

08 30 NL

Monte Carlo en nabootsing *)

door A. Haitsma **)

UDC 519 : 311.213

S u m m a r y

Monte Carlo and simulation.

An expository paper on Monte Carlo methods. In the first part of this paper a description is given of Monte Carlo and simulation techniques. The second part is devoted to some variance reducing techniques.

De Monte Carlo methoden vormen een onderdeel van de numerieke analyse, waarbij de normale systematische benaderingsprocedure vervangen wordt door een statistische approximatie. Dit houdt in, dat de te schatten grootheden beschouwd worden als verwachtingen van functies van stochastische variabelen.

Wanneer we de integraal:

$$\xi = \int_0^1 g(x) dx \tag{1}$$

willen schatten, waarin $g(x)$ een bekende functie is, kunnen we dit op systematische wijze doen, door – uitgaande van de definitie van de integraal – het interval $(0,1)$ in N gelijke delen te verdelen en voor de middens $x_1, x_2 \dots x_i \dots x_N$ van de deelintervallen de bijbehorende functiewaarde $g(x_i)$ te berekenen en vervolgens de schatting van ξ :

$$\hat{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i). \tag{2}$$

ξ kan men echter ook beschouwen als de verwachting van $g(\underline{x})$, waarbij \underline{x} op het interval $(0,1)$ een homogene verdeling heeft, dus:

$$P[\underline{x} \leq x] = x \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Op grond hiervan is nu een schatting van ξ :

$$\hat{\xi}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\underline{x}_i), \tag{3}$$

*) Voordracht gehouden voor de Mathematische Sectie en voor de Sectie Operations Research op de Statistische dag 1959. Rapport S 251 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

**) Mathematisch Centrum, Amsterdam.



waarin x_i ($i = 1 \dots N$) aselechte trekkingen uit de homogene verdeling zijn (aselechte getallen).

Op de volgende wijze kunnen deze aselechte getallen verkregen worden:

Deel het interval $(0,1)$ in 10.000 gelijke delen. Noteer de middens van de deelintervallen op lootjes, en stop deze lootjes in een vaas. Door nu N aselechte trekkingen met teruglegging uit de vaas te doen, verkrijgt men N aselechte getallen van vier cijfers. (De vijfde decimaal is altijd een 5 en speelt geen rol.)

Met deze getrokken aselechte getallen berekenen we nu:

$$\hat{\xi}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i). \quad (4)$$

(4) is dus een waarde die (3) kan aannemen. De doeltreffendheid van de schatting (3) wordt bepaald door de variantie:

$$\sigma_{\hat{\xi}_1}^2 = \frac{1}{N} \left[\int_0^1 (g(x))^2 dx - \xi^2 \right]. \quad (5)$$

We onderstellen nu

$$0 \leq g(x) \leq 1 \text{ voor } 0 \leq x \leq 1.$$

Indien hieraan niet voldaan wordt, kan dit bereikt worden door een schaalverandering, mits $g(x)$ begrensd is.

Een tweede methode om (1) te schatten verkrijgen we door het vierkant met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ en $(1,1)$ als een schietschijf te beschouwen.

Door een paar aselechte getallen (x, y) te trekken, „treffen” we met ons schot het punt met coördinaten (x, y) . Een „schot” onder de kromme

$$y = g(x)$$

is een „treffer”. De frequentie van het aantal treffers in een serie van N schoten is nu een schatting $\hat{\xi}_2$ van ξ . Immers de kans op een treffer is ξ .

De variantie van deze schatting $\hat{\xi}_2$ is:

$$\sigma_{\hat{\xi}_2}^2 = \frac{1}{N} \left[\xi - \xi^2 \right] = \frac{1}{N} \left[\int_0^1 g(x) dx - \xi^2 \right]. \quad (6)$$

Uit $0 \leq g(x) \leq 1$ volgt $\sigma_{\hat{\xi}_1}^2 \leq \sigma_{\hat{\xi}_2}^2$.

Het is blijkbaar niet onverschillig welke methode men gebruikt voor het schatten van ξ . Die methode zal beter zijn waarin men van meer beschikbare informatie gebruik maakt. Vergelijken we beide methoden op dit punt, dan zien we, dat bij de eerste methode bij een aselechte getal x_i , de waarde van $g(x_i)$

wordt gebruikt, terwijl bij de tweede methode slechts gekeken wordt of $g(x_i)$ groter of kleiner dan een tweede aselekt getal y_i is. Het verschil in variantie tussen (5) en (6):

$$\sigma_{\hat{\xi}_2}^2 - \sigma_{\hat{\xi}_1}^2 = \frac{1}{N} \left[\int_0^1 g(x)(1-g(x)) dx \right] \quad (7)$$

wordt hiermee verklaard.

Naast de term Monte Carlo treft men in de literatuur ook de termen steekproefonderzoek en simulation of nabootsing aan. Deze drie termen dekken elkaar niet volledig.

Bij een steekproefonderzoek, waarbij men de parameters schat, die de verdeling van bepaalde kenmerken van een populatie bepalen, trekt men uit de populatie een representatieve steekproef en meet aan de steekproefelementen de gewenste grootheden en men bepaalt dan de parameterschattingen uit de steekproefgrootheden. Men verricht dus de schattingen van de parameters op materiaal zoals men dat in de praktijk vindt. Het steekproefexperiment wordt niet gedaan op een model, maar op de reële situatie zelf.

Bij Monte Carlo en nabootsing wordt, in tegenstelling hiermee, het steekproefexperiment op een stochastisch model uitgevoerd. Een voorbeeld van zo'n nabootsing is het volgende aan een artikel van R. P. R i c h (1955) ontleende probleem.

Een oorlogsschip, uitgerust met radar en afweergeschut, moet in staat zijn een aanval van vliegtuigen af te slaan. Voor de verdediging tegen luchtaanvallen zijn er nu verschillende strategieën mogelijk. Te bepalen is nu wat de beste strategie is. Een benadering van de oplossing verkrijgen we nu door bij elke mogelijke strategie een reeks luchtaanvallen na te bootsen en na te gaan, wat de frequentie is van het aantal aanvallen dat tot succes heeft geleid. Door de verschillende strategieën op dit punt te vergelijken kunnen we dan de beste bepalen.

In het eenvoudigste geval, wanneer we slechts de aanval van één vliegtuig, van een bekend type, met bekende hoogte en snelheid nabootsen, gaan we als volgt te werk.

Bij de gegevens van het vliegtuig behoort een afstand A van het schip S (fig. 1) waarop het vliegtuig zijn bom(men) zal laten vallen. De verdediging heeft nu de taak het vliegtuig op een grotere afstand dan A neer te schieten.

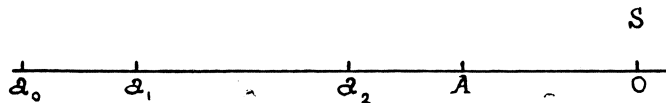


Fig. 1.

De frequentie van het aantal vliegtuigen dat toch doordringt tot een afstand $\leq A$ is dan een maat voor de doeltreffendheid van de verdediging.

Bij de nabootsing van een proces gaan we de onderdelen van het proces stap voor stap nabootsen. Hier is het eerste onderdeel, dat we moeten nabootsen, de ontdekking van het vliegtuig door de scheepsradar. Bij elke afstand a_0 van het vliegtuig tot het schip S behoort een kans P_{a_0} dat het vliegtuig eerst op die afstand a_0 of een nog kleinere wordt ontdekt,

$$P_{a_0} = P [a_0 \leq a_0]. \quad (8)$$

De afstand waarop het vliegtuig wordt ontdekt bootsen we nu na door een aselechte trekking te doen uit deze bekend veronderstelde verdeling. Dit wordt gedaan door een aselechte getal r te trekken, dit te interpreteren als een waarde van P_{a_0} ($r = P_{a_0}$) en bij de in een grafiek uitgezette verdeling (8) de bijbehorende a_0 op te zoeken (fig. 2).

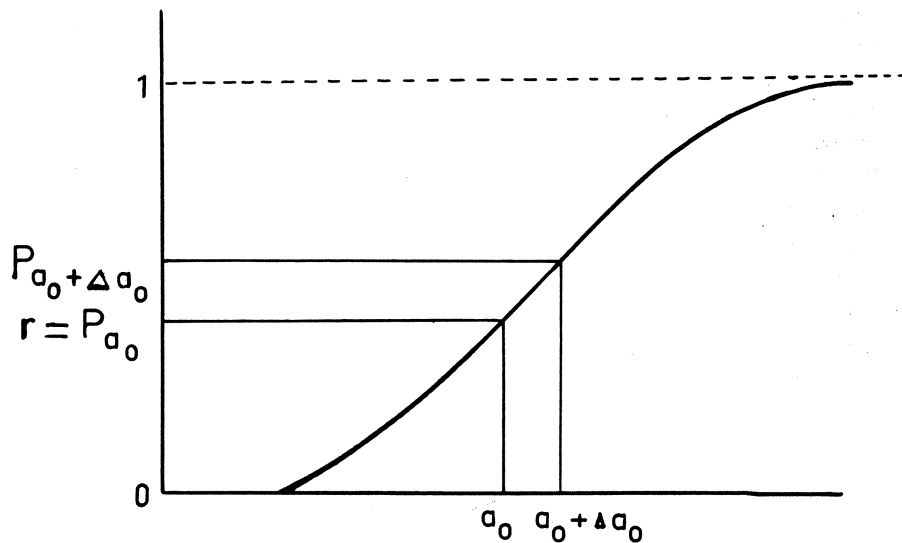


fig. 2.

Immers denken we de a_0 -as verdeeld in een groot aantal intervallen, op zoodanige wijze dat de kans dat een vliegtuig wordt ontdekt op een afstand a_0 uit zo'n interval, voor al die intervallen gelijk is, dan kunnen we, om na te bootsen dat een vliegtuig wordt ontdekt binnen een bepaald interval, aselechte zo'n interval trekken. Verwaarlozen we dan de uitgebreidheid van het (kleine) interval, dan vinden we zo de afstand waarop het vliegtuig wordt ontdekt.

Deze verdeling van de a_0 -as in een groot aantal intervallen (bijv. 10^n), kunnen we verkrijgen door de P_{a_0} as in 10^n gelijke intervallen te verdelen en bij deze intervallen de bijbehorende intervallen op de a_0 -as op te zoeken (fig. 2). Door een aselekt getal met n decimalen te trekken, vinden we een interval op de P_{a_0} -as en het daarmee overeenkomende interval (punt) op de a_0 -as is dan de afstand waarop het vliegtuig wordt ontdekt.

Op dezelfde wijze bootsen we nu het doorgeven van de waarnemingen en het instellen van het geschut na. De tijd die hiermee gemoeid is t_1 , bepalen we weer door een aselechte trekking t_1 uit de bekend veronderstelde verdeling van t_1 op dezelfde wijze als hierboven is aangegeven. In de tijd t_1 heeft het vliegtuig een afstand $a_0 - a_1$ afgelegd, welke berekend kan worden uit t_1 en de bekende snelheid van het vliegtuig.

De tijd t_2 , die verloopt voor het vliegtuig is neergeschoten, bepalen we eveneens door een aselechte trekking t_2 uit de hierbij behorende verdeling. Het vliegtuig bevindt zich op dat moment op een afstand a_2 van het schip S, na in de tijd t_2 nog een afstand $a_1 - a_2$ afgelegd te hebben. We gaan nu na of $a_2 \leq A$. In dat geval heeft de luchtverdediging van het schip gefaald. Door op deze wijze een groot aantal aanvallen na te bootsen verkrijgen we een schatting van $P [a_2 \leq A]$, en dus een schatting van de doeltreffendheid van een bepaalde strategie.

Door een nabootsing krijgen we een globaal beeld van het proces dat plaats vindt. Dit kan voor verschillende doeleinden nuttig zijn, bijv. of het gekozen model redelijk overeenstemt met de werkelijke situatie. We kunnen dit doen door de resultaten van een nabootsing te vergelijken met de praktijkgegevens. Wanneer bijv. in het model onafhankelijkheid tussen bepaalde variabelen is ondersteld, terwijl er in werkelijkheid sterke afhankelijkheid bestaat, is het mogelijk deze fout in het model te herstellen voordat men tot een meestal moeizame analytische bewerking van het model overgaat. Een nabootsing van een proces kan ook zijn nut hebben voor het zoeken naar een weg voor de analytische oplossing van het probleem, of als demonstratie van de analytische oplossing, die men gevonden heeft, voor mensen die door mathematische formules niet overtuigd worden.

Wanneer men echter bepaalde grootheden wil schatten, is een stap voor stap nabootsen één van de methoden die men kan kiezen. Men is dan echter niet meer geïnteresseerd in een globaal beeld van het proces maar slechts in de nauwkeurigheid van de schatting. Men zal dan ook de beschikbare informatie gebruiken om de variantie van de schattingen minimaal te maken. Dit gaat echter meestal ten koste van het globale beeld dat men met een stap voor stap nabootsen verkrijgt. Alleen in dit laatste geval kan men nu van Monte Carlo methoden spreken.

Bij de Monte Carlo methoden kunnen we nu de volgende hoofdproblemen onderscheiden:

- 1) Het voortbrengen van de benodigde aselechte getallen.
- 2) Transformatie van de aselechte getallen tot aselechte trekkingen uit gegeven verdelingen.
- 3) De variantie reductie van de parameterschattingen.

1) Het voortbrengen van aselechte getallen.

Tabellen van random numbers, bijvoorbeeld die van M. G. Kendall en B. B. Abington Smith (1939), zijn geschikt voor niet te grote berekeningen met pen en papier. Voor grote berekeningen die in het algemeen met behulp van een elektronische rekenmachine uitgevoerd worden, zijn andere methoden ontwikkeld, waarbij de machine zelf de aselechte getallen volgens een van tevoren vastgesteld procédé berekent. Dit zijn dan meestal recurrente reeksen waarbij men uit een reeds berekende reeks getallen $U_0, U_1 \dots U_n$ het volgende getal U_{n+1} berekent. Deze getallen zijn dus geen „toevalscijfers” maar kunnen wel, mits aan een aantal voorwaarden is voldaan, als zodanig beschouwd worden. Men spreekt dan ook van pseudo-random numbers.

Naast de methode van H. J. A. Duparc, C. G. Lekkerkerker en W. P. Remans (1953) is een van D. H. Lehmer afkomstige methode zeer gebruikelijk:

$$U_{n+1} = k U_n \pmod{M}. \quad (9)$$

k en M zijn vaste getallen en U_0 wordt willekeurig gekozen. In woorden luidt (9): Vermenigvuldig U_n met k en bepaal de rest bij deling door M . M wordt bepaald door het aantal cijfers, dat men voor het aselechte getal nodig heeft. Het aantal aselechte getallen (de periode) dat men met deze methode verkrijgt kan nooit groter dan M zijn, maar zal meestal veel kleiner zijn. Neemt men bijv. $U_0 = 455$, $k = 23$ en $M = 1001$, dan vindt men voor U_1 eveneens 455. De periode is in dit geval dus 1. Bij de keuze van k en U_0 moet men ervoor zorgen dat de periode van de reeks groot genoeg is.

De verkregen reeks getallen zal men, voordat men ze gaat gebruiken, moeten toetsen of ze voldoende overeenkomen met aselechte trekkingen uit de homogene verdeling. Globaal gebeurt dit met een χ^2 toets van aanpassing, maar daarnaast zal men de getallen nog aan enige andere toetsen moeten onderwerpen voordat men de methode, waarmee ze voortgebracht worden, al of niet aanvaardt. Deze toetsen dienen om te zien of de frequentie van bepaalde patronen in de reeks niet te veel afwijkt van de verwachting van die patronen bij de homogene verdeling. Een dergelijk patroon kan bijv. zijn het aantal elkaar opvolgende paren getallen, die met een bepaalde cijfercombinatie beginnen. Omdat een

aantal opvolgende aselechte getallen bij de Monte-Carlo methode meestal tot één steekproefgrootte leidt, kan men gemakkelijk tot onjuiste schattingen komen als men een voortbrengingsmethode gebruikt, waarbij dergelijke te grote afwijkingen van de verwachting bij de homogene verdeling voorkomen. Deze toetsen zal men dan ook zo veel mogelijk moeten kiezen in samenhang met het probleem waarvoor men de aselechte getallen wil gebruiken.

2) De transformatie van aselechte getallen tot aselechte trekkingen uitgegeven verdelingen, met de grafische methode uit het hierboven gegeven voorbeeld, betekent dat we de vergelijking

$$F(x) = u \quad (10)$$

oplossen naar x . Hierbij is dus $F(x)$ de gegeven verdelingsfunctie en u een aselechte getal.

Voor de analytische oplossing van (10) is het dus nodig de omkeersfunctie van $F(x)$ te bepalen en dit stuit nu bij de meest voorkomende verdelingsfuncties op grote moeilijkheden; men denke slecht aan de normale verdeling.

Naast de directe methode (10) zijn er echter andere methoden ontwikkeld, die tot eenvoudiger rekenschema's leiden. Men zie bijv. de bijdrage van J. W. Butler (1956) in H. A. Meyer, Symposium on Monte-Carlo Methods.

3) Bij de variantiereductietechnieken die men in de loop der jaren bij verschillende problemen heeft toegepast, zijn er enkele naar voren gekomen, die een algemenere toepasbaarheid bezitten. Een van deze methoden is „importance sampling”. Gesteld dat we willen schatten:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad (11)$$

waarin $g(x)$ een bekende functie is en $f(x)$ een bekende verdelingsdichtheid. Een schatting van (11) is dan:

$$\hat{\xi}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i), \quad (12)$$

waarin x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) aselechte trekkingen zijn uit de verdeling met verdelingsdichtheid $f(x)$.

(12) is een zuivere schatting van (11):

$$\varepsilon(\hat{\xi}_1) = \xi, \quad (13)$$

met variantie:

$$\sigma_{\hat{\xi}_1}^2 = \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{g(x)\}^2 f(x) dx - \xi^2 \right]. \quad (14)$$

Een andere schatting verkrijgen we door (11) te schrijven in de vorm:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)f(x)}{h(x)} h(x) dx, \quad (15)$$

waarin $h(x)$ een verdelingsdichtheid is.

Een schatting van (15) dus van (11) is nu:

$$\hat{\xi}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(y_i)f(y_i)}{h(y_i)}. \quad (16)$$

waarin y_i ($i = 1 \dots N$) aselechte trekkingen uit de verdeling met verdelingsdichtheid $h(x)$ zijn.

Dit is eveneens een zuivere schatting van (11) met variantie:

$$\sigma_{\hat{\xi}_2}^2 = \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{g(x)f(x)\}^2}{h(x)} dx - \xi^2 \right]. \quad (17)$$

We gaan nu $h(x)$ zodanig bepalen dat (17) minimaal wordt. De algemene oplossing hiervoor vindt men met een methode uit de variatierekening.

Voor het geval $g(x) \geq 0$, voor alle x , vinden we eenvoudiger een oplossing:

Uit (11) zien we dat $\sigma_{\hat{\xi}_1}^2 = 0$ als $g(x)$ constant is. In (15) kiezen we $h(x)$ dus zo dat:

$$\frac{g(x)f(x)}{h(x)} = \text{constant}.$$

Dus:

$$h(x) = c \cdot g(x)f(x) \quad (18)$$

Nu moet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1, \quad (19)$$

omdat $h(x)$ een verdelingsdichtheid is. Uit (18) en (19) volgt dan:

$$h(x) = \frac{g(x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx}. \quad (20)$$

Substitueren we nu (20) in (17) dan wordt $\sigma_{\hat{\xi}_2}^2 = 0$. Om $h(x)$ uit (20) te

bepalen moeten we echter eerst het oorspronkelijke probleem (11) oplossen. Het is dus niet verwonderlijk dat we in dat geval de variantie tot nul kunnen

reduceren. In de praktijk zal het dan ook niet mogelijk zijn de optimale $h(x)$ te vinden. Maar uit het bovenstaande blijkt wel dat we de variantie aanzienlijk kunnen reduceren door van de verdelingsdichtheid $f(x)$ over te gaan op de verdelingsdichtheid $h(x)$ als

$$\frac{g(x) f(x)}{h(x)} \text{ zo goed mogelijk constant is.}$$

Wanneer we bijv. $\mu_{9,25}$ van de exponentiële verdeling willen bepalen met Monte Carlo methoden,

$$\mu_{9,25} = \int_0^{\infty} x^{9,25} e^{-x} dx \quad (21)$$

dan schrijven we (21)

$$\mu_{9,25} = 9! \int_0^{\infty} x^{0,25} \frac{x^9 \cdot e^{-x}}{9!} dx. \quad (22)$$

In (22) staat nu $9!$ vermenigvuldigd met $\mu_{0,25}$ van een Γ verdeling met parameters $(0,1,10)$.

In plaats van $\mu_{9,25}$ van een exponentiële verdeling rechtstreeks te schatten, schatten we $\mu_{0,25}$ van de relevante Γ verdeling, waarmee de variantie met een factor 10^7 wordt gereduceerd.

Een tweede door J. M. Hammersley en K. W. Morton (1956) ontwikkelde variantiereductietechniek is de methode van de „antithetic variates”.

Het principe van deze methode is als volgt: als t_1 een zuivere schatting is van de te schatten parameter ξ :

$$\varepsilon(t_1) = \xi, \quad (23)$$

dan zoeken we bij t_1 een tweede, eveneens zuivere, schatting t_2 van ξ , welke negatief gecorreleerd is met t_1 . Als schatting gebruiken we dan:

$$\underline{t} = \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \quad (24)$$

$$\varepsilon(\underline{t}) = \xi \quad \text{en}$$

$$\sigma_{\underline{t}}^2 = \frac{1}{4} [\sigma_{t_1}^2 + \sigma_{t_2}^2 + 2\rho \sigma_{t_1} \sigma_{t_2}]. \quad (25)$$

Daar $\rho < 0$ treedt hier dus variantiereductie op, deze kan zeer groot zijn mits σ_{t_1} en σ_{t_2} niet te veel verschillen.

We kunnen deze methode verder generaliseren door in plaats van twee, n „antithetic variates” $t_1 \dots t_n$ te gebruiken met:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (26)$$

J. M. H a m m e r s l e y en K. W. M o r t o n hebben deze methode toegepast op een gewijzigde vorm van het naaldenprobleem van B u f f o n. In de oorspronkelijke vorm van B u f f o n verkrijgt men een schatting van π door een aantal malen op een tafel, waarop evenwijdige lijnen zijn getrokken op gelijke onderlinge afstand, een dunne naald te laten vallen en het aantal snijpunten van de naald met de lijnen op de tafel te tellen. Men kan namelijk een rechtstreeks verband leggen tussen de kans dat de naald een lijn snijdt en de waarde van π .

Door Capt. O. C. F o x is dit experiment omstreeks 1870 uitgevoerd en hij vond bij 590 worpen met zijn naald van 5 inch lengte, 939 snijpunten met de evenwijdige lijnen die bij hem een onderlinge afstand van 2 inch hadden. Zijn schatting van π was toen:

$$\pi = \frac{2 \cdot 590 \cdot 5}{2 \cdot 939} = 3.1416.$$

Wanneer F o x echter 591 in plaats van 590 worpen had gedaan, dan had hij een veel minder nauwkeurige schatting van π gekregen, nl. 3.1470, 3.1436, 3.1403 of 3.1369 al naar gelang er bij de 591e worp 0, 1, 2 of 3 snijpunten waren geweest. F o x wist dus blijkbaar het juiste moment om zijn experiment te staken.

H a m m e r s l e y en M o r t o n namen als schatting voor $2/\pi$ de projectie van een naald met lengte 1 in een bepaalde vaste richting ω , in fig. 3 en fig. 4 met de horizontale lijn aangegeven.

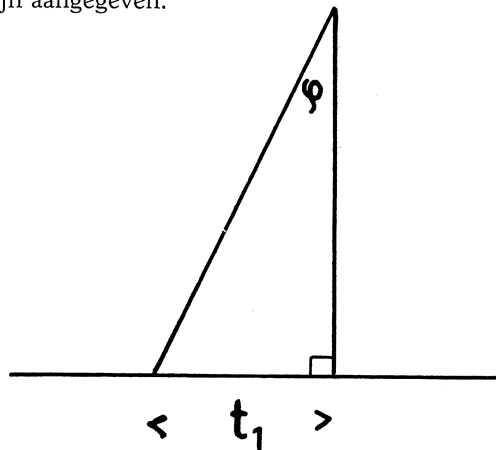


fig. 3.

$$\underline{t}_1 = |\sin \varphi| \quad \varepsilon(\underline{t}_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi| d\varphi = \frac{2}{\pi} \quad (27)$$

$$\sigma_{\underline{t}_1}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 0,0947. \quad (28)$$

We nemen nu een tweede naald en binden deze loodrecht op de eerste vast, en werpen dan met dit kruis in plaats van de enkele naald. Een tweede schatting \underline{t}_2 van $2/\pi$ is nu de projectie van de tweede naald in de richting ω (fig. 4).

$$\underline{t}_2 = |\cos \varphi|.$$

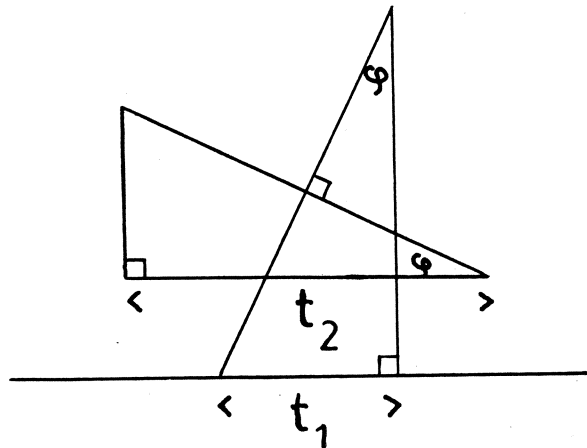


fig. 4.

$$\underline{t} = \frac{1}{2} (\underline{t}_1 + \underline{t}_2), \quad (26)$$

$$\sigma_{\underline{t}}^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)^2 d\varphi - \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} - \frac{4}{\pi^2} = 0,00387. \quad (29)$$

Door (28) en (29) te vergelijken zien we, dat we door met twee in plaats van met één naald te werpen de variantie met een factor 24,5 reduceren. Dit kunnen we nog verbeteren door met n samengebonden naalden, met onderlinge hoeken π/n , te werpen en van elke naald afzonderlijk de projectie in de richting ω te bepalen.

$$\underline{t}_i = \left| \sin \left(\varphi + \frac{(i-1)\pi}{n} \right) \right| \quad (30)$$

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i \quad (26)$$

$$\sigma_{\bar{t}}^2 = \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{\pi}{8n} \left(\frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \right) \frac{1}{\sin^2 \pi/2n} - 1 \right\} \sim$$

$$\sim \frac{\pi^2}{4} \frac{(\pi/n)^4}{720} \left(1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \quad (31)$$

De variantiereductie is in dat geval dus ongeveer evenredig met de vierde macht van het aantal gebruikte naalden.

Literatuur:

- [1] H. A. Meyer (1956): Symposium on Monte Carlo Methods.
- [2] M. G. Kendall, B. Babington Smith (1939): Tables of random sampling numbers.
- [3] R. P. Rich (1955): Simulation as an aid in model building J.O.R.S.A. **3**, 15-19.
- [4] J. Harling (1958): Simulation techniques in Operations Research - a Review. J.O.R.S.A. **6**, 307-319.
- [5] H. J. A. Duparc, C. G. Lekkerkerker en W. Peremans (1953): Reduced sequences of integers on pseudorandom numbers. Mathematisch Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953-002.
- [6] J. M. Hammersley en K. W. Morton (1956): A new Monte Carlo technique: antithetic variates. Proc. Cambr. Phil. Soc. **52**, 449-475.