

Numerieke wiskunde: wetenschap en gereedschap

Oratie uitgesproken door

Prof.dr.ir. Barry Koren

bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de

Numerieke Wiskunde

aan de Universiteit Leiden

op vrijdag 22 oktober 2010



Universiteit Leiden

BARRY KOREN

Mijnheer de Rector Magnificus, zeer gewaardeerde toehoorders,

1. Van Delft naar Leiden

Op 1 maart 2008 ben ik aan de Universiteit Leiden benoemd. Mijn Leidse aanstelling heb ik nog enige tijd gecombineerd met mijn Delftse. Beide hoogleraarsaanstellingen plus m'n hoofdaanstelling bij het Centrum Wiskunde & Informatica, het CWI in Amsterdam, gaven me een drukke tijd; de reden waarom deze oratie wat lang op zich heeft laten wachten.

In 2007 belde prof. Sjoerd Verduyn Lunel, toen wetenschappelijk directeur van het Mathematisch Instituut in Leiden, mij op met de vraag of ik belangstelling had om deeltijdhoogleraar Numerieke Wiskunde te worden op zijn instituut. Ik was toen deeltijdhoogleraar Numerieke Stromingsleer aan de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek van de TU Delft.

Ik vond het een prachtig aanbod, maar heb alvorens te antwoorden nog even gesproken met prof. Jan Karel Lenstra, directeur van het CWI. Hij vond het aanbod ook mooi, maar zei dat volgens hem mijn hart wel in Delft lag. Ik ben een in Delft opgeleid vliegtuigbouwkundig ingenieur; uitdagende ingenieursproblemen zijn een passie van me. In de loop der jaren echter is de rol van wiskunde bij het oplossen van deze problemen mij steeds meer gaan trekken.

Ik hoefde niet lang na te denken over het Leidse aanbod. Hoogleraar in een bloeiend vakgebied op een gerenommeerd wiskunde-instituut, aan een faculteit waar prof. Lorentz en prof. Oort nog hebben gewerkt, Einstein zelfs. Een universiteit trouwens ook waar veel aan ingenieurswiskunde is gedaan.

2. Ingenieurswiskunde in Leiden

2.1. Simon Stevin

De Universiteit Leiden heeft een lang ingenieursverleden; van 1600 tot 1843, met een onderbreking van 1681 tot 1701,

heeft ze een ingenieursopleiding gehad. De oprichting van de Leidse Ingenieursschool valt in een periode waarin het Prins Maurits – dan de machtige man in Holland – militair voor de wind ging. Maurits was goed in het belegeren en innemen van steden. Hij pakte dit wetenschappelijk aan, daarbij geholpen door zijn persoonlijk adviseur Simon Stevin. Stevin, in Brugge geboren, vestigde zich in 1581 in Leiden en schreef zich er in als student, zes jaar na oprichting van de universiteit, misschien om zijn netwerk op te bouwen en voor de belastingvoordelen. Hij was namelijk al een volleerd wetenschapper. Een jaar voor zijn inschrijving als student had hij al een belangrijk boek gepubliceerd, *Tafelen van Interest*, een boek over wat we nu financiële wiskunde zouden noemen. Meer boeken volgden, over uiteenlopende wiskundegebieden en andere onderwerpen¹, in een periode van drie jaar vanaf zijn inschrijving.

Stevin was niet alleen veelzijdig wiskundige, maar ook nog ingenieur. Hij was uitvinder van bijvoorbeeld de zeilwagen en een nieuw type watermolen. De laatste bracht hij zelfs naar de markt²; een vroeg voorbeeld van valorisatie.

Een kenmerk van Stevins werkwijze was zijn voorkeur voor Nederlands als taal om in te publiceren. Stevin wilde zodoende zo veel mogelijk mensen aanspreken voor de opbouw van de ingenieurswetenschappen, de opbouw van Holland in feite.³

Bepalend voor Stevins succes was mijns inziens niet zo zeer zijn fijne neus voor politiek en handel en ook niet zijn voorkeur voor de volkstaal, maar het principe om al zijn werk eerst van een stevig theoretisch fundament te voorzien. In zijn publicatie *Wisconstighe Ghedachtenissen* betoogt Stevin dat je, als je een vak goed in de praktijk wilt kunnen uitoefenen, eerst zo veel mogelijk theoretische kennis moet opbouwen. Het zou heel goed mogelijk zijn dat Simon Stevins zeilwagen en watermolen een voor hun tijd steviger theoretisch fundament hebben dan prof. Ockels' superbus en laddermolen. *Daet sonder spieghelinge* – in hedendaags Nederlands: praktijk zonder theorie – dat gaat niet volgens Stevin. Het omgekeerde gaat wel volgens hem. Voor bijvoorbeeld zuiver wiskundigen geldt vol-

gens Stevin: *'Sy connen den Doenders stof leveren en voorderlick sijn, sonder self Doenders te wesen'*.

Maurits zag in dat ingenieurs van cruciaal belang waren voor succesvolle beëindiging van de oorlog en opbouw van het land. In 1600 gaf hij de aanzet tot oprichting van de eerste ingenieursopleiding in Holland, aan de Universiteit Leiden. Op Maurits' verzoek stelde Simon Stevin het onderwijsprogramma op.⁴ Alle onderwijs aan de Ingenieursschool zou, volgens Stevins plan, in het Nederlands gegeven worden. Stevin zelf werd evenwel geen docent aan de school; Maurits had hem waarschijnlijk te hard nodig.⁵

De Ingenieursschool leidde een redelijk stabiel en kleurrijk bestaan binnen de universiteit. In de Gouden Eeuw werd een les aan de Ingenieursschool als een van de *vermaecklijkheden van Hollandt* beschouwd, getuige het volgende verslagje: *'Metselaers, Timmer-luyden, en diergelijcke meer, die haer dan met hoopen in die tijdt hier vinden, sonder mantels, maer met haere stocken en schootsvellen versien, dat dan seer kluchtigh om te sien is'*.

2.2. Van Leiden naar Delft

De stabiliteit van de Ingenieursschool hield aan tot de volgende buitenlandse soldaten zich aandienenden, de Fransen. In 1806 werd Lodewijk Napoleon koning van Holland. Naar Frans voorbeeld wilde hij in Holland een Ecole Polytechnique invoeren, een ingenieursopleiding voor de meest talentvolle studenten en docenten van het land. Er ontstond direct grote weerstand tegen dit plan onder verschillende groepen in de Nederlandse samenleving.⁶ Koning Lodewijk kreeg het niet voor elkaar; het plan ging de ijskast in.

In 1825, Lodewijk Napoleon was inmiddels weg, besloot de Universiteit Leiden om haar ruim twee eeuwen oude Ingenieursschool om te zetten in het Industrie College. De Industriële Revolutie was inmiddels ook in Nederland begonnen. De industrie ontwikkelde zich echt revolutionair; het Industrie College heeft nog geen 20 jaar bestaan. In februari 1843 werd ze al opgeheven, nadat een maand eerder in Delft de Konink-

lijke Akademie ter opleiding van burgerlijk ingenieurs – de huidige TU Delft – was opgericht. De oprichting van de Delftse Akademie, in feite toch het plan van Koning Lodewijk, markeert het einde van ruim twee eeuwen ingenieursopleiding aan de Universiteit Leiden. Ingenieurswiskunde is hier echter nooit helemaal weggegaan.

2.3. Toch nog in Leiden

In 1992 was ik in de Verenigde Staten, op een internationale conferentie over numerieke stromingsleer, een conferentie met veel ingenieurs onder de deelnemers. Op het programma stond al weken voor de conferentie prominent een sessie aangekondigd met als titel *Computational Fluid Dynamics in The Netherlands*. Het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, het NLR, een belangrijk instituut in Nederland op het gebied van numerieke stromingsleer, was niet betrokken bij de organisatie van de sessie, en een beetje nerveus geworden van de aankondiging. Een leider van een onderzoeksafdeling van het NLR ging er speciaal voor naar de conferentie. Toen ik hem daar tegen kwam bleek hij serieus voorwerk te hebben gedaan. Zijn verrassende conclusie was dat het tot dan toe in Nederland verrichte numerieke stromingsleeronderzoek internationaal gezien best wel goed was maar toch wel wat beter had gekund, mits veel geciteerd werk dat in de jaren '60 en '70 van de vorige eeuw aan de Universiteit Leiden was verricht, niet werd meegeteld: het werk van prof. Bram van Leer. De ingenieursopleiding was dan wel weg uit Leiden, wiskunde ten behoeve van ingenieurs niet, zeker niet wiskunde voor stromingsleer ingenieurs. Prof. Lorentz bijvoorbeeld heeft nog belangrijk voorbereidend rekenwerk gedaan ten behoeve van de afsluiting van de Zuiderzee. De aangekondigde sessie op de conferentie werd overigens niet gehouden; het bleek een grap te zijn.

3. Numerieke Wiskunde

3.1. Numerieke stromingsleer

Stromingsleer, in het bijzonder de theoretische stromingsleer, heeft een roemrijke geschiedenis. In mijn zeven jaar geleden in Delft gegeven oratie heb ik daar vrij uitgebreid bij stil gestaan [5]. Hier een korte herhaling.

3.1.1. *Navier-Stokes-vergelijkingen*. Een mijlpaal in de theoretische stromingsleer is de invoering van partiële differentiaalvergelijkingen voor de beschrijving van de beweging van gas- en vloeistofstromingen op basis van de Tweede Wet van Newton (kracht = massa \times versnelling). Partiële differentiaalvergelijkingen zijn wiskundige formules waarmee het verloop van vele ingewikkelde processen in allerlei vakgebieden – niet alleen exacte wetenschappen en techniek – op heldere en uiterst compacte wijze kan worden beschreven. De eerste partiële differentiaalvergelijkingen voor gas- en vloeistofstromingen werden in 1755 ingevoerd door de wiskundige Leonard Euler [6]. Dat een wiskundige de stromingsleer vooruit helpt zien we wel vaker. De stromingsleer heeft met haar rijkdom aan wiskundeproblemen altijd wiskundigen aangetrokken.

Net als Stevin was Euler overigens ook uitvinder. Hij is de uitvinder van onder andere de schepsschroef. En net als Stevin had Euler ook een goed politiek en zakelijk inzicht.⁷ Zo legde hij als voorwaarde voor zijn terugkeer naar Sint Petersburg – hij had daar eerder gewerkt – een verlanglijstje neer bij Tsarina Catharina II. Behalve een goed salaris wilde hij: gratis huisvesting, gratis brandstof voor in de winter, vrijwaring van inkwartiering van soldaten, geschikte posities voor zijn drie zonen, plus aanstelling van een bekwaam wetenschapper als vice-president van de Academie van Wetenschappen in Sint Petersburg.⁸ Euler wilde wetenschappers op leidinggevende wetenschappelijke posities. Hier in Leiden en ook bij het CWI is dat zo geregeld, erg prettig, alleen al bij functioneringsgesprekken. Catharina II willigde Eulers eisen in, met uitzondering toch van de laatste eis. Als extraatje leende ze hem echter een van haar koks uit. Ook niet slecht.

De door Euler voorgestelde stromingsvergelijkingen waren nog niet geschikt voor de meeste praktische problemen; wrijvingskrachten die in vloeistoffen kunnen optreden waren er nog niet in opgenomen. De uitbreiding met deze krachten werd in de 19^e eeuw op elegante wijze verzorgd door – onafhankelijk van elkaar – Claude Navier in Frankrijk [8] en George Stokes in Engeland [9]. Deze meer uitgebreide partiële differenti-

aalvergelijkingen staan thans bekend als de Navier-Stokes-vergelijkingen, vergelijkingen die vandaag de dag nog steeds een prachtig werkterrein vormen voor wiskundigen, zowel numerici als analytici. We berekenen inmiddels allerlei stromingen met de Navier-Stokes-vergelijkingen, luchtstromingen om vliegtuigontwerpen bijvoorbeeld. Vliegtuigen waar we dan vervolgens gewoon instappen als ze gebouwd zijn, ofschoon we niet zeker weten of de bij het ontwerpen van die vliegtuigen met de Navier-Stokes-vergelijkingen berekende luchtstromingen wel echt betrouwbaar zijn.

Als u nog een mooie geldprijs en eeuwige roem wilt verdienen: Het Clay Mathematics Institute in Amerika heeft in het jaar 2000 zeven prijzen van elk een miljoen dollar uitgelooft voor oplossing van een zevental openstaande wiskundeproblemen. Een van de zeven, het vermoeden van Poincaré, is inmiddels opgelost. Een van de zes nog openstaande problemen betreft het leveren van een bewijs voor het bestaan en betrouwbaar zijn van oplossingen van de Navier-Stokes-vergelijkingen [10]. Stromingsleer is nog steeds een goudmijn voor wiskundigen.

3.1.2. *Numerieke weersvoorspelling*. Een alledaagse toepassing van de Navier-Stokes-vergelijkingen is weersvoorspelling. Voor de Tweede Wereldoorlog was weersvoorspelling meer een kunst dan een kunde. Elke dag werden weersgegevens van verschillende plaatsen verzameld. Deze gegevens werden op land- en zeekaarten uitgezet, waarna er lijnen van constante druk en temperatuur op deze kaarten werden geschetst. Door vergelijking met oude druk- en temperatuurverdelingen en bijbehorende, bekende weersverlopen werd vervolgens door een weerkundige een weersvoorspelling gedaan. De persoonlijke deskundigheid van deze meteoroloog drukte een zwaar subjectief stempel op de weersvoorspelling. Wat wiskunde betreft werd slechts gebruik gemaakt van elementaire statistiek en wat eenvoudige interpolatie- en extrapolatiemethoden.

In een poging om tot een meer wetenschappelijk gefundeerde weersvoorspelling te komen had de Noor Vilhelm Bjerknes aan het begin van de 20^e eeuw het idee geopperd om het weer

te voorspellen op basis van de Navier-Stokes-vergelijkingen, waar nodig aangevuld met andere vergelijkingen [11]. Voor een weersvoorspelling wil je verdelingen weten in ruimte en tijd – de toekomst uiteraard – van onder andere luchtdruk, luchttemperatuur en windsnelheid. Deze verdelingen zitten diep in de Navier-Stokes-vergelijkingen verpakt; ze zijn er niet gemakkelijk uit op te lossen. Exacte oplossing van de Navier-Stokes-vergelijkingen is vandaag de dag nog steeds onmogelijk. Bjerknes kwam niet verder dan zijn idee, wel een belangrijk idee.

Het niet exact, maar bij benadering oplossen van de Navier-Stokes-vergelijkingen gaat wel. In het geval van weersvoorspelling gaat dat bijvoorbeeld als volgt: De atmosfeer om de gehele aarde verdelen we in denkbeeldige, netjes tegen elkaar aan liggende, open, driedimensionale raamwerkjes: cellen.⁹ De verzameling cellen zit aan de aarde vastgeplakt; bij wind beweegt de atmosfeer door de open cellen heen. Voor het gemak nemen we nu aan dat op elk tijdstip de druk een constante waarde heeft per cel. Per cel kan de waarde van de druk anders zijn. Hetzelfde geldt voor temperatuur en windsnelheid. Deze celsgewijs constante aanpak is een voorbeeld van een numeriek-wiskundige benadering. De benadering kan in principe willekeurig nauwkeurig worden gemaakt door met kleinere cellen te werken; met meer cellen. Echter, hoe meer cellen, hoe meer rekenwerk en dus rekentijd. We willen geen ‘weersnaspelling’.

Op basis van meetgegevens van het weer over de gehele aarde op een bepaald tijdstip kunnen we een beginoplossing voor onze numerieke weersvoorspelling definiëren: in elke cel de daar ter plaatse *gemeten* waarden van druk, temperatuur en windsnelheid. Voor cellen waar meetgegevens ontbreken, moet de beginoplossing door interpolatie of extrapolatie vanuit de meetgegevens worden aangemaakt.

Het rekenwerk kan nu beginnen. Met behulp van de Navier-Stokes-vergelijkingen en een geschikte numerieke methode kan nu eerst worden berekend hoeveel er op het begintijdstip per tijdseenheid elke cel in- of uitstroomt in termen van massa,

impuls en energie. Met een numerieke tijdstapmethode kunnen vervolgens worden berekend: de druk, temperatuur en windsnelheid in alle cellen, op een tijdstip kort na het begintijdstip. Op dit nieuwe tijdstip aangekomen kunnen we weer opnieuw voor alle cellen het netto transport per tijdseenheid van massa, impuls en energie uitrekenen, en vervolgens weer een tijdstap maken, enzovoort.

We hebben hier in grote lijnen al een numeriek algoritme te pakken. We zagen: hoe fijner het netwerk van cellen, het rooster noemen we dat, hoe nauwkeuriger de ruimtelijke weergave van het weer. Hetzelfde geldt voor het verloop van het weer in de tijd; hoe kleiner de stap vooruit in de tijd, hoe nauwkeuriger de voorspellingen, maar ook hier: hoe meer rekenwerk tot we bij de gewenste eindtijd zijn. De hoeveelheid rekenwerk voor betrouwbare weersvoorspelling over een redelijk lange termijn is gigantisch.¹⁰

De Britse meteoroloog Lewis Fry Richardson was de eerste die aan echte numerieke weersvoorspelling ging doen [12]. Richardson deed een poging om het reeds voorbijgevoerde van 20 mei 1910 over een tijdsduur van 6 uur te ‘voorspellen’. Hij koos die dag omdat het een internationale ballonvaartdag was geweest, een dag waarvoor veel weersgegevens voor zijn beginoplossing beschikbaar waren. Richardsons numerieke weersvoorspelling werd een grote teleurstelling, in twee opzichten. De voorspelling was helemaal fout en kostte bovendien veel te veel tijd: zes weken hard rekenen voor zes uur ‘weersnaspelling’. Alle rekenwerk was nog met de hand gedaan, in teamverband, dat wel. Bjerknes’ idee van numerieke weersvoorspelling ging weer de mottenballen in, tot de Tweede Wereldoorlog.

Een goede weersvoorspelling is van groot militair-strategisch belang.¹¹ In 1942, in Amerika, pakte de wiskundige John von Neumann de handschoen van numerieke weersvoorspelling weer op. Voor numerieke berekeningen waarin heel veel keer dezelfde soort sommen worden herhaald is stabiliteit, het niet buitensporig groeien van kleine foutjes, afrondfoutjes bijvoor-

beeld, van cruciaal belang. Von Neumann bedacht een goede methode voor het analyseren van de stabiliteit van numerieke methoden. De eerder door Richardson gebruikte numerieke methode voor weersvoorspelling blijkt instabiel te zijn volgens Von Neumanns stabiliteitsanalyse, vandaar mogelijk ook het fout zijn van Richardsons resultaten. Von Neumann ging verder. Hij zag de ontwikkeling van een automatische, elektronische, digitale rekenmachine met interne programmaopslag, als de manier om onder de te lange rekentijden uit te komen. Hij stortte zich ook op de ontwikkeling van zo'n machine, in al zijn facetten: van abstracte computerarchitectuur tot concrete invoer- en uitvoerapparatuur, en van algemene richtlijnen voor programmeren tot details over getallenrepresentatie. Von Neumann had veel succes met al dit werk.¹² Numerieke weersvoorspelling is de manier van het weer voorspellen van vandaag de dag.

3.2. Numerieke wiskunde nu en in de toekomst

Met het werk van Von Neumann kwam numerieke wiskunde tot grote groei en bloei.¹³ Allerlei elegante en krachtige numerieke algoritmen werden en worden nog steeds ontwikkeld. Numerieke wiskunde is een breed vakgebied geworden met allerlei specialismen daarbinnen.¹⁴ Het weer is slechts een van de vele gevallen waarin we tegenwoordig met behulp van numerieke wiskunde en computers gedetailleerde simulaties kunnen doen. De simulaties kunnen hun oorsprong hebben in allerlei vakgebieden, in de ingenieurswetenschappen, natuurkunde, scheikunde, sterrenkunde, biologie, medische wetenschappen, economie, noem maar op. Veel vakgebieden hebben vandaag de dag hun computersimulatieversie. We hebben tegenwoordig computational physics, computational chemistry, computational biology, computational finance, enzovoort. Computersimulatie is van groot belang voor de samenleving van vandaag en morgen. Het maakt de voorspelling mogelijk van veel van wat niet met echte experimenten kan worden onderzocht. Experimenten kunnen te gevaarlijk, te duur, onethisch of gewoonweg technisch onmogelijk zijn. Bovendien, in tegenstelling tot echte experimenten, maken computers ook ontwerp en

optimalisatie mogelijk: invers rekenen. Gegeven de nog steeds bestaande groei in computersnelheden en -geheugens zijn de verwachtingen over de toekomst van computersimulatie nog steeds hooggestemd.

Alhoewel computersimulatie zich over veel vakgebieden heeft verspreid, moet het als een zelfstandig vak worden beschouwd, vanwege de specifieke deskundigheid die het vereist.¹⁵ Numerieke wiskunde vormt het hart van computersimulatie. Een uitdaging is om ervoor te zorgen dat numerieke algoritmen in staat zijn om optimaal te profiteren van de computers van vandaag en morgen. Met het toenemende realisme in computersimulatie, zijn robuustheid en efficiëntie twee steeds belangrijker wordende numeriek-wiskundige eigenschappen. Het is niet gewenst om als een babysit op een computersimulatie te moeten passen vanwege het gebruik van een niet-robust numeriek algoritme. En het is ook niet de bedoeling om een snelle computer voor lange tijd te vullen met een niet-efficiënt numeriek algoritme.

7

Bij het CWI ontwikkelen we nieuwe numerieke algoritmen, speciaal toegeneden op allerlei concrete toepassingen. Fundamenteel onderzoek in directe samenwerking met de praktijk, een spagaat die bij het CWI goed uitvoerbaar is. CWI-collega's Kees Oosterlee, Jason Frank en Willem Hundsdorfer zijn ook numeriek wiskundigen, elk met hun eigen specialismen. Dat helpt.¹⁶

4. Een Numerieke Wiskunde-toepassing

Eén toepassing van numerieke wiskunde waar ik me momenteel mee bezig houd betreft de simulatie van alternatieve energiebronnen.¹⁷

4.1. Alternatieve energiebronnen

De mate van energiegebruik is evenredig met levensstandaard, en deze neemt wereldwijd toe. Bovendien neemt de wereldbevolking toe. De grootte van de wereldbevolking heeft

eeuwen lang ongeveer 1 miljard mensen bedragen. Mede door het grootschalige gebruik van fossiele brandstoffen heeft de wereldbevolking in de afgelopen twee eeuwen kunnen toenemen van 1 naar 7 miljard mensen, een gemiddelde, nu nog bestaande netto groeisnelheid van ongeveer 1 wereldburger per seconde.

Als energiebron gebruiken we nog steeds vooral fossiele brandstoffen: aardolie, aardgas en steenkool. Volgens energiespecialist prof. Jeffrey Freidberg van MIT hebben we bij het huidige gebruik nog maar voor 20 jaar aardolie, als we aardolie als enige energiebron zouden gebruiken [14]. Ook nog slechts voor 20 jaar aardgas. Steenkool hebben we gelukkig nog voor 200 jaar bij denkbeeldig gebruik als enige energiebron. Vraag is echter of het verstandig is om nog zo lang fossiele brandstoffen te gebruiken. Als we over 200 jaar of eerder geen alternatieven hebben kunnen we hopelijk nog overstappen op paard-en-wagen, zeilboot en kaarslicht, maar het valt te betwijfelen dat dat zonder slag of stoot zal gaan.

Bij onderzoek aan alternatieve energiebronnen is de strategie van overheden om meerdere mogelijke bronnen te onderzoeken, een mix dus: zon, wind, nucleair, enzovoort. Het fijne van wiskunde in dit verband is dat het algemeen inzetbaar is. Wiskunde sluit goed aan bij de strategie van een energiemix.

Van de vijf promovendi die ik op dit moment begeleid zijn er drie bezig met numeriek-wiskundig onderzoek gericht op alternatieve energiebronnen: Willem Haverkort en Bram van Es gecontroleerde kernfusie en Benjamin Sanderse windenergie, alles in volle harmonie.

4.2. Numerieke tokamak-plasmafysica

Het numerieke CWI-onderzoek aan gecontroleerde kernfusie wordt gedaan in het kader van een landelijk project voor 17 promovendi, gecoördineerd door het FOM-Instituut voor Plasmafysica, FOM-Rijnhuizen. Al het onderzoek in dit project is gericht op de in Frankrijk in aanbouw zijnde proefreactor ITER. ITER,

Latijn voor tocht of weg, zal – als het goed gaat – 10 keer meer energie opbrengen dan er in gaat; 50 MW erin, 500 eruit. Naast Europa doen aan ITER onder andere ook mee: China, Japan, Rusland en de Verenigde Staten. Het is een van de grootste wetenschappelijke samenwerkingen ooit. De uitdagingen van ITER, technisch, natuurkundig, en ook wiskundig, zijn zeer groot.

4.2.1. *Gecontroleerde kernfusie*. Kernfusie, het vuur dat de mens nog niet beheerst, is de grote belofte van de energieopwekking. Zodra gecontroleerde kernfusie werkt is het energievraagstuk mogelijk voorgoed opgelost, qua brandstofvoorraad, duurzaamheid, veiligheid, enzovoort.

Het idee van energieopwekking door kernfusie en kernsplijting dateert van 1939. De eerste energieopwekking door gecontroleerde kernsplijting was er al in 1942. Energieopwekking door gecontroleerde kernfusie is er echter nog steeds niet. Het duurt zo lang omdat het zo moeilijk is. Maar er is in de loop der jaren al heel veel vooruitgang geboekt.

Kernfusie is de energiebron van de sterren, van onze zon. De energiebron van de zon is lang onbekend geweest. Het raadsel is pas in de jaren '20 van de vorige eeuw opgelost.¹⁸ De uitdaging bij gecontroleerde kernfusie is om de energiebron van de zon op aarde na te bootsen. Technisch is dat tot nu toe niet realistisch. De kernfusie zoals die in de zon, diep in het inwendige daarvan, optreedt – de proton-proton-reactie – wordt geholpen door de letterlijk astronomisch hoge dichtheid die daar heerst, ten gevolge van de enorme zwaartekracht van de zon. Op aarde moeten we het hebben van de relatief gemakkelijkere deuterium-tritium-reactie. Die gaat als volgt.

Men neme één deuterium-atoomkern en één tritium-atoomkern. Beide hebben dezelfde positieve lading. Men laat vervolgens beide atoomkernen met hoge snelheid frontaal op elkaar afvliegen om ze te laten botsen en fuseren. De hoge snelheid is nodig omdat de positieve lading van beide kernen ervoor zorgt dat ze elkaar afstoten. Op zeer kleine afstand komen er echter

aantrekkende krachten in het spel die veel sterker zijn dan de afstotende Coulomb-krachten, de kernkrachten. Schieten we beide kernen met voldoende snelheid op elkaar af, dan overwinnen we de Coulomb-barrière, komen in het bereik van de sterk aantrekkende kernkrachten en krijgen we kernfusie. De massa van de gefuseerde deeltjes is iets kleiner dan die van de som van de oorspronkelijke, nog niet-gefuseerde deeltjes. De iets kleinere massa is het atomaire analogon van het verschijnsel dat twee mensen die samenwonen minder spullen hebben dan wanneer ze apart wonen. Het verlies van massa is energie die vrijkomt, volgens $E = mc^2$. De vrijkomende energie gaat vooral in een neutron zitten, dat uit de gefuseerde deuterium- en tritiumkern wegvliegt, en ook in de nieuwe atoomkern, die van helium.

Gecontroleerde deuterium-tritium-fusie kan gerealiseerd worden door een mengsel van heel veel deuterium- en tritiumkernen te maken, met losse elektronen daar ook in. Zo'n soep van geladen deeltjes noemen we een plasma. Plasma is de vierde toestand waarin materie kan verkeren, naast de drie bekende toestanden: vast, vloeibaar en gasvormig. Neongas in een brandende TL-buis is in de plasmatoestand, lucht in een bliksemschicht ook. CWI-collega Ute Ebert is specialiste op het gebied van dit soort plasma's.

De temperaturen in deze laatste plasma's zijn naar menselijke maatstaven gemeten hoog, maar voor kernfusie zijn ze nog veel te laag. Kernfusie in een plasma van deuterium en tritium krijgen we als we de temperatuur en dichtheid van het plasma zeer hoog maken. De temperatuur moet zo'n 150 miljoen graden Celsius zijn. Hoge temperatuur betekent immers hoge snelheden van de atoomkernen. En hogere dichtheid betekent grotere kans op frontale botsingen en dus fusie. Als het kernfusieproces in het plasma eenmaal loopt kan het zichzelf aan de gang houden, als we maar voldoende deuterium en tritium toevoeren.

Deuterium kan gemakkelijk uit water worden gewonnen. Tritium kan gemaakt worden, uit lithium, dat in gesteente zit. Water en gesteente hebben we in overvloed op aarde. De ener-

gieopbrengst uit beide stoffen is bovendien enorm; uit slechts twee liter water en een half pondje steen kan met kernfusie evenveel energie worden gewonnen als uit verbranding van 1000 liter aardolie.

Het hete deuterium-tritium-plasma heeft een sterke neiging om uit te dijen en af te koelen. Dat willen we niet; we willen geen verlaging van dichtheid en temperatuur; de zelflopende kernfusie zou daardoor stil kunnen vallen. Het hete plasma moet dus goed opgesloten blijven. Een probleem hierbij is dat opsluiten niet in materialen kan. Het plasma is daarvoor veel te heet. Een slim idee is om het plasma op te sluiten in een magneetveld, in een magnetische kooi als het ware. Dat kan in principe heel goed; het plasma bestaat immers uit elektrisch geladen deeltjes en geladen deeltjes bewegen zich langs magneetveldlijnen, als gordijnrollers langs gordijnrails. Door de magneetveldlijnen gesloten te nemen en de magneetveldsterkte voldoende groot, kunnen we het plasma opsluiten, niet helemaal echter en dat moet ook niet.

De energie die vrij is gekomen bij de kernfusie zit dus vooral in het neutron, dat er is afgevlogen. Het neutron kan niet worden opgesloten in het magneetveld. Het is immers ongeladen. Het neutron vliegt uit het magneetveld, uit het plasma, en raakt daarbuiten zijn energie kwijt, als te benutten warmte. De heliumkern geeft zijn energie zo veel mogelijk aan het plasma af en wordt daarna afgevoerd als verbrandingsproduct.

4.2.2. Tokamak-plasmafysica. Om de deuterium-tritium-fusie aan de gang te houden moet het warmtetransport vanuit het plasma naar buiten toe beperkt worden gehouden. De hiertoe optimale vorm van het plasma is de bolvorm; de vorm met de kleinste verhouding van buitenoppervlak en volume. Opsluiting van het plasma in een bolvormig magneetveld is echter helaas niet mogelijk, omdat een bolvormig magneetveld niet mogelijk is. Op grond van de harige-balstelling uit de meetkunde weten we dat een bolvormig magneetveld met gesloten veldlijnen tenminste één punt heeft waar magneetveldlijnen

van verschillende sterkte elkaar snijden, en dat is onmogelijk. Een vorm waarbij we bij wijze van spreken haren op de buitenkant van deze vorm wel rondom kunnen kammen zonder dat er een kruin ontstaat, is de torus, de vorm van de zwamband, de vorm ook van het aërodynamische verschijnsel ringwervel (zie foto op achterkant omslag). Ringwervels zijn zeer stabiele, zelforganiserende wervels.

Het deuterium-tritium-plasma kan dus wel worden opgesloten in een torusvormig magneetveld, een Russische uitvinding. Er bestaan wat variaties op. Het meest veelbelovende toroïdale opsluitsysteem draagt de naam tokamak, een acroniem van het Russische *toroïdalnaja kamera, magnitnaja katoesjka*, wat toroïdale kamer, gemagnetiseerd door spoelen betekent.¹⁹ De kamer is een hol, toroïdaal vat waarin het magneetveld komt, met daarin het plasma. Het magneetveld wordt opgebouwd met onder andere elektrische spoelen rondom het vat, de katoesjka.²⁰ Het magneetveld moet zodanig zijn dat het plasma stabiel in het vat komt te zweven, zonder de wand van het vat te raken. Het vat zou immers ernstig kunnen beschadigen bij contact met het extreem hete plasma.²¹

Tussen ringwervels en het plasma in een tokamak bestaat een mooie wiskundige analogie. Beide laten zich, in een sterk vereenvoudigd model, door precies dezelfde partiële differentiaalvergelijking beschrijven.²² De analogie strekt zich helaas niet uit tot de stabiliteitseigenschappen. Zo stabiel van vorm als de ringwervel is, zo instabiel is het tokamakplasma. Het tokamakplasma wil op velerlei manieren van vorm veranderen. Een moeilijkheid is dat de vorm van het magneetveld van een tokamak slechts gedeeltelijk wordt opgewekt door de elektrische spoelen. Het wordt ook ten dele gevormd door elektrische stromen in het plasma zelf, een directe wisselwerking dus tussen magneetveld en plasma. Deze wisselwerking kan wispelturig zijn. In filmopnamen, gemaakt in de Joint European Tokamak (JET) bij Oxford, heb ik gezien hoe een stationair plasma plotseling begon te trillen, steeds woester ging trillen en uiteindelijk tegen de binnenwand van het vat sloeg. Einde oefening, alles binnen

een fractie van een seconde. Hoe groter het tokamakplasma, hoe meer instabiliteiten. Dat is jammer, want grotere tokamaks zijn nu juist interessant vanwege hun kleinere verhouding van buitenoppervlak en volume. ITER is om deze reden veel groter dan zijn voorgangers. Voor de stabiliteit van het ITER-plasma belooft dat dus niet veel goeds. Voor onderzoekers, waaronder wiskundigen, echter wel: werk aan de winkel.

Een ander probleem van tokamakplasma's, maar ook werkgelegenheid voor onderzoekers, is turbulentie. Turbulentie, het wanordelijk door elkaar heen bewegen van wervels in stromingen, is fijn bij bijvoorbeeld het roeren van melk door koffie. U maakt met een lepel tje één korte beweging in uw kopje waardoor er één of twee grote wervels in de koffie ontstaan. De grote wervels vervallen snel in vele, steeds kleinere en steeds chaotischer bewegende wervels. De vele kleine wervels zorgen voor een prima menging van de melk door uw koffie; turbulentie als nuttig proces. In tokamaks treedt ook turbulentie op, ook daar met een verval van grote in kleine wervels en bijbehorende menging. In tokamaks is menging echter ongewenst; het hete plasma, waarin de kernfusie optreedt, mag niet te veel mengen met koeler plasma; de kernfusie zou daardoor immers kunnen stilvallen.

4.2.3. Numerieke simulatie. Het gedrag van een tokamakplasma kan in detail worden voorspeld met de Navier-Stokes-vergelijkingen, aangevuld met de Maxwell-vergelijkingen.²³ De Maxwellvergelijkingen zijn ook partiële differentiaalvergelijkingen. Ook de verzameling van Navier-Stokes- plus Maxwell-vergelijkingen is niet exact op te lossen. Net als bij het voorbeeld van weersvoorspelling moet dit numeriek. Numerieke simulatie van het tokamakplasma gaat op dezelfde wijze als numerieke weersvoorspelling; met opdeling van het tokamakplasma in heel veel cellen, met netto transportberekeningen voor alle individuele cellen en met numerieke tijdstappen. Heel belangrijk bij het ontwikkelen van nieuwe numerieke methoden voor de Navier-Stokes- plus Maxwell-vergelijkingen is om zo goed mogelijk rekening te houden met hun specifieke eigenschappen, eigenschappen als het rijke golfkarakter en de

veelschaligheid. Als een van de numerieke uitdagingen bij dit onderzoek zie ik het verkrijgen van zo veel mogelijk relevante plasma-informatie uit zo weinig mogelijk cellen. Andere numeriek-wiskundige uitdagingen zijn bijvoorbeeld automatische roosteraanpassing en zeer nauwkeurige tijdstapmethoden. Het CWI is een uitstekende plaats voor het uitvoeren van dit numeriek-wiskundige onderzoek. De bestaande samenwerking met FOM-Rijnhuizen, met onder andere dr. Hugo de Blank [17,18] en prof. Hans Goedbloed, is hierbij zeer vruchtbaar. Voor analytici is ook veel te doen aan tokamakplasma's. Afgelopen zomer was ik gasthoogleraar aan de Universiteit Nice Sophia Antipolis. Er was daar een zomerschool georganiseerd op het gebied van wiskunde voor tokamakplasma's. Gasthoogleraar was daar ook Cédric Villani, die er college gaf over zijn analytische onderzoek aan tokamakplasma's²⁴, onderzoek waarvoor hij dit jaar een Fields medaille heeft gewonnen, een wiskundeprijs die vergelijkbaar is met een gouden Olympische medaille. Algemeen geldt dat analytisch onderzoek een broodnodige kwalitatieve aanvulling vormt op het kwantitatieve onderzoek dat numeriek onderzoek is.

Bij het CWI zijn momenteel Willem Haverkort en Bram van Es als promovendi aan de slag met stabiliteitsonderzoek aan tokamakplasma's, numeriek en analytisch. Er zal hierbij ook naar regeling van de stabiliteit van het plasma worden gekeken. Bij succes kan de regeling misschien wel in het echt worden gedaan, bij ITER.

Prof. Niek Lopes Cardozo, Nederlands kernfusiedeskundige, ziet onderzoek aan gecontroleerde kernfusie als het beklimmen van een berg, waarbij de top zal worden bereikt, niet door de klimmers van vandaag, maar door die van morgen. Ik denk dat het dankzij wiskunde best wel eens de huidige klimmers zouden kunnen zijn.

4.3. Numerieke windpark-aërodynamica

Mocht gecontroleerde kernfusie echt niet blijken te kunnen, dan is er voor Nederland altijd nog de mogelijkheid van

windenergie. Een windpark op de Noordzee, van 40 bij 40 km, optimaal volgeplant met grote windturbines, is voldoende groot om in de gehele Nederlandse energiebehoefte te voorzien, zo heb ik mij laten vertellen. Een geruststellende gedachte, niet waar?

Mijn promovendus Benjamin Sanderse is momenteel bij het CWI en het ECN een proefschrift aan het voorbereiden over de numerieke simulatie van windpark-aërodynamica, ook een toepassing met grote numeriek-wiskundige uitdagingen [19]. Nauwkeurige en efficiënte numerieke simulatie van turbulentie is hier een belangrijk onderwerp. Turbulentie is een berucht moeilijk onderwerp. Als variatie op wat Leidse ere-doctor Sir Winston Churchill ooit over een bepaalde politieke stroming heeft gezegd, heeft iemand eens over turbulentie gezegd: 'Als je als onderzoeker in de stromingsleer voor je 30^e niet aan turbulentie hebt gewerkt, dan heb je geen hart. Als je na je 30^e echter nog aan turbulentie werkt, dan heb je geen verstand'. Benjamin is nog geen 30. En veel senioronderzoekers *voelen* zich nog geen 30. Onderzoek houdt je jong, onderwijs ook.

Ik zou u graag nog meer vertellen. De tijd ontbreekt mij helaas. En u wilt wellicht even de benen strekken en iets drinken.

5. Dankwoord

Geachte leden van het College van Bestuur, medewerkers van het Mathematisch Instituut, en alle anderen van de Universiteit Leiden die mijn benoeming mogelijk hebben gemaakt; ik dank u voor het in mij gestelde vertrouwen.

Hooggeleerde Piet Hemker, hooggeleerde Piet Wesseling; dank wederom voor de van jullie ontvangen scholing.

Collega's van het CWI, werkzaam in onderzoek of ondersteuning; dank voor de uitstekende samenwerking en aangename werksfeer.

Beste collega's van de TU Delft; dank voor jullie aanwezigheid,
we blijven samenwerken.

Meer nog dan m'n werk betekenen voor mij: Wijnie, onze
kinderen en m'n moeder. Dat houden we zo!

Dank aan u allen voor uw aandacht.

Ik heb gezegd.

Noten

- 1 Over meetkunde (*Problemata Geometrica*), logica (*Dialectike of Bewysconst*), getallenrepresentatie (*De Thiende*), algebra (*l'Arithmétique*), en ook nog over mechanica, vooral statica (*De Beghinselen der Weeghconst, De Weeghdaet* en *De Beghinselen des Waterwichts*). Stevins belangrijke publicaties zijn in de vorige eeuw met verklarende tekst heruitgegeven [1].
- 2 Samen met Jan Cornets de Groot, burgemeester van Delft en vader van Hugo.
- 3 Bovendien was de Nederlandse taal volgens Stevin bij uitstek voor wetenschap geschikt vanwege haar compactheid. Volgens Stevin was het doel van een taal om *'te verklaren t'inhoudt des gedachts'* en wel bij voorkeur door *'ynckel saken met ynckel gheluyden te beteekenen'*. Waar nodig voerde Stevin nieuwe Nederlandse woorden in. Behalve wiskunde (*wisconst*) waren dit bijvoorbeeld ook meetkunde, evenredig, evenwijdig en omtrek. Had Stevin in het Latijn gepubliceerd, dan zou zijn positie in internationale wetenschappelijke kringen wellicht sterker zijn geweest, maar die in de internationaal steeds machtiger wordende Hollandse politieke kringen minder sterk. Dit heeft hij denk ik bewust afgewogen.
- 4 De oprichtingsakte leert daarover het volgende: *'De lessen van tellinge ende meting op papier sullen een halff uyre lang gedaan worden int gemeen, d'ander halff uyre sal volbrocht worden met elcken int bysonder te beantwoerden ende onderwysen vant gene sy vragen ende uyte gemeene lessen nyet verstaen en hebben'*. Het idee van hoor- en werkcolleges eigenlijk. Dat het oorlog was blijkt uit het volgende deel, dat mogelijk door Maurits is ingebracht: *'Men verstaet oeck dat alle die geene, die tottet leeren deser const van ingenieurscap toegelaten worden, eerst sullen beloven ende zweeren aen den viandt deser landen daermede geenen dienst te doen'*.
- 5 Ludolph van Ceulen en Simon Franz van der Merwe werden docent aan de Ingenieursschool. Beiden overleden echter al in 1610. Zie [2] voor een beknopte beschrijving van beide docenten en hun werk. Van Ceulen, die vrij veel naam heeft gemaakt – hij had ook een schermles in Leiden; schermles hoorde bij een goede opvoeding – wordt uitgebreid herdacht in bijvoorbeeld [3]. In de opvolging van Van Ceulen en Van der Merwe kon goed worden voorzien. Stevin hoefde niet bij te springen.
- 6 Een commissie van notabelen en geleerden vond het gevaarlijk; de mooie, bestaande structuur van ingenieurscholen binnen de universiteiten – Leiden was inmiddels niet meer de enige – zou uit elkaar worden getrokken en verloren gaan. Een commissie uit de pas opgerichte Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen vond het te duur. Een derde commissie, het Centraal Comité voor de Waterstaat, vond het te elitair, te on-Hollands [4].
- 7 De Euler-biografie van Fellmann [7], recent in het Engels vertaald ter gelegenheid van Eulers 300^e geboortedag, laat dit laatste mooi zien.
- 8 Statutair was geregeld dat het presidentschap door een edelman moest worden vervuld.
- 9 Bijvoorbeeld 1000 cellen in lengterichting, helemaal rondom de aarde; 500 in breedterichting, van pool tot pool; en 100 in hoogterichting, vanaf het aardoppervlak tot ergens hoog in de atmosfeer, totaal in dit voorbeeld dus 50 miljoen cellen.
- 10 Elke cel is gekoppeld aan buurcellen. De consequentie is dat we een gekoppeld stelsel vergelijkingen krijgen, in bovenstaand getallenvoorbeeld: 50 miljoen gekoppelde vergelijkingen, niet-lineaire vergelijkingen bovendien. De Navier-Stokes-vergelijkingen zijn immers niet-lineair.

- 11 Toen de Verenigde Staten in de Tweede Wereldoorlog werden betrokken besloot men daar tot opleiding van maar liefst 5000 extra weerambtenaren.
- 12 Voor het numerieke weersvoorspellingsproject richtte hij een onderzoeksgroep op, op het Princeton Institute of Advanced Studies. Een gedetailleerd overzicht van Von Neumanns werk aan numerieke weersvoorspelling, aan numerieke wiskunde en informatica in het algemeen, is te vinden in [13].
- 13 Er kwam financiering voor onderwijs en onderzoek in de numerieke wiskunde. Wiskundig talent voelde zich steeds meer aangetrokken tot het vak.
- 14 Vanuit het CWI opereert de Werkgemeenschap Scientific Computing, een vakgenootschap voor alle numerici in Nederland, Vlaanderen en enkele verre buitenposten. Jaarlijks, al 35 jaar lang, organiseert de Werkgemeenschap, in Woudschoten, een driedaagse conferentie rond een tweetal numerieke wiskundethema's. Op het programma van de eerste Woudschoten-conferentie stonden als algemene thema's: Approximatie en Discretisatie. De recente Woudschoten-conferentiethema's hebben meer barokke titels.
- 15 De vereiste leercurve is lang en het vakgebied ontwikkelt zich bovendien snel, een ontwikkeling die moeilijk is bij te houden door terloopse gebruikers.
- 16 Het CWI heeft zich internationaal een sterke positie in de numerieke wiskunde weten te verwerven. Het heeft een grote reputatie op het gebied van tijdsintegratiemethoden, door het werk van met name Piet van der Houwen, Jan Verwer, Willem Hundsdorfer en Jason Frank, en ook door de goede contacten met prof. Marc Spijker hier in Leiden. Ook op het gebied van multiroostermethoden en adaptieve roostermethoden, het werk van onder andere Piet Hemker en Kees Oosterlee, telt het CWI internationaal mee.
- Bij het CWI zijn de numerici, samen met analytici en anderen, verenigd in de onderzoeksafdeling Modelling, Analysis and Computing, een afdeling van ruim 40 onderzoekers. Ik ben momenteel leider van deze afdeling.
- 17 Bij het CWI worden diverse promotieonderzoeken uitgevoerd in directe samenwerking met partners in de energie-sector: met bedrijven als KEMA, Philips, Asea Brown Boveri, Nuon en Essent; met toegepaste onderzoeksinstituten als ECN, NRG en ook CPB; en met het fundamentele FOM-Instituut voor Plasmafysica (FOM-Rijnhuizen). De energieprojecten op het CWI betreffen zowel energieconversie (opwekking), energiedistributie, als energietransitie (van aardgas naar zon en wind bijvoorbeeld). Niet alleen natuurkunde en techniek, maar ook logistiek en economie.
- 18 Door de latere Nobelprijswinnaar Francis Aston. Door zeer nauwkeurige experimenten ontdekte hij dat waterstofatomen in verhouding iets zwaarder zijn dan atomen van zwaardere elementen. De Engelse astrofysicus Edmund Eddington zag de betekenis hiervan in en poneerde dat kernfusie de energiebron van de zon is. Weer anderen bewezen de juistheid hiervan.
- 19 Aanvankelijk was het acroniem tokamag, van toroidalnaja kamera, magnitnaja. Men vond dat echter te magisch klinken en heeft toen katoesjka aan de naam toegevoegd.
- 20 De spoelen worden op een temperatuur van -250°C gehouden, supergeleidend. Het plasma niet ver daar vandaan heeft een temperatuur van 150 miljoen graden Celsius, extreme technologie dus.
- 21 Voor een gedegen wetenschappelijke beschrijving van tokamak-plasmafysica, zie [14]. Een populair wetenschappelijke, vanuit Nederlands perspectief samengestelde beschrijving is te vinden in het jubileumboek [15]. Een

fraai boekwerkje over de fascinerende wereld van plasma's in het algemeen is [16].

- 22 Beide met een equivalente oplossing: Hill's werveloplossing en Solovév's plasmaoplossing.
- 23 Het gezamenlijke stelsel van Navier-Stokes- en Maxwell-vergelijkingen beschrijft de magnetohydrodynamica (MHD), zoals dat heet, van het plasma. Specifiek voor tokamakplasma's, en ook de MHD-vergelijkingen, is het optreden van vele verschillende golven die door het inwendige van het plasma kunnen lopen, en ook het optreden van vele verschillende schalen in ruimte en tijd.
- 24 Aan Landau-demping voor de Vlasov-vergelijking, een partiële differentiaalvergelijking die een belangrijke rol speelt in tokamakplasma-studies.

Referenties

- [1] E. Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes, M.G.J. Minnaert and A. Pannekoek, *The Principal Works of Simon Stevin*, I-V, Swets and Zeitlinger, Amsterdam (1955-1966).
- [2] G. van Dijk, *Leidse Hoogleraren Wiskunde 1575-1975*, Universiteit Leiden (2011).
- [3] S. Wepster, Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/11, 63-69 (2010).
- [4] H. Baudet, *De Lange Weg naar de Technische Universiteit Delft, De Delftse Ingenieursschool en haar Voorgeschiedenis*, Staatsdrukkerij en Uitgeverij, Den Haag (1992).
- [5] B. Koren, Computational Fluid Dynamics: science and tool, *The Mathematical Intelligencer*, 28, 5-16 (2006).
- [6] L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 11, 274-315 (1755).
- [7] E.A. Fellmann, *Leonhard Euler*, Birkhäuser, Basel (2007).
- [8] C.L.M.H. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6, 389-440 (1822).
- [9] G.G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 287 (1845).
- [10] www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/.
- [11] V. Bjerknes, Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet von Standpunkte der Mechanik und der Physik, *Meteorologische Zeitschrift*, 21, 1-7 (1904).
- [12] L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, Cambridge (1922).
- [13] W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1990).
- [14] J.P. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [15] A. Vrouwe, *Hittebarrière*, FOM-Rijnhuizen, Nieuwegein (2009).
- [16] C. Suplee, *The Plasma Universe*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [17] J.W. Haverkort, H.J. de Blank and B. Koren, Low-frequency Alfvén gap modes in rotating tokamak plasmas, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53, 045005 (2011).
- [18] J.W. Haverkort, H.J. de Blank and B. Koren, The Brunt-Väisälä frequency of rotating tokamak plasmas, *Journal of Computational Physics* (to appear).
- [19] B. Sanderse, S.P. van der Pijl and B. Koren, Review of computational fluid dynamics for wind turbine wake aerodynamics, *Wind Energy* (to appear).