

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SP 2

D. van Dantzig

Sur l'analyse logique des relations entre le
calcul des Probabilites et ses
applications

(Congres international de Philosophie des Sciences
Paris 1949)

Overdruk uit
Calcul de Probabilites, Hermann, Paris 1949)
p. 49-66.





ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1146



PHILOSOPHIE

Editeur :

Raymond BAYER

Professeur de Philosophie à la Sorbonne
Co-Administrateur permanent
de l'Institut International de Philosophie

XVIII

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

PARIS, 1949

*Publié par l'Institut International de Philosophie avec l'aide du C.N.R.S.
et de l'U.N.E.S.C.O., sous les auspices du C.I.P.S.H.*

IV

CALCUL DES PROBABILITÉS



PARIS

HERMANN & C^{le} Editeurs

6, Rue de la Sorbonne, 6

1951



SUR L'ANALYSE LOGIQUE DES RELATIONS ENTRE LE CALCUL DES PROBABILITÉS ET SES APPLICATIONS

par

D. VAN DANTZIG

(*Université d'Amsterdam*)

1. — L'analyse des principes sur lesquels le calcul des probabilités peut être fondé se compose de deux parties :

1. Le développement d'une théorie mathématique rigoureuse, admettant l'application aux problèmes empiriques ;

2. L'investigation de la structure logique des conclusions qui mènent des données expérimentales par l'intermédiaire de la théorie mathématique aux conclusions empiriques.

Le premier problème a été résolu en principe par la réduction bien connue du calcul des probabilités à la théorie des fonctions d'ensembles (absolument) additives et de leurs intégrales.

Elle est le mieux connue sous la forme axiomatique des « champs de probabilités » de Kolmogoroff.

Dans les applications la théorie des fonctions additives d'ensemble est intercalée entre un ensemble de données d'observations et un système de conclusions empiriques. A part de la structure de la théorie mathématique elle-même, il y a donc deux transitions à étudier : celle des données empiriques à la théorie mathématique, que nous appelons l'*embrayage* de cette théorie, et celle de la théorie mathématique aux conclusions, que nous appelons son *débrayage*. Dans la théorie elle-même, les raisonnements sont purement déductifs, mais ce n'est pas ainsi pour les transitions. Il s'agit d'examiner la nature des arguments sur lesquels ces transitions reposent.

2. — Remarquons d'abord que tout en général l'embrayage d'une théorie mathématique revient à l'introduction d'un *modèle* simplifié

et régularisé des données empiriques (1). D'ailleurs dans la plupart des cas le choix d'un tel modèle ne se laisse pas effectuer d'une manière formelle ; elle ne dépend pas seulement d'un système restreint de descriptions d'observations, mais elle peut dépendre aussi d'expériences précédentes qui n'appartiennent pas à ce système, qui peut-être ne sont pas complètement décrites, même peut-être pas complètement conscientes. D'ailleurs elle sera souvent influencée par les émotions et les valuations de l'investigateur (par exemple de ce qu'il considère « important » ou « significatif »), en particulier par le *but* qu'il veut atteindre. Par exemple le choix d'un modèle dépendra en général du degré d'exactitude avec lequel on désire obtenir des résultats. En choisissant un modèle mathématique on cherchera d'ordinaire un compromis entre deux conditions contradictoires, auxquelles on le veut soumettre : celle de simplicité et celle de conformité avec les données originelles. Plus exactement on se conforme à ces données, plus on trouvera le modèle complexe, en général, du moins. C'est pour cela qu'on devra se contenter d'un modèle un peu moins complexe mais assez maniable.

Les données d'observations se laissent grouper en divers « types d'expérience » au moyen de caractères qualitatifs. Pour chaque type ils se laissent grouper en diverses expériences. Pour chaque expérience ils consistent en 1^o) un groupe de nombres, caractérisant les « conditions » et 2^o) un tel groupe, donnant les « résultats » de l'expérience.

Les applications classiques de la mathématique sont celles où on sait préciser les conditions d'expérience tellement, qu'il s'en laisse déduire des relations, constantes sauf des déviations relativement petites et attribuées aux inexactitudes de mesure. Sans que le modèle, obtenu en négligeant ces déviations, cesse d'être maniable, ces relations y peuvent être trouvées en un nombre suffisamment grand pour admettre les déterminations des résultats d'expérience au moyen de ses conditions. Les modèles du type classique, qu'on trouve par exemple dans la géométrie, la mécanique rationnelle, l'optique, etc... peuvent donc servir à traiter des épreuves, dont on sait préciser les conditions tellement qu'elles déterminent les résultats sans ambiguïté. Il faut néanmoins tenir compte de l'imprécision des quantités mesurées. Autrefois on pensait qu'on pouvait employer le concept de « valeur vraie » d'un paramètre continu, qui devait être un nombre réel complètement déterminé, quoiqu'on ne pouvait *mesurer* cette valeur vraie qu'imparfaitement. Or, non seulement la mesure, mais déjà la *définition* d'une « telle valeur vraie » n'est pas possible. Les paramètres ne sont donc pas donnés ou calculés comme des nombres réels, mais comme petits *intervalles*. Un modèle dans lequel

(1) D. VAN DANTZIG, *General Procedures of Empirical Science*, Synthese 5, pp. 441-455, 1947.

on se rend compte de cette « inexactitude au sens mathématique » est un modèle plus exact au sens empirique qu'un modèle où cette imprécision est négligée.

La différence principale entre nos idées et celles plus généralement acceptées pourrait être la suivante : il ne nous semble pas possible d'introduire un modèle généralement utilisable pour tous les problèmes qui peuvent se rattacher à un système de données expérimentales. L'emploi usuel du terme « probabilité » semble impliquer la supposition qu'un tel modèle, disons « universel », existe. Il nous semble, par contre, qu'on commencera pour un problème déterminé à chercher un modèle assez simple, qu'on remplacera en étudiant des problèmes plus difficiles par d'autres modèles plus complexes. Or, nous ne voyons aucune indication, que les modèles obtenus ainsi admettent la construction d'un tel modèle universel, soit comme limite, soit d'une autre manière. Il serait donc préférable d'éviter l'emploi du terme « probable » complètement en ne considérant que des fréquences relatives par rapport aux différents modèles (correspondant à peu près aux « catégories d'épreuves » de M. Fréchet, pourvu qu'on admette une interprétation suffisamment large du terme « épreuve »). Ce n'est que par tradition que nous emploierons parfois le terme « probabilité » pour ces fréquences relatives.

3. — Faisons d'abord quelques remarques sur la structure du modèle lui-même, c'est-à-dire sur la théorie des fonctions additives d'ensemble. Cette théorie est parfaitement rigoureuse du point de vue de la mathématique classique. Or, l'application empirique demande un peu plus, à savoir que les relations infinitésimales se laissent approximer explicitement par des relations finies correspondantes. Comparons-la avec la théorie des équations différentielles qui joue un rôle analogue dans la mécanique rationnelle. Lorsque les membres droits des équations différentielles sont assujettis à des conditions peu restrictives, par exemple du type des conditions de Lipschitz, les théorèmes d'existence se laissent formuler d'une manière finitiste : lorsque les constantes intervenant dans les équations et dans les conditions initiales de même que la valeur de la variable indépendante, prise arbitrairement dans le domaine d'existence, ne sont pas supposées exactement connues, mais seulement en une approximation suffisamment serrée, les valeurs des variables dépendantes peuvent être approximées autant qu'on le voudra. Il n'en est pas ainsi lorsque les membres droits sont seulement continus, comme dans le théorème de Peano (1). Alors il peut arriver qu'on devrait connaître une des constantes données avec une précision infinie avant qu'on puisse commencer l'approximation des fonctions dépendantes. Mais — en

(1) D. v. DANTZIG, *On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations*. *Proceeding Nederl. Akad. v. Wetenschappen* 45 (1942), pp. 367-373.

laissant de côté la question si cela a un sens du point de vue mathématique, en tout cas les données empiriques n'étant jamais connues — même définies — qu'avec une certaine approximation, un tel théorème d'existence n'admet pas d'applications empiriques. La ligne frontière entre les théorèmes qui admettent et ceux qui n'admettent pas une telle application empirique, coïncide à peu près avec celle entre les théorèmes qui admettent et ceux qui n'admettent pas une démonstration satisfaisant aux demandes de la mathématique intuitionniste, en particulier avec sa partie affirmative (1). Quoique la mathématique intuitionniste soit liée avec la philosophie idéaliste par des unions personnelles, il me semble que son importance est beaucoup plus grande en connexion avec le point de vue empirique qu'avec celui de l'idéalisme philosophique.

La théorie des fonctions additives d'ensemble en sa forme présente ne satisfait pas aux demandes mentionnées ci-dessus. C'est déjà le cas pour le problème le plus simple : celui de déterminer la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire univalente, c'est-à-dire ne prenant qu'une valeur, par exemple 0, sauf une probabilité nulle : $F(x) = 0$ pour $x < 0$, $F(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Puisqu'on peut définir d'après Brouwer des nombres réels α , dont on ne peut pas décider après une approximation finie si $\alpha \geq 0$ ou $\alpha < 0$, on ne sait même pas pour un tel α commencer l'approximation de $F(\alpha)$. Ce fait est lié avec les difficultés qu'éprouvent parfois les statisticiens pratiques lorsqu'il s'agit des valeurs d'une fonction de répartition dans un voisinage petit d'un point de discontinuité, par exemple lorsqu'un nombre d'observations d'une variable continue est groupé en intervalles finis, et qu'il y a des valeurs observées dont la précision de mesure n'admet pas de décider de quelle côté d'une discontinuité de la variable groupée elles se trouvent.

Puisqu'une théorie intuitionniste (préféablement affirmative) (2) des fonctions additives d'ensemble n'existe pas encore (3) nous ne nous occuperons pas maintenant de cette question.

4. — Passons maintenant au problème de l'embrayage.

Dans le calcul des probabilités on emploie d'ordinaire un type de modèle que nous appelons une « collection ». C'est un ensemble Γ , à chaque élément duquel un sous-ensemble d'un second ensemble M est adjoint. Les éléments du premier ensemble Γ seront appelés des « éventualités ». Ils représentent des objets, des événements réels ou éventuels,

(1) D. v. DANTZIG, *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics*, Proceedings Koninklijke Nederl. Akad. v. Wetensch. el 50 (1947) pp. 919-929 ; 1092-1103.

(2) Cf. ma communication au Colloque de Logique de ce Congrès.

(3) Des contributions importantes ont été données par L.E.J. Brouwer dans sa théorie intuitionniste de la mesure.

ou aussi des assertions concernant ceux-ci. Les éléments du second ensemble M seront appelés des « marques ». Ils représentent les propriétés considérées que les éventualités possèdent. Dans la plupart des cas le nombre des combinaisons de marques est de beaucoup inférieur à celui des éventualités. On peut aussi remplacer M par l'ensemble M' de tous ses sous-ensembles, en adjoignant à chaque élément de Γ un seul élément de M' . Cela revient à considérer une combinaison de marques comme une seule marque de nature composée. Nous supposerons que M lui-même a déjà ce caractère, et nous dénoterons un élément variable, parcourant M , par μ .

Lorsqu'il y a dans une collection Γ , dont l'étendue (le nombre des éléments) est N , n éléments possédant une marque μ , la proportion $\frac{n}{N}$ est appelée la fréquence relative de μ , ou aussi parfois la probabilité de μ . La transition de l'énoncé « la collection Γ , consistant en N éléments, contient n éléments possédant la marque μ » à l'énoncé « la marque μ a la fréquence relative (probabilité) $\frac{n}{N}$ par rapport à la collection Γ d'étendue N » est une transformation grammaticale comparable à la transition de $a < b$ à $b > a$.

Une des opérations les plus importantes que l'on peut effectuer sur les collections est l'échantillonnage. Etant donné une collection Γ et un nombre naturel n , on forme une nouvelle collection $\Gamma^{(n)}$, dont les éléments sont tous les sous-ensembles de Γ de nombre cardinal n . L'ensemble $M^{(n)}$ de marques (composées) correspondantes sera l'ensemble de toutes les fonctions numériques $n(\mu) \geq 0$, définies sur M . Une telle fonction sera adjointe à un élément de $\Gamma^{(n)}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de Γ) si et seulement si $n(\mu)$ est le nombre d'éléments de Γ , ayant la marque (composée) μ , qui appartiennent au sous-ensemble. Evidemment $\sum_{\mu \in M} n(\mu) = n$. Un élément de $\Gamma^{(n)}$ sera appelé un *échantillon d'étendue n*.

Cette opération correspond à ce qu'on appelle dans la langue quotidienne le « tirage au hasard ». Lorsqu'on tire actuellement un échantillon d'une collection Γ d'objets semblables, on exprime par le terme « par hasard » qu'on n'attribue aucune importance au fait que l'on a obtenu ce sous-ensemble particulier, mais qu'on le considère seulement comme un élément de $\Gamma^{(n)}$. On exprime cela souvent en disant qu'on « aurait pu » obtenir « aussi bien » chaque autre sous-ensemble de la même étendue, c'est-à-dire chaque sous-ensemble provenant de celui actuellement obtenu par une permutation arbitraire des éléments de Γ . Souvent on soumettra actuellement Γ à une permutation, tellement qu'on ne peut plus prédire quel sous-ensemble de Γ on obtiendra. La sensation d'impuissance par rapport à la possibilité de

prédire le sous-ensemble particulier qu'on obtiendra est transformé par la formalisation en une propriété affirmative du modèle, à savoir la permutableté de tous les éléments de Γ , qui se manifeste dans la restriction à de telles opérations, effectuées sur Γ , qui sont invariantes par rapport au groupe de toutes les permutations (ou du moins d'un sous-groupe transitif) des éléments de Γ . Seulement lorsque cette permutableté est admise, nous emploierons le terme « collection ». Elle peut aussi être considérée comme un « principe de relativité » : on assujettit l'opération actuelle à toutes les permutations qui sont possibles, et l'on se décide à ne faire aucun usage du résultat d'observation actuelle outre ceux qui sont invariants par rapport aux permutations virtuelles. Remarquons qu'on évitera autant que possible l'introduction des permutations virtuelles, en particulier lorsqu'un autre modèle, plus simple, suffira, où Γ peut être considéré comme un ensemble de beaucoup de permutations *réelles* d'une collection Γ_0 .

La transformation d'une collection finie Γ en un champ de probabilité d'après Kolmogoroff peut être effectuée par exemple en prenant comme éléments du champ les marques composées et en adjoignant à chaque marque composée comme valeur de la fonction d'ensemble additive la fréquence relative avec laquelle cette marque se présente en Γ . Ce champ Π peut aussi être considéré comme une image univoque de Γ , elle-même considérée comme champ de probabilité où l'on a attribué à chaque élément le nombre $\frac{1}{N}$ comme valeur de la fonction additive d'ensemble, N étant l'étendue de Γ . Alors on simplifiera le modèle en négligeant $\frac{1}{N}$, de même que (si nécessaire) $1/K$, K étant le nombre de marques composées, et en remplaçant (si nécessaire) les fréquences relatives par d'autres nombres, peu différents de ceux-ci, qui sont plus faciles à manier dans le calcul mathématique. Un échantillon au sens propre tiré de Γ sera simplifié de cette manière comme un échantillon Bernoullien tiré de Π .

Il pourrait être utile d'attirer l'attention sur la différence entre les expressions « en négligeant N » et « en prenant la limite pour $N \rightarrow \infty$ ». La première expression se rattache à un modèle plus ou moins déterminé d'une nature empirique. La seconde expression implique l'existence d'une *suite* de tels modèles, construite d'après une loi déterminée. Or, c'est l'existence d'une telle suite *infinie* dont on pourrait discuter la nature empirique. C'est pour cela que nous préférons la première expression, qui exprime plus clairement, qu'il s'agit d'une action humaine, à la seconde, qui pourrait mener à un pseudo-problème. En comparant nos idées avec ceux de M. von Mises, nous pouvons e. a. noter les différences suivantes :

1. En ne considérant que des modèles finis nous n'avons naturellement pas besoin d'axiome d'irrégularité, ni d'axiome de limite.
2. Nous ne supposons pas que les collections soient ordonnées.
3. Même lorsque nous considérons une suite de collection-modèles d'étendues croissantes N , nous ne supposons pas que chacune soit contenue dans la suivante, d'autant moins qu'elle en soit le segment initial.

Illustrons ces idées générales par quelques exemples.

1. Dans la théorie cinétique des gaz le modèle le plus simple consiste en ce qu'on considère les N molécules du gaz comme les éléments d'une collection Γ_0 , les marques composées μ_0 étant de petits volumes dans l'espace $\Phi_0 = M_0$ de phase à 6 dimensions (c'est-à-dire les marques simples sont de petits intervalles pour les composantes de la vitesse et du rayon vecteur). Les transitions de l'état du gaz à un moment t_0 en ceux à divers moments t_1, \dots, t_n sont considérées comme des permutations des éléments de Γ_0 . Dans ce modèle on peut donc se restreindre aux permutations *réelles*. Il est bien connu qu'un modèle plus précis, le « grand ensemble » de Gibbs, s'obtient en considérant le développement du gaz pendant un certain temps comme un seul élément d'une collection Γ , les autres étant tous ceux qui « auraient été possibles ». Les marques sont maintenant les éléments dans l'espace de phase $\Phi = M$ à $6N$ dimensions. Ici les permutations sont virtuelles, puisque seulement une d'entre elles — au moins d'après la théorie classique — est actuellement réalisée.

2. Le modèle le plus simple souvent employé d'un jeu de dés consiste en ce qu'on suppose le dé symétrique et prend pour Γ_0 l'ensemble des 6 faces, les nombres étant les marques. Les coups réalisent les permutations, réelles ici, qui forment un groupe transitif. On pourrait même introduire le modèle encore plus simple, où l'on ne distingue que par exemple la face portant le numéro 6, et les faces ne portant pas ce numéro, c'est-à-dire la collection Γ_{00} consistant en deux éléments (« 6 » et « non — 6 »), considérés comme permutable. Cela revient à donner des probabilités $1/2$ à ces deux éventualités. Il n'y a aucune raison a priori pour rejeter ce modèle. Or, il serait contredit par l'expérience. En effet, on pourrait aisément rejeter ce modèle au moyen de la méthode empirique, décrite au numéro 6.

Un modèle plus précis est obtenu lorsqu'on ne suppose pas a priori le dé symétrique, et qu'on observe un ensemble de n coups, qu'on suppose être indépendants et à probabilités constantes. On considère cette suite comme un échantillon tiré d'un ensemble beaucoup plus vaste de N coups (peut-être réels et non-observés, peut-être fictifs) qui constitue la collection Γ . Les « probabilités vraies » des faces sont les fréquences relatives dans Γ (où l'on fera $N \rightarrow \infty$). La permutable exprime l'indé-

pendance des coups et la constance des probabilités. Si l'on ne sait pas si les probabilités sont constantes ou non et si les coups sont indépendants ou non, on remplacera Γ par un modèle analogue mais moins simple, dans lequel on considère un ensemble de plusieurs séries de coups, de longueurs égales, comme un échantillon.

3. Dans la théorie de la mortalité le modèle suivant est souvent employé. On divise la population d'un pays (ou d'une ville, d'une province, etc...) en un système catégorique (c'est-à-dire complet et exclusif) de groupes à peu près homogènes (par exemple par rapport au sexe et à l'âge, parfois aussi à la prospérité, la santé, l'urbanité, etc...). On considère chaque groupe homogène comme une collection Γ_0 et par exemple la partie homogène correspondante d'une société d'assurances comme un échantillon. Ce modèle est souvent un peu trop simple puisqu'on désire tirer des données statistiques des prédictions sur les décès futurs, en supposant la mortalité constante. Cette supposition revient à l'introduction d'une collection consistant en tous les individus appartenant à un tel groupe homogène pendant plusieurs années, passées et futures, et de considérer la partie de ce groupe appartenant au passé comme un échantillon. Ici aussi la fréquence relative de mortalité observée se distingue de la probabilité, c'est-à-dire la fréquence relative par rapport à toute la collection. On pourrait aussi considérer un modèle beaucoup plus compliqué, tellement même, qu'il n'admet point une précision suffisante afin d'être d'utilité effective. Néanmoins il semble s'approcher de ce que certains auteurs (par exemple J. M. Keynes) veulent exprimer lorsqu'ils opposent la notion de probabilité à celle de fréquence relative. Dans ce modèle on considère tous les cas où un individu meurt pendant une certaine période, ensemble avec toutes les circonstances qui y sont liées causalement, comme *un seul* élément d'une collection Γ , considérée comme modèle. Tous les autres éléments de Γ sont fictifs et s'obtiennent de l'élément actuel au moyen de transformations des individus ou des causes, en tenant constantes certaines fréquences de phénomènes observables. Par exemple à côté de la place où un individu s'est trouvé actuellement à un certain instant on considérera d'autres places où il « aurait pu se trouver », tellement que la distribution de ces places sur tous les éléments de Γ correspond à la distribution des places où cet individu s'est trouvé actuellement. D'une manière analogue on permutera les places et les moments d'autres individus, d'orages, d'épidémies, ou même de bacilles, etc... Il va sans dire qu'un tel modèle est beaucoup trop imprécis pour être utilisable et n'a plus de signification empirique, mais il pourrait peut-être s'approcher du « modèle universel », que les probabilistes anciens pensaient pouvoir employer.

4. En résumant nos considérations nous pouvons dire qu'une assertion de la forme « L'éventualité A a la probabilité p » se rattache en appa-

rence seulement à une seule éventualité A . Elle est obtenue par une transformation grammaticale, se référant à une collection d'éventualités, tantôt réelles, tantôt imaginaires. Une telle collection est assujettie à un groupe transitif de permutation. Par l'assertion affirmative de permutabilité on exprime une émotion de nature plutôt négative, à savoir qu'on ne peut pas ou ne veut pas tâcher de prédire une permutation spéciale parmi toutes les permutations possibles. L'étendue de la collection, ainsi que les valeurs précises des probabilités (fréquences relatives), ne sont définies qu'approximativement. On négligera souvent la valeur réciproque de l'étendue, par exemple pendant la transition au champ de probabilité, c'est une simplification du modèle, lequel est remplacé par une collection « impropre », infinie. En tant que la collection contient des éventualités non-observées (ou même fictives), les probabilités ne peuvent qu'être estimées plus ou moins grossièrement, et bien par une méthode que nous discuterons dans le § 6.

Mais passons d'abord au problème du débrayage de la théorie mathématique.

5. Ayant choisi un modèle déterminé, on a calculé la valeur numérique p de la probabilité d'une éventualité A . Qu'est-ce qu'on en peut conclure? Quelle interprétation empirique peut-on donner à cette valeur, et sur quelles considérations cette interprétation est-elle fondée? Le modèle contient des énoncés du type $P[A] = p$ (ou $\leq p$, etc.) où $P[A]$ est la valeur qu'une fonction additive d'ensemble prend sur l'ensemble A , et $0 \leq p \leq 1$. En interprétant les ensembles comme marques composées d'éventualités, il nous manque encore une transition de ces énoncés à ceux qui expriment ce qui arrive réellement, c'est-à-dire lesquelles éventualités « se réalisent ». Introduisant le prédicat R pour exprimer qu'une éventualité « se réalise », on tâchera d'exprimer $R[A]$ par des énoncés du calcul. Lorsqu'on poserait

$$R[A] \equiv (P[A] = 1)$$

on reviendrait à la théorie classique. M. E. Borel (après d'Alembert et Cournot), a proposé d'introduire l'hypothèse que les éventualités ayant une « probabilité » $P[A]$ qui est très petite, ne se réaliseront pas, et a précisé le terme « très petite ». Ceci revient à poser

$$R[\neg A] = (P[A] \leq \delta)$$

(où \neg signifie « non » ou l'ensemble complémentaire), ce qui équivaut à

$$R[A] = (P[A] \geq 1 - \delta)$$

On ne peut pas éviter complètement un énoncé de ce type, comme M. Borel l'a montré à plusieurs occasions. Un exemple que j'ai donné (1)

(1) D. VAN DANTZIG, *Blaise Pascal en de betekenis der wiskundige denkwijze voor de studie van de menselijke samenleving*, Groningen, 1949.

récemment est le suivant : il y a une probabilité positive qu'un arc d'un pont de chemin de fer s'évapore soudainement (une estimation assez crue donne un ordre de grandeur d'environ $10^{-10^{30}}$). Il y a même une probabilité encore beaucoup plus petite mais toutefois positive, qu'après quelque temps la vapeur de fer se condense précisément sous la forme originelle, de manière que les voyageurs dans le train qui, un peu plus tard, passe sur le pont n'apprendront que le soir, en lisant les journaux, à quel danger terrible ils ont échappé si miraculeusement (1).

Or, cette méthode de débrayage, lorsqu'elle est appliquée généralement, mène à une difficulté sérieuse.

Soit $A \equiv A_1 \vee \dots \vee A_n$ la disjonction de n éventualités exclusives telles que $P[A_i] \leq \delta$ pour chaque i , tandis que $P[A] = \sum_i P[A_i] \geq 1 - \delta$. On devrait dire qu'aucun des A_i ne se réalise, tandis que leur disjonction se réalise. Cela contredit l'usage commun du terme « se réaliser » par rapport à une disjonction : on dit que A_1 ou \dots ou A_n se réalise, lorsqu' (au moins) un des A_i se réalise.

A cause de l'axiome d'Eudoxe (Archimède), on ne peut donc pas appliquer le principe de débrayage de Borel à *chaque* éventualité pour laquelle on a trouvé dans le modèle une probabilité $\leq \delta$. Afin d'éviter cette difficulté on procède de la manière suivante :

On choisit un « niveau de défiance » (en anglais : « level of significance ») $\varepsilon > 0$, souvent $\varepsilon = 0,05$ ou $= 0,01$. On considère un grand nombre N d'applications du calcul des probabilités, chacune se rapportant à un modèle défini et à un problème empirique déterminé. Pour chaque $i \leq N$ nous choisissons une éventualité A_i et une seule, ayant par rapport au $i^{\text{ème}}$ modèle une probabilité $\geq 1 - \varepsilon$ telle que l'assertion (souvent une prédiction) « A se réalise(ra) » résout le $i^{\text{ème}}$ problème empirique. D'ailleurs on suppose toutes les N applications indépendantes au sens stochastique.

En écrivant $A \text{ spr } \varepsilon$ (à lire : A salva probabilitate ε) au lieu de $P[A] \geq 1 - \varepsilon$, on a donc obtenu le système de « prédictions ».

$$A_1 \text{ spr } \varepsilon, \dots, A_n \text{ spr } \varepsilon$$

Alors on forme le produit direct de tous les champs de probabilité constituant les modèles particuliers. Par rapport à ce « modèle universel », on considère l'éventualité $B_{N,r}$ qu'il y a r différentes parmi les éventualités A_i , qui ne se réalisent pas (correspondant à l'ensemble, qui est la somme de tous les produits de r quelconques, différents, parmi les compléments des A_i). La variable aléatoire r est distribuée selon une loi de Bernoulli-Poisson du degré N et de probabilités $p_i \leq \varepsilon$ ($i = 1, \dots, N$), qu'on remplace par une loi de Bernoulli avec $p = \varepsilon$.

(1) Naturellement cet exemple n'est valable qu'en apparence, parce qu'aucun modèle n'a une précision suffisante pour admettre les distinctions entre des nombres tellement petits et zéro.

Enfin, on choisit un « niveau de défiance » $\delta > 0$, beaucoup plus petit que ε , qui sera le niveau de débrayage d'après Borel, et on détermine le nombre ε_1 , tel que

$$B_{N,r} \rightarrow \frac{r}{N} \leq \varepsilon_1 \text{ spr } \delta$$

Cette relation correspond avec la prédiction « sauf une probabilité δ il n'y aura que $\varepsilon_1 N$ prédictions au plus qui failliront ». C'est cette prédiction universelle et celle-là seulement, à laquelle on applique le principe de débrayage d'après Borel, en disant que cette éventualité se réalisera, ou plutôt, en décidant qu'on ne tiendra pas compte de la possibilité que l'éventualité empirique correspondante ne se réalisera pas.

En choisissant par exemple $\varepsilon = 0,05$, $N = 10.000$, $\delta = 10^{-10}$, on conclura qu'on ne tiendra pas compte de la possibilité que parmi 10.000 prédictions indépendantes, faites toutes sur un niveau de défiance de 5 %, il y aura plus que 6 1/2 % qui failliront. Pour $\delta = 3 \times 10^{-6}$ on aurait obtenu comme niveau de défiance « effectif » 6 %, pour $\delta = 1 \%$ environ 5 1/2 %, pour $\delta = 1/2$ évidemment 5 %.

La différence principale entre l'opinion de d'Alembert, qu'une éventualité de probabilité $> \delta$ est impossible et la nôtre (qui, je crois, est aussi celle de M. Borel) est la suivante :

On ne peut pas attribuer aux éventualités de petite probabilité un prédicat d'éventualité *additif*, comme '... est impossible' ou '... ne se réalise pas', puisque un tel prédicat mène à une contradiction, excepté si on ne l'applique qu'à une *seule* éventualité. On ne peut appliquer à toutes les éventualités de petite probabilité qu'un prédicat non-additif d'éventualités, par exemple : 'On ne tient pas compte de ...'.

Il est utile de remarquer, qu'on peut augmenter indéfiniment le nombre d'éventualités d'un système catégorique, contenant un événement actuel, en augmentant l'exactitude de mesure des grandeurs se rattachant à cet événement. Par exemple en supposant que les moments de la naissance et de la mort d'un individu peuvent être définis avec une exactitude de quelques secondes, l'ordre de grandeur du système catégorique des diverses durées de vies possibles devient environ 10^7 . D'une manière pareille, la probabilité qu'un individu meurt à un âge entre x et $x + dx$, à un endroit donné sur une petite surface O , qu'il est marié et que sa femme a un âge entre y et $y + dy$, qu'il a deux enfants ayant les âges entre z_1 et $z_1 + dz_1$ et z_2 et $z_2 + dz_2$ respectivement, tous à l'instant de sa mort, etc., peut être rendue arbitrairement petite en augmentant le nombre des variables. Donc, lorsqu'on dirait qu'une éventualité dont la probabilité est $< \delta$ est 'impossible', on ne réaliserait pas, qu'on devrait admettre que l'homme est immortel, puisque pour *toutes* les valeurs des paramètres l'éventualité serait 'impossible'.

6. Revenons au problème de l'embrayage. Nous voyons déjà que la collection dont les données observées de même que les éventualités à prédire forment des échantillons, souvent n'est qu'incomplètement déterminée et qu'elle est presque toujours partiellement inconnue. Comment peut-on obtenir un modèle déterminé? Ce problème peut être résolu d'une manière tout à fait analogue à celui du débrayage, comme l'ont montré J. Neyman et E.S. Pearson, pourvu que certaines hypothèses d'une nature générale soient acceptées. Ces hypothèses comprennent par exemple l'indépendance des observations données, et la continuité, ou du moins la non-univalence des distributions considérées. Remarquons d'ailleurs que ces hypothèses-ci ne se laissent démontrer ni même confirmer d'aucune manière. Chaque ensemble de données expérimentales est également compatible :

1^o) Avec l'hypothèse que toutes les épreuves sont complètement indépendantes au sens stochastique et possèdent des distributions inconnues, variant d'une épreuve à l'autre, et 2^o) avec l'hypothèse que toutes les épreuves sont complètement dépendantes, et que le résultat d'une quelconque d'entre elles détermine les résultats de toutes les autres au moyen d'une loi inconnue, c'est-à-dire que toutes les probabilités conditionnelles, relatives à un quelconque des résultats, sont ou bien = 0, ou bien = 1, ou aussi que tous les résultats d'épreuves sont des fonctions bi-univoques d'une quelconque d'entre eux. Ces deux hypothèses, apparemment si différentes, et dont l'une correspond à une philosophie indéterministe et l'autre à une philosophie déterministe, ne sont que des pseudo-hypothèses, puisqu'on n'en peut rien conclure. Si toutes les distributions sont univalentes (à valeurs inconnues), elles sont même équivalentes, et d'ailleurs vides de sens. L'univalence n'exprime en termes mathématiques qu'un cliché qu'on rencontre souvent en termes plus poétiques, à savoir que les épreuves « n'auraient pu » donner d'autres résultats que ceux qu'elles *ont* donnés. Et les expressions « il n'y a aucune loi » liant les résultats, et « il y a une loi complètement inconnue » ne diffèrent que par leur contenu émotif.

Puisqu'on ne peut appliquer le calcul des probabilités qu'*après* avoir accepté un champ de probabilité, l'embrayage d'un modèle déterminé ne peut consister que dans le *sondage* (anglais : « testing ») d'un tel modèle. On accepte provisoirement un tel modèle, et le rejette lorsqu'il engendre le résultat observé avec une trop petite probabilité. Afin d'éviter un cercle logique on ne peut donc jamais *prouver* qu'un modèle est « correct » ou « vrai » ou même « vraisemblable » sur un niveau de défiance déterminé. On peut seulement prouver qu'un modèle ou bien est *inacceptable* sur un tel niveau, ou bien n'est *pas* inacceptable sur ce niveau. En disant par abréviation « acceptable » au lieu de « non inacceptable », on ne doit pas oublier que cette notion reste négative en ce sens qu'il y a toujours une infinité d'hypothèses acceptables sur le même niveau de défiance.

La notion d'acceptabilité $\text{spr } \varepsilon$ exige encore plus de précision. Soit donné un ensemble A de données d'observations, et considérons une hypothèse H , par exemple un champ de probabilité déterminé. La méthode présuppose l'existence d'une hypothèse « vraie » H' , c'est-à-dire d'une collection comprenant les expériences passées et futures, et définie avec une précision suffisante afin que les valeurs des probabilités (fréquences relatives par rapport à cette collection) considérées soient définies avec une précision suffisante. Considérons d'abord la probabilité des données A par rapport à l'hypothèse H qu'on dénote par $P[A | H]$. Cette même quantité est aussi appelée *l'acceptabilité* (anglais : likelihood) de l'hypothèse H par rapport aux données A . Comme l'a remarqué R.A. Fisher, à qui on doit cette notion, de même que la théorie de l'acceptabilité maximum, on ne peut pas remplacer le terme « acceptabilité » par « probabilité », puisque la quantité $P[A | H]$ considérée comme fonction de H , ne doit pas être additive. D'ailleurs le remplacement du terme « probabilité » par « acceptabilité » n'est qu'une transformation grammaticale de même que le remplacement de « $a < b$ » par « $b > a$ ». Proprement dit l'un d'eux est superflu.

Dans les cas les plus simples nous rejetons donc H si $P[A | H] \leq \varepsilon$. Or, dans la plupart des cas cette inégalité aura lieu pour chaque résultat « possible » (plutôt : éventuel) de l'épreuve, c'est-à-dire $P[B | H] \leq \varepsilon$ pour chaque B , obtenu de A par remplacement des nombres mesurés par d'autres nombres arbitraires, mais déterminés. Dans ces cas on laisse la plupart des données précises hors considération, et on se borne à un petit nombre de fonctions des observables (définies pour *tous* les B éventuels) ne prenant qu'un petit nombre de valeurs (éventuellement valeurs logiques).

En remplaçant l'ensemble des données originales par ce nouvel ensemble restreint (que nous dénoterons par A'), l'« ensemble critique », on peut maintenant appliquer la méthode décrite et rejeter H lorsque $A \subset A'$ et $P[A' | H] \leq \varepsilon$. Remarquons que le *choix* des fonctions qu'on considère, c'est-à-dire de l'ensemble A' comme fonction de A , n'est nullement uniquement déterminé, mais dépendra du *but* de l'investigation. Si par exemple A détermine la valeur d'une variable aléatoire continue, on peut prendre pour A' une relation de la forme soit $x \leq a_1$, soit $x \geq a_2$, soit $a_3 \leq x \leq a_4$, etc., pourvu que les nombres a_1 ou a_2 ou a_3 et a_4 soient déterminés d'une manière indépendante de la valeur spéciale x .

Le reste du raisonnement est tout à fait analogue à celui du numéro 5. Nous considérons un ensemble de beaucoup d'embranchages de modèles, tel que *chaque* modèle et *chaque* fonction A' (A) s'y trouvent souvent, et nous déterminons la suite de rejections fausses comme nous le faisons auparavant avec les prédictions fausses. Nous ne tiendrons donc aucun

compte de la possibilité que la fréquence relative des rejections dépasse de beaucoup le niveau de défiance ε .

Peut-on obtenir un pareil résultat pour les acceptations fausses ? C'est-à-dire les non-rejections d'hypothèses H lorsqu'elles sont fausses ? Remarquons d'abord que les H doivent donner des champs de probabilité déterminés. Si donc les hypothèses considérées dépendent d'un paramètre continu θ , H doit attribuer une valeur déterminée, disons θ , à θ . Alors, l'énoncé que H est fausse, c'est-à-dire que $\theta \neq \theta$ n'a pas de sens empirique. Ceci est seulement le cas si l'on donne une borne inférieure pour la déviation, par exemple si l'on considère des énoncés comme $|\theta| \geq \delta$ où δ est un nombre positif donné. (Ces énoncés sans sens empirique correspondent d'ailleurs aux assertions qui ne se laissent pas formuler dans la mathématique affirmative). On devrait donc distinguer divers degrés de fausseté, correspondant aux valeurs des δ .

Une acceptation correcte, comme nous le disions déjà, sera donc toujours l'acceptation de tout un ensemble (et bien un ensemble ouvert) d'hypothèses, à savoir de toutes les hypothèses non rejetées. Or, une telle acceptation comprenant une hypothèse H ne peut être fausse que si la rejection de l'hypothèse vraie H' était fausse. Donc on obtient le même résultat pour les acceptations fausses mais effectuées de la manière correcte que pour les rejections fausses.

Remarquons enfin que le procédé qu'on suit parfois dans la pratique de la statistique mathématique est soumis à plusieurs objections. D'abord il faut considérer qu'un débrayage et un embrayage, tous les deux effectués sur un niveau de défiance ε peuvent augmenter ce niveau à 2ε . D'ailleurs, le débrayage est souvent effectué par rapport à une seule hypothèse acceptée. Or, il serait nécessaire de restreindre les prédictions à celles qui correspondent à une probabilité $\geq 1 - \varepsilon$ par rapport à toutes les hypothèses non rejetées. Mais dans la plupart des cas le calcul des probabilités des prédictions n'est possible que sous des hypothèses très restreintes. D'ailleurs, fréquemment les présuppositions d'homogénéité et d'indépendance ne sont satisfaites que très grossièrement. Tout cela fait l'usage des niveaux de défiance précis assez illusoire. Pour ces raisons les méthodes non-paramétriques, ou même exemptes (ou presque) d'hypothèses sont à préférer, qui mènent directement des données empiriques aux prédictions, en les considérant comme deux échantillons indépendants d'une même collection. Or, on n'en connaît encore qu'un petit nombre, et d'ailleurs elles ont le désavantage d'être parfois peu efficaces (anglais : efficient). Néanmoins, la réduction d'après Borel et d'après Neyman et Pearson des prédictions et des rejections à tels niveaux est un grand progrès en comparaison avec la méthode ancienne des coefficients qu'on jugeait tout à fait arbitrairement être « grands », « petits », « négligeables », etc.

7. Considérons, à titre d'application du prédit, un problème analogue à celui posé par M. Fréchet (1) : étant donnée une observation x_1 d'une variable aléatoire X , que peut-on en conclure ?

Étant donné un niveau de défiance ε (≥ 0 et ≤ 1), on peut choisir une parmi une infinité de conclusions, toutes salva probabilitate ε , c'est-à-dire la négation d'une, choisie arbitrairement parmi ces conclusions, peut être rejeté spr ε . Le choix dépend du choix de l'ensemble critique, et celui du but de l'investigation. En voici quelques exemples (2).

	Conclusion spr ε	Ensemble critique
1.	$F(x_1) > \varepsilon$	$\{ X \leq x_1 \}$
2.	$F^*(x_1) < 1 - \varepsilon$	$\{ X \geq x_1 \}$

Choisissant un $a > 0$ et un $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ on peut aussi conclure

$$3. \quad \varepsilon - \varepsilon_1 < F(x_1 - a) \leq F(x_1 + a) < 1 - \varepsilon_1$$

Ici l'ensemble critique consiste de

$$X \leq x_1 - a \text{ et } X \leq x_1 + a$$

S'il est donné que la valeur trouvée de x_1 est *exacte*, on peut aussi conclure spr ε :

$$4. \quad F(x_1) - F^*(x_1) > \varepsilon \text{ (Ens. crit. : } X = x_1 \text{)}$$

Si en particulier X ne prend que les valeurs 0 et $1 = x_1$ avec les probabilités q et $p = 1 - q$ (cas de M. Fréchet) on obtient :

$$5. \quad p > \varepsilon \quad \text{spr } \varepsilon$$

ce qui est trivial du point de vue mathématique. Ce cas montre très clairement qu'il ne s'agit pas d'une conclusion logique, mais d'une décision, à savoir d'accepter l'hypothèse $p > \varepsilon$, en risquant une probabilité ε .

S'il est donné que la valeur est exacte sauf une incertitude de mesure $\leq \delta$:

$$6. \quad F(x_1 + \delta) - F^*(x_1 - \delta) > \varepsilon \text{ (Ens. crit. : } (| X - x_1 | < \delta) \text{)}$$

Si l'on sait quelque chose de plus concernant la fonction de distribution on peut tirer d'autres conclusions spr ε , plus précises. Exemples :

Si $F(x) = F_0\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)$, $\beta > 0$, $F_0(y)$ étant une fonction de distribution continue donnée :

$$7. \quad x_1 > \alpha + \beta y_1, \text{ } y_1 \text{ étant la solution du } F_0(y_1) = \varepsilon.$$

(1) M. FRÉCHET, *Rapport sur l'estimation des paramètres*, Confér. Stat. Intern., 1947. Je n'ai pu consulter ce rapport qu'après avoir écrit ma conférence.

(2) Notation : $F(x) = P[X \leq x]$; $F^*(x) = P[X < x]$.

Si X suit une loi de Poisson à moyenne (inconnue) α (de sorte que x est un nombre naturel) :

8. $\alpha > a$, $a = a(x_1, \varepsilon)$ étant la solution de l'équation transcendante

$$\sum_{x_1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \varepsilon e^a$$

8. — Nous avons trouvé quatre points où, selon notre description, les procédés de la statistique mathématique dépassent les données d'observation :

1. par l'inclusion d'éventualités futures et même fictives dans le modèle ;
2. par le principe de permutabilité ;
3. par le choix de l'ensemble critique de rejection ;
4. par le choix d'un ensemble de prédiction ;

On se demandera si toutes ces transgressions sont vraiment inévitables. En fait, il me semble que oui. Quant à 1. : lorsqu'on a par exemple mesuré le rendement d'un champ d'essai emblavé, ce à quoi on s'intéresse en réalité n'est pas le produit de ce champ d'essai, mais celui de tout un terrain, ou même d'une province lorsqu'elle sera semée en cette espèce de blé sous les mêmes conditions (autant que possible), donc d'une éventualité future. Lorsqu'on compare par exemple deux sortes de grain, on n'emblavera en général le terrain qu'en une espèce, la meilleure ; l'ensemencement en l'autre sera donc une éventualité fictive (« virtuelle »). Il me semble donc inévitable de considérer celles-ci aussi. Quant à la permutabilité dans l'exemple précédent elle est contenue dans les mots « sous les mêmes conditions, autant que possible ». Or, on se demande s'il n'est pas possible de *démontrer* expérimentalement, que cette permutabilité est une approximation acceptable, comme en effet en plusieurs cas *c'est* possible, mais seulement au prix d'un autre principe de même nature. En prenant l'exemple précédent, on peut faire cela *après* avoir ensemencé tout le terrain. On essaiera l'hypothèse que par exemple tous les champs d'une même étendue de ce terrain sont permutable, ou aussi qu'il y a un certain type de dépendance ou d'inhomogénéité, en déterminant la distribution des rendements de ces champs et la comparant avec toutes les autres distributions qu'on « aurait pu » obtenir à cause de cette hypothèse. Au lieu de l'ensemble de tous les champs c'est ici l'ensemble de toutes les distributions possibles sur les champs (choisis d'accord avec l'hypothèse) qu'on soumet à un principe de permutabilité non-fondé expérimentalement. Evidemment on peut itérer ce procédé, mais, en tant que j'y vois clair, toujours en transcendant les résultats observés jusque là. Les transgressions 3 et 4 peuvent être discutées d'une manière analogue, en précisant les considérations déjà données là-dessus aux numéros 5 et 6.

9. — Dans la théorie précédente j'ai évité, non seulement les notions très vagues de hasard ou de « degré de croyance rationnelle », en les remplaçant par le principe de permutabilité et le degré de défiance, mais aussi la notion d'infini mathématique, qui n'y figure que comme une simplification mathématique du modèle, c'est-à-dire comme une négligence de ϵ par rapport à l'étendue de la collection considérée. Mais on se rendra compte de ce que cela ne peut pas être fait conséquemment. La subjectivité de la théorie se laisse éliminer en partie, en la renvoyant à la permutabilité et aux choix des ensembles critiques. Mais ceux-ci ne se laissent pas déterminer d'une manière « objective » ou formelle, ni en se basant sur des considérations purement logiques ou syntactiques, ni aussi en les rapprochant des données empiriques, c'est-à-dire en ajoutant des considérations de nature « sémantique » d'après la terminologie de Ch. X. Morris et R. Carnap. Afin de déterminer par exemple les ensembles prédits, il est nécessaire de connaître le *but* de l'investigation. Il ne me semble pas impossible, qu'on pourra réduire la « subjectivité » à la connaissance de ce but, c'est-à-dire qu'on réussira à donner des méthodes pour obtenir des résultats univoques, pourvu qu'à part des données observationnelles (y compris les données non-analysées d'une nature générale, comme l'indifférence de certaines conditions), aussi le *but* de l'investigation soit donné. Mais une telle théorie n'existe pas encore. En tenant compte de la nécessité de référer une conclusion statistique à son but, la probité scientifique demande qu'on ne la donne pas dans la forme d'une *prédiction* au sens propre : « Un tel et tel événement arrivera », mais dans celle-ci d'un *avis* : « Si vous voulez atteindre un tel but, si vous considérez telles et telles éventualités comme permutable et si vous voulez courir un tel risque, agissez comme suit... ». C'est aussi à cause du fait qu'au moins dans la plupart des cas la connaissance du but est nécessaire afin de déterminer le modèle à embrayer, que le statisticien doit très souvent prescrire l'étendue, le groupement et même la nature des expériences à faire afin de pouvoir essayer une hypothèse. C'est ainsi que le « design of experiment » devient d'après R. A. Fisher sa tâche peut-être la plus importante.

10. — En concluant cette conférence, je veux remarquer que l'analyse donnée ici n'est qu'une composition de résultats bien connus de beaucoup d'auteurs. En particulier on reconnaîtra les idées de Laplace (dont la notion d'équiprobabilité se retrouve ici dans la forme de la permutabilité), de Cournot et Borel, de J. Neyman et E.S. Pearson, de R.A. Fisher et de tant d'autres. D'ailleurs je ne veux pas dissimuler que je suis moi-même assez mécontent de cet effort de formuler l'analyse plus précisément que je ne l'ai fait auparavant depuis une dizaine d'années. Ce n'est pas seulement à cause de l'impossibilité d'exprimer des idées si difficiles en une langue qu'on ne maîtrise que très imparfaitement que

je considère cet effort comme incomplètement réussi. Mais on aura remarqué qu'il y a encore trop d'énoncés assez vagues, manque de clarté et insuffisance de simplicité et de distinction entre les divers systèmes et méta-systèmes. Nonobstant l'immaturation incontestable de cette analyse, j'espère qu'elle pourra contribuer à débrouiller le tissu complexe de raisonnements mathématiques et logiques, d'observations et d'actions pratiques et à résoudre le problème peut-être le plus difficile de toute la science : analyser au fond ce que nous faisons nous-mêmes et nous rendre compte le plus clairement possible des considérations souvent peu conscientes qui nous guident.



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES



Dans la même série : PHILOSOPHIE.

- N° 790 Emile BRÉHIER. I. Les études de philosophie antique.
N° 809 Charles BAUDOIN. II. La psychanalyse. (*épuisé*).
N° 813 P.M.D. CHENU, O.P. III. Les études de philosophie médiévale.
N° 837 F. GONSETH. IV. Philosophie mathématique.
N° 841 Ernest CASSIRER. V. Die Philosophie im XVII. und XVIII. Jahrhundert.
N° 847 J.-L. DESTOUCHES. VI. Physique moderne et philosophie.

Les Conceptions Modernes de la Raison
(*Entretiens d'été — Amersfoort 1938*)

- N° 849 I. Raison et monde sensible.
N° 850 II. Raison et histoire.
N° 851 III. Raison et valeur.
N° 873 P. GUILLAUME. La Psychologie de l'enfant. (*épuisé*).
N° 874 Paul MASSON-OURSSEL. VIII. Les philosophies orientales.
N° 875 Maurice HALBWACHS. IX. Sociologie économique et démographique.

Nature des Problèmes en Philosophie
(*Entretiens d'été — Lund 1947*)

- N° 1076 I. Les problèmes en philosophie contemporaine.
N° 1077 II. Logique et science de la nature.
N° 1078 III. Le problème dans les sciences humaines.
N° 1088 X. Histoire de la philosophie. Métaphysique. Philosophie des valeurs.
N° 1089 XI. Philosophie des Sciences. Psychologie.
N° 1104 XII. Histoire de la philosophie. Métaphysique. Philosophie des valeurs.
N° 1105 XIII. Philosophie des Sciences.
N° 1110 XIV. Psychologie. Phénoménologie et existentialisme.

**XV. Congrès International de Philosophie
des Sciences, Paris - 1949 :**

- N° 1126 I. Epistémologie.
N° 1134 II. Logique.
N° 1137 III. Philosophie mathématique. Mécanique.
N° 1146 IV. Calcul des Probabilités.

EN PREPARATION :

**Congrès International de Philosophie
des Sciences, Paris - 1949 :**

- V. Physique.
VI. Biologie.
VII. Science de la Terre.
VIII. Histoire des Sciences.
IX. Pédagogie des Sciences.

