

Stefan van Zwam

University of Waterloo, Canada, en
Centrum Wiskunde en Informatica
Science Park 123
1098 XG Amsterdam
Stefan.van.Zwam@cwi.nl

Onderzoek

Matroïden en hun representaties

Als je alleen naar abstracte eigenschappen van symmetrie kijkt, dan beland je al snel bij de definitie van een groep. Maar wat krijg je als je alleen naar de abstracte eigenschappen van lineaire afhankelijkheid kijkt? In dit artikel geeft Stefan van Zwam een antwoord op deze vraag: matroïden! Hij behandelt de grondslagen van de matroïdentheorie en toont een aantal oude en nieuwe resultaten. Stefan van Zwam won in 2009 de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi met zijn voordracht 'How to show it doesn't fit'.

Matroïdentheorie is een fascinerende tak van de discrete wiskunde. Door sterke banden met grafentheorie, lineaire algebra, coderingstheorie en projectieve meetkunde is het een veelzijdig vakgebied. Praktische toepassingen van de matroïdentheorie zijn te vinden in de combinatorische optimalisering, waar onder meer verbanden bestaan met het greedy algoritme, geheeltallige lineaire optimalisering en matching-problemen.

In dit stuk wil ik proberen een beeld te geven van de matroïdentheorie en het onderzoek dat ik erin doe.

Abstracte afhankelijkheid

In 1935 introduceerde Whitney [13] de naam matroïde in zijn artikel 'On the abstract properties of linear dependence'. [18] De titel was goed gekozen, want dat is precies wat matroïdentheorie is: een studie van de abstracte eigenschappen van afhankelijkheid. Wat voor eigenschappen zijn dit? Neem een eindige verzameling E van vectoren uit een vectorruimte V . Stel dat $I \subseteq E$ een verzameling lineair onafhankelijke vectoren is. Dan is elke deelverzameling van I ook lineair onafhankelijk. Als $J \subseteq E$ een andere verzameling lineair onafhankelijke vectoren is, en J bevat meer elementen dan I , dan moet er een vector $e \in J$ zijn die niet in het opspansel van I

bevat is. Whitney nam deze twee eigenschappen, verwijderde elke referentie aan een vectorruimte, en kwam tot de volgende definitie:

Definitie 1. Een matroïde is een paar (E, \mathcal{I}) , waarbij E een eindige verzameling is en \mathcal{I} een collectie deelverzamelingen van E die voldoet aan deze voorwaarden:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. Als $I \subseteq J$ en $J \in \mathcal{I}$, dan ook $I \in \mathcal{I}$;
3. Als $I, J \in \mathcal{I}$ en $|I| < |J|$, dan is er een $e \in J$ zodat $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

De deelverzamelingen in \mathcal{I} heten *onafhankelijk*; de overige deelverzamelingen noemen we *afhankelijk*. Deze axioma's staan meer toe dan alleen verzamelingen vectoren. Een voorbeeld is algebraïsche onafhankelijkheid in de theorie van lichaamsuitbreidingen. Voor een ander voorbeeld gaan we naar de grafentheorie. Ter opfrissing: een *graaf* is een paar $G = (V, E)$ van een eindige verzameling V , de 'punten', en een collectie E van paren van punten, de 'kanten'. Een *bos* van G is een deelgraaf die geen circuit bevat. Anders gezegd: tussen elk tweetal punten is hooguit één pad. Een graaf heet *samenhangend* als er tussen elk tweetal punten een pad bestaat. Tenslotte, H is een *component* van G als H een samenhangende deelgraaf is, en geen en-

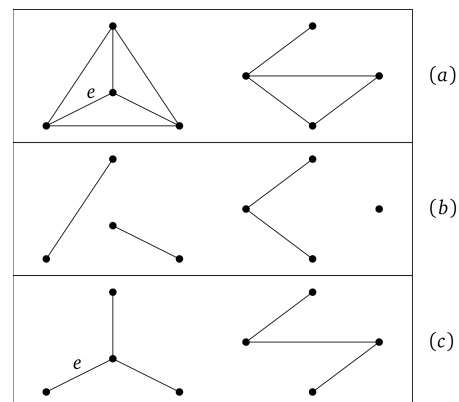
kele samenhangende deelgraaf van G die H bevat meer kanten heeft. Zie Figuur 1.

Stelling 2. Als $G = (V, E)$ een graaf is, en \mathcal{I} bestaat uit alle kantenverzamelingen van bossen, dan is $M(G) = (E, \mathcal{I})$ een matroïde.

Bewijs. Alleen het derde axioma is niet triviaal. Laat I en J de kantenverzamelingen van twee bossen zijn, met $|J| > |I|$. Het aantal componenten van de deelgraaf (V, I) is $|V| - |I|$. Hieruit volgt dat er in J een kant e moet zijn die twee verschillende componenten van (V, I) verbindt. Maar dan bevat $I \cup \{e\}$ geen circuit, en dus $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. \square

Allemaal axioma's

Natuurlijk zijn er nog veel andere abstracte eigenschappen van lineaire afhankelijkheid te bedenken, bijvoorbeeld door te kijken naar de



Figuur 1 (a) Een graaf met twee componenten. (b), (c) Twee deelgrafen die bossen zijn.

bases, de minimale afhankelijke verzamelingen, de rang-functie, enzovoort. Het lijkt dus alsof onze keuze van axioma's nogal willekeurig is, maar niets is minder waar! Er bestaan verrassend veel stelsels van axioma's die allemaal dezelfde verzameling structuren opleveren. Birkhoff noemde zulke stelsels 'cryptomorfe'. Ik geef, zonder bewijs, drie voorbeelden. Het eerste wijkt niet veel af van de originele definitie. Het verschil is dat we nu naar maximale onafhankelijke deelverzamelingen kijken, die we bases noemen.

Definitie 3. *Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een deelverzameling $B \subseteq E$ is een basis als $B \in \mathcal{I}$, en $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ voor alle $e \in E \setminus B$.*

Stelling 4. *Laat E een eindige verzameling zijn. Een collectie \mathcal{B} van deelverzamelingen van E is de verzameling bases van een matroïde dan en slechts dan als \mathcal{B} voldoet aan deze voorwaarden:*

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$;
2. Als $B, B' \in \mathcal{B}$ en $e \in B \setminus B'$, dan is er een $f \in B' \setminus B$ zodat $(B \setminus \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$.

Voor ons tweede voorbeeld kijken we naar minimale afhankelijke deelverzamelingen, die we circuits noemen. Deze naam is afgeleid van het voorbeeld van grafen hierboven.

Definitie 5. *Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een deelverzameling $C \subseteq E$ is een circuit als $C \notin \mathcal{I}$, maar voor elke deelverzameling van C geldt $C \in \mathcal{I}$.*

Stelling 6. *Laat E een eindige verzameling zijn. Een collectie \mathcal{C} van deelverzamelingen van E is de verzameling circuits van een matroïde dan en slechts dan als \mathcal{C} voldoet aan deze voorwaarden:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$;
2. Als $C, C' \in \mathcal{C}$ en $C' \subseteq C$ dan $C' = C$;
3. Als $C, C' \in \mathcal{C}$ zodat $C \neq C'$, en $e \in C \cap C'$, dan is er een $C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{e\}$ zodat $C'' \in \mathcal{C}$.

De laatste eigenschap is vrij eenvoudig te bewijzen voor verzamelingen vectoren: als C, C' verschillende verzamelingen vectoren zijn zodat

$$\sum_{f \in C} \alpha_f f = \sum_{f \in C'} \beta_f f = 0$$

waarbij alle α_f en β_f ongelijk nul zijn, dan is

$$\sum_{f \in C} \alpha_e^{-1} \alpha_f f - \sum_{f \in C'} \beta_e^{-1} \beta_f f = 0.$$

Hieruit volgt dat $(C \cup C') \setminus \{e\}$ lineair afhankelijk is, en dus een of meer minimale afhankelijke deelverzamelingen vectoren bevat.

Ons laatste voorbeeld generaliseert het begrip dimensie van deelruimten opgespannen door vectoren.

Definitie 7. *Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. De rang-functie van M is $rk_M : 2^E \rightarrow \mathbf{N}$, gedefinieerd door*

$$rk_M(I) := \max\{|J| : J \subseteq I, J \in \mathcal{I}\}.$$

Stelling 8. *Laat E een eindige verzameling zijn. Een functie $r : 2^E \rightarrow \mathbf{N}$ is de rang-functie van een matroïde dan en slechts dan als r voldoet aan deze voorwaarden:*

1. Voor alle $X \subseteq E$ geldt $0 \leq r(X) \leq |X|$;
2. Voor alle $X, Y \subseteq E$ met $X \subseteq Y$ geldt $r(X) \leq r(Y)$;
3. Voor alle $X, Y \subseteq E$ geldt

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

De derde eigenschap, die *submodulariteit* genoemd wordt, volgt voor verzamelingen vectoren eenvoudig uit de dimensieformule voor lineaire deelruimten:

$$\begin{aligned} \dim(V) + \dim(W) \\ = \dim(V + W) + \dim(V \cap W). \end{aligned}$$

De ongelijkheid in de stelling ontstaat omdat $X \cap Y$ soms te weinig elementen bevat om de volledige ruimte $V \cap W$ op te spannen.

Dualiteit

Als matroïdentheorie alleen een studie van axiomasystemen zou zijn, dan zou het onderwerp al jaren geleden zijn opgedroogd. Gelukkig is er veel meer over te zeggen. Een belangrijk concept is de *duale*, een generalisatie van het concept van orthogonale deelruimten. Voor matroïden werkt dat als volgt:

Stelling 9. *Laat \mathcal{B} de verzameling bases zijn van een matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, en definieer*

$$\mathcal{B}^* := \{E - B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Dan is \mathcal{B}^ de verzameling bases van een matroïde M^* die we de duale van M noemen.*

Een verrassende stelling legt een verband tussen dualiteit en een topologische eigenschap van een graaf. We zeggen dat een graaf *planair* is als het mogelijk is om de punten in het vlak te tekenen, en de kanten als krom-

men te tekenen die elkaar alleen snijden in hun eindpunten. De graaf in Figuur 1 is een voorbeeld van een planaire graaf.

Stelling 10. *Laat G een graaf zijn, en $M = M(G)$ de matroïde zoals gedefinieerd in Stelling 2. De duale M^* is de matroïde $M(H)$ van een graaf H dan en slechts dan als G planair is.*

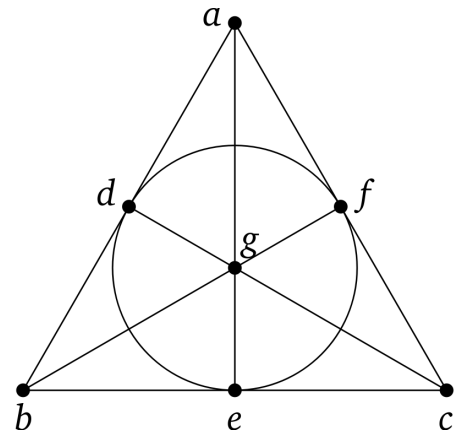
Projectieve meetkunde

Een matroïde is ook op te vatten als een verzameling punten in een abstracte projectieve meetkunde. Een voorbeeld is Figuur 2. De elementen van de matroïde zijn de zeven punten. Een deelverzameling punten is onafhankelijk als deze hooguit drie punten bevat, en als die drie punten bovendien niet op een lijn liggen, waarbij een 'lijn' niet altijd recht hoeft te zijn. Wel is het zo dat elk tweetal punten precies één lijn definieert, en dat twee lijnen elkaar in hooguit één punt snijden. In het voorbeeld is $\{d, e, f\}$ dus afhankelijk en $\{a, c, d\}$ onafhankelijk.

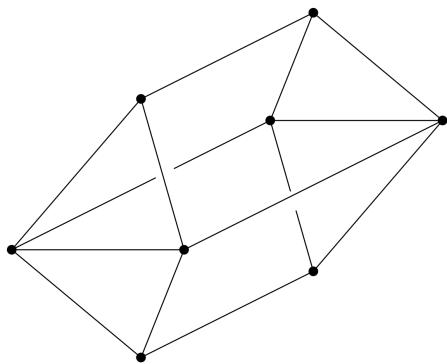
Een tweede voorbeeld is Figuur 3. Deze configuratie staat bekend als de *Vámos-matroïde*. De onafhankelijke verzamelingen zijn de deelverzamelingen die hooguit vier punten bevatten, met uitzondering van de verzamelingen hoekpunten van de vijf aangeduide vlakken. Een interessante eigenschap van deze matroïde is dat het *onmogelijk* is om een verzameling vectoren te vinden met precies deze lineair onafhankelijke deelverzamelingen, ongeacht welke vectorruimte je gebruikt!

Representaties

Whitney vroeg zich in zijn artikel af hoe goed zijn axioma's de eigenschappen van vectorruimten benaderen. Uit het vorige voorbeeld blijkt al dat de benadering niet perfect is. Dit leidt tot een belangrijke klasse van problemen in de matroïdentheorie, namelijk de representatieproblemen.



Figuur 2 Meetkundige weergave van de Fano-matroïde



Figuur 3 Meetkundige weergave van de Vámos-matroïde

Definitie 11. *Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een representatie van M over een lichaam \mathbf{F} is een afbeelding $A : E \rightarrow \mathbf{F}^r$, voor zekere $r \geq \text{rk}_M(E)$, zodat, voor alle $X \subseteq E$,*

$$\{A(e) : e \in X\}$$

lineair onafhankelijk is dan en slechts dan als

$$X \in \mathcal{I}.$$

In het vervolg zullen we A simpelweg als matrix behandelen, waarbij de kolommen worden gelabeld met de elementen van E . We zeggen dat M representeerbaar is over \mathbf{F} als er een representatie A bestaat.

Als M representeerbaar is over \mathbf{F} , dan is er een representatie A met $r = \text{rk}_M(E)$ rijen. Verder geldt het volgende. Als A een representatie is, en A' is verkregen uit A door rijoperaties, dan is A' ook een representatie. Rijoperaties bestaan uit een rij bij een andere optellen, of alle elementen van een rij vermenigvuldigen met een element van $\mathbf{F} \setminus \{0\}$. Bovendien kunnen we kolommen schalen met een element van $\mathbf{F} \setminus \{0\}$, en kunnen we alle elementen vervangen door hun beeld onder een automorfisme van \mathbf{F} .

Laten we ter illustratie een representatie opstellen voor de Fano-matroïde (Figuur 2). We nemen als lichaam $\text{GF}(2)$, het lichaam met twee elementen 0 en 1, met de relatie $1+1 = 0$ en overige optellingen en vermenigvuldigingen zoals gewoonlijk. We mogen, door het uitvoeren van rijoperaties, aannemen dat de kolommen van de representatie corresponderend met elementen a, b, c een identiteitsmatrix vormen. Verzameling $\{a, b, d\}$ is afhankelijk. Hieruit volgt vrijwel direct dat de met d corresponderende kolom van A gelijk moet zijn aan $(1, 1, 0)$. Zo verder werkend komen we tot de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voor een gegeven matroïde M kunnen we ons nu allerlei vragen stellen:

1. Wat is de verzameling lichamen waarover M representeerbaar is?
2. Kunnen alle representaties van M over een lichaam door bovenstaande operaties in elkaar worden overgevoerd?
3. Is M representeerbaar over een specifiek lichaam?

Die eerste vraag leidt tot verrassende resultaten, dus laten we daar mee beginnen. De tweede vraag voert te ver voor dit stuk; ik volsta ermee om te zeggen dat het antwoord vaak “nee” is. Op de derde vraag kom ik terug in de sectie ‘Geen representaties’.

Veel representaties

In 1965 bewees Tutte de volgende stelling:

Stelling 12. *Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. M is representeerbaar over elk lichaam;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(2)$ en $\text{GF}(3)$;
3. M is representeerbaar over \mathbf{R} met een totaal unimodulaire matrix.

Een matrix is *totaal unimodulair* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{-1, 0, 1\}$. Voor matroïden representeerbaar over $\text{GF}(2)$ (die we ‘binair’ noemen) zijn er dus maar twee mogelijkheden. Ofwel ze zijn alleen representeerbaar over lichamen van karakteristiek 2, ofwel ze zijn representeerbaar over elk lichaam. In het laatste geval noemen we zo’n matroïde *regulier*. De laatste eigenschap in de stelling vormt de sleutel tot een bewijs. We kunnen een totaal unimodulaire matrix opvatten als een matrix over de ring \mathbf{Z} , en deze via een *ring-homomorfisme* afbeelden op de ring $\mathbf{Z}_p = \text{GF}(p)$. Zo’n afbeelding zorgt dat determinanten die nul waren nul blijven, en die ongelijk nul waren ook ongelijk nul blijven. Het gevolg is dat de lineaire afhankelijkheden niet veranderen.

Omgekeerd is het mogelijk om, uitgaande van een representatie over $\text{GF}(2)$, een unieke totaal unimodulaire matrix te maken als die bestaat. Om dit stuk niet al te technisch te maken zal ik de details niet bespreken.

In de tweede helft van de jaren ’90 publiceerde Whittle [14–15] een aantal resultaten met dezelfde structuur als de stelling van Tutte. Ik geef twee voorbeelden.

Stelling 13. *Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. M is representeerbaar over elk lichaam met oneven karakteristiek;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(3)$ en $\text{GF}(5)$;

3. M is representeerbaar over \mathbf{R} met een totaal dyadische matrix.

Een matrix is *totaal dyadisch* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm 2^k : k \in \mathbf{Z}\}$.

Stelling 14. *Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. M is representeerbaar over elk lichaam met minstens 3 elementen;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(3)$, $\text{GF}(4)$ en $\text{GF}(5)$;
3. M is representeerbaar over $\mathbf{R}(\alpha)$ met een haast-unimodulaire matrix.

In deze stelling is α een onbekende. Een matrix is *haast-unimodulair* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \alpha^k(1 - \alpha)^l : k, l \in \mathbf{Z}\}$. Analoot aan Tutte’s stelling noemen we deze verzameling matroïden *haast-regulier*.

Net als in de stelling van Tutte kun je bewijzen dat de derde bewering de eerste twee impliceert met behulp van een ring-homomorfisme vanuit een goed gekozen ring. Maar het bewijs in de andere richting is niet zo eenvoudig. Een belangrijk verschil tussen de stelling van Tutte en de stellingen van Whittle is te vinden in de laatste conditie. In de stelling van Tutte kunnen de elementen van de matrix slechts drie waarden aannemen, terwijl de matrices in de stellingen van Whittle willekeurig veel verschillende waarden kunnen bevatten. Samen met Rudi Pendavingh [9] heb ik een algemene stelling bewezen die de omgekeerde route wel mogelijk maakt. Bovendien geeft deze stelling eenvoudig te verifiëren condities die de equivalenties impliceren.

We hebben deze stelling onder meer gebruikt om het volgende resultaat te bewijzen [19]:

Stelling 15. *Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. M is representeerbaar over \mathbf{R} , over $\text{GF}(5)$, over $\text{GF}(p^2)$ voor elk priemgetal p , en over $\text{GF}(p)$ als $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(4)$ en $\text{GF}(5)$;
3. M is representeerbaar over \mathbf{R} met een gulden-snedematrix.

Een matrix is *gulden snede* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \tau^k : k \in \mathbf{Z}\}$, waarbij τ de gulden snede is, i.e. de positieve wortel van $x^2 - x - 1$.

Onze stelling was helaas niet toereikend om het volgende vermoeden te bevestigen:

Vermoeden 16. *Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

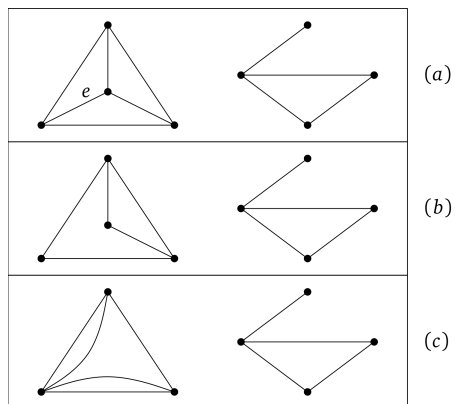
1. M is representeerbaar over elk lichaam van karakteristiek 2, behalve eventueel $GF(2)$;
2. M is representeerbaar over $GF(2)(\alpha)$ met een matrix waarvan elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \alpha^k(1 + \alpha)^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$.

Geen representaties

Tenslotte kijken we naar de vraag of een matroïde representeerbaar is over een specifiek lichaam (of verzameling lichamen). Als het antwoord “ja” is dan kun je iemand daarvan overtuigen door een representatie te vinden en te verifiëren dat alle afhankelijkheden van de vectoren zijn zoals voorgeschreven. [20] Maar hoe toon je aan dat een matroïde *geen* representatie heeft over een gewenst lichaam? Een van de gebruikelijke technieken hebben we overgenomen van de grafentheorie. Een graaf H is een *minor* van G als H verkregen is door het weghalen van sommige kanten en punten, en door het samentrekken van sommige kanten. Een samentrekking bestaat uit het weghalen van de kant en het identificeren van de eindpunten. Zie Figuur 4. Een klassieke stelling uit de grafentheorie is de Stelling van Kuratowski:

Stelling 17. *Een graaf G is planair dan en slechts dan als G geen minor heeft isomorf aan K_5 of $K_{3,3}$.*

Afbeeldingen van $K_{3,3}$ en K_5 zijn te vinden in Figuur 5. Ook voor matroïden zijn minoren te definiëren. De precieze definities zijn niet belangrijk voor dit stuk, maar voor de volledigheid zal ik ze toch geven. Het weghalen van een element e is eenvoudig: de nieuwe matroïde, die we met $M \setminus e$ aanduiden, heeft als elementen $E \setminus \{e\}$ en als onafhankelijke deelverzamelingen precies die verzamelingen die



Figuur 4 (a) Een graaf G . (b) De graaf G met e weggehaald. (c) De graaf G met e samengetrokken.

eerder al onafhankelijk waren. Het samentrekken is niet veel moeilijker: deze operatie komt overeen met het weghalen van een element e in de duale matroïde. We noteren de nieuwe matroïde met M/e . In formulevorm:

$$M/e = (M^* \setminus e)^*$$

Als M een verzameling vectoren vertegenwoordigt dan heeft het samentrekken van e een interessante interpretatie: eerst worden de overige vectoren geprojecteerd op de deelruimte orthogonaal op e , en dan wordt e weggehaald. Een *minor* van een matroïde M is een matroïde verkregen uit M door een reeks van deze twee operaties.

Een belangrijke observatie is dat deze operaties een *partiële ordening* opleveren: we schrijven $N \leq M$ als N isomorf is aan een minor van M . De verzamelingen matroïden die we tot nu toe bekeken hebben zijn *gesloten onder het nemen van minoren*:

Stelling 18. *Laat \mathcal{F} een verzameling lichamen zijn, en M een matroïde representeerbaar over elk van deze lichamen. Dan zijn M^* en alle minoren van M eveneens representeerbaar over elk van deze lichamen.*

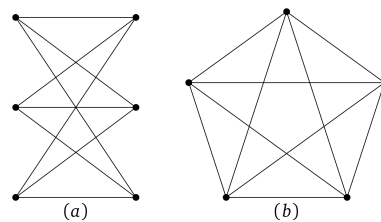
Nu kunnen we beweringen analoog aan de Stelling van Kuratowski doen. Laat \mathcal{M} een verzameling matroïden zijn die gesloten is onder het nemen van minoren. We zeggen dat M een *verboden minor* is voor \mathcal{M} als $M \notin \mathcal{M}$, maar elke minor van M met strict minder elementen wel in \mathcal{M} voorkomt. Met andere woorden: M is een matroïde die niet in de verzameling zit en minimaal is in de minor-ordening wat betreft deze eigenschap. Misschien wel het belangrijkste onopgeloste probleem in de matroïdentheorie is het Vermoeden van Rota:

Vermoeden 19. *Voor elk eindig lichaam $GF(q)$ is er een eindige lijst verboden minoren voor de verzameling matroïden die representeerbaar is over $GF(q)$.*

Dit vermoeden stamt uit de jaren '70. Veel onderzoekers hebben een poging gewaagd om het te bewijzen, maar het is tot nu toe slechts voor drie lichamen opgelost:

Stelling 20. *Het Vermoeden van Rota is waar voor $2 \leq q \leq 4$.*

Voor $q = 2$ is er precies één verboden minor [12], voor $q = 3$ zijn dat er vier [1, 11], en voor $q = 4$ zijn het er zeven [2]. Voor $q = 5$ zijn er al meer dan 500 bekend [6]. Merk op dat de



Figuur 5 (a) De graaf $K_{3,3}$. (b) De graaf K_5 .

eis dat het lichaam eindig is niet kan worden weggelaten: voor elk oneindig lichaam \mathbf{F} zijn er oneindig veel verboden minoren voor de verzameling matroïden die representeerbaar is over \mathbf{F} .

Voor verzamelingen van lichamen is de situatie niet veel beter. Tot voor kort was er alleen de volgende stelling van Tutte, een aanvulling op Stelling 12:

Stelling 21. *Er zijn precies drie verboden minoren voor de verzameling reguliere matroïden.*

Een mooi en kort bewijs van deze stelling is te vinden in een artikel van Gerards [4]. Recent heb ik, samen met Rhiannon Hall en Dillon Mayhew [5], een vergelijkbare stelling voor haast-reguliere matroïden bewezen, een aanvulling op Stelling 14:

Stelling 22. *Er zijn precies tien verboden minoren voor de verzameling haast-reguliere matroïden.*

Ondanks de beperkte hoeveelheid resultaten hierboven heb ik er vertrouwen in dat het Vermoeden van Rota binnen niet al te lange tijd bewezen zal worden.

Meer weten?

In dit stuk heb ik slechts een klein deel van de matroïdentheorie bestreken. Ik ben bijvoorbeeld niet toegekomen aan het begrip samenhang, dat een zeer centrale rol speelt bij de bewijzen van een aantal van de hierboven genoemde stellingen. Ook ben ik voorbij gegaan aan de eigenschappen van matroïden die meer dan één representatie hebben over een enkel lichaam. Inequivalente representaties doemen op voor lichamen met 4 of meer elementen en zijn het belangrijkste obstakel voor een bewijs van het Vermoeden van Rota. Tenslotte ben ik voorbij gegaan aan het werk van Geelen, Gerards en Whittle [3], die bezig zijn het uiterst succesvolle Graph Minors Project van Robertson en Seymour te generaliseren naar matroïden representeerbaar over een eindig lichaam.

Het standaardwerk in het vakgebied is

Matroid Theory, geschreven door James Oxley [8]. Oxley [7] heeft eveneens een overzichtsartikel geschreven dat, in tegenstelling tot dit stuk, een meer bescheiden tempo heeft en een flink aantal bewijzen bevat. Schrij-

ver [10] geeft, in Hoofdstuk 39.10b, een uitgebreid overzicht van de geschiedenis van de matroïdentheorie. Whittle [16] geeft een goed overzicht van recent onderzoek tot 2005 en trends die ook nu nog het gezicht van het on-

derzoek bepalen. Een uitgebreide referentielijst is te vinden in mijn proefschrift [17], dat onder meer beschikbaar is vanaf mijn website www.cwi.nl/~zwam. ←

Referenties

- 1 R. E. Bixby, 'On Reid's characterization of the ternary matroids', *J. Combin. Theory Ser. B*, **26**(2), pp. 174–204, 1979.
- 2 J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, A. Kapoor, 'The excluded minors for GF(4)-representable matroids', *J. Combin. Theory Ser. B*, **79**(2), pp. 247–299, 2000.
- 3 J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle, 'Towards a matroid-minor structure theory', In *Combinatorics, complexity, and chance*, vol. 34 of *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.*, pp. 72–82, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- 4 A. M. H. Gerards, 'A short proof of Tutte's characterization of totally unimodular matrices', *Linear Algebra Appl.*, **114/115**, pp. 207–212, 1989.
- 5 R. Hall, D. Mayhew, S. H. M. van Zwam, 'The excluded minors for near-regular matroids', *European J. Combin.*, 2010. Accepted. Preprint at arXiv:0902.2071v2 [math.CO].
- 6 D. Mayhew, G. F. Royle, 'Matroids with nine elements', *J. Combin. Theory Ser. B*, **98**(2), pp. 415–431, 2008.
- 7 J. G. Oxley, 'What is a matroid?', available from www.math.lsu.edu/~oxley.
- 8 J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, 1992.
- 9 R. A. Pendavingh, S. H. M. van Zwam, 'Lifts of matroid representations over partial fields', *J. Combin. Theory Ser. B*, **100**(1), pp. 36–67, 2010.
- 10 A. Schrijver, *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency*, vol. 24 of *Algorithms and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- 11 P. D. Seymour, 'Matroid representation over GF(3)', *J. Combin. Theory Ser. B*, **26**(2):159–173, 1979.
- 12 W. T. Tutte, 'A homotopy theorem for matroids. I, II', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88**, pp. 144–174, 1958.
- 13 H. Whitney, 'On the abstract properties of linear dependence', *Amer. J. Math.*, **57**(3), pp. 509–533, 1935.
- 14 G. Whittle, 'A characterisation of the matroids representable over GF(3) and the rationals', *J. Combin. Theory Ser. B*, **65**(2), pp. 222–261, 1995.
- 15 G. Whittle, 'On matroids representable over GF(3) and other fields', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**(2), pp. 579–603, 1997.
- 16 G. Whittle, 'Recent work in matroid representation theory', *Discrete Math.*, **302**(1-3), pp. 285–296, 2005.
- 17 S. H. M. van Zwam, *Partial fields in matroid theory*, PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2009.
- 18 Niet tot ieders vreugde. Gian-Carlo Rota, bijvoorbeeld, was erg ongelukkig met de term matroïde, die hij 'onbeschrijfelijk kakafonisch' noemde.
- 19 Deze stelling is ooit aangekondigd door Vertigan. Hij heeft echter nooit een bewijs gepubliceerd.
- 20 Voor de algoritmicci onder de lezers: deze verificatie is *niet* een polynomiale-tijd algoritme. Algoritmische vragen rondom matroïden zijn overigens sterk afhankelijk van de manier waarop de matroïde wordt aangeboden.