

---

# Fonctions de Legendre sur une Algèbre de Jordan

*en hommage à Tom Koornwinder*

Jacques Faraut

*Analyse complexe et Géométrie*

*Université Pierre et Marie Curie*

*4 place Jussieu, 75 252 Paris cedex 05, France*

*email: jaf@ccr.jussieu.fr*

Dans cette note nous proposons une définition des fonctions de Legendre sur une algèbre de Jordan. Les fonctions sphériques du demi-plan de Poincaré s'expriment à l'aide des fonctions de Legendre classiques. Par analogie on peut définir les fonctions de Legendre généralisées sur une algèbre de Jordan à partir des fonctions sphériques d'un domaine hermitien symétrique de type tube. Ceci n'a rien d'original puisque c'est un point de vue maintenant classique. Cependant l'introduction des algèbres de Jordan a ceci d'intéressant qu'elle permet d'écrire des formules qui ressemblent beaucoup aux formules que l'on connaît dans le cas des fonctions de Legendre d'une variable.

## 1. FONCTIONS DE LEGENDRE ET FONCTIONS SPHÉRIQUES DU DEMI-PLAN DE POINCARÉ

Le groupe  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  opère sur le demi-plan de Poincaré,

$$\{z = x + iy \mid y > 0\},$$

par les transformations homographiques

$$z \mapsto Z = g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

si  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Si  $Z = X + iY$ , alors

$$Y = \frac{y}{|cz + d|^2},$$

et si  $z = iy$  ( $x = 0$ ),

$$Y = (c^2 y + d^2 y^{-1})^{-1}.$$

Le demi-plan de Poincaré s'identifie ainsi à l'espace quotient  $G/K$ , où  $K = \text{SO}(2)$ . La fonction  $p_s(z) = y^{-s}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , est une fonction propre du laplacien hyperbolique,

$$\Delta p_s = s(s+1)p_s,$$

et la fonction  $\Psi_s$  définie par

$$\Psi_s(z) = \int_K p_s(k(z)) dk,$$

est une fonction sphérique de la paire  $(G, K)$ . Un élément de  $K$  peut s'écrire

$$k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

et par suite

$$\Psi_s(iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \frac{\theta}{2} y + \cos^2 \frac{\theta}{2} y^{-1})^s d\theta.$$

On vérifie facilement que

$$\Psi_s(iy) = \Psi_s(iy^{-1}).$$

Cette fonction s'exprime à l'aide de la fonction de Legendre  $P_s$ , en effet

$$\Psi_s(iy) = P_s\left(\frac{1}{2}(y + y^{-1})\right).$$

Pour  $\Re s \geq 0$ ,

$$\Psi_s(iy) \sim \gamma(s)y^s, \quad y \rightarrow \infty,$$

avec

$$\gamma(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{\theta}{2})^{2s} d\theta.$$

En posant  $u = \text{tg } \frac{\theta}{2}$  on obtient

$$\gamma(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{-s-1} du = \frac{1}{\pi} B\left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

où  $B(p, q)$  désigne la fonction beta d'Euler.

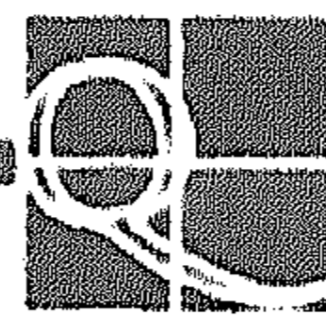
Dans cette note nous allons généraliser ces résultats au cas des espaces hermitiens symétriques de type tube.

## 2. FONCTIONS SPHÉRIQUES SUR UN CÔNE SYMÉTRIQUE

Soit  $\Omega$  un cône convexe ouvert dans un espace vectoriel euclidien  $V$  de dimension  $n$ . On suppose que  $\Omega$  est propre, c'est à dire,  $\bar{\Omega} \cap -\bar{\Omega} = \{0\}$ . Soit  $G(\Omega)$  le groupe des transformations linéaires qui préservent  $\Omega$ ,

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g\Omega = \Omega\}.$$





Le cône  $\Omega$  est dit *homogène* si  $G(\Omega)$  opère transitivement sur  $\Omega$ . Le cône ouvert dual  $\Omega^*$  est défini par

$$\Omega^* = \{x \in V \mid \forall y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}, (x|y) > 0\}.$$

Le cône  $\Omega$  est dit *autodual* si  $\Omega = \Omega^*$ . S'il est homogène et autodual, le cône  $\Omega$  est dit *symétrique*.

Une *algèbre de Jordan euclidienne* est un espace vectoriel euclidien  $V$  muni d'un produit vérifiant

- (1)  $xy = yx$ ,
- (2)  $x(x^2y) = x^2(xy)$ ,
- (3)  $(xy|z) = (y|xz)$ .

On note  $L(x)$  l'endomorphisme défini par

$$L(x)y = xy.$$

La propriété (2) signifie que  $L(x)$  et  $L(x^2)$  commutent, et la propriété (3) que  $L(x)$  est autoadjoint.

On montre que l'ensemble des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne,

$$Q = \{x^2 \mid x \in V\},$$

est un cône convexe fermé et que son intérieur  $\Omega$  est un cône symétrique. De plus Koecher et Vinberg ont montré que tout cône symétrique peut être obtenu de cette façon ([7,12]).

Par exemple si  $V = \text{Sym}(m, \mathbb{R})$  est l'espace des matrices symétriques réelles  $m \times m$  muni du produit de Jordan,

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

alors  $V$  est une algèbre de Jordan euclidienne relativement au produit scalaire défini par

$$(x|y) = \text{tr}(xy),$$

et le cône symétrique  $\Omega$  est le cône des matrices symétriques définies positives.

Notons  $P(x)$  l'endomorphisme autoadjoint de  $V$  défini par

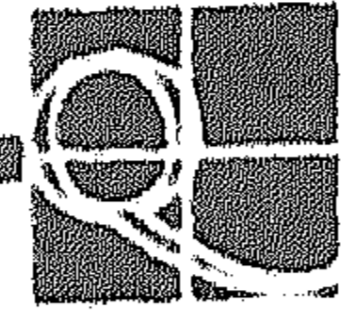
$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

Si  $V = \text{Sym}(m, \mathbb{R})$ ,  $P(x)y = xyx$ . Pour  $x$  dans  $\Omega$ ,  $P(x)$  est défini positif. Considérons sur  $\Omega$  la structure riemannienne invariante définie par

$$G_x(u, v) = (P(x^{-1})u|v), \quad x \in \Omega, \quad u, v \in V.$$

Cette structure riemannienne est invariante par  $G(\Omega)$ , et fait de  $\Omega$  un espace riemannien symétrique qui s'identifie à l'espace quotient  $G_0/K_0$  où  $G_0$  est la composante connexe neutre de  $G(\Omega)$ , et

$$K_0 = \{g \in G_0 \mid ge = e\},$$



$e$  désignant l'élément neutre de  $V$ .

Pour ce qui concerne la géométrie et l'analyse des cônes symétriques on peut consulter [2].

Nous supposons que l'algèbre de Jordan  $V$  est simple, c'est à dire qu'elle n'as pas d'idéal non trivial. Soit  $r$  le rang de  $V$  et soit  $\{c_1, \dots, c_r\}$  un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Tout élément  $x$  de  $V$  s'écrit

$$x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j, \quad k \in K_0, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Le déterminant  $\Delta$  est défini par  $\Delta(x) = \prod \lambda_j$ , et la trace par  $\text{tr}(x) = \sum \lambda_j$ .  $\Delta$  est un polynôme homogène de degré  $r$ , et on peut supposer que le produit scalaire est défini par  $(x|y) = \text{tr}(xy)$ . Si  $c$  est un idempotent, l'espace

$$V(c, 1) = \{x \in V \mid cx = x\}$$

est une sous-algèbre de  $V$ , et pour  $1 \leq j \leq r$ ,

$$V_j = V(c_1 + \dots + c_j, 1)$$

est une sous-algèbre de  $V$  de rang  $j$ . Le déterminant mineur principal  $\Delta_j$  est défini par

$$\Delta_j(x) = \Delta_{V_j}(x^{(j)}),$$

où  $\Delta_{V_j}$  désigne le déterminant relatif à la sous-algèbre  $V_j$ , et  $x^{(j)}$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $V_j$ . Les mineurs principaux sont positifs sur  $\Omega$ . Pour  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbf{C}^r$ , et pour  $x \in \Omega$ , on pose

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \dots \Delta_r(x)^{s_r}.$$

La fonction  $\Delta_{\mathbf{s}}$  est fonction propre des opérateurs différentiels invariants sur  $\Omega$ , et les fonctions sphériques  $\Phi_{\mathbf{s}}$  du cône symétrique  $\Omega = G_0/K_0$  sont données par la représentation intégrale suivante

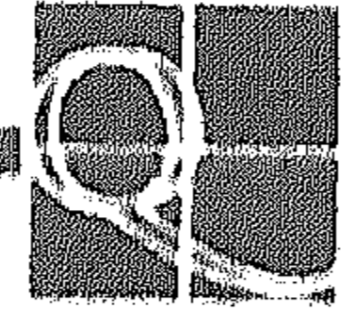
$$\Phi_{\mathbf{s}}(x) = \int_{K_0} \Delta_{\mathbf{s}}(kx) dk.$$

Si  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$  où les nombres  $m_j$  sont des entiers vérifiant  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 0$ , la fonction sphérique  $\Phi_{\mathbf{m}}$  est un polynôme. Ces polynômes, appelés polynômes sphériques, s'expriment à l'aide des polynômes de Jack. Si  $x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$  ( $k \in K_0, \lambda_j \in \mathbb{R}$ ),

$$\Phi_{\mathbf{m}}(x) = \frac{J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(1, \dots, 1)},$$

avec  $\alpha = \frac{2}{d}$ , et  $J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$  est le polynôme de Jack d'indice  $\alpha$  associé à la partition définie par  $\mathbf{m}$ .





### 3. FONCTIONS SPHÉRIQUES SUR UN DOMAINE HERMITIEN SYMÉTRIQUE DE TYPE TUBE

Comme dans la Section 2, soit  $\Omega$  le cône symétrique associé à une algèbre de Jordan euclidienne  $V$ , et soit  $T_\Omega$  le tube dans l'espace complexifié  $V^\mathbb{C}$  de base  $\Omega$ ,

$$T_\Omega = V + i\Omega = \{z = x + iy \mid x \in V, y \in \Omega\}.$$

Soit  $G$  le groupe des transformations holomorphes de  $T_\Omega$ . Il est engendré par les transformations

$$z \mapsto gz + a,$$

avec  $g \in G(\Omega)$ ,  $a \in V$ , et par la "symétrie"  $s$ ,

$$s(z) = -z^{-1}.$$

Le domaine  $T_\Omega$ , muni de la métrique de Bergman, est un espace hermitien symétrique,  $T_\Omega \simeq G/K$ , où

$$K = \{g \in G \mid g(ie) = ie\}.$$

La transformation de Cayley établit un isomorphisme holomorphe du tube  $T_\Omega$  sur un domaine borné  $D$ . Définissons les applications  $p$  et  $c$  par

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - ie)(z + ie)^{-1}, \\ rc(w) &= i(e + w)(e - w)^{-1}. \end{aligned}$$

Si  $z \in T_\Omega$ , alors  $z + ie$  est inversible, et  $p$  est bien définie sur  $T_\Omega$ . L'ensemble  $D = p(T_\Omega)$  est un domaine convexe borné, et la transformation de Cayley  $c$  est un isomorphisme holomorphe de  $D$  sur  $T_\Omega$ , d'inverse  $p$ . Pour décrire  $D$  introduisons la notation

$$x \square y = L(xy) + [L(x), L(y)],$$

nous avons alors

$$D = \{w \in V^\mathbb{C} \mid I - w \square \bar{w} \gg 0\}.$$

La frontière de Shilov  $\Sigma$  de  $D$  est l'ensemble

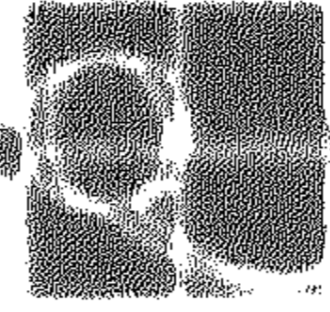
$$\Sigma = \{z \in V^\mathbb{C} \mid z^{-1} = \bar{z}\}.$$

Le groupe  $K_1 = c^{-1}Kc$  est un sous-groupe de  $GL(V^\mathbb{C})$  qui opère transitivement sur  $\Sigma$ , et  $\Sigma \simeq K_1/\tilde{K}_0$ , où  $\tilde{K}_0$  est un revêtement fini de  $K_0$ . L'image  $p(V)$  de  $V$  par l'application  $p$  est un ouvert dense de  $\Sigma$ ,

$$p(V) = \{z \in \Sigma \mid \Delta(e - z) \neq 0\}.$$

La fonction  $p_s$  ( $s \in \mathbb{C}^r$ ) définie sur  $T_\Omega$  par

$$p_s(z) = \Delta_s(y^{-1}),$$



est fonction propre des opérateurs différentiels invariants sur l'espace hermitien symétrique  $T_\Omega$ , et les fonctions sphériques  $\Psi_{\mathbf{S}}$  de  $T_\Omega \simeq G/K$  sont données par la représentation intégrale

$$\Psi_{\mathbf{S}}(z) = \int_K p_{\mathbf{S}}(k^{-1}(z)) dk.$$

Les fonctions sphériques  $\Phi_{\mathbf{S}}$  sont invariantes par  $\tilde{K}_0$ , par suite

$$\int_{\tilde{K}_0} p_{\mathbf{S}}(k_0(iy)) dk_0 = \Phi_{\mathbf{S}}(y^{-1}),$$

et

$$\Psi_{\mathbf{S}}(z) = \int_{K/\tilde{K}_0} \Phi_{\mathbf{S}}(\mathfrak{I}(\dot{k}^{-1}(z))^{-1}) d\dot{k}.$$

Ainsi la fonction  $\Psi_{\mathbf{S}}$  s'exprime à l'aide d'une intégrale sur  $\Sigma$ . Pour  $\sigma \in \Sigma$ , la transformation  $P(\sigma)$  est un élément du groupe  $K_1$ . Soit  $k$  l'élément correspondant du groupe  $K$ ,  $k = c \circ P(\sigma) \circ c^{-1}$ .

LEMME 1. *Supposons  $\Delta(e - \sigma^2) \neq 0$ . Alors*

$$k(z) = -a - P(b)(z - a)^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= c(\bar{\sigma}^2) = i(\sigma + \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})^{-1}, \\ b &= 2i(\sigma - \bar{\sigma})^{-1}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$\begin{aligned} w &= c^{-1}(z), \\ Z &= k(z) = c(P(\sigma)w). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z &= -ie + 2i(e - P(\sigma)w)^{-1} \\ &= -ie + 2iP(\bar{\sigma})(\bar{\sigma}^2 - w)^{-1} \\ &= -ie - P(\bar{\sigma})((a + ie)^{-1} - (z + ie)^{-1}). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Hua

$$u^{-1} - v^{-1} = (u + P(u)(v - u))^{-1},$$

nous obtenons

$$Z = -ie - P(\bar{\sigma})((a + ie) + P(a + ie)(z - a)^{-1}).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} ie + P(\bar{\sigma})(a + ie) &= a, \\ P(\bar{\sigma})P(a + ie) &= P(\bar{\sigma}(a + ie)) = P(b). \end{aligned} \quad \square$$





LEMME 2. Pour  $x + iy \in T_\Omega$ ,

$$-\mathfrak{S}(x + iy)^{-1} = (y + P(x)y^{-1})^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $x = e$ ,

$$-\mathfrak{S}(e + iy)^{-1} = y(e + y^2)^{-1} = (y + y^{-1})^{-1}.$$

Supposons maintenant que  $x \in \Omega$ ,

$$x + iy = P(x^{\frac{1}{2}})(e + iP(x^{-\frac{1}{2}})y),$$

et

$$\begin{aligned} -\mathfrak{S}(x + iy)^{-1} &= P(x^{-\frac{1}{2}})(P(x^{-\frac{1}{2}})y + P(x^{\frac{1}{2}})y^{-1})^{-1} \\ &= (y + P(x)y^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Les deux membres de l'égalité à démontrer sont des fonctions rationnelles qui sont égales pour  $x \in \Omega$ , elles sont donc égales pour tout  $x$  de  $V$ .  $\square$

LEMME 3. Pour  $z = iy$ ,  $Z = X + iY = k(iy)$ ,

$$Y = (P(\alpha)y + P(\beta)y^{-1})^{-1},$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2i}(\sigma - \bar{\sigma}), \quad \beta = \frac{1}{2}(\sigma + \bar{\sigma}).$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 1,

$$Z = X + iY = -a - P(b)(iy - a)^{-1},$$

et le résultat annoncé se déduit du Lemme 2.  $\square$

Du Lemme 3 on déduit la formule de représentation intégrale suivante de la fonction sphérique  $\Psi_{\mathbf{S}}$

THÉORÈME 1

$$\Psi_{\mathbf{S}}(iy) = \int_{\Sigma} \Phi_{\mathbf{S}}(P(\alpha)y + P(\beta)y^{-1})d\sigma,$$

avec  $\sigma = (\alpha + i\beta)^2$ .

Cette formule est l'analogie de la représentation intégrale des fonctions de Legendre, et peut servir à définir les fonctions de Legendre généralisées  $P_{\mathbf{S}}$  sur une algèbre de Jordan,

$$\Psi_{\mathbf{S}}(iy) = P_{\mathbf{S}}\left(\frac{1}{2}(y + y^{-1})\right).$$



Si  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ , où les nombres  $m_j$  sont des entiers vérifiant  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 0$ , la fonction de Legendre  $P_{\mathbf{m}}$  est un polynôme qu'on peut appeler polynôme de Legendre généralisé.

Soit

$$D_{\mathbb{R}} = D \cap V = (-e + \Omega) \cap (e - \Omega).$$

Notons  $L^2(D_{\mathbb{R}})$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $D_{\mathbb{R}}$  pour la mesure de Lebesgue, et  $L^2(D_{\mathbb{R}})^{\natural}$  le sous-espace des fonctions  $K_0$ -invariantes. On peut montrer que les polynômes de Legendre généralisés  $P_{\mathbf{m}}$  constituent une base orthogonale de  $L^2(D_{\mathbb{R}})^{\natural}$ . Si  $x = k \sum \lambda_j c_j$  est la décomposition spectrale de  $x$ ,  $P_{\mathbf{m}}(x) = p_{\mathbf{m}}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , où  $p_{\mathbf{m}}$  est un polynôme symétrique de  $r$  variables. Soit

$$I = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mid -1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r < 1\}.$$

Les polynômes  $p_{\mathbf{m}}$  constituent une base orthogonale de l'espace des fonctions de carré intégrables sur  $I$  par rapport au poids

$$w(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^d.$$

Les travaux concernant les polynômes de Legendre et de Jacobi généralisés sont nombreux. Sans prétendre être exhaustif nous pouvons citer [1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10].

Lorsque  $\mathbf{s} = (\alpha, \dots, \alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ), la fonction de Legendre s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique généralisée  ${}_2F_1$ . En effet d'après la Proposition XV.3.7 de [2],

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) = \Delta(e - \xi^2)^{-\alpha} {}_2F_1(-\alpha, -\alpha; \frac{n}{r}; \xi^2),$$

avec  $\xi = (y - e)(y + e)^{-1}$ , ce qui peut s'écrire, en utilisant la Proposition XV.3.4,

$$P_{\mathbf{s}}(x) = {}_2F_1(-\alpha, \alpha + \frac{n}{r}; \frac{n}{r}; \frac{e - x}{2}).$$

#### 4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Pour  $\Re s_1 \geq \Re s_2 \geq \dots \geq \Re s_r \geq 0$ ,

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) \sim \int_{\Sigma} \Phi_{\mathbf{s}}(P(\alpha)y) d\sigma,$$

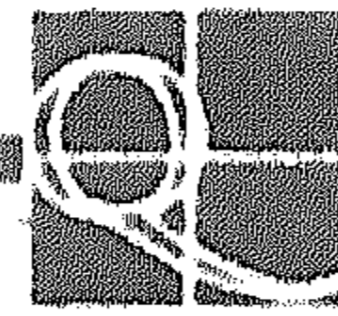
c'est à dire que, si  $t$  est un nombre réel positif,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-|\mathbf{s}|} \Psi_{\mathbf{s}}(ity) = \int_{\Sigma} \Phi_{\mathbf{s}}(P(\alpha)y) d\sigma,$$

où  $|\mathbf{s}| = s_1 + \dots + s_r$ . En utilisant la relation fonctionnelle vérifiée par la fonction sphérique  $\Phi_{\mathbf{s}}$  on obtient

$$\int_{\Sigma} \Phi_{\mathbf{s}}(P(\alpha)y) d\sigma = \Phi_{\mathbf{s}}(\alpha^2) \Phi_{\mathbf{s}}(y).$$





Si bien que

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) \sim \gamma(\mathbf{s})\Phi_{\mathbf{s}}(y),$$

avec

$$\gamma(\mathbf{s}) = \int_{\Sigma} \Phi_{\mathbf{s}}(\alpha^2) d\sigma.$$

Pour calculer  $\gamma(\mathbf{s})$  nous allons l'exprimer comme une intégrale sur  $V$  à l'aide de la transformation de Cayley. En posant

$$\sigma = (e - u)(e + u)^{-1}, \quad u \in V,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{4}(2e + \sigma + \bar{\sigma}) = (e + u^2)^{-1}, \\ d\sigma &= 2^n \Delta(e + u^2)^{-\frac{n}{r}} du, \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma(\mathbf{s}) = 2^n \int_V \Phi_{\mathbf{s}}((e + u^2)^{-1}) \Delta(e + u^2)^{-\frac{n}{r}} du,$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\gamma(\mathbf{s}) = 2^n \int_V \Delta_{-\mathbf{s}^* - \frac{n}{r}}(e + u^2) du,$$

avec  $\mathbf{s}^* = (s_r, \dots, s_1)$ .

**THÉORÈME 2.** *La fonction  $\gamma(\mathbf{s})$  s'exprime à l'aide de la fonction beta d'Euler,*

$$\gamma(\mathbf{s}) = C \prod_{j=1}^r B(\lambda_j, \frac{1}{2}) \prod_{j < k} B(\lambda_j + \lambda_k, \frac{d}{2}),$$

avec  $\mathbf{s} = \lambda - \rho$ ,  $\rho_j = \frac{d}{4}(2j - r - 1) + \frac{n}{2r}$ .

**DÉMONSTRATION.** Nous allons calculer  $\gamma(\mathbf{s})$  par récurrence sur le rang  $r$  selon une méthode due à HUA [5], Theorem 2.1.1. Posons

$$I_r(\mathbf{s}) = \int_V \Delta_{-\mathbf{s}}(e + x^2) dx.$$

Considérons la décomposition de Peirce de  $V$  relativement à l'idempotent  $c_r$ ,

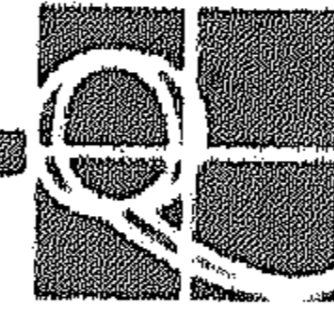
$$\begin{aligned} V &= V(c_r, 1) + V(c_r, \frac{1}{2}) + V(c_r, 0), \\ x &= tc_r + \xi + x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soit  $\phi$  la représentation de l'algèbre de Jordan  $V_0 = V(c_r, 0)$  dans  $E = V(c_r, \frac{1}{2})$  définie par

$$\phi(x_0)\xi = 2x_0\xi.$$

La forme quadratique associée à  $\phi$ , définie sur  $E$  et à valeurs dans  $V_0$ , définie par

$$(Q(\xi)|x_0) = (\phi(x_0)\xi|\xi),$$



vaut

$$Q(\xi) = 2(\xi^2)_0.$$

La décomposition de Peirce de  $e + x^2$  s'écrit

$$\begin{aligned} e + x^2 &= (1 + t^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2)c_r \\ &+ (\phi(x_0)\xi + t\xi) \\ &+ (e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi)). \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\Delta(x) = \Delta_0(x_0)(t - \frac{1}{2}(\phi(x_0^{-1})\xi|\xi)),$$

nous obtenons

$$\Delta(e + x^2) = \Delta_0(e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi)) p(t),$$

où  $p(t)$  est un polynôme du second degré,

$$p(t) = at^2 + 2bt + c,$$

avec

$$a = 1 - (\phi((e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi))^{-1})\xi|\xi).$$

Soit  $\tau_0$  l'élément du groupe triangulaire  $T_0$  de l'algèbre  $V_0$  associé au système d'idempotents  $c_1, \dots, c_{r-1}$ , tel que

$$e_0 + x_0^2 = \tau_0 e_0.$$

Il existe une transformation linéaire  $\tilde{\tau}_0$  de  $E$  vérifiant

$$Q(\tilde{\tau}_0\xi) = \tau_0 Q(\xi), \quad \phi(\tau_0 x_0) = \tilde{\tau}_0 \phi(x_0) \tilde{\tau}_0^*.$$

En posant  $\xi = \tilde{\tau}_0 \eta$ , nous obtenons

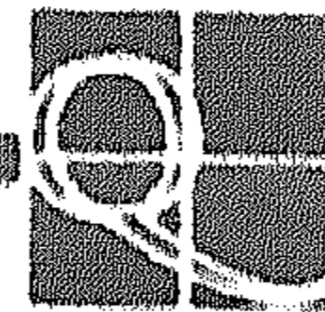
$$e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi) = \tau_0 (e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta)),$$

et, en tenant compte du fait que  $Q(\eta)$  est un élément de rang un,

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{1}{2}(\phi(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta))^{-1}\eta|\eta) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\|\eta\|^2}{1 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2}, \\ &= \Delta_0(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta))^{-1}. \end{aligned}$$

On montre également que  $ac - b^2 = 1$ . On intègre d'abord en  $t$  en utilisant le lemme suivant.





LEMME 4. Soit  $p(t) = at^2 + 2bt + c$  un polynôme du second degré sans racines réelles,  $b^2 - ac < 0$ , avec  $a > 0$ . Pour  $\Re\alpha > \frac{1}{2}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)^{-\alpha} dt = a^{\alpha-1} (ac - b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} B\left(\alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(Voir [5], Theorem 2.1.3)

Après intégration en  $t$  nous obtenons

$$I_r(\mathbf{s}) = I_{r-1}\left(\mathbf{s}_0 - \frac{d}{2}\right) B\left(\mathbf{s}_r - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_E \Delta_{-\sigma}^0\left(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta)\right) d\eta,$$

avec  $\sigma_j = s_j + s_r - 1$ ,  $1 \leq j \leq r-1$ . Pour le calcul de cette intégrale nous utilisons la proposition XIV.5.1 de [2],

$$\int_E \Delta_{-\sigma}^0\left(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta)\right) d\eta = c \prod_{j=1}^{r-1} B\left(\sigma_j - \frac{d}{2}(r-j), \frac{d}{2}\right).$$

Finalement, en posant  $\mathbf{s} = \lambda - \rho$ , avec  $\rho_j = \frac{d}{4}(2j - r - 1) + \frac{n}{2r}$ , nous obtenons

$$I_r(\mathbf{s}) = c \prod_{j=1}^r B\left(\lambda_j - \frac{n}{r}, \frac{1}{2}\right) \prod_{j < k} B\left(\lambda_j + \lambda_k - \frac{2n}{r}, \frac{d}{2}\right).$$

Il existe une relation entre la fonction  $\gamma$  que nous avons considérée et la fonction  $c$  de l'espace riemannien symétrique  $T_\Omega = G/K$ . En effet celle-ci s'écrit

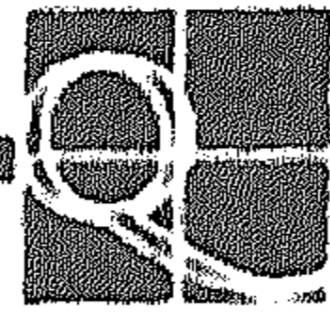
$$c(\lambda) = c_0(\lambda)c_1(\lambda),$$

où  $c_0$  est la fonction  $c$  de l'espace riemannien symétrique  $G_0/K_0$ , et

$$c_1(\lambda) = \gamma(\lambda - \rho).$$

#### LITTÉRATURE

1. A. DEBIARD et B. GAVEAU (1991). Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines  $BC$ , *J. of Functional Analysis*, 96, 256-296.
2. J. FARAUT et A. KORANYI. *Analysis on symmetric cones*, livre à paraître.
3. C.S. HERZ (1955). Bessel functions of matrix argument, *Ann. of Math.* 61, 474-523.
4. K. HOPPE (1971). Über die spektrale Zerlegung der algebraischen Formen auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit, *Sitzung Berichte Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.*, 7, 183-238.



5. L.K. HUA (1963). *Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains*, American Mathematical Society.
6. A.T. JAMES et A.G. CONSTANTINE, (1975). Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold, *Proc. London Mat. Soc.*, 29, 174-192.
7. M. KOECHER (1985). Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Ann.* 135, 192-202.
8. T.H. KOORNWINDER (1975). *Two-variable analogue of the classical orthogonal polynomials*, in Theory and application of special functions, Academic Press.
9. T.H. KOORNWINDER et I.G. SPRINKHUIZEN-KUYPER. (1978). Generalized power series expansions for a class of orthogonal polynomials in two variables, *SIAM J. Math. Anal.*, 9, 457-483.
10. M. LASALLE (1991). Polynômes de Jacobi généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, Série I, 425-428.
11. H. MAASS (1958). Zur theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen *Mat. Ann.* 135, 391-416.
12. E.B. VINBERG (1960). Homogeneous cones, *Soviet Math. Dokl.* 1, 787-790.