus symmetrieargumenten gebruikt om uitspraken te doen over kansverdelingen. Uitgangspunt hierbij is de Laplace-achtige “*fundamental assumption of statistical mechanics: In an isolated system in thermal equilibrium, all accessible microstates are equally probable*”, zie [3, p.57]. En zo is de thematische cirkel weer rond. Symmetrieoverwegingen zijn essentieel in de onderbouwing van kansmodellen, of het nu om dobbelstenen in de schoolwiskunde gaat of om het curieuze gedrag van elementaire deeltjes in de natuur. Symmetry rules!

Referenties

- [1] Hill, Th.P., *A statistical derivation of the significant-digit law*, Statistical Science **10**, 1995, pp. 354–363.
- [2] Icke, Vincent, *The force of symmetry*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] Schroeder, Daniel V., *An introduction to Thermal Physics*, Addison Wesley Longman, 2000.
- [4] Tissier, P.E., *Bertrand’s paradox*, The Mathematical Gazette **68**, Nr. 443, March 1984, pp. 15–19.
- [5] Wikipedia, *Bertrand’s paradox* en *Bertrand’s Law*
- [6] Zee, A., *Quantum Field Theory in a nutshell*, Princeton University Press, 2003.

¹⁶Voor een mooie introductie in de statistische fysica verwijs ik u naar [3]. Het boek [2] is een toegankelijke introductie op het thema symmetrie en natuurkunde. Voor Pauli’s spin-statistiek-stelling moet je helaas erg diep graven; het meest begrijpelijke boek vind ik [6] (maar check de auteurs lijst met errata!).

Symmetrie in de natuurkunde

Walter D. van Suijlekom

Radboud Universiteit Nijmegen

e-mail: waltervs@math.ru.nl

1 Introductie

Symmetrie vinden we overal om ons heen: in de natuur, in de architectuur, in de muziek, *et cetera*. Een minder zichtbare symmetrie is verborgen diep in de natuurkunde, op het niveau van de elementaire deeltjes. Noodzakelijkerwijs is dit abstracter (want niet direct zichtbaar) en het is verbluffend dat de wiskundige theorie van *groepen* op dit fundamentele niveau aan het werk is. Het structureert de deeltjes van het Standaard Model der elementaire deeltjes, al naar gelang hun fysische eigenschappen en stond zo in de jaren 70 van de vorige eeuw succesvolle voorspellingen toe. En nog steeds is symmetrie het leidende principe in veel natuurkundige theoriën, met voorspellingen zoals het Higgs deeltje of het bestaan van superdeeltjes. Deze beide voorspellingen worden op dit moment getoetst met de deeltjesversneller LHC in Genève.

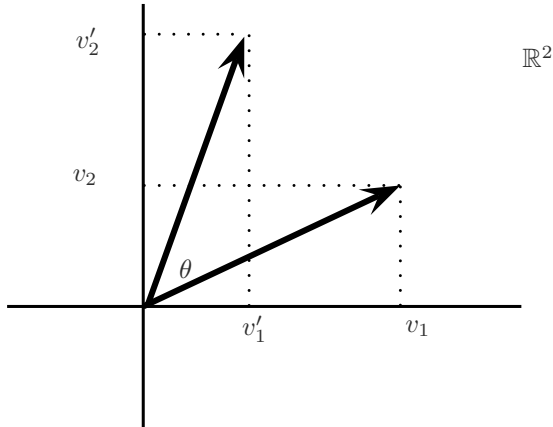
De link die symmetrie vormt tussen wis- en natuurkunde is één van de prikkelende peilers van mijn vakgebied mathematische fysica. Het doel van mijn college is u te laten zien welke wiskundige groepen relevant zijn voor natuurkundige theoriën zoals het Standaard Model der elementaire deeltjes, om zodoende deze theorie ook voor u wiskundigen toegankelijk te maken.

2 Symmetriegroepen

Laten we beginnen met de definitie van een abstracte groep, om vervolgens een aantal relevante voorbeelden te bekijken.

Definitie 1. *Een groep G is een verzameling met een product $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ zodat er*

- *een eenheidselement $e \in G$ bestaat met de eigenschap dat $eg = ge = g$ voor elke $g \in G$,*
- *voor elk element $g \in G$ een inverse $g^{-1} \in G$ bestaat met de eigenschap dat $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.*



Figuur 1: Rotatie om een hoek θ in het vlak

Om op te warmen, bekijken we eerst rotaties in het platte vlak \mathbb{R}^2 . Als we een punt in \mathbb{R}^2 weergeven door middel van een vector v met twee componenten v_1 en v_2 dan is een rotatie om een hoek θ gegeven als matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Intuïtief is het duidelijk dat rotatie om een hoek θ_1 gevolgd door een rotatie om een hoek θ_2 de rotatie om $\theta_1 + \theta_2$ is. Dit is natuurlijk direct te controleren door de corresponderende matrices te vermenigvuldigen en daarbij gebruik te maken van de gebruikelijke sin en cos-formules. Hieruit volgt dat de inverse van een rotatie om θ simpelweg rotatie om $2\pi - \theta$ is. De conclusie is bekend: rotaties in het vlak vormen een wiskundige groep en de elementen uit de groep corresponderen één op één met punten θ op de cirkel \mathbb{S}^1 . We geven de cirkel met deze groepsstructuur ook wel aan met $U(1)$ voor unitaire 1-dimensionale matrices (zie hieronder). Een andere manier om bovenstaande groep van rotatiematrices te karakteriseren is als alle 2×2 matrices A van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

die voldoen aan $\det A \equiv a^2 + b^2 = 1$. Inderdaad zijn deze eigenschappen behouden onder vermenigvuldiging:

$$A \cdot A' \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ba' - ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix},$$

wat opnieuw van dezelfde vorm is en $\det A \cdot A' = \det A \det A' = 1$. De groepsinverse van A is simpelweg A^t , de getransponeerde matrix. Meestal wordt deze

groep aangegeven met $SO(2)$: de groep van speciaal ($\det = 1$) orthogonale 2×2 matrices. We hebben hierboven dus laten zien dat $SO(2) \simeq U(1)$.

2.1 De groep $SU(2)$

Hierboven hebben we gekeken naar **reëel**-waardige matrices van een bepaalde vorm en met determinant 1. We veranderen grondlichaam en bekijken nu **complex**-waardige matrices U van de vorm

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

die voldoen aan $\det U \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Weer geldt dat vermenigvuldiging de bovenstaande vorm en determinant conditie behoudt. De inverse matrix van U is de hermitisch geconjugeerde \bar{U}^t :

$$\bar{U}^t = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix},$$

zodat zulke matrices een groep vormen: $SU(2)$ voor speciaal ($\det = 1$) unitaire 2×2 matrices. Merk op dat $SO(2) \subset SU(2)$ een ondergroep is.

2.2 Representaties van groepen

Laten we beginnen met de definitie van representatie voor een abstracte groep.

Definitie 2. *Een representatie van een groep G op een vectorruimte V is een associatie aan elk groeps-element $g \in G$ van een inverteerbare lineaire afbeelding $\rho(g)$ op de vectorruimte V die de groepsstructuur respecteert:*

- $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$,
- $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$,
- $\rho(e) = 1_V$, de identiteit op V .

Als eerste eenvoudige voorbeeld kijken we naar de cirkelgroep $U(1)$. We kunnen dit representeren op de vectorruimte $V = \mathbb{C}$ door de associatie:

$$\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto e^{2\pi i k \theta} \tag{1}$$

voor zeker (vast) geheel getal $k \in \mathbb{Z}$. Het complexe getal $e^{2\pi i k \theta}$ zien we dus als inverteerbare 1×1 matrix, werkend op de vectorruimte \mathbb{C} door vermenigvuldiging. De groepsstructuur is gerespecteerd want

$$e^{2\pi i k(\theta_1 + \theta_2)} = e^{2\pi i k \theta_1} e^{2\pi i k \theta_2}.$$

Een interessanter voorbeeld is de groep $SU(2)$. Neem nu $V = \mathbb{C}^2$ en laat $SU(2)$ werken door een vector $v \in V$ matrix te vermenigvuldigen met een element in $SU(2)$:

$$\rho^{(1)}(U) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 \\ -\bar{\beta} v_1 + \bar{\alpha} v_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

met v_1, v_2 complexe getallen en U als hierboven. Met andere woorden, $\rho(U) \equiv U$ als lineaire afbeelding op \mathbb{C}^2 ; deze representatie heet de *definiërende representatie* van $SU(2)$.

Minder triviale representaties van $SU(2)$ zijn te verkrijgen als volgt. Het tensorproduct $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ is de vectorruimte bestaande uit lineaire combinaties van elementen $v \otimes w$ met $v, w \in \mathbb{C}^2$. Dit is een $2 \times 2 = 4$ -dimensionale vectorruimte. We kunnen $SU(2)$ hierop representeren door een diagonale werking:

$$\rho^{(2)}(U)(v \otimes w) = Uv \otimes Uw$$

waarbij U gelijktijdig werkt op beide kopieën van \mathbb{C}^2 . Het is eenvoudig in te zien dat dit de groepsstructuur respecteert en ook worden beide kopieën van \mathbb{C}^2 op \mathbb{C}^2 afgebeeld.

Interessant is dat bepaalde eigenschappen van vectoren in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ zijn behouden onder deze diagonale werking. Neem bijvoorbeeld de symmetrische combinatie van twee vectoren

$$v \otimes w + w \otimes v.$$

Dan geldt dat

$$\rho^{(2)}(U)(v \otimes w + w \otimes v) = Uv \otimes Uw + Uw \otimes Uv$$

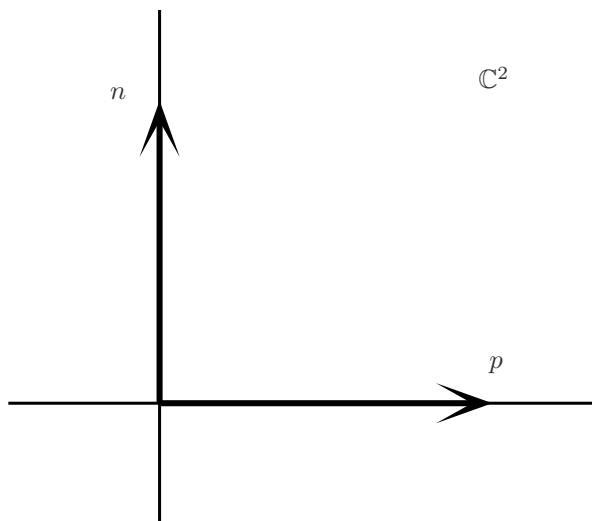
wederom symmetrisch is. Zo is er op de vectorruimte $\mathbb{C}^2 \otimes_S \mathbb{C}^2$ bestaande uit symmetrische combinaties van twee vectoren een representatie gedefinieerd van $SU(2)$. We kunnen berekenen dat deze vectorruimte 3 dimensionaal is.

Net zo kunnen we kijken naar anti-symmetrische combinaties $v \otimes w - w \otimes v$ van twee vectoren; ook hier geldt dat er op de corresponderende vectorruimte $\mathbb{C}^2 \otimes_A \mathbb{C}^2$ een representatie is gedefinieerd van $SU(2)$: $Uv \otimes Uw - Uw \otimes Uv$ is weer anti-symmetrisch. Merk op dat de dimensie van deze vectorruimte 1 is; gelukkig maar, want zo tellen de dimensies van de symmetrische als anti-symmetrische deelvectorruimte bij elkaar op tot de dimensie van $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$$3 + 1 = 2 \times 2.$$

Hoewel dit kinderachtige rekensommen lijken, ligt dit aan de basis van de deeltjesfysica! We zullen dit later zien maar merken nu op dat niet zo maar elke rekensom (zoals het alternatief $2 + 2 = 2 \times 2$) is toegestaan. De reden hiervoor ligt verborgen in de representatietheorie van $SU(2)$, voor meer details verwijst ik bijvoorbeeld naar [1].

Het proces van symmetrische en anti-symmetrische tensorproducten kan naar believen worden herhaald door telkens opnieuw tensorproducten te nemen en te symmetriseren of anti-symmetriseren. Hierbij varieert de graad van symmetrie van volledig symmetrisch naar gemengd symmetrisch (volledig anti-symmetrisch is triviaal in dimensie 2). Bijvoorbeeld voor de 8-dimensionale



vectorruimte $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

volledig symmetrisch: $u \otimes v \otimes w + u \otimes w \otimes v + v \otimes w \otimes u$
 $+ v \otimes u \otimes w + w \otimes u \otimes v + w \otimes v \otimes u,$

anti-symmetrisch in eerste twee vectoren: $(u \otimes v - v \otimes u) \otimes w.$

De dimensie van de eerste vectorruimte is 4 en van de tweede 2. Er is nog een gemengd symmetrische vectorruimte, ook van dimensie 2. Dit geeft de rekensom:

$$4 + 2 + 2 = 2 \times 2 \times 2.$$

3 Elementaire deeltjes

We gaan nu proberen een link te leggen met de elementaire deeltjes uit het Standaard Model. Het beginpunt is om elementaire deeltjes als vectoren te beschouwen in een vectorruimte waarop de groep $SU(2)$ werkt. Het meest voor de hand liggend is om $SU(2)$ te laten werken op de definiërende vectorruimte \mathbb{C}^2 door matrixvermenigvuldiging als in Vgl. (2). Hoe naïef deze Ansatz ook lijkt, het is een schot in de roos! Het blijkt namelijk dat de twee elementaire deeltjes *neutron* en *proton* beide een vector vormen in \mathbb{C}^2 :

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierop werkt $SU(2)$ nog steeds door matrixvermenigvuldiging, en mengt dus neutron en proton. Dit beschrijft een symmetrie van de natuur: overal in onze theorie waar we een proton tegenkomen, kunnen we deze vervangen door een

neutron. Dit correspondeert met vermenigvuldiging met de volgende SU(2)-matrix:

$$p \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv n$$

Andersom kunnen we overal waar we een neutron tegenkomen, deze vervangen door een proton.

Neem bijvoorbeeld de fysische eigenschap van massa, dan vinden we dat deze voor het proton (938 MeV) bijna gelijk is aan die van het neutron (940 MeV). Modulo deze kleine discrepantie in massa (hierover snel meer) is er een symmetrie in massa onder verwisseling van neutron en proton. Dit was de oorspronkelijke reden om op zoek te gaan naar dergelijke symmetrieën in de natuurwetten, door Heisenberg al rond 1932. Deze groepentheoretische ontwikkeling in de fysica vond dus min of meer gelijktijdig plaats met de ontwikkeling van de wiskundige theorie van compacte groepen (zoals SU(2)) door Hermann Weyl.

De SU(2)-symmetrie is tevens de oorsprong van *isobaren*: atomen met hetzelfde aantal kerndeeltjes. Deze zijn gerelateerd via een SU(2)-transformatie die een n kan vervangen door een p en vice versa. Zo zijn de atomen ^{40}S , ^{40}Cl , ^{40}Ar , ^{40}K en ^{40}Ca gerelateerd door dergelijke SU(2)-symmetrieën.

Tot slot is bovenstaande SU(2)-symmetrie waargenomen in natuurkundige experimenten (al bekend aan Heisenberg): de sterkte van de wisselwerking tussen kerndeeltjes is hetzelfde, onafhankelijk of het een proton of een neutron betreft.

Echter, al deze symmetrie lijkt één eigenschap tegen te spreken, namelijk het verschil in lading van het proton en die van het neutron: de eerste is geladen (lading $+1e$) en het tweede is neutraal. De representaties van de groep U(1) komen hier als redding, lading wordt namelijk beschreven door de volgende werking van U(1) op de vectoren p en n in \mathbb{C}^2 :

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zo zien we dat het gehele getal k in Vergelijking (1) precies de lading aangeeft van het betreffende deeltje: verschillende representaties van U(1) stellen deeltjes voor met verschillende lading.

4 Quarks

Zoals al opgemerkt, is bovenstaande symmetrie een benadering: de massa's van het proton en neutron zijn niet exact gelijk. Dit is de oorsprong van *quarks* als bouwstenen van de kerndeeltjes. In plaats van dat p en n een vector vormen in \mathbb{C}^2 , zegt de huidig gangbare theorie dat twee quarks dat doen, genaamd *up* en *down* quark. We schrijven respectievelijk u en d als vectoren in \mathbb{C}^2 :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Merk de treffende naamgeving op van de quarks.¹ Hetzelfde verhaal als hierboven geldt: SU(2) werkt op deze vectoren door matrixvermenigvuldiging, net als in Vgl. (2). Zo transformeert SU(2) up en down quarks en de natuurwetten zijn *exact symmetrisch* onder deze transformatie. Met dat laatst wordt bedoeld dat, in tegenstelling tot het neutron en proton, de up en down quarks (in gebonden toestand) *identieke massa hebben*: 310 MeV.

Hoewel quarks de bouwstenen zijn van kerndeeltjes, kunnen ze niet afzonderlijk bestaan. Alleen in combinaties kunnen quarks zogeheten *hadronen* vormen. Als subklasse van hadronen bekijken we de *baryonen*, deze bestaan uit drie quarks. Wiskundig correspondeert dit met het nemen van het drievoudige tensorproduct $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$: een baryon is een vector in deze 8-dimensionale ruimte. Hierop is dus opnieuw een representatie gegeven van SU(2), zoals we hierboven hebben beschreven.

Het spectaculaire van deeltjesfysica is nu dat het ontbinden van deze representatie van SU(2) in volledig symmetrisch en gemengd symmetrisch dicteert welke elementaire deeltjes (baryonen) in de natuur bestaan. Neem bijvoorbeeld de volledig symmetrische combinatie van in totaal drie up en down quarks; de mogelijkheden zijn:

$$u \otimes u \otimes u; \quad u \otimes u \otimes d + u \otimes d \otimes u + d \otimes u \otimes u; \quad d \otimes d \otimes u + d \otimes u \otimes d + u \otimes d \otimes d; \quad d \otimes d \otimes d.$$

Wiskundig gezien worden deze vectoren onder de werking van SU(2) in lineaire combinaties van elkaar overgevoerd. Fysisch gezien beschrijven deze vier vectoren de vier Δ -baryonen:

$$\Delta^{++}; \quad \Delta^+; \quad \Delta^0; \quad \Delta^-.$$

Deze symmetrie is bevestigd door experimenten, en lijkt inderdaad te kloppen als we de massa's opzoeken van de Δ -baryonen: alle vier 'wegen' ze 1232 MeV.

Maar hoe maken we nu het proton en het neutron? Het blijkt dat hier de gemengd symmetrische representatie een rol speelt. Er is namelijk een identificatie:

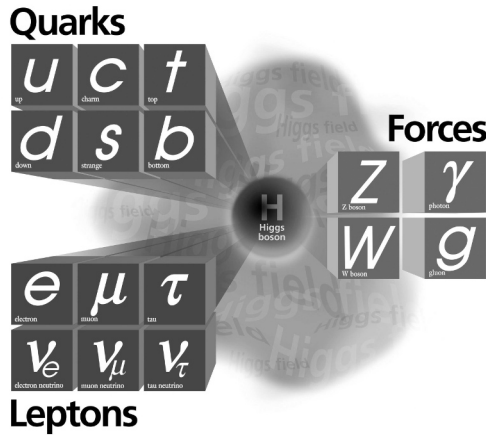
$$p = u \otimes (u \otimes d - d \otimes u) - (u \otimes d - d \otimes u) \otimes u \\ n = d \otimes (d \otimes u - u \otimes d) - (d \otimes u - u \otimes d) \otimes d$$

van proton en neutron met vectoren in de gemengd symmetrische presentatie. Het omklappen van een up en down quark met behulp van een SU(2)-transformatie correspondeert dus precies met het verwisselen van een proton en een neutron.

5 Standaard Model van elementaire deeltjes

Met de komst van nog twee paren van quarks (*strange* en *charm*, *top* en *bottom*) was er ook meteen een enorme *zoo* aan baryonen mogelijk. Dit is nu begrepen

¹Al liet dit weinig ruimte over voor de vier nog te ontdekken quarks; deze kregen de exotischer namen: strange, charm, top en bottom quark.



Figuur 2: De bouwstenen van het Standaard Model. Wij hebben alleen de up en down quark in enig detail besproken. Alle deeltjes vormen een representatie van $U(1)$, $SU(2)$ en $SU(3)$. Naar het ontbrekende Higgs boson wordt momenteel hard gezocht met de Large Hadron Collider in CERN, Genève.

in termen van een $SU(2)$ -symmetrie tussen elk paar, samen met een $U(1)$ en $SU(3)$ -symmetrie. De $U(1)$ -symmetrie dekt de *lading* van de deeltjes en is in feite gerelateerd aan het gehele getal k in het $U(1)$ -representatie voorbeeld hierboven. De $SU(3)$ -symmetrie geeft de quarks een interne structuur, waarbij $SU(3)$ de groep van speciaal unitaire 3×3 matrices is. Meestal wordt deze structuur aangegeven met kleur: een quark kan ‘rood’, ‘groen’ of ‘blauw’ zijn. Dit heeft niets te maken met ons dagelijks gebruik van kleur, het is slechts een handige manier om de drie basisvectoren in \mathbb{C}^3 aan te geven. Hoe het ook zij, het Standaard Model van elementaire deeltjes is een prachtig bouwwerk in de natuurkunde dat strak wordt gedicteerd door de representatietheorie van $U(1)$, $SU(2)$ en $SU(3)$. Zo is al ons bekende materie te reduceren tot de tabel in Figuur 2.

Referenties

- [1] D. H. Sattinger and O. L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*. Springer-Verlag, 1986.

CWI SYLLABI

1. Vakantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*.
2. E.M. DE JAGER, H.G.J. PIJLS (eds.). *Proceedings Seminar 1981–1982. Mathematical structures in fieldtheories*. 1984.
3. W.C.M. KALLENBERG, ET AL. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
4. J.G. VERWER (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis*, volume 1. 1984.
5. J.G. VERWER (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis*, volume 2. 1984.
6. P.J.M. BONGAARTS, J.N. BUUR, E.A. DE KERF, R. MARTINI, H.G.J. PIJLS, J.W. DE ROEVER. *Proceedings Seminar 1982–1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
7. Vakantiecursus 1985: *Variatierekening*.
8. G.M. TUYNMAN. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories*, Vol.1 *Geometric quantization*. 1985.
9. J. VAN LEEUWEN, J.K. LENSTRA (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
10. Vakantiecursus 1986: *Matrices*.
11. P.W.H. LEMMENS. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
12. J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
13. G.M. TUYNMAN, M.J. BERGVELT, A.P.E. TEN KROODE. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories*, Vol.2. 1987.
14. Vakantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*.
15. Vakantiecursus 1983 (1987): *Complexe getallen*.
16. P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984–1986. Mathematical structures in field theories*, Vol.1. 1988.
17. F. DEN HOLLANDER, H. MAASSEN (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985–1987*. 1988.
18. Vakantiecursus 1988. *Differentierekening*.
19. R. DE BRUIN, C.G. VAN DER LAAN, J. LUYTEN, H.F. VOGT. *Publiceren met LATEX*. 1988.
20. R. VAN DER HORST, R.D. GILL (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60*, part 1. 1988.
21. R. VAN DER HORST, R.D. GILL (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60*, part 2. 1988.
22. R. VAN DER HORST, R.D. GILL (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60*, part 3. 1988.
23. J. VAN MILL, G.Y. NIEUWLAND (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
24. P.W.H. LEMMENS (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
25. Vakantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*.
26. G.G.A. BÄUERLE ET AL. *Proceedings Seminar 1986–1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
27. Vakantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*.
28. Vakantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*.
29. A.G. VAN ASCH, F. VAN DER BLIJ. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
30. M.J. BERGVELT, A.P.E. TEN KROODE. *Proceedings seminar 1986–1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
31. Vakantiecursus 1992: *Systeemtheorie*.
32. F. DEN HOLLANDER, H. MAASSEN (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987–1992*. 1992.
33. P.W.H. LEMMENS (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
34. J.H. KRUIZINGA. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
35. Vakantiecursus 1993: *Het reële getal*.
36. Vakantiecursus 1994: *Computeralgebra*.
37. G. ALBERTS. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief*. 1994.
38. G. ALBERTS, J. SCHUT (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.
39. E.A. DE KERF, H.G.J. PIJLS (eds.). *Proceedings Seminar 1989–1990. Mathematical structures in field theory*. 1996.
40. Vakantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen*.
41. Vakantiecursus 1996: *Chaos*.
42. H.C. DOETS. *Wijzer in Wiskunde*. 1996.
43. Vakantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval*.
44. Vakantiecursus 1998: *Meetkunde, Oud en Nieuw*.
45. Vakantiecursus 1999: *Onbewezen Vermoedens*.
46. P.W. HEMKER, B.W. VAN DE FLIERT (eds.). *Proceedings of the 33rd European Study Group with Industry*. 1999.
47. K.O. DZHAPARIDZE. *Introduction to Option Pricing in a Securities Market*. 2000.
48. Vakantiecursus 2000: *Is wiskunde nog wel mensenwerk?*
49. Vakantiecursus 2001: *Experimentele wiskunde*.
50. Vakantiecursus 2002: *Wiskunde en gezondheid*.
51. G.M. HEK (ed.). *Proceedings of the 42nd European Study Group with Industry*. 2002.
52. Vakantiecursus 2003: *Wiskunde in het dagelijks leven*.
53. Vakantiecursus 2004: *Structuur in schoonheid*.
54. Vakantiecursus 2005: *De schijf van vijf – meetkunde, algebra, analyse, discrete wiskunde, stochastiek*.
55. J. HULSHOF ET AL. (eds.). *Proceedings of the 52nd European Study Group with Industry*. 2006.
56. Vakantiecursus 2006: *Actuele wiskunde*.
57. Vakantiecursus 2007: *Wiskunde in beweging*.
58. Vakantiecursus 2008: *Wiskunde en profiel – het gezicht van de wiskunde*.
59. Vakantiecursus 2009: *Tel uit je winst – wiskunde in geld en spelen*.
60. Vakantiecursus 2010: *Wiskunde: de uitdaging*.
61. Vakantiecursus 2011: *Symmetrie*.

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. Leergang beslistkunde, deel 1: wiskundige basiskennis. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang beslistkunde, deel 2: kansberekening. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang beslistkunde, deel 3: statistiek. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. Leergang beslistkunde, deel 4: Markovketens en wachttijden. 1966
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. Leergang beslistkunde, deel 5: inleiding tot de mathematische beslistkunde. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. Leergang beslistkunde, deel 6a: wiskundige programmering. 1967.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. Leergang beslistkunde deel 6b: wiskundige programmering. 1967
- 1.7a G. de Leve. Leergang beslistkunde, deel 7a: dynamische programmering 1. 1969
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang beslistkunde, deel 7b: dynamische programmering 2. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang beslistkunde deel 7c: dynamische programmering 3. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. Leergang beslistkunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 1. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 2. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 1. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 2. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 3. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. Representaties van groepen. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. Colloquium discrete wiskunde. 1968.
- 6 K.K. Koksma. Cursus ALGOL 60. 1969.
- 7.1 Colloquium moderne rekenmachines, deel 1. 1969.
- 7.2 Colloquium moderne rekenmachines, deel 2. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. Relaxatietrillingen. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1970.
- 10.1 J. Fabius, W.R. van Zwet. Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren. 1971.
- 12 T.J. Dekker. Numerieke algebra. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. Colloquium approximatietheorie. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P. W. Hemker, P.J. van der Houwen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3. 1975.
- 16.1 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren. 1973.
- 16.2 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 1. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 2. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. Lineaire algebra, deel 3. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Jongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. Optimaal stoppen van Markovketens. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). Colloquium programma-correctheid. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. Asymptotische methoden in de toe-zingsstheorie; toepassingen van naburigheid. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel I. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen . deel 1: eenstapsmethaden. 1974.
- 25 Colloquium structuur van programmeertalen. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 1. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 2. 1976.
27. M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. Colloquium discretiseringsmethoden. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). Nonlinear diffusion problems. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1 B. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 2. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). Colloquium programmeeromgevingen. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). Inleiding in de coderingstheorie. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). Colloquium bedrijfssystemen. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. Berekening van waerstanden in zeeën en rivieren. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. Oriënterende cursus mathematische statistiek. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). Colloquium, computer graphics. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. Colloquium topologische dynamische systemen. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita datastructuren. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part I. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part II. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. Colloquium stochastische spelen. 1978.
- 40 J. van Tiel. Convexe analyse. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.) Colloquium numerical treatment of integral equations. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita implementatie van programmeertalen. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. Eindige groepen (een inleidende cursus). 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.) . Colloquium numerical solution of partial differential equations. 1980.
- 45 P. Klint (red.). Colloquium; hogere programmeertalen en computerarchitectuur. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel I. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel 2. 1981.
- 47.1 P. W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures procedures in ALGOL 60, vol. I: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra part I. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol 3B: linear algebra, part II. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems. part I. 1981
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol 5B: analytical problems, part II. 1981
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation. 1981
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel II. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.) The structure of real semisimple Lie groups. 1982
- 50 H. Nijmeijer. Inleiding systeemtheorie. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). Cursus cryptografie. 1983.



Centrum Wiskunde & Informatica



Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) is het nationale onderzoeksinstituut op het gebied van wiskunde en informatica. CWI maakt deel uit van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

www.cwi.nl