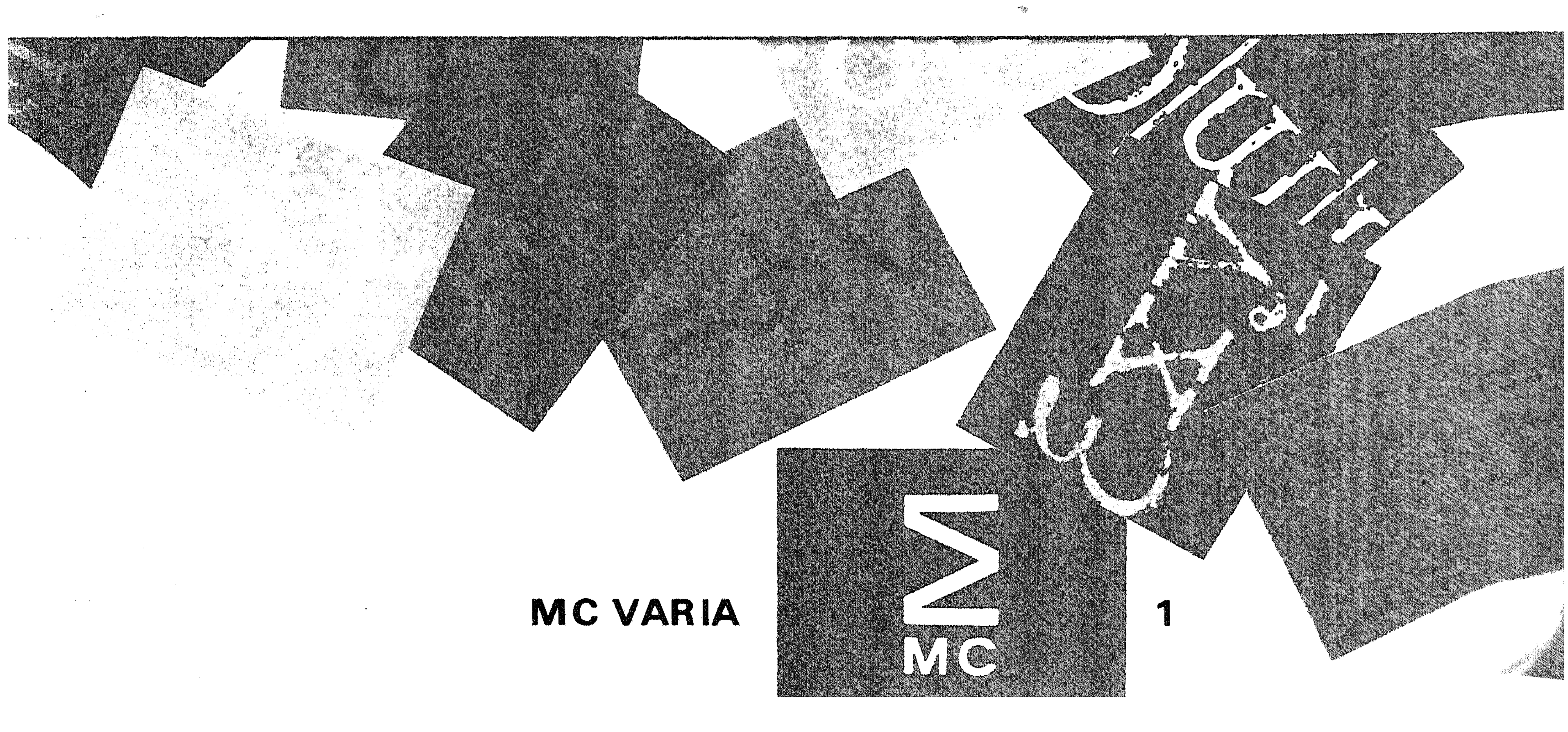
L. E. J. BROUWER
OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

D. VAN DALEN (red.)



MC VARIA 1

Printed at the Mathematical Centre, 413 Kruislaan, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

MC VARIA 1

D. VAN DALEN (red.)

L.E.J. BROUWER:
OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

aangevuld met
ONGEPUBLICEERDE FRAGMENTEN,
CORRESPONDENTIE MET D.J. KORTEWEG,
RECENSIES DOOR G. MANNOURY, ETC.
INLEIDING DOOR D. VAN DALEN

UITGEGEVEN TER GELEGENHEID VAN HET
HONDERDSTE GEBOORTEJAAR VAN L.E.J. BROUWER
ONDER AUSPICIEEN VAN HET
WISKUNDIG GENOOTSCHAP EN HET BROUWER-ARCHIEF

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1981

ISBN 90 6196 214 5

1980 Mathematics subject classification: Primary 01A60, 01A70
Secondary 00A25, 03A05, 03F55

INHOUD

INLEIDING

Tot het verschijnen van de *Collected Works* viel het oeuvre van Brouwer uiteen in een algemeen toegankelijk, maar nauwelijks gelezen deel en een veel geciteerd, maar vrijwel onvindbaar deel. Tot dat laatste deel behoren zijn dissertatie, *Leven, Kunst en Mystiek*, zijn *Academische redes* en wat kleinere artikelen. De meeste van deze geschriften, met uitzondering van *Leven, Kunst en Mystiek*, zijn in Engelse vertaling in de Collected Works verschenen; daardoor is weliswaar de toegankelijkheid in zekere zin vergroot, maar de Nederlandse versie blijft niettemin even schaars als voorheen. Er zijn twee krachtige argumenten voor de heruitgave van het oorspronkelijke proefschrift. Allereerst is Brouwer's dissertatie een van die zeldzame monumenten in de wiskundige literatuur die, onverschillig hoe ver de wiskunde inmiddels is voortgeschreden, het herlezen altijd waard blijven. In dit opzicht bevindt Brouwer's dissertatie zich in gezelschap van Riemann's *Habilitationsschrift*, Descartes' *Discours de la Méthode* en Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*. In de tweede plaats was Brouwer's taalgebruik zo specifiek, dat een Engelse vertaling zijn stijl nauwelijks laat gissen.

Voorts is de dissertatie van belang om Brouwer's latere intuïtionistische werk in het juiste perspectief te zien. Veel van wat hij in zijn beschouwende artikelen, zoals bijv. *Willen, Weten, Spreken* en *Die Struktur des Kontinuums*, neerschreef was in essentie al in de dissertatie uitgesproken. Voor een goed begrip van Brouwer's weg tot zijn intuïtionisme kan men de dissertatie niet missen.

De dissertatie zelf laat zich (thans) gemakkelijk lezen; ondanks de diversiteit der onderwerpen is toch een duidelijke eenheid in de conceptie te bespeuren.

De geschiedenis van de dissertatie is in grote lijnen traditioneel. Na het doctoraalexamen, 16 juni 1904, begon een periode van lezen en bestuderen van de literatuur, zowel op het gebied van de wiskunde als dat van de filosofie, gecombineerd met onderzoek en publicaties over de niet-Euclidische ruimten en integraalstellingen (zie Collected Works II). Op 7 september 1906 sloot Brouwer de voorbereidende periode af en op

19 februari 1907 verdedigde hij zijn dissertatie. Het verloop van het proces tussen september 1906 en februari 1907 is tamelijk goed gedocumenteerd, doordat in de nalatenschap van Korteweg een deel van de correspondentie tussen promotor en promovendus bewaard bleef.

Alle relevante brieven (of ontwerpen van brieven van Korteweg - in Brouwer's nalatenschap bleek weinig materiaal aanwezig te zijn) zijn hier afgedrukt. De inhoud werpt een verrassend licht op beide correspondenten, zij logenstraft de populaire misvatting dat Korteweg eigenlijk weinig van het werk van zijn geniale leerling begreep en dat hij louter als boegbeeld fungeerde. Er blijkt wel degelijk een intensief contact tussen Korteweg en Brouwer geweest te zijn, en ook in de voorafgaande periode had Korteweg nauw wiskundig contact met Brouwer als aanbieder van diens stukken aan de Akademie. Korteweg komt uit de correspondentie te voorschijn als een groot en nobel mens; Brouwer heeft zeker reden gehad om hem dankbaar te zijn.

De correspondentie is voorts verhelderend op een aantal punten die in het proefschrift wat minder expliciet aan de orde komen.

Een van de kleine details die de lezer zullen treffen is de ongehoorde snelheid van het toenmalige postverkeer.

Het proefschrift draagt de neutrale titel *Over de Grondslagen van de Wiskunde*, een duidelijke poging tot conformering. In 1904 kondigde Brouwer aan een dissertatie *De waarde der Wiskunde* te zullen schrijven, met een veel grotere filosofische component. Het schrijven van Grondslagen was niet zo ongewoon; Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* moet een trendsetter geweest zijn, maar ook buiten de wiskunde waren 'Grondslagen' schering en inslag. Frederik van Eeden schreef in 1897 een 'Redekunstige Grondslag van Verstandhouding', Brouwer's vriend Adama van Scheltema publiceerde 'De grondslagen eener nieuwe poëzie' in het jaar van Brouwer's promotie.

Brouwer's titel was passend gekozen, omdat weliswaar allerlei fundamentele onderwerpen ter sprake kwamen, maar er werd niet, zoals in zijn latere *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, een min of meer systematische grondslag gepresenteerd.

Over de ontvangst van het proefschrift is weinig bekend. Brouwer's leermeester en vriend Mannoury besprak het proefschrift in het Nieuw Archief voor Wiskunde; kennelijk critisch genoeg om Brouwer een weerwoord te ontlokken. Volledigheidshalve zijn beide stukken ook hier gereproduceerd, evenals Brouwer's *Addenda en corrigenda over de grondslagen van de wiskunde* van 1917. Tevens is Mannoury's recensie in het literaire tijdschrift

"De Beweging" opgenomen.

Het in het Nederlands gestelde proefschrift werd in het buitenland in het geheel niet gelezen, wèl geciteerd. Brouwer heeft een tijd lang overwogen om een Duitse vertaling te publiceren. Deze plannen leidden tot niets omdat hij inmiddels de publicatie van een monografie, gebaseerd op zijn *Berliner Gastvorlesungen*, voorbereidde. Ook daar is echter nooit iets van gekomen. Dientengevolge heeft de wiskundige gemeenschap altijd een deel van de intuïtionistische literatuur gemist.

Zo bevatte Brouwer's proefschrift al het complete idee van de metamathematica, vóórdat Hilbert dit idee toepaste. In *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus* kunnen we lezen dat Hilbert's inzicht direct op mededelingen van Brouwer berustte.

Men kan speculeren hoe de filosofie van de wiskunde en het grondslagenonderzoek zich ontwikkeld zou hebben indien Brouwer's 'Grondslagen' wèl vertaald zou zijn. Persoonlijk vermoed ik dat het verschil niet zo heel groot geweest zou zijn; het Idealisme, waar Brouwer's intuïtionisme het meest mee verwant was, was op zijn retour. Formalisme en (neo-)positivisme waren "in". Een herwaardering van het intuïtionistische programma heeft tot ongeveer de jaren zestig op zich laten wachten.

Bij lezing van het proefschrift kan men de onhoudbaarheid van het populaire vooroordeel constateren als zou Brouwer's intuïtionisme louter "een reactie op de paradoxen" zijn (vgl. blz.161, diss.). Het is zonneklaar dat Brouwer een op de intuïtie gegrondveste, bouwende wiskunde voor ogen stond, en dat de Cantorianen en logistici op contradicties stuitten was voor hem volstrekt niet verontrustend, omdat zij in een heilloze verwarring wiskunde, taal en logica door elkaar haalden.

Wat het beruchte *principe van de uitgesloten derde* betreft, is Brouwer in het proefschrift nog niet bij zijn definitieve standpunt beland. Hij acht de toepassing van het principe van de uitgesloten derde veilig (blz.160), maar hij interpreteert het principe dan ook op een geheel afwijkende wijze (blz.131): 'A of niet A' drukt hetzelfde uit als 'als niet A, dan niet A'. Met andere woorden, Brouwer las $A \vee \neg B$ als $\neg A \to \neg B$, en in de laatste lezing is het principe natuurlijk veilig. In de laatste stelling, no XXI, evenwel verwerpt Brouwer Hilbert's bewering dat ieder wiskundig probleem hetzij positief, hetzij negatief beantwoord kan worden. De consequenties daarvan voor het principe van de uitgesloten derde trekt hij echter pas in *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (1908).

Nauwkeurige lezing van Mannoury's recensies levert geen bevestiging van de hier en daar gehoorde mening dat Brouwer door deze critiek tot de verwerping van het principe van de uitgesloten derde kwam. Mannoury's aansporingen zijn te weinig specifiek en te radicaal om een gerichte critiek te inspireren.

De opgenomen recensies van Mannoury zijn de zichtbare sporen die Brouwer's dissertatie in de tijdschriften achterliet. Of Mannoury gelijk had met zijn openingszin van de bespreking in "De Beweging" moeten wij met enige twijfel in het midden laten.

De in deze bundel opgenomen brieven berusten in de Amsterdamse Universiteits Bibliotheek en in het Brouwer Archief. De *Ongepubliceerde Fragmenten* berusten in het Brouwer Archief onder het nummer BMS 3. Dr. W.P. van Stigt heeft in Historia Mathematica 6 (1979), pp.385-404 een gecommentarieerde Engelse vertaling van de Ongepubliceerde Fragmenten gepubliceerd onder de titel *The rejected parts of Brouwer's dissertation on the foundations of mathematics.*

De (her-)uitgave van het hier verzamelde materiaal is het gevolg van een suggestie van Professor P.C. Baayen. Voor de uitvoering wil ik graag de efficiënte publicatie-afdeling van het Mathematisch Centrum bedanken.

Bij de voorbereiding heb ik in niet geringe mate geprofiteerd van de hulp van Erik Heijerman. Zijn nauwkeurigheid en bereidwilligheid heb ik bijzonder op prijs gesteld.

Utrecht, april 1981

D. van Dalen

DE BROUWER-KORTEWEG CORRESPONDENTIE

15.II.1906

Professor,

Gisteren heb ik bericht ontvangen, dat mij met mijn promotie nog tijd gelaten wordt tot 12 November a.s.[(1)]

Er zijn nu nog twee, reeds vrij oude, Göttinger dissertaties, die ik graag zou lezen, n.l.

Tresdorf: Ueber die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemannschen Raume (1873)

Opitz: Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen (1881)

Zou ik die ook nog door uw bemiddeling kunnen krijgen?

Met beleefde groeten
L.E.J. Brouwer

(1) ⟦Deze opmerking heeft betrekking op de studiebeurs van Brouwer.⟧

7.IX.1906

Professor,

Sinds eenigen tijd ben ik in Blaricum, waar ik beter al mijn tijd aan mijn werk kan geven. Met lezen van anderen ben ik opgehouden, en ben nu bezig mijn aanteekeningen te ordenen en onder hoofdstukken te brengen.

Ik voel mij des te sterker in mijn overtuigingen, nu ik merk, mijn aanteekeningen van ongeveer twee jaar geleden ook nu nog, na mijn lectuur van den tusschentijd, geheel voor mijn rekening te kunnen nemen.
Alleen kan ik ze nu beter met wiskundige ontwikkelingen steunen dan toen.

Een uitgever heb ik al, en om mij te dwingen, heb ik met hem afgesproken, dat hij begin October kan beginnen te drukken. Voor dien tijd kom ik wel eens bij u aan, om te hooren, of u de copie niet liever voor het drukken inziet; ik kan dan nog zooveel veranderen, als ik wil; en als het eenmaal drukproeven zijn, ben ik natuurlijk veel meer beperkt.

Hopend, dat u een aangename zomer hebt gehad, en in afwachting u spoedig terug te zien

met beleefde groeten
L.E.J. Brouwer

16.X.1906

Professor,

Ik heb de stof voor de dissertatie, zoals zij nu voor mij ligt, verdeeld in 6 hoofdstukken:

1°) De opbouw der wiskunde.
2°) Haar wording in verband met de ervaring.
3°) Haar philosophische beteekenis.
4°) Haar grondvesting op axioma's.
5°) Haar waarde voor de samenleving.
6°) Haar waarde voor het individu.

Het overzicht in het 1ste hoofdstuk, dat ik u stuurde, dient voornamelijk, om er in de volgende hoofdstukken op te kunnen steunen, en er naar te kunnen verwijzen; verder, om allerlei onderzoekingen over de grondslagen der wiskunde van den laatsten tijd, onder één gezichtspunt, n.l. in hun beteekenis vóór de opbouwende wiskunde, te toonen. Eenige dingen heb ik wat verder uitgevoerd, zoo het onderzoek van Hamel over de rechte lijn als minimaalkromme, omdat ik dat later voor hoofdstuk 3 ter bestrijding van Russell principieel noodig heb; verder, dan opbouw van de groep der hoofdbewerkingen op het continuum, omdat ik den opbouw van groepen onafhankelijk van differentieerbaarheid als iets essentieels in den opbouw der wiskunde wilde toonen; en dan de afleiding van het niet-Euclidische boogelement door variatierekening, omdat ik die nergens vind, en zij mij de eenige manier lijkt, om <u>ook voor n dimensies</u> dat boogelement direct uit het voor 2 dimensies afgeleide te laten voor den dag komen. (De gewone manier is op grond van de formules voor geodetische krommingen volgens de onderzoekingen van Christoffel en Lipschitz in Crelle 1870 en volgende jaren, die voor n afmetingen zeer ingewikkeld worden).

Morgen- of overmorgenochtend denk ik te Amsterdam te komen, en te hooren wat u er van vindt.

Misschien kan dan in het laatst van de week, als ik het nog eens heb doorgezien, het hoofdstuk gezet worden.

Intusschen ben ik aan het volgende deel bezig, en hoop het u zoo spoedig mogelijk te zenden.

Na beleefde groeten,
L.E.J. Brouwer

18.X.1906

Waarde Brouwer,

Dezen morgen heb ik mij onledig gehouden met een hernieuwde langzame lezing der vijf eerste bladzijden van uw proefschrift. Het is mij inderdaad gebleken dat er niet zoo heel veel in gewijzigd behoeft te worden om het verstaanbaar te houden voor een veel groter aantal lezers. Ik heb die wijzigingen op aangeplakte papieren aangebracht. Allicht is er iets onder wat ge niet accepteeren kunt, waartoe ge natuurlijk volle vrijheid hebt.

Tevens is mij gebleken dat na uwe mondelinge uitleggingen alles mij in een heel ander licht verschijnt en zelfs meestal zeer goed en duidelijk gezegd voorkomt.

Het spijt mij dat wij elkander spraken toen ik nog onder een anderen indruk was, waardoor ik u noodzakelijk een en ander gezegd heb wat u ontmoedigen moet al was het niet de bedoeling. Zorg dus dat de spijt die ik daarvan heb zoo gering mogelijk wordt door bedaard maar flink door te werken, aan het tweede gedeelte.

Ik twijfel nu zelfs niet dat met het eerste gedeelte spoedig met drukken zal kunnen begonnen worden. 'T zal slechts noodig zijn dat gij het naar aanleiding mijner opmerkingen nog eens doorgaat en ziet wat ge overnemen en waar ge een door mij gevraagde verduidelijking geven kunt.

Toch zou het zeker wenselijk zijn als ge niet van een bepaalde datum zo streng gebonden waart. Zou het niet het beste zijn indien ik nu reeds aan den heer van Eijsinga(2) schreef? Eenvoudig om de betaling der ƒ 1500 in petto te houden tot ge gepromoveerd zijt maar de beurs op 11 Nov. te laten vervallen?

Nu mijn indruk zooveel gunstiger is geworden kan ik dit zeer gemakkelijk doen.

Ik ben er gaarne toe bereid.

Groeten
Uw
D.J. Korteweg

(2) ⟦Jhr. C. van Eijsinga was bestuurder van het St. Jobsleen te Leeuwarden, dat Brouwer met een beurs ondersteunde. Korteweg schreef de bedoelde brief 19.10.1906.⟧

⟦Zonder aanhef⟧

5.XI.1906

Mag ik u misschien nog bijgaande jaargang der Göttinger Nachrichten sturen, waarin de voordracht van Hilbert te Parijs: "Mathematische Probleme" staat afgedrukt. U zult dan zien, dat ik no. 1, ("Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums") in het eerste hoofdstuk van mijn dissertatie volledig heb behandeld, en dat juist door mijn teruggaan op den intuitieven opbouw die voor alle wiskunde moet bestaan.

No. 2 ("Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiomen") wordt in het laatste hoofdstuk besproken, in zooverre daar de oplossing van Hilbert zelf op het Heidelberger Congres wordt veroordeeld, en als eenige oplossing weer wordt terugverwezen naar den opbouw van de arithmetik op het continuum, zoals die in het eerste hoofdstuk is gegeven door optelling en vermenigvuldiging als de tweeledige groep te karakteriseeren.

Daarbij heb ik dan tevens no. 5 ("Lie's Begriff der continuirlichen Transformationsgruppen ohne Annahme der Differenzierbarkeit") voor een eenvoudig geval (de tweeledige lineaire groep) opgelost. Hilbert zelf heeft een ander geval (de 3-ledige vlakke bewegingsgroep) in Mathem. Annalen 56 behandeld.

Ik stuur u dit boek, omdat ik meende twijfel bij u te hebben opgemerkt, of de onderwerpen in mijn dissertatie eigenlijk wel de moeite waard waren.

En wat nog uw opmerking betreft, dat de naam van Kant niet in een wiskundige dissertatie zou thuishooren: u zult zien, dat de "Foundations" van Russell voortdurend over Kant handelen, en dat "Les Principes des Mathématiques" van Couturat gecompleteerd worden met een Appendix van meer dan 100 pagina's over Kant. En als u de Transcendentale Aesthetik van Kant er naast legt, zult u zien, dat die ook juist over dezelfde dingen spreekt, als Russell en Couturat. En Poincaré signaleert den strijd over de grondslagen van tegenwoordig als een voortzetting van den ouden mathematisch-philosophischen strijd tussen Kant en Leibniz.

Al is dus de naam van Kant hier te vermijden, zijn onderwerpen worden toch aangeroerd, is het dan noodig, zijn naam te vermijden, omdat hij als philosoof bekend staat? U kunt toch de boeken van Russell en Couturat niet qualificeeren als buiten de wiskunde staande? Zoo goed als alle wiskundige tijdschriften, die een rubriek Bibliographie hebben, hebben ze altijd besproken.

Wat nog mijn woorden betreft, die u zoo absurd vindt, dat de astronomie niets is, dan een gemakkelijke samenvatting van causale volgreeksen in aflezingen op onze meetinstrumenten; Poincaré zegt iets van dezelfde kracht (al heb ik hem niet nageschreven) in "Science et Hypothèse". Daar staat: "De aarde draait" heeft geen anderen zin, dan: "Om eenige verschijnselen gemakkelijk te rangschikken, is het zeer gemakkelijk te onderstellen, dat de aarde draait". En ik vind, dat zoo iets wel ver van absurd te zijn, integendeel iemand, die het eenmaal leest, direct overtuigt. Het systeem der hemellichamen is toch niets, dan een door ons vrij opgebouwd wiskundig systeem, waarop de menschen zoo trotsch zijn, alleen omdat het zoo doel heeft in het beheerschen der verschijnselen.

En ook vallen zulke uitspraken toch wel binnen het onderwerp, tenminste niemand zal "La Science et l'Hypothèse" een plaats binnen de faculteit der wis- en natuurkunde weigeren. Trouwens allerlei congresvoordrachten van Klein, Cantor, Boltzmann e.a. handelen over zulke onderwerpen.

Tenslotte zei u Zondag nog heelemaal geen zekerheid te hebben, dat ik Kant grondig genoeg had bestudeerd, om er een oordeel over te kunnen uitspreken. Ik kan u natuurlijk die zekerheid niet verschaffen, maar wel kan ik u zeggen, dat ik de "Kritik der reinen Vernunft" geheel heb gelezen en vele gedeelten (en daaronder dan, welke op mijn dissertatie betrekking hebben) herhaaldelijk en ernstig heb bestudeerd.

Dat mijn werk onduidelijk is en de structuur onverzorgd, en dat het de sporen draagt, met haast te zijn geredigeerd, zal waarschijnlijk waar zijn, ook misschien dat hier en daar nog een onnauwkeurigheid zit, maar dat de gedachten er in vaag zijn, en de voorafgaande studie oppervlakkig is geweest, daar kom ik met nadruk tegen op.

Ik had zoo graag, dat het tusschen u en mij niet werd tot een transigeeren wat er in kan blijven, en wat er uit moet, maar dat u juist de grondgedachten, dus veel meer het algemeene, dan het speciale, dat wat tusschen de regels staat, zoudt aanvoelen en erkennen, al zijn uw eigen grondgedachten anders, al vindt u de mijne absurd, - omdat ik een kind van een anderen tijd ben dan u.

U weet wel, dat, toen ik twee jaar geleden mijn onderwerp koos, dat geen onmacht was, om een meer "gewoon" aan te pakken, maar alleen, dat ik aandrang tot dit onderwerp voelde: het is van zelf in mij ontstaan. U stemde er toen in toe, "mits er genoeg wiskunde in overbleef", waarschijnlijk vermoedende, dat het mij sterk in de philosophie zou drijven, wat het ook gedaan heeft, zoo, dat ik zelfs soms de wiskunde geheel uit het oog verloor. Maar wat ik u nu heb gebracht, behandelt uitsluitend, hoe de wiskunde in het leven wortelt, en hoe dus de uitgangspunten der theorie behooren te zijn, en alle bijzondere onderwerpen er uit krijgen er hun zin in betrekking tot die hoofdstelling. Op zichzelf beschouwd, blijven sommige van die onderdeelen wel waarde houden (zoo de oplossing der 3 bovengenoemde problemen van Hilbert), maar anderen worden, uit het geheel gerukt, vrij onbenullig, als het overzicht van de physica.

Wat voor mij het essentieele in het werk is, en waarom ik het zoo graag als dissertatie, waarbij het karakter van "stellingname" van oudsher toch op zijn plaats is, in de wereld wilde zenden, is de algemeene geest; en alleen als die door mijn promotor zou worden geschat, zou de promotie mij een voldoening zijn.

Na beleefde groeten,
L.E.J. Brouwer

⟦Korteweg had op zondag 4 november een bespreking met zijn promovendus. Hij moet zich toen nogal critisch en sceptisch uitgelaten hebben. Nog op de dag van ontvangst van bovenstaande brief ontwierp Korteweg een antwoord, dat hij echter niet verstuurde. In grote lijnen stemt het klad van 5 november overeen met de brief van 11 november. In plaats van direct te antwoorden schreef Korteweg de volgende kaart.⟧

5.XI.1906

W.Br. Ik wilde het volledig antwoord op uw laatste schrijven uitstellen tot ik van uw werk geheel kennis genomen heb; maar u thans vast de verzekering geven dat er twijfel aan de grondigheid uwer wiskundige voorstudie bij mij geen ogenblik heeft bestaan.

Groeten uw
D.J. Korteweg

7.XI.1906

Professor,

Uw briefkaart kreeg ik eerst gisteravond in Blaricum in handen, zoodat ik u eerst nu het gevraagde boek kom brengen; eenige andere, waarnaar ik nog al heb gerefereerd, heb ik er bij gevoegd.

Mag ik u, naar aanleiding van het Zondag besprokene, nog opmerken, dat de bedoeling van het 2^e hoofdstuk is a) toelichting, hoe de wiskundige ervaring het essentieel-menschelijke handelen begeleidt, en b) naar aanleiding van het vorige: onderzoek, in hoeverre ervaringswiskunde a priori kan zijn, in het bijzonder, of ruimte en tijd beide a priori zijn.

De uitweidingen over mechanica en natuurkunde hebben er alleen plaats, om bij wijze van voorbeeld te dienen van het over a) gezegde. Ze op zichzelf mee te deelen, zou voor mij weinig zin hebben, omdat ik een allesbehalve bevoegde ben, om als 't ware in groote lijnen de wijze van werken in mechanica, astronomie en physica te schetsen, en dan daar bij iets oorspronkelijks te kennen geven. Het behoort in mijn verband zelfs zóó te worden gelezen, dat misschien er wel het een of ander in staat, dat niet geheel juist is, maar dat het dan toch na de verbetering even goed als voorbeeld voor de in den aanvang uitgesproken stellingen zou kunnen dienen.

En evenzoo de kritiek op "Russell, Foundations" staat er alleen als toelichting bij mijn stellingen omtrent b), en als aanleiding, om eenige tegenmeeningen, die voor 't grootste deel heelemaal niet speciaal-Russeliaansch zijn, te weerleggen.

Zooals ik het hoofdstuk geschreven heb, is die structuur geloof ik niet zeer duidelijk voor den lezer, maar dat zou wel te verhelpen zijn.

In elk geval, als het hoofdstuk zou worden gereduceerd tot een overzicht over de physische wetenschappen en een kritiek op Russell, zou het zijn geraamte missen, en zou ik er wel voor voelen, ook dit hoofdstuk nog te schrappen, en het weinige, wat direct noodig is in het verband van het derde hoofdstuk, daar te trachten in te lasschen.

Wel zou ik misschien de hoofdzaken van a) en b) nog wat meer kunnen bekorten, maar in elk geval moeten èn het overzicht van de physica èn de Russellsche kritiek er aan ondergeschikt blijven.

Dat ik het boek van Russell zoo uitsluitend heb genomen in het verband, ligt eraan, dat hij de eenige is, die over de philosophische grondslagen der wiskunde schrijft, en (althans meestal) een <u>exacte</u> taal voert, waartegen <u>wiskundig</u> is te velde te trekken. Dat doen Hegel, Schopenhauer, Lotze en Fechner niet; ik noem maar een paar namen; als ik die besprak, zou ik op zuiver philosophisch terrein komen, wat u niet wil, en ik ook niet wensch.

Russell is, voorzoover mij bekend, de eenige, die, wiskundig toegerust, het vraagstuk der aprioriciteit heeft aangepakt, en bij het kritizeeren van hem, kon ik op <u>mijn terrein</u>, dat in mijn eigen oogen voortdurend wiskundig is, blijven; en in dat kritizeeren vond ik gelegenheid, mijn standpunt naar verschillende kanten te accentueeren. En dat was voor mij hoofdzaak, niet het boek van Russell, dat ik alleen om zijn karakter belangrijk vind, maar verder een absoluut-mislukte poging vind.

Ik heb maar wat doorgepraat over de kwestie, waarin het mij Zondag zoo speet, dat u niet met mij mee kon gaan, en waarmee ik nu 2 dagen in mijn hoofd loop, niet dat ik iets zou wenschen door te drijven, maar alleen dat ik bang was, dat ik in mijn manuscript mijn bedoeling slecht had weergegeven, en ook in het gesprek van Zondag niet goed had kunnen zeggen, wat ik bedoelde, en dus bang was voor misverstand.

Met beleefde groeten
L.E.J. Brouwer

8.XI.1906

Waarde Brouwer,

Dank voor uw schrijven en voor de toezending der boeken die niet te laat kwamen, omdat ik uw dissertatie nu wel vóór laat gaan boven het meeste andere werk maar er toch telkens enkele dingen zijn die ik moet afdoen.

Met het doorgaan van uw 2^e hoofdstuk ben ik nu gereed behalve dat ik enkele dingen nog met Russell vergelijken wilde.

Het lijkt mij dat hetgeen gij in uw schrijven aanroert er voldoende in gebleven is, vooral omdat het slotgedeelte, naar ik meen, bijna geheel kan blijven.

Ik zal nu het derde gedeelte op dezelfde wijze doorgaan en krijg dan gaarne het eerste gedeelte nog eens in den nieuwen vorm te zien. Zoo geloof ik dat wij het beste vooruitkomen.

Groeten,
Uw
D.J. Korteweg

11.XI.1906

Waarde Brouwer,

Ik heb nu ook van uw derde hoofdstuk kennis genomen. Het resultaat is zeer bevredigend. Ik vind er veel fraais in. Gaarne zag ik enkele zaken wat minder ruw gezegd, wat slechts hartstocht brengen kan waar deze niet behoort en een enkele uitspraak wat minder absoluut.

Zoo schijnt het mij dat gij tegen de logische figuren, buiten de wiskunde om, op zichzelve beschouwd, als eene poging om de wijze waarop de menschen redeneeren te ontleden en te classificeeren, toch niet zoveel bezwaar hebben kunt of, zoo ja, daarmede buiten uw onderwerp treedt.

Maar dat alles betreft slechts enkele zinnen of haast woorden.

Zie verder straks over het slotgedeelte.

Omtrent het eerste hoofdstuk "den opbouw" weet ge dat ik hier alleen verduidelijking zou wenschen waarnaar ge u bereid verklaardet te streven.

Blijft dus alleen het tweede hoofdstuk.

Na ontvangst van uw brief heb ik nogmaals overwogen of ik dit zooals het daar ligt accepteeren kan. Maar waarlijk Brouwer het gaat niet. Daarin is een soort pessimistische en mystieke levensbeschouwing ingevlochten die geen wiskunde meer is en ook met de grondslagen der wiskunde niet te maken heeft. Zij moge in uw geest hier en daar met wiskunde zijn samengegroeid; maar dat is dan geheel subjectief. Men kan dáárin geheel van u afwijken en toch uwe meeningen omtrent de grondslagen der wiskunde volkomen deelen. Ik ben overtuigd dat iedere promotor, jong of oud, die levensbeschouwing deelende of niet, tegen de opname daarvan in een wiskundige dissertatie bezwaar zou maken.

M.i. kan de uwe door 't uitlichten er van slechts winnen. Zij geeft er thans een karakter van bizarheid aan dat slechts schaden kan. Zij treedt ook in het derde hoofdstuk niet weer op dan op eene enkele bladzijden aan het slot die dan natuurlijk reeds daarom mede vervallen moet omdat ze niet meer begrijpelijk zou blijven.

Ik heb getracht aan te geven hoe ze zou kunnen worden uitgelicht uit hoofdstuk 2. Neem daar op uw gemak kennis van en zie of gij langs dien weg kans ziet er iets van te maken dat ook gij het behouden waard acht.

Mij zou het spijten als dit niet ging, omdat ik in sommige uwer uiteenzettingen en in uwe behandeling van Russell's boek, de daaruit getrokken conclusies omtrent Kant's beschouwingen betreffende het aprioristische in de wiskunde er in begrepen, veel goeds en doeltreffends vind.

Ik vermoed gij mijn bezwaar nu beter vat. Uw laatste schrijven was mij toch eene groote teleurstelling daar er van allerlei misverstand uit blijkt. Wat mij te meer verdriet deed daar ik den indruk had dat wij elkander verleden Zondag vrij wel begrepen hadden.

Gij vertelt er mij, als dingen die ik niet weten zoude allerlei wat mij al ware het maar als geregelde reviewer van de Rev. de mor. et de mét. onmogelijk onbekend kon zijn. Ge meendet begrepen te hebben dat ge de naam van Kant niet noemen mocht ook waar het meeningen van Kant over wiskunde betrof en ge dacht dat ik de meening "dat de astronomie niets is dan eene gemakkelijke samenvatting van causale volgreeksen in aflezingen op onze meetinstrumenten" absurd vond. Neen niet die meening; ik erken dat men de zaak zoo voorstellen kan, hoewel m.i. de algemeene aantrekkingswet al heel weinig meer te maken heeft met de instrumenten die tot hare ontdekking hebben geleid dan alleen in zooverre deze het meten "überhaupt" mogelijk maken; maar dat de gelijksoortigheid der wetten die op zeer verschillend natuurkundig gebied heerschen haar oorsprong zou vinden in de gelijksoortigheid der gebruikte instrumenten die beweering was het die mij ongerijmd voorkwam.

Ge meendet voorts dat ik u verdacht dat uwe voorbereidende studien oppervlakkig waren geweest. Dat kan slechts zijn oorsprong gevonden hebben in de nadere uitleggingen die ik u vroeg (en allicht nog nu en dan vragen zal). Deze echter hadden behalve tot eigen leering, het doel te kunnen zeggen (en dat zou noodig kunnen zijn) dat ik u herhaaldelijk van een en ander uitleg heb gevraagd en dan telkens bevonden dat er een degelijken achtergrond achter was. Ik voor mij twijfel daar niet aan.

En nu basta. Ik ben deze week erg bezet en verwacht u daarom liever eerst Zaterdag a.s. 17 November. Dan houd ik den heelen ochtend vrij en wilde u dan gaarne nog enkele inlichtingen vragen. Allicht hebt ge dan ook de bewerking van het eerste gedeelte gereed.

Groetend,
Uw
D.J. Korteweg

13.XI.1906

Professor,

Zaterdagmorgen zal ik dan om ongeveer 10 uur bij u komen, maar ik wil niet zoo lang wachten met het beantwoorden van uw brief.

Toen ik u Zondag 4 November verlaten had, voelde ik mij in het geheel niet ontstemd, maar de volgende dagen begonnen bijzonderheden van het toen gevoerde gesprek hoe langer hoe sterker in mij op te leven, en brachten mij hoe langer hoe meer in een ontmoedigden toestand. Ik geloof, dat het hoofdzakelijk was de herinnering aan die alinea, die u zoo absurd vond, dat u mij zelfs mijn woorden, die een nadere verklaring wilden pogen te geven, afsneedt. Daarnaast was misschien in mijn verbeelding de omvang van hetgeen u wenschte te schrappen grooter dan in werkelijkheid - ik was n.l. werkelijk in de meening, dat ik over Kant niet zou mogen spreken, omdat ik mij meende te herinneren, dat u hadt gezegd, geen zekerheid te hebben, dat ik van de litteratuur over Kant voldoende zou hebben kennisgenomen. Maar de hoofdzaak was in elk geval het eerste; vind u iets te absurd, om er zelfs met mij over te willen spreken, dan heb ik daarmee waarschijnlijk onbewust geassocieerd, dat u aan den ernst van het neergeschrevene, en daarmee aan de eerlijkheid en grondigheid van de ertoe geleid hebbende overdenkingen twijfeldet. Vandaar waarschijnlijk, dat ik er toe kwam mij in dat opzicht jegens u te verdedigen in mijn laatsten brief, die, aanvankelijk slechts bedoelende, het toegezonden boek met een enkel woord te begeleiden, onder den invloed van de gedachten, die mij die dagen bezaten, zich onwillekeurig uitbreidde tot wat hij geworden is.

En nòg stel ik er prijs op, dat u de alinea in kwestie althans niet meer "te absurd om over te spreken" vindt; mag ik er daarom hier nog even op ingaan. In uw oogen in dat opzicht gerehabiliteerd te zijn, kan mij meer schelen, dan er iets over in mijn proefschrift te houden, indien het - en dat geloof ik, wat dat betreft, zeker - zonder schade voor het geheel kan worden uitgelicht.

U vindt (dit nog naar aanleiding van dat, wat ik ten onrechte als de absurd gevonden uitspraak meende te herinneren), dat de algemeene aantrekkingswet al heel weinig meer te maken heeft met de instrumenten, die tot hare ontdekking hebben geleid; maar zijn wetten dan iets anders, dan samenvatting door inductie van verschijnselen, middel tot beheersching van verschijnselen, en niet anders bestaande dan in den menschelijken geest? Op zichzelf bestaat de attractiewet toch in elk geval alleen ten opzichte van de Euclidische ruimte en die bestaat alleen door doelmatige, maar willekeurige voortzetting van het domein der beweging van vaste lichamen hier op aarde. Zonder vaste lichamen op aarde zou de attractiewet niet bestaan, en het verband tusschen beiden wordt gelegd door de astronomische meetwerktuigen. De Attractiewet bestaat ten opzichte van de astronomische verschijnselen zooals de moleculen ten opzichte van den toestandsvergelijking; beide blijken doelmatig een groep verschijnselen samen te vatten, en als voorspellingsmiddel doeltreffend te zijn; alleen wint de attractiewet het in eenvoudigheid van de moleculairtheorie. Maar nog eens: de attractiewet is een hypothese; de afstand van de aarde tot de zon is even goed een hypothese.

Nu wilde ik nog graag wat zeggen over de hoofdkwestie, dat een gelijksoortigheid der wetten op verschillend natuurkundig gebied is te verwachten op grond van gelijksoortigheid der gebruikte instrumenten, en daartoe beginnen met den opmerking:

Geprojecteerd op onze meetinstrumenten is er geen onderscheid tusschen het electromagnetisch veld van een Daniell-element en dat van een Leclancherelement; maar als we het onbevangen bekijken, moeten we toch verwachten, dat tusschen beide velden een even groot verschil moet heerschen, als tusschen kopersulfaat en chloorammonium bestaat; alleen op ons tel- en meetinstinct, werkend met zekere bepaalde instrumenten, werken ze gelijk; daar blijkt zich eenzelfde wiskundig systeem op beide te laten toepassen, maar het is alleen gebrek aan geschikte instrumenten, dat ons tot nog toe belet heeft andere wiskundige systemen te vinden, die zich op het eene veld wel, op het andere niet, laten toepassen.

In elke fase van ontwikkeling der physica blijven de meetwerktuigen, die "geschikt bevonden zijn" een beperkt geheel vormen, ten opzichte van het geheel der meetwerktuigen, die "geschikt bevonden zouden kunnen worden, om allerlei andere nog onbekende verschijnselen te beheerschen"; daarmee loopt parallel, dat de "reeds op de natuur toegepaste wiskundige systemen" een beperkt geheel vormen ten opzichte van het geheel der wiskunde, die "op de natuur geschikt toe te passen zou zijn, als de physica zich maar voldoende had uitgebreid".- En waar nu elke beperkte groep van wiskundige systemen zijn invarianten heeft, is het te verwachten, dat ook elke beperkte groep van natuurverschijnselen juist op grond van die beperking zijn invarianten heeft, in den vorm van voor alle verschijnselen dier groep geldige wetten of principes.

Nu zou iemand kunnen zeggen: "Maar waarom moeten we voor het geheel der tegenwooridge physica invarianten verwachten; daar die physica zich immers heelemaal niet een <u>bepaalde</u> beperking stelt, maar naar willekeur de meest heterogene dingen binnen haar gezichtsveld haalt?"

Waarop zou zijn te antwoorden: "Wel degelijk bestaat er een <u>bepaalde</u> beperking; immers de in de natuur opgemerkte wiskundige wetten drukken tenslotte niets anders uit, dan betrekkingen tusschen maten, aan de rigide groep ontleend; alleen de <u>invloeden</u>, waaraan die rigide maten worden blootgesteld, worden onbepaald gevarieerd. De andere physische grootheden zijn slechts voor bepaalde invloeden der maten geschikt gekozen hulpgrootheden, die door hun invoering als coördinaten de bewegingsvergelijkingen of toestandsvergelijkingen een eenvoudigen vorm geven. Die physische grootheden worden dan ook nooit zelf gemeten, alleen de rigide maten, in fictief verband waarmee ze zijn ingevoerd; zoo mat men geen magnetische krachten en stroomsterkten, maar torsiehoeken van cocondraden, en de hoekmaat is ontleend aan de rigide groep.- En ook: spraken we van gelijkwaardige dingen, of ook van invloedlooze omstandigheden, dan bedoelen we steeds: met betrekking tot de aflezingen op onze meetinstrumenten. Er is maar één ding wat als empirische waarheid op zichzelf kan worden uitgesproken, n.l.: De bewegingsgroep der vaste lichamen heeft ongeveer die en die eigenschappen, en die blijven met den tijd ongeveer onveranderd".

— "Maar we meten toch nog wel andere dingen, dan rigide maten; b.v. hoeveelheden electriciteit; kunnen we b.v. niet aan een geleider

achtereenvolgens gelijke ladingen geven, door tweemaal achtereen hetzelfde laadbolletje, dat tweemaal achtereen op dezelfde wijze zijn lading had verkregen, er op te ontladen, en weten we dan niet, dat de lading van den geleider na de tweede lading het dubbele is van na de eerste lading?"
— "Neen; want in hoeverre alleen kunnen we spreken van hoeveelheden electriciteit, m.a.w. in hoeverre laten de werkingen van achtereenvolgens aangebrachte gelijke ladingen zich als gelijke werkingen superponeeren? B.v. in zooverre ze superponeerende werkingen op de wringbalans van Coulomb geven. Maar in hoeverre mogen we de krachten, die daar gelijke torsies geven, superponeeren? In zooverre ze b.v. gelijke koperen gewichten in evenwicht houden. Maar in hoeverre mogen we de gewichten van gelijke stukken koper superponeeren? In zooverre de versnellingen, die ze (b.v. in het toestel van Atwood) aan eenzelfde lichaam geven, zich laten superponeeren. Maar die versnellingen worden alleen aan vaste lichamen waargenomen; immers zoowel versnellingen als snelheden worden waargenomen aan de rigide groep. En zoo blijft het ook voor gewichten van vloeistoffen, we meten ze òf door het volumen - en dat wordt op grond van de rigide groep gemeten - òf overgebracht als krachten op een vast lichaam, b.v. een balans of een zuiger.

Zoo wordt elke physisch meetbare grootheid tenslotte teruggevoerd op een meting in de rigide groep; en het zijn de wetten van die metingen, die in allerlei verschillende omstandigheden worden gezocht. Er is dus wel degelijk een bepaalde beperking voor de physisch toe te passen wiskundige systemen te verwachten, en het bestaan van invariante principes behoeft niet te verwonderen. Zoo goed als een orgelpijp weigert met andere, dan bepaalde tonen mee te trillen, kunnen we verwachten dat de rigide groep weigert te resoneeren met andere verschijnselen, dan die aan de principes van energie, actie en thermodynamica voldoen.- Het onbekende algemeenere, wat er buiten ligt, zou zich dan in de physische wetten toch nog kunnen manifesteeren als allerlei "toevallige" constanten, als onverklaarde atoomgewichten, dielectr. constanten, trillingsgetallen, soortel. gewichten enz., en ook het "toevallige" feit, dat de wetten zoo zijn, als ze zijn, en niet anders.

Misschien vindt u in deze redeneeringen een zwak punt, maar in elk geval blijkt er uit dat mijn uitspraak meer is dan een vaag gevoelen, en niet berust op een pessimistische levenshouding zonder meer.- Wil u tenslotte dit schrijven, evenals het vorige, beschouwen als slechts ingegeven door de vrees, het samenvoelen met u over het onderwerp te moeten prijsgeven, en door innigen wensch, dat, ook in de onderdeelen, zoveel als mogelijk, te behouden.

Met beleefde groeten,
L.E.J. Brouwer

⟦De drie volgende brieven hebben betrekking op de "Differentieerbaarheid der physische functies", Diss. blz.85, e.v.⟧

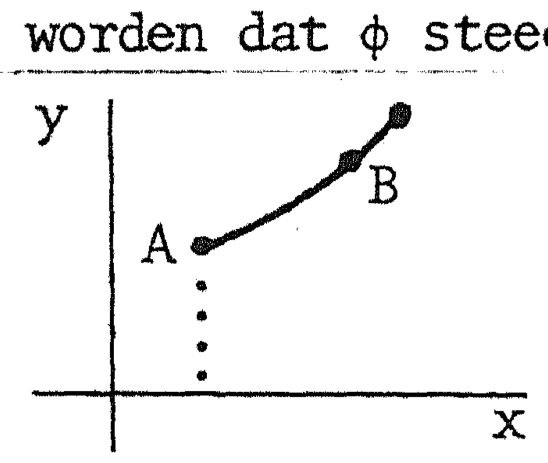
10.I.1907

Waarde Brouwer,

Op het ingeloten vel heb ik slechts een paar hoogst onbeduidende correcties voor te stellen, zooals ge zien zult.

Ondertusschen is de vraag bij mij gerezen kan het op p.86 aangevangen bewijs wel voor hoogere differentiaalquotiënten geleverd worden?

Laat eens ϕ zijn de coördinaat van een gewone Weierstrasse kromme zonder differentiaalquotiënt $\phi = C + \sum_0^\infty b^n \cos(a^n x\pi)$, dan kan C zoo genomen worden dat ϕ steeds positief is wat mij de zaak gemakkelijker maakt.



Beschouw nu de krommen die van een willekeurig punt A uitgaat en waarvoor $\frac{dy}{dx} = \int \phi \, dx$.

Die integraal <u>bestaat</u>, althans Klein zegt dat iedere "stetige Function" zulk een integraal toelaat. De zoo ontstane kromme heeft zeker een tweede differentiaalquotient, maar voldoet ze niet aan den eisch dien ge stelt? Mij dunkt wel, want het differentiaalquotient neemt regelmatig toe binnen grenzen die kleiner worden naar gelang men een kleiner stukje kromme beschouwt. Mij dunkt er is hier toch, inderdaad voor dichtbijeengelegen argumentpunten (als A en B) ongeveer gelijke waarde voor alle [eerste] differentiaalquotienten daar deze allen als de aangroeiing kleiner wordt de differentiaalquotienten "stetig" naderen.

Maar wellicht heb ik u niet goed begrepen.

Groeten,
Uw D.J. Korteweg

10.I.1907

Professor,

De kromme die u aangeeft is werkelijk een, waarvoor het bewijs van pag.86 sq. kan worden geleverd ten opzichte van het eerste differentiaalquotient, en niet ten opzichte van hoogere differentiaalquotienten. Maar ze voldoet niet ten volle aan den eisch, dien ik stelde.

"In dichtbijeengelegen argumentpunten ongeveer gelijk gedrag" wil zeggen, dat alle door de kromme bepaalde functies van de onafh. veranderlijke stetig zijn (dat wordt ook ondubbelzinnig door mijn woorden uitgedrukt); nu weet ik van een stetige kromme, dat de differentiequotienten bestaan, deze zijn dus door de kromme bepaalde functies, zijn dus (volgens mijn onderstelling) stetig.

Het bewijs van pag.86 sq. leert dan, dat het eerste differentiaalquotient bestaat, het is dus een door de oorspronkelijke kromme bepaalde functie, is dus (volgens mijn onderstelling) stetig, heeft dus bestaande differentiequotienten, die nu ook door de oorspronkelijke kromme bepaalde functies zijn, dus (volgens mijn onderstelling) stetig zijn, waaruit volgens het bewijs van pag.86 sq. wordt afgeleid het bestaan van het tweede differentiequotient. Zoo kunnen we doorgaan; eerst volgt nu uit de onderstelling van pag.86 dat het tweede diff. quotient en zijn differentiequotienten, stetig zijn. Dan uit het bewijs van pag.86 sq. dat het derde diff. quotient bestaat, enz.

De functie, die u aangeeft, voldoet niet aan mijn postulaat; immers er bestaan door de kromme bepaalde functies (differentiequotienten van het differentiaalquotient), die niet stetig zijn. Waren deze functies stetig, dan zou ook het tweede differentiaalquotient bestaan.

Na beleefde groeten
L.E.J. Brouwer

11.I.1907
('s morgens)

Professor,

Ik bedenk, dat mijn brief aan u van gisteravond eenigszins onvolledig was, en de vraag zou kunnen doen rijzen, waarom ik mijn eisch van pag.86 formuleerde als van "in dicht bijeen gelegen punten ongeveer gelijk gedrag", en niet als van: "continuïteit van door de kromme bepaalde functies".

Het eerste bedoelt wel het laatste, maar men denkt dan alleen aan door physische metingen (of continue operaties op de resultaten dier metingen toegepast) bepaalde functies, dus waargenomen functies. Hiertoe behooren o.a. de differentiequotienten en de verschillende differentiaalquotienten, die, zoo ze bestaan, zijn te benaderen uit metingen van Δf, $\Delta^2 f$, $\Delta^3 f$ enz.

Bij de laatste formulering zou men echter insluiten alle willekeurige wiskundige functies, die ik in mijn wiskundige fantazie maar van de ordinaat zou kunnen opbouwen, en in dien zin kan natuurlijk nooit aan het postulaat voldaan worden. Elke wiskundige kromme bepaalt wel wiskundige discontinue functies. Ik meende met het woord gedrag van physisch waargenomen grootheden goed uit te drukken, wat ik bedoelde, zonder nog verdere uit-uitweidingen noodig te hebben.

Te meer, omdat het een vaag gevoel bij de menschen was, dat ik aanwees, waarvan zij de scherpe wiskundige portée niet voor zichzelf hebben omlijnd, ook al is zeker, dat de praemissen waarvan ik bij mijn bewijs uitga, wèl binnen dat niet scherp omlijnde gebied zullen liggen.

Natuurlijk zou naast de korte aanduiding, zooals ik ze gaf, nog heel wat te zeggen zijn; wat ook geldt voor heel wat andere in het tweede hoofdstuk aangevoerde onderwerpen. Wat misschien komt, doordat ze in mijn hoofd oorspronkelijk als accessore uitloopers van een samenhoudende grondgedachte lagen (die niet meer in de dissertatie optreedt) en zoo slechts secundaire beteekenis hadden.

Na hun plotseling verschijnen op den voorgrond in vervanging van hun vroegere aanvoerder, was het niet zoo gauw weer mogelijk, ze alle zoo aan te kleeden, dat ze nu op zichzelf tezamen de vertooning geheel kunnen redden.

Ten minste, dat vind ik wel eens, als ik het hoofdstuk aankijk. Aan den anderen kant begrijp ik ook hoe langer hoe meer, dat gedachten, zooals ik ze eerst had geschreven in een wiskundige dissertatie den wiskundigen toon geheel zouden hebben gestoord; en ik heb getracht, onder volledige buitensluiting daarvan, over het verband tusschen wiskunde en ervaring zoo grondig mogelijk en zoo weinig triviaal mogelijk te schrijven.

Deze brief is zoo nog iets langer geworden, dan ik dacht.

De drukker schijnt weer te slabakken; de laatste dagen ontvang ik weer niets. Maar misschien neemt het afdrukken der eerste vellen zijn tijd in beslag.

Na beleefde groeten,
L.E.J. Brouwer

18.I.1907

Professor,

Na overweging van uwe opmerkingen over pag.128 vind ik ook, dat de wiskundige toon er gestoord wordt, en heb de zinnen, die een "waardering" in hielden, geschrapt.

Ook mijn uitdrukking, dat de theoretische logica niet op de buitenwereld gericht zou zijn, was niet gelukkig; ik bedoelde met "gericht op de buitenwereld, om haar te beheerschen of te bestrijden", zooveel als "in de buitenwereld practische toepassing vindend", maar men leest het er niet uit.

Uit uw kenschetsing van de theoretische logica als een onderdeel der psychologie maakte ik op, dat ik mij betrekkelijk onduidelijk had uitgedrukt, want mijn bedoeling was juist geweest te toonen, dat de theoretische logica, al is ze een wetenschap, in geen geval psychologische beteekenis heeft.

Ik heb zoo pag.128 nog van eenige toevoegingen voorzien, en ook de laatste regels van pag.127 omgewerkt, zoodat er tenslotte een geheel nieuww en uitgebreidere redactie van het onderwerp is gekomen, en ik u de proef, als ik haar terug heb, nog eens zal sturen, tegelijk met die van vel 9. Daar ik ze gisteravond naar Nijmegen verstuurd heb, zal ze morgenavond wel weer in mijn bezit zijn, zoodat ik hoop dat u ze Zondagmorgen hebt.

De kwestie van de differentieerbaarheid der physische functies in vel 6 heeft, naar ik hoop afdoende, aanvullingen gekregen.

Na beleefde groeten
L.E.J. Brouwer

23.I.1907

Professor,

Om geen tijd meer te verliezen, zal ik, zooals u goed vindt, niet meer in den tekst veranderen, maar ik wil toch nog even op uw aanmerkingen antwoorden en probeeren of ik u niet wat meer dan tot nog toe in het kwestieuze onderwerp aan mijn zijde kan brengen.

Van het wiskundig redeneeren toon ik in het begin van het hoofdstuk aan, dat het <u>geen</u> logisch redeneeren is, dat het alleen uit armoede van taal van de voegwoorden der logische redeneeringen gebruik maakt, en daardoor misschien de taalbegeleiding der logische redeneeringen nog in 't leven zal houden, wanneer het menschelijk intellect aan de logische redeneeringen zelf reeds lang ontgroeid zal zijn. Want wel verre, dat het een "raar volk" zou zijn, dat niet logisch redeneerde, geloof ik, dat het slechts een inertieverschijnsel is, dat de daarbij hoorende woorden, in de moderne talen nog bestaan. Een zuiver gebruik van die woorden komt nog maar weinig voor, en onzuiver worden ze gebruikt in het dagelijksch leven, waar ze toch allerlei misverstand en dogmatiek, en in de wiskunde, waar ze tot de wanbegrippen van de Mengenlehre hebben gevoerd. Die wanbegrippen zijn ontstaan niet door onvoldoend wiskundig inzicht, maar doordat de wiskunde uit gebrek aan een zuivere taal zich met de taal der logische redeneeringen behelpt, terwijl haar gedachten niet logisch, maar wiskundig redeneeren, wat heel iets anders is.

De stelling: Als een driehoek gelijkbeenig is, is ze scherphoekig wordt gebruikt als een logische stelling - het praedicaat gelijkbeenig wordt voor driehoeken beschouwd, het praedicaat scherphoekig te impliceeren, d.w.z. men denkt zich alle driehoeken (van een plat vlak b.v.) afgebeeld door de punten van een R_6, en ziet dan, dat het gebied van R_6 dat de gelijkbeenige driehoeken representeert besloten is in dat wat de scherphoekige driehoeken representeert. Dit is in casu werkelijk waar, de logische formuleering en de logische taal kan hier dus veilig worden gebruikt.

Maar de wiskundige, die de genoemde stelling door armoede van taal gelijk met een logische stelling formuleert, denkt zich iets anders, dan de genoemde logische interpretatie. Hij denkt zich, dat hij een gelijkbeenige driehoek gaat construeren, en dan hetzij dat na afloop der constructie de hoeken als scherp voor den dag komen, hetzij dat het blijkt dat bij postuleering van een rechten of stompen hoek de constructie niet gaat. M.a.w. hij denkt zich de stelling in wiskundige, niet in logische interpretatie. Het is juist de hoofdinhoud van het 3^de^ hoofdstuk te toonen, dat het argeloos gebruik van een logische taal, in plaats van een wiskundige taal, de wiskunde in sommige van haar onderdeelen op een dwaalspoor heeft gebracht.

Nu nog even toelichten, waarom ik geloof, dat de logische taal uit den tijd is: trouwens dat bespraken wij eergisteren al. De wiskundige systemen die men toepast op de wereld, en die dus alleen voor representeering in de taal in aanmerking komen, zullen door de wiskundige theorie er van ons voor de praktijk wat moeten kunnen leeren. Maar de wiskunde van geheel en deel leert ons door haar theorie voor de praktijk niets nieuws: is eenmaal het systeem op een deel der aanschouwingswereld toegepast, dan leest een zeer middelmatig intellect alle consequenties direct af; en heeft hij geen intermediaire logische redeneering noodig. Men weet tegenwoordig zeer goed, dat als men voor de buitenwereld iets afleidt door logische redeneeringen, dat niet zoo direct a priori duidelijk was, het juist daarom ook totaal onbetrouwbaar is; want men gelooft niet meer aan het daaraan ten grond liggende postulaat, dat de wereld een wel zeer groot, maar eindig aantal atomen zou zijn, en dat ieder woord een (dus óók eindige) groep of groep van groepen uit die atomen zou moeten voorstellen. M.a.w. men weet zeer goed, dat de wereld geen logisch systeem is, en dat er zich niet logisch over laat redeneeren; men weet zeer goed, dat eigenlijk elk debat larie is; dat het alleen is uit te maken voor wiskundige problemen, maar dan niet door logische redeneeringen (al schijnt dat soms zoo in een gebrekkige taal; hoe valsch die schijn is, blijkt bij de axiomatische grondslagen en de transfinite getallen), maar door wiskundige redeneeringen.

De theoretische logica leert in de tegenwoordige wereld niets, en men weet dit, tenminste de verstandige menschen; zij dient nog alleen voor advocaten en volksleiders, om andere menschen niet te beleeren, maar te bedriegen, en dat dat kan, komt, doordat het vulgus onbewust redeneert: die taal met logische figuren is er, ze zal dus ook wel bruikbaar zijn, en zoo zich er gedwee mee laat bedriegen; zooals ik verscheidene menschen hun jeneverdrinken hoorde verdedigen met de woorden: "waarom is de jenever er anders?" Wie illusies heeft om de wereld te verbeteren, kan met evenveel recht tegen de taal der logische redeneeringen, als tegen den alkohol ijveren; en evenmin als het een "raar volk" is, dat geen alkohol drinkt, is het een "raar volk", dat niet logisch redeneert; hoewel ik geloof, dat misschien geen misbruik vaster zit ingeroest, als dat wat zoo met de populairste deelen der taal is samengegroeid.

Uw vraag naar aanl. van het woord bestaat op pag.141, r.5 v.o. wordt misschien beantwoord door het voorbeeld dat ik 4 regels verder geef. In de voorwaarden ligt opgesloten, dat het een eindig getal, d.i. een bekend wiskundig ding is, wat gezocht wordt; maar het is niet zeker, dat aan de voorwaarden kan worden voldaan, m.a.w. dat het wiskundige ding bestaat.

Misschien heb ik dezen wat wild geschreven brief mijn bedoeling ten slotte toch duidelijker geuit, dan door den ingetogen tekst. Maar misschien ook verschijnt na dezen brief de tekst in een ander daglicht. Dat zou mij zeer veel genoegen doen. Na vr. groeten,

Hoogachtend,
L.E.J. Brouwer

16.II.1907

Professor,

Mannoury en Barrau opponeeren beider liever niet tegen een der stellingen maar tegen dingen uit de dissertatie zelf.

Mannoury wil de intuitiviteit van enzoovoort bestrijden; wil mij laten voorlezen pag.180: "Er zijn elementen ..... onherleidbaar", en daarmee in verband brengen: pag.3: "Door zulke ..... (pag.4 regel 2 v.b.) enz." pag.142: "We hebben ..... (pag.142 regel 1 v.b.) uit gelijke elementen". Hij wil het enzoovoort handhaven als niets meer, dan een relatie tusschen relaties. Meer bijzonderheden weet ik zelf niet; dit is het eenige wat hij mij in een brief uit Helmond schrijft.

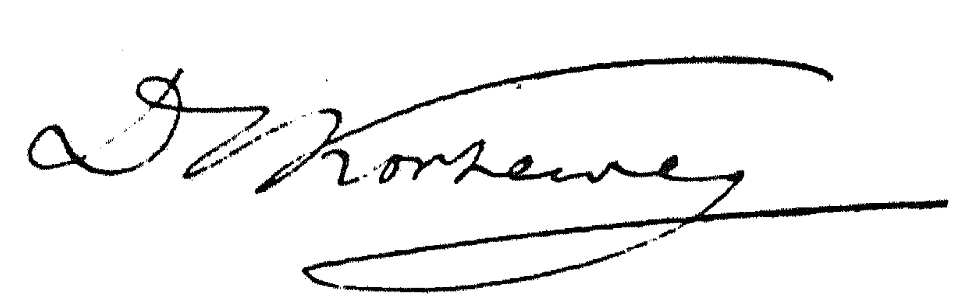
Barrau wil mij als consequentie van het alleen erkennen van een opbouw der wiskunde, zonder logica, voorhouden, dat ik het woord continuum heelemaal uit mijn dissertatie had moeten verwijderd houden, aangezien ik toch met niets dan discrete verzamelingen opereer. Hij wil mij laten voorlezen pag.8 (r.4 v.o.) "De continuumintuitie ..... (pag.9 r.3 v.b.) eigenschappen noemen", en daarmee in verband brengen: pag.62: "Het continuum als geheel was ons echter intuitief gegeven ..... geïndividualiseerd te scheppen".

Hij wil verdedigen, dat men met "discreet zonder meer", dus met het begrip "twee verschillende punten" de geheele wiskunde kan opbouwen, en mij overtuigen, dat ik op grond van eigen uitlatingen genoodzaakt zal zijn, daarmee in te stemmen.

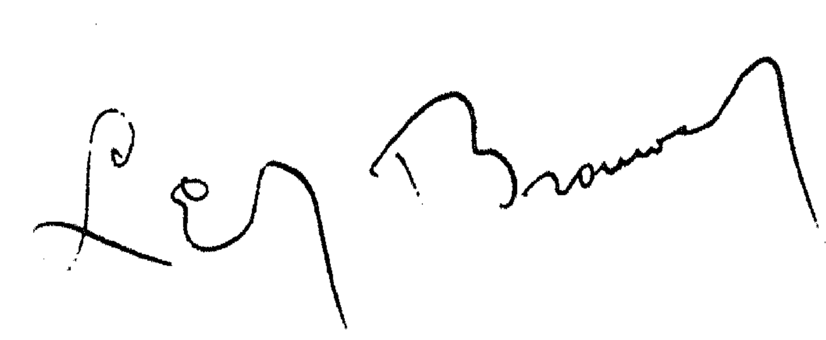
Ik denk, dat u hiermede voldoende weet van het terrein der debatten met de opponenten, en zal dus, zoo ik nog meer in bijzonderheden mocht afspreken, u maar geen nadere mededeeling meer doen, als ik niet meer van u hoor.

Na beleefde groeten,
L.E.J. Brouwer

⟦Een traditioneel onderdeel van de Amsterdamse promoties is de "oppositie vanuit de zaal". De promovendus zorgt als regel zelf voor deze externe opponenten. Dat Brouwer van te voren op de hoogte was van de vragen van Mannoury en Barrau past volledig in de traditie.⟧



Handtekening D.J. Korteweg



Handtekening L.E.J. Brouwer

ONGEPUBLICEERDE FRAGMENTEN

Wiskunde en Ervaring

Alle leven, na ontstaan te zijn als vereenzijdiging van de natuur, rekt zijn bestaan in een "veruiterlijking", een doordringing van de natuur met zichzelf, in terugdringing van andere vereenzijdigingen.[1]

De veruiterlijking der menschheid, het dienstbaar maken van de omgeving aan de ontplooiing der menschelijkheid, verschijnt ons[2] als een rechtlijnig en regelmatig worden van de natuur; waardoor al het andere leven wordt terug gedrongen of aan de menschheid aangepast.[3]

Wat is nu het essentieele van de menschelijke veruiterlijking, dat zooveel machtiger blijkt, dan de brutale assimilatie of vernieling, die van andere schepselen uitgaat? De rechtlijnigheid en regelmatigheid komt b.v. ook bij de bijen voor, maar daar brengt ze geenerlei bijzondere macht. Maar de mensch heeft een vermogen, dat al zijn wisselwerkingen met de natuur begeleid, het vermogen n.l. tot objectiveering der wereld, het zien in de wereld van herhalingen van volgreeksen, het zien in de wereld van causale systemen in den tijd.[4]

---

(1) Dât het zich veruiterlijkt, en niet te sterven legt, wordt als gemis van wijsheid, als gemis van verband met het Àl, door religie gevoeld.- Overigens snijdt het zich veruiterlijken, het willen vernietigen of willen heerschen, meteen af van alle voeding van het hart uit de natuur.- Wie heerscht, is reeds gevloekt, en het zijn gevloekte eigenschappen, die helpen tot heerschen.

(2) n.l. als wij intellectueel, met wiskundig-causalen blik de wereld bekijken.

(3) Daar het aanpassen van het milieu het steeds verder afvoert van den natuurtoestand, zoals die oorspronkelijk de menschheid droeg, wordt elk overwonnen en aangepast milieu ten slotte voor de menschheid zelf onhoudbaar.

(4) Dat zien is intusschen niets, dan een daad van veruiterlijking; van een bestaan der objectieve verschijnselen der natuur, in denzelfden zin als van een bestaan der natuur zonder meer, is geen sprake: het zien gaat uit van den bekijker, is een wilsuiting van den bekijker alleen, buiten de natuur om, die zelf bestaat voor het subject buiten zijn wil om.

Het oer-phenomeen is de tijdsintuïtie zonder meer, waarin herhaling, als "ding in den tijd, en nog eens ding", mogelijk is, maar waarin (en dit is een verschijnsel, dat buiten de wiskunde staat) ook een aandoening kan uiteenvallen in componeerende qualiteiten, zoodat een enkel levensmoment wordt geleefd als een volgreeks van qualitatief verschillende dingen. Men kan zich echter beperken tot de enkele waarneming dier volgreeksen als zoodanig, onafhankelijk van den gevoelsinhoud, dus van de verschillende schakeeringen van vreezenswaardheid en begeerenswaardheid van het in de buitenwereld waargenomene. (Beperking der attentie tot intellectueele aanschouwing.). De taktiek van het doelbeoogend doen der menschen is dan, het middel voor het doel (in de intellectueel voorgenomen reeksen het vroegere voor het later komende) in de plaats te stellen, wanneer ten opzichte van het middel het instinct de kansen in den strijd voelt beter te staan. Daar de band tusschen doel en middel echter is waargenomen in het intellect, zonder contrôle van meer centrale instincten (door welke beperking intusschen het proces juist veel intensiever kan zijn en algemeener worden toegepast), is de betrouwbaarheid van de overtuiging, dat werkelijk de deelen der volgreeks bijeen behooren, alles behalve volkomen, en kan steeds worden gelogenstraft, wat intellectueel wordt waargenomen als ontdekking, "dat de regel niet langer doorgaat".

Intusschen, in 't algemeen treft de taktiek, bestaande in het beschouwen van volgreeksen, en het in verband daarmee verspringen van doel op middel, doel, en bezorgt de menschheid haar macht(1); trouwens, trof het vermogen geen doel, dan zou het er niet zijn; zooals een leeuw geen klauwen zou hebben, als ze geen doel troffen. Het gelukt, regelmaat op een beperkt gebied van verschijnselen te ontdekken, onafhankelijk van andere levensmomenten, en andere verschijnselen, die dus bij de intellectueele aanschouwing volkomen latent kunnen blijven. Het gelukt, op die manier de natuur te lasten in een zwak, op die manier vijanden in een of ander essentieel levensgebied weerloos te maken.

(1) Er is een verschil tusschen deze vervanging van doel door middel, die op een uitsluitend actieve intellectueele waarneming berust, (waar ook die volgreeksen worden <u>gezocht</u> en niet <u>afgewacht</u>), en het streven naar iets anders dan het doel zelf, maar toch met dat doel geassocieerd, dat dus eigenlijk alleen als een deelmoment van het doel zelf optreedt; het laatste is even goed dierlijk als menschelijk.

Om de zekerheid van een waargenomen regelmaat zoo lang mogelijk te handhaven, tracht men dikwijls, systemen te isoleren, d.w.z. het als den regelmaat storend waargenomene, verwijderd te houden; zoo maakt de mensch in de natuur veel meer regelmatigheid, dan er oorspronkelijk spontaan in voorkwam; hij wenscht die regelmatigheid, omdat ze hem sterkt in den strijd om het bestaan, doordat ze hem in staat stelt te voorspellen, en zijn maatregelen te nemen.

⟦In het manuscript volgt nu een passage die vrijwel identiek is aan blz.82, -3 → blz.84, +5. Hierin is de aanhef "Het objectiveren der wereld door de oer-intuïtie van 'herhaling in tijd' en 'opvolging in tijd' wint in uitgebreidheid,...". Regel +16, blz.83 luidt ": de rest vervult de rol van onwerkelijke, physische hypothesen" — ". Tenslotte heeft regel +5, blz.84 in het manuscript een voetnoot na 'maatgetal': "Het hier gekozen voorbeeld toont, hoe onder het gezichtspunt van één enkele causaliteitswet, op grond van een door mathematische inductie bepaalde afbeelding van getalrijen op elkaar, oneindig veel causaliteitsreeksen kunnen worden samengevat".⟧

De strijdwijze, door middel van objectiveeren der wereld, dwingt de menschen, steeds meer de storende invloeden te elimineeren, en daardoor hun omgeving steeds meer te abnormalizeeren. De aard der verschijnselen van zeker gebied verandert, niet alleen doordat de storende invloeden ten opzichte van dat gebied zelf worden geëlimineerd, maar ook doordat het milieu dier verschijnselen is gedegenereerd onder den invloed van de wering der storende invloeden ten opzichte van een heel andere verschijnselgroep.

Is de toepassing dezer wetenschap een negatieve (van vernietiging), dan heeft de vereenzijdiging dikwijls niet veel gehinderd; vernietiging blijft vernietiging, onverschillig of men te voren het te vernietigen ding als iets anders beschouwde; maar bij positieve toepassing (van verkrijgen, of brengen in geschikten vorm) kunnen de voor het intellectueel bekijken storende invloeden, voor de instinctieve waarde der resultaten van essentieel belang zijn. Daardoor vermeerdert de zich steeds vervolkomenende wetenschap wel de macht tot verkrijging van resultaten, maar vermindert de waarde dier resultaten.

Merken we naar aanleiding van het voorgaande nog op, dat het "wiskundig bekijken" alleen instinctief, dus gerechtvaardigd is, voor zoover gericht op een als uitwendig geziene wereld; het te willen richten tot inwendige waarneming, is een afdwaling (trouwens daar zal men tusschen de resultaten van wiskundig bekijken van verschillende kanten nooit overeenstemming vinden); en wat Kant noemt: "Transcendentale Analytik" is als ijdel spel te qualificeren.

De objectiveering der wereld in wiskundige systemen bij verschillende individuen wordt in onderling verband gehouden door de passielooze taal, die bij den hoorder het identieke wiskundige systeem als bij den spreker doet oprijzen, terwijl de gevoelsinhoud van dat systeem bij beiden totaal verschillend kan zijn*); ook al is de bedoeling van dat samenhouden der wiskundige systemen van wereldbeschouwing bij de verschillende individuen alleen, om naar aanleiding van aan bepaalde dingen uit de systemen geknoopte associaties van begeerte of vrees, een beheerschenden invloed uit te oefenen op elkanders wil.- Reeds de schepping der taal is trouwens een echt voorbeeld van een menschelijke, on-instinctieve, op wiskundig weten gegronde daad. De gemeenschappelijkheid der wiskundige systemen is op zichzelf niet begeerlijk (aan psychische vereeniging is ze vreemd), alleen als middel.

Nog eens: Of de gevoelsvoorstellingen, door eenzelfde woord bij verschillende individuen wakker geroepen, al veel verschillen (of liever: onvergelijkbaar zijn, daar vergelijking wiskunde vooronderstelt), het hindert niet hieraan, dat op grond van de gelijkheid der relaties, immers der wiskundige systemen, de daden van den hoorder door de taal met voldoende benadering in de richting, door den spreker gewenscht, kunnen worden gedreven; ook al lijken weer de voorstellingen aan die daad verbonden bij verschillende individuen niets op elkander.

En misschien is de beste qualificatie van mystiek een gebruik van de taal, onafhankelijk van de wiskundige systemen der verstandhouding, maar ook onafhankelijk van directe dierlijke aandoeningen van vrees of begeerte. Kleedt zij zich zoodanig in, dat het lezen van voorstellingen van de beide zooeven genoemde groepen, onmogelijk is, dan kunnen misschien die contemplatieve gedachten, waarvan de in het wiskundig systeem levende, de wiskundige vereenzijdigingen zijn, weer ongetroebeld doorbreken, daar er geen wiskundig systeem is, dat ze verwringt(1). En waar de mystieke schrijver

---

*) ⟦Opm. van Korteweg in de kantlijn⟧: de gevoelsinhoud bij beiden is correspondeerend, maar niet gelijk; die gelijkheid is zelfs onbruikbaar; alleen het door den spreker gewenschte succes kan de ondervinding aan de taal verbinden. Maar gelijkheid van wiskundigen inhoud bij spreker en hoorder is zeer goed bereikbaar.

(1) Zoo zal bij het woord tijd eerst, waar het onmogelijk is, er de onafhankelijk variabele coördinaat der mechanica bij te denken, kans zijn, dat het bewustzijn van eenzame zwakheid, van verlaten zwerven na verworpen leiding, doorbreekt.

voorstellingen van de laatste soort samenvoegt tot meer centrale aandoeningen, waarvan ze vereenzijdigingen waren, kan hij met de gewoonste woorden stoot voor stoot de weerstanden om de contemplatieve sfeer verbreken, en terug geleiden naar het "alles-omvattende", dat iedere dichter zoekt te benaderen.

Zijn taal zal dus voor hen, die in woorden slechts meedeeling van wiskundige systemen, of aansporing tot wiskundig-systematische daden verwachten te hooren, zinloos zijn. En zelfs zal de mystieke schrijver alles wat naar wiskunde of logica zweemt, zorgvuldig trachten te vermijden; anders worden zwakke geesten er allicht door gebracht tot wiskundig gelooven en wiskundig handelen buiten het gebied, waar hetzij de gemeenschap, hetzij hun persoonlijke levensstrijd het eischt, en komen zoo tot allerlei dwaasheden.

We releveren, dat het blijkt te gaan in de wereld herhaling van voor ons instinct ongeveer gelijkwaardige (of ten opzichte van benaderde gelijkwaardigheid door mathematische inductie onder één gezichtspunt te brengen) volgreeksen op te merken, dat het in het bijzonder "gaat", een volgreeks van ω termen te stellen, waarop b.v. het meten van den tijd berust.

⟦De laatste passage is door Korteweg in de kantlijn als volgt geformuleerd: "Wij merken derhalve op dat het gelukt onder de door de waarneming gegeven volgreeksen er ongeveer gelijkwaardige op te merken (of liever die ten opzichte van benaderde gelijkwaardigheid door mathematische inductie onder één gezichtspunt te brengen zijn); dat het in het bijzonder "gaat" een volgreeks van ω termen te stellen, waarop b.v. het meten van den tijd berust".
Brouwer heeft deze formulering niet overgenomen.
Het vervolg van de tekst is in de dissertatie opgenomen, vanaf blz.85, regel +6. In het manuscript ontbreken dan blz. 7,8,9 en blz.10 is als eerstvolgende afgekeurde bladzijde weer aanwezig. Door het ontbreken van bladzijde 9 is de tekst van bladzijde 10 niet met volstrekte zekerheid te plaatsen ten opzichte van de uiteindelijke tekst van de dissertatie. De inhoud maakt het aannemelijk dat de passage *Waarde der "verklaring" van verschijnselen* (blz.91) de nu volgende afgekeurde passage vervangt.⟧

Moet het nu niet verwonderen, dat het werkelijk gelukt, niet alleen om volgreeksen, die telkens terugkeeren, op te merken, maar dat zoovele groepen van verschijnselen, die de naieve zintuigen geheel verschillend aandoen, zich laten brengen onder enkele algemeene gezichtspunten, die zich dekken met eenvoudig construeerbare wiskundige systemen? Dat zou werkelijk een wonder zijn, maar bedenken we, dat de physicus zich slechts met de projecties der verschijnselen, op zijn, alle volgens een gelijksoortig procédé uit vrij gelijksoortige vaste lichamen opgebouwde meetwerktuigen bezighoudt, en dat het niet te verwonderen is, dat dus de verschijnselen gedwongen worden aan het gelijksoortige, òf gelijksoortige "wetten" òf geen wetten mee te deelen. De wetten der astronomie b.v. zijn niet meer dan de wetten van onze meetwerktuigen, als ze worden gebruikt, om den loop der hemellichamen te volgen.

En daarom heeft de wetenschap ook alleen zin als factor in den strijd der menschen tegen de natuur om hun medemenschen door tellende en metende berekening, m.a.w. de natuurwetenschap heeft waarde als wapen, maar raakt verder het leven niet, ja is er even storend, als alles wat aan strijd annex is.

Terwijl wiskunde, om zichzelf bedreven, alle harmonie, (dat is overstelpende veelheid van verschillende, zichtbare eenvoudige gebouwen, in eenzelfde samenvattend gebouw) van muziek en architectuur kan verkrijgen en al de ongeoorloofde genietingen kan geven, die liggen in de vrije ontplooiing van faculteiten, zonder dwang van buiten[1].

Poincaré is ("La Valeur de la Science" pag.264) geneigd alle esthetische aandoening te herleiden op zulk een harmonie-aandoening. Misschien verstaat hij onder esthetische aandoening eenvoudig hetzelfde als harmonie-aandoening; maar hij zegt meer, n.l. dat er buiten wetenschap en esthetica niets is, dan "le pur néant". Hij schijnt dus te gelooven, dat het die esthetische aandoening kan zijn, waarvan als het zoo moeilijk bewaarde, hoogste goed der menschen wordt gesproken; wat wijst op het verblindende ook voor hem van ongeoorloofde vrije ontplooiing van faculteiten.

Nog een opmerking: Wij scheppen de wiskundige systemen in de buitenwereld als moment in onze veruiterlijking, dat is zelfhandhaving daartegen; en daar een "object" niets anders is, dan een met betrekking tot andere

---

(1) ⟦De volgende voetnoot is door Brouwer met potlood in de kantlijn geschreven.⟧ "Wisk. systemen zonder architektonische waarde hebben dus alleen recht van bestaan, voorzoover geschikt als physische hypothesen in den strijd om het bestaan. Wiskundig bekijken van eigen gedachten, of van eigen taal, heeft geen nut in den strijd om het bestaan, daar de hier toepasbare systemen bovendien van primitieve eenvoudigheid zijn, blijft er geen redelijke grond voor de beoefening van dit soort van wiskunde."

variabele causaliteitsreeksen constante causaliteitsreeks[(1)] (zoo in de eerste plaats de rigide lichamen, wier bewegingsgroep bij zooveel wisselingen invariant blijft; maar even objectief is b.v. de energie van een systeem, als de stoffelijke deelen ervan), kunnen we zeggen: wij scheppen in vrijheid de objectieve wereld[(2)].

En in zooverre komt voor den adept, die zich niet meer veruiterlijken wil, een niets, daar de objectieve wereld voor hem verdwijnt. En in zooverre heeft Poincaré, als verdediger der wetenschap, als der aan anderen meedeelbare gedachte, gelijk, waar hij zegt: "Tout ce qui n'est pas pensée, est le pur néant" ("La Valeur de la Science" pag.276).

Welk oordeel vloeit uit de bovenstaande ontwikkelingen ten opzichte van Kant's transcendentale Aesthetica? Voor den tijd blijft waar, dat van hem de mogelijkheid van onze veruiterlijking op grond van de aanschouwing van causale volgreeksen afhankelijk is, en ook dat zijn eigenschappen onafhankelijk van den aard dier aanschouwingen a priori vaststaan. We kunnen nog verder gaan, en zeggen dat de schepping van den tijd als matrix van momenten, een vrije daad van ons zelf is; met die schepping zijn echter tegelijk de voorwaarden en alle elementen tot den opbouw der geheele wiskunde gegeven; een der gebouwen daaruit is de Euclidische driedimensionale meetkunde, en dat die een geschikt schema is, om in een eenvoudige taal een groep van verschijnselen te beheerschen, en een waarneming a posteriori zoo goed als elke ontdekking van een bruikbare physische hypothese.

---

(1) Een object is dus alleen relatief andere verschijnselen.

(2) Het toekennen aan die objectieve wereld van een bestaan, onafhankelijk van de menschen zelf, is iets, wat alleen een gewoonte is geworden, door haar leven in de verstandhouding tusschen de menschen, waarin zij als het aan alle menschen gemeenschappelijke wordt gescheiden van de onderling zoo streng gescheiden individuen.
Opmerkelijk is, dat velen, die de aanschouwingswereld niet meer als objectief bekijken, wel hun eigen voorstellingen van die aanschouwingswereld objectiveeren, wat toch nog onbezonnener is, dan het eerste.

[De hierop volgende passage op bladzijde 12 is niet doorgestreept, maar niettemin in aanzienlijk uitgebreide versie in de dissertatie opgenomen vanaf bladzijde 94. Op bladzijde 113 e.v. vat Brouwer de "totale strekking van het werk" (d.w.z. Russell's Foundation of Geometry) samen. Bladzijde 20 van het manuscript geeft een voorafgaande versie (die niet doorgestreept is), die wij nu laten volgen.]

Kant had de Euclidische geometrie als a priori verklaard, maar dit is slechts gedeeltelijk waar. De projectieve meetkunde is a priori, evenzoo in de metrische meetkunde de aan de Euclidische en niet-Euclidische meetkunde gemeenschappelijke eigenschappen. Maar de eigenschappen, die Euclidische van de niet-Euclidische meetkunde onderscheiden zijn empirisch, en evenzoo de driedimensionaliteit der empirische ruimte.

Nu is het woord "a priori" een vage term. Kant sprak van "synthetische oordelen a priori", en bedoelde daarmee (b.v. ten opzichte van de ruimte), dat de ruimte-intuïtie als geheel als matrix van bepaalde ruimteconstructies optreedt, en dus de noodzakelijke bestaansvoorwaarde daarvoor is, en geen andere ruimteconstructies mogelijk zijn dan op grond van die matrix; in de taal wordt het spontaan afleren van de bouw-mogelijkheden uit die matrix dan gebeeld als <u>synthetisch oordeelen a priori</u>. In dien zin erkennen wij "synthetische oordeelen a priori" alleen voor de continuum-intuïtie als puntenmatrix en inderdaad is eerst dáárna mogelijk het denken van veeleenigheid, van ongescheiden onderscheidenheid, dus ook het samendenken van verschillende elementen in één systeem, m.a.w. alle wiskundige bouw.

[In het manuscript besluit Brouwer hoofdstuk III met enkele bespiegelingen, die door Korteweg van het volgende commentaar voorzien werden: "Hier zou ik het nu liever bij laten en zoo ge dit gewenscht acht het nu volgende liever later buiten uwe dissertatie geven en tot zijn volle recht brengen. Het wordt na het vervallen van een deel van het tweede hoofdstuk toch niet meer begrijpelijk". Het onderstaande volgt op bladzijde 177.]

In het beschouwen van de taal als iets essentieels - en niet als een gebrekkig instrument, dat men buiten het allernoodzakelijkste gebruik, wat steeds een malaise van halve bevrediging achterlaat, zooveel mogelijk dient te ignoreeren -, ligt de oorsprong van allerlei triviale philosophieën. We zullen daar slechts zeer in 't kort op ingaan, maar, daar het op het vorige licht terugwerpt, een paar punten aanstippen.

Vooreerst de Kant'sche antinomieën[2] berusten op den waan, dat

(2) In physica zijn antinomieën natuurlijk geoorloofd; contradictore systemen kunnen elk voor zich in den strijd hun diensten bewijzen; toch zal men trachten, door samenvatten van hypothesen zich er van te bevrijden.

woorden als "wereld", "natuur", "tijd", "vrijheid", omdat ze nu en dan in zuivere, d.i. wiskundige redeneeringen optreden, waarbij intusschen hun wiskundige functie steeds varieert, nu ook op zich zelf als representanten van een objectief, dat is, wiskundig bestaand, ding moeten worden gehoord. Daar ze dat nu nog niet zijn, heeft de filosoof volle vrijheid om als wiskundig systeem achter die woorden nog te bouwen, wat hij wil, als het maar zóó is, dat het gewone taalgebruik van het woord op grond van die wiskundige hypothese, niet absurd wordt, en dat zijn er allicht meer dan een.

En dan is het misschien niet gewaagd, te zeggen, dat de "eenheid van tegendeelen", waarover sommige philosophen zoo graag spreken, hierop neerkomt, dat de taal van de complex van gesuperponeerde gebouwen, die elk wiskundig systeem is, er maar één direct expliciet kan aanduiden, maar daardoor toch direct alle andere er uit suggereert. Zoodat, wat ook een geliefkoosde uitdrukking voor hen is, het met hetgeen de taal direct zegt, "nooit uit is".(3)

De heillooze verwarring door het <u>bewust</u> gebruiken van de taal en zoo haar boven de wiskunde willen stellen, die ze begeleidt, vinden we terug, maar de wiskunde wil worden gesteld boven het leven, dat zij als eenvoudig strijdmiddel begeleidt; de <u>daad</u>, <u>het mystieke</u>, kan in laatste instantie nooit worden gedirigeerd door <u>het weten</u>, <u>de wiskunde</u>.

Het gebruik van de taal is echter ook hier weer de oorzaak van veel kwaad, doordien een onwiskundig idee, door een woord gebeeld, gevaar loopt, afhankelijk te worden gedacht van zijn wiskundig synoniem, waarin een suggestie ligt tot dooden van het idee door de parallelle intellectueele gedachte. Zoo bestaat er een <u>causaliteit</u> <u>in het leven</u>, die de vrije veruiterlijking is in den vorm van een splitsing in den tijd van een eenheid in tweeën, die toch als verbonden blijven gezien; en een <u>is de wetenschap</u>, die niets is dan een iuxtapositie van systemen langs een veranderlijke continue of discontinue coördinaat, dien we den tijd noemen. Het gevaar is,

---

(3) Al worden vaak, om het beginsel overal te kunnen doordrijven, stilzwijgend sprongen gemaakt van wiskunde van een lager naar een hooger orde, zoo wordt "noodzakelijk", begeleidend woord van een moment in het mechanisch zien van de wereld, als men die daad zelf in een hooger orde van wiskunde meer (in ijdel spel) objectiveert, natuurlijk niet meer als noodzakelijk gezien en kan men zeggen: de werkelijkheid verschijnt zoo als toevallig. Maar om dan als philosophisch inzicht te proclameeren, dat hier de tegendeelen "noodzakelijk" en "toevallig" zich aan elkander "waar maken" en "opheffen" in de "<u>werkelijkheid</u>"!

de intuïtie voor de eerste causaliteit te verliezen door uitsluitend de gewoonte van de tweede, hetzij zelf verworven, hetzij aangeleerd, als richting voor zijn leven te gebruiken. Zoo bestaat er een contradictie in het leven, waar twee vereenzijdigingen van het instinct tegen elkaar botsen en zoo elkaars onhoudbaarheid bewijzen (en het is de vrije moraliteit, die kiest tusschen òf een ontvluchten van één der instincten, dat het zwakste blijkt, òf een oplossing van beide tot een diepere harmonie door inkeering); en een in de wetenschap, waar het blijkt, dat een gegeven wiskundig systeem niet in een ander gegeven systeem kan worden ingepast. Het gevaar is, den zin voor de eerste contradictie te verliezen, doordat men de tweede als richting voor zijn leven tracht te gebruiken.

Samenvatting

De wiskunde is een vrije schepping; zij bestaat in de ontwikkeling van een oerintuïtie; die men kan noemen: "constantheid in wisseling" of "discreet in continu".
Haar toepassing op de buitenwereld, is de schepping der objectieve wereld, die in den algemeenen strijd om het bestaan de strijdwijze der menschen kenmerkt. Als zoodanig verschijnt zij als iets minderwaardigs en heeft met religie en wijsheid niets uit te staan.
Dat empirisch zou kunnen blijken, dat één wiskundig gebouw, zij het de Euclidische ruimte of de electronentheorie, meer waar zou zijn dan een ander, is uitgesloten.

Definities mogen nooit zelf weer wiskundig worden bekeken, maar mogen alleen een middel zijn, om eigen herinnering of mededeeling aan anderen van een gebouw te begeleiden. Er zijn elementen van bouwing, die ook in de definities de elementen moeten blijven, die bij mededeeling door een enkele klank weerklank moeten vinden: het zijn de uit de continuumintuïtie afgelezen bouwmogelijkheden; klanken als "continu", "discreet", "eenheid", "nog eens", "enzoovoort" zijn onherleidbaar. Een logische opbouw der wiskunde onafhankelijk van de intuïtie is onmogelijk, daar op die manier slechts een taalgebouw wordt verkregen, dat van de eigenlijke wiskunde onherroepelijk gescheiden blijft, en dat trouwens, evengoed als de wiskunde zelf, de wiskundige oerintuïtie noodig heeft.

⟦De samenvatting in de dissertatie (blz.179,180) is niet geheel identiek met de bovenstaande samenvatting. De laatste bladzijde van het manuscript bevat nog de volgende toevoeging bij hoofdstuk II.⟧

Een gevaar bij de veruiterlijking door wiskunde is, dat men wel grooter virtuositeit in het kennen der toepasselijke wiskundige systemen krijgt, maar verleert tot welke (steeds zeer gecompliceerdere) daden de toegepaste punten in het wiskundig systeem aanleiding moeten geven (het alles in aanmerking nemend instinct is men kwijt; trouwens, had men dat streng, dan zou het de vereenzijdiging in wiskunde, die steeds aan den sprong van doel - middel vooraf gaat, hardnekkig weigeren).

L.E.J. Brouwer

OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. J. ROTGANS, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 19 FEBRUARI 1907 DES NAMIDDAGS TE 3 URE IN DE AULA DER UNIVERSITEIT

DOOR LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER,
GEBOREN TE OVERSCHIE

Bij het indienen van dit proefschrift blijft mij de aangename plicht, u, hooggeleerde VAN DER WAALS, VAN PESCH, SISSINGH, ZEEMAN *te danken voor het onderricht, dat ik van u heb mogen ontvangen.*

En in het bijzonder u, hooggeachte promotor KORTEWEG *voor den grooten invloed op mijn wetenschappelijke vorming uitgeoefend, en voor de tegemoetkoming, belangstelling, en aanmoediging steeds van u ondervonden.*

INDEX.

I.

DE OPBOUW DER WISKUNDE

Rekenkunde der geheele getallen.

„Een, twee, drie . . . .", de rij dezer klanken (gesproken ordinaal-getallen) kennen we uit ons hoofd als een reeks zonder einde, d. w. z. die zich altijd door voortzet volgens een als vast gekende wet.

Naast deze rij van klankbeelden bezitten we andere volgens een vaste wet voortschrijdende voorstellingsreeksen, zoo de rij der schriftteekens (geschreven ordinaal-getallen) 1, 2, 3 . . . .

Deze dingen zijn intuitief duidelijk.

Laat ik nu de rij afbreken b.v. bij 23, en laat ik er dezelfde afgebroken rij nog eens onder schrijven; tusschen beide rijen bestaat dan een correspondentie één aan één. Verwissel ik twee van de getallen der bovenste rij van plaats, dan blijft de correspondentie één aan één bestaan. Door zulke verwisselingen kan ik zorgen, dat een uitgekozen element van de eerste rij correspondeert met het element 1 der tweede rij; dán dat een uitgekozen element van de overblijvende der eerste rij correspondeert met het element 2 der tweede rij, enz.; ik kan m. a. w. een ,,willekeurige volgorde'' in de elementen der eerste rij aanbrengen; maar de ordinaalgetallenreeks der tweede rij, waarmee ze correspondeert, blijft dezelfde. Hieruit volgt, dat een willekeurige verzameling van gestelde teekens, die eenmaal geteld is, in een andere volgorde geteld, hetzelfde ,,aantal'' zal geven, d. w. z. de reeks der ordinaalgetallen, waarmee ze één aan één in correspondentie is gebracht, zal bij hetzelfde getal afbreken. (Hoofdstelling der rekenkunde).

Onder $3 + 4$ versta ik: Eerst tellen tot 3, en dan doorgaan met tellen, maar de vervolgens komende elementen één aan één correspondeeren laten met de reeks der ordinaalgetallen 1 . . . 4. Uit de hoofdstelling der rekenkunde volgt: $3 + 4 = 4 + 3$ [1]. Evenzoo $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$.

Onder 9×4 versta ik: Tel tot 4, zet dan op een andere rij het cijfer 1; tel op de eerste rij nog 4 er bij (de reeds beschreven operatie ,,$+ 4$''), zet dan op de tweede rij het cijfer 2, enz.; totdat op de tweede rij het cijfer 9 bereikt is. Onder 9×4

[1]) Immers $3 + 4$ voert tot $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$, waar $4 - 5 - 6 - 7$ één aan één correspondeert met $1 - 2 - 3 - 4$. Door verwisseling ontstaat $4 - 5 - 6 - 7 - 1 - 2 - 3$. Hier correspondeert $4 - 5 - 6 - 7$ nog steeds met $1 - 2 - 3 - 4$ en $1 - 2 - 3$ met zich zelf. De geheele rij correspondeert derhalve één aan één met die welke door het aftellen van $4 + 3$ ontstaat.

wordt verstaan het dan op de eerste rij bereikte getal. Met behulp der hoofdstelling zijn eenvoudig af te leiden:

$9 \times 4 = 4 \times 9$; $(9 \times 4) \times 5 = 9 \times (4 \times 5)$; $9 \times (4 + 5) = (9 \times 4) + (9 \times 5)$.

Onder 4^5 versta ik: Tel eerst tot 4, zet dan op een andere rij het cijfer 1; voer daarna de reeds beschreven operatie „$4 \times$" uit en zet op de tweede rij het cijfer 2; voer wederom die operatie uit en zet het cijfer 3, en ga daarmee voort tot op die tweede rij het cijfer 5 verkregen is. Onder 4^5 wordt verstaan het dan op de eerste rij bereikte getal.

Negatieve getallen.

We kunnen nu de rij der ordinaalgetallen naar links voortzetten met 0, — 1, — 2, enz., uit tellingen in twee richtingen de optelling van algebraische geheele getallen definieeren, daaruit de aftrekking en de vermenigvuldiging met een positieven factor; vervolgens de operatie —( ), en aantoonen dat die met de vermenigvuldiging commutatief en associatief is, waaruit dan de definitie en eigenschappen van vermenigvuldiging met een negatief getal voortvloeien.

Gebroken getallen.

Onder een rationaal getal verstaan we een paar van ordinaalgetallen, geschreven $\frac{a}{b}$, waarvan we, door $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ te stellen, altijd kunnen zorgen, dat het tweede, de „noemer", positief is. We rangschikken ze onderling, door $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$ te stellen, zoo $(a \times d) \gtreqless (b \times c)$.

We rangschikken ze tusschen de ordinaalgetallen, door $\frac{a}{1} = a$ te stellen. Onder $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ verstaan we $\frac{ad + bc}{bd}$; onder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ verstaan we $\frac{ac}{bd}$. De commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen zijn nu licht te bewijzen; ook volgt eenvoudig, als we „—" en „:" op de bekende wijze door middel van „+" en „×" definieeren: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Irrationale getallen. Vervolgens kunnen we stap voor stap de gebruikelijke irrationalen, (in de eerste plaats de vormen met gebroken exponenten) invoeren, door ze als een symbolisch agglomeraat van reeds ingevoerde getallen te schrijven [1]), en daarin verder te lezen een verdeeling dier reeds ingevoerde getallen in twee klassen, de tweede waarvan geheel op de eerste volgt, en geen eerste element heeft [2]); de orderelatie (d. w. z. de voorwaarde voor $\gtreqless$) der nieuwe getallen tusschen de oude wordt dan op grond van die schei-

[1]) Zoo zullen b. v. de wortels van een hoogeremachtsvergelijking worden gelezen als symbolisch agglomeraat van haar coëfficienten, aangevuld met een rangcijfer, dat de verschillende wortels, [gerangschikt b. v. eerst naar den modulus en voor gelijke modulus naar het argument], van elkander onderscheidt.

[2]) terwijl daarentegen de eerste dezer klassen somtijds een der reeds ingevoerde getallen als laatste element bezitten kan (zooals 2 bij $4^{\frac{1}{2}}$).

ding vastgesteld; evenzoo de bewerkingen met de nieuwe getallen, die aan weer nieuwe getallen het aanzijn kunnen geven, en ten slotte worden de reeds vroeger ingevoerde getallen eenduidig met een gedeelte der nieuwe symbolen in correspondentie gebracht, n.l. met diegene, die in de oude getallen een laagste klasse met een hoogste element bepaalden. De ingevoerde symbolische agglomeraten kunnen elk eindig aantal willekeurige reeds ingevoerde getallen bevatten. Daaruit volgt, dat op elk punt van ontwikkeling der theorie het geheel der bekende getallen *aftelbaar* [1]) blijft. Immers een aftelbaar aantal aftelbare hoeveelheden is volgens een eenvoudig bewijs van CANTOR (Journ. f. Math. 84, pag. 243) ook aftelbaar.

Het geheel der getallen, die men zoo op elk punt van ontwikkeling der theorie heeft ingevoerd, heeft verder de eigenschap, dat het *in zich overal dicht* is, d.w.z. dat tusschen elke twee nog verdere elementen liggen [2]). Het heeft dus volgens CANTOR (Math. Annalen 46) het ordetype η der rationale getallen, d.w.z. is met behoud der orde-

---

[1]) d. w. z. in uniforme correspondentie te brengen met de reeks der ordinaalgetallen.

[2]) In het bijzonder liggen tusschen elke twee een oneindig aantal rationale getallen, hetgeen we uitdrukken door te zeggen, dat het systeem der rationale getallen ten opzichte van het geheel der ingevoerde getallen *relatief dicht* ligt.

relaties op het systeem der rationale getallen af te beelden.

Het zou niet moeilijk zijn, de nieuwe getallen zoo in te voeren, dat het ordetype η verloren ging, — we zullen daarvan bij den opbouw der meetkunde voorbeelden zien — maar men doet het op de aangegeven wijze uit overwegingen van doelmatigheid, die verband houden met de schepping van het *meetbaar continuum*, dat we nu gaan beschouwen.

Het continuum. In de volgende hoofdstukken zullen we nader ingaan op de oer-intuitie der wiskunde (en van alle werking van het intellect) als het van qualiteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, een eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een ,,tusschen", dat door inschakeling van nieuwe eenheden, zich nooit uitput. Waar dus in die oer-intuitie continu en discreet als onafscheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op zichzelf gestelde andere op te bouwen; immers het is al onmogelijk, dat andere op zichzelf te stellen. De continuum-intuitie, het ,,vloeiende", dus als oorspronkelijk erkennende, zoo goed als het samendenken van meerdere dingen in één, die aan elk wiskundig gebouw ten grondslag ligt, kunnen we van het continuum als „matrix van samen te denken punten" eigenschappen noemen.

Vooreerst is er geen eerste of laatste punt; een puntrij van het ordetype van alle positieve en negatieve getallen is er gemakkelijk op te bouwen; nemen we vervolgens in elk interval weer een punt, in elk der zoo komende intervallen weer, enz., dan krijgen we het ordetype η op het continuum; dat we op deze wijze het eenvoudigste laten correspondeeren met het systeem der eindige duaalbreuken [1]), maar we zouden het even goed kunnen lezen als een der boven ingevoerde in zich overal dichte getallensystemen; we zien dan direct, dat er op het continuum nog punten zijn, die niet na een eindig aantal der genoemde operaties, elk bestaande in de invoeging van een punt in alle intervallen [2]), bereikt worden; immers we kunnen, een bepaald punt P uitkiezend, bij het construeeren der schaal zorgen, dat we buiten dat punt blijven; we kunnen zelfs zorgen, dat de benadering van het punt door een oneindige duaalbreuk volgens een willekeurige denkbare voortschrijdingswet plaats heeft; terwijl dan

---

[1]) dat wil zeggen de in het tweetallig stelsel geschreven breuken, waarin dus voor en achter de komma geen andere cijfers dan 1 en o optreden.

[2]) We kunnen die operatie de „tweedeeling" der intervallen noemen.

toch het continuum met schaal, op deze wijze geconstrueerd, in niets zich onderscheidt van een continuum met geheel vrij geconstrueerde schaal; omgekeerd leiden we hieruit af, dat voor een eenmaal op het continuum geconstrueerde schaal voor elke denkbare voortschrijdingswet een punt bestaat.

We kunnen de benaderingsreeks van een *bepaald aangewezen* punt evenveel nooit *af* denken, dus moeten haar als gedeeltelijk onbekend beschouwen.

Uit het voorkomen van elke willekeurige benaderingswet is volgens CANTOR (Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung I, pag. 77; vgl. SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre, ibid. VIII pag. 20) af te leiden, dat niet alle punten van het continuum zijn af te tellen, d. w. z. dat er buiten elke aftelbare hoeveelheid van zulke punten nog andere zijn; (terwijl we hebben gezien, dat het systeem der *opgebouwde* getallen, die eveneens zijn te benaderen door een eindige of oneindige duaalbreuk, in elk stadium der theorie aftelbaar is.)

Het meetbaar continuum.

Als we de duale schaal naar willekeur construeeren, is het niet zeker dat ze *overal dicht* wordt, d. w. z. in elk segment van het continuum doordringt. Maar we spreken af, dat we elk segment, waarin de schaal niet doordringt, tot een enkel punt denken samengetrokken, m. a. w. we stellen twee punten alleen dán verschillend, als hun duale benaderingsbreuken na een eindig aantal cijfers gaan verschillen.

Nemen we op de geconstrueerde schaal nog een willekeurig punt als nulpunt aan, dan heeft de schaal het continuum tot een *meetbaar continuum* gemaakt. Uit de meetbaarheid leiden we af, dat elk aftelbaar oneindig aantal punten, gelegen binnen een door twee punten begrensd segment, minstens één grenspunt heeft, d.w.z. minstens één punt zóó, dat naar minstens een van beide kanten binnen elk er aan grenzend segment, hoe klein ook, nog andere punten liggen. [1]) (Immers anders zou er een kortste afstand tusschen puntenparen zijn, en die zou op

---

[1]) Door op een segment tusschen twee punten van het continuum, en die punten niet bevattend, een puntrij van het ordetype van alle positieve en negatieve geheele getallen te construeeren, die volgens de maat der duale schaal onbepaald nadert tot de beide eindpunten van het segment, en daartusschen een nieuwe duale schaal te construeeren, die in elk deelsegment van het gegeven segment indringt, toonen we aan, dat het genoemde segment als puntenmatrix gelijkwaardig is met het geheele continuum; beide vormen een zoogenaamd *open continuum*.

We kunnen hieruit als volgt het *gesloten continuum* opbouwen.

$$\alpha \qquad \overset{P}{\gamma . \delta} \qquad \beta$$

Een willekeurig punt P op een open continuum $\alpha\beta$ heeft links en rechts van zich twee nieuwe open continua $\alpha\gamma$ en $\delta\beta$. Omgekeerd bouwen we uit twee open continua $\alpha\gamma$ en $\delta\beta$ een nieuw open continuum $\alpha\beta$ op, door γ en δ door invoeging van een enkel punt P aan elkaar te koppelen. We kunnen nu echter een analoge operatie nog eens doen, door ook α en β door invoeging van een enkel punt aan elkaar te koppelen; dan hebben we een gesloten continuum gekregen.

het eindige segment slechts een eindig aantal malen kunnen worden afgepast.)

De verschuivingstransformatie.

We gaan over tot beschouwingen van transformaties van punten van het meetbaar continuum in elkander, en beginnen met de *verschuivingstransformatie*, die wij uitdrukken door „+ a", als a het punt is, waarin het nulpunt overgaat. Zij is op grond van de schaalverdeeling direct duidelijk; en we zien, dat die operatie een *groep* vormt (dit volgt uit de associatieve eigenschap der optelling), en ook dat ze commutatief is. (d. w. z. dat $a + b = b + a$, dat de operatie „+ b" op a toegepast, hetzelfde resultaat geeft als de operatie „+ a" op b toegepast). [1]).

Van de genoemde groep gelden de volgende eigenschappen:

1°. Ze is *eenledig continu*, d. i. de verschillende transformaties zijn langs een lineair continuum te rangschikken zóó, dat met een continue beweging langs dat beeldcontinuum correspondeeren gelijktijdige continue bewegingen voor alle punten van het getransformeerd wordende continuum.

2°. Ze is *uniform*, d. w. z. elke transformatie

---

[1]) Voor punten der geconstrueerde schaal volgt die commutatieve eigenschap uit de commutatieve eigenschap der optelling van rationale getallen, terwijl voor punten a en b niet tot die schaal behoorende $a + b$ en $b + a$ dezelfde opvolgende benaderingspunten op de schaal geven, waaruit dan op grond van de meetbaarheid van het continuum volgt, dat ze gelijk zijn.

voert twee verschillende punten weer in twee verschillende punten over.

3⁰. Ze is *afgesloten,* d. w. z. is A_1, A_2, A_3.... een aftelbaar oneindige puntrij, die op het meetbaar continuum A tot grenspunt heeft, en evenzoo B_1, B_2, B_3.... een aftelbaar oneindige puntrij, die op het meetbaar continuum B tot grenspunt heeft, en is er een transformatie van de groep, die het puntenpaar A_1 B_1 overvoert in A_2 B_2, evenzoo een transformatie, die het overvoert in A_3 B_3, enz., dan is er ook een transformatie, die het overvoert in AB.

Groepdefinitie der optelling op het continuum.

Zij nu gegeven een willekeurige transformatiegroep op het meetbaar continuum, die de 3 bovengenoemde eigenschappen bezit, die dus is eenledig continu, uniform en afgesloten. We kunnen dan daaruit de volgende verdere eigenschappen afleiden.

4⁰. De volgorde der punten moet bij alle transformaties onveranderd blijven; immers anders zouden twee punten, wier volgorde veranderd is, elkaar op hun continue banen ontmoet hebben, en zou de uniformiteit der groep gestoord zijn.

5⁰. Twee verschillende punten kunnen niet door transformaties uit de groep elkander in 't eindige onbepaald naderen. Immers dan zou uit de afgeslotenheid volgen, dat ze samen in een gemeenschappelijk grenspunt konden overgaan, hetgeen weer zou strijden tegen de uniformiteit.

6⁰. Een grenspunt van een puntrij gaat bij een transformatie over in een grenspunt van de getransformeerde puntrij. Immers kiezen we uit de eerste puntrij een rij p uit, waarvan elk volgend punt rechts (resp. links) van het voorgaande ligt, en die zoo het grenspunt in kwestie P benadert, dan geeft die rij bij transformatie een eveneens aftelbaar oneindige rij q, waarvan elk volgend punt rechts (resp. links) van het voorgaande ligt. Zij verder Q het punt, waarin P door de transformatie wordt overgevoerd, dan ligt er geen punt tusschen Q en alle punten q, omdat er geen punt ligt tusschen P en alle punten p; Q is dus grenspunt van q.

Kiezen we nu een willekeurig punt als nulpunt, en gaan we uit van een willekeurige transformatie uit de groep, die het punt o overvoert in het punt a, en die we daarom noemen de transformatie „$+$ a". Het punt, waarin het punt a door de transformatie wordt overgevoerd, noemen we 2a; dat, waarin het punt 2a wordt overgevoerd, 3a; enz. Door de transformatie is nu een uniforme correspondentie tusschen de punten der zoo geconstrueerde segmenten bepaald.

Tusschen het punt o en het punt a moet ergens een punt b liggen zóó, dat de transformatie, die o in b overvoert, b in a overvoert, dat dus de operatie „$+$ b", tweemaal achtereen toegepast, aequivalent is met de operatie „$+$ a". We stellen $b = \frac{1}{2} a$, en de correspondeerende punten van b in de verdere segmenten tusschen na en $(n + 1)$ a, analoog $=$ $\frac{3}{2}$ a, $\frac{5}{2}$ a enz. Het continuum is nu verdeeld in segmenten $= b = \frac{1}{2}$ a, en de punten van al die segmenten zijn in uniforme correspondentie.

Zoo voortgaande, construeeren we uit de operatie „$+$ c", die, tweemaal achtereen toegepast, aequivalent is met „$+$ b", een verdeeling van het continuum in segmenten $= c = \frac{1}{2}$ b $= \frac{1}{4}$ a, en krijgen ten slotte een volledige, in zich overal dichte, duale schaal, die de volgende eigenschappen heeft:

a. Ze heeft links noch rechts een begrenzend punt; immers dan zouden de punten a, 2a, 3a enz. een grenspunt hebben, en zouden de punten a en 2a elkaar bij dat grenspunt onbepaald kunnen naderen, hetgeen zou strijden tegen de boven onder 5° genoemde eigenschap.

b. Ze ligt op het meetbaar continuum overal dicht, d. w. z. dringt in elk segment van het meetbaar continuum in. Immers vooreerst is duidelijk, dat de schaal onbepaald kleine segmenten bezit; was er nu een segment op het meetbaar continuum, waarbinnen de schaal niet indrong, dan zou men binnen dat segment twee punten A en B kunnen kiezen, en er zouden voor elk segment van de schaal transformaties zijn, die die punten samen er binnen brachten; daar er nu onbepaald kleine segmenten van de schaal zijn, zouden A en B elkaar onbepaald kunnen naderen, hetgeen weer tegen de eigenschap 5° zou strijden.

Uit de eigenschappen a) en b) volgt, dat de bij de groep behoorende schaal het continuum op een nieuwe wijze meetbaar maakt; en hieruit volgt de eigenschap:

7°. De groep is commutatief.

Ten slotte merken we op, dat door herhaling van een willekeurige continu uitgevoerde transformatie uit de groep, *elke* transformatie uit de groep wordt gepasseerd, hetgeen we uitdrukken door:

8°. De groepparameter is meetbaar.

We hebben zoo gezien, dat een eenmaal als meetbaar bekend continuum op een onbepaald aantal wijzen kan gemeten worden; immers bij elke eenledig continue, uniforme, afgesloten groep behoort een wijze van meetbaarheid; omgekeerd behoort bij elke wijze van meetbaarheid een eenledig continue, uniforme, afgesloten groep.

Laten we nu de voorwaarde 3° voor de groep weg, dan vervalt ook de eigenschap 5°; het blijft mogelijk een in zich overal dichte schaal bij de groep te construeeren, maar de eigenschappen a) en b) kunnen op de boven aangegeven wijze niet meer worden bewezen; evenmin voor de groep de eigenschappen 7° en 8°. Beschouwen we echter zulk een overal dichte schaal, die de eigenschap b) niet bezit, nader.

We zien dan, dat, terwijl in de bijbehoorende groep een punt van het continuum zich binnen een vrij interval beweegt, de grenspunten van de schaal invariant blijven. We hebben dus transformaties, die, hoe vaak ook herhaald, sommige punten op hun plaats laten, welke punten bij andere transformaties zich wèl bewegen; herhaling van continue transformaties van de eerste soort doet dus nooit een transformatie van de tweede soort passeeren, hetgeen we uitdrukken, door de groep *niet-meetbaar* of *niet-Archimedisch* te noemen. Maar ook zien we in deze groep transformaties, die het geheele vrije interval in een enkel grenspunt van de schaal overvoeren. Deze groep is dus niet uniform. De eigenschap b) van de schaal blijkt dus een noodzakelijk gevolg te zijn van de eigenschappen 1° en 2° van de groep.

Anders voor de eigenschap a). Immers de verschuivingstransformatiegroep bij een op het continuum overal dichte schaal, die links of rechts of aan beide zijden een begrenzend grenspunt heeft, is binnen het gebied van die schaal eenledig continu en uniform. Alleen moeten we opmerken, dat nu de punten binnen dat gebied bij geen transformatie de begrenzende punten kunnen overschrijden, en dat die begrenzende punten zelf invariant blijven. We zien verder, dat de eigenschappen 3° (afgeslotenheid) en 5° voor het gebied der schaal bestaan, als we de begrenzende punten uitdrukkelijk uitzonderen, want dáár kunnen twee verschillende punten elkaar *wel* onbepaald naderen, terwijl er *geen* transformatie van de groep is, die ze daar beide in hun grenspunt overvoert.

De punten buiten het gebied van de schaal kunnen bij de groep invariant blijven, of getransformeerd worden binnen nieuwe schaalgebieden, van elkaar gescheiden door invariant blijvende begrenzende punten. De beschouwde groep bepaalt dus op het meetbaar continuum een eindige of oneindige reeks van aan elkaar grenzende eindige segmenten, die elk òf invariant blijven, òf worden getransformeerd volgens een eenledig continue, uniforme, en buiten de begrenzende punten afgesloten groep.

De invariante scheidingspunten der segmenten noemen we de *dubbelpunten* der groep.

De groep is in elk segment tusschen twee dubbelpunten commutatief, terwijl ook de groepparameter meetbaar is. (beide eigenschappen volgen uit de overal-dichtheid der groepschalen.)

Resumeerende, hebben we voor zekere groepen op het meetbaar continuum de voorwaarden gesteld, dat ze zijn:

1°. eenledig continu,

2°. uniform,

en hebben daaruit voor zulk een groep de volgende verdere eigenschappen afgeleid:

3°. Ze verdeelt het continuum in eindige segmenten, wier scheidingspunten, de dubbelpunten der groep, invariant blijven, en die elk hetzij worden getransformeerd volgens een eenledig continue, uniforme groep zonder dubbelpunten, hetzij invariant blijven.

4°. De volgorde der punten van het continuum blijft bij alle transformaties onveranderd.

5°. De groep is buiten haar dubbelpunten afgesloten.

6°. Buiten de dubbelpunten kunnen twee verschillende punten elkaar niet onbepaald naderen.

7°. Een grenspunt van een puntrij gaat bij elke transformatie over in een grenspunt der getransformeerde puntrij.

8°. Op een segment tusschen twee dubbelpunten, dat niet invariant blijft, bepaalt de groep een overal dichte schaal.

9°. De groep is commutatief.

10°. De groepparameter is meetbaar.

Zoodat we de *opteloperatiegroep op het open continuum*, die we hadden gekarakteriseerd als eenledig continue, uniforme, afgesloten groep op het meetbaar continuum, nu ruimer kunnen karakteriseeren als eenledig continue, uniforme groep op het meetbaar continuum, voorzoover binnen het domein tusschen twee van haar dubbelpunten. — Men kan vervolgens die dubbelpunten als eindpunten van het domein van de groep samenvallend denken, en heeft dan de *opteloperatie op het gesloten continuum;* het sluitpunt, door samenvalling van de beide begrenzende punten ontstaan, heet het *oneindigheidspunt* van de groep. (Om de transformaties der groep te kunnen afbeelden op de punten van haar domein, hebben we nog een tweede bijzonder punt ingevoerd, dat echter niet, zooals het oneindigheidspunt, binnen de groep zelf een bijzondere rol speelt, n.l. het *nulpunt*.)

Op een eenmaal gegeven schaal kan een willekeurige eenledig continue, uniforme groep zeer ingewikkeld gegeven zijn, maar op haar eigen schaal, zooals we die boven uit de groep construeerden, wordt ze op elk door twee opvolgende dubbelpunten begrensd segment voorgesteld door de groep der opteloperaties. Beschouwen we b. v. op een eenmaal gegeven schaal de vermenigvuldigingsgroep [1]; zij heeft het punt o tot dubbelpunt, heeft dus twee gescheiden domeinen, n.l. tusschen $-\infty$ en o, en tusschen o en $+\infty$; haar eigen schaal dekt zich op het laatste domein met de schaal van log **x**; op het eerste met die van log ($-$ x); op haar eigen schaal is de groep in beide domeinen de optelgroep.

Groepdefinitie der vermenigvuldiging op het continuum.

We stellen ons thans voor, het meest algemeene stel van twee eenledig continue, uniforme groepen op het meetbaar continuum te vinden, die zich laten combineeren tot een tweeledig continue [2]) groep, en die tweeledige groep op een bijzondere, er bij passende schaal, zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen. Vooreerst merken we op, dat we, hoe de dubbelpunten der beide componeerende eenledige groepen ook verdeeld zijn, in elk geval het geheele conti-

[1]) d. i. de groep der operaties van vermenigvuldiging met een positief getal.

[2]) d. w. z. waarvan de verschillende transformaties door twee continue parameters bepaald zijn.

nuum kunnen verdeelen in segmenten, begrensd door twee dubbelpunten van een der groepen met daartusschen liggend òf één òf geen enkel dubbelpunt der andere groep, en we gaan de constructie der tweeledige groep binnen elk dier segmenten afzonderlijk na; de algemeene tweeledige groep bestaat dan uit een iuxtapositie van zulke segmenten, elk met een tweeledige groep van de gevonden constructie. Als schaal op het segment kiezen we de schaal van de eenledige groep, die de begrenzende punten van het segment als dubbelpunten heeft; in die schaal wordt die groep dan de volledige optelоperatiegroep, wier domein ten opzichte van een willekeurige eenheid van de schaal zich uitstrekt van $-\infty$ tot $+\infty$. Zetten we dat domein als X-as uit, en zetten we als ordinaten uit de toenamen van de bijbehoorende abscissen door een willekeurige transformatie der tweede groep, dan wordt de tweede groep voorgesteld door een systeem van kromme lijnen, die, afgezien van een eventueel gemeenschappelijk snijpunt met de X-as (het eventueele dubbelpunt der tweede groep n. l.) geheel buiten elkaar liggen. De vergelijkingen dier kromme lijnen stellen we voor door:

$$y = f_\alpha(x),$$

en de eisch, die we gesteld hebben, komt hierop neer, dat een willekeurige serie van transformaties, elk uit een der beide groepen, is te vervangen door een enkele transformatie der tweede groep, gevolgd door een enkele transformatie der eerste groep, dus is voor te stellen door:

$$x' = x + f_\alpha(x) + \beta.$$

We nemen een willekeurig punt op de X-as als oorsprong, en denken het geval, dat de gezochte groep geen dubbelpunt heeft, dus de krommen $y = f_\alpha(x)$ buiten elkander liggen. Kiest men den groepparameter α zoodanig, dat de kromme $y = f_\alpha(x)$ de Y-as in een punt met ordinaat α snijdt, dan gaat de kromme $y = f_\alpha(x) - \alpha$ door den oorsprong. Nu weten we, dat het resultaat van de opvolging van twee transformaties met de toenamefuncties $f_\gamma(x) - \gamma$ en $f_\delta(x) - \delta$ is een transformatie met een toenamefunctie $f_\zeta(x) + \sigma$, die echter o moet worden voor $x = 0$, dus slechts zijn kan: $f_\zeta(x) - \zeta$.

M. a. w. de transformaties $x' = x + f_\alpha(x) - \alpha$ vormen een eenledig continue groep, die, zoo goed als de door $x' = x + f_\alpha(x)$ voorgestelde, uniform is, en die verder zich met $x' = x + \alpha$ tot dezelfde tweeledige groep laat combineeren, als $x' = x + f_\alpha(x)$. De groep $x' = x + f_\alpha(x) - \alpha$ heeft nu echter een dubbelpunt. Het geval, dat de tweede groep geen dubbelpunt heeft tusschen twee opvolgende dubbelpunten der eerste groep, is dus hiermee teruggebracht tot het geval, dat zij er één heeft, en met dit laatste geval hebben we ons nog alleen bezig te houden.

Het dubbelpunt op de X-as kiezen we als oorsprong; de toenamefuncties $y = f_\alpha(x)$ snijden nu elkaar in O, en hebben verder geen punt gemeen. Ons doel is, te bewijzen, dat die toenamefuncties differentieerbaar zijn.

Stellen we door ${}_\alpha\Phi_\Delta(x)$ voor de ordinaattoename der kromme $y = f_\alpha(x)$ tusschen de abscissen x en $x + \Delta$. Daar $f_\alpha(x)$ continu is, is ${}_\alpha\Phi_\Delta(x)$ het ook. Denken we ons, dat ${}_\alpha\Phi_\Delta(x)$ gelijke waarden zou krijgen voor twee verschillende waarden van x, stel x_1 en $x_1 + p$.

Dan zouden in het systeem, bestaande uit de krommen $y = f_\alpha(x) + \beta$ en $y = f_\alpha(x + p)$ twee krommen voorkomen, die elkander snijden voor $x = x_1$ en $x = x_1 + \Delta$, dus in het systeem, bestaande uit de krommen $y = f_\alpha(x + x_1) + \beta$ en $y = f_\alpha(x + x_1 + p)$ twee krommen, die elkaar snijden voor $x = o$ en $x = \Delta$. Maar dit systeem is bevat in de krommenschaar $y = f_\alpha(x) + \beta$; en daarin kunnen twee krommen, die elkaar snijden voor $x = o$, elkaar niet nog eens snijden, tenzij — ze dezelfde kromme zijn. Maar dat zou voor de oorspronkelijk beschouwde kromme $y = f_\alpha(x)$ beteekenen, dat ze van af $x = x_1$ en van af $x = x_1 + p$ een homothetisch beloop zou moeten hebben, m. a. w. dat ze een periodiek-homothetisch beloop zou moeten hebben met periode p. Dán hebben we echter: ${}_\alpha\Phi_p(x_1 + k) = {}_\alpha\Phi_p(x_1)$, voor een willekeurige waarde van k, en hieruit volgt op dezelfde wijze, als uit ${}_\alpha\Phi_\Delta(x_1 + p) = {}_\alpha\Phi_\Delta(x_1)$ het periodiek-homothetisch beloop met periode p, nu het periodiek-homothetisch beloop met periode k. Maar als $y = f_\alpha(x)$ een periodiek-homothetisch beloop voor élke willekeurige periode heeft, kan dit niet anders, of $y = f_\alpha(x)$ is een rechte lijn, dus zeker een differentieerbare kromme.

Is zij geen rechte lijn, dan weten we nu zeker, dat ${}_\alpha\Phi_\Delta\ (x)$ niet tweemaal dezelfde waarde kan krijgen. Ze moet dus voor een bepaalde α en Δ òf steeds stijgen òf steeds dalen, en het is direct in te zien, dat zij voor gegeven α òf voor alle Δ 's stijgt, òf voor alle Δ 's daalt. (Immers stijgt ze voor Δ, dan ook voor $^1/_2\,\Delta$, $^1/_4\,\Delta$ enz.; en ook voor $2\,\Delta$, $3\,\Delta$ enz.) Denken we nu het differentiequotient van $f_\alpha(x)$ gegeven tusschen de abscissen 0 en Δ, Δ en $2\,\Delta$, $2\,\Delta$ en $3\,\Delta$ enz., als ${}_1Z$, ${}_2Z$, ${}_3Z$ enz.; dan die tusschen 0 en $^1/_2\,\Delta$, $^1/_2\,\Delta$ en Δ, Δ en $1\,^1/_2\,\Delta$ enz., als ${}_1Z_0$, ${}_1Z_1$, ${}_2Z_0$, enz.; dan tusschen 0 en $^1/_4\,\Delta$, $^1/_4\,\Delta$ en $^1/_2\,\Delta$, $^1/_2\,\Delta$ en $^3/_4\,\Delta$ enz., als ${}_1Z_{00}$, ${}_1Z_{01}$, ${}_1Z_{10}$, ${}_1Z_{11}$, ${}_2Z_{00}$ enz.; we krijgen zoo ten slotte een onbepaald aantal indices achter de Z, en we weten dat als ${}_aZ_p$ en ${}_aZ_q$ een gelijk aantal indices hebben, en het eindpunt van het interval van ${}_aZ_p$ is het beginpunt van dat van ${}_aZ_q$ dat dan ${}_aZ_q$, ${}_aZ_{q0}$, ${}_aZ_{q00}$ enz. afnemen, maar blijven boven ${}_aZ_p$; evenzoo, dat ${}_aZ_p$, ${}_aZ_{p1}$, ${}_aZ_{p11}$, ${}_aZ_{p111}$ enz. toenemen, maar blijven beneden ${}_aZ_q$. De eerste reeks heeft dus een onderste, de laatste een bovenste grens, waartoe ten slotte onbepaald wordt genaderd. Hiermee is het bestaan van een differentiaalquotient voor een willekeurig punt van $y = f_\alpha(x)$ aangetoond, maar nog niet bewezen is, dat het voorwaartsche en het achterwaartsche differentiaalquotient niet zouden kunnen verschillen.

Dat is voor ons doel evenwel niet noodig, want de differentieerbaarheid zonder meer veroorlooft, voor ons probleem, d.i. het zoeken van de meest algemeene tweeledig continue, uniforme groep, toe te passen de grondformule van LIE [1]), die voor een tweeledige differentieerbare groep wordt:

$$\Phi_1 d\Phi_2 - \Phi_2 d\Phi_1 = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2,$$

waarin Φ_1 en Φ_2 toenamen door zeer kleine transformaties uit de beide componeerende eenledige groepen voorstellen. Zij vooreerst $c_2 = 0$, zoodat we hebben:

$$\Phi_1 d\Phi_2 - \Phi_2 d\Phi_1 = c_1\Phi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bepalen we de punten van het continuum tusschen twee opvolgende dubbelpunten van de groep Φ_1 door een coördinaat x, gemeten op de schaal van Φ_1, dan kunnen we schrijven:

$$\Phi_1 = \varepsilon_1,$$

en in Φ_2 komt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\Phi_2}{dx} = \varepsilon_2$$
$$\Phi_2 = \varepsilon_2 (x + h),$$

[1]) cf. Math. Ann. Bd. 8, pag. 303; Gött. Nachr. 1874; Theorie der Transformationsgruppen I, pag. 150.

waarbij als eindige groep met c als groepparameter komt:

$$(x' + h) = c\ (x + h),$$

en de gecombineerde tweeledige groep wordt:

$$x' = c_1 x + c_2.$$

Zoo hebben we hier de eenledige groep tot een tweeledige gecompleteerd, door haar als optelgroep van een schaal te nemen, en dan als tweeledige groep te nemen die van optelling en vermenigvuldiging, op die schaal gecombineerd. En als tweede eenledige groep, die zich met de eerste laat samenstellen, is hier verkregen de vermenigvuldigingsgroep uit die schaal met een willekeurig nulpunt.

Zij vervolgens c_3 niet o, dan kunnen we $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = \phi_3$ stellen, en vinden tusschen ϕ_1 en ϕ_3 de betrekking:

$$\phi_1 d\phi_3 - \phi_3 d\phi_1 = c_2\phi_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of als we weer werken op de schaal van ϕ_1:

$$\frac{d\phi_3}{dx} = k\phi_3 \quad ; \quad \phi_3 = \varepsilon e^{kx} \quad ; \quad \phi_2 = \varepsilon_1 e^{kx} + \varepsilon_2.$$

Door de transformatie ϕ_2 ondergaat dus x een toename:

$$dx = \varepsilon_1 e^{kx} + \varepsilon_2,$$

en e^{-kx} ondergaat een toename:

$$d\left(e^{-kx}\right) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 e^{-kx},$$

zoodat, als we $e^{-kx} = \xi$ stellen, en in de schaal der verschuivingsgroep van ξ gaan werken:

òf $\quad \Phi_2(\xi) = \varepsilon_4(\xi + h)$ $\qquad$ òf $\quad \Phi_2(\xi) = \varepsilon_3$,

hetgeen als eindige groep geeft:

òf $\xi' + h = c(\xi + h)$ $\qquad$ òf $\xi' = \xi + c$.

De oorspronkelijk gegeven eenledige groep wordt in de schaal van ξ:

$$\xi' = c\xi,$$

en de gecombineerde tweeledige groep wordt:

$$\xi' = c_1\xi + c_2.$$

We hadden ook uit vergelijking (2) direct kunnen aflezen, dat, als we gaan werken op de schaal van Φ_3, we voor Φ_1 vinden een vermenigvuldigingsgroep, dus voor Φ_2 een der groepen:

$$(x' + h) = c(x + h).$$

Zoo hebben we hier de eenledige groep tot een tweeledige gecompleteerd, door haar als ,,vermenigvuldigingsgroep tusschen de punten o en ∞" van een schaal te nemen (d. w. z. te nemen de schaal van e^{-kx}, als x is de schaal van de groep als optelgroep [1])) en dan als tweeledige groep te nemen

---

[1]) Eigenlijk krijgen we de „vermenigvuldigingsgroep tusschen o en ∞" alleen voor negatieve k; voor positieve k vinden we $\xi = \infty$ voor $x = -\infty$; daar we hier verder, om de schaal met x toenemend te houden, liever spreken van de schaal van $-e^{-kx}$, dan van e^{-kx}, krijgen we hier onze oorspronkelijke groep als „vermenigvuldigingsgroep tusschen $-\infty$ en o."

die van optelling en vermenigvuldiging op die schaal gecombineerd. De completeerende eenledige groep is òf de optelgroep op die schaal òf de vermenigvuldigingsgroep met een ander nulpunt(d.i. dubbelpunt), als de eerste groep. De completeering kan, al naar de waarde van k, op verschillende wijze plaats hebben; bij elke verschillende completeering hoort een verschillende schaal, die de rol van optelgroep in de tweeledige groep vervult, en door die keuze van schaal der optelgroep is de wijze van completeering bepaald. De gekozen optelgroep is ook de eenig mogelijke, ten opzichte waarvan *beide* componeerende eenledige groepen, dus ook de resulteerende tweeledige groep de rol van *gelijkvormige*[1]) transformatiegroepen vervullen; de tweeledige groep in 't bijzonder is ten opzichte van die schaal de groep van *alle* gelijkvormige transformaties, en door de tweeledige groep als groep der gelijkvormige transformaties is de schaal over het geheele beschouwde domein bepaald.

Verder hebben we gemerkt, dat hier *één* der begrenzende dubbelpunten van de oorspronkelijke eenledige groep dubbelpunt blijft voor de tweeledige, maar het andere niet; de completeerende eenledige groep heeft binnen het domein der oorspronkelijke *één* of *geen* dubbelpunt.

---

[1]) Hieronder verstaan we in het volgende: èn met invariante verhoudingen, èn steeds gelijk gericht.

Beschouwen we nu weer de beide eenledige groepen, die zich tot een tweeledige laten combineeren, zooals we ze ons oorspronkelijk uitgestrekt dachten over het geheele continuum; noemen we P_α de dubbelpunten voor *beide* groepen dus ook voor de uit beide samengestelde tweeledige groep; Q_α die voor de eerste; R_α die voor de tweede. Dan worden elke twee punten Q, en evenzoo elke twee punten R gescheiden door minstens één punt P; m. a. w. tusschen twee punten P kan hoogstens één punt Q en één punt R liggen.

We beschouwen nu het domein tusschen twee opvolgende punten P, stel P_1 en P_2; en denken daartusschen een punt Q en een punt R.

$$P_1 . \quad Q . \quad R . \quad P_2 .$$

Passen we dan onze laatste resultaten voor het domein tusschen twee opvolgende dubbelpunten van eenzelfde der beide componeerende groepen achtereenvolgens toe voor het domein QP_2 en het domein P_1R, dan weten we:

Tusschen Q en P_2 bestaat een schaal, in Q begrensd [1]), maar naar P_2 toe onbegrensd; de eerste componeerende eenledige groep bestaat uit de gelijkvormige transformaties van die schaal met Q als invariant punt; de tweede uit de gelijkvormige transformaties met R als invariant punt; de resulteerende

[1]) We noemen ter bekorting een schaal in een punt begrensd, als dat punt volgens de op die schaal gebouwde verschuivingsgroep bereikbaar is.

tweeledige groep uit *alle* gelijkvormige transformaties. Het gedeelte van die schaal tusschen Q en R is de eenig mogelijke schaal tusschen Q en R, ten opzichte waarvan de tweeledige groep de rol eener gelijkvormige groep speelt.

Tusschen P_1 en R bestaat eveneens een schaal, in R begrensd, maar naar P_1 toe onbegrensd; de eerste componeerende eenledige groep bestaat uit de gelijkvormige transformaties van die schaal met Q als invariant punt; de tweede uit de gelijkvormige transformaties met R als invariant punt; de resulteerende tweeledige groep uit *alle* gelijkvormige transformaties. Het gedeelte van die schaal tusschen Q en R is de eenig mogelijke schaal tusschen Q en R, ten opzichte waarvan de tweeledige groep de rol eener gelijkvormige groep speelt. Het gedeelte van *deze* schaal tusschen Q en R is dus identiek met het gedeelte tusschen Q en R van de vorige schaal; we kunnen dus nu zeggen:

Tusschen P_1 en P_2 bestaat een schaal, naar beide zijden onbegrensd; de eerste componeerende eenledige groep bestaat uit de gelijkvormige transformaties met Q als invariant punt (vermenigvuldiggroep met Q als nulpunt); de tweede uit de gelijkvormige transformaties met R als invariant punt (vermenigvuldiggroep met R als nulpunt). De resulteerende tweeledige groep is de gelijkvormige groep (of groep van optelling en vermenigvuldiging gecombineerd).

30.

Gesteld nu, er ligt tusschen P_1 en P_2 alleen een punt R, geen punt Q; dit komt alleen voor bij onze eerste manier van completeering eener eenledige groep tot een tweeledige, waar we n.l. de eerste eenledige groep tusschen twee opeenvolgende van haar dubbelpunten als optelgroep nemen, en als tweede kiezen de vermenigvuldiggroep met willekeurig nulpunt; de tweeledige groep wordt weer tusschen P_1 en P_2 op de geconstrueerde schaal de gelijkvormige groep.

Dat er ten slotte tusschen P_1 en P_2 nòch een punt Q, nòch een punt R zou liggen, is onmogelijk; want we hebben gezien, dat we niet aan een eenledige groep tusschen twee opeenvolgende van haar dubbelpunten een andere eenledige groep kunnen toevoegen, die met de eerste samen een tweeledige groep geeft, de beide genoemde dubbelpunten behoudt, en daartusschen niet nog een nieuw dubbelpunt zou bezitten.

We hebben nu omtrent twee eenledig continue, uniforme groepen op het open meetbaar continuum, die zich laten vereenigen tot een tweeledige groep, het volgende afgeleid:

Op het meetbaar continuum is een eindige of oneindige reeks van aan elkaar grenzende eindige segmenten bepaald, wier scheidingspunten invariant blijven bij de tweeledige groep, en *dubbelpunten* der tweeledige groep worden genoemd. Op elk der zoo bepaalde segmenten is vervolgens een naar beide zijden onbegrensde overal dichte schaal te construeeren, zoodanig dat elk der componeerende eenledige groepen in elk der segmenten een der volgende rollen speelt:

òf ze laat het segment invariant;

òf ze speelt er de rol van optelgroep;

òf ze speelt er de rol van vermenigvuldiggroep met willekeurig nulpunt.

Dezelfde eenledige groep zal in de verschillende segmenten in 't algemeen een verschillende rol vervullen.

De resulteerende tweeledige groep speelt in 't algemeen binnen alle segmenten de rol van gelijkvormige groep; maar er kunnen bijzondere segmenten zijn, waar ze zich reduceert tot een eenledige groep (die dan als optelgroep kan worden gelezen) of zelfs, die ze invariant laat.

Op een eenmaal gegeven schaal kan een willekeurige tweeledig continue, uniforme groep zeer ingewikkeld gegeven zijn, maar op haar eigen schaal, zooals die steeds uit de groep te construeeren is, wordt ze op elk door twee opeenvolgende van haar dubbelpunten begrensd segment voorgesteld door de groep der optel- en vermenigvuldigtransformaties.

Het doel der voorafgaande ontwikkelingen was, nu de optel- en vermenigvuldigoperaties op het volledig meetbaar continuum aldus te definieeren (onder vermenigvuldiging alleen die met een positieven vermenigvuldiger verstaande):

Opteloperatie op het volledig meetbaar continuum:

Eenledig continue, uniforme groep op het meetbaar continuum tusschen twee opeenvolgende van haar dubbelpunten.

Vermenigvuldigoperatie op het volledig meetbaar continuum:

Eenledig continue, uniforme groep tusschen dezelfde dubbelpunten als de vorige, en zich met haar tot een tweeledige groep latende combineeren.

We kunnen ook beginnen met de combinatie van optelling en vermenigvuldiging te definieeren als de tweeledig continue, uniforme groep op het meetbaar continuum tusschen twee opeenvolgende van haar dubbelpunten; daarna de optelling hetzij als de eenige eenledige ondergroep, die binnen dat domein geen verder dubbelpunt heeft, hetzij als de eenige invariante ondergroep; en de vermenigvuldiging als een willekeurige andere eenledige ondergroep. [1])

Overtollig bestanddeel in de distributieve eigenschap.

Deze groepdefinitie der rekenoperaties op het meetbaar continuum toont aan, dat bij de axiomatische definitie dier operaties, als de associatieve en commutatieve eigenschap van optelling en vermenigvuldiging zijn gegeven, niet meer de volle distributieve eigenschap noodig is, om de operaties

[1]) Op het *gesloten continuum* kunnen we de beide begrenzende dubbelpunten laten samenvallen; de groep der hoofdbewerkingen kan dus ook worden gelezen in de algemeene tweeledig continue, uniforme groep op het gesloten meetbaar continuum met één enkel dubbelpunt.

geheel te bepalen. Immers stellen we de opteloperatie voor door f_α, de vermenigvuldigoperatie door Φ_α, dan zegt de distributieve eigenschap:

$$\Phi_\alpha \{ f_\beta \} = f_{\Phi_\alpha(\beta)} \{ \Phi_\alpha \},$$

terwijl we hebben aangetoond, dat voldoende is de voorwaarde:

$$\Phi_\alpha \{ f_\beta \} = f_\gamma \{ \Phi_\delta \}.$$

De teekenomkeering en de vermenigvuldiging met een negatieven factor.

Voegen we thans toe de transformatie $x' = -x$, dan zien we, dat zij zich met de optelgroep associeeren laat; het resultaat blijft een eenledige uniforme groep, maar met een discontinuiteit in den groepparameter. Evenzoo met de vermenigvuldiggroep laat zij zich associeeren tot een vermenigvuldiggroep met positieven of negatieven vermenigvuldiger, eveneens een uniforme eenledige groep met een discontinuiteit; en ten slotte laat zich ook de gecombineerde tweeledige groep door haar over een discontinuiteit [1]) verdubbelen.

Het nemen der reciproke en de projectieve groep.

Voegen we toe de transformatie $x' = \frac{1}{x}$; zij laat zich met de volledige vermenigvuldiggroep associeeren tot een uniforme eenledige groep, onder invoering van een nieuwe discontinuiteit; en met de volledige tweeledige gelijkvormige groep tot een uniforme drieledig continue groep, de zoogenaamde

[1]) Dat wil zeggen hier voor een tweeledige groep: een coupure in het parametervlak.

projectieve groep, der transformaties $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$. [1])

Lie heeft bewezen voor differentieerbare transformaties, dat er maar één constructie voor een drieledig continue groep op het meetbaar continuum bestaat, namelijk de projectieve groep. Onafhankelijk van de differentieerbaarheid is boven aangetoond, dat er maar één constructie voor één- resp. tweeledig continue, uniforme groepen bestaat; zich ook voor de drieledige groep van de beperking der differentieerbaarheid los te maken, blijve hier als probleem gesteld. [2])

De projectieve meetkunde.

Om de projectieve meetkunde op te bouwen, nemen we $n + 1$ open continua, elk met een translatiegroep en een nulpunt; (op elk is dan tevens een vermenigvuldiggroep bepaald). We kunnen die $n + 1$ translatiegroepen met nulpunten alle of gedeeltelijk op elkaar afbeelden; elk continuum,

---

[1]) Ook deze drieledige groep heeft een coupure in de parameterruimte, nl. die de met een bepaalde uitgekozene gelijk gerichte van de tegengesteld gerichte transformaties scheidt.

[2]) Denken we de projectieve groep op het gesloten continuum, en houden we een willekeurig punt vast, dan is duidelijk, dat we een tweeledige groep overhouden met dat punt als eenig dubbelpunt; die groep is dus te lezen als een *groep van hoofdbewerkingen*; vgl. het „Rechnen mit projectiven Strecken" van Schur (Math. Ann. 55) en evenzoo de „Endenrechnung" van Hilbert (Math. Ann. 57).

dat aan de afbeelding deelneemt, kan dat nog in twee richtingen. Het agglomeraat van die groepen, zooals ze in de afbeelding optreden, noemen we een *punt* P; in het agglomeraat kan ook meermalen dezelfde groep voorkomen, dan kunnen we die verschillende afbeeldingen sommeeren tot een nieuwe afbeelding, waarbij de overeenkomstige punten der componenten door hun som zijn vervangen; de groepen van verschillende continua zijn echter in de som niet te vereenigen.

De groepen van een willekeurig gekozen punt kunnen elk door een vermenigvuldigoperatie worden overgevoerd in die van een willekeurig ander punt, en bij die vermenigvuldigingen is alleen de verhouding der factoren bepaald. Nemen we het eerste punt als zgn. fundamentaalpunt, dan is een willekeurig ander punt door die verhoudingsgetallen, zijn *„coördinaten"*, bepaald. We zien hier dat een punt niet op zichzelf, doch eerst in vergelijking met een tweede punt, door coördinaten, d. w. z. getallen van één geschaald continuum, kan worden aangegeven.

Daar de verschillende groepen van eenzelfde punt samen van één parameter afhangen, kunnen we in elk punt ook een enkele translatiegroep met nulpunt zien. En we kunnen de translatiegroepen van twee, drie .... n + 1 punten op elkaar afbeelden, en de som der afgebeelde groepen nemen; die som zal steeds weer een der boven gedefinieerde punten P geven. De punten, op deze wijze afgeleid uit de afbeelding van twee punten A_1 en A_2 op elkaar, heeten te *liggen op de rechte lijn* $(A_1\ A_2)$; die, afgeleid uit de afbeelding van $p + 1$ punten $A_1, \ldots, A_{p+1}$ op elkaar, heeten te *liggen in de platte* ^{p}*ruimte* $(A_1 A_2 \ldots A_{p+1})$. We zien, dat als A_1 ligt in $(A_2 A_3 \ldots A_q)$, dan ook A_2 in $(A_1 A_3 \ldots A_q)$ enz., en dat in de coördinaten de platte ruimten door stelsels homogene lineaire vergelijkingen worden voorgesteld. Verder is te bewijzen, dat, als $A'_1, \ldots A'_{p+1}$ punten zijn van de platte ^{p}ruimte $(A_1 A_2 \ldots A_{p+1})$, die niet in een $^{p-1}$ruimte liggen, elk punt van de ^{p}ruimte is af te leiden uit de punten A', zoo goed als uit de punten A; evenzoo, dat een ^{p}ruimte en een ^{q}ruimte in een $^{p+q}$ruimte één punt, òf een rechte lijn òf een ^{2}ruimte, enz. gemeen hebben.

Beschouwen we een ^{p}ruimte, nemen we daarin als basispunten A; B_1; ....; B_p en noemen we de overeenkomstige coördinaten $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_p$. Zijn F_1; ...; F_p punten op (AB_1); (AB_2) ....; (AB_p); zijn G_1 en G_2 punten in $(B_1 \ldots B_p)$ en C_1 en C_2 de snijpunten van AG_1 en AG_2 met $(F_1 \ldots F_p)$. Stel nu we krijgen G_2 uit G_1 door de coördinaten $\beta_1, \ldots, \beta_p$ van G_1 te vermenigvuldigen met $h_1, \ldots, h_p$. Dan geldt hetzelfde voor C_2 en C_1, want die hebben dezelfde coördinaten $\beta_1, \ldots, \beta_p$ als G_2 en G_1. Gaan we nu evenwel C_2 en C_1 bepalen ten opzichte van A; F_1; ....; F_p, en stel we moeten de coördinaten $\phi_1, \ldots, \phi_p$ van C_1 naar C_2 met factoren $h'_1 \ldots h'_p$ vermenigvuldigen. Dan hebben we:

$$C_1 = \phi_1\, \varkappa_1\, (B_1 + a_1 A) + \ldots + \phi_p\, \varkappa_p\, (B_p + a_p A) =$$
$$= \phi_1\, \varkappa_1\, B_1 + \ldots + \phi_p\, \varkappa_p\, B_p + \Sigma\, \phi_1\, \varkappa_1\, a_1 . A.$$
$$C_2 = h_1'\, \phi_1\, \varkappa_1\, B_1 + \ldots h_p'\, \phi_p\, \varkappa_p\, B_p + \Sigma\, h_1'\, \phi_1\, \varkappa_1\, a_1 . A.$$

Maar de coëfficienten van $A, B_1, \ldots, B_p$ in deze formules zijn de coördinaten $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_p$ in het oorspronkelijke stelsel; we zien dus, dat de h''s dezelfde zijn als de h's. Dus zijn de relatieve coördinaten van punten in eenzelfde ^pRuimte *projectief* gebleken, in het bijzonder dus de *dubbelverhouding* van 4 collineaire punten.

De verdere opbouw der projectieve meetkunde, in de eerste plaats de constructie der tweedegraadsruimten, levert na deze principieele gegevens geen moeilijkheden meer.

De Cartesiaansche meetkunde.

De *Cartesiaansche meetkunde* kan worden opgebouwd, door n open continua te nemen, en onder een punt van ^nR te verstaan de combinatie van n punten dier verschillende continua. Zulk een punt van ^nR is te definieeren door n *coördinaten*, d.w.z. getallen van één geschaald continuum, als we op elk der n gegeven continua een naar beide zijden onbegrensde schaal (dus een translatiegroep) en een eenheids-segment aannemen. De Cartesiaansche meetkunde wordt verder tot een *Euclidische meetkunde*, als we nog als „*afstand*" van twee punten definieeren $\sqrt{\Sigma\, (x_1'' - x_1')^2}$.

De Euclidische meetkunde.

Men merkt dan op, dat de transformatiegroep

$$X_1 = {}_1\alpha_1\, x_1 + {}_1\alpha_2\, x_2 + \ldots {}_1\alpha_n\, x_n + \beta_1$$

enz.

voor $\sum_q p\alpha_q^2 = 1$ en $\sum_q p\alpha_q\, r\alpha_q = 0$ den afstand van elke twee punten onveranderd laat, en dat omgekeerd door dat invariant blijven van $\sqrt{\Sigma (x_1'' - x_1')^2}$ die groep bepaald is. Men noemt ze de *Euclidische congruente groep* van ${}^nR$. Schrijft men in de eerste leden der transformatievergelijking c X_1, c X_2 enz. in plaats van X_1, X_2 enz., dan krijgt men de *groep der gelijkvormige transformaties*, waarbij alle afstanden steeds in dezelfde reden vergroot of verkleind worden.

De gelijkvormige groep.

In ${}^2R$ wordt de ondergroep der gelijkvormige transformaties met positieven substitutiemodulus:

De groep der complexe bewerkingen.

$$X_1 = ax_1 - b\,x_2 + d_1$$
$$X_2 = b\,x_1 + a\,x_2 + d_2,$$

die we definieeren als de „*groep der complexe bewerkingen*", na onder een imaginair getal $x_1 + x_2 i$ een punt van ${}^2R$ met coördinaten x_1 en x_2 te hebben verstaan. De bovenstaande transformatie wordt dan *gelezen:*

$$X_1 + X_2\, i = (a + b\, i)\, (x_1 + x_2\, i) + (d_1 + d_2\, i),$$

of $\quad \xi = \alpha x + \delta,$

als we hier de letters imaginaire getallen laten voorstellen. Zoo is de tweedimensionale schaal der imaginaire getallen aan een groep van optelling en vermenigvuldiging onderworpen, even goed als vroeger de eendimensionale schaal. Maar de eerste biedt het voordeel van grootere algemeengeldigheid der algebraïsche bewerkingen; zoo in de eerste plaats is hier uit elk punt elk ander door machtsverheffing te krijgen; daarom bouwt men zoowel de projectieve, als de Cartesiaansche ^{n}ruimte dikwijls op uit n + 1 resp. n complexe schalen in plaats van, zooals boven, uit reëele schalen.

Men kan verder de Cartesiaansche ^{n}ruimte completeeren tot den samenhang van een projectieve ^{n}ruimte, door er op de bekende wijze een ,,$^{n-1}$ruimte in het oneindige'' aan toe te voegen. Dit heeft natuurlijk een geheel willekeurig karakter; men kan even goed een bol in het oneindige toevoegen, wat in de potentiaaltheorie soms zijn nut heeft, of ook een enkel punt in het oneindige en zoo de Cartesiaansche ruimte tot een tweezijdig gesloten ruimte maken. Doen we het laatste in het bijzonder voor een plat vlak, dan kunnen we het daarna zoo op een ovaal tweedegraadsoppervlak in de gewone ruimte afbeelden, dat de groep der complexe bewerkingen verschijnt als *groep der projectieve transformaties van de ruimte, die het tweedegraadsoppervlak met omloopszin en bovendien een punt daarop* (n.l. het aan het ,,punt in 't oneindige" van het Euclidische vlak beantwoordende) *invariant laten*. Op deze wijze is dus de groep der complexe bewerkingen te definieeren onafhankelijk van de Euclidische bewegingsgroep. [1])

Projectieve definitie van de groep der complexe bewerkingen.

[1]) Bij deze definitie van een stel bewerkingen als een groep (die ook is door te voeren voor quaternionen en hoogere complexen) komt de afbeelding van het parametercontinuum op het

Groep der complexe projectieve transformaties.

De groep der complexe bewerkingen, gelezen op een ovaal tweedegraadsoppervlak, laat zich verder uitbreiden tot de *algemeene projectieve transformatiegroep van dat tweedegraadsoppervlak met invarianten omloopszin;* beelden we deze weer terug op het Euclidische platte vlak, dan krijgen we de *conforme transformatiegroep van het platte vlak met invarianten omloopszin*, ook te lezen als de *projectieve transformatiegroep der complexe schaal.*

Karakteriseering der projectieve groep.

De groep der projectieve transformaties in een ^{n}ruimte laat zich volgens LIE karakteriseeren, als de *eindige continue* (d. w. z. door de continue verandering van een eindig aantal parameters gegenereerde) *Liesche* [1] *groep, waarbij eerst $n + 3$ verschillende punten een invariant hebben.*

De niet-Euclidische groepen.

Zoeken we uit de projectieve groep die transformaties uit, die een tweedegraads-$^{n-1}$ruimte [2])

getransformeerde continuum zelf eerst als iets secundairs. Bij de gewone complexe bewerkingen voorkomt men door de groepdefinitie de noodzakelijkheid, een bepaald punt en een bepaalde lijn daardoor als nulpunt en lijn der reëele getallen een bijzondere rol te laten spelen.

[1]) LIE onderstelt hier en overal, dat zijn groepen door differentieerbare infinitesimaaltransformaties worden gegenereerd. Soms zelfs veronderstelt hij ze analytisch. In dit opzicht zijn zijn theorieën nog voor veel vervolkomening vatbaar. Vgl. pag. 51.

[2]) Wil men een $^{n-1}$ruimte invariant houden, en toch een projectieve groep van $\frac{1}{2}$ n (n + 1) (het aantal der Euclidische bewegingsgroep) parameters mogelijk laten, dan kan men voor die invariante ruimte niet anders nemen, dan een van den eersten

invariant laten, dan vinden we de zoogenaamde *niet-Euclidische congruente groepen der ^{n}ruimte*. Voor twee punten blijft daarbij elke willekeurige functie van hun dubbelverhouding ten opzichte van de tweedegraads-${}^{n-1}$ruimte invariant; als ,,afstand" kiest men die functie, die langs de rechte lijnen additief is, d.i. de logarithme, met een constante vermenigvuldigd: de rechte lijnen blijken bij die keuze tevens geodetische lijnen te zijn; daar men geen lijnen, waarop de afstanden o worden, wil toelaten, blijven slechts 3 soorten van fundamentaal-${}^{n-1}$tweedegraads-oppervlakken, n.l. het algemeene ovale, dat in zijn binnenruimte aanleiding geeft tot de hyperbolische meetkunde, het algemeene imaginaire (met reëele vergelijking), dat aanleiding geeft tot de elliptische meetkunde, en als overgang tusschen beide het imaginaire ${}^{n-2}$tweedegraadsoppervlak, dat aanleiding geeft tot de Euclidische meetkunde. Van deze drie laten de hyperbolische en de Euclidische groep zich afbeelden op de (niet gecompleteerde) Cartesiaansche ruimte, en als uniforme continue groepen hebben de Euclidische en de hyperbolische groep een discontinuiteit, die ze verdeelt in twee ondergroepen, die *bewegingsgroepen* worden genoemd.

Afleiding van het boogele-

Op verschillende wijzen zijn de groepen der Euclidische en niet-Euclidische bewegingen samen te

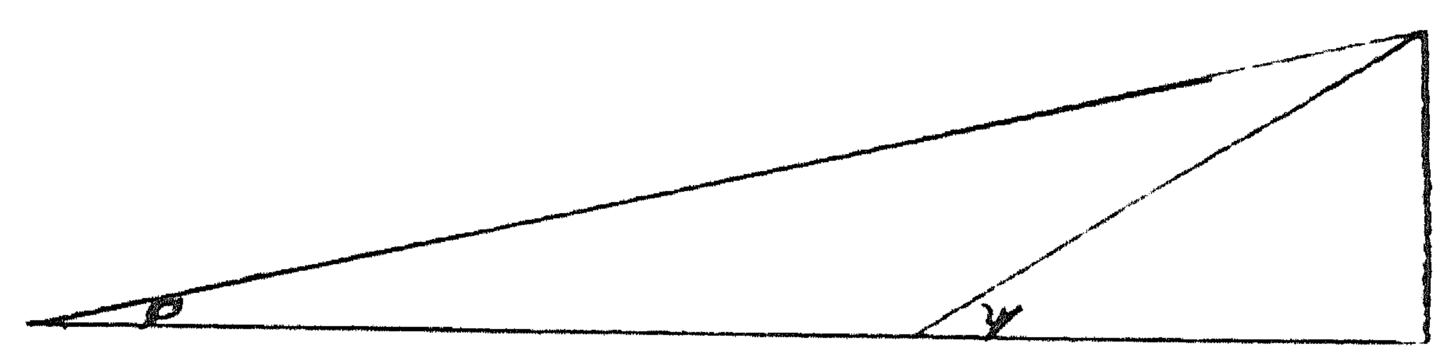
of tweeden graad, zooals LIE heeft aangetoond. Theorie der Transformationsgruppen, III; in aansluiting aan een onderzoek van KLEIN en LIE in Mathem. Annalen 4.)

karakteriseeren. Vooreerst kan men beginnen met in 't algemeen te beschouwen een ^{n}ruimte, waar de afstand tusschen twee dicht bijeen gelegen punten is gedefinieerd als een steeds positieve uitdrukking van den vorm $\sqrt{\Sigma f_{pq}(x_1 \ldots x_n)\, dx_p\, dx_q}$ met niet verdwijnende discriminant (de f's tweemaal differentieerbare functies), m.a.w. waar in het oneindig kleine de Euclidische meetkunde geldt. (wat b.v. voor gebogen ruimten, in hoogere Euclidische ruimten geplaatst, steeds het geval is). We willen dan bepalen een transformatiegroep, die de afstandselementen invariant laat, dus ook de geodetische lijnen in elkaar overvoert en stellen den eisch, dat ieder punt naar ieder ander punt kan worden verplaatst; dat na vasthouding van een enkel punt P_1, een tweede punt P_2 nog op een „geodetische $^{n-1}$bol" om P_1 vrij beweegelijk is, zóó, dat de geodetische $^{n-1}$bollen om P_1 de ruimte geheel vullen; dat na vasthouding van P_2 een derde punt P_3, op die geodetische bol, vrij bewegelijk is op een $^{n-2}$bol om P_2, welke $^{n-2}$bollen om P_2 de genoemde $^{n-1}$bol geheel overdekken, enz.

ment der Euclidische en niet-Euclidische groepen.

We lossen dit vraagstuk eerst op voor een ^{2}ruimte en nemen daarop als coördinaten de geodetische lijnen uit een punt M en de geodetische cirkels om M. Het boogelement ds moet dan wegens de vrije bewegelijkheid *om M* worden van de vorm $\sqrt{dr^2 + f(r)^2 d\phi^2}$. Daaruit vinden we de algemeene differentiaalvergelijking der geodetische lijnen:

$$ds = \frac{f(r)^2}{c}\, d\phi.$$



In de figuur zijn MQ, MP en NQ geodetische lijnen, PQ een geodetisch cirkelboogje om M, en de hoeken ϕ en ψ zeer klein, dus ook voor NQ c zeer klein. We stellen $MN = r_1$; $MP = r_2$, en hebben:

$$\psi = \frac{f(r_1)d\phi}{ds} = f(r_1)\frac{c}{f(r_1)^2} = \frac{c}{f(r_1)}.$$

Verder:

$$\phi = c\int_N^Q \frac{ds}{f(r)^2} = c\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} \text{ en hieruit:}$$

$$PQ = cf(r_2)\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2}.$$

Daar nu het vlak om N gelijk gebouwd moet zijn als om M, zoo moet ook:

$$PQ = \psi.f(r_2 - r_1).$$

$$f(r_2 - r_1) = f(r_1).f(r_2).\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(H.)}$$

Hieruit, ε zeer klein stellende:

$$\int_{\varepsilon}^{r_1} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_1 - \varepsilon)}{f(r_1)f(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)} \cdot \frac{f'(r_1)}{f(r_1)} + \frac{\varepsilon^2}{2f(\varepsilon)} \cdot \frac{f''(r_1)}{f(r_1)} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Evenzoo

$$\int_{\varepsilon}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)} \cdot \frac{f'(r_2)}{f(r_2)} + \frac{\varepsilon^2}{2f(\varepsilon)} \cdot \frac{f''(r_3)}{f(r_2)} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Door aftrekking uit de beide laatste vergelijkingen:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)} \left\{ \frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Maar ook

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_2 - r_1)}{f(r_1)\, f(r_2)} .$$

Derhalve

$$f(r_2 - r_1) = f'(r_1)\, f(r_2) - f'(r_2)\, f(r_1) \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Nu is $f(\varepsilon) = \varepsilon + \ldots$, dus we weten

$$f(0) = 0.$$
$$f'(0) = 1.$$

Stellen we in (1) $r_1 = \varepsilon$, dan komt:

$$f(r_2) - \varepsilon f'(r_2) = f(r_2) + \varepsilon f''(0) f(r_2) - \varepsilon f'(r_2) \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dus $f''(0) = 0$.

Differentieeren we (1) naar r_1, tot:

$$f'(r_2 - r_1) = f'(r_1)\, f'(r_2) - f''(r_1)\, f(r_2) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Stellen we hierin $r_1 = \varepsilon$, dan komt:

$$f'(r_2) - f''(r_2)\, \varepsilon = f'(0)\, f'(r_2) +$$

$$+ \varepsilon f''(0) f'(r_2) \text{ (valt weg)} - f''(0)\, f(r_2) \text{ (valt weg)} - \varepsilon f'''(0)\, f(r_2).$$

$$f''(r_2) = f'''(0)\, f(r_2). \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Stellen we $f'''(o) = a$, dan hebben we dus in f de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 f}{d r^2} = a f,$$

die drie groepen oplossingen bezit, al naar a positief, o, of negatief is, n.l.:

(I) $f = c_1 \sin(\alpha r + c_2)$,
of wegens $f(o) = o$ en $f'(o) = 1$:

$$f = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha r.$$

(II) $f = c_1 (r + c_2)$,
of wegens $f(o) = o$ en $f'(o) = 1$:

$$f = r.$$

(III) $f = c_1 \operatorname{sh}(\alpha r + c_2)$,
of wegens $f(o) = o$ en $f'(o) = 1$:

$$f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha r.$$

Alle drie oplossingen blijken aan (H) te voldoen. Willen we alleen singulariteitvrije oppervlakken, dan geeft (II) het gewone Euclidische platte vlak, (III) het hyperbolische vlak, en (I) hetzij een bol (bilateraal), hetzij een elliptisch vlak (unilateraal, van den samenhang van het projectieve vlak).

Deze vier oppervlakken blijken dan achteraf, werkelijk den geëischten homogenen bouw te bezitten.

Onderzoeken we thans de ^{3}ruimten, die aan de voorwaarden van het vraagstuk voldoen, dan weten we, dat de geodetische bollen om een punt zelf vrij in zich bewegelijk moeten zijn, maar daar die bollen 1^0 eindig en 2^0 bilateraal zijn, kunnen van de vier boven gevonden oppervlakken daarvoor niet anders dan gewone bollen worden genomen. Zoeken we dan, welke functie de boogelementen op die bol van den straal moeten zijn, dan vinden we eerst, dat de geodetische lijnen liggen in *platte vlakken door M* (hier gedefinieerd als oppervlakken, gevormd door de geodetische lijnen van **M** naar een grooten cirkel op een bol om M), en daaruit, dat weer slechts dezelfde drie functies als boven en dus alleen de vier daaruit op te bouwen ^{3}ruimten mogelijk zijn.

Op dezelfde wijze als van 2 naar 3 gaat de overgang van 3 naar 4 afmetingen, enz. Voor elk aantal afmetingen bestaan slechts de vier bovengenoemde ruimtetypen, m.a.w. transformatiegroepen.

Van de beide groepen bij het boogelement I kunnen we een Cartesiaansche ruimte de bolvormige laten ondergaan, als we haar completeeren met een punt; de elliptische, als we haar completeeren met een $^{n-1}$ruimte in 't oneindige.

Deze karakteriseerende voorwaarden voor de groepen der Euclidische en der niet-Euclidische bewegingen zijn ongeveer de oorspronkelijk door RIEMANN [1]) er voor gegevene. Eenigszins willekeurig is vooreerst de aanname van het kwadratisch boogelement, en dan die van de differentieerbare coëfficienten er van. LIE [2])

---

[1]) „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", Gesammelte Werke, 1e Aufl. pag. 254.

[2]) Theorie der Transformationsgruppen III. Abt. IV. Kap. 17.

heeft de voorwaarden iets beperkt, door de Euclidische en niet-Euclidische bewegingen te karakteriseeren, als dié Liesche groepen, welke 1° een kwadratisch boogelement met niet verdwijnende determinant invariant laten, 2° door een vastgehouden punt de ∞^{n-1} richtingen zóó algemeen transformeeren, als wordt toegelaten door het invariant blijven van de vergelijking, die het boogelement gelijk o stelt (en die natuurlijk een tweedegraadsruimte in den bundel der lijnelementen voorstelt.) Wordt de eerste voorwaarde vervangen door den eisch, dat de vergelijking, die het boogelement o stelt, invariant moet blijven, dan worden er nog bij gevonden: 1° de groep, bestaande uit Euclidische bewegingen en gelijkvormigheidstransformaties, 2° die bestaande uit Euclidische bewegingen, gelijkvormigheidstransformaties en transformaties op wederkeerige voerstralen (de *conforme groep*).

Karakteriseering der Euclidische en niet-Euclidische groepen door HELMHOLTZ.

HELMHOLTZ [1]) heeft de karakteriseering willen losmaken van de aanname van het boogelement, en heeft gezocht in een ^{n}ruimte alle omkeerbare, continue groepen met $\frac{1}{2}$ n (n + 1) parameters, wier transformatiefuncties een zeker aantal differentiaalquotienten (voor zoover hij ze n.l. bij zijn ontwikkeling noodig heeft) toelaten, waarbij verder twee punten één enkele invariant, die voor elk

---

[1]) „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen Gött. Nachrichten 1868.

puntenpaar een *werkelijke* beperkende betrekking geeft, en meer dan twee punten geen nieuwe invariant hebben, en waarbij eindelijk die invarianten de eenige beperking in de vrijheid der beweging van de verschillende punten uitdrukken. [1])

Hij voegt ten slotte nog toe het zoogenaamde *monodromie-postulaat*, dat eischt, dat bij vasthouding van n—1 punten een n^{de} punt nog een *periodieke* baan kan beschrijven.

Verbetering der karakteriseering van HELMHOLTZ door LIE.

Aan al deze voorwaarden bewijst hij dan, dat alleen de Euclidische en niet-Euclidische bewegingen voldoen. LIE heeft later [2]) echter aangetoond:

1°. Dat de redeneeringen van HELMHOLTZ ongeoorloofd zijn, m.a.w. dat hij stilzwijgend nog meer voorwaarden invoert. Deze komen hierop neer, dat hij uit het vervuld zijn van zijn voorwaarden voor eindig van elkaar verwijderde puntenparen besluit tot een analoog gedrag voor puntenparen, die oneindig dicht bij elkaar liggen; LIE toont door voorbeelden aan, dat die gevolgtrekking ongeoorloofd is ten opzichte van èn den invariant van

[1]) LIE heeft (Theorie des Transformationsgruppen III, pag. 487 en 505) opgemerkt, dat het bestaan van een „afstand" (d.w.z. een invariant) tusschen twee eindig van elkaar verwijderde punten en het bestaan van een invariant boogelement (dus van een invariante „lengte" voor alle kromme lijnen) twee wederkeerig van elkaar onafhankelijke voorwaarden zijn.

[2]) Leipziger Berichte 1890; Theorie des Transformationsgruppen III, Abt. V.

twee punten, èn de vrije bewegelijkheid, èn de monodromie.

Hij laat vervolgens zien, hoe de berekeningen van HELMHOLTZ juist worden, als zijn voorwaarden voor eindig van elkaar verwijderde puntenparen worden vervangen door andere, die voor oneindig dicht bijeengelegen puntenparen gelden.

2°. Dat na deze juistere formuleering der axioma's van HELMHOLTZ, ze nog overbodige bestanddeelen bevatten. LIE toont n.l. aan, dat voldoende is de karakteriseering: „Omkeerbare Liesche groep, die in één enkel punt van algemeene ligging *vrije bewegelijkheid in het infinitesimale* (d.w.z. mogelijkheid van continue beweging bij vasthouding van het punt met een lijnelement, een vlakelement door het lijnelement, een ^{3}element door het vlakelement .... en een $^{n-2}$element door het $^{n-3}$element, maar niet meer als bovendien nog een $^{n-1}$element door het $^{n-2}$element in rust moet blijven) bezit." Alleen voor $n = 2$ geeft deze karakteriseering nog bovendien de groep der spiraaltransformaties, die we door een bijzonder axioma, b.v. het monodromie-postulaat van HELMHOLTZ dienen uit te sluiten.

3°. Dat ook, wanneer men de groepen wil karakteriseeren, zooals HELMHOLTZ oorspronkelijk beproefde, uit het gedrag van eindig van elkaar verwijderde puntenparen, diens formuleering te veel bevat. LIE bewijst n.l. als voldoende de karakteriseering: „Omkeerbare Liesche groep zóó, dat na vasthouding van één punt een ander punt zich nog vrij kan bewegen in een zoogenaamde pseudo-bolruimte, die niet door het vaste punt gaat, en in 't algemeen n—1 dimensies heeft. Verder moet binnen een zeker eindig gebied de eigenschap gelden, dat, na vasthouding van q<n—1 punten, een punt van algemeene ligging zich over de gemeenschappelijke doorsnede der door de vastgehouden punten bepaalde pseudo-bolruimten nog geheel vrij kan bewegen."

De karakteriseering der vlakke bewegingsgroepen onafhankelijk van differentieerbaarheid door HILBERT.

Het ligt voor de hand, om bij al de bovengenoemde karakteriseeringen van groepen te trachten zich los te maken van de beperking tot Liesche groepen [1]), in 't algemeen te trachten naar den opbouw van een groepentheorie onafhankelijk van postulaten over differentieerbaarheid (cf. HILBERT, ,,Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congresse Paris 1900", Problem n⁰ 5, Gött. Nachr. 1900, pag. 269.)

[1]) KLEIN („Zur ersten Verteilung des Lobatcheffsky-Preises", Math. Ann. 50) verdedigt de beperking tot differentieerbare functies bij de onderzoekingen over de grondslagen der meetkunde van LIE met de opmerking, dat elke empirische functie toch met zoo groote benadering als we willen door een analytische functie kan worden voorgesteld. Maar het is a priori zeer goed mogelijk, dat er niet-Liesche groepen bestaan zóó, dat de benaderende analytische transformaties geen groep vormen. (al vormden ze dan ook „bijna" een groep, d. w. z. naderden onbepaald tot de groepeigenschap, zonder haar echter, zoolang ze analytisch blijven, te kunnen bereiken.)

zooals we dat boven hebben doorgevoerd voor een zeer eenvoudig geval n.l. de groep der hoofdbewerkingen met reëele getallen.

Een tweede geval, dat is afgedaan, betreft de groep der Euclidische of niet-Euclidische bewegingen van het vlak. HILBERT [1]) heeft ze gekarakteriseerd als *groep van omkeerbaar uniforme transformaties, die het sitale verband onveranderd laten, die een afgesloten syteem vormen*, (d.w.z., dat, zoo er transformaties van de groep zijn, die een stel bepaalde punten tot een ander stel bepaalde punten onbepaald kunnen laten naderen, er ook een transformatie van de groep is, die het eerste stel in het tweede overvoert), *en waarbij elke „cirkel"* (d.i. het geheel der punten, waarin na vasthouding van één punt een ander punt nog kan overgaan) *uit oneindig veel punten bestaat* [2]).

Hij bewijst daaruit eerst, dat elke cirkel een gesloten continue kromme zonder dubbelpunten (een gesloten „Jordan-kromme") is, dat de cirkels om een punt, elkaar omsluitend, het geheele vlak vullen, en dat bij draaiïng van het vlak om P alle punten tezamen hun cirkels geheel doorloopen volgens functies van één continuen parameter; verder, dat een wille-

[1]) Mathem. Annalen 56. Ook in dit geval blijkt het analytisch zijn der functies een *gevolg* van de groepeigenschap.

[2]) Daar hij evenwel het Cartesiaansche vlak niet completeert, nòch met een punt, nòch met een lijn in 't oneindige, vindt hij alleen de Euclidische en de hyperbolische bewegingsgroepen.

keurig punt zich in elk ander punt door beweging laat overvoeren, en dat na vasthouding van twee punten het geheele vlak vast staat. Het tweede deel van zijn betoog dient dan, om de rechte lijnen in te voeren; hij bouwt tusschen twee punten de rechte verbindingslijn, door de in zich overal dichte duale schaal der middens te construeeren, onder het midden van AB verstaande het middelpunt van de draaiïng, die A naar B en B naar A voert (zoogenaamde ,,halfdraaiïng"), en hij bewijst dat deze puntrij in het platte vlak geen lacunes vertoont, dus met haar grenspunten samen een continue kromme geeft; verder wordt de rechte lijn over haar uiteinden heen verlengd, door om die uiteinden halfdraaiïngen uit te voeren; vervolgens wordt bewezen, dat twee rechte lijnen hoogstens één punt gemeen hebben, en dat twee punten steeds een rechte verbindingslijn hebben, en natuurlijk ook niet meer; en ten slotte worden de stellingen over congruentie aangetoond, waaruit zich dan al naar den eisch omtrent parallellen, die men toevoegt, de Euclidische of de hyperbolische meetkunde laat opbouwen.

Karakteriseering van het lineaire systeem der projectieve of elliptische ruimte.

Men kan zich vragen voor een ruimte van den samenhang der projectieve ruimte een systeem van krommen, oppervlakken, ruimten enz., overeenkomende met het projectieve systeem der rechte lijnen, platte vlakken, platte ^{3}ruimten enz. te karakteriseeren. Het volgende is voldoende:

Door twee punten is steeds één rechte lijn bepaald; door een rechte lijn en een punt er buiten gaat een plat vlak, dat alle rechte lijnen, die er twee punten mee gemeen hebben, bevat; door een plat vlak en een punt er buiten gaat een ^{3}ruimte, die elke rechte lijn, die er twee punten mee gemeen heeft, bevat; enz.; verder: een rechte lijn en een $^{n-1}$ruimte hebben een snijpunt.

Uit deze eigenschappen is n.l. eenvoudig de eenduidigheid van de quadrilaterale constructie der 4^{de} harmonische voor puntrijen, stralenbundels enz. af te leiden. Kiest men dan $n+1$ willekeurige punten uit en laat die correspondeeren met de $n+1$ basispunten van een volgens vroegere uiteenzetting opgebouwde projectieve ^{n}ruimte en vervolgens een eveneens willekeurig gekozen $(n+2)^{de}$ punt aan het eenheidspunt der projectieve ruimte, dan kan men door opvolgende quadrilateraalconstructies (dus alleen door projecteeren en snijden) uit de $n+2$ willekeurig gekozen punten zooveel verdere punten bepalen, dat er aan elk punt met rationale coördinaten van de projectieve ^{n}ruimte een beantwoordt.

Dat de aldus geconstrueerde punten overal dicht liggen, volgt uit een bewijs van LÜROTH en ZEUTHEN, meegedeeld door KLEIN in Math. Ann. 7. En hieruit volgt dan, dat de één-éénduidige correspondentie der punten van beide ruimten ook doorgaat voor de irrationale punten [1]).

[1]) Door deze afbeelding op een reeds vooraf opgebouwde pro-

Karakteriseering van het lineaire systeem der Cartesiaansche of Euclidische en der hyperbolische ruimte.

Een systeem overeenkomende met de rechte lijnen, platte vlakken, ^{3}ruimten enz. van een Euclidische of hyperbolische ^{n}ruimte (in beide gevallen vult het geheel der punten een Cartesiaansche ^{n}ruimte op) kan aldus worden gekarakteriseerd:

Door twee punten is steeds één rechte lijn bepaald; door een rechte lijn en een punt er buiten gaat een plat vlak, dat alle rechte lijnen, die er twee punten mee gemeen hebben, bevat; door een plat vlak en een punt er buiten gaat een ^{3}ruimte, die elke rechte lijn, die er twee punten mee gemeen heeft, bevat, enz.; verder: elke $^{n-1}$ruimte verdeelt de ^{n}ruimte in twee deelen zóó, dat elke rechte lijn, die een punt van het eene deel met een punt van het andere deel verbindt, de $^{n-1}$ruimte snijdt in een tusschen de beide laatstgenoemde punten gelegen punt. Men kan dan n.l. volgens SCHUR (Mathematische Annalen 39) bewijzen, dat dit systeem met zijn „ideale elementen" kan worden aangevuld tot het volledige boven behandelde projectieve systeem. Zoo zien we, als nog de eisch, dat het parallellenaxioma van EUCLIDES moet gelden, wordt opgelegd, noodzakelijk het lineaire systeem van de Cartesiaansche ^{n}ruimte (of van de projectieve ^{n}ruimte verminderd met

---

jectieve ruimte schijnen de ontwikkelingen van KLEIN (Vorlesungen über nicht-Euclidische Geometrie I pag. 319—353), die beoogen uit de axioma's der projectieve meetkunde de verdere stellingen direct te bewijzen, overbodig.

een enkele platte ${}^{n-1}$ruimte) voor den dag komen; leggen we echter den parallelleneisch van LOBATCHEFFSKY op, dan komt het lineaire systeem van een Cartesiaansche (of ook van een projectieve) ruimte, voorzoover gelegen binnen een willekeurig convex ovaal; welk ovaal men als „ovaal der grenspunten" aan het gegeven systeem kan toevoegen.

Het lineaire systeem van de hyperbolische ^{n}ruimte hebben we hier dus alleen, zoo het ovaal der grenspunten een tweede graads- ${}^{n-1}$ruimte is; men kan dit dwingen met den eisch, dat het gegeven systeem een projectieve uniforme groep met $\frac{1}{2}$ n (n + 1) parameters toelaat.

De variatieproblemen, die lineaire systemen geven.

Men kan zich nu vragen, op welke wijze tusschen twee willekeurige punten eener Cartesiaansche ruimte steeds een kromme bepaald kan zijn zóó, dat het geheel dier krommen voldoet aan de bovengenoemde karakteriseeringen van een lineair systeem en zal dan in de eerste plaats denken aan variatieproblemen, waarvoor die krommen extremalen zijn.

We weten dat een krommenstel, zooals verlangd wordt, uniform is af te beelden, hetzij op de rechte lijnen eener Cartesiaansche ruimte aangevuld met een ruimte in 't oneindige, hetzij op die eener Cartesiaansche ruimte zonder meer, hetzij op die eener Cartesiaansche ruimte voor zoover gelegen binnen een convex ovaal.

Men zal dus zoeken naar variatieproblemen in de Cartesiaansche ruimte, die als extremalen de rechte lijnen geven: immers in de meest algemeene uniforme continue transformatie der oplossing van dit probleem zal men vinden het algemeene variatieprobleem, waarvan de extremalen de sitale eigenschappen van het lineaire systeem bezitten.

Over dit vraagstuk zijn onderzoekingen gedaan door HAMEL (Mathem. Annalen 57) voor het platte vlak, en in hoofdtrekken voor de ^{3}ruimte; die we, wat het platte vlak betreft, in 't kort weergeven. HAMEL stelt de vraag van een eenigszins ander standpunt als hier; het gezochte integraalelement onderwerpt hij daardoor van te voren aan eenige beperkingen, waardoor het zich met de gewone opvatting van „lengteëlement" der metrische geometrie meer of min dèkt, en de extremalen, die hij zoekt, speciaal *minimaal*krommen zijn.

Zoo zoekt hij de minimaalkrommen van de integraal

$$\int ds.\, f\,(x\; y\; tg\; \vartheta) \equiv \int dx.\, g\,(x\; y\; tg\; \vartheta),$$

waar f een positieve, eenduidige (dit, omdat het lengteëlement omkeerbaar moet zijn) en in 't algemeen continue en naar alle drie argumenten differentieerbare functie voorstelt. Daar de differentiaalvergelijking van het variatieprobleem den vorm

$$\frac{d^2\, y}{d\, x^2} = 0$$

moet aannemen, moet g voldoen aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p\, \partial x} + p \frac{\partial^2 g}{\partial p\, \partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} = o \quad \left(\frac{dy}{dx} = p \text{ gesteld}\right).$$

Door deze vergelijking naar p te differentieeren, komt een vergelijking in $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$, met de algemeene oplossing:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = W\,(p, y - px);$$

waaruit ten slotte voor g wordt gevonden:

$$g = {}_c\!\int^p {}_c\!\int^p W\,(p, y - px)\, dp\, dp + \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y}.$$

(u een willekeurige functie van x en y).

Merken we op:

$${}_c\!\int^p {}_c\!\int^p v\,(p)\, dp\, dp = {}_c\!\int^p (p - \xi)\, v\,(\xi)\, d\,\xi, \text{ en stellen we}$$

$$W = \cos^3 \vartheta . \, w,$$

dan komt:

$$g = {}_{\vartheta_0}\!\int^{\vartheta} \cos\tau . \, w\,(\operatorname{tg}\tau, y - x \operatorname{tg}\tau)(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\tau)\, d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$g = {}_{\vartheta_0}\!\int^{\vartheta} \frac{1}{\cos\vartheta} . \sin\,(\vartheta - \tau) . \, w . \, d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$f = {}_{\vartheta_0}\!\int^{\vartheta} \sin\,(\vartheta - \tau) . \, w . \, d\,\tau + \frac{\partial u}{\partial x} \cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\vartheta.$$

Hierin wordt als voorwaarde, dat we een *minimum* hebben, gevonden:

w positief voor elke x, y en ϑ;

terwijl verder uit de eenduidigheid van f volgt:

a) eenduidigheid van w.

b) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \pi} \sin\tau . w . d\tau.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \pi} \cos\tau . w . d\tau.$$

Zoo wordt ten slotte het boogelement:

$$dl \equiv \frac{ds}{2}\int_{\vartheta - \pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau).\ w(tg\tau, y - xtg\tau) d\tau.$$

HAMEL onderzoekt dan eerst, in welk geval tot de minimaalkrommen alle rechte lijnen van het platte vlak, de lijn in 't oneindige incluis, behooren — zoodat door het variatie-vraagstuk een *projectief* lineair systeem is bepaald —; hij vindt als voorwaarde, dat $\int dl$ langs alle rechte lijnen eindig blijft, en voor alle rechte lijnen dezelfde waarde heeft.

Vervolgens geeft hij een kategorie ongeveer overeenkomende met een door MINKOWSKI in zijn „Geometrie der Zahlen" opgestelde geòmetrie, waar tot de minimaalkrommen alle rechte lijnen, maar niet de lijn in 't oneindige, behooren — het variatie-vraagstuk bepaalt hier dus een volledig Euclidisch lineair systeem —; hij stelt nl. w van haar tweede argument onafhankelijk, en $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial u}{\partial y}$ constant, ziet echter voor dit geval van de omkeerbaarheid van het lengte-element af; zoo vindt hij als „maatkromme", d. w. z. meetkundige plaats der punten op een afstand 1 van den oorsprong gelegen:

$$F(r,\vartheta) = 1 - r\left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau).w(\tau).d\tau + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta \right\} = o.$$

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta).$$

En daar het eerste lid hiervan, met een positieven factor vermenigvuldigd, de kromtestraal is, en de eenige beperking voor F is, dat w steeds positief moet zijn, vindt hij als eenige beperking voor de „maatkromme", dat zij overal convex is.

Ten slotte geeft hij als voorbeeld van een oplossing, die een Euclidisch lineair systeem binnen een convex ovaal voorstelt, de zoogenaamde Hilbertsche meetkunde: HILBERT definieert n.l. in Math. Ann. 46 den afstand tusschen twee punten als de logarithme van hun dubbelverhouding met de snijpunten van hun verbindingslijn met een convex ovaal, waar ze binnen liggen; hij toont l.c. meetkundig aan, dat voor die aanname in een driehoek de som van twee zijden grooter is dan de derde; HAMEL laat nu zien, hoe ook deze meetkunde uit zijn algemeene formule kan worden afgeleid.

Daartoe zoekt hij de functies W en u zóó te bepalen, dat

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^p dp \int_c^p dp\, W + u(x_2 y_2) - u(x_1 y_1) =$$
$$= \log \frac{(x_1 - v_1)(x_2 - v_2)}{(x_2 - v_1)(x_1 - v_2)},$$

en vindt, $y - p\,x = b$ gesteld:

$$W\,[p, y - p\,x] = \left[\frac{\partial^2 (v_2 - v_1)}{\partial\, b^2}\right]_p$$

van welke uitdrukking hij gemakkelijk aantoont, dat ze positief (negatief) is voor ϑ in het eerste of derde (tweede of vierde) kwadrant, waaruit dan weer volgt, dat w in elk geval positief is, zooals voor de minimum-eigenschap noodig is.

Verder vindt hij:

$$u = \log \frac{x - v_2\,(c, y - cx)}{x - v_1\,(c, y - cx)}.$$

We kunnen de bovengenoemde Minkowskische geometrie (met omkeerbaar boogelement) als bijzonder geval van deze Hilbertsche meetkunde laten voor den dag komen.

Immers stelt MINKOWSKI als boogelement ds f (ϑ), en HILBERT: ds $\left\{\frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s}\right\}$; laten we nu het Hilbertsche grensovaal onbepaald groot *van bepaalden vorm* worden, dan wordt $\frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s}$ oneindig klein, maar tevens voor evenwijdige lijnen gelijk, het wordt dus na vermenigvuldiging met een oneindig groote constante een functie van de richting alleen, en het boogelement wordt van den vorm $ds\ f\ (\vartheta)$.

De mogelijke puntverzamelingen.

In den aanvang van dit hoofdstuk hebben we 2 soorten lineair geordende puntrijen kunnen opbouwen, n.l. het ordetype ω der afgetelde positieve ordinaalgetallen en het omgekeerde type ω^*, en daarnaast de in zich overal dichte aftelbare rij (het ordetype η der rationale getallen, alle, of tusschen 0 en 1, of ook der duale schaal, geheel, of tusschen 0 en 1 [1])). Daarnaast hebben we het intuitief continuum beschouwd als meetbaar continuum, en gezien, dat zich elk punt daarop laat benaderen door een duale schaal. Het *continuum als geheel* was ons echter intuitief gegeven; een opbouw er van, een handeling die „alle" punten er van geïndividualiseerd door de mathematische intuitie zou scheppen, is ondenkbaar en onmogelijk.

De mathematische intuitie is niet in staat anders dan aftelbare hoeveelheden geïndividualiseerd te scheppen. Maar wel kan zij, eenmaal een schaal van het ordetype η opgebouwd hebbend, er een *continuum als geheel* overheen plaatsen, welk continuum dan achteraf weer omgekeerd als meetbaar continuum als matrix van de punten der schaal kan worden genomen.

---

[1]) waarbij we zullen rekenen, 0 en 1 zelf naar verkiezing bij de puntrij te kunnen tellen of niet.

Zoo kan een gegeven continuum door een ander continuum met lacunes worden overdekt; we behoeven daartoe op het eerste continuum maar een ordetype η te bouwen, dat het niet overal dicht bedekt en vervolgens bij dat ordetype η het continuum te construeeren; we kunnen dan altijd een punt van het tweede continuum identiek noemen met het grenspunt van zijn benaderingsreeks op het eerste continuum. In zooverre kunnen we dan zeggen: ,,De punten van het tweede continuum maken een deel uit van die van het eerste"; en in zooverre hebben we nu drie wijzen van opbouw voor ,,puntverzamelingen op het continuum", n.l.:

1°. kunnen we er volgens eindige getallen of de ordetypen ω of η, of ook in afwisseling of onderschikking aan elkaar van deze drie [1]), discrete, geïndividualiseerde

---

[1]) Gebruiken we alleen het ordetype ω in verbinding met eindige getallen, dan krijgen we de zoogenaamde *welgeordende* verzamelingen, bij den opbouw waarvan elk element, dat later in den opbouw komt, ook later komt in de rangschikking. De opbouw kan als element voor haar eindige getallen of getallen van het ordetype ω natuurlijk ook alle reeds vroeger opgebouwde welgeordende verzamelingen nemen. We krijgen zoo achtereenvolgens $1;\ 2;\ldots\ \omega;\ \omega+1;\ \omega+2;\ldots\ \omega.\ 2;\ldots\ \omega^2;\ \omega^2+1;\ldots$ $\omega^3;\ldots\ \omega^{\omega};\ldots\ \omega^{\omega^{\omega}};\ldots\ \varepsilon_1$ (d. i. $\omega^{\omega^{\omega}}$, de machtsverheffing ω maal voortgezet); . . . .

Een welgeordende verzameling heeft de eigenschap, dat zij zelf puntverzamelingen op bouwen; het aantal dezer punten is steeds aftelbaar, en evenzoo het aantal der door puntenparen daaruit op het continuum bepaalde intervallen; in elk van haar intervallen, en evenzoo in haar geheel is de puntverzameling al of niet *dicht* (hieronder verstaan we: van het ordetype η, nadat alle welgeordende of omgekeerd welgeordende verzamelingen er in tot een enkel punt zijn samengetrokken).

We kunnen ook zeggen: in een willekeurig segment van het continuum (waarvoor ook het geheele continuum kan worden gekozen) is de puntverzameling al of niet dicht; en nader onderzoek leert, dat dit laatste zich als volgt karakteriseert bij benadering van de puntverzameling volgens een willekeurige overal dichte duale schaal op het beschouwde seg-

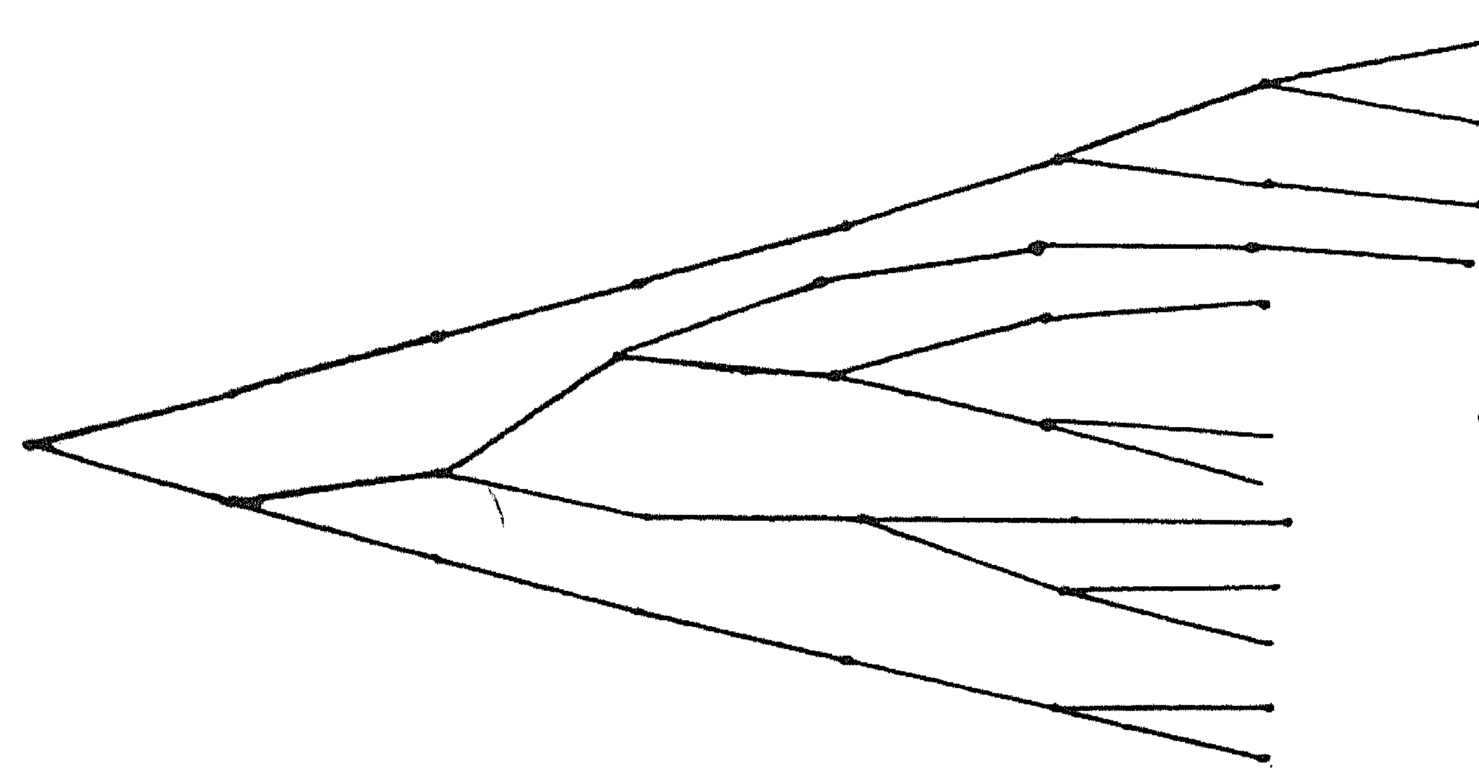
---

en ook al haar deelverzamelingen een eerste element hebben. Naast de welgeordende kunnen we ook omgekeerd welgeordende verzamelingen krijgen. De eenige wijze om niet welgeordende of omgekeerd welgeordende verzamelingen op te bouwen, bestaat in ω maal herhaalde tusschenvoeging in welgeordende verzamelingen van welgeordende verzamelingen; hierbij kunnen dan „dichte" (zie den tekst) deelverzamelingen ontstaan.

Men vergelijke hierbij een theorema, door BERNSTEIN (Mathem. Ann. 61 pag. 144) uitgesproken:

Elke geordende aftelbare verzameling (dus ook elke individueel opbouwbare verzameling; immers zeg ik bij het opbouwen niets omtrent ordening, dan kan ik stilzwijgend al het later bijgebouwde *na* het vroeger gebouwde denken) is met behoud van orderelaties af te beelden op een deel van het ordetype η.

ment als eenheidssegment geconstrueerd: bij bepaling van elk volgend duaalcijfer is dat òf bepaald door het vorige òf laat keus tusschen twee; is het laatste het geval, dan is voor elk der beide keuzen het daaropvolgende duaalcijfer weer òf bepaald, òf laat keus tusschen twee, enz. hetgeen zich laat afbeelden door een figuur van den vorm



enz.;

breken we hier elke tak, die zich nooit meer vertakt, af,[1]) dan blijft ten slotte over òf niets òf een voortdurend zich vermenigvuldigende tweevertakking; in het laatste geval is de verzameling wèl, in het eerste niet, binnen het beschouwde interval dicht.

2°. kunnen we in intervallen, waarbinnen de laatste

---

[1]) van links naar rechts naar volgorde van den rang van het duaalcijfer der aanhechtingsplaats; is de afbrekingsoperatie op alle ω rangen volbracht, dan wordt zij op dezelfde wijze op het gebleven residu nog eens toegepast.

puntverzameling dicht is, haar eerst door de boven beschreven samentrekkingen maken tot een overal in zich dichte verzameling, en dan daarop de operatie ,,completeering tot een continuum" toepassen; de intervallen, die we daartoe uitkiezen, zijn steeds duidelijk te definieeren, want, daar hun aantal aftelbaar is, zijn ze geïndividualiseerd.

3°. kunnen we een puntverzameling scheppen, door aan een continuum in een zeker interval een er op geconstrueerde dichte schaal te onttrekken.

Oplossing van het continuumprobleem.

Is nu bij den opbouw van een puntverzameling de operatie 2° (al of niet in vereeniging met 3°) toegepast, dan is zij op een continuum ,,af te beelden"; dit is zoo te verstaan: in beide verzamelingen (het continuum en de gegeven puntverzameling) wordt een welgedefinieerde, dus aftelbare puntgroep uitgekozen zóó, dat alle andere punten als benaderingen ten opzichte van overal dichte deelen van die groep kunnen worden beschouwd, en vervolgens worden de ongedefinieerde punten met elkaar één-éénduidig in correspondentie gebracht, door de overal dichte deelen, ten opzichte waarvan in beide de oneindig voortloopende benaderingen moeten worden genomen, op elkaar af te beelden; de wèl gedefinieerde punten kunnen dan altijd nog daarna in correspondentie met elkaar worden gebracht, daar ze in beide aftelbaar zijn.

Waaruit volgt, dat elke puntverzameling op het meetbaar continuum (dus ook op het intuitief continuum zonder meer, waarmee we immers eerst kunnen werken nadat we het meetbaar [1]) — of uit geïndividualiseerde meetbare stukken opgebouwd — hebben gemaakt), die niet aftelbaar is, de *machtigheid van het continuum* bezit.

Hiermee schijnt het „continuum-probleem", door CANTOR in 1873 opgesteld en door HILBERT („Mathematische Probleme", Problem no. 1, pag. 263.) als nog steeds actueel gesignaleerd, te zijn opgelost, en wel in de eerste plaats door streng vast te houden aan het inzicht: over een continuum als puntverzameling kan niet worden gesproken, dan in betrekking tot een schaal van het ordetype η.

Niet-Archimedische uniform groepen op he eendimensionaal continuum

We kunnen een Cartesiaansche ruimte denken van ω dimensies, ook van $\omega^* + \omega$ dimensies, en daarvan beschouwen alle punten wier coördinaten van lager dan een gegeven nummer, nul zijn. [2])

We kunnen nog verder gaan, en een Cartesiaansche ruimte van $(\omega^* + \omega)^n$ afmetingen denken. Elke coör-

[1]) De niet-Archimedische pseudocontinua, waarover beneden zal worden gesproken, moeten volgens onze continuum-opvatting als *meerdimensionale* continua (op een bijzondere wijze geordend en aan een bijzondere transformatiegroep onderhevig) worden opgevat; daar echter volgens CANTOR meerdimensionale, en ook aftelbaar-oneindig-dimensionale continua zijn af te beelden op eendimensionale, gaat de stelling ook voor èn meerdimensionale èn niet-Archimedische continua door.

[2]) Men vergelijke in dit verband HILBERT, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, § 33.

dinaat draagt dan n geheele positieve of negatieve getallen als indices, en we beschouwen slechts die punten, wier coördinaten alleen bestaan (niet nul zijn) voorzooverre alle indices er van grooter zijn, dan die van een bepaalde gegeven coördinaat, zoodat de nummers van de overblijvende coördinaten een welgeordende verzameling vormen.

Deze punten zijn lineair te ordenen, door voor 2 punten het vóór of na te beslissen naar de laagstgenummerde coördinaat, waarin ze verschillen. Op een zoo geconstrueerd pseudo-continuum (dat een gewoon meetbaar continuum is met nog allerlei punten tusschen een willekeurig er op gekozen punt en een door dat punt begrensd segment, en met bovendien nog allerlei punten rechts en allerlei punten links van alle punten van het gewone continuum) geldt het nu, een groep van hoofdbewerkingen te construeeren, die voor de er op liggende punten van het gewone continuum een groep van hoofdbewerkingen in elkander geeft. We kunnen dan beginnen, voor ieder der coördinaten een schaal en daaruit een gewone optelgroep te construeeren. Daarmee is dan tegelijk een optelgroep voor het geheel geconstrueerd, die werkelijk associatief en commutatief is, en die elk punt in elk ander punt kan overvoeren.

Kiezen we vervolgens op elk der schalen willekeurig een 1-punt, dan is de operatie: ,,vermenigvuldiging met een punt van het gewone continuum" (d.w.z. met een punt, waarvan alle coördinaten nul zijn behalve die met index o) van zelf duidelijk; zij is associatief er met de optelgroep distributief. Zoeken we hierbij een associatieve operatie, die alle indices der coördinaten 1 vergroot, en die we zullen voorstellen door „$a_1 \times$"; speciaal „$1_1 \times$", als ze steeds 1-punten in elkaar overvoert (waartoe we onze 1-punten altijd geschikt kunnen kiezen). Daar ze de groepen binnen de enkele coördinaten in elkaar moet overvoeren, hebben we nu ook algemeen

$$1_1 \times a_\alpha = a_{\alpha+1}.$$

Zoeken we verder een associatieve operatie, die alle indices der coördinaten ω vergroot, en die we zullen voorstellen door „$a_\omega \times$"; speciaal „$1_\omega \times$", als ze het 1-punt van de o-coördinaat overvoert in dat van de ω-coördinaat, dat van de ω-coördinaat in dat van de 2ω-coördinaat, enz.

Daar ze weer de groepen binnen de enkele coördinaten in elkaar moet overvoeren, hebben we, als α een eindig getal:

$$1_\omega \times a_\alpha = \{ p_\alpha a \}_{\omega + \alpha},$$

Daar de operaties 1_1 en 1_ω samen associatief moeten zijn, hebben we verder:

$$\begin{aligned} \{p_2 a\}_{\omega+2} &= 1_\omega \times a_2 \\ &= (1_\omega \times 1_1) \times a_1 \\ &= p_1 \times 1_1 \times 1_\omega \times a_1 \\ &= p_1 \times 1_1 \times \{p_1 a\}_{\omega+1} \\ &= \{p_1^2 a\}_{\omega+2}, \end{aligned}$$

en we krijgen, zoo voortgaande:

$$p_\alpha = p^\alpha.$$

En in 't algemeen, als τ een willekeurig eindig of oneindig getal:

$$\begin{aligned}\{p_{\tau+1}\, a\}_{\tau+\omega+1} &= 1_\omega \times a_{\tau+1} \\ &= (1_\omega \times 1_1) \times a_\tau \\ &= p_1 \times 1_1 \times (1_\omega \times a_\tau) \\ &= p_1 \times 1_1 \times \{p_\tau\, a\}_{\tau+\omega} \\ &= \{p_1\, p_\tau\, a\}_{\tau+\omega+1}\end{aligned}$$

zoodat in 't algemeen

$$p_\tau = p^\alpha,$$

als α het eindige deel van het transfinite getal τ is.

Op dezelfde wijze voeren we in de operatie „$1_{\omega^2} \times$" zóó, dat:

$$1_{\omega^2} \times a_\tau = \{q_\tau\, a\}_{\tau+\omega^2},$$

en vinden uit de associatieve eigenschap vooreerst:

$$q_\alpha = q^\alpha$$
$$q_{\beta\omega} = r^\beta,$$

als α en β eindige getallen zijn.

En vervolgens hebben we, als $\tau = \zeta + \beta\omega + \alpha$, waarin ζ slechts termen van hoogeren, dan den eersten graad in ω bevat:

$$\begin{aligned}\{q_\tau\}_{\tau+\omega^2} &= 1_{\omega^2} \times 1_\tau \\ &= 1_{\omega^2} \times 1_\alpha \times 1_{\beta\omega} \times 1_\zeta\end{aligned}$$

$$= q^{\alpha} \times 1_{\alpha} \times 1_{\omega^2} \times 1_{\beta\omega} \times 1_{\zeta}$$
$$= q^{\alpha} r^{\beta} \times 1_{\alpha} \times 1_{\beta\omega} \times 1_{\omega^2} \times 1_{\zeta}$$
$$= \{ q^{\alpha} r^{\beta} \}_{\tau+\omega^2},$$

zoodat we hebben

$$q_{\tau} = q^{\alpha} r^{\beta}.$$

Dat verder deze voor p_{τ} en q_{τ} als noodzakelijk gevonden voorwaarden ook voldoende zijn, blijkt als we uitrekenen:

$$1_{a_1+b_1\omega+c_1\omega^2} \times \{ 1_{a_2+b_2\omega+c_2\omega^2} \times 1_{a_3+b_3\omega+c_3\omega^2} \}$$

en

$$\{ 1_{a_1+b_1\omega+c_1\omega^2} \times 1_{a_2+b_2\omega+c_2\omega^2} \} \times 1_{a_3+b_3\omega+c_3\omega^2}.$$

We vinden dan voor beide uitdrukkingen:

$$p^{b_1a_2+b_1a_3+b_2a_3} \cdot q^{c_1b_2+c_1b_3+c_2b_3} \cdot r^{c_1a_2+c_1a_3+c_2a_3} \times$$
$$\times 1_{(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\omega+(c_1+c_2+c_3)\omega^2}.$$

Zoo voortgaande kunnen we „$1_{\omega^3} \times$"....., „$1_{\omega^n} \times$" definieeren, en, als we onder vermenigvuldigen met een som nog verstaan vermenigvuldigen met de termen en dan sommeeren; en opmerken, dat voor de reciproke van een getal alle coördinaten bij opvolging zijn te benaderen, dus ook de deeling uitvoerbaar is, hebben we een volledig stel bewerkingen op ons lineair pseudo-continuum, waarvoor de associatieve en distributieve eigenschappen gelden, maar, als $n > 1$ is, niet noodzakelijk de commutatieve; immers bijv.:

$$1_1 \times 1_\omega = 1_{\omega+1}, \text{ maar}$$
$$1_\omega \times 1_1 = p_{\omega+1};$$

terwijl we daarentegen boven van het gewone meetbare continuum hebben gezien, dat dáár geen groep van hoofdbewerkingen is te construeeren, zonder dat de commutatieve eigenschap geldt.

Het geconstrueerde pseudocontinuum kan wegens het gemis van de meetbaarheid een *niet-Archimedisch continuum* worden genoemd; het mist bovendien nog een andere eigenschap van het gewone continuum, n.l. de *Dedekindsche continuiteit* [1]), die zich als volgt laat formuleeren: wordt het geheel der punten van het continuum in twee deelen verdeeld zóó, dat elk punt van het eene deel hooger in rang is, dan elk punt van het andere deel, dan heeft òf het laagste deel een hoogste punt en het hoogste geen laagste punt, òf het hoogste deel een laagste punt en het laagste geen hoogste punt. Uit deze Dedekindsche continuiteit is trouwens de meetbaarheid direct af te leiden.

Wel bezit het niet-Archimedisch continuum *Veronesische continuiteit*, die aldus is te definieeren: wordt het geheel der punten van het continuum in twee deelen verdeeld zóó, dat elk punt van het eene deel hooger in rang is, dan elk punt van het andere, en kan ik bovendien uit beide deelen steeds 2 punten uitkiezen zóó, dat hun verschil kleiner kan worden dan elke gegeven grootheid, dan heeft òf het laagste

[1]) cf. DEDEKIND, „Stetigkeit und irrationale Zahlen."

deel een hoogste punt en het hoogste geen laagste punt, òf het hoogste deel een laagste punt en het laagste geen hoogste punt. (Is de voorwaarde voor het onbepaald klein worden van het verschil niet vervuld, dan kan het dus voorkomen dat èn het laagste deel geen hoogste punt èn het hoogste deel geen laagste punt heeft.)

Niet-Archimedische en niet-Pascalsche projectieve geometrieën.

Zooals we vroeger de projectieve meetkunde opbouwden uit $n + 1$ van een hoofdbewerkingsgroep voorziene gewone continua of complexe continua, zoo kunnen we het nu ook doen uit niet-Archimedische continua. De bewijzen voor de lineaire vergelijkingen van rechte lijnen, platte vlakken enz. (waarbij we er hier intusschen om moeten denken, de coëfficienten steeds rechts van de coördinaten te schrijven) blijven onveranderd doorgaan; dus ook alle stellingén, die wij boven (zie pag. 54) ter karakteriseering van het stelsel rechte lijnen, platte vlakken enz. in een gewone projectieve ruimte hebben opgenoemd.

Hieruit volgt, dat ook de stelling van DESARGUES („als van twee driehoeken de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, liggen de snijpunten van overeenkomstige zijden op een rechte lijn") of, wat er mee gelijkwaardig is, de stelling van de eenduidigheid van het 4^{de} harmonische punt, blijven doorgaan; evenzoo blijft geldig de projectiviteit van harmonische ligging.

Maar onderzoeken we, of doorgaat de stelling van de projectiviteit der relatieve coördinaten, dan blijkt dat af te hangen van het al of niet bestaan van de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging. Hetzelfde geldt voor de er mee gelijkwaardige stelling van PAPPUS („zijn op twee snijdende rechte lijnen elk 3 punten gegeven, dan liggen de 3 snijpunten der kruisverbindingslijnen van overeenkomstige paren op een rechte lijn"), die HILBERT (Festschrift. in 't bijzonder Kap. VI) noemt de stelling van PASCAL. (Van de gewone onder dien naam bekende stelling kan zij n.l. worden beschouwd als het bijzondere geval voor een degenereerende kegelsnede.) Geldt dus de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging niet, dan vervallen mèt de stelling van PASCAL verschillende snijpuntsstellingen, b.v. de stelling van het eenduidig bepaald zijn van een gemeenschappelijk harmonisch puntenpaar bij twee puntenparen van een rechte lijn, en ook de zgn. *hoofdstelling der projectieve meetkunde*: Zijn twee rechte lijnen door een rij van perspectiviteiten op elkaar betrokken, dan is door de betrekking van drie puntenparen op elkaar, ook van elk ander punt het correspondeerende bepaald.

De stelling van Pascal volgt uit het bestaan van

Bestaat voor de niet-Archimedische projectieve meetkunde of het gedeelte er van binnen een convex ovaal [1])

[1]) Is alleen dat beperkte gedeelte gegeven met de (zie pag. 55) karakteriseerende eigenschappen, dan gaat de completeering met ideale elementen volgens SCHUR (Math. Annalen 39) ook voor de niet-Archimedische meetkunde onveranderd door.

(of bij de limiet binnen een tweemaal getelde platte $^{n-1}$ruimte) een *congruente groep*, d. w. z. een groep in eigenschappen overeenkomende met de elliptische resp. hyperbolische (Euclidische) congruente groep [1]), dan heeft HILBERT aangetoond, dat *alle* snijpuntsstellingen doorgaan, dus ook de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging er geldig moet zijn. (Festschrift, Kapitel III; Neue Begründung der Bolyai-Lobatcheffskyschen Geometrie, Math. Annalen 57; vgl. ook VAHLEN, Abstrakte Geometrie p. 251.)

een congruente projectieve groep.

Voor een niet-Archimedische projectieve meetkunde binnen een convex ovaal heeft VAHLEN (Abstrakte Geometrie p. 204—233) aangetoond, dat alle congruentiestellingen, dus ook de stelling van PASCAL, dus ook de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging, zijn af te leiden uit alleen het bestaan van een *affine groep*, d.i. een projectieve groep, die ieder punt in ieder punt kan overvoeren, en daarbij in elk punt vrije bewegelijkheid in het infinitesimale bezit.

---

[1]) Zulk een groep is te karakteriseeren als projectieve groep, die:
1°. elk punt in elk punt kan overvoeren,
2°. om elk punt vrije bewegelijkheid in het infinitesimale bezit, en „bollen" om het punt bepaalt, die elke halflijn om het punt eenmaal snijden,
3°. alle segmenten kan omkeeren, en van alle gelijkbeenige driehoeken de beenen kan verwisselen;
en zij bestaat uit bewegingen en symmetrische transformaties. (de laatste alleen voor de hyperbolische en Euclidische groepen uitdrukkelijk te noemen.)

Semi-congruente groepen der niet-Archimedische meetkunde.

Van de niet-Archimedische vlakke meetkunde heeft HILBERT nog een eigenschap bewezen (vgl. ,,Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck,'' Proceedings of the London Mathem. Society vol. 35). Bestaan de gewone (Euclidische of niet-Euclidische) congruente groepen, dan geldt, zooals we zagen, de stelling van PASCAL; maar dan bestaan er nog naast de genoemde groepen *semi-congruente bewegingsgroepen*, die alle eigenschappen der congruente bewegingsgroepen bezitten; terwijl tòch het vlak ten opzichte van die groep niet symmetrisch is: een gelijkbeenige driehoek heeft geen gelijke basishoeken. De niet-monodrome spiraalgroep van HELMHOLTZ in de gewone Archimedische meetkunde, doet aan deze eigenschappen denken, maar een segment is hier niet omkeerbaar: immers een draaiïng π verandert zijn ,,grootte'', d.i. zijn invariant ten opzichte van de verschuivingsgroep; en ook wordt, als we een punt vasthouden, elke uit dat punt ontspringende halflijn door elke baankromme meermalen gesneden. Dit wordt in de Hilbertsche semicongruente groep voorkomen, door van de beide deelen van den draaiïngshoek (n.l. het eindige en het oneindig kleine: een oneindig groot deel bestaat voor hoeken niet), alleen het tweede met een evenredige vergrooting gepaard te doen gaan. Elk punt beschrijft zoo wel een spiraal, maar alleen ten opzichte van het oneindig kleine deel van den hoek, dat bij de perioden π en 2π telkens weer o is; dus blijft vooreerst het eindige deel van den afstand tot het middelpunt bij de draaiïng constant, zoodat de oorsprong niet onbepaald wordt genaderd; verder wordt elke halfstraal uit het middelpunt door de baankrommen slechts éénmaal gesneden; en ten slotte de omkeerbaarheid der segmenten blijft behouden.

De wiskunde kan geen andere materie behandelen, dan die ze zelf heeft opgebouwd.

In het voorgaande is van de fundamenteele gedeelten der wiskunde getoond, hoe ze zijn *op te bouwen* uit voorstellingseenheden: door eenvoudige iuxtapositie òf vorming van reeksen van het type ω of η òf van continua; waarbij intusschen in elk stadium van den opbouw als nieuwe eenheden geheele reeds opgebouwde systemen genomen kunnen worden.

Dat geen wiskunde, die niet op deze wijze intuitief is opgebouwd, kan bestaan; dat dus in dezen opbouw, onder de verplichting, zorgvuldig acht te geven, wat de intuitie veroorlooft te stellen en wat niet, de eenig mogelijke grondvesting der wiskunde is te zoeken; en hoe elke andere poging tot zulk een grondvesting moet mislukken, zal in het derde hoofdstuk worden uiteengezet.

Binnen zulk een opgebouwd systeem zijn dikwijls, geheel buiten zijn wijze van ontstaan om, nieuwe gebouwen zeer eenvoudig aan te brengen, als elementen waarvan de elementen van het oude of systemen daarvan worden genomen, in nieuwe rangschikking, maar waarbij men de rangschikking in het oude gebouw voor oogen behoudt. Op de mogelijkheid van zulk bouwen van nieuwe systemen in bepaalden samenhang met een vooraf gegeven systeem, komt neer, wat men noemt de ,,eigenschappen" van het gegeven systeem.

En een belangrijke rol speelt bij den opbouw der wiskunde juist dat *inpassen in een gegeven systeem* van nieuwe systemen, dikwijls in den vorm van een onderzoek naar de mogelijkheid of onmogelijkheid van een inpassing, die aan bepaalde voorwaarden voldoet, en in geval van mogelijkheid naar de verschillende wijzen waarop.

Voorbeelden daarvan zijn in het voorgaande behandeld als onderzoekingen naar de mogelijkheid der inpassing van aan zekere voorwaarden voldoende transformatiegroepen *in gegeven systemen.* (We kunnen daar het continuum der groepparameters als het in te passen systeem beschouwen, en het karakter van dat continuum als groepparametercontinuum als voorwaarde omtrent de wijze van inpassing.) En in dezen vorm hebben we onder meer substraten gegeven van verschillende in de laatste jaren uitgevoerde onderzoekingen, die bedoelden licht te werpen op de grondslagen der wiskunde, en die alleen in den zin onzer vertolking wiskundige beteekenis hebben; dit op grond van opvattingen, die in het derde hoofdstuk zullen worden verdedigd, en als toelichting waartoe de voorgaande ontwikkelingen kunnen worden beschouwd.

II.

WISKUNDE EN ERVARING

Het intellect en de sprong van doel op middel.

Den menschen is een vermogen eigen dat al hun wisselwerkingen met de natuur begeleidt, het vermogen n.l. tot *wiskundig bekijken* van hun leven, tot het zien in de wereld van herhalingen van volgreeksen, van causale systemen in den tijd. Het oer-phenomeen is daarbij de tijdsintuitie zonder meer, waarin herhaling als ,,ding in den tijd en nog eens ding'' mogelijk is, en op grond waarvan levensmomenten uiteenvallen als volgreeksen van qualitatief verschillende dingen; die vervolgens zich in het intellect concentreeren tot niet *gevoelde*, doch *waargenomen* wiskundige volgreeksen. En het levensgedrag der menschen zoekt zooveel mogelijk van die wiskundige volgreeksen te kunnen waarnemen, om telkens, waar in de werkelijkheid bij een vroeger element van zulk een reeks met meer succes schijnt te kunnen worden ingegrepen, dan bij een later, ook dan, wanneer alleen bij dat latere het instinct wordt aangedaan, het eerste te kiezen als richting voor hun daden.

(Vervanging van het *doel* door het *middel*.) Het oninstinctieve van deze intellectueele handeling maakt echter de zekerheid, dat werkelijk de deelen eener volgreeks bijeen behooren alles behalve volkomen, zoodat ze steeds kan worden gelogenstraft, wat waargenomen wordt als ontdekking ,,dat de regel niet langer doorgaat".

Intusschen in 't algemeen blijkt de taktiek, bestaande in het beschouwen der volgreeksen en het op grond daarvan teruggaan van doel op middel, waar in het middel gemakkelijker ingegrepen schijnt te kunnen worden, eene doeltreffende en bezorgt de menschheid haar macht. Het gelukt regelmaat op een beperkt gebied van verschijnselen te ontdekken onafhankelijk van andere verschijnselen, die derhalve bij de intellectueele beschouwing volkomen latent kunnen blijven.

Om de zekerheid van een waargenomen regelmaat zoo lang mogelijk te handhaven, tracht men daarbij systemen te *isoleeren* d.w.z. het als de regelmaat storend waargenomene, verwijderd te houden; zoo *maakt* de mensch in de natuur veel meer regelmatigheid dan er oorspronkelijk spontaan in voorkwam; hij *wenscht* die regelmatigheid, omdat ze hem sterkt in den strijd om het bestaan, doordat ze hem in staat stelt te voorspellen, en zijn maatregelen te nemen.

Wiskundige systemen, die meer dan het werkelijke bevatten.

Het intellectueel bekijken der wereld wint in uitgebreidheid, doordat men, onafhankelijk van directe toepasbaarheid, uit de oer-intuitie van het intellect de abstracte wiskunde (reine Mathematik) opbouwt, en zoo een voorraad van onwerkelijke causale volgreeksen kan klaar hebben, die slechts wachten op een gelegenheid, om in de werkelijkheid te worden geprojecteerd. Men bedenke hierbij, dat de wiskundige systemen, waarin geen tijdcoördinaat voorkomt, bij practische toepassing toch al hun relaties tot causale relaties in den tijd zien worden. Zoo b.v. de Euclidische meetkunde geeft, op de werkelijkheid toegepast, het causaal verband tusschen de resultaten van verschillende metingen, met behulp van de groep der rigide lichamen uitgevoerd. — Onnoodig te zeggen, dat van de elementen en ondergebouwen van een wiskundig systeem bij de toepassing gewoonlijk slechts een klein deel hun correspondeerende in de werkelijkheid vindt: de rest vergemakkelijkt slechts het overzicht daarvan. [1]) — Evenzoo bestaan de waargenomen volgreeksen reeds bij een geringe ontwikkeling der methode niet meer uitsluitend uit onafhankelijk van den menschelijken wil waargenomen verschijnselen, maar worden deze gecompleteerd met door de menschen zelf te voorschijn geroepene; (daden zonder eenig direct instinctief doel, maar

Uitbreiding van de toepassing der wiskunde door daadwerkelijk ingrijpen.

---

[1]) In het bijzonder geeft men aan waargenomen eindige volgreeksen dikwijls de hypothetische (immers alleen wiskundig bestaande) uitbreiding tot reeksen van ω termen; op het invoeren van zulk een reeks in onze waarnemingen berust b.v. de oneindige lengte van de tijdcoördinaat.

uitgevoerd, alleen om het causale systeem tot breedere handelbaarheid te completeeren); het eenvoudigste voorbeeld hiervan is het door de telhandeling verkregen klankbeeld [1]) van aantal, of het door de maathandeling verkregen klankbeeld [1]) van maatgetal.

Uitbreiding van het werkelijke tot het mogelijke door inductie.

Haar groote macht krijgt echter de wiskundige natuurwetenschap nog niet door het opmerken van voor het instinct ongeveer gelijkwaardige volgreeksen, maar door het samenvatten van een zeer groot aantal van zulke volgreeksen onder één gezichtspunt door middel van een met behulp van mathematische inductie opgebouwd wiskundig systeem, dat *wet* wordt genoemd; het verschil van twee daaronder vallende volgreeksen berust dan alleen op het verschil in waarden van in de wet optredende parameters. [2]) Naast de werkelijk waargenomen volgreeksen met hun bepaalde parameterwaarden worden dan die met andere parameterwaarden als *mogelijk* gesteld; en dat juist de waargenomen parameterwaarden alleen werkelijk voorkomen, wordt als *toevallig* beschouwd.

Aan den anderen kant blijkt, dat men vaak een in een enkele waargenomen volgreeks optredende grootheid met succes als toevallige parameterwaarde beschouwt, en zoo met juistheid door inductie nieuwe volgreeksen voorspelt.

---

[1]) of schriftteeken.

[2]) Haar belangrijkste toepassing vindt de samenvatting door inductie in causaliteitsbetrekkingen tusschen *getallen*, m. a. w. tusschen resultaten van tellingen of metingen.

De eenvoudigste inductieve uitbreiding tot een groep van mogelijke verschijnselen geschiedt langs de coördinaten van ruimte en tijd als parameters. Dat een volgreeks juist *daar* en *toen* zich verwezenlijkte, en niet op andere plaats en anderen tijd, is voor den physicus toevallig.

Continuiteit der physische functies.

En na het opmerken van volgreeksen en het samenvatten daarvan door inductie, gaat de wiskundige actie op de wereld nog verder. Vooreerst worden, om de groote menigte bewerkingen, die afhankelijk zijn van het meetbaar continuum, te kunnen toepassen, de discrete waarnemingen aangevuld tot continue functies[1]; en het is niet alleen de tijdcoördinaat, die continu wordt gemaakt (hier geeft de intuïtie er alle aanleiding toe), maar ook elk functioneel verband tusschen gemeten grootheden, waarmee de tijdcoördinaat niets te maken heeft; dat is een willekeurige daad, weer alleen gerechtvaardigd, omdat ze blijkt, te „gaan." Het continu maken der waargenomen functies doet men door de bekende methode der interpolatie, weer een willekeurige daad, die zich weer in de praktijk niet straft. Bij het interpoleeren krijgt men analytische functies; en zúlke heeft men toch reeds neiging, in de natuurbeschouwing uitsluitend te gebruiken; waarom?

Differentieerbaarheid der physische functies.

Voornamelijk door een willekeurige daad van anthropomorphiseering der natuur: waar men bij

[1]) vgl. echter pag. 90. noot.

zijn eigen ingrijpen uit den waargenomen weerstand merkt, alle toestanden slechts geleidelijk te kunnen veranderen, postuleert men voor in de natuur practisch te meten functies in dicht bijeen gelegen argumentpunten ongeveer gelijk gedrag [1]). Van een functie, die tot deze kategorie behoort, behooren ook de differentiequotienten van verschillende orde daartoe (immers deze worden uit dezelfde metingen als de functie zelf bepaald), dus ook de differentiaalquotienten van verschillende orde, en differentiequotienten daarvan, *zoo deze differentiaalquotienten bestaan,* wat we zullen aantoonen dat het geval is. Zij n.l. x_α een der onafhankelijk veranderlijken, en zij $\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$ het maximum der spelingsgebieden tusschen x_α en $x_\alpha + \Delta$ van de verschillende differentiequotienten, zooals die hooren bij de verschillende aangroeiingen der onafhankelijk veranderlijke x_α, wanneer men die aangroeiingen achtereenvolgens alle waarden laat doorloopen tusschen o en een zekere zoo klein als men wil, doch vast te kiezen waarde a, dan volgt uit het zooeven genoemde postulaat, dat ε_Δ met Δ tot o nadert. Verder hebben we, onder $\frac{p}{n}$ een echte breuk verstaande:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} = \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} + \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha + \frac{1}{n}\Delta} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha + \frac{n-1}{n}\Delta};$$

[1]) wat niet wegneemt dat men, zonder voor de natuur meer dan een snelle overgang te postuleeren, bij benadering dikwijls discontinuiteiten invoert in het wiskundig beeld tot vereenvoudiging van het rekenen.

$$\left(\frac{\Delta f}{\frac{p}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} = \frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} + \frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha + \frac{1}{n}\Delta} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha + \frac{p-1}{n}\Delta};$$

waaruit we in verband met de boven gegeven definitie van $\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$ afleiden:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - \left(\frac{\Delta f}{\frac{p}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha} < \varepsilon_\Delta(x_\alpha) \text{ in absolute waarde,}$$

en hieruit volgt, dat het spelingsgebied $\sigma_\Delta(x_\alpha)$ der differentiequotienten voor aangroeiingen van x_α, gelijk aan een echte breuk maal Δ, kleiner is dan $2\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$.

Nemen we dus in een bepaald punt een oneindig voortloopende reeks van ten opzichte van Δ rationale, onbepaald afnemende, aangroeiingen ϑ, dan nemen de spelingsgebieden $\sigma_\vartheta(x_\alpha)$ onbepaald af, terwijl tevens elk volgend spelingsgebied binnen het voorgaande ligt; ze naderen dus tot een enkel punt; deze eigenschap is direct van rationale op irrationale ϑ uit te breiden (dit op grond van de continuiteit der funties); het differentiequotient voor een aangroeiing ϑ ligt echter binnen het spelingsgebied $\sigma_\vartheta(x_\alpha)$; ook dit nadert dus onbepaald tot hetzelfde punt, als het spelingsgebied, waarin het bevat is; er is dus een limietwaarde voor het differentiequotient, het *differentiaalquotient*; en op dezelfde wijze toont men op grond van hetzelfde postulaat het bestaan van alle hoogere differentiaalquotienten aan. [1]) (Hierbij heeft dan het idee ten grondslag gelegen, dat de primitieve willekeurige schalen, b.v. tijdmaat door den slinger, lengtemaat door een maatstok, een soort van absolute waarheid hebben, n.l. een soort absolute gelijkheid voor dichtbijeen gelegen gelijke schaaldeelen: die schalen zijn trouwens tamelijk instinctief geconstrueerd.) [2])

Principes der mechanica.

Wat men dan verder [3]) niet willekeurig heeft aangenomen, maar in de praktijk a posteriori heeft opgemerkt, is, dat een groot gebied van waargenomen verschijnselen is uit te drukken door differentiaalvergelijkingen der 2[e] orde („inertiebeginsel"), op grond waarvan *krachten* (de naam in analogie met de

[1]) waarmee de zekerheid, dat de functie analytisch is, nog niet is verkregen, vgl. de ontwikkelingen van PRINGSHEIM in Math. Annalen Bd 44.

[2]) Waar men in gebieden van verschillende orde van grootheid verschillend gedrag der functies heeft moeten invoeren (b.v. bij moleculairtheorieën), tracht men de differentieerbaarheid te handhaven voor beide gebieden van grootheid, en dat zelfs dan nog, wanneer men ter vereenvoudiging van het rekenen vaak de eene maat oneindig klein in verhouding tot de andere onderstelt. Hierbij ontmoet men dan echter op het gebied der grootere maat vaak moeilijkheden. Zoo scheen de onbepaald voortzetbare differentieerbaarheid der door het principe van DIRICHLET bepaalde potentiaalfunctie een tijd lang moeilijk te handhaven. (Vgl. HILBERT, Ueber das Dirichlet'sche Prinzip, Jahresber. der Deutschen Mathem. Vereinig. Bd VIII, en Mathem. Ann. 59, waar die onbepaald voortzetbare differentieerbaarheid toch weer wordt bewezen).

[3]) Voor deze en de vier volgende alinea's vgl. POINCARÉ, „La Science et l'Hypothèse", Chap. X.

eveneens in 't grove slechts in de tweede differentiaalquotienten iets uitwerkende door ons eigen lichaam uitgeoefende invloeden) als vruchtbare hulpbegrippen konden worden ingevoerd.

Ook heeft men opgemerkt, geschikte coëfficienten voor lichamen, *massa's* genoemd, zoo te kunnen invoeren, dat men dikwijls systemen als wat men noemt *ongeveer geïsoleerd* kan beschouwen, wanneer men n.l. opmerkt dat de beweging van het zwaartepunt ongeveer rechtlijnig en eenparig is, en in het zwaartepunt een ongeveer invariabele as van maximaalmoment der relatieve beweging aan te wijzen is.

Men heeft daarom in de wiskunde der mechanica het beginsel van gelijkheid van actie en reactie ingevoerd, en noemt systemen alleen dan geïsoleerd, als de beweging van het zwaartepunt streng rechtlijnig en eenparig is. En zoowel een mechanica der rigide lichamen als een theoretische astronomie blijken practisch te beheerschen met een uit de begrippen van kracht en massa opgebouwde wiskunde.

Mechanische natuurverklaringen.

Het essentieele er van ligt gecondenseerd in de bewegingsvergelijkingen van LAGRANGE; en het is gebleken, dat bijna alle gedeelten der physica, waar men met omkeerbare veranderingen te doen heeft, zich door analoge vergelijkingen laten beelden. [1])

POINCARÉ [2]) heeft bewezen, dat voor al die verschijn-

[1]) terwijl de overige door aanvulling met de principes der thermodynamica zijn te beheerschen.

[2]) l. c. Chap. XII.

selen een verklaring door een rigide mechanisme mogelijk is; dat naar zulke interpretaties zoo vaak gezocht is, zelfs op zoodanig gebied waar eene andere beschouwingswijze gegrond op het bestaan van continue en elastische materie meer voor de hand schijnt te liggen (men denke bijv. aan de moderne gastheorie en aan WILLIAM THOMSON's verklaring der elasticiteit uit het beginsel der gyrostatische veer), heeft waarschijnlijk zijn oorsprong daarin, dat het bouwen van rigide constructies en mechanismen den menschen het meest vertrouwd is, en dat men de rigide lichamen het gemakkelijkst in hun gedrag beheerscht; dat dus het idee, dat de natuur alleen rigide mechanismen bouwt, haar mysterie, inzooverre zij dingen zou bouwen, die de menschen niet materieel zouden kunnen nabouwen, wegneemt; en ook hierin, dat zóó het zeer groote vertrouwen op de onveranderlijkheid der wetten, die de vaste lichamen beheerschen, de illusie, „de natuur te kunnen beheerschen," versterkt. [1]) Daar de rigide-mechanische interpreta-

---

[1]) Of is de oorzaak meer, dat een vast lichaam het familiare voorbeeld is van een door een eindig aantal coördinaten bepaald ding, zoodat op deze wijze in het geheel der mogelijkheden van een physisch verschijnsel nooit een willekeurige functie, maar slechts een eindig aantal veranderlijken zou optreden? De nog verder gaande consequentie van deze tendens zou zijn, dat nu ook de nog overblijvende coördinaten slechts discontinue sprongen zouden vertoonen, dus door geheele getallen zouden zijn te bepalen, en

ties der vergelijkingen van LAGRANGE echter in het algemeen zeer ingewikkeld worden en men even goed als tot de rigide groep tot andere, b.v. electrodynamische verschijnselen zou kunnen herleiden, moet men misschien liever alle groepen van verschijnselen, die door vergelijkingen van LAGRANGE worden uitgedrukt, als gelijkgerechtigd naast elkander laten staan, en een opbouw daarvan uit elementairverschijnselen in het zeer kleine verwerpen, waar ze geen suggesties tot het ontdekken van nieuwe verschijnselen brengt.

De waarde der „verklaringen" toch ligt niet hierin, dat zij in de plaats van een wonderlijk verschijnsel een minder wonderlijk stellen; noch ook in de eerste plaats in de grootere overzichtelijkheid, waarmee zij de waargenomen volgreeksen veroorloven te katalogizeeren [2]); maar in de splitsing, die zij het

Waarde der „verklaring"van verschijnselen.

---

de natuur zou slechts de orde van vrijheid van een permutatiegroep behouden; al het in de natuur mogelijke zou zijn na te bouwen door iuxtapositie in ruimte en tijd van een eindig aantal elementen in verschillende geoorloofde combinaties. (vgl. hiermee het pag. 85 opgemerkte). Dat zou de natuur nóg dichter brengen bij de materieele gebouwen der menschen, en de beperkte vrijheid in het scheppen daarvan gevoeld.

Natuurlijk zouden ook bij deze opvatting de gebruikelijke continue functies der natuurbeschrijving in gebruik blijven; ze zouden hier optreden als benadering van groote getallen met kleine discontinue sprongen.

[2]) Als zoodanig zijn overigens dikwijls verschillende verklaringen even geschikt; men denke b.v. aan de verschillende hypothesen omtrent werkingen van stroomelementen op elkander, die de door

waargenomene doen ondergaan in een *essentieel* en een *toevallig* gedeelte, en de door die splitsing aangewezen richting, waarin het *werkelijk* waargenomene tot een grooter gebied van *mogelijkheden* kan worden uitgebreid, dus nieuwe aan regelmaat gebonden verschijnselen kunnen worden voorspeld. [1])

M. a. w. een ,,verklaring", die doel treft, opent een veld van inductie; is dat veld van inductie afgeweid, dan verliest de verklaring haar actueele beteekenis; men zal dan van het daarin nog essentieele een nieuw gedeelte afscheiden, en als toevallig gaan beschouwen [2]), om zich zoodoende een nieuw veld van inductie te scheppen.

Aanleiding en aanwijzing tot de keuze van die afscheiding geeft dikwijls de ontdekking, dat twee te voren niet als samenhangend bekende, ieder aan een eigen regelmaat gebonden, verschijnselgroepen onder elkaars invloed kunnen komen, d.w.z. dat ze, in elkanders nabijheid gebracht, elkaars isolement kunnen storen. Dan zal men trachten, in het wiskundig beeld van elk van beide de essentieele deelen

---

AMPÈRE gegevene bleken te kunnen vervangen; evenmin is het uitgesloten, dat de moleculairtheorieën eens andere gelijkgerechtigde naast zich krijgen.

[1]) m. a. w. in het aanwijzen van de grootheden in het wiskundig beeld der verschijnselen, die als toevallige waarden van een veranderlijken parameter kunnen worden beschouwd.

[2]) Wie gelooft aan realiteit van hypothesen, spreekt hier van: „nog dieper op het wezen der verschijnselen ingaan."

zoo te kiezen, dat deze als twee toevallige modificaties van eenzelfde continu gebied van mogelijkheden, en dat met zoo groot mogelijk gemeenschappelijk essentieel element verschijnen. Op deze wijze zijn vaak doeltreffende velden van inductie geopend, d.w.z. velden van inductie, die vele te voren onbekende verschijnselen met juistheid hebben doen voorspellen.

Merken we nog op, dat nooit een verklaring, die haar diensten bij de uitbreiding door inductie van het gebied der bekende volgreeksen heeft gedaan, later kan worden gezegd, onjuist te zijn gebleken. Immers dan bewijst een démenti der ervaring alleen, dat men op grond der verklaring een *te groot* veld van inductie had geopend. En in zulk een geval kan men de verklaring steeds redden, door in het er op gegronde wiskundig beeld der verschijnselen weer het essentieele gedeelte uit te breiden ten koste van het reeds als toevallig gestelde.

En als oorsprong van een zeker veld van inductie behoudt zulk een verklaring een historische beteekenis; maar een hoogere beteekenis is voor geen verklaring weggelegd. Immers de nieuwe, die in vervanging der oude een grooter veld van inductie in 't leven roept, zal, als de grenzen van dat veld bereikt zijn, op haar beurt moeten verdwijnen; want het geheel der inductief samengevatte verschijnselen, waarin de menschen vermogen *gevolgen te voorspellen*, en uithoofde daarvan met succes in te grijpen, zullen zij steeds willen en kunnen uitbreiden.

Problemen van ruimte en tijd.

We gaan thans de klassieke problemen van *ruimte* en *tijd* aanroeren, door in 't algemeen te onderzoeken, in hoeverre *objectiviteit* en *aprioriteit* aan wiskundige systemen kunnen worden toegekend, vragen die bij Riemann en Helmholtz nog een belangrijke rol spelen, maar sedert weer uitsluitend van philosophen belangstelling ondervonden, en door de wiskundigen, die zich met onderzoekingen omtrent de grondslagen hunner wetenschap bezighielden, buiten beschouwing werden gelaten. Eerst in den allerlaatsten tijd is een boek verschenen, dat in het licht van de jongste resultaten der wiskunde op nieuw de genoemde philosophische vragen aan de orde stelt, en op dit werk van B. A. W. Russell, ,,An Essay on the Foundations of Geometry" is dan ook algemeen de aandacht gevallen. In de ,,Revue de Métaphysique et de Morale" heeft het tot voortgezette discussies aanleiding gegeven tusschen Couturat, Poincaré, Lechalas en den auteur zelf, waarbij de onhoudbaarheid van sommige er in uitgesproken stellingen aan het licht kwam; maar waarna toch aan een groot deel der resultaten blijvende waarde bleef toegekend. Couturat spreekt zelfs van een κτῆμα εἰς ἀεί, en van niet minder dan de volmaking van Kant's Transcendentale Aesthetiek.

We zullen hier beginnen, met een eigen stelling tegenover het onderwerp in te nemen, en daarna op het werk van Russell nader ingaan, door eerst op enkele er in voorkomende wiskundige fouten de aandacht te laten vallen, en vervolgens te onderzoeken, wat van de totale strekking van het boek kan over blijven.

Vooreerst dus over de *objectiviteit:* men noemt de *massa* der lichamen objectief, en denkt daarbij aan haar onvernietigbaarheid; we hebben echter boven gezien, dat de massa's niets zijn, dan door hun invoering het wiskundig natuurbeeld vereenvoudigende coëfficienten, die bij de wiskundige transformaties, die de natuurverschijnselen af beelden, invariant blijven. Zou men nu echter natuurverschijnselen vinden, die het eenvoudigst zijn af te beelden door de massa's variabel te nemen, dan zal men deze nog alleen objectief kunnen blijven noemen op grond van hun invariabiliteit bij een *zeer belangrijke groep van verschijnselen* in het natuurbeeld; maar men bedenke, dat dit natuurbeeld willekeurig zou zijn gekozen, op grond van zijn eenvoudigheid en bruikbaarheid weliswaar, maar toch willekeurig; dat men het eenerzijds, zij het geforceerd, zoo had kunnen bouwen, dat de massa's bij *alle* bekende verschijnselen invariant blijven, maar andererzijds ook zoo, dat ze slechts bij zeer weinig verschijnselen invariant blijven of zelfs, dat ze in 't geheel niet optreden. Objectiviteit.

Men zal dus van objectiviteit (voor grootheden of voor wetten) alleen kunnen spreken ten opzichte van een bepaald wiskundig natuurbeeld en relatief een bepaalde groep van verschijnselen, of, zoo men van objectiviteit zonder meer wil spreken, kan men daarmee niet anders bedoelen dan:

òf invariabiliteit bij *een zekere* verklaring van *alle* tot nog toe bekende verschijnselen;

dan zou het echter een eigenschap zijn, die wij willekeurig zouden kunnen aanbrengen, zij het onder opbouw van geforceerde systemen;

òf invariabiliteit bij de eenvoudigste of de meest gebruikelijke interpretatie van *alle* tot nog toe bekende verschijnselen;

dan zou het echter een eigenschap zijn, die elk oogenblik zou kunnen worden verloren;

òf invariabiliteit bij de eenvoudigste of de meest gebruikelijke interpretatie van *een zeer belangrijke* groep van verschijnselen;

aan deze definitie heeft men het meest houvast, en al blijft er een factor van subjectieve appreciatie in over, men zal niet aarzelen, op deze wijze b.v. massa, energie en Newtonsche attractie objectief te noemen; en aan b.v. temperatuur, magnetisatie en magnetische attractie objectiviteit te ontzeggen.

Houden we ons dus aan de laatste definitie, en vragen we bijvoorbeeld, *in hoeverre de physische tijd en ruimte objectief zijn*, dan moet het antwoord zijn, dat zij deze gradueele eigenschap op zeer volkomen wijze bezitten, en misschien volkomener dan eenige andere physische entiteit.

Immers vooreerst de fictieve eendimensionale coördinaat, met daarop geconstrueerde eenledige groep, die de *wetenschappelijke tijdmaat* is, dringt in bijna alle wiskundige natuurbeelden in, en wel steeds met dezelfde groep, die zoo het cachet van een onwrikbare invariant verkrijgt.

En in nóg sterkere mate geldt dit van de driedimensionale Cartesiaansche ruimte met daarin geconstrueerde zesledige (Euclidische) groep, die de *physische ruimte* is; omdat *alle* bekende physische verschijnselen zich daarop laten betrekken, en zelfs zonder haar de wiskundige projecteering dier verschijnselen buitengewoon moeilijk zou worden. (wat het misschien niet te gewaagd is, hiermee in verband te brengen, dat die fictieve Euclidische ruimte ontleend is aan de bewegingsgroep der physisch voorkomende vaste lichamen, en het die vaste lichamen zijn, waarop we voor alle metingen zijn verwezen; waar het dan alleen mogelijk is, grootheden te meten, voorzoover ze met vaste lichamen in verband staan, behoeft het niet te verwonderen, dat in de wiskundige afbeelding der betrekkingen tusschen die grootheden het wiskundig beeld van de bewegingsgroep der vaste lichamen een zoo integreerende rol blijft spelen.)

Nu de *aprioriteit;* men kan hiermee twee begrippen bedoelen, n.l.: Aprioriteit.

1°. Bestaan onafhankelijk van de ervaring.

2°. Noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid der wetenschap.

Wordt het eerste bedoeld, dan volgt uit den intuitieven opbouw, dat de geheele wiskunde a priori is, en b.v. de niet-Euclidische meetkunde even goed als de Euclidische, de metrische meetkunde even goed als de projectieve.

Wordt het tweede bedoeld, dan mogen we, daar wetenschappelijke ervaring haar oorsprong vindt in toepassing der intuitieve wiskunde op de werkelijkheid, en er behalve ervaringswetenschap geen andere wetenschap bestaat, dan juist alleen de eigenschappen van die intuitieve wiskunde [1]), niets anders a priori noemen, dan dat eene, wat aan alle wiskunde gemeen is, en dat aan den anderen kant toereikend is, om alle wiskunde op te bouwen, de intuitie van veel-eenigheid, de oer-intuitie der wiskunde.

En daar deze samenvalt met de bewustwording

---

[1]) Eigenlijk is het gebouw der intuitieve wiskunde zonder meer een *daad*, en geen *wetenschap*; een wetenschap, d.w.z. een samenvatting van in den tijd herhaalbare causale volgreeksen, wordt zij eerst in de wiskunde der tweede orde, die het *wiskundig bekijken van de wiskunde* of *van de taal der wiskunde* is: eerst daar bestaat causaal verband in de wijze van opvolging der wiskundige systemen eenerzijds, en der wiskundige teekens, woorden of begrippen andererzijds; maar daar, evenals bij de theoretische logica, hebben we ook weer te doen met een *toepassing der wiskunde*, met een *ervaringswetenschap*. Men vergelijke in dit verband de ontwikkelingen van het derde hoofdstuk.

van den tijd als verandering zonder meer, kunnen we ook zeggen:

Het enige aprioristische element in de wetenschap is de tijd. [1])

Tot het boek van RUSSELL komende, wijzen we eerst de volgende onjuistheden aan:

(We refereeren naar de door den schrijver herziene Fransche vertaling: B. A. W. RUSSELL, ,,Essai sur les Fondements de la Géométrie", Traduction par A. CADENAT, revue et annotée par l'auteur et par L. COUTURAT. Paris. Gauthier-Villars. 1901.)

1. RUSSELL tracht aan te toonen, dat het axioma van RIEMANN en HELMHOLTZ, dat de ruimte een ,,Zahlenmannigfaltigkeit" is, het axioma der vrije bewegelijkheid vooronderstelt.

De ruimte als Zahlenmannigfaltigkeit vooronderstelt geen vrije bewegelijkheid.

Uit zijn weinig beknopte, op dit punt betrekking hebbende, redeneeringen citeeren we de duidelijkst geformuleerde gedeelten:

(§ 62.) ,,Tous les attributs nécessaires de l'espace sont présupposés dans tout jugement de grandeur spatiale, et ne peuvent, par suite, être des conséquences d'un tel jugement." . . . ,,Pour formuler les axiomes de la Géométrie métrique on doit se

---

[1]) Natuurlijk wordt hier bedoeld de *intuitieve tijd*, wel te onderscheiden van de *wetenschappelijke tijd*, die, wel zeer a posteriori, eerst door de ervaring blijkt, als met een eenledige groep voorziene eendimensionale coördinaat geschikt te kunnen ingevoerd tot het katalogizeeren der verschijnselen.

poser cette question: Quels axiomes, c'est à dire quels attributs de l'espace, faut-il présupposer, pour que la comparaison quantitative des portions de l'espace soit possible en général?" . . .

(§ 64.) ,,Si la mesure consiste dans la superposition des grandeurs comparées, ne s'ensuit-il pas immédiatement que la mesure *ne* soit logiquement possible *que* là où une telle superpositon laisse les grandeurs invariables, et, par suite, que la mesure, telle qu'elle a été définie ci-dessus, implique, comme condition a priori, que les grandeurs restent invariables dans le mouvement?" . . .

(§ 144.) ,,Ainsi l'on postule, dès le début même, un criterium de l'égalité spatiale: sans un tel criterium, la Géométrie métrique deviendrait tout à fait impossible. Il peut sembler, à première vue, que ce criterium n'ait pas besoin d'être un axiome, mais puisse être une simple définition. Ce n'est cependant pas le cas." . . . ,,Tout criterium de l'égalité est, non pas une définition, mais une proposition qui peut être vraie ou fausse." . . . ,,Il s'ensuit que l'application du concept de grandeur aux figures de l'espace implique l'axiome suivant: Les grandeurs spatiales peuvent être déplacées sans déformation.". . . ,,Si l'on n'admettait pas cet axiome, la Géométrie métrique serait incapable d'établir, sans une absurdité logique, la notion d'une grandeur spatiale quelconque." . . .

(§ 153) Nous avons parlé ci-dessus de la Géométrie sur un œuf, qui n'admet pas la Libre Mobilité. En quoi, peut-on me demander, une Géométrie, qui exclurait entièrement la congruence serait-elle plus impossible que cette Géométrie de l'œuf? La réponse est facile. La Géométrie des surfaces non congruentes n'est possible que par l'emploi des infiniment petits; or, dans l'infiniment petit, toutes les surfaces deviennent planes. *Si nous n'avions pas notre mesure euclidienne, qui peut être déplacée sans déformation, nous n'aurions aucune méthode pour comparer de petits arcs en différents lieux.*

Op de laatste zin heeft nu de weerlegging gemakkelijk vat. Immers we kunnen een Cartesiaansche ruimte opbouwen, daarin willekeurige stelsels van oppervlakken als coördinaatvlakken en in elk der coördinaten een willekeurige eenledige groep als grondslag voor een maatbepaling nemen; vervolgens uit de elementen van coördinaat-toename een willekeurige functie als boogelement, en als afstand van twee punten hun geodetischen afstand definieeren. We behoeven derhalve, om quantiteiten in verschillende deelen der ruimte te kunnen vergelijken, niet een mogelijkheid van verplaatsing voor driedimensionale lichamen ten grondslag te leggen, maar eenvoudig voor eendimensionale draden, en hierbij krijgen we niet eens noodzakelijk in het oneindig kleine een meetkunde met vrije bewegelijkheid voor lichamen, getuige b.v. de Minkowskische meetkunde. (zie hoofdstuk I, pag. 59).

Een met den tijd variabele ruimteconstante is zeer goed denkbaar.

2. § 100 zegt de schrijver, dat het *ondenkbaar* is, dat de ruimteconstante met den tijd zou veranderen. „Cela impliquerait entre l'espace et les autres choses, une relation causale qui paraît difficilement concevable et qui, si on la regardait comme possible, ruinerait infailliblement la Géométrie, car la Géométrie repose entièrement sur l'hypothèse que la causalité n'a rien à y voir. D'ailleurs, toutes les opérations de mesure prennent un certain temps, il est difficile de voir comment nos résultats pourraient être dignes de foi; et comment par conséquent on pourrait découvrir une variation du paramètre spatial."

Bedoelt hij, dat een ruimte met veranderlijke constante niet denkbaar is, dan kunnen we zeggen: Denk maar een bol, die zich uitzet, de vaste lichamen daarop deformeeren zich alle op een bepaalde wijze; ten opzichte van elkaar deformeeren ze zich ook, maar op elk tijdstip is de deformatie ten opzichte van verplaatsing invariant, de rigide groep is dus rigide groep gebleven, maar de ruimteconstante voor de verplaatsingsgroep is veranderd. Bedoelt hij, dat de empirische ruimteconstante nooit kan veranderen, dan is werkelijk waar, dat men zoo iets nooit zou kunnen „ontdekken", omdat we niets doen, dan onze empirische verschijnselen katalogizeeren in een door ons zelf geschapen Euclidische ruimte, en we die Euclidische ruimte kunnen handhaven onafhankelijk van de verschijnselen; maar we kunnen even goed katalogizeeren in een ruimte, die op elk tijdstip een andere kromming heeft.

Het zijn de waarnemingen met onze astronomische instrumenten, die door een voortzetting der gebruikelijke aardsche Euclidische ruimte in de hemelruimte, en een verlenging daarin als rechte lijnen van de lichtstralen, die onze kijkers treffen, het eenvoudigst worden gekatalogizeerd. Maar het is niet uitgesloten, dat die waarnemingen voor sterren met zeer geringe parallaxis eenvoudiger zouden kunnen worden gekatalogizeerd door op den bundel van lichtstraalrichtingen, die uit het waarnemingspunt ontspringen, op zeer groote afstanden niet meer tusschen de maat *langs* de stralen en *tusschen* de stralen de betrekking aan te nemen:

$$\underline{ds}_{\text{loodrecht } r} = r\, d\phi,$$

$$\text{maar} = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha r.\, d\phi$$

$$\text{of} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha r.\, d\phi$$

(α zeer klein, zoodat eerst op zeer groote afstanden merkbaar verschil met de formule $= r d\phi$ zou komen),

of zelfs nog andere betrekkingen, die niet eens overal in de ruimte dezelfde constante geven zouden.

Evenmin is er a priori reden, waarom die ruimteconstante, m.a.w. die principale bewegingsgroep, niet zou kunnen veranderen, b.v. onder den invloed van verschillende systemen van hemellichamen op elkaar. En zelfs zou men kunnen zeggen:

Op het oogenblik, dat de doelmatigheid der constante α mocht worden ontdekt, wordt de ruimte plotseling van Euclidisch niet-Euclidisch; zooals POINCARÉ zegt, dat de aarde eerst draait, sinds COPERNICUS het heeft uitgesproken.

In den opbouw der meetkunde zijn geen cirkelredeneeringen.

3. In § 108 staat: „Tout raisonnement géométrique est, en dernière analyse, un cercle logique: si l'on commence par admettre les points, on ne pourra les définir que par les lignes ou les plans qui les mettent en rapport, et si l'on commence par admettre les lignes ou les plans, on ne pourra les définir que par les points par lesquels ils passent." Hiervan bewijst de eenvoudige *opbouw* der Cartesiaansche meetkunde de onjuistheid.

Een meerdimensionaal continuum is geen noodzakelijke voorwaarde voor de ervaring.

4. § 186—192 wordt de volgende stelling beredeneerd: „L'existence de choses diverses, mais en relation mutuelle, serait inconnaissable, s'il n'y avait pas, dans la perception sensible, quelque forme d'extériorité", en het essentieele van deze redeneering komt neer op het signaleeren van wat wij hebben genoemd de oer-intuitie der wiskunde als onmisbaar voor elke intellectueele functie. In § 191 in 't bijzonder wordt dan echter getracht aan te toonen, dat de *tijd alleen* niet voldoende zou zijn, en wel op grond hiervan, dat er geen *objecten* zouden kunnen worden opgemerkt. Wij antwoorden: De eenvoudigste causale volgreeksen die de menschen opmerken hebben werkelijk

alleen den *tijd* als eendimensionaal intuitief continuum tot wiskundig substraat; dat daarbij geen andere objecten, d.w.z. invarianten optreden, dan die tijd zelf, hindert niet. Objecten komen eerst bij deelen der ervaring met meer ingewikkeld wiskundig substraat, zooals eerst in wiskundige systemen van eenige samengesteldheid invarianten optreden.

In aansluiting aan laatstgenoemde stelling wordt in § 135 beredeneerd, dat de forme d'extériorité, die er, behalve de tijd, nog als eveneens noodzakelijke voorwaarde voor de ervaring zou moeten zijn, en die als de empirische ruimte zal moeten voor den dag komen, noodzakelijk meer dan één dimensie heeft. ,,En effet, dans une forme à une dimension, les divers contenus ne peuvent être ordonnés qu'en série, et ne peuvent pas changer leur ordre dans la série sans se pénétrer mutuellement. Mais cela leur est impossible"... ,,Une forme à une dimension ne peut donc pas, par elle-même, permettre ce changement des relations d'extériorité, qui seul peut nous donner conscience d'un monde varié de *choses* en relation réciproque." Waarop wij weer antwoorden, dat een dergelijke wereld van *objecten (choses)* voor de ervaring niet noodig is, dat de empirische ruimte een willekeurige schepping is, om *verschillende* causale volgreeksen (van meetresultaten), tòch met behulp van mathematische inductie *onder één gezichtspunt* samen te brengen, en dat de schepping dier idealiseerende samenvatting van werkelijke ervaringen als deel van een fictief geheel van mogelijke ervaringen, niet meesleept, dat er bij de werkelijke ervaringen invarianten voorkomen, die den naam van objecten verdienen.

Het eenige wat in dit verband in de richting van RUSSELL's gedachtengang kan worden opgemerkt, is dat, zoodra de mathematische inductie in het wiskundig ervaringsbeeld optreedt als middel tot samenvatting van *verschillende* volgreeksen, de wiskundige oer-intuitie daar tweemaal onafhankelijk optreedt op verschillende wijze, wat, zoo we haar beide malen als continu in het oog vatten, voert tot een meerdimensionaal continuum; maar het wiskundig *bestaan* van het meerdimensionaal continuum is onafhankelijk van de ervaring, en zijn toepasbaarheid op de ervaring is a posteriori.

A fortiori is een meerdimensionale forme d'extériorité zonder meer niet noodzakelijk voor de ervaring.

Is dus de invoering van een meerdimensionaal continuum niet a priori noodzakelijk, nog veel minder die van een meerdimensionaal continuum met zúlke relaties tusschen de elementen, dat het, evenals het eendimensionaal intuitief continuum, kan worden beschouwd als forme d'extériorité zonder meer.

En het is niet anders dan op grond van deze onjuiste meening, dat RUSSELL § 129—139 de volgende eigenschappen der empirische ruimte als voor de ervaring noodzakelijk ontwikkelt, ze aflezend [1]) uit het concept

[1]) Ook deze redeneeringen zelf zijn niet juist; vgl. POINCARÉ, „Des Fondements de la Géométrie" § 4, Revue de Métaphysique et de Morale, 1899.

van *forme d'extériorité zonder meer,* verwezenlijkt in een meerdimensionaal continuum:

I. „L'espace est continu et divisible à l'infini; le zéro d'étendue, résultant d'une division infinie, est appelé *point*. Tous les points sont qualitativement semblables, et se distinguent entre eux par le seul fait qu'ils sont extérieurs les uns aux autres."

II. „Deux points quelconques déterminent une figure unique, la ligne droite; deux lignes droites, comme deux points, sont qualitativement semblables, et se distinguent entre elles par le seul fait qu'elles sont extérieures l'une à l'autre."

III. „Trois points non en ligne droite déterminent une figure unique, le plan, et quatre points non situés dans un même plan déterminent une figure à trois dimensions. Cette progression peut, autant qu'on peut en juger *a priori*, se prolonger jusqu' à cinq ou *n* points, sans exclure en aucune manière la possibilité d'une Géométrie projective. Mais la Géométrie projective exige, à titre d'axiome, que cette progression s'arrête à un nombre de points entier et positif, après quoi tout point nouveau doit être contenu dans la figure déterminée par ceux qui sont déjà donnés. Si cette progression s'arrête à $(n+1)$ points, on dit que l'espace a n dimensions."

De projectieve meetkunde is niet noodzakelijk voor de ervaring.

5. Een grove wiskundige fout is verder, de zooeven genoemde axioma's als volledige karakteriseering der projectieve meetkunde te signaleeren. [1])

[1]) vgl. POINCARÉ, l. c. § 3.

Immers de kern der projectieve axioma's, de eigenschappen, dat de ^{p}ruimte door $p + 1$ punten bepaald, elke rechte lijn die er 2 punten mee gemeen heeft, geheel bevat, en dat een rechte lijn en een ${}^{n-1}$ruimte elkaar snijden, ontbreken, en deze volgen niet uit de axioma's van RUSSELL. Immers in een Cartesiaansche ruimte kunnen we zooveel stelsels van krommen, oppervlakken enz., die aan de projectieve axioma's voldoen, bouwen als we willen. En we kunnen dan ten slotte als relatie tusschen 2 punten de rechte lijn uit een der stelsels, als relatie tusschen 3 punten het platte vlak uit een ander stelsel, enz., definieeren; zoo wordt aan de axioma's van RUSSELL voldaan, maar niet aan de projectieve axioma's.

De schepping van het projectieve systeem is niet alleen niet noodzakelijk, maar zelfs alles behalve primitief of eenvoudig bepaald, zooals duidelijk blijkt uit de in het eerste hoofdstuk pag. 57 sqq. geresumeerde ontwikkelingen van HAMEL, die aantoonen, hoe op allerlei verschillende manieren het lineaire stelsel kan worden bepaald; welke manieren dan nog weer onbepaald te vermenigvuldigen zijn door willekeurige uniforme punttransformaties; immers zoo blijven de intrinsieke eigenschappen der rechte lijnen bij de daaruit door transformatie ontstaande geodetische krommen behouden, zoodat deze steeds een transformatiegroep blijven toelaten, met de projectieve groep gelijkvormig.

De vrije bewegelijkheid is niet noodzakelijk voor de ervaring.

6. Ook het axioma der vrije bewegelijkheid wordt getracht af te lezen uit het concept van *forme d'extériorité zonder meer*. (in 't bijzonder § 143—157.)

(§ 62) ,,Les conditions de la mesure elles-mêmes seront a priori, quoiqu'elles ne dérivent d'aucune notion de grandeur, si l'on peut montrer que, sans elles, l'expérience d'une extériorité serait impossible."

(§ 145). ,,Puisque l'espace est une forme d'extériorité, il ne peut admettre que des positions relatives et non absolues, et il doit être complètement homogène d'un bout à l'autre."

We zullen de hierop betrekking hebbende redeneeringen, die misschien het zwakste gedeelte van het geheele boek vormen, niet nader bespreken; het is natuurlijk duidelijk, dat, wat onjuist is gebleken voor de projectieve groep, a fortiori niet kan gelden voor de nog engere groep der Euclidische of niet-Euclidische bewegingen.

We merken alleen op, dat COUTURAT (kritiek op RUSSELL, Revue de Métaphysique et de Morale 1898 pag. 372 sqq.) van de genoemde stelling een zeer juiste consequentie trekt. RUSSELL zegt in § 145: ,,Puisque l'espace est une forme d'extériorité, il ne peut admettre que des positions relatives, et non absolues, et il doit être complètement homogène d'un bout à l'autre;" m. a. w. (§ 144): ,,Les formes ne dépendent en aucune manière de la position absolue dans l'espace."

COUTURAT wijst er dan op, dat waar reden wordt gevonden, om allen invloed aan de absolute *orienteering* te ontzeggen, evenveel grond moet zijn, geen invloed der absolute *grootte* toe te laten, daar in het concept van *forme d'extériorité zonder meer* hoogstens relatieve, maar in geen geval absolute quantiteiten kunnen optreden. En hieruit leidt hij af, dat niet alleen het axioma der vrije bewegelijkheid, maar ook het parallellenaxioma van EUCLIDES, dus de geheele Euclidische meetkunde als a priori moet worden beschouwd.

Tegenover RUSSELL heeft COUTURAT gelijk, maar we herhalen: De forme d'extériorité is alleen in één dimensie a priori, en daar treden er niet alleen geen absolute, maar zelfs geen relatieve quantiteiten in op; de laatste verschijnen eerst, nadat als een willekeurige wiskundige bouw (van zulk een bouw is het *element*, d.i. de oer-intuitie der forme d'extériorité, onveranderlijk en a priori, maar de *wijze* der aaneenschakeling van de telkens herhaalde toepassingen van de oer-intuitie op het reeds opgebouwde of een deel er van, willekeurig) op het eendimensionaal continuum een eenledig continue, uniforme groep is geconstrueerd.

De projectieve afstand vooronderstelt geen „gewone" afstand.

7. In § 37 wordt getracht de *afstanden* op een rechte lijn als primaire begrippen te handhaven, en gezegd, dat de projectieve invoering der afstanden volgens KLEIN uit de quadrilateraal-constructie eenvoudig willekeurig *iets anders* als afstand definieert, en dat toch nooit kan doen zonder dat vooraf de

voorstelling van wat RUSSELL noemt ,,distance au sens ordinaire" reeds aanwezig is.

We citeeren ter toelichting (pag. 46): ,,Si A, B, C sont trois points différents d'une droite, il doit exister *quelque* différence entre les relations de A à B et de A à C, car autrement, en vertu de l'identité qualitative de tous les points, B et C ne pourraient être distingués l'un de l'autre; mais une telle différence implique, entre A et B, une relation qui soit indépendante des autres points de la droite; car si l'on n'avait pas une telle relation, les autres points ne pourraient apparaître comme différents. Donc, avant de pouvoir distinguer les deux points fixes qui servent de base à la définition projective, il faut déjà supposer qu'il existe, entre deux points quelconques de notre droite, une certaine relation indépendante des autres points, et cette relation est la distance au sens ordinaire"..... ,,La distance, au sens ordinaire, reste une relation entre *deux* points, et non entre *quatre*".

Hierbij is uit het oog verloren, dat men zich zeer goed een continuum kan voorstellen, zonder nog daarop ,,grootheden" te kunnen vergelijken. Dat kan men eerst, na preferentie te hebben gegeven aan een willekeurige eenledige groep. (In § 178 roert trouwens RUSSELL zelf dit onderscheid tusschen ,,intensieve" en ,,extensieve" grootheden aan, en hij heeft er later den nadruk op gelegd in zijn ,,Principles of Mathematics"). Verder is het fout, om den lineairen afstand een relatie tusschen *twee* punten te noemen; hij kan niet anders optreden dan in verhoudingen tusschen twee afstanden, dus in betrekkingen tusschen minstens *drie* punten. Zoo leert hem ook inzien de eenledige groep, waarmee elke schaal, dus ook elke afstandsbepaling gelijkwaardig is.

Resultaten van LIE.

8. In § 45 worden de resultaten van LIE foutief weergegeven. Er staat n.l.:

,,Dans la Géométrie à deux dimensions, si la libre mobilité a lieu *dans tout l'espace*, il n'y a pas de groupe qui satisfasse aux trois premiers axiomes de HELMHOLTZ, excepté ceux qui donnent les mouvements euclidiens et non-euclidiens ordinaires; mais si elle a seulement lieu *à l'intérieur d'une certaine région*, il y a encore un groupe possible où la courbe décrite par un point quelconque en rotation n'est pas fermée, mais forme une spirale logarithmique. L'axiome de la Monodromie de HELMHOLTZ est nécessaire pour exclure cette possibilité."

Maar zoo is het niet. Als de vrije bewegelijkheid over de geheele ruimte [1]) moet plaats hebben, komen niet meer alle Euclidische en niet-Euclidische bewe-

---

[1]) LIE bedoelt de volledige projectieve ruimte, en daar hebben de Euclidische en hyperbolische groepen hun fundamentaalkegelsnede als onbereikbare punten, en zulk een onbereikbaar punt mist de eigenschap, dat als het met een willekeurig lijnelement er door wordt vastgehouden, dat dan het geheele vlak vast staat.

gingen in aanmerking, alleen de niet-Euclidische elliptische groep. (vgl. LIE, „Ueber die Grundlagen der Geometrie," Leipziger Berichte 1890, pag. 289).

De eisch van vrije bewegelijkheid *over de geheele ruimte* kan dus niet dienen, om de Euclidische en niet-Euclidische bewegingen te behouden, en de spiraalgroep uit te sluiten. Men moet als eisch nemen, òf dat de pseudocirkels hun middelpunt niet mogen bevatten (ook niet als grenspunt), òf het monodromie-postulaat van HELMHOLTZ.

Verder staat er:

„Si dans la Géométrie à trois dimensions la libre mobilité, dans la région spécifiée, a lieu seulement pour chaque point de *position générale*, tandis que, si l'on fixe un point, les points d'une certaine ligne ne peuvent se mouvoir que sur cette ligne, et non sur une surface; dans ce cas d'autres groupes sont possibles et ne peuvent être exclus que par le quatrième axiome de HELMHOLTZ."

Het resultaat van LIE komt echter neer op: „et ne peuvent être exclus *même par* le quatrième axiome de HELMHOLTZ."

We komen tot de totale strekking van het werk, die bedoelt, het standpunt van KANT ten opzichte van de aprioriteit in de ervaring te rectificeeren, en op de hoogte van den tijd te brengen.

Het standpunt van KANT.

KANT verdedigt omtrent de ruimte de volgende stelling:

De voorstelling van een uitwendige wereld door middel van een Euclidische driedimensionale ruimte is van het menschelijk intellect een onveranderlijk attribuut; een ándere voorstelling van een uitwendige wereld bij dezelfde menschen is een contradictore onderstelling.

KANT bewijst zijn stelling [1]) als volgt:

Van de empirische ruimte merken we twee dingen op:

1°. wij krijgen geen uitwendige ervaringen, dan geplaatst in de empirische ruimte, en kunnen ons die ervaringen niet los van de empirische ruimte denken (l. c. onder (1) en (2));

2°. voor de empirische ruimte geldt de Euclidische driedimensionale meetkunde (l. c. onder (3)),

waaruit volgt, dat de Euclidische driedimensionale meetkunde noodzakelijke voorwaarde voor alle uitwendige ervaringen en het eenig mogelijke receptaculum voor de voorstelling eener uitwendige wereld is, zoodat de eigenschappen der Euclidische meetkunde *synthetische oordeelen a priori* voor alle uitwendige ervaring moeten worden genoemd.

De beide praemissen betoogen in zekeren zin (die meer dan de door ons pag. 96 bedoelde omvat) de *objectiviteit*, eerst van de empirische ruimte zonder meer, zonder welke geen uitwendige ervaring heet te kunnen worden gedacht, (hiermee wordt

[1]) Kritik der reinen Vernunft, ed. KEHRBACH, pag. 50—52.

waarschijnlijk niet meer dan een Cartesiaansche driedimensionale ruimte bedoeld), en vervolgens van de daarin geconstrueerde Euclidische bewegingsgroep. Maar er kan direct tegen worden ingebracht, dat wij onze ervaringen *krijgen* los van alle wiskunde, dus ook van alle ruimtevoorstelling; wiskundige classificatiën van groepen van ervaringen, dus ook de schepping der ruimtevoorstelling, zijn vrije daden van het intellect, en wij kunnen naar verkiezing onze ervaringen op die katalogizeering betrekken, of onwiskundig ondergaan.

Beslist onwaar is dus ook de toevoeging bij de eerste praemisse, dat we de bekende uitwendige ervaringen niet kunnen denken los van de ruimtevoorstelling. En de conclusie, die de *aprioriteit* der Euclidische driedimensionale meetkunde hoofzakelijk op die toevoeging grondt, moet mede worden verworpen.

Maar zelfs de praemissen van KANT aanvaardende, kunnen we tegen de conclusie aanvoeren: kan dan het menschelijk intellect niet even goed georganiseerd zijn, om in andere receptacula de voorstelling eener uitwendige wereld te plaatsen, zonder dat nochtans dit *in de praktijk* voorkomt; b.v. omdat er weinig resultaat mee is te bereiken, en dus het vermogen daartoe weinig wordt geoefend? De empirische vaste lichamen zijn de eenige, waarop zich het menschelijk meetinstinct kan werpen; dit verklaart dat langzamerhand de bewegingsgroep dier vaste lichamen het schema der menschelijke verstandhouding over meetresultaten geworden is, maar dat nu de virtuositeit in het betrekken van verschijnselen der ervaringswereld op dat schema zeer groot is, sluit niet uit, dat men zich kan oefenen, om andere schema's (b.v. meerdimensionale en niet-Euclidische ruimten) niet alleen te bouwen, maar ook er zijn ervaringen op te betrekken. Het uitwendige ervaringen ondergaande menschelijke intellect kan zich, zoo dat het geval is, dus zeer goed van de Euclidische driedimensionale meetkunde losmaken.

Het standpunt van RUSSELL.

Dit laatste is ook de meening van RUSSELL, maar als noodzakelijke eigenschappen van het receptaculum wil hij behouden de eigenschappen der projectieve meetkunde en het axioma der vrije bewegelijkheid, zoodat alleen nog keuze zou blijven voor de Euclidische, hyperbolische en elliptische geometrieën van een zeker aantal dimensies.

En dan verder is zijn opvatting, dat, al is het menschelijk intellect tot deze verschillende geometrieën georganiseerd, de ervaring leert, dat alleen de Euclidische driedimensionale meetkunde voor de toevallig gegeven werkelijkheid kan dienen, waarvoor ze n.l. bij hooge benadering ,,waar" zou zijn. (vgl. b.v. § 209 pag. 253.)

We hebben boven aangewezen, hoe RUSSELL de eerste dezer beide stellingen afleidt:

voor de projectieve meetkunde uit den foutieven eisch van meer dan één dimensie voor het wiskundig substraat der ervaring, en de onjuiste uitbreiding over de uit meerdere dimensies gebouwde ruimte van de voorwaarden, waaraan moet voldoen een *forme d'extériorité zonder meer*.

voor de metrische meetkunde uit de willekeurige invoering der *meetbaarheid* (wat alleen kan geschieden door den bouw van een groep, zooals hier in het eerste hoofdstuk is aangegeven, en wat voor de ervaring niet een bestaansvoorwaarde is) en dan verder weer uit de onjuiste uitbreiding tot ruimten met meer dimensies van eischen, die alleen voor één dimensie gerechtvaardigd zijn.

En wat de tweede stelling betreft, *er is niet een bepaalde empirische ruimte*: wij kunnen alle verschijnselen katalogizeeren in elke ruimte, met zooveel dimensies als we willen, zoo bizar gekromd als we willen, dus ook zonder vrije bewegelijkheid. Ervarings*wetenschap* is gebonden aan wiskunde, maar dwingen tot de keuze van een *bepaald* wiskundig systeem kan de ervaring nooit.

De Euclidische driedimensionale meetkunde is een zesledige groep, waarin zich de beweging der empirische vaste lichamen in onze onmiddellijke omgeving met zeer groote benadering laat weergeven, en daar verder van de verschijnselen der natuur, die de menschen bestudeeren, vaak een substraat in de bewegingsgroep der empirische vaste lichamen gemakkelijk onder wetten is te brengen (wat dan als in de praktijk meest geschikte manier geschiedt volgens met behulp dier groep geconstrueerde empirische krommen, die men *rechte lijnen* noemt, en op de rechte lijnen geconstrueerde schalen, die men *afstandsschalen* noemt), en zoo dienstig is als middel om voor vele doeleinden die verschijnselen te beheerschen, konden voor techniek en natuurkunde bruikbare meetwerktuigen worden geconstrueerd, waaraan de empirische vaste lichamen ten grondslag liggen, en werd de Euclidische meetkunde, dat is de Euclidische wiskundige *groep* de grondslag voor de verstandhouding der menschen over alle verschijnselen der ervaringswereld.

De Euclidische meetkunde is een door geregeld gebruik onder de menschen zeer algemeen handelbaar geworden gebied der wiskunde, maar het is zeer goed denkbaar, dat bij dezelfde organisatie van het menschelijk intellect een ander wiskundig gebouw deze populariteit zou hebben verkregen.

Resumeering van het verband tusschen wiskunde en ervaring.

Ons standpunt resumeerende ten opzichte van de beide hoofdpunten van KANT's Transcendentale Aesthetiek:

a). *Ten opzichte van het onafscheidelijk verbondene aan de uitwendige ervaring*: Niet alleen bestaat, zooals pag. 98 is gezegd, de wiskunde onafhankelijk van de ervaring, maar ook is alle ervaring onafhankelijk van alle wiskunde. Geen enkel wiskundig systeem wordt door ons mèt onze ervaringen passief ondergaan; niet eens de tijdcoördinaat, niet eens het maatlooze tijdcontinuum.

b). *Ten opzichte van noodzakelijk optreden in het wiskundig receptaculum der ervaring:* Die noodzakelijkheid bestaat alleen voor de wiskundige oer-intuitie, daar het wiskundig receptaculum der ervaring aan geen andere beperking onderhevig is, dan de wiskunde zelf, en deze ontwikkelt zich uit haar oer-intuitie in een door vrije willekeur geleide zelfvermenigvuldiging; de eenige synthetische oordeelen a priori voor de uitwendige ervaring, en tevens de eenige synthetische oordeelen a priori in het algemeen zijn dus die welke worden afgelezen als wiskundige bouw-mogelijkheden op grond van de oer-intuitie van tijd of van veeleenigheid, m.a.w. worden afgelezen als mogelijkheden van puntsystemen op het continuum. [1])

Men kan dus als zulke oordeelen noemen:

1°. de mogelijkheid zelf van wiskundige synthese, van het denken van veeleenigheid, en van de herhaling daarvan in een nieuwe veeleenigheid.

2°. de mogelijkheid van tusschenvoeging, (dat men n.l. als nieuw element kan zien niet alleen het *geheel* van twee reeds samengestelde, maar ook

---

[1]) Men trachte echter niet, die oordeelen aan de wiskunde of aan de ervaring ten grondslag te leggen: ze zijn het gevolg van *wiskundig bekijken* der oer-intuitie, vooronderstellen dus de oer-intuitie zoowel in het bekijken als in het bekekene; ze behooren tot wat we in het volgende hoofdstuk zullen noemen *wiskunde der tweede orde.*

het *bindende:* dat wat niet het geheel is, en niet element is.)

3°. de oneindige voortzetbaarheid. (axioma van volledige inductie).

De ervaring a posteriori kan omtrent het noodzakelijk optreden van bepaalde wiskundige systemen in de ervarings*wetenschap* niets leeren.

Het volgende schema vergelijkt overzichtelijk de standpunten van KANT en RUSSELL, en het hier ontwikkelde:

	in KANT's *Transcendentale Aesthetiek:*	*in* RUSSELL's *Foundations of Geometry:*	*in dit werk:*
Onafscheidelijk gebonden aan de uitwendige ervaring is:	de Euclidische driedimensionale ruimte, en de maatlooze tijd.	de Euclidische driedimensionale ruimte, en de meetbare tijdcoördinaat.	niets.
Noodzakelijk treedt op in het wiskundig receptaculum der ervaring:			
a) op grond van de organisatie van het menschelijk intellect:	de Euclidische driedimensionale ruimte, en de maatlooze tijd.	de projectieve ruimte, de vrije bewegelijkheid in de ruimte, en de meetbare tijdcoördinaat.	de oer-intuitie der wiskunde, of tijdsintuitie.
b) op grond der ervaring:	niets.	de driedimensionaliteit der ruimte en het parallellenaxioma van EUCLIDES.	niets.

III.

WISKUNDE EN LOGICA.

Wiskunde is onafhankelijk van logica.

We willen toonen, dat de wiskunde onafhankelijk is van de zoogenaamde *logische wetten*, (wetten van redeneering of van menschelijk denken). Dit schijnt paradox, want wiskunde wordt gewoonlijk gesproken en geschreven als bewijsvoering, afleiding van eigenschappen, en in den vorm van een aaneenschakeling van syllogismen. Maar de voorstellingen, die door de daarbij gebruikte woorden worden gewekt, bestaan hierin, dat, waar wiskundige dingen worden gegeven door hun *relaties* met een gedeelte van de enkelvoudige of samengestelde deelen van een wiskundig gebouw, [1] men door een reeks van tautologieën [2], de gegeven relaties vervormt en trapsgewijs voortschrijdt naar de relaties van het ding met andere deelen van het gebouw.

De bewijzen, die we in het eerste hoofdstuk van de allereerste stellingen der wiskunde gaven, bestonden in

[1]) d. w. z. dat men tot den bouw van het ding in kwestie komt in samenhang met die deelen waartoe het wordt gezegd, in relatie te staan.

[2]) d. w. z. wisseling in de ondergroepeeringen, die men in eenzelfde wiskundig systeem in 't oog vat.

het leeren lezen van die stellingen als tautologieën. Dat in meer gecompliceerde gevallen een stelling niet direct duidelijk is, maar eerst na een reeks van tautologieën wordt ingezien, bewijst alleen, dat wij onze gebouwen ingewikkelder bouwen, dan we in eens kunnen overzien.

Er is een bijzonder geval, waar de aaneenschakeling van syllogismen een eenigszins ander karakter heeft, dat aan de gewone logische figuren meer nabij schijnt te komen, en werkelijk het hypothetische oordeel der logica schijnt te vooronderstellen. Dat is, waar een gebouw in een gebouw door eenige relatie wordt gedefinieerd zonder dat men daarin direct het middel ziet het te construeeren. Het schijnt, dat men daar *onderstelt* dat het gezochte geconstrueerd was, en uit die onderstellingen een keten van hypothetische oordeelen afleidt. [1]) Maar meer dan schijn is dit niet; wat men hier eigenlijk doet, bestaat in het volgende: men begint met een systeem te construeeren, dat aan een deel der geëischte relaties voldoet, en tracht uit die relaties door tautologieën andere af te leiden zóó, dat ten slotte de afgeleide zich met de nog achteraf gehoudene laten combineeren tot een stelsel voorwaarden, dat als uitgangspunt voor de constructie van het gezochte systeem kan dienen. Met

[1]) Men denke hier b.v. aan de uniciteitsbewijzen voor transformatiegroepen met gegeven eigenschappen van HILBERT en LIE; of ook aan gewone elementaire werkstukken, als het zoeken van een gemeenschappelijk harmonisch paar, of de werkstukken van APOLLONIUS.

die constructie is dan eerst bewezen, dat werkelijk aan de voorwaarden kan worden voldaan.

,,Maar", zal de logicus zeggen, ,,het had ook kunnen zijn, dat bij de redeneeringen een strijdigheid tusschen de afgeleide en de nog wachtende voorwaarden was voor den dag gekomen, en die strijdigheid wordt toch waargenomen als logische figuur en bij het inzicht van de strijdigheid steunt men op het principium contradictionis." Waarop kan worden geantwoord: ,,De woorden van uw wiskundig betoog zijn slechts de begeleiding van een woordloos wiskundig *bouwen*, en waar gij de strijdigheid uitspreekt, merk ik eenvoudig, dat het bouwen niet verder *gaat*, dat er geen plaats is te vinden in het gegeven grondgebouw voor het opgegeven gebouw. En waar ik dat merk, denk ik aan geen principium contradictionis.

Logica is afhankelijk van wiskunde.

Is dus de wiskunde niet afhankelijk van de logica, de logica is wèl afhankelijk van de wiskunde: vooreerst het *intuitief logisch redeneeren* is dát bijzondere wiskundige redeneeren, dat overblijft, als men bij het bekijken der wiskundige systemen zich uitsluitend beperkt tot relaties van *geheel en deel;* de beschouwde wiskundige systemen zelf dragen in geen opzicht een speciaal elementair karakter, dat een prioriteit van logisch redeneeren ten opzichte van gewoon wiskundig redeneeren zou kunnen wettigen. Men zou kunnen aanvoeren: De relatie *opvolger zijn van,* die het redeneeren in de eigenlijke wiskunde beheerscht, treedt in de wiskunde van het logisch redeneeren *nog niet* op. Dan dient geantwoord: Die relatie treedt weliswaar *niet meer expliciet* op, maar ze is er zoo goed als in alle wiskunde verondersteld; immers ze vergezelt alle wiskundige opbouw, hoezeer ze ook na het beëindigen van den bouw bij zekere relaties tusschen de elementen niet meer als zoodanig duidelijk in het oog springt.

Van het wiskundig bouwen en redeneeren, en in het bijzonder van het logisch redeneeren, dat de menschen bij zichzelf doen, trachten ze door middel van klanken of teekens bij andere menschen copieën te doen oprijzen, of ook hun eigen herinneringsvermogen te hulp te komen. Zoo ontstaat de *wiskundige taal*, en als bijzonder geval hiervan de *taal der logische redeneeringen*. [1])

Voor welke wiskundige begrippen men een klankbeeld of schriftteeken zal scheppen, om er aan te laten beantwoorden, deze keuze zal zoo ekonomisch mogelijk rekening houden met de meest gebruikelijke wiskundige systemen en wijzen van redeneering; ze zal dus in 't algemeen in elk milieu verschillend

[1]) Dat men ook bij wiskunde, waar aan geen relaties van geheel en deel wordt gedacht, dikwijls voor de mededeeling door woorden aan anderen, *de gedachte relaties omvormt tot relaties van geheel en deel*, zoodat de gebruikelijke taal der algemeene wiskunde doortrokken is van de uitdrukkingswijze der logische redeneeringen, is slechts toe te schrijven aan de eeuwenoude traditie der logische termen in de taal, in verband met haar beperkten woordenvoorraad.

zijn. En in het bijzonder: welke gedeelten der wiskunde een taal zullen krijgen niet alleen bij de wiskundigen van beroep, maar ook in het dagelijksch leven, dit zal voor elk volk weer op nieuw er van af hangen, welke gedeelten der wiskunde als leiding voor het levensgedrag of als middel tot verstandhouding daarover er de meeste toepassing hebben gevonden.

Het is dus zeer goed denkbaar, dat bij dezelfde organisatie van het menschelijk intellect, dus bij dezelfde wiskunde, een andere taal van verstandhouding ware ontstaan, waarin voor de ons bekende taal der logische redeneeringen geen plaats zou zijn. En waarschijnlijk zijn er nog wel buiten het cultuurverband levende volken, waarbij dat werkelijk het geval is. En evenmin is voor de taal der cultuurvolken uitgesloten, dat in een verder ontwikkelingsstadium de logische redeneeringen er hun plaats zullen verliezen.

Nu hebben de menschen, die alles wiskundig willen bekijken, dat ook gedaan met de wiskundige taal, en wel in vroeger eeuwen steeds uitsluitend met de taal der logische redeneeringen: de hieruit voortgekomen wetenschap is de *theoretische logica*.

Eerst in de laatste twintig jaren (de vroegste sporen gaan overigens tot op LEIBNITZ terug) is men de *wiskundige taal in het algemeen* op dezelfde wijze gaan bekijken: hierin bestaat, voor zoover ze zonder zelfoverschatting wordt beoefend [1]), de *logistiek*.

---

[1]) vgl. pag. 159 sqq. De totnogtoe uitgewerkte systemen van

Zoowel theoretische logica als logistiek zijn dus *empirische wetenschappen*, en *toepassingen* der wiskunde, die omtrent de organisatie van het menschelijk intellect nooit iets zullen kunnen leeren, en nog eerder tot de *ethnographie*, dan tot de *psychologie*, moeten worden gerekend.

En de taal der logische redeneeringen is zoo min een *toepassing van de theoretische logica* (waarvan zou overigens in dat geval de taal der theoretische logica zelf een toepassing zijn?) als het menschelijk lichaam een toepassing der anatomie is.

Beschouwen we tot toelichting het klassieke syllogisme:

Alle menschen zijn sterfelijk.
Socrates is een mensch.
ergo: Socrates is sterfelijk.

De gedachten door deze woorden geaccompagneerd zijn de volgende:

Ten grondslag ligt de projecteering in de aanschouwingswereld van een wiskundig systeem, n.l. een groep van een eindig aantal elementen, „subjecten", elk verbonden aan geen of een of meer uit een groep van een eindig aantal andere elementen („praedicaten"). Het blijkt dat het gelukt, in het menschelijk intellect een deel der aanschouwingswereld

---

logistiek beschouwen een wiskundige taal die een overmatig gebruik maakt van de woorden der theoretische logica, en die soms, waar dat overmatig gebruik voerde tot een ongeoorloofd gebruik, wiskundige dwalingen heeft in het leven geroepen.

bij benadering op zoo'n systeem te projecteeren.

Nu, en in zoo'n wiskundig systeem is het een *wiskundige* tautologie, dat als alle elementen met het praedicaat „mensch" een deel zijn van die met het praedicaat „sterfelijk", dat dan het element „Socrates" uit de eerste groep, ook deel uitmaakt van de tweede groep. We hebben hier een der allereenvoudigste vormen van wiskundige redeneering, dat is van door tautologie overgaan van de eene relatie op de andere.

Gaat men evenwel de *woorden*, die deze primitieve wiskunde begeleiden, bekijken, dan kan men er wiskundig een verrassend mechanisme van een niet a priori duidelijke regelmatigheid in zien, m.a.w. men kan op die woorden een nieuw eenvoudig wiskundig systeem projecteeren, waarover sprekende men de *theorie van het syllogisme* uiteenzet. Maar de hier van kracht zijnde wiskundige systemen behooren tot de allereenvoudigste, hebben dus voor hun bekendheid de logica niet noodig.

Was in het syllogisme nog een wiskundig element te onderkennen, de stelling:

Een functie is òf differentieerbaar òf niet differentieerbaar

zegt *niets;* drukt hetzelfde uit, als het volgende:

Als een functie niet differentieerbaar is, is ze niet differentieerbaar.

Maar de *woorden* van eerstgenoemde volzin bekijkend, en een regelmatig gedrag in de opvolging der woorden van deze en van dergelijke volzinnen ontdekkend, projecteert de logicus ook hier een wiskundig systeem, en noemt zulk een volzin een *toepassing van het principe van tertium non datur*.

We leggen er verder den nadruk op, dat het syllogisme en de verdere logische principes kunnen worden gerekend te gelden voor de taal der logische redeneeringen, die handelen over eindige elementgroepen, of aftelbaar oneindige, of gebieden binnen continua, maar in elk geval uitsluitend over wiskundig opgebouwde systemen; de overtuiging van de betrouwbaarheid hunner toepassing steunt op de *zekerheid*, dat het wiskundig opbouwbare systemen zijn, waarover wordt gesproken. En wanneer het gelukt *taal*gebouwen op te trekken, reeksen van volzinnen, die volgens de wetten der logica op elkaar volgen, uitgaande van taalbeelden, die voor werkelijke wiskundige gebouwen, wiskundige grondwaarheden zouden kunnen accompagneeren, en het blijkt dat die taalgebouwen nooit het taalbeeld van een contradictie zullen kunnen vertoonen, dan zijn ze toch alleen wiskunde als taalgebouw en hebben met wiskunde buiten dat gebouw, bijv. met de gewone rekenkunde of meetkunde niets te maken.

Dus in geen geval mag men denken, door middel van die taalgebouwen iets van andere wiskunde, dan die direct intuitief op te bouwen is, te kunnen te weten komen. En nog veel minder mag men meenen, op *die* manier de *grondslagen* der wiskunde te kunnen leggen, m.a.w. de betrouwbaarheid der wiskundige eigenschappen te kunnen verzekeren.

We gaan er toe over, op grond van bovenstaande overwegingen achtereenvolgens nader te bespreken:

1°. De grondvesting der wiskunde op axioma's.
2°. De theorie der transfinite getallen van CANTOR.
3°. De logistiek van PEANO-RUSSELL.
4°. De logische grondslagen der wiskunde volgens HILBERT.

Ad 1°.

De verbeteringen op EUCLIDES.

Het klassieke voorbeeld is hier de meetkunde van EUCLIDES Dat het als logisch taalgebouw onvolkomen is, dat n.l. stilzwijgend hier en daar niet genoemde axioma's worden ingevoerd, is door de nieuwere onderzoekingen van PASCH, SCHUR, HILBERT, PEANO, PIERI e. a. overtuigend aangetoond, maar het systeem in dat opzicht te perfectionneeren, heeft dezen wiskundigen weinig moeite gekost. Daarnaast hebben zij, en vooral HILBERT, zich onledig gehouden, taalgebouwen van *pathologische geometrieën* te construeeren, om aan te toonen, welke eigenschappen (d.w.z. volzinnen, die voor de Euclidische meetkunde meetkundige eigenschappen uitdrukken) wèl, en welke niet behouden blijven, wanneer men een deel der axioma's laat vallen (hierin de voetsporen drukkend van LOBATCHÉFFSKY, die onderzocht, wat van het logische gebouw van EUCLIDES overblijft, als men zijn parallellen-axioma vallen laat [1])). In het bijzonder stelden zij zich ten doel, voor elk der zoo geconstrueerde logische gebouwen de benoodigde axioma's tot een minimum te beperken. Zoo heeft HILBERT voor de meeste in zijn Festschrift opgestelde axioma's aangetoond, dat zij niet kunnen weggelaten worden, zonder dat de meetkunde daardoor een deel van haar eigenschappen verliest. [2])

We moeten echter opmerken, dat het verwijt van onvolledigheid tegen EUCLIDES vervalt, als hij zich zijn wiskundig gebouw der Euclidische meetkunde, reeds *af* voorstelde (als een Cartesiaansche ruimte met een bewegingsgroep), en zijn redeneeringen alleen dienen als begeleiding bij het uit duidelijk geziene

---

[1]) Ook al is uit de berekeningen van LOBATCHEFFSKY, vooral voor het platte vlak op vrij eenvoudige wijze, wel een *bestaansbewijs* aan te brengen, en is het niet onmogelijk, dat hij zelf dat er in heeft willen zien; vgl. b.v. „Pangeometrie", § 8.

[2]) Intusschen, zelfs, al had hij dat van al zijn axioma's aangetoond — de „Axiome der Verknüpfung" en „Axiome der Anordnung" onderzoekt hij in dat opzicht niet; waarvoor hij (l. c. p. 20) den vagen grond opgeeft, dat zij „bei unserer Darstellung den übrigen Axiomen zu Grunde liegen" — dan was daarmee het minimumbewijs nog niet geleverd. Immers elk axioma, waarin het woord *alle* voorkomt, is splitsbaar, al was het alleen in het axioma voor *alle op één na* en dat voor *de eene resteerende*, en daarvoor zou dan telkens moeten worden aangetoond, dat het tweede deel niet uit het eerste volgt, wat misschien wel mogelijk is, maar in elk geval niet zoo eenvoudig, en HILBERT heeft in dat opzicht zijn onderzoek onvolledig gelaten.

relaties (dat zijn ondergeschikte gebouwen) door een reeks van tautologieën overgaan tot nieuwe, niet direct geziene, m.a.w. als begeleiding van een exploratie van een zelf opgebouwd gebouw. Dan is zijn werk zuiver wiskundig, en het niet invoeren van coördinaten en opereeren daarmee, is alleen een methodische onvolkomenheid.

Het is natuurlijk ook mogelijk, dat EUCLIDES het niet zoo heeft ingezien, en in de fout van zoovelen is vervallen, die dachten logisch te kunnen redeneeren over andere dingen dan eigengemaakte wiskundige systemen, en voorbijzagen, dat, waar de logica het woord *alle* of *elke* gebruikt, deze woorden, om zin te hebben, de beperking van *voor zoover behoorend tot een als vooraf opgebouwd gedacht wiskundig systeem* stilzwijgend insluiten [1]).

[1]) Naast deze waan van de *vrijheid* der logica staat als een analoge overschatting er van het idee van ARISTOTELES en de scholastici — dat nog sterk bij SPINOZA en in mindere mate bij KANT nawerkt, en waaraan eerst in de 19de eeuw de philosophie ontgroeid schijnt te zijn — dat men door logica niet a priori duidelijke geheimen der natuur zou kunnen ontdekken, terwijl in werkelijkheid de conclusies waartoe men zoo geraakt, niet voor de natuur zelf, maar alleen voor het in willekeur daarop geprojecteerde wiskundige systeem (waarvan dan slechts een deel het direct doorleefde dekt, terwijl het overige een uitbreiding door inductie daarvan is) geldig zijn; dat die conclusies ook voor de natuur *juist* zijn (d. w. z. als leiddraad voor het menschelijk handelen doel treffen), dient voor elke conclusie opnieuw geveri-

LOBATCHEFFSKY, BOLYAI. In elk geval is het werk van EUCLIDES door de nakomelingschap meest als zulk een logisch gebouw opgevat en LOBATCHEFFSKY misschien en BOLYAI zeker construeerden eveneens logische gebouwen, zonder zich om wiskundige systemen, die ze zouden kunnen accompagneeren, te bekommeren. RIEMANN. Eerst RIEMANN heeft voor het onderzoek naar de grondslagen der meetkunde den juisten weg gewezen, door bij zijn redeneeringen er van uit te gaan, dat de ruimte een *Zahlenmannigfaltigkeit* is, dus een door ons zelf gebouwd systeem. Hij voert dit evenwel met nadruk in als een hypothese, die een willekeurig karakter draagt; en spreekt er niet van, dat we in *elk* geval een wiskundig systeem moeten ten grondslag leggen, en dan als zoodanig uithoofde van doelmatigheid de Zahlenmannigfaltigkeit kiezen. HILBERT c. s. Zoo zijn dus PASCH, HILBERT enz., in zijn

---

fieerd (en elke verifieering door wiskundige inductie aangevuld). Zulk een verifieering is noodig, hoe juist de gebruikte praemissen ook waren, zoo goed als van een physische hypothese, hoe bruikbaar ook tot nog toe gebleken, elke nieuwe consequentie uitdrukkelijk dient gecontrôleerd te worden.

Die verifieering kan verder voor verschillende personen tot verschillend resultaat leiden, omdat zij de woorden der conclusie toetsen aan verschillende voor die woorden in hun geest bestaande wiskundige systemen, of ook zij kan bij gebrek aan zulke wiskundige systemen in afwachting van latere ondervinding, dat is vorming van nieuwe wiskundige systemen, voorloopig onmogelijk zijn.

aanname iets willekeurigs ziende, weer tot de logische grondvesting der meetkunde teruggekeerd, en hebben getracht EUCLIDES te verbeteren, door, zooals we boven hebben uiteengezet, zich ten doel te stellen taalgebouwen [1]) te construeeren, die uit axioma's zich ontwikkelen, enkel door middel van het formeele syllogisme en de verdere logische principes. De intuïtieve wiskunde halen ze alleen binnen den kring hunner beschouwingen tot het voeren van *niet-strijdigheidsbewijzen* (aangeven van een systeem, waarvan een zeker stelsel logische axioma's en dus ook alle er uit afgeleide stellingen kunnen worden beschouwd, eigenschappen uit te drukken [2])) en *onafhan-*

[1]) HILBERT verklaart zelfs uitdrukkelijk, bij woorden als „Punkt," „Gerade", „zwischen" enz. aan geen wiskundige interpretatie te willen denken.

[2]) Het is duidelijk, dat door het aangeven van een wiskundig systeem, waarvan de axioma's eigenschappen *zouden kunnen* accompagneeren, bewezen is, dat nooit twee strijdige stellingen uit die axioma's kunnen worden afgeleid, want twee strijdige stellingen kunnen niet van een wiskundig gebouw gelden. Overigens ligt in het aanvoeren der wiskundige systemen als bestaansbewijzen voor de logische, dat men nog voelde dat het wiskundig systeem zelf geen verder bestaansbewijs, dan zijn intuitieven opbouw noodig had. Hoe die overtuiging HILBERT later echter weer heeft verlaten, blijkt uit zijn noot „über den Zahlbegriff" (Jahresber. der Deutschen Math. Ver. VIII), waar hij de getalsystemen, die hij als bestaansbewijzen voor zijn geometrieën had ingevoerd, op hun beurt zelf weer alleen axiomatisch gedefinieerd denkt, zoodat dan daarvan

kelijkheidsbewijzen (d.w.z. dat men, om aan te toonen, dat een zeker axioma uit zekere andere niet logisch

---

nog weer even goed onafhankelijk van de intuitie de niet-strijdigheid moet worden aangetoond. Maar hij bedenke dat hij dan toch weer intuitief een wiskundig systeem (dat van de uit de axioma's afgeleide stellingen) intuitief opbouwt volgens de wetten der logica, en dan eenvoudig in de niet-strijdigheid een wiskundige eigenschap van dat wiskundig systeem aantoont, en dat niet anders dan intuitief. Daar hij geen intuitieve wiskunde wil erkennen, zal hij die laatste bewijsvoering ook weer als gebouw in de taal moeten beschouwen, en er een redeneering op grond van axioma's (n.l. over de „Verknüpfung" van de elementen, die de stellingen van het systeem zijn, en daaronder *zeker* het axioma van volledige inductie) in moeten zien; en hij zal weer *moeten* bewijzen, dat die axioma's niet strijdig zijn. Maar 1° is hij dan nog even ver, als zooeven, 2° volgt uit de niet-strijdigheid der axioma's nog *niet* het *bestaan* van het bijbehoorend wiskundig systeem, 3° volgt uit het *bestaan* van dat wiskundig redeneersysteem nog niet, dat dat taalsysteem *leeft*, m. a. w. een aaneenschakeling van gedachten begeleidt, en dán nog niet, dat die aaneenschakeling van gedachten een *wiskundige* ontwikkeling is, dus overtuigingskracht bezit.

We zullen beneden zien, hoe HILBERT zich hieruit heeft trachten te redden, en in hoeverre hij daarin geslaagd is.

Herinneren we in dit verband ook aan de beroemde brochure van DEDEKIND: „Was sind und was sollen die Zahlen?", die zich ten doel stelt, de arithmetiek der geheele getallen logisch te bewijzen uit de allerprimitiefste begrippen. Hij geeft daartoe een logisch systeem (dus een wiskundig gebouw van woorden), waarin de woordbeelden van de onderlinge verhouding van de primitieve begrippen (*geheel en deel, beantwoording van elementen aan elkaar, afbeelding van systemen op elkaar* enz.) de axioma's zijn, is af te leiden, een wiskundig systeem aangeeft, waarvan de laatste wel, het eerste niet, beschouwd kunnen

---

en dat dan verder volgens de logische wetten *eindig* wordt opgebouwd (dus zonder gebruik te maken van de volledige inductie, dat is de wiskundige intuitie „*en zoo voort*.") Zou dit systeem nu wiskundige beteekenis hebben, dan zou het door een wiskundig bestaansbewijs moeten worden gecompleteerd. Maar wilden we dat geven, dan zouden we daarbij zeker de intuitie „*en zoo voort*" moeten gebruiken, en zouden meteen zien, dat we alle arithmetische stellingen veel eenvoudiger kunnen zien, dan volgens het gewrongen systeem van DEDEKIND; deze geeft dan ook niet het bestaansbewijs. Wel geeft hij § 66 een bewijs voor: „Es giebt unendliche Systeme," maar 1° is vereischt een bewijs voor: „Es giebt einfach unendliche Systeme," wat meer is; en 2° is zijn bewijs, dat „meine Gedankenwelt" aanvoert, fout; want „meine Gedankenwelt" is niet wiskundig te bekijken, en het is dus ook niet zeker, dat ten opzichte van zoo iets de gewone axioma's van geheel en deel niet-strijdig zullen blijven. Wiskundige beteekenis heeft het systeem van DEDEKIND dus niet; om het logische beteekenis te geven, ware een onafhankelijk bewijs van niet-strijdigheid vereischt geweest, dat DEDEKIND evenmin geeft; hád hij dat trouwens gegeven, dan had hij zich op de intuitie „*en zoo voort*" moeten beroepen, maar had hij díe intuitief erkend, dan had hij weer gezien, hoe hij met behulp daarvan de arithmetiek eenvoudig had kunnen opbouwen, en was zijn logisch systeem hem als èn ongemotiveerd, èn omslachtig verschenen, en had hij niet volgehouden, dat ieder die rekent, onbewust alle phasen van zijn logisch systeem doormaakt. (vgl. Vorrede pag. IX: „Ich erblicke gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere, zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lang und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, das ihr Besitz oder der worden eigenschappen uit te drukken), en in dezen zin treden bij hen o.a. niet-Archimedische en niet-Pascalsche geometrieën op, zooals we aan het eind van het eerste hoofdstuk hebben geconstrueerd [1]). Deze weinig harmonische, met moeite samengetimmerde systemen krijgen zoo, doordat ze een beperkter stel axioma's representeeren, een prioriteit ten opzichte van de eenvoudige, doorzichtige, Euclidische meetkunde [2]). Zoo iets storends is het gevolg, wan-

---

Glaube an sie niemals durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist.")

Op dezelfde gronden als het werk van DEDEKIND, moet de verhandeling van MANNOURY: „De zoogenaamde grondeigenschap der Rekenkunde" (Handelingen van het 8e Natuur- en Geneeskundig congres, Rotterdam 1901) die eenvoudiger hetzelfde idee uitwerkt, als grondlegging voor de rekenkunde worden veroordeeld.

[1]) Van de daar opgebouwde groep van niet-Pascalsche geometrieën zijn de door HILBERT (Festschrift p. 69) en VAHLEN (Abstrakte Geometrie pag. 42; 110) aangegevene bijzondere gevallen.

[2]) Van ons standpunt kunnen we in de pathologische geometrieën van HILBERT c.s. niets zien, dan speciale veralgemeeningen van de Euclidische bewegingsgroep. En deze veralgemeeningen blijven eenzijdig hierin, dat ze zich (in tegenstelling met die van LIE) tot projectieve groepen beperken, en dat ze (eveneens anders dan bij LIE) niet de *algemeene* groep, die aan zekere voorwaarden voldoet, opsporen; wat overigens ook niet zal gaan, zoolang niet eerst als willekeurige beperking een *bepaald* wiskundig grondsysteem wordt gegeven, waarin de verder nog aan zekere intrinsieke voorwaarden voldoende groep moet worden ingepast.

neer men de taal, die een, zij het gebrekkig, hulpmiddel is om wiskunde mee te deelen, maar met de wiskunde zelf niets uitstaande heeft dan als een begeleiding, als iets essentieels er van gaat bekijken, en de wetten, die de opvolging der volzinnen regeeren, de logische wetten, als het eigenlijke richtende bij daden van wiskundig bouwen in 't oog gaat vatten.

Intusschen blijven de moderne axiomatici natuurlijk toch van plan, om hun logische systemen ten slotte weer *toegepast* te zien, en hebben dan ook geen woordgebouwen opgetrokken, dan die geschikt zijn, om opbouwbare wiskundige systemen te begeleiden. Nu rijst de vraag: gesteld we hebben op een of andere manier, zonder aan wiskundige interpretaties te denken, bewezen dat het uit eenige taalaxioma's opgebouwde logische systeem niet-strijdig is, d.w.z. dat op geen moment der ontwikkeling van het systeem twee strijdige stellingen komen; vinden we vervolgens een wiskundige interpretatie voor de axioma's ,(die dan natuurlijk bestaat in den eisch, een wiskundig gebouw te construeeren met aan gegeven wiskundige relaties voldoende elementen), volgt dan uit de niet-strijdigheid van het logische systeem, dat zulk een wiskundig gebouw *bestaat*? Maar zoo iets is door de axiomatici nooit bewezen, niet eens voor het geval de gestelde voorwaarden insluiten, dat het een wiskundig opbouwbaar systeem is, wat gezocht wordt; zoo b.v. wordt nergens bewezen, dat als een eindig getal aan een stelsel voorwaarden moet voldoen, waarvan bewezen kan worden, dat ze niet contradictoor zijn, dat dan dat getal ook bestaat. [1])

Maar zeker *niet* is de stelling waar, als in de gegeven voorwaarden *niet* reeds de opbouwbaarheid uitdrukkelijk begrepen is. Zoo b.v. zijn volgens HILBERT de eigenschappen, door CANTOR gesteld voor de welgeordende verzameling, bestaande uit *al* de getallen der tweede getalklasse, *niet* contradictoor; maar de verzameling bestaat niet wiskundig.

Ad 2^0.

Veroordeeling van de logische grondslagen der Mengenlehre.

We hebben in het eerste hoofdstuk gezien, dat er geen andere verzamelingen bestaan, dan eindige en aftelbaar oneindige, en continua; hetgeen is aangetoond op grond van de intuitieve waarheid, dat wij wiskundig niet anders kunnen scheppen, dan eindige rijen, verder op grond van het duidelijk gedachte ,,en zoo voort'' het ordetype ω, doch alleen be-

---

[1]) Het is dus a fortiori niet zeker, dat van elk wiskundig probleem òf de oplossing kan worden gegeven òf logisch kan worden aangetoond, dat het onoplosbaar is; iets, waarvan intusschen HILBERT in ,,Mathematische Probleme'' meent, dat ieder wiskundige ten innigste is overtuigd.

Maar van deze kwestie zelf is het natuurlijk ook weer niet zeker, dat ze ooit zal kunnen worden afgedaan, d.w.z. òf opgelost, òf als onoplosbaar aangetoond (een logische kwestie is ook niets dan een wiskundig probleem.)

staande uit *gelijke elementen* [1]), zoodat we ons b.v. de *willekeurige* oneindige duaalbreuken nooit af, dus nooit geïndividualiseerd kunnen denken, omdat het aftelbaar oneindige aantal cijfers achter de komma niet is te zien als een aftelbaar aantal *gelijke* dingen), en ten slotte het intuitief continuum, (met behulp waarvan we vervolgens het gewone continuum, het *meetbaar continuum,* hebben geconstrueerd).

CANTOR en zijn volgelingen meenen echter nog allerlei andere verzamelingen te kennen; hun grondbeginsel is (CANTOR, ,,Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,'' pag. 45) het volgende:

,,Der Vorgang bei der correcten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist, als ein Name oder ein Zeichen A und giebt demselben ordnungsmässig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädicate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideeën bekannt ist und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und

---

[1]) Waar men zegt: „en *zoo* voort", bedoelt men het onbepaald herhalen van *eenzelfde* ding of operatie, ook al is dat ding of die operatie tamelijk complex gedefinieerd.

er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjectiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu constatiren ist alsdann Sache der Metaphysik."

Het komt zooals we zien ongeveer neer op het standpunt der axiomatici.

We hebben boven getoond dat dit principe niet gewettigd is, en beweren nu op dezen grond, dat de vele paradoxen der „Mengenlehre", waarvan de oplossing met zooveel ijver wordt gezocht, geen recht van bestaan hebben; dat veelmeer de Cantorianen verplicht waren geweest een begrip dat tot een contradictie aanleiding geeft, direct, als zeker onwiskundig gevormd, te verwerpen.

Gaan we op enkele punten nader in:

De tweede getalklasse van CANTOR bestaat niet.

Van de definitie der *welgeordende verzamelingen* volgens CANTOR (zie hoofdstuk I pag. 63) weten we, dat ze niet-contradictoor is; immers er bestaan welgeordende verzamelingen, in de eerste plaats het ordetype ω van de rij der eindige ordetypen: 0, 1, 2... Er is dan ook niets tegen, om ω te stellen als een nieuw ordegetal, en weer op nieuw te gaan tellen

$$\omega, \ \omega + 1, \ \omega + 2, \ldots \ 2\,\omega, \ 2\,\omega + 1, \ldots, \ m\,\omega + n, \ldots$$

Evenmin is er iets tegen, *na* alle op deze wijze te vormen getallen te stellen een getal ω^2; we openen ons zoo weer een grooter gebied van volgens een welgeordende rij op elkaar volgende ordegetallen, waarvan de uitdrukking geschiedt door den algemeenen vorm:

$$m_1\omega^{p_1} + m_2\omega^{p_2} + \ldots . (p_r > p_{r+1})$$

als eerstvolgende waarop we ω^ω kunnen invoeren. Zoo kunnen we doorgaan, en CANTOR toont („Grundlagen" pag. 35) aan, dat elk zoo ingevoerd ordetype, dus ook in elk stadium het *geheel* der ingevoerde getallen, aftelbaar blijft. Dan laat hij echter volgen:

„Wir definiren daher die zweite Zahlenclasse als den Inbegriff aller mit Hülfe der beiden Erzeugungsprincipe (hij verstaat onder die twee principes: *een eenheid verder gaan*, en *van een ordetype ω het naasthoogere element*, *het grenselement*, *nemen*) bildbaren, in bestimmter Succession fortschreitenden Zahlen α:

$$\omega,\ \omega + 1, \ldots,\ \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots$$
$$\ldots .\ \omega^\omega, \ldots .\ \alpha, \ldots ..$$

welche der Bedingung unterworfen sind, dass alle der Zahl α voraufgehenden Zahlen, von 1 an, eine Menge von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse bilden."

Let wel, „den Inbegriff aller"; hij spreekt hier van iets, wat zich niet laat denken, d.w.z. zich niet wiskundig laat opbouwen; immers een geheel, geconstrueerd met behulp van ,,en zoo voort" laat zich alleen denken, als dat ,,en zoo voort" op een ordetype ω van gelijke dingen slaat; maar het ,,en zoo voort" *hier* slaat niet op een ordetype ω, en ook niet op gelijke dingen. CANTOR *verliest dus hier den wiskundigen bodem.* Volgens zijn boven aangehaald grondprincipe moet hem dit onverschillig zijn; maar in elk geval moet hij dan toch zorgen, dat hij *logisch* vasten grond houdt, heeft dus aan te toonen, dat de invoering van dit ,,Inbegriff aller" niet tot strijdigheden aanleiding kan geven, wat hij evenmin doet, wat echter kan geschieden volgens de methode, waarop HILBERT [1]) de logische entiteit ,,Inbegriff aller" invoert, en haar niet-strijdigheid bewijst.

CANTOR gaat nu door en spreekt over zijn tweede getalklasse, alsof hij haar reëel voor oogen had; zijn manier van uitdrukken wijst er alles behalve op, dat hij alleen een logisch systeem op het oog heeft. Bij het bewijzen der machtigheidsstellingen, dat de tweede getalklasse een hoogere machtigheid heeft dan de eerste, en wel de naasthoogere, ziet hij in die machtigheidsgelijkheid resp. ongelijkheid wel degelijk een reëele mogelijkheid resp. onmogelijkheid van een eenduidige afbeelding van twee *bestaande* getalklassen op elkaar.

---

[1]) Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Congresses in Heidelberg, 1904 p. 183, 184.

Van ons standpunt zijn die redeneeringen met de tendens die CANTOR er in legt beschouwd, *zinloos*; het eenige, wat er, met eenige wijzigingen, van te maken is, komt neer op de volgende trivialiteit: Wordt de logische entiteit T (machtigheid der tweede getalklasse) ingevoerd, dan zou het axioma T $=$ A (A is de machtigheid van ω) in het logisch gebouw tot een contradictie voeren; evenzoo de invoering van een logische entiteit I, die de logische functie van een machtigheid zou moeten vervullen, en aan de axioma's A $<$ I $<$ T zou moeten voldoen. Dat is het logische, voor de wiskunde waardelooze resultaat dezer bewijzen van CANTOR. Wil men het in wiskundig licht bezien, dan kan men niet anders vinden dan de volgende uitspraak: *Onwaar* zijn de beide stellingen:

1⁰. De tweede getalklasse is denkbaar en aftelbaar.

2⁰. De tweede getalklasse is denkbaar, en er ligt een machtigheid tusschen de hare, en die der eerste getalklasse.

Maar dat deze twee stellingen onwaar zijn, wisten we al, want we wisten al dat het eerste deel van beide (de denkbaarheid der tweede getalklasse) onwaar is.

En als parallelle wiskundige inhoud der in de bewijzen van CANTOR bevatte *ontwikkelingen* blijft alleen het volgende over: ,,Er is zeker geen rij met machtigheid A van welgeordende verzamelingen zóó, dat ik nog niet een nieuwe, niet tot die rij behoorende welgeordende verzameling zou kunnen opbouwen. Maar het geheel der welgeordende verzamelingen, die ik in een of ander wiskundig systeem heb ingevoerd, is zeker aftelbaar." (We spreken in deze *wiskundige* stelling niet van „getallen der tweede getalklasse," omdat het woord *klasse* hier niet tot ons begrip spreken kan; we spreken ook niet uitdrukkelijk van de „*aftelbare* welgeordende verzamelingen," want we kunnen geen andere welgeordende verzamelingen, dan aftelbare, opbouwen.)

De aftelbaar onaffe verzamelingen.

Wil men toch van „het geheel der welgeordende getallen" spreken, en iets omtrent de machtigheid daarvan zeggen, dan gelukt dat in een eenigszins gewijzigde beteekenis, in verband met de laatstgenoemde wiskundige stelling, door de volgende uitspraak:

De machtigheid van het geheel der welgeordende getallen is aftelbaar onaf; we verstaan dan onder een *aftelbaar onaffe* verzameling een, waarvan niet anders dan een aftelbare groep welgedefinieerd is aan te geven, maar waar dan tevens dadelijk volgens een of ander vooraf gedefinieerd wiskundig proces uit elke zoodanige aftelbare groep nieuwe elementen zijn af te leiden, die gerekend worden eveneens tot de verzameling in kwestie te behooren. Maar streng wiskundig bestaat die verzameling als geheel niet; evenmin haar machtigheid; we kunnen deze woorden echter invoeren als willekeurige uitdrukkingswijzen voor een bekende bedoeling.

Als verdere voorbeelden van aftelbaar onaffe verzamelingen kunnen we noemen: Het geheel der definieerbare punten op het continuum; en a fortiori het geheel van alle mogelijke wiskundige systemen.

Bij het nooit klaar komend opbouwen van een aftelbaar onaffe verzameling kunnen we al voortbouwende naar opvolging afbeelden op de rij der welgeordende verzamelingen, die eveneens nooit uitgeput raakt; het begrip van gelijkmachtigheid uitbreidend, om het hier toepasbaar te houden, kunnen we zeggen:

Alle aftelbaar onaffe verzamelingen zijn gelijkmachtig [1]).

We onderscheiden dus dan voor verzamelingen naar volgorde van grootte de volgende machtigheden:

1°. de verschillende eindige.
2°. de aftelbaar oneindige.
3°. de aftelbaar oneindig onaffe.
4°. de continue.

Het continuumprobleem.

Het *continuumprobleem*, waarover voortdurend

---

[1]) Intusschen kan men in zekeren zin ook zeggen, dat aftelbaar onaffe en aftelbare verzamelingen gelijkmachtig zijn, daar elke aftelbaar onaffe verzameling is af te beelden op ω^2 (immers elk gedeelte, dat ik telkens weer toevoeg, als ik de aftelbaar onaffe verzameling opbouw, is af te beelden op ω, immers is aftelbaar; construeer ik zulk een afbeelding voor elk toegevoegd gedeelte, dan beeld ik de onaffe verzameling af op $\omega + \omega + \omega + \ldots = \omega^2$); alleen is deze afbeelding *steeds onaf*; het bewijs, dat een afbeelding eener aftelbaar onaffe verzameling op een aftelbare onmogelijk is, geldt dan ook alleen voor een *affe* afbeelding.

bijdragen verschijnen met het doel, de oplossing een stap verder te voeren, stelt den eisch aan te toonen, dat het continuum en het „geheel der getallen van de tweede getalklasse" gelijkmachtig zijn. Uit het voorgaande blijkt nu, dat men daarmee, aangezien nòch het geheel der getallen van de tweede getalklasse, nòch het continuum als systeem van geïndividualiseerde punten wiskundig bestaan, niets duidelijk gedachts kan zoeken, dan de volgende buiten de eigenlijke wiskunde staande logische stelling:

„*Men kan als logische entiteiten invoeren het geheel der getallen van de tweede getalklasse en het geheel der punten van het continuum zóó, dat de aanname dat daartusschen een correspondentie één aan één bestaat, waarbij geen enkel element van een van beide buiten die correspondentie valt, niet-contradictoor is.*"

Maar als men invoert de logische entiteit: *geheel der punten van het continuum*, en de continuum-intuitie heeft verlaten, dus *de punten van het continuum* moet definieeren, is dat niet anders mogelijk, dan als *de te definieeren wetten van voortschrijding voor benaderende duaalbreuken*. Nu, als zoodanig is dan het continuum aftelbaar onaf en ook de tweede getalklasse is aftelbaar onaf, de gezochte logische stelling is dus bewezen.

De verwante *wiskundige* kwestie (dat alle op het continuum te definieeren verzamelingen òf aftelbaar zijn, òf de machtigheid van het continuum bezitten) is in het eerste hoofdstuk (pag. 62—67) behandeld.

De paradox van BURALI-FORTI.

Volgen we CANTOR verder, dan zien we hoe hij als eerste ordegetal, dat op alle ordegetallen der tweede klasse volgt, Ω invoert, en dat noemt: eerste ordegetal der derde getalklasse. *Maar Ω bestaat niet wiskundig*, en het logische bewijs voor de niet-strijdigheid van het nieuw ingevoerde ding, hoewel waarschijnlijk licht te voeren, heeft geen belang.

CANTOR's volgelingen zijn onbeschroomd nog verder doorgegaan, en hebben zoo evenveel getalklassen en machtigheden geschapen, als ze ordegetallen zelf konden scheppen, zich nòch om wiskundige denkbaarheid, nòch om logische niet-strijdigheid bekommerend. Ten slotte voerden ze in *het geheel van alle ordegetallen*, maar bemerkten nu een logische strijdigheid, die intusschen werd gesignaleerd als wiskundige paradox en waarvan een *wiskundige* (we verstaan onder wiskundig steeds: in het gebied der intuïtieve denkbaarheden liggend) oplossing met ijver werd gezocht, zonder dat men er erg in had, hoe hier het gebied der wiskunde reeds lang verlaten was.

Het is de paradox van BURALI-FORTI: („Una questione sui numeri transfiniti," Rendiconti del circolo Matematico di Palermo 1897) „*Stellen we het geheel der welgeordende typen naar volgorde van grootte gerangschikt, O, dan is O zelf een welge-*

ordend type, en daar alle welgeordende typen optreden als een deelverzameling van O, moet O het grootste welgeordende type zijn. Maar als O een welgeordend type is, is O + 1 er ook een, en O + 1 is > O; O is dus niet het grootste ordegetal."

Ten eerste zou de paradox licht te verhelpen zijn, door aan O niet opnieuw de eigenschap toe te kennen, (aan vroeger geschapen welgeordende typen toch ook alleen bij willekeurige axioma's toegekend), dat O + 1 weer een welgeordend type is.

Maar ten tweede mag men zoo iets niet paradox vinden: waar men logische gebouwen schept, zonder een wiskunde, die ze als taalbegeleiding accompagneeren, is van elk gebouw a priori even goed mogelijk, dat het strijdig, als niet-strijdig is.

De wel-ordening eener willekeurige verzameling.

Een tweede beroemd probleem uit de leer der transfinite getallen is: ,,*Te bewijzen, dat elke verzameling kan worden welgeordend.*" CANTOR sprak deze stelling (,,Grundlagen" pag. 6) uit als ,,Denkgesetz." waarvoor natuurlijk niet de minste reden is, zoodat zijn volgelingen dan ook trachtten haar te bewijzen. In Mathem. Ann. 59 geeft ZERMELO zulk een bewijs op grond van het volgend axioma:

,,Jeder Teilmenge M' einer Menge M kann man ein beliebiges Element m'_1 zugeordnet denken, das in M' selbst vorkommt und das ,,ausgezeichnete" Element von M' genannt werden möge."

BOREL merkt dan in Mathem. Ann. 60 terecht op, dat wie zoo iets als axioma invoert, even goed de stelling zelf als axioma nemen kan.

Nu weten we, dat behalve de aftelbare verzamelingen, waarvoor de stelling *zeker geldt*, nog alleen het continuum bestaat, waarvoor de stelling *zeker niet geldt*, vooreerst omdat men het grootste deel der elementen van het continuum als onbekend moet beschouwen, ze dus allerminst individueel kan ordenen, en dan, omdat alle welgeordende verzamelingen aftelbaar zijn. Ook deze kwestie blijkt dus illusoor.

Het theorema van BERNSTEIN.

Als hoofdstelling van de leer der transfinite getallen wordt gewoonlijk genoemd het theorema van BERNSTEIN-SCHRÖDER:

,,*Zijn* A *en* B *twee verzamelingen en is* A *een-eenduidig af te beelden op een deel van* B *en evenzoo* B *op een deel van* A, *dan ook* A *op* B,"

of wat op hetzelfde neerkomt, (we voeren in het symbool ,,$a \backsim b$", gelezen: a *aequivalent met* b, om uit te drukken dat a en b een-eenduidig op elkaar afbeeldbaar zijn):

Als

$$A = A_1 + B + C$$
$$A \backsim A_1$$

dan ook

$$A \backsim A_1 + B.$$

(Gesteld n.l. dat de stelling in de laatste formuleering bewezen is en gegeven:

$$A = H_1 + C \qquad H = A_1 + D$$
$$H \sim H_1 \qquad A \sim A_1$$

hebben we eveneens

$$H_1 = A_{11} + D_1$$

waarin

$$A_{11} \sim A_1 \sim A$$
$$D_1 \sim D.$$

En nu volgt uit

$$A = A_{11} + D_1 + C$$

volgens de stelling in de tweede formuleering

$$A \sim A_{11} + D_1 \sim H.)$$

Het bewijs voor de tweede formuleering wordt gegeven als volgt: Passen we de operatie, die A verdeelt in een deel, met het geheel aequivalent, en nog twee andere deelen, weer toe op A_1, zoodat

$$A_1 = A_2 + B_1 + C_1\,,$$

vervolgens op A_2 enz., dan hebben we ten slotte:

$$A = B + B_1 + B_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,. +$$
$$+ C + C_1 + C_2 \,.\,.\,.\,. + D,$$

als D de verzameling is, die aan alle opvolgende A's gemeenschappelijk is. Maar duidelijk is

$$C + C_1 + C_2 + \ldots \sim C_1 + C_2 \ldots$$

Dus

$$A \sim B + B_1 + B_2 \ldots + C_1 + C_2 + \ldots + D \sim A_1 + B;$$

en men krijgt de gezochte afbeelding, door C af te beelden op C_1; C_1 op C_2; C_2 op C_3; enz.

Voor de alleen als niet-contradictore logische entiteiten bestaande verzamelingen bewijst dit theorema, dat als

$$A = A_1 + B + C,$$

en er is een een-eenduidige afbeelding van A op A_1 gegeven, dat het dan logisch niet-strijdig is, aan te nemen dat ook A en $A_1 + B$ aequivalent zijn. Wiskundig geeft het ook een middel aan, om een een-eenduidige afbeelding van A op $A_1 + B$ werkelijk uit te voeren, maar alleen voor de *gedefinieerde*, de *bekende* elementen van A, dat is dus voor een aftelbaar onaf gedeelte. Voor de onbekende elementen leert het zulk een afbeelding niet. Zoo b.v. bij een A, die een continuum is, zullen we van een willekeurig element, dat dus alleen bij steeds onaffe benadering bekend is, nooit weten, of het al of niet tot een der C's hoort, en zoo ja, tot welke, dus kunnen we van de benadering van de afbeelding niets zeggen.

Wiskundigen zin heeft dus de stelling, zooals ze boven is bewezen, alleen voor eindige, aftelbare en aftelbaar onaffe verzamelingen. Maar daarvoor is haar geldigheid direct duidelijk.

Het theorema is zooals we van vroeger (zie Hoofdstuk I pag. 62—67) weten, ook geldig voor continua; maar het zooeven gegeven bewijs heeft voor dat geval geen waarde.

Nu het theorema zonder beteekenis blijkt te zijn, kunnen we verwachten, dat de vele toepassingen, die de Cantorianen er van maken, even inhoudsloos zijn. Onderzoeken we als voorbeeld een verhandeling van BERNSTEIN in Mathem. Annalen 61. Om het continuumprobleem dichter bij zijn oplossing te voeren, leidt hij daar naast de bekende stelling:

De machtigheid van alle welgeordende typen met machtigheid A *(eerste machtigheid) is* F *(tweede machtigheid)*

een analoge af:

De machtigheid van alle ordetypen met machtigheid A *is* C *(machtigheid van het continuum).*

Deze stelling grondt hij met behulp van zijn aequivalentietheorema op de beide hulpstellingen:

a) *Het continuum is aequivalent met een deelverzameling uit het geheel van alle ordetypen met machtigheid* A*: zeggen we uit de verzameling* O_A.

b) *De verzameling* O_A *is aequivalent met een deel van het continuum.*

Het eerste bewijst hij door aan een oneindige duaalbreuk te laten beantwoorden het ordetype, dat ontstaat door tusschen elke twee cijfers achter de komma een ordetype $\omega^* + \omega$ in te voeren, en vervolgens alle cijfers 0 te schrappen, en voor alle cijfers 1 een enkel element te zetten.

Het bewijs dat hij voor de tweede hulpstelling geeft, is onjuist; zooals hij daar de ordetypen met machtigheid A opbouwt (n.l. eerst één neerzetten, dan de tweede, waarvoor 2 keuzen van plaats zijn, dan de derde, waarvoor er 3 zijn enz.), krijgt hij nooit meer, dan een bijzondere groep van typen, waarvan het aantal aftelbaar is, n.l. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots$ Want het àf denken van een aantal A van factoren, dat voor de duaalbreuken van het continuum gebeurt, kan daar alleen geschieden uithoofde van de continuum*intuïtie*; een analoge intuïtieve mogelijkheid bestaat *hier* niet.

Hier kunnen we dus alleen aan díe ordetypen denken, waarvoor een *wet* van voortschrijding is gegeven, maar dan wordt de verzameling van ***alle*** ordetypen gedacht als aftelbaar onaffe verzameling van voortschrijdingswetten. Die gegeven afbeelding is er dus eene van O_A als wettenverzameling op een deel van het continuum.

Keeren we terug tot de eerste hulpstelling, dan kunnen we haar op twee manieren lezen. Of:

,,*Alle* punten van het continuum zijn aequivalent met een deel van *alle* elementen uit O_A."

Of:

,,*Alle* benaderingswetten voor punten van het continuum zijn aequivalent met een deel van ***alle*** benaderingswetten voor elementen uit O_A."

Alleen de laatste lezing is te combineeren met de tweede hulpstelling, voor zoover ze door BERNSTEIN bewezen mag worden geacht. Maar wat blijft dan nu van het resultaat? Dat ***alle*** voortschrijdingswetten in O_A aequivalent zijn met ***alle*** benaderingswetten in het continuum, wat vanzelf spreekt, daar beide verzamelingen aftelbaar onaf zijn.

De transfinite machtsverheffing.

Behalve de rij der welgeordende klassen wordt in de leer der transfinite verzamelingen nog een ander middel gebruikt, om tot steeds hoogere machtigheden op te klimmen, berustend op machtsverheffing tot een transfinite exponent.

Men verstaat onder M^N de *beleggingsverzameling* van N met M d.w.z. de verzameling, bestaande uit alle manieren, om met elk element van N een element van M te laten correspondeeren.

Men bewijst dan dat voor $M > 1$,

$$M^N > N.$$

(vgl. b.v. SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. Bd VIII Heft 2 pag. 26; daar wordt bewezen dat $N^N > N$, maar het bewijs laat zich op de hier gegeven stelling onveranderd veralgemeenen).

De eerste op deze wijze afgeleide hoogere machtigheid is

$$C = M^A$$

waar M eindig of aftelbaar oneindig, en A de aftelbaar oneindige machtigheid; deze beleggingsverzameling kunnen we denken, omdat we het continuum kunnen denken.

Maar reeds de volgende beleggingsverzameling der reeks:

$$F = M^C$$

kunnen we niet meer denken, dus de stelling dat F (dus b.v. de verzameling van alle functies van een enkele reëele veranderlijke) $>$ C is, heeft geen andere wiskundige beteekenis meer, dan de volgende uitspraak:

„Met elk verschillend element van C is eenduidig een verschillende beleggingsgroep in correspondentie te brengen; — terwijl het *niet* waar is, dat F denkbaar en afbeeldbaar op C zou zijn."

Wat we natuurlijk ook zonder het bewijs voor de stelling al wisten, omdat we wisten, dat F niet denkbaar is.

Ad. 3°.

Propositioneele functies en klassen.

De klassieke theoretische logica was ontoereikend, om van de wiskunde rekenschap te geven. Haar zoodanig uit te breiden, dat ze dat wel zou kunnen was het doel van de logistici. Nu hebben we gezien, dat de klassieke logica bestudeert de taalbegeleiding [1]) der logische redeneeringen, d.w.z. der redeneeringen in *relaties van geheel en deel* voor willekeurige wiskundig opgebouwde systemen; en we weten uit het feit, dat we die wiskundige systemen *zien*, dat *daar* de volgens de klassieke logica elkaar

[1]) Zoo goed als alle wiskundige taal is ook deze taal zonder moeite te condenseeren tot symbolen. Men vergelijke voor zulk een symbolische taal („Algebra der Logica" genoemd) b. v. A. N. WHITEHEAD, „A Treatise on Universal Algebra", Cambridge University Press 1898, pag. 35 sqq.

opvolgende volzinnen, die immers wiskundige bouwhandelingen begeleiden, nooit contradicties zullen vertoonen. Zoo voeren we daar veilig in de *logische som*, het *logisch product*, en de *complementairverzameling* d.w.z. de verzameling die als praedicaat heeft de ontkenning van het praedicaat der gegeven verzameling; en passen er veilig toe de *principes van identiteit, syllogisme, distributie* [1]), *contradictie*, en *tertium non datur*.

De logistici gaan omgekeerd van deze principes uit, en leggen als operatiegebied, waarbinnen de met de woorden of symbolen bedoelde relaties moeten bestaan, ten grondslag niet een of ander wiskundig systeem, maar het hersenschimmige ,,alles" — dat, zooals we boven (pag. 138 sqq, noot) zagen, ook DEDEKIND ten onrechte als uitgangspunt wilde nemen — waaruit ze verschillende *klassen* definieeren door wat ze noemen *propositioneele functies*.

Onder een propositioneele functie verstaan ze een *bewering* omtrent x, of omtrent x en y, in 't algemeen omtrent een zeker aantal variabelen, waarin men voor die variabelen *alle* substituties moet denken; zij rekenen dan, dat door die bewering een *klasse* bepaald is, bestaande uit *alle* dingen (of voor meer veranderlijken: groepen van dingen), die, gesubstitueerd, de bewering *waar* maken.

Ze schrijven $x \ni \phi x$ voor *alle dingen*, *waarvoor de*

[1]) d. w. z. $(a + b)\ c = ac + bc$, waarin de logische sommen en producten bedoeld zijn.

bewering ϕx waar is; het reciproke teeken $\ni$ wordt ingevoerd zóó, dat $k \varepsilon (x \ni \phi x) \equiv \phi k$, m.a.w. voor het geval, dat de propositioneele functie een klasse a bepaalt, beduidt $k \varepsilon a$: *k hoort tot de klasse a.*

PEANO had het het teeken ε primair genoemd; RUSSELL gaat liever uit van $\ni$, omdat hij het niet zeker vindt, dat iedere propositioneele functie een klasse bepaalt.

Daar heeft hij gelijk aan; hij werkt echter met zijn propositioneele functies als met de praedicaten der gewone logica, doet dus toch alsof de functie wèl altijd een klasse bepaalt.

Maar nooit kan men een woordsysteem van beweringen en propositioneele functies een prioriteit in het intellect geven ten opzichte der wiskunde; want geen beweringen omtrent de buitenwereld worden met vol verstand gezegd, dan die een op de buitenwereld geprojecteerd wiskundig systeem vooronderstellen. Hoe men zich draait of wendt, de grond van de wiskunde blijft de wiskunde en die groeit over haar geheele gebied vrij en intuitief.

Terwijl de logistici, als vrijen oorsprong van logica en wiskunde de propositioneele functies beschouwend, als zoodanig allerlei door (foutieve) analogie met wiskundige eigenschappen gevormde volzinnen uitspreken en daarvoor postuleeren dat ze klassen bepalen, en dat over die klassen volgens de wetten der klassieke logica kan worden geredeneerd.

Dat zij dus, evenals de Cantorianen, *op contradicties* **De contradictie** *stooten* [1]), behoeft niet te verwonderen, en hun eigen verwondering kan alleen zijn te wijten aan begripsverwarring.

RUSSELL („The Principles of Mathematics", Part I, Chap. X) bespreekt het uitvoerigst de volgende contradictie:

„Er zijn klassen, die zelf als eenheid beschouwd tot hun elementen behooren, b.v. de klasse der klassen, de klasse van alle dingen, die niet leven, en meer. Ik beschouw nu de klasse van alle klassen, die de zooeven genoemde eigenschap, tot hun elementen te behooren, *niet* bezitten; bezit die klasse dan de genoemde eigenschap? *Zoo ja*, dan hoort ze tot haar elementen, is dus één van de klassen, die de eigenschap niet bezitten, bezit dus de eigenschap niet. En vice versa: *zoo neen*, dan staat ze daarin met haar elementen gelijk, behoort dus tot haar elementen, bezit dus de eigenschap wel."

RUSSELL suggereert eenige middelen om aan de contradictie te ontkomen maar verwerpt ze dan toch weer en gelooft dat een diepgaande hervorming der logica tot de oplossing noodig zal zijn. Het meest geneigd voelt hij zich tot de opvatting, dat

[1]) In zulk een contradictoor systeem zijn natuurlijk bijna geen redeneeringen meer gerechtvaardigd, daar het voornaamste redeneermiddel, het principe van contradictie, niet mag worden toegepast.

een theorie moet worden gezocht, die niet veroorlooft, alle klassen, zelf als eenheid beschouwd, tot logische subjecten te maken. ,,Misschien ook", zegt hij, ,,moet de notie *alle dingen* worden verworpen, maar *elk willekeurig ding* moet in elk geval behouden blijven; immers er zijn waarheden, n.l. de logische principes, die voor *elk willekeurig ding* gelden."

Dat is intusschen juist niet waar: logische principes gelden alleen voor woorden met wiskundige beteekenis. En juist omdat RUSSELL's logica niets is dan een woordsysteem, zonder een verondersteld wiskundig systeem, waarop het betrekking heeft, is er geen reden, dat er geen contradicties zouden komen.

Overigens ziet ook het gezond verstand direct, waar de redeneering in kwestie haar leven verliest, dus niet meer betrouwbaar is, en dat zelfs zonder dat de illusie van het hersenschimmige ,,alles" behoeft te worden weggenomen. Immers gesteld, ik kende een ,,alles" met een ,,geheel" van tusschen de dingen bestaande relaties en een stelsel van voor de dingen mogelijke proposities. Dan kan ik voor een propositioneele functie voor *elk willekeurig ding* op grond van zijn gegeven relaties uitmaken, of het wel of niet de functie waar maakt, dus in welke van de beide door de functie bepaalde klassen het dient te worden geplaatst.

Maar wil ik voor het ding, dat de kwestieuze klasse is, onderzoeken, of het de gestelde propositioneele functie waar maakt, dan merk ik, dat de uitvoering van het onderzoek het reeds afgeloopen zijn er van vereischt. Het onderzoek *kan dus niet worden uitgevoerd*, en zoo is de contradictie opgelost. We hebben hier een propositioneele functie, die twee complementaire klassen bepaalt, die niet aan het principe van tertium non datur voldoen; wat niet behoeft te verwonderen, want de logische principes bestaan slechts voor de taal der wiskunde; voor andere taalsystemen, hoe zeer ook aan de wiskundige verwant, behoeven ze dus niet te gelden.

In anderen vorm geeft RUSSELL de contradictie pag. 80 en pag. 102. Daar zegt hij:

,,Er zijn praedicaten, die van hun eigen uitdrukking door woorden gelden; en die dat niet doen. Het eenvoudigste voorbeeld van de eerste soort is wel: *een praedicaat zijn*. Maar geldt nu de eigenschap voor: *niet gelden voor zijn eigen uitdrukking door woorden?* Zoo ja, dan neen; zoo neen, dan ja."

Hij wil dit oplossen door te zeggen, dat *niet gelden voor zijn eigen uitdrukking door woorden* geen praedicaat is, wat natuurlijk niemand hem zal toegeven.

En evenmin wat hij pag. 88 voorstelt, om te ontkomen aan de contradictie in een derden vorm, die voortvloeit uit de verdeeling van propositioneele functies in zulke als wel en als niet voor zich zelf gelden, dat n.l. een propositioneele functie niet op zich zelf zou kunnen worden gedacht.

Voor de beide laatste contradicties geldt overigens dezelfde oplossing als voor de eerste.

De relatielogica.

Tot zoover de rol van de *klassieke logica*; de logistiek vult haar dan verder aan met de zoogenaamde *relatielogica*, en de conclusie luidt ten slotte, dat *zuivere wiskunde* niets mag zijn dan een systeem, opgebouwd uit eenige logische *grondbegrippen*, volgens eenige logische *grondprincipes* (RUSSELL telt er van de eerste 9 en van de laatste 20); dat zij alleen op deze wijze een vasten grond en een zekeren voortgang behoudt; dat er misschien nog wel een intuïtieve wiskunde ook kan zijn, maar dat die dan uitsluitend bestaat in de toepassing der genoemde zuivere wiskunde op materieele dingen. (vgl. b.v. COUTURAT, „Les Principes des Mathématiques", Introduction, pag. 4.)

Maar zuivere wiskunde is, zooals we weten, nòch het één nòch het ander.

De relatielogica dan, aanvangende bij het woord *volgen op*, dat afbeeldt de meest elementaire daad van wiskundig bouwen, zooals ze direct uit de oer-intuïtie voortkomt, bestudeert de taal der wiskunde in het algemeen, zooals de klassieke logica die van de speciale wiskunde van geheel en deel.

Dat in de taal, die de wiskunde begeleidt, de opvolging der woorden aan wetten gehoorzaamt, spreekt van zelf; maar dié wetten als het leidende bij den opbouw der wiskunde te beschouwen, daarin ligt de fout.

Rekenkunde van PEANO.

Gaan we ter toelichting in op de theorie der geheele positieve getallen m.a.w. de gewone *rekenkunde*, zooals ze door de logistici gegeven wordt.

PEANO („Sul concetto di numero", Rivista di Matematica, t. I; vgl. COUTURAT, „Les Principes des Mathématiques", pag. 54) voert hier na de klassieke logica in *drie* nieuwe grondbegrippen: o, *N* (eindig ordinaalgetal) en *seq* (opvolger), en *vijf* daarvoor geldende grondprincipes:

1°. o *is een N*.

2°. *er is geen N, waarvan* o *de seq. is*.

3°. *de seq. van elke N is een N.* [1])

4°. *twee N's zijn gelijk, als hun seq.'s gelijk zijn*.

5°. *een klasse, die* o *bevat, en die van elke N, die ze bevat, ook de seq bevat, bevat alle N's*.

Maar leidt PEANO hieruit de rekenkunde af, dan bouwt hij weer op een logisch systeem, dat nòch door een bestaansbewijs, nòch door een bewijs van niet-strijdigheid wordt gesteund.

Het is dus te veroordeelen op dezelfde gronden als het systeem van DEDEKIND. (vgl. pag. 138 sqq, noot.)

Rekenkunde van RUSSELL.

RUSSELL („The Principles of Mathematics" p. 127) verbetert de methode van PEANO aanmerkelijk, door te beginnen, *cardinaalgetallen* te definieeren als klassen van aequivalente klassen, en vervolgens te zeggen:

---

[1]) Waaraan dient te worden toegevoegd (POINCARÉ, Revue de Métaphysique et de Morale 1905 p. 833): elk getal heeft een opvolger, *elke N heeft een seq.*

1°. o is de klasse van klassen, die als eenig lid heeft de nulklasse — de nulklasse zelf gedefinieerd (l.c. pag. 75) als klasse van alle klasse-concepten, die geen leden voor hun klasse geven; en daarom gecenseerd (of als een principe gepostuleerd?) te bestaan —; de klasse o bestaat dus.

2°. 1 is de klasse van *klassen met leden*, zóó, dat als x tot de klasse behoort, de klasse verminderd met x, geen leden heeft.

De klasse 1 bestaat, want heeft reeds een lid dat er toe behoort, n.l. de zooeven gedefinieerde klasse o.

3°. n + 1 is de klasse van klassen, aequivalent met de klasse, verkregen door bij een klasse, hoorend tot de klasse n, een element te voegen. De klasse n + 1 bestaat dus, als n bestaat.

4°. *Eindige getallen* zijn die cardinaalgetallen, welke behooren tot elke klasse s, waartoe o behoort, en verder n + 1, als n er toe behoort.

De zoo gedefinieerde eindige getallen voldoen aan alle postulaten van PEANO, zonder nieuwe grondbegrippen en grondprincipes in te voeren, en kunnen dus volgens RUSSELL als bestaansbewijs dienen (als we n + 1 als de *seq*. van n beschouwen) en COUTURAT (antwoord aan POINCARÉ, Revue de Métaphysique et de Morale 1906, n° 2) legt sterk den nadruk op dit bestaansbewijs, dat de intuïtie van ω of van de volledige inductie niet noodig zou hebben, zoodat het logische systeem hier vrij van die intuïtie zou zijn opgebouwd, en zonder behulp van volledige inductie niet-contradictoor zou zijn gebleken.

Maar we hebben boven gemerkt, dat het klasse-concept door definitie *wèl contradictoor* is, dat dus nooit de niet-strijdigheid van een logisch systeem mag worden gebaseerd op haar parallel loopen met pseudo-wiskundige operaties in klassen, die alleen door definitie bestaan.

RUSSELL schroomt intusschen niet, de volledige inductie, die hij niet als axioma wil uitspreken, tòch met de daad toe te passen. Hij bewijst n. l. dat n + 1 het cardinaalgetal van de klasse der getallen 0, 1, 2.... n is en dat als volgt: 1 is het cardinaalgetal van de klasse 0; 2 (gedefinieerd als 1 + 1) dat van de klasse 0, 1; 3 (gedefinieerd als 2 + 1) dat van de klasse 0, 1, 2; *enzoovoort.*

Evenzoo past hij de volledige inductie toe om te bewijzen, dat een eindig getal niet met een van zijn deelen aequivalent kan zijn (l.c. pag. 121, 123).

Oneindige getallen. De gedefinieerde eindige getallen geven meteen de definitie van het cardinaalgetal A der klasse, die ze alle bevat (de eerste transfinite machtigheid), van welk cardinaalgetal RUSSELL zonder moeite bewijst, dat het zelf geen eindig getal is, omdat het n.l. wèl met het geheel aequivalente deelen bezit; vervolgens toont hij aan, dat elke oneindige klasse deelen bezit met cardinaalgetal A. (l.c. pag. 122, 123).

Maar de wijze waarop de logistici de verdere wiskunde ontwikkelen heeft, behalve dat de taal zooveel mogelijk *in symbolische teekens wordt gecondenseerd*, geen bijzonder karakter meer. Ze smelt samen met de methoden der Cantorianen en die der axiomatici.

Conclusies omtrent de logistiek.

De conclusies omtrent de logistiek moeten luiden: dat ze niets kan leeren omtrent de grondslagen der wiskunde, omdat ze onherroepelijk van de wiskunde gescheiden blijft; dat ze integendeel, om een bestaan in zichzelf te handhaven, d.w.z. zich voor contradicties te bewaren, al haar eigen speciale principes heeft te verwerpen en zich heeft te beperken, een getrouwe, machinale, stenographische copie te zijn van de *taal der wiskunde*, die *zelf geen wiskunde is*, maar alleen een gebrekkig hulpmiddel voor de menschen, om wiskunde aan elkaar mee te deelen, en hun geheugen voor wiskunde te ondersteunen.

Ad 4°.

Niet-strijdigheidsbewijzen van teekensystemen, onafhankelijk van hun beteekenis.

De zuiverste consequentie van de hier bestreden methoden, waaraan tegelijk het eenvoudigst en helderst de ontoereikendheid er van blijkt, is getrokken door HILBERT (Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Congresses in Heidelberg 1904, pag. 174). In „Ueber den Zahlbegriff" (Jahresber. der Deutschen Math. Ver. VIII) had hij de axioma's van de hoofdbewerkingen op het meetbaar continuum geformuleerd en het probleem gesteld, onafhankelijk van eenige wiskundige intuïtie, de niet-strijdigheid van die axioma's te bewijzen (vgl. ook „Mathematische

Probleme", Problem n° 2, Gött. Nachr. 1900, pag. 264.)

Het spreekt van zelf, dat dit alleen te bereiken is door de teekens, die de axioma's uitdrukken, zelf als een wiskundig systeem te beschouwen, de principes van de logica volgens de algebra der logica te formuleeren als regels om dat systeem verder uit te bouwen, en dan wiskundig te bewijzen, dat die uit de algebra der logica afgelezen bouwregels nooit tegelijk een vergelijking en haar ontkenning zullen kunnen afleiden. Het geheel der uit de axiomatische grondvergelijkingen af te leiden vergelijkingen vormt natuurlijk een aftelbaar oneindig systeem. [1])

HILBERT schetst l.c. de wijze van uitvoering [2]) dezer niet-strijdigheidsbewijzen in groote trekken, niet alleen voor het zooeven genoemde stel axioma's der hoofdbewerkingen, maar ook voor dat van verschillende andere deelen der wiskunde. Zoo voert hij b.v. om de grondslagen der Mengenlehre te leggen pag. 182—184 het klassesymbool in,

---

[1]) Immers het geheel van alle combinaties van een eindig aantal der ingevoerde teekens (waartoe ook het teeken = behoort, en die eindig in aantal zijn voor elke wiskundige theorie) blijft aftelbaar, a fortiori dus het geheel van die bijzondere der teekencombinaties, die als *ware* vergelijkingen zijn te lezen.

[2]) Een enkele maal vergist hij zich, waar hij n.l. pag. 181 een niet-strijdigheid door een *voorbeeld* bewijst, wat van het door hem ingenomen standpunt natuurlijk ongeoorloofd is.

maar alleen in relatie tot reeds ingevoerde symbolen, waardoor hij beveiligd is voor de contradicties van RUSSELL, die klassen invoerde, als door een definitie omgrepen deelen van het *al*.

Nu heeft HILBERT evenwel, zooals hij in zijn inleiding uitdrukkelijk zegt, de adspiratie, om van niets af te beginnen en de wiskunde en de logica zich gezamenlijk te laten ontwikkelen. Maar bij de zooeven genoemde redeneeringen over niet-strijdigheid van axioma's, gebruikt hij steeds intuïtief termen als *een*, *twee, drie, eenige* (daarbij *een zeker eindig getal* bedoelend) en past verder intuïtief alle wetten der logica en ook de volledige inductie toe.

De poging tot bevrijding dier bewijzen van de intuïtie.

Om zich van deze belasting met intuïtieve elementen te ontdoen, gaat hij ten slotte (l.c. pag. 184, V) in eens zijn eigen te voren geschreven woorden bekijken, ziet die complex van woorden en redeneeringen als een wiskundig gebouw aan, dat ook weer volgens regels zich van het begin naar het einde ontwikkelt, en zegt:

,,De wetten volgens welke ik dat taalgebouw zich zie ontwikkelen, heb ik zooeven bewezen, dat nietstrijdig, dus juist zijn. M.a.w. de daar in die taal van mij gehouden redeneeringen bewijzen meteen het intuïtieve in hun eigen daad als gerechtvaardigd."

Dat is fout en om de volgende reden:

Vooreerst de grond, waarop hij steunt, *blijft* de intuïtie van zooeven; immers hij weet alleen: *als* de intuïtie van zooeven juist is, dan volgt daaruit, dat de woorden, die die intuïtie begeleiden, zich ontwikkelen volgens een niet-strijdig logisch systeem, wat geen nieuws is; wie zal een wiskundige stelling bewijzen, door op grond van die stelling zelf haar nog eens af te leiden, en dan te zeggen: „nu is meteen het onderstelde gerechtvaardigd"?

Maar verder: De niet-strijdigheid van het taalsysteem, op grond der wiskundige intuïtie afgeleid, bewijst niet omgekeerd de wiskundige intuïtie, die ze begeleidt, zooals we boven bij de behandeling der axiomatische grondslagen hebben aangetoond. (vgl. ook POINCARÉ, Revue de Métaphysique et de Morale 1905, pag. 834.)

De gewraakte methode overtreft die der logistici doordat zij de ongeoorloofde sprong uit het oude wiskundige gebied door de taaldaad naar een nieuw meermalen achtereen uitvoert en dan doordat zij niet, zooals de logistici, voor twee zulke wiskundige gebieden, die alleen via de taalklanken verband houden, dat intuïtieve verband handhaaft, dus ze als ongelijksoortig blijft behandelen, maar ze gaat verwarren en op één lijn stellen. De logistici voeren den sprong *éénmaal* uit, en bewegen zich dan wisselend op beide gebieden, ze beide in hun beteekenis handhavend; HILBERT doet den sprong, waar hij hem doet, gedecideerd en voor goed, *blijft* dus op het tweede gebied, gebruikt het eerste nog alleen, om het beteekenis in het tweede te geven; doet hem vervolgens een tweede maal weer voor goed, *blijft* dus op het zoo geschapen derde gebied, en gebruikt daar het eerste en het tweede nog alleen, om ze beteekenis in het derde te geven.

Ter toelichting sommen we in genetische volgorde op de hier te onderscheiden verschillende phasen:

Opsomming der bij de logische behandeling der wiskunde verwarde phasen.

1. Het zuivere bouwen van intuïtieve wiskundige systemen, die zoo ze worden toegepast, in het leven worden veruiterlijkt, door de wereld wiskundig te zien.

2. De taalparallel der wiskunde: het wiskundig spreken of schrijven.

3. Het wiskundig zien van de taal: opgemerkt worden logische taalgebouwen, opgetrokken volgens principes uit de gewone logica of uit de uitbreiding daarvan met relatielogica, de logistiek, maar de elementen dier taalgebouwen zijn taalbegeleidingen van wiskundige gebouwen of relaties.

4. Het niet meer denken aan een beteekenis van de elementen der zooeven genoemde logische figuren; en het nabouwen van die figuren door een nieuw wiskundig systeem der *tweede* orde, voorloopig zonder taal, die het bouwen begeleidt; het is het systeem van de logistici, dat bij de minste vrije generalizeerende uitbreiding zeer goed vatbaar wordt voor de figuur der contradictie, tenzij daartegen de voorzorgsmaatregelen van HILBERT worden genomen, en het zijn deze voorzorgsmaatregelen, die den eigenlijken inhoud der verhandeling van HILBERT uitmaken.

5. De taal der logistiek, d.w.z. de woorden, die het logistisch bouwen begeleiden en motiveeren; PEANO zorgt wel zooveel mogelijk om ook de begeleidende gedachten aan symbolische teekens te binden; niettemin blijft dan het systeem te splitsen in het eigenlijke gebouw, en de principes volgens welke het gebouw zich ontwikkelt; al worden die principes eveneens symbolisch geformuleerd, zulke formuleeringen moeten worden beschouwd als heterogeen ten opzichte van de verdere formules, waarop die eerste worden toegepast niet als formuleeringen, maar als intuïtieve daden, waarvan de toegevoegde formuleeringen slechts de taalbegeleidingen zijn.

HILBERT heeft die intuïtieve daden, dus ook de begeleidende taal meer noodig dan PEANO, omdat hij de niet-strijdigheid van zijn logistisch systeem *in zichzelf* wil bewijzen, iets waarom PEANO zich niet bekommert.

Tot de vijfde phase behoort de woordinhoud der verhandeling van HILBERT tot aan pag. 184, V.

6. Het wiskundig zien van die taal; dezen stap uitdrukkelijk te doen, is iets essentieels bij HILBERT in onderscheid van PEANO en RUSSELL; hij merkt, op zijn eigen woorden terugziende, logische figuren op, die zich ontwikkelen volgens logische en arithmetische principes, ook o.a. het theorema der volledige inductie; de elementen dezer logische figuren, zooals de woorden *mehrere*, *zwei*, *Fortsetzung*, *an*

Stelle von, *beliebig*, enz. zijn taalbegeleidingen van bouwhandelingen in het zooeven genoemde wiskundig systeem der tweede orde.

7. Het niet meer denken aan een beteekenis van de elementen der zooeven genoemde logische figuren, en het nabouwen er van door een nieuw wiskundig systeem der derde orde, voorloopig zonder begeleidende taal.

Den overgang van **6** naar **7** volvoert HILBERT *in zijn gedachten* l.c. pag. 184 en 185 onder V, eerste alinea.

8. De taalbegeleiding van het wiskundig systeem der derde orde, die den opbouw van dat systeem motiveert, en de niet-strijdigheid er van aantoont.

Deze phase is, in de *woorden* der zooeven genoemde alinea l.c. pag. 184, 185, de laatste die bij HILBERT wordt aangetroffen.

Men zou nog verder door kunnen gaan, maar de wiskundige systemen van nog hooger orde zouden alle ongeveer elkaars copieën zijn; het heeft dus geen zin den gang verder voort te zetten.

Intusschen de vorige phasen, vanaf de derde zijn evenmin van wiskundig belang. Wiskunde behoort slechts in de eerste thuis; van de tweede kan zij zich in het practische leven niet vrijhouden, maar die phase blijft een niet-wiskundige onbewuste daad, al of niet vervolgens door *toegepaste wiskunde* geleid en gesteund, maar nooit een prioriteit ten opzichte der intuïtieve wiskunde verkrijgend.

De kritiek van POINCARÉ.

De logistiek en het cantorisme zijn reeds scherp gekritizeerd door POINCARÉ (Revue de Métaphysique et de Morale 1905, n° 6; 1906, n° 1, 3); hij laakt voornamelijk in de logistiek de petitio principii en in het cantorisme de aanname van het actueel oneindige. Zoo raakt hij intusschen niet het hart van de kwestie, dat dieper zit, n.l. in de verwarring van de daad van het bouwen der wiskunde en de taal der wiskunde.

De petitio principii is in zekeren zin geoorloofd, want waar die in de daad van den opbouw van het taalsysteem wordt uitgevoerd, raakt zij aan de volkomenheid van dat taalgebouw als zoodanig niet; een ongeoorloofde petitio principii in de wiskunde zouden we alleen hebben, als op grond van een primaire wiskundige intuïtie later in verdere phasen van het wiskundig bouwen diezelfde intuïtie weer voor den dag zou komen, en dan zou worden gesignaleerd als niet primair.

Maar de fout der logistiek bestaat hierin, dat zij niets schept dan een *taalgebouw*, dat nooit in de eigenlijke wiskunde kan worden overgevoerd. [1])

En het actueel oneindige der Cantorianen, dit bestaat wel degelijk, als we het maar beperken tot het intuïtief opbouwbare, en dat niet door niet te verwezenlijken logische combinaties willen uitbreiden.

---

[1]) Wèl wordt de petitio principii natuurlijk ongeoorloofd, zoodra men, zooals HILBERT, uit het taalsysteem omgekeerd op de primaire intuïtie, die het begeleidt, wil concludeeren.

Hoe weinig POINCARÉ er aan denkt, den intuïtieven *bouw* der wiskunde als eenigen grondslag voor zijn kritiek te nemen, blijkt uit zijn woorden (l.c. pag. 819):

,,Les mathématiques sont indépendantes de l'existence des objets matériels; en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie *exempt de contradiction.*"

Het doet haast aan zijn tegenstander RUSSELL denken. De wiskunde is zeker geheel onafhankelijk van de materieele wereld, maar *bestaan* in wiskunde beteekent: *intuitief zijn opgebouwd;* en of een begeleidende taal vrij van contradictie is, is niet alleen op zichzelf zonder belang, maar ook geen criterium voor het wiskundig bestaan.

Het wiskundig bekijken van taalteekens, 't zij woorden of Peanistische teekens, kan omtrent de wiskunde niets leeren; men beschouwe wiskundige formules niet als een onafhankelijk bestaan voerende ,,waarheden", maar alleen als hulpmiddel door teekens, om zich zoo ekonomisch mogelijk te herinneren, hoe in een zeker gebouw een ander gebouw is ingepast. Zoo leze men in de formule

$$13 = 7 + 6$$

de herinnering aan het inpassen in een groep waarlangs men tot 13 kan tellen van een groep bestaande uit de iuxtapositie van een groep waarlangs men tot 6, en een waarlangs men tot 7 kan tellen.

Samenvattende:

De wiskunde is een vrije schepping, onafhankelijk van de ervaring; zij ontwikkelt zich uit een enkele aprioristische oer-intuïtie, die men zoowel kan noemen *constantheid in wisseling* als *eenheid in veelheid* [1]).

Vervolgens het projecteeren van wiskundige systemen op de ervaring is eveneens een vrije daad, die in den strijd om het bestaan doeltreffend

---

[1]) De eerste bouwdaad heeft *twee* samengedachte discrete dingen (zoo ook CANTOR, Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Kassel 1903); F. MEYER (Verhandl. des Heidelberger Kongresses p. 678) zegt dat *één* ding genoeg is, want dat de omstandigheid dat ik dat ding denk er als tweede ding bij kan worden genomen; wat onjuist is, want juist dat *er bij nemen* (d.w.z. stellen onder vasthouding van het vroeger gedachte) *vooronderstelt de intuïtie van twee;* welk wiskundig systeem dan eerst daarna op het oorspronkelijk gedachte ding en het *ik, dat het ding denkt*, wordt toegepast.

blijkt; het eene wiskundige systeem kan daarbij praktischer, ekonomischer blijken, dan het andere, althans voorzoover betreft een bepaalde kategorie van doeleinden, die men door middel van die systemen tracht te bereiken: absoluut doeltreffend zijn ze geen van alle, de Euclidische meetkunde even weinig als de logische redeneeringen of de electronentheorie.

In de wiskunde behooren wiskundige definities en eigenschappen niet zelf weer wiskundig te worden bekeken, maar alleen een middel te zijn, om eigen herinnering of mededeeling aan anderen van een wiskundig gebouw zoo ekonomisch mogelijk te leiden. Er zijn elementen van wiskundige bouwing, die in het systeem der definities onherleidbaar moeten blijven, dus bij mededeeling door een enkel woord, klank of teeken, weerklank moeten vinden; het zijn de uit de oer-intuïtie of continuumintuïtie afgelezen bouwelementen; begrippen als *continu*, *eenheid, nog eens*, *enzoovoort* zijn onherleidbaar.

Een logische opbouw der wiskunde, onafhankelijk van de wiskundige intuïtie, is onmogelijk — daar op die manier slechts een taalgebouw wordt verkregen, dat van de eigenlijke wiskunde onherroepelijk gescheiden blijft — en bovendien een contradictio in terminis — daar een logisch systeem, zoo goed als de wiskunde zelf, de wiskundige oer-intuïtie noodig heeft.

NAMENREGISTER.

STELLINGEN.

I.

Ten onrechte zegt SCHUBERT (*Enz. der Math. Wiss.* I A. 1. § 1):

„Dinge zählen heisst: sie als gleichartig ansehen, zusammen auffassen, und ihnen einzeln andere Dinge zuordnen, die man auch als gleichartig ansieht.”.... „Wegen der Gleichartigkeit der Einheiten unter einander ist die Zahl unabhängig von der Reihenfolge, in welcher den *Einheiten* die *Einer* zugeordnet werden.”

II.

De geoorloofdheid der volledige inductie kan niet alleen niet worden bewezen, maar behoort ook geen plaats als afzonderlijk axioma of afzonderlijk ingeziene intuïtieve waarheid in te nemen. Volledige inductie is een daad van wiskundig bouwen, die in de oer-intuïtie der wiskunde reeds haar rechtvaardiging heeft.

III.

De taal van de Euclidische meetkunde, en eveneens van de daarin door PASCH en HILBERT gebrachte verbeteringen ontleent haar betrouwbaarheid slechts hieraan, dat tevoren onafhankelijk van die taal de wiskundige systemen en relaties zijn opgebouwd, die door de woorden als afgesproken teekens symbolisch voorgesteld worden.

De meetkunde van EUCLIDES en evenzoo de verschillende pathologische geometrieën van HILBERT verschijnen, op deze wijze bezien, als bestudeering van in gegeven systemen in te passen, zekere eigenschappen bezittende transformatiegroepen.

IV.

De verdediging door KLEIN („*Zur ersten Verteilung des Lobatcheffsky-Preises*", Mathem. Ann. 50) van de beperking tot analytische transformaties bij de onderzoekingen van LIE over de grondslagen der meetkunde, is ongegrond.

V.

De hoofdbewerkingen op het meetbaar continuum behooren door groepentheorie te worden gedefinieerd.

VI.

In de natuurkunde is een onderscheiding tusschen phenomenologische en theoretische beschouwingen niet vol te houden. In het bijzonder bestaat tusschen het karakter der verklaring van de eigenschappen van gassen en vloeistoffen door moleculen en van die van het licht door electrische trillingen geen principieel onderscheid.

VII.

Het toekennen van ,,objectiviteit" aan physische grootheden als *massa* en *aantal* berust op de invariabiliteit daarvan bij een belangrijke groep van verschijnselen in het wiskundig natuurbeeld.

VIII.

De verstandhouding der menschen berust op het bouwen van gemeenschappelijke wiskundige systemen, en het verbinden aan eenzelfde element van zulk een systeem van een levenselement voor elk der individuen.

IX.

Wiskunde is onafhankelijk van logica; practische logica en theoretische logica zijn toepassingen van verschillende gedeelten der wiskunde.

X.

Logische redeneeringen over de wereld kunnen alleen zeker gaan, als begeleiding van vooraf opgebouwde op de wereld geprojecteerde wiskundige systemen; de contradicties van de logistiek behooren te worden verklaard uit het ontbreken van zulke systemen, de antinomieën van KANT uit het niet vasthouden aan eenzelfde wiskundig systeem over het geheele verloop van eenzelfde redeneering.

XI.

Ten onrechte zegt HOUËL (*Cours de Calcul Infinitésimal* tome I, pag. 3):

,,Une Science fondée sur des hypothèses qui sont compatibles entre elles, et qui ne sont pas réductibles à un moindre nombre, est absolument vraie au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter."

XII.

Behalve de eindige, bestaan geen andere machtigheden dan
aftelbaar oneindig
aftelbaar oneindig onaf
continu.

XIII.

De tweede getalklasse van CANTOR bestaat niet.

XIV.

CLAUSIUS (*Die Potentialfunktion und das Potential*, 4e Aufl., Leipzig 1885, pag. 127) legt aan een scalarfunctie U, om gelijk aan $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla^2 U}{r}$ te zijn, de volgende 4 voorwaarden op:

1°. $\lim U = 0$.

2°. $\lim R \frac{\partial U}{\partial R} = 0$.

3°. U en haar eerste en tweede afgeleiden mogen nergens oneindig worden.

4°. $\nabla^2 U$ kan binnen een zekere in 't eindige gelegen ruimte willekeurige eindige waarden hebben, maar is daarbuiten tot in 't oneindige overal 0.

Van deze vier voorwaarden zijn de laatste drie overbodig. Wel moet men eventueele ∇^2 in 't oneindige in rekening brengen, maar voor beschouwing van de gradient kan dit weer buiten rekening worden gelaten.

XV.

CLAUSIUS (l. c. pag. 125) leidt uit de l. c. pag. 118 gestelde voorwaarden, dat in 't oneindige lim R en lim $R^2 \frac{\partial u}{\partial R}$ niet oneindig groot mogen worden, de eenduidigheid der GREEN'sche functie *u* af.

Voldoende is hier echter de voorwaarde, dat *u* in 't oneindige o wordt.

XVI.

BLUMENTAL bewijst Math. Ann. 61 pag. 235 sqq. voor vectordistributies, die in het oneindige o worden, met behulp van de eindigheid en differentieerbaarheid:

$$V = \left\{ \overset{2}{\nabla} - \overset{2}{\nabla}_0 \right\} \int \frac{\overset{1}{\nabla} \; V}{r} + \left\{ \overset{1}{\nabla} - \overset{1}{\nabla}_0 \right\} \int \frac{\overset{2}{\nabla} \; V}{r} + V^0$$

Deze stelling is echter juist, onafhankelijk van de eindigheid en differentieerbaarheid.

XVII.

Bij het verifieeren, of een uit een differentiaalvergelijking afgeleide singuliere oplossing werkelijk voldoet, is het niet noodig, om haar, zooals algemeen wordt aangegeven, in de differentiaalvergelijking te substitueeren.

CAYLEY, *Messenger of Mathematics* II pag. 6—12, VI pag. 23—27.
FORSYTH, *A Treatise on Differential Equations*, pag. 30—36.
HOUËL, *Cours de Calcul Infinitésimal*, tome II, § 855.

XVIII.

Laurent (*Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie* pag. 9) verzuimt een bewijs te geven, dat in een systeem van homogene quantiteiten een quantiteit, die *van een effect nul* is ten opzichte van één andere quantiteit, dat ook is ten opzichte van alle quantiteiten.

Verder ontbreekt (l. c. pag. 20 en 23) een bewijs voor het Archimedische axioma.

XIX.

In de logistiek behoort streng te worden onderscheiden tusschen het teekensysteem, dat wordt opgebouwd, en de principes volgens welke het wordt opgebouwd.

XX.

Het kan niet gelukken, de betrouwbaarheid der wiskundige redeneeringen te verzekeren, enkel door uit te gaan van eenige scherp gestelde axioma's en verder streng vast te houden aan de wetten der theoretische logica.

XXI.

Ongegrond is de overtuiging van Hilbert (*Gött. Nachr.* 1900, pag. 261):

„dass ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dass es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es dass die Unmöglichkeit der Lösung und damit die Notwendigkeit des Misslingens aller Versuche dargetan wird."

L.E.J. Brouwer

BIBLIOGRAPHIE.

Over de grondslagen der wiskunde door L. E. J. BROUWER. Amsterdam-Leipzig, Maas en Van Suchtelen, 1907.

De strekking van dit werk (het eerste geschrift van eenigen omvang, dat in onze taal over de philosophie der wiskunde is verschenen) is tweeledig.

In de eerste en voornaamste plaats geeft schrijver een kritisch overzicht van de moderne theorieën betreffende den strengen opbouw der wiskunde uit de logistiek, en tracht daarvan het onvoldoende aan te toonen. Naar schrijvers overtuiging trouwens, zal elke methode, welke de wiskundige waarheden langs zuiver formeelen weg tracht af te leiden, in gebreke moeten blijven, omdat de „eigenlijke" wiskunde voor hem iets geheel anders is dan een bloote verzameling van formules en woorden, die naar zekere regels zijn aaneengeschakeld, en deze eigenlijke wiskunde dan ook onmiddellijk moet steunen op een zekere algemeen menschelijke „continuïteitsintuïtie". Aan deze continuïteitsintuïtie (door schrijver met de „tijdsintuïtie" geïdentifiëerd), moeten dan ook de grondbegrippen („bouwelementen") worden ontleend, die in de wiskundige redeneeringen en berekeningen optreden.

In de tweede plaats evenwel tracht schrijver het aantal dezer bouwelementen te beperken, en wel hoofdzakelijk door invoering eener gewijzigde theorie der transfiniete getallen, welke, naar schrijvers meening, tot niet meer dan vier verschillende machtigheden kunnen behooren.

Wat het eerstgenoemde punt betreft, zijn de aangevoerde argumenten grootendeels van wijsgeerig-bespiegelenden aard, en beoogen in hoofdzaak aan te toonen, dat hoezeer men zich ook beijvere, de wiskundige stelsels, de wiskundige taal a. h. w., vrij te houden van overwegingen, aan de ervaring ontleend, men toch in laatster instantie zal moeten gebruik maken van die inwendige ervaring, welke door de organisatie van het menschelijk intellect bepaald wordt. Het is hier de plaats niet, op deze beschouwingen, hoe belangrijk ook op zichzelve, uitvoerig in te gaan; alleen willen wij opmerken, dat het hier aangeduide beginsel wel door niemand, ook niet door den meest consequenten voorstander der zuiver symbolische methode, zal worden verworpen. Juist zij, die de wiskunde als een voortbrengsel van het menschelijk intellect beschouwen, moeten ervan overtuigd zijn, dat de bestanddeelen van dit gedachtencomplex in nauw verband staan met het wezen van dat intellect. Het is dan ook bij de velerlei onderzoekingen van de laatste halve eeuw betreffende de grondslagen der wiskunde niet zoozeer de vraag geweest òf, doch wàar en op welke wijze de wiskunde haar oorsprong neemt uit de (uit- of inwendige) ervaring. Het komt ons dan ook voor, dat zelfs door het ten volle aanvaarden van de continuïteits-intuïtie als de alpha en de omega van alle wiskunde, nog in geenen deele iets wordt afgedaan aan de deugdelijkheid der mathematisch-logische methode. Schijnt ons dan ook de verdediging van schrijvers standpunt, juist tegenover de meer strenge symbolisten (DEDEKIND, PEANO) het minst sterk toe, één opmerking, door schrijver in dit verband gemaakt, willen wij gaarne als zeer gerechtvaardigd erkennen. Het is, waar hij aan de symbolisten verwijt, bij de niet-strijdigheidsbewijzen, welke zij gewoonlijk aan hun formule-systemen toevoegen, te kwistig gebruik te maken van voorbeelden, aan de (wiskundige) ervaring ontleend, waardoor zij dus plotseling van den formeelen weg afwijken. Schrijver gaat evenwel weder te ver, als hij daar, waar die niet-strijdigheidsbewijzen ontbreken (zooals bij DEDEKIND's „Was sind und was sollen die Zahlen"), uit de bovenbedoelde slechte gewoonte van vele symbolici afleidt, dat die bewijzen niet *zonder* dergelijke ervaringsvoorbeelden, dus op zuiver formeele wijze, zouden kunnen worden geleverd. Juist hier ligt, naar het ons voorkomt, een der belangrijkste problemen, welke de symbolische logica nog heeft op te lossen.

Sterker is schrijvers betoog, waar hij stelling neemt tegenover degenen (KANT, RUSSELL), die aan de intuïtie of inwendige ervaring een nog grooter aandeel in den opbouw der wiskunde willen toekennen, dan in zijn eigen bedoeling ligt. Vooral de „Essay on the foundations of geometry" van laatstgenoemden schrijver wordt uitvoerig besproken en op vele punten grondig weerlegd. Alleen komt ons het bezwaar, dat schrijver aanvoert tegen RUSSELL's axioma's der projectieve meetkunde (1°, de ruimte is continu en tot in het oneindige deelbaar; 2°, twee punten bepalen één enkele figuur, de rechte lijn; 3°, drie punten, niet in één rechte lijn liggend, bepalen weder één enkele figuur, het platte vlak) onjuist voor. Schrijver merkt nl. (terecht) op, dat we in een Cartesische ruimte zooveel stelsels van krommen, oppervlakken enz., die aan de projectieve axioma's voldoen, kunnen opbouwen, als wij willen, doch vervolgt dan: „En we kunnen dan ten slotte als relatie tusschen 2 punten de rechte lijn uit een der stelsels, als relatie tusschen 3 punten het platte vlak uit een ander stelsel, enz., definieeren; zoo wordt aan de axioma's van RUSSELL voldaan, maar niet aan de projectieve axioma's" (p. 108). Dit nu zou strijden tegen het derde Russell'sche axioma, daar dan door drie punten, gelegen op een „rechte lijn" uit het tweede stelsel (en dus in het algemeen *niet* op een „rechte lijn" uit het eerste stelsel) niet één „plat vlak" zou worden bepaald. Een beter voorbeeld ter illustratie van de onvoldoendheid van de axioma's van RUSSELL (waaraan de noodige elementen ter onderscheiding der dimensie-aantallen van punt, rechte lijn, plat vlak, enz. ontbreken), zou het geweest zijn, RUSSELL's „rechte lijnen" door de gewone rechten in een plat vlak, doch zijn door drie punten bepaalde „platte vlakken" door de cirkels van dat vlak voor te stellen, wat wel in overeenstemming met zijn axioma's zou zijn, maar natuurlijk niet tot de projectieve meetkunde zou voeren.

De hier bedoelde beschouwingen worden door schrijver samengevat in een schema, waarin hij zijn standpunt vergelijkt met die van KANT en RUSSELL, en dat wij duidelijkheidshalve hier willen citeeren:

	In KANT's *Transcendentale Aesthetiek:*	*In* RUSSELL's *Foundations of Geometry:*	*In dit werk:*
Onafscheidelijk gebonden aan de uitwendige ervaring is:	de Euclidische driedimensionale ruimte en de maatlooze tijd.	de Euclidische driedimensionale ruimte, en de meetbare tijdscoordinaat.	niets.
Noodzakelijk treedt op in het wiskundig receptaculum der ervaring: *a*) op grond van de organisatie van het menschelijk intellect:	de Euclidische driedimensionale ruimte en de maatlooze tijd.	de projectieve ruimte, de vrije bewegelijkheid in de ruimte en de meetbare tijdscoordinaat.	de oer-intuïtie der wiskunde, of tijdsintuïtie.
b) op grond der ervaring:	niets.	de driedimensionaliteit der ruimte en het parallellenaxioma van Euclides.	niets.

Gelijk wij reeds opmerkten, is een belangrijk deel van schrijvers betoog gewijd aan de theorie der transfiniete getallen of puntverzamelingen, en aan de beperking van het aantal mogelijke machtigheden tot vier, waarvan de eerste twee de bekende machtigheden *a*) der eindige *b*) der aftelbaar oneindige verzamelingen zijn, doch de derde de machtigheid is van zekere verzamelingen, welke schrijver als de „aftelbaar oneindig onaffe" aanduidt, en de vierde die van het continuum. De hier bedoelde ontwikkelingen lijden naar onze meening aan een zekere vaagheid en onbepaaldheid, welke aanleiding heeft gegeven tot eenige niet voldoende gerechtvaardigde gevolgtrekkingen. Zoo geeft schrijver b.v. van zijn bovengenoemde „onaffe" puntverzamelingen de volgende omschrijving: „we verstaan dan onder een *aftelbaar onaffe* verzameling een, waarvan niet anders dan een aftelbare groep welgedefinieerd is aan te geven, maar waar dan tevens dadelijk volgens een of ander vooraf gedefinieerd wiskundig proces uit elke zoodanige aftelbare groep nieuwe elementen zijn af te leiden, die gerekend worden eveneens tot de verzameling in kwestie te behooren. Maar streng wiskundig bestaat die verzameling als geheel niet; evenmin haar machtigheid; we kunnen deze woorden echter invoeren als willekeurige uitdrukkingswijzen voor een bekende bedoeling" (p. 148). Aan deze definitie (?) nu voldoen, als wij haar goed begrijpen, alle puntverzamelingen van hoogere machtigheid dan die van het aftelbaar oneindige (CANTOR's eerste machtigheid), doch schrijver noemt als voorbeeld het geheel der definieerbare punten op het continuum, d. i. van die punten of getallen welke ieder afzonderlijk door een eindig aantal symbolen, hetzij cijfers, teekens of woorden, kunnen worden gedefinieerd (b.v. $\sqrt{3}$, π, e, enz.). Deze puntverzameling is evenwel, zooals schrijver te anderer plaatse zeer terecht opmerkt, aftelbaar oneindig. Het schijnt dan ook, dat schrijver onder „aftelbaar oneindig onaf" *niet* inderdaad verzamelingen van hooger machtigheid dan de eerste van CANTOR wil verstaan hebben, doch enkel aftelbaar oneindige verzamelingen, die op een bijzondere wijze zijn gedefinieerd of gerangschikt.

Trouwens alleen met deze bedoeling (welke dan evenwel in lijnrechten strijd is met het opnemen van de „onaffe" verzamelingen in de reeks der mogelijke machtigheden) kan in overeenstemming worden gebracht schrijvers uitvoerig betoog, dat CANTOR's tweede getalklasse ondenkbaar is.

Wat dit laatste betoog betreft, richt schrijver zijn kritiek in hoofdzaak tegen de bekende en reeds vaak bestreden definitie der tweede getalklasse, welke CANTOR in zijn „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (pag. 35) gegeven heeft: „Wir definiren daher die zweite Zahlenclasse als der Inbegriff aller mit Hülfe der beiden Erzeugungsprincipe [1° één eenheid verder gaan, 2° van een ordetype ω tot het naasthoogere element overgaan] bildbaren, in bestimmter Succession fortschreitenden Zahlen α, welche der Bedinging unterworfen sind, dass alle der Zahl α vorangehenden Zahlen, von 1 an, eine Menge von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse bilden." Nu zijn inderdaad tegen deze definitie (en vooral tegen de uitdrukking „Inbegriff aller") zeer vele bezwaren aan te voeren, en ook ons komt het voor, dat zij eensdeels niet scherp genoeg is geformuleerd, en anderdeels niet tot een nieuwe, van de eerste onderscheiden getalklasse voeren kan. Iets geheel anders evenwel is het, uit die onvoldoendheid nu ook tot de ondenkbaarheid der tweede (en der hoogere) getallenklassen zelve te besluiten. De veel strengere invoering der hoogere machtigheden door middel der „belegging" of transfiniete machtsverheffing, wordt door schrijver dan ook wel terloops besproken (p. 158, 159), doch allerminst weerlegd. Wij veronderstellen dan ook, dat schrijver het onvoldoende van zijn betoog zal moeten inzien, indien hij het op een bepaald geval tracht toe te passen, en b.v. zou pogen aan te toonen, dat het geheel van alle (continue en discontinue) functies $y = f(x)$ niet tot de derde getallenklasse, doch tot een lagere zou behooren.

Wij zouden nog enkele andere punten kunnen noemen (waaronder eenige der groote problemen van de transfiniete getallenleer, als de paradox van BURALI—FORTI (p. 151), de welordening eener willekeurige verzameling (p. 152), het theorema van BERNSTEIN—SCHRÖDER (p. 153)), welke naar onze meening door schrijver op niet geheel bevredigende wijze zijn behandeld, maar dit neemt niet weg, dat wij dit geschrift, in zijn geheel genomen, beschouwen als een ernstig en belangrijk stuk werk, dat wellicht aanleiding zal geven tot velerlei bestrijding, maar ook zeer zeker ertoe zal bijdragen, velen wiskundigen een beter en dieper inzicht in de grondslagen hunner wetenschap te geven.

G. MANNOURY.

BOEKBEOORDEELINGEN

OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE 1)

Ce n'est que le premier pas qui coûte.

Ik twijfel er niet aan, of vele lezers van dit tijdschrift hebben de onlangs verschenen dissertatie van den heer Brouwer reeds gelezen.

Immers, de in de laatste tien jaren hier te lande toch al zoozeer verlevendigde belangstelling in de wijsbegeerte begint zich (gelukkig verschijnsel!) meer en meer te richten op de hoofdvragen, die den oorsprong van alle menschelijke zekerheid betreffen, in die mate zelfs, dat de strijd om bepaaldheid of betrekkelijkheid, om dogmatiek of dialectiek in de intellectueele kringen van onze dagen haast een *question brûlante* is geworden.

Het is waar, de man die hiertoe wel de meeste brandstof heeft aangedragen, wordt in Brouwer's boek niet genoemd, maar zijn denkbeelden en uitspraken worden toch telkens zóo rechtstreeks in het debat betrokken, dat menig lezer zich zal hebben verwonderd, in het alphabetisch naamregister aan het eind van het werkje, bij de B den naam van den „Leidschen geweldige" te missen.

Onder deze omstandigheden draagt dit proefschrift dan ook eenigermate het karakter van een strijdschrift, en wat wordt ooit gretiger gelezen en besproken dan polemieken!

Ik mag dan ook wel aannemen, dat de zeker kleine minder-

1) L. E. J. Brouwer. Over de grondslagen der wiskunde. Acad. proefschr. Amsterdam — Leipzig, Maas en Van Suchtelen, 1907.

heid onzer lezers, welke nog geen gelegenheid had, met het bedoelde boek kennis te maken, toch gaarne wil vernemen „wat er dan toch eigenlijk in staat", en om aan deze alleszins gewettigde nieuwsgierigheid (die mogelijkerwijze ook nog wel door een enkeling uit de overblijvende meerderheid gedeeld wordt!) te bevredigen, geloof ik niet beter te kunnen doen, dan u de verzekering geven, dat er in dit (zeer doorwrochte, zeer oorspronkelijke en zeer merkwaardige) geschrift in werkelijkheid niets anders te lezen staat, *dan dat wij wel den visch, maar niet het heelal in mootjes kunnen snijden*.

„Hoe nu", hoor ik in gedachte reeds bovenbedoelde enkeling protesteeren, „heb ik mij daarvoor hoofdpijn en een slapelooze nacht moeten bezorgen, om per slot van rekening te moeten hooren, dat al die becijferingen en diepzinnigheden niet anders bevatten dan de meest abgeschmackte hegelarij, waar zelfs Herakliet tegenwoordig niet meer mee zou durven aankomen? En bovendien, als Brouwer de wereld niet in mootjes wil snijden, dan is hij Bollandiaan, en had dat maar liever dadelijk moeten zeggen, inplaats van zich achter zijn formules te verschansen!"

Zacht wat, lezer, beklaag u uw moeite niet te vroeg. Het is waar, aan hegelarij is tegenwoordig geen gebrek; voor dat artikel kunnen wij bij den eersten den besten Bollandiaan (gezwegen van den laatsten den verwaandsten) te kust en te keur terecht, maar het merkwaardige van *dit* boek is juist, dat de schrijver *geen* Bollandiaan is, maar mathematicus „van professie". Dit boek, waarde lezer, droog en zwaar te verteren, half vol met kabalistische formules en voor de andere helft met diepzinnig-philosofische paradoxen, dit boek is geschreven met de geestdrift van een zeloot, dit boek is een geloofsbelijdenis.

En de geloofsbelijdenis van een renegaat.

Want Brouwer heeft niet alleen de wiskunde bestudeerd, hij heeft erin geloofd. Zijn geest is erin gegroeid. Hij is gegrepen door de wonderbare, meesleepende hartstocht voor het discreete. Het discreete, dat is het bepaalde, het noodzakelijke, het onomstootelijke, het absoluut-waarachtige, dat telkens lokt, telkens belooft, telkens nader komt... en telkens weer ontwijkt.

Hij heeft de uiterste schuilhoeken van zijn lievelingswetenschap doorvorscht, om den oorsprong te vinden van dat onaantastbare gezag, waarmede zij haar uitkomsten verkondigt en van die geheimzinnige harmonie, die zij aan haar ijverigste adepten het schoonst openbaart.

Hij heeft de hooge bouwsels van de wiskunst beklommen, de bouwsels vanwaar wij de diepten en de verten der natuur overzien, en hij heeft er zekerheid gevonden en waarheid, maar niet den *grond* dier zekerheid en niet het *wezen* dier waarheid. Hij heeft gezocht in de duistere fondamenten, waar balken en binten elkaar doorkruisen, hij heeft den moeizamen arbeid van Russell en Peano, van Dedekind en Hilbert gevolgd en hun strijd meegestreden, maar hij heeft niet gevonden wat hij zocht.

En toen heeft hij het geloof verloren in zijn formules en constructies en heeft het geschreven en beleden: de grond der wiskunde, de oorsprong van haar gezag, laat zich niet becijferen, doch verliest zich in het onbepaalde gebied van de menschelijke intuïtie, de „oer-intuïtie", de „*intuïtie van het continue.*"

* * *

. . . Panta rei . . .

Zeker, deze strijd is zoo oud als de wereld . . . der gedachten, en zijn geschiedenis is die der wijsbegeerte. Maar, periodiek als alle strijd, dringt hij zich weder vernieuwd aan ons op, en schijnt in onzen tijd en den naastvolgenden zijn hoogtepunt te zullen bereiken. Immers sinds honderd jaar beweegt de bovenstroom onzer beschaving zich in de richting van het exacte, het concreete, het machinale, en meer en meer heeft de taal, de wetenschap als ge wilt, der bepaaldheid zich losgemaakt van die der geleidelijkheid.

Men heeft gesproken van een bankroet dier wetenschap. En het moet gezegd, aan àlle vorderingen heeft zij niet voldaan. Zij heeft ons alles verklaard, de sterren, de steenen, onze hersenen zelfs en onze beurskoersen, alleen zichzelve verklaart zij niet. Sluit uw boek en uw oogen en gij neemt in uzelf niets waar, dat aan al die getallen, aan al dien regelmaat, aan al dien noodzaak beantwoordt. Gij neemt zelfs uw ikheid niet waar als een scherp bepaalde entiteit, en hoe meer ge u in uzelve zoekt, hoe duidelijker het u weer wordt, dat zich niets laat denken dan het vloeiende, het samenhangende, het continue . . . panta rei . . .

Maar wij kùnnen nu eenmaal niet altijd boeken en oogen gesloten houden, wij moeten normen hebben voor ons leven, en als wij ons weer een oogenblik hebben ingedacht in dien reuzensamenstel van feiten en cijfers, dan kùnnen wij onmogelijk dat alles voor voos en ijdel houden, en schelden Herakliet voor hegelaar en nietsnutter en vinden Jelgersma's brochure „wel eens héel goed!"

En toch, . . . ook dàt kan niet blijven. De beslissende slag moet geleverd worden, en zijn terrein kan geen ander zijn dan dat van de philosophie der mathesis, waar de contradicties van den hegelaar en de apodicties van den cijferaar zich met elkaar zullen moeten meten.

En daàrom bewegen zich de beide krijgvoerende partijen, van Lobatschewsky tot Peano en van Hegel tot Bolland, meer meer in de richting van dat éene punt, . . . en daàrom ook heeft Brouwer zijn boek geschreven en is het voor ons een merkwaardig boek.

Vóor wij ertoe overgaan, te onderzoeken, in hoeverre het ons nader brengt tot de oplossing van het probleem, nog een enkel woord over de eischen, waaraan die oplossing zal moeten voldoen.

* * *

Il maestro heeft gezegd (en daaraan alleen reeds dien titel verdiend), dat *om iets te verloochenen, men het eerst moet vóoronderstellen*. En als het dan waar is dat de wiskunde (en met deze alle wetenschappen die haar voetspoor drukken en op haar gezag steunen) de verloochening inhoudt van het onbestemd-veranderlijke en vloeiend-continue, dan zal zij ook juist in dat onbestendige en samenhangende het uitgangspunt moeten zoeken van haar rechtvaardiging. Zij zal moeten aantoonen, dat evenals de regels van het menschelijke recht in laatste instantie berusten op menschelijke willekeur, zoo ook het discreete en noodzakelijke is voortgekomen uit, en in wezen niet verschilt van het continue en gegevene.

En als aan dien eisch is voldaan, dan kan het ons vrij onverschillig zijn, onder welken verschijningsvorm dat discreete zich aan ons voordoet, en kunnen wij het den mathematicus gerustelijk toevertrouwen, uit het verschafte bouwmateriaal naar hartelust systemen op te trekken. Het is werkelijk niet noodig de Euclidische of wel de niet-Euclidische meetkunde philosofisch-dialectisch te verklaren, en wie het beproeven wilde, zou even slecht slagen als de boer die uit gras en hooi wol wou maken zonder het schaap te hulp te roepen .... of even goed als Hegel, toen hij de wetten van Keppler zóo knaphandig bewees, dat ieder lezer ervan overtuigd moet zijn, dat de groote man, indien die wetten bij toeval eens geheel anders hadden geluid, er evengoed een mouw aan had weten te passen! Neen, laat de wol maar komen van het schaap en de meetkunde van de getallenleer, en als Brouwer 1) het met F. Meijer aan den stok heeft over de vraag of er éen of twee dingen noodig zijn, om het getalbegrip te doen ontstaan, dan zou ik meenen, dat zij daarmede gevoegelijk konden wachten, tot zij ons het eerste „ding op zichzelf" 2) kant en klaar hebben thuisbezorgd.

Het is heusch zoo gemakkelijk niet!

Het geldt niet meer of minder, dan uit Bollands tuin die „éene roode, harde, koude, zure appel" te veroveren, waar Dr. Dèr Mouw reeds de hand naar uitgestrekt had, toen hij voor 's meesters barsche knevels moest wijken, . . . ondanks zijn „logisch dwanggevoel!"

Eén appel! Eén ding! Eén eenheid!

Maar dat is kleur en smaak en gevoel niet alleen, dat is ook vorm, d.i. ruimtebegrip, d.i. beweging, d.i. tijd.

En die beweging, die ruimte en die tijd zijn nu geen woorden uit een boekje, zij zijn ons zelven, onze zelfbeweging, onze zelfonderscheiding en onze zelfverkeering.

Wat zeggen wil: een beweging, waaraan geen noodzaak, maar een wil en een weten te onderkennen valt; een onderscheiding, niet naar afstand, maar naar oordeel, d.i. naar leed

1) Pag. 179.

2) Zie: G. J. P. J. Bolland, Het ding op zichzelf. Tijdschr. v. wijsbeg., Juli 1907.

of genot; een verkeering, niet van uur in uur, maar van verwachting in herinnering.

Wat wederom zeggen wil, dat de mathematicus-philosoof zijn appel niet zal kunnen verdienen, dan door psycholoog genoeg te zijn om van dat alles de hoogere eenheid en de gelijkwaardigheid te beseffen, en taalbouwer genoeg, om er over te kunnen praten, zonder dat besef weder te verliezen.

En nu het boek van Brouwer.

* * *

Wij vinden in dat boek veel over onze continuïteits-intuitie, of oer-intuitie, of mathematische-intuitie, of tijds-intuitie zonder meer (ik heb 23 „intuïtievormen" geteld, sommige mèt, maar de meeste *zonder puntjes op de i!)*. Dit is het philosofische bestanddeel.

Wij vinden er ook veel over de vraag, of het getalbegrip twee of drie of meer „bouwelementen" noodig heeft om gedefiniëerd te worden, en over aftelbare en oneindige en „onaffe" hoeveelheden, en over den samenhang der meetkundige eigenschappen en van de formules der logistiek. Dit is het mathematisch-logische bestanddeel.

Maar over den samenhang en het verband van die twee bestanddeelen vinden wij slechts zeer enkele aanduidingen.

Ik herinner mij, als schooljongen eens een „historische roman voor de jeugd" in handen gekregen te hebben, die ik bijzonder mooi vond. Alleen had de schrijver bij het begin van elk hoofdstuk eenige alinea's gewijd aan een „blik op den toestand des lands", waarbij de namen en jaartallen niet waren gespaard. Maar nademaal ik van jaartallen een heilige afschuw had, zoo sloeg ik het „historische" geregeld over, om mij aan den „roman" des te meer te vergasten.

Het is deze ondervinding, die mij doet vreezen, dat de niet-mathematici onder Brouwer's lezers al spoedig tot de ontdekking zullen komen dat zij pag. 4—7, 9—61, 63—77, 86—89, 99—113 en 117—118 gevoegelijk kunnen overslaan, zonder den draad van het geheel te verliezen, terwijl de volbloed mathematicus misschien juist aan die bladzijden het meest zijn aandacht zal wijden, zonder aan de overige veel behoefte te gevoelen; en ik geloof dan ook niet beter te kunnen doen, dan mij hier tot het meer philosofische gedeelte te beperken 1). En dan zij hier dadelijk vooropgesteld, dat wij in dit gedeelte enkele van die uitspraken vinden, die ons weder hoop geven, dat de mathesis zich nog eens zal ontwikkelen „als een nieuwe wetenschap, als de waarlijk wetenschappelijke wijsbegeerte, die de moeder wordt van een nieuw leven" 2).

Zoo lezen wij op bladz. 8:

„Waar dus in die oer-intuïtie continu en discreet als onaf-„scheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en „even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als „oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op „zichzelf gestelde andere op te bouwen; immers het is al on-„mogelijk, dat andere op zichzelf te stellen."

Nu ja, ik weet het wel, Neerlands specialiteit in veelzijdigheid zou hier zekere octrooirechten kunnen doen gelden, ook al is het handelsmerk „ongescheiden-onderscheiden" hier niet aangebracht, maar hij zal toch in ieder geval moeten toegeven, dat zijn waar niet is vervalscht!

En ook in een ander gedeelte van het boek, waar de schrijver handelt over „het intellect en de(n) sprong van doel op middel" geeft menige uiting blijk van het inzicht, dat de wiskunst subjectief is en menschelijk, en nauw verband houdt met onzen maatschappelijken zin en maatschappelijke behoeften.

„Het levensgedrag der menschen, zegt Brouwer op bladz. 81, „zoekt zooveel mogelijk [. . . .] wiskundige volgreeksen te „kunnen waarnemen, om telkens, waar in de werkelijkheid bij „een vroeger element van zulk een reeks met meer succes „schijnt te kunnen worden ingegrepen, dan bij een later, ook „dan, wanneer alleen bij dat latere het instinct wordt aangedaan, „het eerste te kiezen als richting voor hun daden." Ook in wat hij zegt over „massa" (blz. 95), over het begrip „alle" of „elk" (blz. 135 en 163), over het geoorloofd zijn der „petitio principii" (dit laatste kunt ge anders ook wel in zeker „Colle-

---

1) Te gereeder, omdat ik reeds het genoegen had, te anderer plaatse over de meer wiskundige beschouwingen een en ander in het midden te brengen (zie: Nieuw Archief voor wiskunde, Juli-aflevering 1907).

2) Fr. van Eeden. Poëzie, Wijsbegeerte en Mathesis (Beweging, Juli 1906, bldz. 32).

gium logicum" nalezen!) en nog hier en daar meer, valt een streven te ontdekken naar een meer vrije en meer breede opvatting van den grondslag der wiskunde, dan die in de werken van oudere schrijvers te vinden is.

Maar toch! die uitingen, die lichtpunten zijn sporadisch. Het inzicht, waarvan zij blijk geven, wordt niet geheel vastgehouden, de lijn, die zij bepalen, wordt niet geheel gevolgd.

Wij hebben zooeven Brouwer een renegaat genoemd. Welnu, hij heeft met renegaten dit gemeen, dat hij evenals zij, toch altijd nog iets van de oude en verworpen overtuiging heeft overgehouden. De bekeerde Australiër kan zijn goden leeren verfoeien en bestrijden, hen bannen uit zijn geest kan hij niet!

Brouwer heeft door zijn boek plaats genomen in het gelid der allermodernste philosofen, en toch .... is hij conservatief.

Niet alleen omdat hij op bldz. 133 spreekt van „pathologische geometrieën" en op bldz. 181 van de „eigenlijke" wiskunde, maar omdat hij zich voortdurend beijvert, d e o u d e, c o n v e n t i o n e e l e w i s k u n d i g e z e k e r h e d e n t e h a n d h a v e n, ook waar hij zelf het onvoldoende der even oude en even conventioneele aanspraken dier zekerheden bewijst. Waar de logica te kort schiet, wringt en dwingt hij zijn „continuiteits-intuitie" in allerlei bochten en ontleent er vrijelijk zooveel „bouwelementen" aan, als hij noodig heeft, om de wiskunde te kunnen behouden, z o o a l s d i e n u e e n m a a l i s!

Eén citaat slechts moge voldoende zijn, om deze beschuldiging (want dat is het voor wie „grondslagen" zegt te willen onderzoeken!) te staven. Het is op bldz. 132, waar te lezen staat:

„Dus in geen geval mag men denken, door middel van die „taalgebouwen [n.l. die der mathematische logica] iets van „andere wiskunde, dan die direct intuitief op te bouwen is, te „kunnen te weten komen. En nog veel minder mag men „meenen, op *die* manier [ik cursiveer niet!] de *grondslagen* „der wiskunde te kunnen leggen, m.a.w. de betrouwbaarheid „der wiskundige eigenschappen te kunnen verzekeren."

Neen Brouwer, de b e t r o u w b a a r h e i d der „wiskundige eigenschappen" verzekeren de logistici niet, maar die zult gij door uw continuiteits-intuitie evenmin verzekeren, om de eenvoudige reden, *dat zij niet bestaat.* De wiskunde is een menschelijk maaksel, een menschelijk bedenksel, waarin geen andere waarheid ligt, dan die betrekkelijk is tot menschelijke taal, bedoeling en samenleving. Uw boek is een daad van denk-moed en een uitvloeisel van verkregen hooger inzicht, doch die denkmoed en dat inzicht, ... ze zijn „onaf"! Maak u los (maar *geheel* los) van alle conventie en afspraak, van alle taal en alle woordenbouwsels, en ik ben er zeker van, dat gij zult komen tot de erkentenis (die de eenig-ware grondslag is van de mathesis): er *is* geen onveranderlijke waarheid en geen onveranderlijke maat voor de waarheid, er *is* geen absolute eenheid, geen absolute ruimte en geen absolute tijd, er *is* geen *wis*kunde.

G. MANNOURY.

Juni 1907.

OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE.

DOOR

L. E. J. BROUWER
(Amsterdam).

In de kritiek van den heer MANNOURY (Nieuw Archief, Tweede Reeks VIII, p. 175—180) komen de volgende punten voor, die, ter voorkoming van misverstand omtrent de strekking van het besproken werk, niet onbeantwoord mogen blijven:

1e. Pag. 176 onderaan schrijft de heer MANNOURY:
„Schrijver gaat evenwel weder te ver, als hij daar, waar die niet-strijdigheidsbewijzen ontbreken (zooals bij DEDEKIND's „Was sind und was sollen die Zahlen"), uit de bovenbedoelde slechte gewoonte van vele symbolici afleidt, dat die bewijzen niet *zonder* dergelijke ervaringsvoorbeelden, dus op zuiver formeele wijze, zouden kunnen worden geleverd. Juist hier ligt, naar het ons voorkomt, een der belangrijkste problemen, welke de symbolische logica nog heeft op te lossen."
Hierop dient geantwoord, dat de (Grondslagen der Wiskunde pag. 138, 139, 170, 171) gegeven beschouwingen wel degelijk bedoelen om, zij het op beknopte wijze, de onmogelijkheid dezer zuiver formeele niet-strijdigheidsbewijzen uitdrukkelijk aan te toonen.

2e. Pag. 177 veroordeelt de heer MANNOURY de (Grondslagen pag. 108) gegeven illustratie der onvoldoendheid van de RUSSELL'sche projectieve axioma's, op grond dat in het daar gegeven voorbeeld niet aan het derde axioma van RUSSELL zou zijn voldaan, omdat een puntendrietal op een rechte lijn uit het tweede stelsel in 't algemeen meerdere platte vlakken bepaalt. Maar dat is geen bezwaar: voor zulke singuliere puntendrietallen, die meerdere platte vlakken bepalen, kunnen we licht aan één daarvan de voorkeur geven: we kunnen b.v. vaststellen, daarvoor steeds het platte vlak evenwijdig aan de X-as te nemen [1]).

Het voorbeeld, dat de heer MANNOURY ter vervanging voorstelt, schijnt minder gelukkig, daar RUSSELL, al drukt hij het niet voldoende scherp uit, toch wel degelijk in zijn axioma's blijk geeft, aan de gewone dimensie-aantallen van punt, lijn, vlak, ruimte enz. te willen vasthouden. Zijn derde axioma immers begint aldus: „Trois points non en ligne droite déterminent une figure unique, le plan, et quatre points non situés dans un même plan déterminent une figure à trois dimensions."

3e. Pag. 179 grondt de heer MANNOURY eenige beschouwingen over het belangrijkste gedeelte van den inhoud op de volgende door hem opgemerkte tegenstrijdigheid:

„Schrijver noemt als voorbeeld (eener aftelbaar onaffe verzameling) het geheel der definieerbare punten op het continuum, d. i. van die punten of getallen, welke ieder afzonderlijk door een eindig aantal symbolen, hetzij cijfers, teekens of woorden, kunnen worden gedefinieerd (b.v. $\sqrt{3}$, π, e enz.). Deze puntverzameling is evenwel, zooals schrijver te anderer plaatse zeer terecht opmerkt, aftelbaar oneindig."

Deze tegenstrijdigheid is echter slechts schijnbaar. Immers het (Grondslagen pag. 170) genoemde aftelbaar oneindige systeem is dat van de mogelijke combinaties van een *eindig* aantal reeds ingevoerde teekens, terwijl men voor het aftelbaar onaffe systeem der definieerbare punten op het continuum onbepaald telkens weer nieuwe teekens mag invoeren, desgewenscht een oneindig aantal van reeds ingevoerde oude teekens vervangende.

4e. Pag. 180 schrijft de heer MANNOURY:

„Wij veronderstellen dan ook, dat de schrijver het onvoldoende van zijn betoog zal moeten inzien, indien hij het op een bepaald geval tracht toe te passen, en b.v. zou pogen aan te toonen, dat het geheel van alle (continue en discontinue) functies $y = f(x)$ niet tot de derde getallenklasse, doch tot een lagere zou behooren."

---

[1]) Om op ondergeschikte punten niet te lang in te gaan, meende ik, ook op andere plaatsen, dergelijke aanvullingen gevoegelijk aan den lezer te kunnen overlaten.

Werkelijk zal de schrijver niet pogen aan te toonen, dat het geheel van alle functies $y = f(x)$ tot een lagere dan de derde getallenklasse behoort, maar de grond hiervan is, dat de woorden: *geheel van alle functies* $y = f(x)$ eenerzijds, en *derde getallenklasse* andererzijds, zinlooze woordencomplexen vormen.

Ten slotte de opmerking, dat het besproken werk niet bedoelt te geven beschouwingen, waarover bij verschillende individuen verschillende opvatting mogelijk is, maar waarheden, die, zoo goed als de wiskundige, door ieder, eenmaal begrepen, erkend blijven.

DE ONBETROUWBAARHEID DER LOGISCHE PRINCIPES.

DOOR

L. E. J. BROUWER.

1. De *wetenschap* beschouwt herhaling in den tijd van als onderling gelijk stelbare volgreeksen van qualitatieve verscheidenheid in den tijd. Dit vereenzamen der idee tot waarneembaarheid, en als zoodanig tot herhaalbaarheid, verschijnt na religielooze scheiding [1]) tusschen subject en tot *iets anders* geworden onbereikte bereikbaarheid. De drang tot bereiking dezer bereikbaarheden wordt in het intellect volgens een wiskundig systeem van gestelde stelbaarheden, geboren uit abstractie van herhaling en herhaalbaarheden, gestuurd langs onmiddellijke bereiktheden.

Alles wat verschijnen kan als onbereikte bereikbaarheid, laat zich in systemen van gesteldheden intelligeeren, zoo ook religie; maar dan is religieuze *wetenschap* religieloos: gewetensussend, of ijdel spel, of slechts van doelnajagende beteekenis [2]).

En, als alle religieloosheid, heeft wetenschap nòch religieuze betrouwbaarheid, nòch betrouwbaarheid in zich.

1) een vermogen, voortgekomen uit de oerzonde van vrees of begeerte, maar wederkeerend, ook zonder levende vrees of begeerte. vgl. L. E. J. Brouwer. Leven, Kunst en Mystiek. pag. 13—23.

2) t. a. p. pag. 27.

Allerminst kan een wiskundig systeem van gesteldheden, los van de waarnemingen, die het intelligeerde, onbepaald vervolgd, betrouwbaar blijven in het richten langs die waarnemingen.

Zoodat onafhankelijk van de waarneming volvoerde logische redeneeringen, die immers beteekenen wiskundige transformaties in het intelligeerende wiskundig systeem, uit wetenschappelijk aanvaarde praemissen onaannemelijke conclusies kunnen afleiden.[1])

De klassieke opvatting, die in de ervaringsgeometrie uit aanvaarde praemissen door volgens de logische principes gevoerde redeneeringen slechts onaanvechtbare conclusies zag afleiden, induceerde de logische redeneeringen als methode van opbouw der wetenschap en de logische principes als menschelijke vermogens tot opbouw van wetenschap.

Maar de geometrische redeneeringen gelden slechts voor een onafhankelijk van eenige ervaring in het intellect opbouwbaar wiskundig systeem, en dat een zoo populaire groep van waarnemingen als de geometrie het bedoelde wiskundig systeem zoo blijvend verdraagt, verdient, als alle proefhoudende natuurwetenschap, met wantrouwen te worden aangezien.

Het inzicht van de wetenschappelijke onbetrouwbaarheid der logische redeneeringen maakt, dat de conclusiën van Aristoteles omtrent de constitutie der natuur zonder practische verifieering niet overtuigen; dat de waarheid, die bij Spinoza opengaat, geheel onafhankelijk word gevoeld van zijn logische systematiek; dat men niet gehinderd wordt door de antinomieën van Kant, en evenmin door het ontbreken van in al haar consequenties door te voeren physische hypothesen.

---

1) t. a. p. pag. 20, 21.

Bovendien zijn bij betoogen betreffende op wiskundige systemen gespannen ervaringswerkelijkheden de logische principes niet het richtende, maar in de begeleidende taal achteraf opgemerkte regelmatigheid, en zoo men los van wiskundige systemen spreekt volgens die regelmatigheid, is er altijd gevaar voor paradoxen als die van Epimenides.

2. In religieuze waarheid, in *wijsheid*, die de splitsing opheft in subject en iets anders, is geen wiskundig intelligeeren, daar de verschijning van den tijd niet langer wordt aanvaard, nog minder dus betrouwbaarheid van logica. Integendeel, de taal der inkeerende wijsheid verschijnt ordeloos, onlogisch, omdat ze nooit kan voeren langs in het leven gedrukte systemen van gesteldheden, slechts hun breking kan begeleiden, en zoo misschien de wijsheid, die die breking doet, kan laten opengaan. [1])

3. Blijft de vraag, of dan althans de logische principes vaststaan voor van levensinhoud vrije *wiskundige systemen*, voor systemen opgetrokken uit de gestelde abstractie van herhaling en herhaalbaarheid, uit de gestelde inhoudslooze tijdsintuïtie, uit de oer-intuïtie der wiskunde. [2]) Door alle tijden is in wiskunde met vertrouwen logisch geredeneerd; nooit aarzelde men, door logica uit postulaten getrokken conclusies te aanvaarden, waar de postulaten gelden. In dezen tijd zijn echter paradoxen geconstrueerd, die wiskundige paradoxen schijnen [3]), en wantrouwen wekken tegen het

---

1) t. a. p. pag. 47 vlgg., 65 vlgg.
2) vgl. L. E. J. Brouwer. Over de Grondslagen der Wiskunde. pag. 8, 81, 98, 179.
3) Burali-Forti. (Rendiconti del circolo Matematico di Palermo. 1897. p. 164).
Zermelo. (Mathematische Annalen 59). Koenig. (ibid. 61).
Richard. (Revue générale des Sciences. 1905).
Russell. (The Principles of Mathematics. Part I. Chap. X).
Voor pogingen tot oplossing dezer paradoxen vgl., behalve de opstellers

vrije gebruik van logica in wiskunde, zoodat enkele wiskundigen hun vooronderstelling van logica in wiskunde loslaten, en logica en wiskunde tezamen trachten op te bouwen[1]), in aansluiting aan de door Peano gegrondveste school der *logistiek*. Aangetoond kan echter worden[2]), dat deze paradoxen voortkomen uit dezelfde dwaling als die van Epimenides, dat ze namelijk ontstaan, waar regelmatigheid in de taal, die wiskunde begeleidt, wordt uitgebreid over een taal van wiskundige woorden, die geen wiskunde begeleidt; dat verder de logistiek eveneens zich bezighoudt met de wiskundige taal in plaats van met de wiskunde zelf, dus de wiskunde zelf niet verheldert; dat ten slotte alle paradoxen verdwijnen, als men zich beperkt, slechts te spreken over expliciet uit de oer-intuïtie opbouwbare systemen, m. a. w. in plaats van logica door wiskunde, wiskunde door logica laat vooronderstellen.

Zoo blijft nu alleen nog de meer gespecialiseerde vraag: „Kan men bij zuiver wiskundige constructies en transformaties de voorstelling van het opgetrokken wiskundig systeem tijdelijk verwaarloozen, en zich bewegen in het accompagneerend taalgebouw, geleid door de principes van *syllogisme*, van *contradictie* en van *tertium exclusum*, in vertrouwen dat door tijdelijke oproeping van de voorstelling der beredeneerde wiskundige constructies telkens elk deel van het betoog zou kunnen worden gewettigd?"

Hier zal blijken, dat dit vertrouwen voor de beide eerste principes wèl, voor het laatste niet gegrond is.

Het *syllogisme* vooreerst leest in de inpassing van een

---

zelf: Poincaré. (Revue de Métaphysique et de Morale. 1905 no. 6, 1906 no. 1, 3). Mollerup. (Mathematische Annalen 64). Schoenflies. (Bericht über die Mengenlehre. II. Kap. I. § 7).

1) in het bijzonder Hilbert in Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Congresses in Heidelberg 1904. p. 174.

2) Grondslagen der Wiskunde. III.

systeem *b* in een systeem *c* en de daarmee samengaande inpassing van een systeem *a* in het systeem *b* een directe inpassing van het systeem *a* in het systeem *c*, wat niet anders is dan een tautologie.

Evenmin is aanvechtbaar het principe van *contradictie:* het volvoeren van de inpassing van een systeem *a* op bepaalde wijze in een systeem *b*, en het stuiten op de onmogelijkheid van die inpassing sluiten elkander uit.

Nu het principium *tertii exclusi:* dit eischt, dat iedere onderstelling òf juist òf onjuist is, wiskundig: dat van iedere ondersteIde inpassing van systemen op bepaalde wijze in elkaar hetzij de beëindiging, hetzij de stuiting op onmogelijkheid kan worden geconstrueerd. De vraag naar de geldigheid van het principium tertii exclusi is dus aequivalent met de vraag naar de *mogelijkheid van onoplosbare wiskundige problemen.* Voor de wel eens uitgesproken[1]) overtuiging, dat onoplosbare wiskundige problemen niet bestaan, is geen aanwijzing van een bewijs aanwezig.

Zoolang alleen bepaalde eindige discrete systemen gesteld worden, is het onderzoek naar de mogelijkheid of onmogelijkheid eener inpassing steeds beëindigbaar en voerend tot antwoord, is dus het principium tertii exclusi een betrouwbaar redeneerprincipe. [2])

Dat ook oneindige systemen ten opzichte van zoovele eigenschappen eindig worden beheerscht, geschiedt door overzien van de aftelbaar oneindige reeks der geheele ge-

---

1) vgl. Hilbert. Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten. 1900. Ook Schoenflies (l. c.) wil onvoorwaardelijk de methode van het indirecte bewijs handhaven, die hij ten onrechte uitsluitend van het principium contradictionis afhankelijk acht.

2) Dit onderzoek kan zelfs steeds door een machine worden uitgevoerd, of door een gedresseerd dier, vereischt niet de oer-intuïtie der wiskunde, levend in een menschelijk intellect. Maar tegenover vragen betreffende oneindige verzamelingen wordt die oer-intuïtie telkens weer onmisbaar; door dit voorbij te zien, zijn Peano en Russell, Cantor en Bernstein slechts tot dwalingen gekomen.

tallen met *volledige inductie* [1]), namelijk door opmerken van eigenschappen, d. w. z. inpassingen, die voor een *willekeurig geheel getal* gelden, in het bijzonder ook van contradicties, dat zijn onmogelijke inpassingen, die voor een *willekeurig geheel getal* gelden. Dat echter uit de in een vraag gestelde systemen een is af te leiden, dat door een invariant over een aftelbaar oneindige reeks de vraag volledig induceerend leest, en zoo oplost, blijkt eerst a posteriori, als toevallig de constructie van zulk een systeem gelukt is. Want het geheel der uit de vraagstelling te ontwikkelen systemen is *aftelbaar onaf* [2]), dus niet a priori methodisch te onderzoeken ten opzichte van de aanwezigheid of afwezigheid van een de vraag beslissend systeem. En het is niet uitgesloten, dat een even gelukkige greep, als zoo dikwijls de beslissing bracht, eens het aftelbaar onaffe systeem der mogelijke ontwikkelingen tot een onoplosbaarheid zou overzien.

Zoodat in oneindige systemen het principium tertii exclusi vooralsnog niet betrouwbaar is. Toch zal men bij ongerechtvaardigde toepassing nooit kunnen stuiten op een contradictie en zoo de ongegrondheid van zijn redeneeringen ontdekken. Immers daartoe zouden de volvoering en de contradictoriteit van een inpassing beide tegelijk contradictoor moeten kunnen zijn, wat het principium contradictionis niet toelaat.

Een sprekend voorbeeld levert de volgende onbewezen stelling, die op grond van het principium tertii exclusi in de gangbare theorie der transfinite getallen algemeen vertrouwd en gebruikt wordt, dat n. l. elk getal is òf eindig òf oneindig, m. a. w. dat voor elk getal γ kan worden geconstrueerd:

---

1) Poincaré is misschien de eenige, die in de volledige inductie „le raisonnement mathématique par excellence" heeft herkend. Vgl. La Science et l'Hypothèse. Chap. I.

2) vgl. Grondslagen der Wiskunde. p. 148.

hetzij een afbeelding van γ geheel op de rij der geheele getallen zóó, dat daarbij een getal α uit die rij *het laatste* is (de getallen $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3, \ldots$ vrij blijven).

hetzij een afbeelding van γ geheel of gedeeltelijk op de rij der geheele getallen in haar geheel. [1])

Zoolang deze stelling onbewezen is, moet men voor onzeker houden, of vragen als:

„Is bij de decimale ontwikkeling van π een cijfer, dat duurzaam veelvuldiger optreedt, dan alle andere?"

„Komen bij de decimale ontwikkeling van π oneindig veel paren van gelijke opeenvolgende cijfers voor?"

een oplossing bezitten.

En evenzoo onzeker blijft, of de algemeenere wiskundige vraag:

„Is in de wiskunde het principium tertii exclusi onbepaald geldig?"

een oplossing bezit. [2])

Samenvattende:

In wijsheid is geen logica.

In wetenschap is logica vaak, maar niet duurzaam doeltreffend.

In wiskunde is niet zeker, of alle logica geoorloofd is, en is niet zeker of is uit te maken, of alle logica geoorloofd is.

---

1) De eventueele onjuistheid dezer stelling zal weer nooit in een contradictie kunnen blijken; immers de contradictoriteit van de constructie der vrij blijvende rij $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3 \ldots$, en die van haar contradictoriteit kunnen nooit tezamen optreden.

2) Men behoort dus in wiskunde de gewoonlijk als *bewezen* geldende stellingen te onderscheiden in *juiste* en *niet-contradictore*. Tot de eerste behooren de algebraïsche en analytische gelijkheden, en de geometrische snijpuntsstellingen; ook, dat een puntverzameling geen andere machtigheid bezitten kan, dan de (Grondslagen. pag. 149) genoemde. Tot de laatste, dat een puntverzameling zeker een dier machtigheden bezit; ook, dat een afgesloten puntverzameling zich laat splitsen in een perfekte en een aftelbare.

ADDENDA EN CORRIGENDA OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE [1],

DOOR

L. E. J. BROUWER

(Amsterdam).

In aansluiting aan mijn voor tien jaren verschenen werk: „*Over de Grondslagen der Wiskunde*" (Amsterdam, MAAS en VAN SUCHTELEN, 1907) [2]) vallen thans de volgende opmerkingen te maken:

1. De groepentheoretische karakteriseering der hoofdbewerkingen op het meetbaar continuum (p. 12—35) is gedetailleerd uitgewerkt in *Mathem. Ann.* 67, p. 246—267. In het bijzonder vindt men aldaar p. 258 het bewijs zoowel van de p. 20 onderaan als van de p. 22 onderaan uitgesproken eigenschap betreffende de dubbelpunten der componeerende eenledige groepen [3]); p. 260—262 de rechtvaardiging van den p. 25 bovenaan uitgevoerden overgang van de differentieerbaarheid zonder meer der toenamefuncties tot de toepasbaarheid der grondformule van LIE; p. 264—265 de oplossing van het p. 35 gestelde probleem betreffende de projectieve groep.

2. De afleiding van het boogelement der tweedimensionale Euclidische en niet-Euclidische geometrieën van het uitgangspunt van RIEMANN, die p. 43—46 door middel van infinitesimaalbeschouwingen [4]) wordt verricht, is synthetisch uitgevoerd in *Hand. XII. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr.*, p. 192—196,

---

1) Overgedrukt uit Verslagen der Kon. Akademie van Wetenschappen, 27 April 1917, met inachtneming van het bijbehoorende erratum [*bij den herdruk toegevoegde noot*].

2) Een discussie over den inhoud is in dit tijdschrift gevoerd door G. MANNOURY en den schrijver. Vgl. *N. Archief* (2) VIII, p. 175—180, 326—328 [*bij den herdruk toegevoegde noot*].

3) De p. 21—22 gegeven afleiding van de laatste eigenschap uit de eerste wordt dus voor den bewijsgang overbodig.

4) Van de hierbij ingevoerde differentiaalquotiënten is, ter plaatse waar ze gebruikt worden, telkens het bestaan evident.

terwijl met andere infinitesimaalmethoden het doel reeds vroeger was bereikt door KILLING in „*Einführung in die Grundlagen der Geometrie*" I, p. 80—89 en door FLYE-S[te] MARIE in „*Théorie des parallèles*", p. 12—19. De p. 46—47 geschetste afleiding van het n-dimensionale uit het tweedimensionale boogelement is uitvoeriger ontwikkeld in *Hand. XII. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr.*, p. 196—199.

3. Van de p. 63—66 opgesomde en *Atti IV. Congr. Int. d. Mat.* III, p. 569—571 overgenomen drie constructieprincipes voor puntverzamelingen eischt de consequentie van het intuitionistische standpunt (vgl. *Jahresber. d. D. M. V.* 23, p. 79), dat het derde vervalt, terwijl bij het tweede in het oneindige vertakkingsagglomeraat, waarop, als het afbrekingsproces tot een einde is gekomen, de operatie „completeering tot een continuum" wordt toegepast, niet slechts splitsingen in twee, doch ook in een willekeurig eindig of aftelbaar oneindig aantal deeltakken behooren te worden toegelaten [1]), waardoor het eerste constructieprincipe in een bijzonder geval van het tweede overgaat. De uit de vaststelling der constructieprincipes volgende oplossing van het continuumprobleem blijft ook na deze wijzigingen haar geldigheid behouden. Op alle drie de genoemde plaatsen, evenals in „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 23 en in *Amer. Bull.* (2) 20, p. 92—93, liggen aan de evidentie van de aftelbare of continue machtigheid eener puntverzameling (en ook aan die van de splitsbaarheid eener afgesloten puntverzameling in een perfekte en een aftelbare) twee essentieele onderstellingen ten grondslag, en wel ten eerste, dat de puntverzameling *geïndividualiseerd* kan worden geconstrueerd, d. w. z. zóó, dat twee verschillende oneindig voortgezette takken van het vertakkingsagglomeraat tot twee verschillende punten voeren, ten tweede, dat de geïndividualiseerd geconstrueerde puntverzameling *inwendig ontleed* kan worden, d. w. z. dat het afbrekingsproces der zich niet weer vertakkende takken, dat na een aftelbaar aantal schreden tot een eind moet voeren, werkelijk kan worden uitgevoerd. Inderdaad heeft men op het intuitionistische standpunt, waarop het gebruik van het onbeperkte comprehensie-axioma (vgl. beneden onder 7.) is uitgesloten, en waarop men zich daarom van speciale aannamen betreffende den aard der con-

[1]) Op bijzondere wijze geschiedt dit trouwens reeds p. 158.

strueerbaarheid der te beschouwen puntverzamelingen, en dienovereenkomstig betreffende de begrenzing van het gebied der verzamelingsleer, nimmer kan bevrijden, het recht, zoodanige onderstellingen, als ter wille van de levensvatbaarheid der theorie wenschelijk zijn, in de constructieprincipes geïmpliceerd te achten. Intusschen is mij gebleken, dat, zooals ik in een eerlang verschijnend werk [1]) hoop uiteen te zetten, met behoud van de levensvatbaarheid der theorie, de begrenzing van het gebied der verzamelingsleer ruimer, en zonder de beide laatstgenoemde implicaties in de constructieprincipes, kan worden genomen, waarvan dan tevens het gevolg is, dat de oplossing van het continuumprobleem in tegengestelden zin uitvalt. Vgl. het *Amer. Bull.* (2) 20, p. 92 in een noot gegeven voorbeeld van een deelverzameling van het continuum met een machtigheid grooter dan de aftelbare, doch kleiner dan de continue.

4. Bij den opbouw der voorbeelden van niet-Archimedische hoofdbewerkingen behoort p. 68 r. 4 in plaats van: „voorzooverre alle indices er van grooter zijn, dan die van een bepaalde gegeven coördinaat" te worden gelezen: „voorzooverre bij gegeven voorafgaande indices elke index er van grooter is, dan een bepaald getal". Verder behoort p. 69 r. 1, 3 en 12 in plaats van „index" resp. „indices" te worden gelezen „nummer" resp. „nummers" en behooren p. 71 r. 13 de letters q en r te worden verwisseld. Uitgebreide mogelijkheden tot opbouw van *commutatieve* niet-Archimedische hoofdbewerkingen zijn intusschen ontwikkeld door HAHN in *Wiener Sitzungsber.* 116, p. 601—655.

5. De p. 85—88 gegeven afleiding van de differentieerbaarheid eener functie uit de continuiteit van het systeem der differentiequotiënten is uitvoeriger ontwikkeld en uitgebreid tot hoogere differentiaalquotiënten en functies van meerdere veranderlijken in *Versl. K. Ak. v. Wet.* 17, p. 38—45.

6. Een nadere bevestiging van het p. 95—99 en 118—121 ten opzichte van de objectiviteit en aprioriteit van ruimte en tijd verdedigde standpunt is geleverd door de diensten, die de

[1]) Van dit werk, getiteld: „*Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*", is inmiddels het eerste deel als Verhandeling der Kon. Akademie van Wetenschappen verschenen [*bij den herdruk toegevoegde noot*].

relativiteitstheorie in de natuurkunde heeft bewezen. Vgl. de desbetreffende uiteenzettingen in „*Het Wezen der Meetkunde*", p. 5—13, in het bijzonder ter illustratie van de noodzakelijkheid der objectiviteitsdefinitie van p. 96.

7. In het betoog, dat logica afhankelijk is van wiskunde, worden p. 131—132 de toepassingen van het zoogenaamde principe van ***tertium exclusum*** (of principe van *tertium non datur*) op de wiskunde nietszeggende tautologieën genoemd. Dit is onjuist; integendeel, deze toepassingen vormen dikwijls ongeoorloofde petitiones principii, zooals nader is uiteengezet in *Tijdschr. v. Wijsbeg.* 2, p. 152—158. Verder wordt p. 135 het *comprehensie-axioma* (d. w. z. het bestaansaxioma der verzameling van alle wiskundige entiteiten, die een gegeven eigenschap bezitten) beperkt tot die wiskundige entiteiten, die behooren tot een te voren opgebouwd wiskundig systeem s. Hier moet verder worden gegaan en in overeenstemming met p. 177 de eisch worden toegevoegd, dat de door het axioma gepostuleerde verzameling zelf ook een opbouwbaar wiskundig systeem is (De door ZERMELO in *Mathem. Ann.* 65, p. 263 geformuleerde eisch van het nieuwere formalisme, dat voor elke entiteit van s moet vaststaan, of de bedoelde eigenschap er voor geldt of niet geldt, is, al naarmate de *oplosbaarheid van alle wiskundige problemen* er bij wordt ondersteld of niet, veel te zwak of veel te sterk voor de intuitionistische beschouwingswijze).

8. De p. 140 geciteerde verhandeling van MANNOURY is intusschen met geringe wijzigingen gereproduceerd in zijn werk „*Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik*", p. 59—72, en een opstel met eng verwanten gedachtengang over hetzelfde onderwerp is gepubliceerd door ZERMELO in *Acta Mathem.* 32, p. 185—193. Van beiden lijden de bewijsvoeringen aan de wiskundige fout van het gebruik van het onbeperkte comprehensie-axioma en het principium tertii exclusi, en aan de logische fout van het ontbreken van een niet-strijdigheidsbewijs. Bovendien postuleert (vgl. *N. Arch. v. Wisk.* (2) 9, p. 201) het betoog van MANNOURY l. c. p. 71 het *bestaan* eener O—R, n.l. die der geschreven ordinaalgetallen, een postulaat aequivalent met de erkenning van de intuitie der volledige inductie, en wordt l. c. p. 72 bovenaan zonder bewijs aangenomen, dat een verzameling a, die met alle deelverzamelingen van een verzameling b een aequivalent gedeelte bezit, ook een

met b zelf aequivalent gedeelte bezit [1]), waartegenover het betoog van ZERMELO l. c. p. 190 de logische petitio principii, die in het *keuze-axioma* (vgl. „*Intuitionisme en Formalisme*", p 15) ligt uitgedrukt, noodig heeft.

9. In verband met de bespreking der tweede getalklasse op p. 144—149 vergelijke men *Amer. Bull.* (2) 20, p. 91, waar overigens in de noot door een zinstorende drukfout de aangehaalde uitdrukkingen: „muss es geben" en „können wir bestimmen" verwisseld zijn.

10. In verband met de p. 149—151 geformuleerde logische en wiskundige preciseeringen van het continuumprobleem, en de correspondeerende oplossingen er van, vergelijke men nader „*Intuitionisme en Formalisme*", p 22—25 en *Amer. Bull.* (2) 20, p. 91—93, en lette op de uit het boven onder 3. opgemerkte voor de oplossing der eerste l. c. aangegeven preciseering voortvloeiende restrictie.

11. Ten opzichte van het p. 152—153 besproken welordeningsprobleem kan in overeenstemming met *Jahresber. d. D. M. V.* 23, p. *81*, waar echter de nauwkeurigheid der redactie te wenschen overlaat, worden opgemerkt, dat een door een oneindig vertakkingsagglomeraat bepaalde niet-aftelbare puntverzameling slechts zóó lineair te ordenen is, dat achtereenvolgens een fundamentaalreeks van eindige verzamelingen $i_1, i_2, \ldots$ van eindige takken, die geen verlengingen van elkander zijn, lineair geordend wordt, waarbij dan voor elke k zekerheid moet bestaan, dat $\mathfrak{S}\{i_k, i_{k+1}, \ldots\}$ van alle oneindige *eind*takken beginsegmenten bevat. Stellen we door j_k voor de aftelbare verzameling van eindige takken, die wordt verkregen, door in de takkenverzameling $\mathfrak{S}\{i_k, i_{k+1}, \ldots\}$ alleen de takken te behouden, die geen verlenging van een voorafgaanden tak dezer verzameling zijn, dan kan in elke tak τ van een j_ν slechts voor hoogstens één punt (namelijk voor datgene, dat bepaald wordt, door voor $\mu > \nu$ in elke volgende j_μ steeds de *laatst* geordende takverlenging te kiezen) zekerheid worden verkregen, dat het in de resulteerende ordening der beschouwde puntverzameling een eerstvolgende element bezit. De punten, waarvoor deze zekerheid te verkrijgen is, kunnen dus onmogelijk een verzameling van grootere dan

[1]) Een ander l. c. *N. Arch. v. Wisk.* tegen dezelfde zinsnede geuit bezwaar kan daarentegen door een geringe wijziging van den bewijsgang worden ondervangen.

de aftelbare machtigheid vormen, zoodat *een puntverzameling van grootere dan de aftelbare machtigheid zeker niet in haar geheel welgeordend kan worden.*

12. De kritiek op het aequivalentietheorema van BERNSTEIN (p. 153—155) is nader gepreciseerd en door een voorbeeld toegelicht in „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 26 – 29 en *Amer. Bull.* (2) 20, p. 94 – 96. De kritiek op de door BERNSTEIN gedefinieerde afbeelding van de aftelbare ordetypen op punten van het continuum (p. 156 — 157) wordt beter zoo geformuleerd, dat de methode van BERNSTEIN geen middel geeft, om voor een gegeven aftelbaar ordetype het correspondeerende punt van het continuum te bepalen, zoodat de afbeelding alleen kan worden uitgevoerd voor die ordetypen, waarvoor onder de verschillende wetten van voortschrijding der ordening met de aftelling, waardoor ze worden voortgebracht, een bepaalde keuze is gedaan, welke ordetypen een hoogstens aftelbaar onaffe verzameling vormen.

13. Aan de p. 158 – 159 besproken stelling, dat F (de verzameling der functies eener reëele variabele) een grootere machtigheid bezit, dan C (de verzameling der punten van het continuum) wordt ook wel de volgende wiskundige beteekenis toegekend: „Met alle punten van het continuum kan men verschillende functies eener reëele variabele in correspondentie brengen, doch naast elk oneindig vertakkingsagglomeraat van zoodanige functies kan men een functie aangeven, die er niet toe behoort" (vgl. „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 25). Doch ook deze interpretatie blijkt bij nader onderzoek onhoudbaar, en wel op grond van de omstandigheid, dat een in het Cartesische XY-vlak gedefinieerde niet-continue functie van x en y niet noodzakelijk op de lijn $x = y$ een functie van x bepaalt.

14. De p. 160 gegeven voorstelling, als zouden ten opzichte ook van oneindige wiskundige systemen de invoering van de *logische som*, het *logische product* en de *complementairverzameling* steeds veilige operaties zijn, berust op een reeds boven onder 7. gekritiseerden vorm van het comprehensie-axioma, en kan daarom niet worden volgehouden. Het op dezelfde pagina, evenals p. 163 – 164, voor wiskundige in tegenstelling met onwiskundige subjecten en praedicaten gehandhaafde principe van *tertium non datur* is eveneens reeds boven onder 7. verworpen, ook voor wiskundige systemen.

15. Ten opzichte van de rekenkunde van RUSSELL behoort te worden opgemerkt, dat de p. 168 ter sprake komende ontwikkelingen (l. c. p. 121 – 123) weliswaar op de intuitie der volledige inductie berusten, doch volgens den schrijver uitdrukkelijk slechts een voorloopig karakter dragen; inderdaad kunnen de bewuste eigenschappen ook onafhankelijk van deze intuitie worden afgeleid op grond van het p. 167 aangehaalde definitiesysteem. Dit beteekent echter voor het standpunt van RUSSELL geen versterking, daar het bedoelde definitiesysteem eerst bruikbaar wordt na toevoeging van het existentiepostulaat van minstens één klasse van het in de laatste definitie aangegeven karakter, een postulaat dat in het comprehensie-axioma niet geïmpliceerd ligt en vrijwel op toelating van intuitieve volledige inductie neerkomt.