Centrum voor Wiskunde en Informatica

SCHOUTEN BESCHOUWD

Samengesteld door
B. Dijkhuis
H.A. Lauwerier

CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31 - 20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31 - 20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Centrum voor Wiskunde en Informatica

SCHOUTEN BESCHOUWD

Samengesteld door
B. Dijkhuis
H.A. Lauwerier

1991 Mathematics Subject Classification: 01A70, 01A60.
ISBN 90 6196 432 6
NUGI-code: 811

Printed in the Netherlands

Ter inleiding

Prof.dr.ir. J.A. Schouten had een sterke band met de Stichting Mathematisch Centrum. Hij was een van de oprichters en heeft eerst als secretaris-penningmeester, later als voorzitter van het Curatorium en tijdelijk ook als directeur een belangrijke rol gespeeld bij de ontwikkeling van de Stichting. Toen hij in 1969 afscheid nam, was hij 23 jaar voor de Stichting werkzaam geweest.

Het leek ons een passende gedachte om Schouten, 25 jaar na zijn vertrek, weer in herinnering te brengen door een aantal reeds eerder verschenen publikaties van en over hem te bundelen en opnieuw uit te geven. Wij danken de auteurs en de uitgevers, die ons daarvoor hun toestemming hebben gegeven.

In dit boek treft u allereerst drie beschouwingen aan over de persoon Schouten en zijn werk, geschreven kort na zijn overlijden door mensen die nauw met hem hebben samengewerkt en als vriend met hem hebben opgetrokken.

Vervolgens is een aantal boekbesprekingen opgenomen, waaruit te lezen valt hoe men destijds in de wetenschappelijke wereld tegen Schoutens werk aankeek.

Schouten zelf komt ook aan het woord met een aantal voordrachten en verhandelingen, die gericht zijn op een breder publiek en die een beeld geven van zijn belangstelling voor de fysica en voor wijsgerige en maatschappelijke problemen.

Tussen de artikelen in zijn enkele foto's en een aantal interessante documenten uit Schoutens archief afgedrukt. Wij zijn mevrouw A.M. Schouten-Noorduyn zeer erkentelijk voor het beschikbaar stellen van de stukken, die nog in haar bezit waren.

Achterin is een lijst afgedrukt van publikaties van Schouten. Naast de publikaties op wetenschappelijk gebied zijn ook andere geschriften opgenomen, voorzover wij die hebben kunnen achterhalen. Het merendeel van de publikaties stond reeds vermeld in de lijsten behorend bij de biografieën van A. Nijenhuis in Nieuw Archief voor Wiskunde (3) **20** (1972), 1-19 en van S. Gołąb in Demonstratio Mathematika **4** (1972), 63-85. Toegevoegd zijn onder meer de artikelen op elektrotechnisch gebied uit Schoutens ingenieursperiode, verslagen van voordrachten en boekbesprekingen. Wij danken professor Nijenhuis voor zijn hulp bij het zoeken naar aanvullende gegevens.

B. Dijkhuis
H.A. Lauwerier

VOORWOORD

J.A. Schouten was mijn wetenschappelijke grootvader, als leermeester van mijn promotor J. Haantjes. Daarom gaat dit boekwerk mij ter harte, ook al omdat het een goed beeld geeft van de wiskundige en de mens Schouten. Van de biografische bijdragen valt al direct op die van D.J. Struik, vanwege zijn interessante details. Treffend is het korte voorwoord door F. Klein bij het als boek uitgegeven proefschrift uit 1914. Ook nu nog lezenswaard zijn Schouten's beschouwingen. In het bijzonder geldt dit voor de brochure uit 1920 voor een breed publiek over Ruimte en Tijd (uitwerking van een krantenartikel). Van meer wetenschappelijk belang zijn de Delftse rectorale rede van 1939 over meetkunde en ervaringsstructuren, en de Amsterdamse intreerede van 1949 over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de eerste helft van deze eeuw (een wisselwerking die in deze tweede helft weer nieuwe betekenis kreeg, juist op het gebied van de differentiaalmeetkunde).

Schouten begon zijn ingenieursstudie in 1901 aan de Polytechnische School te Delft (die in 1905 Technische Hoogeschool werd). Hij was eigenlijk een autodidact in wiskunde en natuurkunde, maar hij bereikte al snel het front van de wetenschap. Voor de wiskunde was dit de differentiaalmeetkunde, waarin hij tussen de wereldoorlogen één van de internationale leiders was. De lijst van publikaties geeft daarvan een goed beeld. In het eigen land was hij een soort research-manager, enig in zijn soort, die vele jonge wiskundigen een eerste werkkring verschafte, zowel op wetenschappelijk als op maatschappelijk gebied. Zijn gaven als gezaghebbend geleerde en organisator stelde hij na 1945 ten dienste van het Mathematisch Centrum; als stichter, als curator en als directeur. In 1954 was hij voorzitter van het Internationale Congres voor Wiskundigen in Amsterdam.

Als backbencher herinner ik mij een man van interessante voordrachten en gesprekken, een voorzitter van het Wiskundig Genootschap die tijdens een voordracht in Krasnapolski briesend de zaal verliet om een timmeraar tot zwijgen te brengen, een vooraanstaand Nederlands wiskundige met groot gezag in de internationale wetenschap, en een vriendelijk mens die in Epe blij was met het bezoek van jonge wiskundigen. Ik hoop dat dit boekwerk de herinnering aan J.A. Schouten levend zal houden.

J.J. Seidel

Inhoud

BIOGRAFIEËN

Uit: Jaarboek Nederl. Akad. Wetensch. 1971, 94-100.

Levensbericht van

Jan Arnoldus Schouten

(28 augustus 1883 — 20 januari 1971)

door D. J. Struik

De Schoutens waren scheepsbouwers uit Dordrecht, doch Jan Schouten, de vader van onze wiskundige, na in Leiden een meestergraad te hebben verworven, verkoos een ambteloos leven. In 1882 huwde hij met Hulda Ludovica Deetz, dochter van de directeur van het ziekenhuis in Wezel. Het echtpaar woonde eerst op de Overtoom, nu Amsterdam, toen Nieuwer Amstel, en verhuisde in 1886 naar Nijmegen. Jan Arnoldus werd in Nieuwer Amstel geboren en bezocht in Nijmegen eerst de Nutsschool en daarna de H.B.S. Het huwelijk van de ouders was niet gelukkig en liep op scheiding uit; de zoon bleef bij de moeder, aan wie hij zeer gehecht was, en bleef ook met de familie in Wezel in vrienschappelijke verhouding. Zo leerde hij Nederlands en Duits volledig te beheersen, het Duits was in de letterlijke zin zijn moedertaal.

Reeds op de H.B.S. blonk Schouten uit in de wiskunde en leidde op voor de Militaire Academie in Breda. Hij zocht geen toelating tot een universiteit, waarvoor toen staatsexamen in de klassieke talen was vereist, maar werd in 1901 student aan de Polytechnische School te Delft (die in 1905 de Technische Hogeschool werd). Zijn diploma als elektrotechnisch ingenieur verkreeg hij eerst in 1908 omdat hij in dienst moest (hij bracht het tot sergeant) en daarna een jaar praktisch bij Siemens in Berlijn werkte. Zijn vakanties bracht hij bij zijn moeder in Nijmegen door, waar hij lid was van de roei- en zeilclub. Hier ontmoette hij ook Mej. Maria Margaretha Backer, medeleerlinge aan de H.B.S. en nu studente in de rechten in Leiden. In 1909 trad hij met haar in het huwelijk.

Uit dit huwelijk zijn een zoon, Jan Frederik, en twee dochters, Hilda Margaretha Erica en Petronella Cornelia Maria (Nel), geboren.

Wat Schouten's loopbaan betreft, spoedig na het behalen van zijn Delft's diploma werd hij inspecteur bij de afdeling Elektriciteit van de Plaatselijke Werken in Rotterdam. Hij moest vaak naar het buitenland om kabels te keuren, en werkte mee aan de elektrificatie van Rotterdam. Maar de oude liefde tot de wiskunde bleef hem bij en toen hij in 1912 door een erfenis enige financiële onafhankelijkheid had verworven gaf hij zijn betrekking op en ging terug naar de Delftse Hogeschool. Barrau moedigde hem aan: „Kerel, je bent een eerste klas mathematicus." Hij zou bij Barrau promoveren, maar deze ging naar Groningen en zo werd Cardinaal de promotor. In 1914 kreeg Schouten de doctorstitel, met lof.

In zijn eerste Delftse tijd was Schouten een soort tussenpersoon tussen corps en bond en was actief in een actiekomitee waarin de toestanden aan de universiteit werden besproken en „zelfs" de professoren werden gekritiseerd. Hij interesseerde zich voor de socialistische ideeën die toen in studentenkringen besproken werden, bewonderde Troelstra en nam aandeel in de spoorwegstaking van 1903. Er is altijd een radicale trek in Schouten blijven bestaan. Tot zijn Delftse periode behoorde ook zijn studie van de wijsbegeerte, die hem naar de beroemde (of beruchte) colleges van Bolland voerde; de „Hegelarij" is later wel op de achtergrond gedrongen, maar de ontdekking van een „dialectische draai" kon hem altijd bekoren. Een artikel in de „Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912—'13" is een nog steeds interessante beschouwing. „Over het imaginaire der wiskunde in verband met de categorieënleer", het toont reeds de precieze stijl die voor Schouten ook later karakteristiek was.

De wiskunde werd evenwel meer en meer de ware hartstocht van zijn leven. Zijn proefschrift zette de toon.

Dit proefschrift, een boek van 266 bladzijden door Teubner in de handel gebracht, had de titel „Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis". Felix Klein, in Göttingen, schreef een voorwoord. Het was niet ongewoon dat een wiskundig begaafde elektronicus zich voor de vector analyse ging interesseren. Heaviside was elektrotechnicus, Gibbs kwam tot de vectoren bij zijn studie van Maxwell's elektromagnetisch theorie. Zowel ingenieurs als fysici begonnen in die jaren de vector analyse en haar generalisaties aan te wenden en in Delft werd ze ook door de elektrotechnicus C. J. Snijders gedoceerd. Maar hoe kwam het dat die vectorrekenaars zo kibbelden over methode en notatie? Er waren aanhangers van Grassmann, van Hamilton, van Gibbs, sommigen gebruikten, en sommigen zwoeren bij, quaternionen, anderen maakten verschil tussen polaire en axiale grootheden, tussen vectoren en bivectoren, en er waren minstens vier verschillende nationale notaties. En wat was de betrekking tussen de hogere getallensystemen en de meetkundige structuren waarmee ze werden geassocieerd? Onder de beroepswiskundigen waren er, die van dit hele gedoe niets moesten hebben, en er als „ingenieurswiskunde" de neus voor optrokken.

Sommige beroepswiskundigen zagen het beter in, en onder hen was Felix Klein. Hij begreep de verschillende directe methoden van het standpunt van zijn Erlanger program als vormen van invariantentheorie bij bepaalde groepen en toonde aan dat een groepentheoretische classificatie orde in de verwarring kon brengen. Zo werd een veld voor de zuivere wiskunde geopend. Schouten's dissertatie werkte Klein's idee systematisch uit in drie dimensies voor de groep van draaiingen (en inversies) en tot grootheden (z.g. affinoren) van de tweede orde. En, zodra eenmaal het beginsel van Klein was erkend voor de classificatie niet alleen van algebraïsche en meetkundige grootheden, maar ook voor de constructie van getallensystemen, dan konden ook de kwesties van notatie ernstig worden bediscussieerd.

De dissertatie heeft weinig directe invloed uitgeoefend maar des te meer een indirecte. De geringe directe invloed was te wijten aan de wel precieze, doch moeilijke stijl, verzwaard door overmatig gebruik van speciale notaties. Schouten zelf was er zich later van bewust, dat Weyl's kritiek op de „Orgien des Formalismus" ook op dit boek toepasselijk was. „Den Mann, der dieses Buch geschrieben hat, möchte ich erdrosseln", placht hij wel van zichzelf te zeggen.

Maar de hoofdidee van het boek werd spoedig algemeen aanvaard. Dit is ten dele daaraan te danken dat een belangrijk deel van Schouten's later, veel leesbaarder, werk op het classificatiebeginsel is gebaseerd en in vakkringen werd gewaardeerd. Ook kwam het voor dat andere wiskundigen, onder invloed van Klein of Lie, of ook wel van Schouten zelf, op hun manier de directe methoden in de groepentheorie deden wortelen. Hier is vooral de invloed van E. Cartan te vermelden, wiens gedachten reeds van de laatste jaren der vorige eeuw zich in diezelfde richting hadden bewogen zonder tot een oversterk formalisme te voeren. En ten slotte werden de notatiemoeilijkheden verminderd door de invoering van de tensornotatie en Cartan's ω-notatie, en dit onder de invloed van Einstein's algemene relativiteitstheorie, die toen juist de macht van de tensornotatie voor de fysica naar voren bracht.

Voor Schouten betekende de publikatie van zijn proefschrift dat hij in hetzelfde jaar 1914 benoemd werd tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica aan zijn Delftse Alma mater. Hij heeft deze betrekking tot 1943 bekleed, eerst als collega van zijn promotor, later als lid van een groeiende wiskundige afdeling, waartoe o.a. F. Schuh, C. H. van Os, H. Bremekamp en de vroeggestorven P. J. H. Baudet behoorden. Als docent was Schouten nauwgezet, welvoorbereid en genoot mede door zijn strikte eerlijkheid — zijn ja was ja, zijn neen was neen — groot respect bij de studenten. Toch kon hij, met andere hoogleraren, een zekere onverschilligheid van hun kant niet vermijden, omdat het onderwijs niet geheel aan de behoefte der aanstaande ingenieurs voldeed (o.a. door overdreven nadruk op de beschrijvende meetkunde en op theoretische kwesties die de studenten niet waardeerden), zodat ze liever hun wijsheid opstaken bij buiten de universiteit staande repetitoren, o.a. de toen beroemde Beekman, die hen (voor een financiële consideratie) precies voor hun examen dresseerden.

Schouten, ofschoon zijn plichten als docent en lid van de Senaat veel van zijn tijd eisten — in 1938—'39 was hij Rector Magnificus — kon zich nu verder ongestoord aan de uitwerking van zijn ideeën wijden. De dissertatie van zijn eerste assistente, Mej. Johanna H. M. Manders, „Application of direct analysis to pulsating and oscillating phenomena" (1919) paste het classificatiebeginsel toe op tweedimensionale problemen, waarbij de „mysterieuze" rol die $i = \sqrt{-1}$ in de elektriciteitsleer, door Steinmetz gepropageerd en in Delft door C. Feldman behandeld, binnen het kader van de directe methoden verduidelijkt werd. Schouten zelf was in die dagen bezig met associatieve getallenstelsels en met de door Einstein „gepopulariseerde" tensorrekening in zijn ideeënkring te betrekken. Dit leidde tot zijn „Directe Analysis zur neueren Relativitätstheorie" (1919), waarin de affinoren en hun differentiatie werden afgeleid voor hogere ruimten, ook voor de uitgebreidheid van Riemann. Dit voerde tot de ontdekking van wat Schouten geodetisch meebewegende coördinatenstelsels noemde. Het was oorlogstijd, zodat het beroemde artikel waarin T. Levi-Civita in 1917 zijn parallelisme invoerde, Schouten eerst na het schrijven van zijn artikel in handen kwam en slechts in een voetnoot kon worden aangehaald. Het geodetisch meebewegende coördinatenstelsel, toonde Schouten hierin aan, beweegt zich parallel in de zin van Levi-Civita. De prioriteit van publikatie behoort dus aan Levi-Civita (wiens artikel ook veel makkelijker te lezen was) doch Schouten's onafhankelijke afleiding van het parallelisme een jaar later (zonder een euklidische ruimte waarin de uitgebreidheid van Riemann was „ingebed") bracht de fundamentele betekenis van het begrip beter uit. In verhandelingen van Weyl (1918) en Eddington (1921) werd het parallelisme van Levi-Civita daarna ook voor meer algemene uitgebreidheden gegeneraliseerd. Ten slotte gaf Schouten in 1922 een classificatie van alle lineaire „Übertragungen" of „connecties", die op het begrip van het parallelisme konden worden gebaseerd. Dit opende de weg voor een differentiaalmeetkunde voor algemene uitgebreidheden, waarin een connectie was gedefinieerd. Dus werd de differentiaalmeetkunde in de onderzoekingen betrokken en door Schouten in een reeks van artikelen tot een systematische theorie voor hogere ruimtes uitgewerkt, vooral voor het geval van de uitgebreidheden van Riemann.

Deze jaren, en vele daarna, waren voor Schouten een tijdperk van zelden onderbroken wiskundig werk van merkwaardige eenheid. Een gedeelte van zijn program werkte hij uit in samenwerking met jongere wiskundigen als assistent, Johanna Manders, D. J. Struik, D. van Dantzig, E. R. van Kampen, J. Haantjes en W. van der Kulk. Hij had nu vrijwel geheel de directe methoden door de tensorrekening vervangen, en hij breidde haar uit van de affine tot de conforme en projectieve, en van de reële ruimte tot de unitaire en de spinorrekening. Zijn resultaten werden neergelegd in een aanzienlijk aantal artikelen en in „Der Ricci-Kalkul" (1924), later geheel omgewerkt in de Engelse „Ricci-Calculus" (1954), en gesupplementeerd door de „Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie" (twee delen, 1935, 1938, met D. J. Struik, uitwerking van een kort boek van 1924). Met E. Cartan schreef hij over de groepsuitgebreidheid van enkelvoudige en halfenkelvoudige groepen, met V. Hlavatý over de algemene lineaire connectie, met S. Golab over projectieve connecties. Steeds vond hij medewerkers, die van verschillende delen der wereld tot hem kwamen, niet alleen om tensoren en differentiaalmeetkunde, maar ook om de discipline van wiskundig werken en publiceren te leren. In zijn werk werd de tensoralgebra scherp van de tensoranalyse gescheiden, en waar in de analyse de connecties onder verschillende groepen in het centrum van de belangstelling stonden, zo stonden in de tensoralgebra de classificatie van de tensoren (ik gebruik hier het woord tensor, waar Schouten in die tijd de term affinor gebruikte, voor hem was een tensor toen een symmetrische affinor) van verschillende orde en hun decompositie in elementaire delen op de voorgrond. Zo gaf hij in 1919 een methode aan, tensoren (en de algebraïsche vormen waarmee ze in verbinding staan) onder de affiene groep in reeksen van „eenvoudige" tensoren te ontwikkelen. In 1931 behandelde hij het fijnere geval van alternerende tensoren van de derde graad in zeven dimensies. De algebraïsche classificatie van vectoren en bivectoren onder de affiene, equivoluminaire, speciaal affiene, orthogonale en rotatiegroepen, reeds in zijn dissertatie aangeraakt, vond later een plaats in de „Einführung" van 1935 en in groter detail in de latere „Tensoranalysis for physicists" (1951). Hier vindt men ook de classificering van de tensor van de vierde orde die in de lineaire elasticiteitstheorie een centrale rol vervult. Zijn notatie, op de z.g. „kern-index" methode gebaseerd, belichaamde zijn algebraïsch-meetkundige zienswijze.

Soms waagde Schouten zich ook aan een populaire uiteenzetting. Een mooi voorbeeld is zijn omgewerkt „Handelsblad"-artikel „Over de ontwikkeling der begrippen ruimte en tijd in verband met het relativiteitsbeginsel" (1920, Duits 1924), dat aantoont dat de schrijver zijn Kant en Hegel niet vergeten had en hen met de ideeën van Huygens, Leibniz, Euler en Einstein wist te verbinden.

De ontdekking van de lineaire connecties had de differentiaalmeetkunde uit het strikte kader van het Erlanger program gerukt. Was het mogelijk, Klein's beginsel te „redden" door een nieuwe formulering? Hier kwamen vooral de methoden van Cartan tot aanwending. In 1926 zette Schouten in zijn „Erlanger Programm und Übertragungslehre" zijn nieuw program op, later nog ontvouwd in zijn voordracht op het tensor-seminarie in Moskou (1934). De groepentheoretische classificatie kon worden gehandhaafd zo men scherp onderscheid maakt tussen de meetkunde van Klein in de omgeving van een punt ener uitgebreidheid, en die waarop de connectie tussen de raakruimten in verschillende punten is gebaseerd. In deze formulering lag de kiem van de theorie van het „meetkundig object".

Dit alles geeft slechts een algemene schets van de uitgebreide werkzaamheden van Schouten in die dagen. In de zomer bezocht hij vaak congressen, zoals die van de Deutsche Mathematiker Verein en haar Oostenrijkse zustervereniging, waardoor hij zijn inzichten beter bekend maakte. In 1931 bezocht hij voor negen maanden Amerika, waar hij in Cambrigde, Mass. en in Princeton voordrachten hield, o.a. over spinoranalyse, in 1934 en 1935 reisde hij naar Moskou, waar B. Kagan zijn seminarie over vector- en tensoranalyse hield en waar Schouten's methoden en resultaten bijzonder werden gewaardeerd. De „Einführung" werd in 1939, 1948 in het Russisch uitgegeven.

In 1933 werd hij lid van de Koninklijke Akademie. Hij was een trouw medewerker en bezoeker der vergaderingen. Dit gold ook voor het Wiskundig Genootschap, waarvan hij enige malen voorzitter was. Verscheidene van zijn leerlingen volgden zijn ideeën in hun verder werk. We denken b.v. aan Van Dantzig's bijdragen tot de projectieve differentiaalmeetkunde, aan Hlavatý's onderzoekingen over relativiteitstheorie, Yano's over de differentiaal van Lie, dat van E. J. Post over elektromagnetische velden en dat van Nijenhuis over het meetkundig object. Ook het onderzoek van Russische wiskundigen als B. Rozenfeld en P. K. Raševskiĭ toont Schouten's invloed. In Amerika volgden Veblen, Eisenhart en hun school zijn werk met grote belangstelling.

Deze intense bezigheden, gecombineerd met huiselijke moeilijkheden, ondermijnden Schouten's gezondheid, en alleen zijn ijzersterke wil hield hem staande. De oorlogstijd bracht nieuwe problemen. Hij had geen zin om met de Duitsers samen te werken en in 1943, op zestigjarige leeftijd, vroeg en verkreeg hij om gezondheidsredenen ontslag als hoogleraar in Delft. In dit jaar verkreeg hij ook een echtscheiding, en trad in het huwelijk met Mej. Hilda Bijlsma. Hij kocht de „Zilvergors", een huis tussen de dennen in Epe op de rand van de Veluwe. In die dagen werkte hij met Van der Kulk een lang gekoesterd plan uit, de classificatie van covariante vectoren- en p-vectorenvelden, die tot het probleem van Pfaff en zijn generalisaties voerde. Hij kon nu rustig zijn wetenschappelijk werk voortzetten, het huwelijk was gelukkig en door de zorg van zijn vrouw kreeg hij zijn gezondheid althans gedeeltelijk terug. Gasten waren altijd welkom op de „Zilvergors". Laat ons even Mevrouw Schouten aan het woord:

„Hij is vaak ziek geweest, maar de wil om te leven, zijn gevoel voor humor en het genieten van ons samenzijn haalden hem er altijd weer bovenop. Veelvuldig kwamen jonge wiskundigen bij ons logeren en om te werken, zoals Van der Kulk, Rootselaar, Nijenhuis en Barning. Ook collega's als Yano, Hlavatý, Bompiani en Struik. Ikzelf verzorgde zijn bibliotheek en verstuurde de overdrukken, we gingen samen naar congressen. Hans werd een heel ander mens. Het gespannene ontspande zich en we waren met zijn drieën [Mevrouw Schouten's moeder leefde ook op de Zilvergors] zeer gelukkig. Hij werd een evenwichtig mens, bleef wit wit noemen en zwart zwart, vocht als hij meende dat er gevochten moest worden, maar hij was nooit haatdragend en direct bereid zijn ongelijk te bekennen..."

Na de oorlog kwam Schouten met Van der Corput en Koksma in de commissie voor het bezetten van opengevallen vacatures. Door deze samenwerking, mede met Van Dantzig, Clay en Minnaert, kwam in februari 1946 het Mathematisch Centrum in Amsterdam tot stand. Schouten was van het begin lid van het Curatorium en bleef dit tot het najaar van 1968; hij was enige jaren voorzitter en een tijdlang secretaris-penningmeester. Van 1950—'52 en in 1953 was hij waarnemend directeur, van 1953—'55 directeur. Mede door zijn leiding en initiatief heeft het Centrum zich tot het belangrijke instituut kunnen ontwikkelen dat het nu is. Tot Schouten's bijdragen behoort de voor Europa vroege invoering van een computer en verdere ontwikkeling van een computergroep, die geleid heeft tot de oprichting van N.V. Electrologica (thans Philips-Electrologica). Laten we Drs. F. J. M. Barning van het Mathematisch Centrum aan het woord:

„Niet alleen heeft Professor Schouten in de jaren dat hij aan het Mathematisch Centrum verbonden is geweest, zich intensief met het algemeen beleid beziggehouden, mede onder zijn supervisie berustte ook enkele jaren de afdeling Zuivere Wiskunde. Van die tijd herinner ik mij de samenwerking met Prof. Yano gedurende diens verblijf in Holland en het werk met Prof. Nijenhuis in de tijd van diens promotie. Verder kwam in 1953 een nieuwe druk uit van de „Ricci-Calculus", bij de totstandkoming waarvan hij veel assistentie ondervond van het MC."

In 1949 kwam zijn „Pfaffs Problem and its generalization" uit, geschreven in samenwerking met W. van der Kulk, en in 1951 zijn „Tensoranalysis for physicists". Bovendien was hij van 1948-'53 buitengewoon hoogleraar aan de universiteit te Amsterdam. Zijn inaugurale rede „Over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de laatste veertig jaren" vertoont zijn oude kracht. Ook schreef hij o.a. over mesonvelden en conforme meetkunde, en een serie artikelen over spinruimten (1949—'50). In 1953 verkreeg hij de Ridderorde van de Nederlandse Leeuw.

Hij ging naar congressen en bijeenkomsten, gaf voordrachten in Leuven, Italië, München, Zürich en Straatsburg, en ging jaarlijks naar de bijeenkomsten in Oberwolfach. Voor vierenveertig jaren was hij Commissaris van de Eerste Nederlandse Levensverzekeringsmaatschappij. En in 1954 had het internationaal wiskundig congres in Amsterdam plaats, welks voorbereiding en leiding bij het Mathematisch Centrum, en dus in menig opzicht bij Schouten lag. Hij werd als voorzitter van het Wiskundig Genootschap en van het comitee van voorbereiding tot voorzitter van het congres gekozen — en begroette de Congressisten in zeven talen. Schouten deed niets ten halve.

Dit alles betekende hard en aanhoudend werk bij een wankele gezondheid, vaak de halve week in Amsterdam, de andere helft in Epe. De zorg van zijn vrouw en bezoeken met haar naar Bad Nauheim bleven hem op de been houden. Doch langzamerhand moest hij zich toch inperken. In 1964 verliet hij tot zijn groot verdriet zijn „Zilvergors" en trok naar een, overigens prettige, flat in Epe. In 1969, nu vijfentachtig jaar, nam hij officieel afscheid van het Centrum. In een fraai uitgegeven „Physionomie, psyche en chironomie" boden hem vier van zijn bewonderaars aan het Centrum een bewijs, dat uit het gelaat van een mens (hier Schouten) de computer kan verraden wat er in de geest omgaat (hier de afgeleide van Lie).

Nog anderhalf jaar heeft hij, met goede moed, van zijn werkzaamheden kunnen rusten.

„Node zullen we hem missen", schreef de heer Barning van het Mathematisch Centrum in februari 1971. „Niet alleen een groot geleerde is heengegaan, doch ook iemand die juist door zijn menselijke eigenschappen zich een groot vriend had betoond voor velen."

Uit: Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 20 (1972), 1-8.

J.A. SCHOUTEN: A MASTER AT TENSORS
(28 AUGUST 1883 - 20 JANUARY 1971)

BY ALBERT NIJENHUIS

1. The name of the Dutch mathematician J.A. Schouten is justifiably associated with tensors. Not only is practically all his work closely related to tensors; it also spans the full range, in many ways:

from the notational and conceptual confusion of the early 20th century to the subtle formalism of his kernel-index method;

from the foundational questions related to Klein's *Erlanger Programm* to the applications to unified field theory and engineering science;

from "safely" imbedded Riemannian manifolds to general affine connections in abstract manifolds;

from simple differential equations to Pfaffian systems and their generalizations.

Schouten's mathematical life is a record of 40 years of hard work, exceptional willpower, a bibliography of almost 200 publications, and numerous distinctions.

2. Jan Arnoldus Schouten was born in Nieuweramstel (now a part of Amsterdam) and spent most of his childhood in Nijmegen. In 1901 he entered the Polytechnical School (re-named *Technische Hoogeschool* in 1905) in Delft and became a student in electrical engineering, a new field in those days. It was here that C.J. Snijders gave him his first exposure to vector analysis. He finished in 1908, and was employed by the city of Rotterdam soon after. The electrification of the city was in progress at that time.

In 1909 Schouten married an old friend. This marriage produced one son and two daughters. It ended in divorce, 34 years later.

In 1912 Schouten gained some financial independence through an inheritance, gave up his job and enrolled in the University of Leiden. His doctoral thesis was started under the direction of J.A. Barrau and was finished under J. Cardinaal. Immediately following he was appointed Professor of Pure and Applied Mathematics and Mechanics at his Alma Mater in Delft.

Schouten's mathematically active life, which begins at this point, can be divided into two periods, the Delft period, which is the longer and more intensive one and ends around 1940, and the Epe-Amsterdam period, which begins around 1943 and ends only a few years before his death.

During the Delft period Schouten writes the great majority of his papers and trains most of his pupils. He explores many areas of differential geometry, which we outline in another section. His work leads to recognition, a distinction at Heidelberg, election to membership of the Royal Netherlands Academy of Sciences, three terms (1929-1931) as president of the Netherlands mathematical society (*Wiskundig Genootschap*) and many trips and lecturing invitations. He assumes extensive administrative responsibilities at Delft; in 1938-1939 he holds the rotating position of *Rector Magnificus*.

When in 1940 the country is overrun by the war, Schouten reaches a crisis. He faces the conflict of loyalty between his German mother whom he had loved dearly and the invader whose mentality he despises; many of the pressures on the universities are felt in Delft, and by him, in particular. There also are mounting domestic problems and failing health. Schouten withdraws into the quiet woods of the village Epe and lives by himself. In 1943 he makes the final break: he resigns his position in Delft and divorces his first wife. Shortly afterwards he re-marries. His new wife helps him regain his health and remains his steady companion for the remaining 28 years of his life.

During the Epe-Amsterdam period the emphasis of Schouten's mathematical life is on Pfaffian systems and, naturally, on a consolidation of what he has already achieved. He resumes traveling, presents papers at a number of international meetings and receives a distinction at Venice. He serves another term (1954) as president of the *Wiskundig Genootschap*, and becomes an honorary member in 1966. In 1954 he is president of the International Congress of Mathematicians, in Amsterdam. His main commitment, however, is to the *Mathematisch Centrum* in Amsterdam, which he serves as Director, member of the Executive Board and as member of the Board of Regents, untill 1968. From 1948 to 1953 he is Extra-ordinary Professor at the University of Amsterdam, charged with the teaching of differential geometry.

Schouten had a forceful personality. Little time was wasted hesitating over decisions, and once made they were adhered to. He refused to indulge in self-pity and had little patience with people who acted otherwise. This directness and strictness intimidated many people; yet he was a sensitive person who knew those around him much better than they expected of this brisk and vigorous man.

Schouten's strictness with himself, his demand for high quality, his careful preparation of lectures and his scrupulously precise writing of papers (including extensive references to work of others); all these were valuable examples to his pupils as they went through their apprenticeship with him. Schouten demanded the same standards of his pupils and rewarded them with increasing responsibilities and involvement in his own research.

Tough as he was, Schouten had a strong sense of fairness, a lively sense of humor and was ready to admit when he was wrong. He had few close friends but even fewer enemies, and was deeply respected by many. Those who got a little closer and enjoyed the generous hospitality at the *Zilvergors* (his home during most of his years in Epe) were given a look at a man who could be tender and kind while still calling a spade a spade.

The combination of firmness and sensitivity was a great asset whenever hard personal decisions had to be made. Schouten proved this over and over, in a great many situations. He succeeded in intimidating a military guard in his fluent German when the T.H. in Delft was closed and so saved valuable papers; he served on a committee which had the delicate task of assigning professorial positions after the war had left everything in chaos; he made the Mathematical Centre a smoothly running organization; he put the long-neglected mathematics library of the University of Amsterdam back on its feet; he headed the organization of the 1954 International Congress; and he was the one who averted disaster when the *Wiskundig Genootschap* was split by a controversy over more democratic government. --- In 1953 he received the well-deserved Royal distinction of *Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw* for his work in Amsterdam.

Schouten had numerous pupils and co-workers. Some started as pupils and became his colleagues; others came to him after they had ceased to be students. Many have made reputations for themselves. Any list should include the names of D.J. Struik, D. van Dantzig, V. Hlavatý, S. Gołąb, E.R. van Kampen, J. Haantjes, W. van der Kulk, E.J. Post and A. Nijenhuis. His co-authors also include É. Cartan and K. Yano.

3. In the early part of this century the state of vector analysis was one of confusion: there were the systems of Gibbs, Grassmann and Hamilton, there were such quantities as axial and polar vectors, bivectors, quaternions and other "higher number systems". Few mathematicians understood the relations between these competing systems, and most brushed off the whole thing as "engineers' mathematics". In the spirit of his *Erlanger Programm*, which considers geometry as the study of invariants under the action of a group, Felix Klein suggested a study of the groups acting on space, and a classification of all quantities by their behavior under the action of these groups. The execution of this program in 3 dimensions, for tensors up to degree 2, was the subject of Schouten's doctoral dissertation [1914.2].* It was published as a book, and contains an introduction by Felix Klein. Still, Schouten was not satisfied. Its notation was complicated, and he took Hermann Weyl's complaint about "orgies of formalism" quite personally. His search for better notations would take several more years. He experimented with "direct" (i.e. index-free) notations and found them hard to handle: everyone *thought* in terms of components but suppressed them in writing: the reader had the job of mentally reconstructing them. At the advice of Felix Klein, Schouten set himself to design a good notation in which indices were used to best advantage. His final answer was the "kernel-index method".

Meanwhile, Schouten's thesis had little direct effect, but the ideas became known through later papers, which were also based on the classification principle. Other authors, influenced by Lie, Klein or Schouten, also developed their own "direct" methods based on group theory, notably É. Cartan. The interest in this whole area was, naturally, greatly stimulated by Einstein's theory of relativity.

In his large paper [1918.6] Schouten studied the differentiation theory of tensors (he called them "affinors" most of his life) in higher dimensional spaces, and discovered what he called geodesically moving reference systems. Due to the war he had been unaware of Levi-Civita's famous paper (1917) which introduced parallelism. Thus Schouten lost priority for his discovery to Levi-Civita (whose paper was more readable, actually), though Schouten's formulation was independent of any imbedding in Euclidean space, and therefore brought out the parallelism in a Riemannian space as a more intrinsic notion.

As generalizations of the parallelism idea were developed by Weyl (1918) and Eddington (1921), Schouten was led to a classification [1922.1] of all

* *Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end of this book.*

linear connections (he used the more dynamic German word "Übertragung") which could be based on the notion of parallelism. This opened the way to a study of spaces with general connections, to which many papers were devoted. These general affine connections are still known under the same name, and are usually not symmetric. In order to maintain the utmost in generality he allowed the co- and contravariant quantities their own connections (hence, contraction and covariant differentiation did not commute); even in his *Ricci Kalkül* [1924.2] he maintains the two independent connections.

The ideas which were developed in the elaboration of connection theory turned out to be extremely fruitful: they became a standard method whose applicability seemed to have no bounds. During the next 16 years Schouten turns out about 100 papers, most of which depend heavily on these ideas. In collaboration with Struik, Van Dantzig, Hlavatý, Golab, Van Kampen and Haantjes the methods are applied to ever new situations: imbeddings and their deformations, conformal geometry, projective geometry, Hermitian and unitary spaces, Kähler manifolds (first discovered by Schouten and Van Dantzig [1931.5] though usually credited to Kähler after his 1933 paper), Lie groups and spinors. Several papers are devoted to unified field theory, too. Also the Lie derivative (discovered by Ślebodziński in 1932) fits exactly into the system.

A new report on the state of the art appears in what has become known as *Einführung I* [1935.5]; it has been the standard textbook for Schouten's later pupils. It deals with the basic concepts and the fundamentals of connection theory from a rather formal point of view. It contains the kernel-index method in its final, polished form, and in its discussion of tensors it makes a clear distinction between the algebraic and analytic properties. The applications to differential geometry appear in *Einführung II* (1938) which was written by D.J. Struik. (Struik had been Schouten's assistant from 1917 to 1924.) Both volumes have been translated into Russian.

Schouten has always remained under the strong influence of the *Erlanger Programm*, even when its original formulation had become insufficient. In [1924.8, 1926.3] he discusses its relations to connection theory; it retains its full validity for the geometry of the tangent space, but not in any small neighborhood in a manifold with a connection. Problems related to the *Erlanger Programm* which Schouten studied extensively include the following:

The classification of tensors. In its full generality this problem has no hope of solution; Schouten succeeded, however, to classify all 3-vectors in 7-dimensional space [1931.1].

The classification of tensors by symmetry types. This cruder approach led to more success; it is recorded in the last chapter of the *Ricci Kalkül* [1924.2]. No comparative study of Schouten's work and that of Young and his tableaux seems to have been made; both are hard to read.

The above two are algebraic problems: they concern the tangent space to a manifold at one point. In contrast to this is the search for differential (con)comitants of tensor fields; that is, for tensor fields whose components are invariant functions of the components of given tensor fields *and* their derivatives. Lie brackets of vector fields, Lie derivatives, and the curl of a differential form (covariant multi-vector field) are the common examples; the Riemann-Christoffel tensor as functional of the metric tensor field is still the most bafflingly ingenious construction of all. Schouten searched for more differential concomitants besides these and some other known ones; he initially found only a few [1940.5], and later a few more that appear as exercises in [1954.1]; see also [1953.2]. His last few papers [1956.2] extend work on another differential concomitant found by his assistant Nijenhuis (1951, 1955).

A variation on the above is the search for complete sets of differential invariants of one or more tensor fields. The problem was solved, in the presence of a connection, by Veblen (1922) and his students in their studies of the geometry of paths and normal coordinates. The general problem without a connection seems out of reach again. The special case of a single covariant vector field led him and Van der Kulk to their study of Pfaff's problem and generalizations. Their findings have been recorded in many papers and have been collected in [1949.1].

Of course, the whole differentiation theory of tensor fields and their geometry is a search for differential concomitants of tensor fields and/or connections. Schouten has worked on this problem most of his life, really: his kernel-index method was an ideal tool to ascertain the transformation properties of any expression he came across, and this is no co-incidence.

Also, Schouten's interest in unified field theory was linked to the *Erlanger Programm*: the basic fields (electrical, gravitational, etc.) are largely independent of each other, and have their own invariance properties. Ideas along this line have been continued by E.J. Post.

In the last few years before his retirement Schouten wrote two books, both containing an exposition of his methods. His *"Tensor analysis for physicists"* [1951.3] is more sophisticated than the great majority of books on the subject and aimed at a selective audience. His *"Ricci Calculus"*

[1954.1], officially a new edition of [1924.2] is, in fact, an entirely new book and a veritable storehouse of information on the state of local differential geometry at that time. (The involvement in its writing has been an unforgettable apprenticeship for the author of this article.)

Together with *"Pfaff's Problem"* these books are a record of the state of local differential geometry as Schouten helped shape it and saw it at the conclusion of his fruitful career.

Editors' note: The remaining part of this biography contained a bibliography of Schouten's work. It is not reproduced here, because a revised and extended version of that bibliography is printed at the end of this book. Where necessary, the numbering of the references in the above article has been adapted.

Uit: Demonstratio Mathematica 4 (1972), 63-69.

THE SCIENTIFIC WORK OF PROFESSOR J. A. SCHOUTEN
(28. 8. 1883 — 20. 1. 1971)

by Stanisław Gołąb

INTRODUCTION

On January 20, 1971, died Professor J.A. Schouten after eighty seven and half years of an unusual useful life,in this forty four years devoted to creative scientific work. It can be said without exaggeration that Schouten had opened and closed an epoch in differential geometry. He had opened it because his paper [18] written in 1918 together with a paper of T.Levi-Civite in 1917 initiated a great new and fertile term in differential geometry. He closed it because his last four papers (See [211], [213], [214]) were linked with new problems connected with global geometry on manifolds and with differential topology. Schouten entered the field of differential geometry as an outsider since he had been educated to become an electrical engineer who accidentally took interest in the just created relativity theory. He was fascinated by it and he decided to devote his research to differential geometry which is indispensable to general relativity theory. He retired from active scientific life in 1958 when he had realized that he was no more able to do creative work due to a serious illness. He retired in a rather unusual way: on some day he made a decision to sever his connections with mathematics and he sent his ample library to the Mathematical Center in Amsterdam.This decision turned out to be discontinuous.

An exhaustive discusion of Professor Schouten s works requires a scrupulous collection of the material and will be postponed to a second part of this article which will appear later. In this part I would like to present only his bibliography with a short curriculum vitae. I will also classify his papers and briefly discuss his scientific contributions.

THE LIFE OF PROFESSOR J.A.SCHOUTEN

Johann Arnoldus Schouten was born on August 28, 1883, at Nieuwer Amstel, on the outskirts of Amsterdam. After graduating from high school he started technical study in Delft at the Polytechnic School (for a long time it was the only polytechnic in Holland, which provided excellent engineers especially to the Dutch India). In 1908 he finished the department of electrical engineering with an M.Sc. degree. He accomplished his professional practice in Rotterdam and Berlin. However, scientific interests took over the mind of the young engineer. He got interested in the special relativity theory of Einstein and he noticed instantly that without increasing his knowledge of geometry and physics he would not be able to understand thoroughly this new field which fascinated him. As the first result of this self-study (in mathematics he always remained a self-taught person, he has never finished a regular mathematical study) he wrote a long paper [1] about the foundations of vector and affinor analysis. This paper was introduced by Felix Klein who wrote a favourable preface. On the basis of this paper he was awarded a Ph.D. in mathematics from the Polytechnic in Delft. Felix Klein himself probably did not imagine that twelve years later (after the death of Klein) the young doctor would write a paper in which the famous classification principle of Klein would be significantly generalized.

From 1914 till 1943 Schouten held the position of a professor of mathematics at the Delft Polytechnic. He was the head of the chair of Pure and Applied Mathematics and Mechanics. He lectured more mechanics than mathematics. In 1943 he was forced by the German occupation authorities to leave the polytechnic and he moved to a country home which he previously built in a small village Epe. After the war he returned to Amsterdam where he took part in organizing the newly created Mathematical Center. He became a member of this Center in 1946. For five years (1948-1953) he was simultaneously a professor of the Amsterdam University. In 1931 he spent one year in the United States as a visiting professor. In 1934 he was invited by Professor Kagan to Moscow where he spent six weeks organizing an international conference devoted to applications of tensor calculus. In 1935 he visited Cracow where he delivered a talk on spinor theory [132]. In 1933 he was elected a member of the Royal Academy of Sciences in Amsterdam. In 1954 he presided the International Mathematical Congress in Amsterdam. As one of the chief organizers of this congress he was the life and soul of it. In 1957 he suffered a heart attack which ended his scientific career. As a matter of fact he held yet for a year till 1958 the position of the president of the Mathematical Center in Amsterdam but he ceased any scientific activity and, as I mentioned already, he completely retired from mathematical life although his spirit was still strong enough. At the end of 1970 he suffered a strong attack of diabetes (caused by a developing cancer) from which he did not recover. He died not suffering much on January 20, 1971.

AN OUTLINE OF SCIENTIFIC ACTIVITY OF J.A.SCHOUTEN

The fact that Schouten's interest in geometry had been originated by relativity theory influenced strongly his whole scientific carrer. The number of papers which are connected with physics or entirely belong to physics amounts to 47, that is 24% of the total. But on the other hand there are papers that belong neither to physics nor to geometry despite the fact that they were inspired by physics or geometry. There are also papers belonging to algebra, to differential equations and to the theory of transformatons groups.

When Schouten began his scientific work,two distinguished geometricians, O.Veblen and L.P.Eisenhart, were working in U.S.A., and others like E.Cartan, T.Levi-Civita and W.Blaschke, to mention only the most distinguished names, were active elsewhere in Europe. However, no one of them became an example for Schouten. He found from the very beginning his own way, although he had some common (but independent) ideas with Levi-Civita and with Cartan he had two joint papers. And this independence of research activity is the most important feature of his great individuality. The second feature was the ability for inspiring his pupils to creative work, which in the first stage consisted in collaboration with the master. Among his followers and pupils one can mention the following names (in alphabetical order): D.J.Struik (Professor Emeritus, new living in Belmont, U.S.A.), D. van Dantzig (the late professor from Delft and from Mathematical Center in Amsterdam), V.Hlavatý (the late professor from Prague, later in Bloomington, U.S.A.), E.R. van Kampen (who emigrated from Delft to the U.S.A. and died untimely), writing these word S.Gołąb,J.Haantjes (the late professor from Leid), van der Kulk (he emigrated to the Unites States and worked in IBM, Owergo N.Y.), H.Dorgelo, K. Yano (a distinguished Japanish geometricien), and A.Nijenhuis (presently professor in the Unites States).As we see from the above list, Schouten survived some of his pupils. There are many geometricians in Soviet Union and some other countries who may consider themselves his indirect pupils. The number of joint papers of Schouten with other mathematicians amounts to 73. This also indicates on a very strong individuality of Schouten. The third feature of his individuality is the number of domains in which he worked. As the late Italian mathematician R.Cacciopoli said once,the true mathematican changes every two years his research field. If we even consider Cacciopoli's opinion as strongly exagerating, we have to admit that with respect to Schouten it confirms quite exactly. The fourth feature of scientific activity of Schouten is his ability to far-reaching generalizations marked in most of his papers. In 1930 L.Berwald told me that he was astonished by

Schouten's ability of "seeing" some non-trivial facts in spaces of arbitrary high dimensions. As the fifth quite rarely met feature one can mention his passion for reforming the mathematical symbolism. It is certain that the n-dimensional geometry could not have been developed had it not borrowed the adequate stenographic symbolism from tensor calculus. As a matter of fact the pioneers of these ideas were Ricci, Levi-Civita and Einstein, but only Schouten developed this technique to its perfect shape. Today it is easy to write that (cited after K.Maurin) "the works of Ricci and Christoffel, and later the heroic time of general relativity theory caused the full developement of the so-called tensor analysis with its orgy of indices and connections perfected by Schouten and his school", but one should not forget that for a very long time it was necessary to operate with coordinate systems and an invariant notation without a plethora of indices was unthinkable. Only the developement of the theory of fiber spaces allowed to obtain an invariant notation independent of a coordinate system (i.e. independent of an atlas as is said now) which reduced considerably the number of indices. It is to be atributed to Schouten's merits that he first attempt (with D.J.Struik) to represent the geometrioal content without indices ("Direkte Methode"), but non-geometricians in general do not know this since Schouten later abandoned this method developing instead another called "Kernindexmethode" which turned out to be connected with indices after all. The reforming passion, as far as the symbolism is involved had never left Schouten; probably it was a relic of his technical education. He always claimed that a mathematical symbol had to be possibly simple, but at the some time it had to reflect its full content. As far as the simplicity of proofs were concerned Schouten was so extreme that he said once half-seriously that: "this cannot be true because this is too complicated". The accuracy of proofs in Schouten's works was rather median (similarly as in Cartan's works) but nevertheless admirable if one takes into account his technical background. An extraordinary intuition permitted him to avoid errors in his reasonings. One can ask what were his didactic abilities. His lectures were very clear and lively, he spoke rather fast but understandable. On the other hand his textbooks and papers were written rather heavily and they require from the reader a great effort to follow the main idea. His scientific research were well organized, in a typical engineering way. Because he worked always on several simultanous problems he kept tract of them with the help of double numeration of pages (the running number of the paper and the running number of the actural work), independently of the fact that the pages of the works were always segregate into seperate covers. He also kept a seperate index of titles with corresponding numbers and his file of reprints of related papers was so organized that he could find very fast the necessary work.

I do not know what were his other fields of interest besides mathematics and how much time he devoted to research and to studying literature. He made an impression of an extremaly well organized man. He did not belong to absent-minded persons, but on one occasion I found out that he did not remember his own scientific results. Twice a week we were going together by train to Leid (being a professor in Delft he lectured in Leid as a privatdozent). During one common travel Schouten formulated a problem asking me to solve it. After several days I succeeded in solving it. Schouten told me to prepare a publication about it, but not long later I found a solution of this problem in one of his earlier publications [69].

Among Schouten's publications there are, beside research papers, textbooks, mimeographed texts, monographs, as well as several articles of metamathematical or philosophical character (for example, an opening address after his nomination on the chair at the Polytechnic in Delft, and his inaugural address on the occassion of his election to the presidency of the Polytechnic, and an inaugural address on the occasion of his election to the presidency of Mathematical Center in Amsterdam). These articles are unfortunately published only in Dutch and due to this fact they are not widely known although they contain deep thoughts and philospohical reflections. As an example let me mention the presidential address in 1938 entitled "Geometry and Experiment" in which he predicted in a most exact way the possibility of release of the nuclear energy in such proportions which have found 6 years later their realization in the atom bomb. It is probably the only published scientific prediction concerning physics formulated by a gometrician and not by a profesional physicist.

Editors' note: This biography ended with a list of the scientific publications of J.A. Schouten. It is not reproduced here, because a revised and extended version of his bibliography is printed at the end of this book. Below we merely list those publications which are referred to in the preceding text.

REFERENCES:

[1] *Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis.* Teubner, Leipzig, 1914, viii + 266 pp.

[18] *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.* Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam Afd. Natuurk. Sect. I. **12** (1918), no. 6, 1-95.

[69] *Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen* (joint with A. FRIEDMANN). Math. Z. **21** (1924), 211-223.

[132] *On projective connexions and their application to the general field-theory* (joint with D. VAN DANTZIG). Ann. of Math. (2) **34** (1933), 271-312.

[211] *On currents and their invariant derivatives. I, II.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **59** = Indag. Math. **18** (1956), 371-385.

[213] *On currents and their invariant derivatives. III.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **60** = Indag. Math. **19** (1957), 1-11.

[214] *On currents and their invariant derivatives. IV.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **60** = Indag. Math. **19** (1957), 233-241.

BOEKBESPREKINGEN

Portret uit 1914 zoals afgedrukt in de Almanak van den Delftschen Studentenbond.

Dr. J. A. **Schouten,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Delft, **Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis.** Mit einem Einführungswort von F. Klein und 28 Figuren im Text. [VIII u. 266 S.] gr. 8. Leipzig 1914, B. G. Teubner.

Herr Dr. J. A. Schouten ist seither in Rotterdam als Elektrotechniker tätig gewesen und ist von den elektrotechnischen Problemen aus durch eigene Kraft zu den Theorien durchgedrungen, die er in dem obigen Buche darlegt. — Es handelt sich darum, die geometrischen Größen, die in der Vektoranalysis und den Gibbsschen Dyaden, Triaden usw. auftreten, auf Grund des gruppentheoretischen Prinzips zu untersuchen, das s. Z. von mir aufgestellt wurde: daß alle Geometrie Invariantentheorie einer Gruppe ist, man aber hinsichtlich der zugrunde zu legenden Gruppe in weitem Umfange freie Wahl hat. — Die Untersuchungen des Herrn Schouten sind um so mehr zu begrüßen, als es das erste Mal ist, daß die hier anknüpfenden Entwicklungen, welche allein zu einer rationellen Einteilung der geometrischen Gebilde zu führen scheinen, von einem Manne der Praxis aufgenommen werden. Die besondere Leistung von Herrn Schouten ist, daß er das Prinzip auch in höheren Fällen folgerichtig durchführt. Die dabei hervorkommenden Gebilde höherer Art sind selbstverständlich zum Teil in Mechanik und Physik schon öfter aufgetreten, aber sie dürften bisher noch nicht in dem Umfange, wie es hier geschieht, in systematischer Vollständigkeit aufgezählt sein.

Göttingen. F. Klein.

Uit: Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 33 (1925), 2. Abt., 147-148.

J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. X u. 311 S. Berlin 1924, Julius Springer.

Der Verfasser gibt in seinem neuen Buch eine Einführung, hauptsächlich in das Gebiet der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, auf der Grundlage des Ricci-Kalküls. Es ist allerdings nicht ganz die von Ricci selbst herrührende Gestalt, in welcher dem Leser hier der „absolute" Differentialkalkül dargeboten wird, sondern eine in mancher Hinsicht nicht unwesentlich modifizierte. Der Verfasser spricht sich über seine Abweichungen von der ursprünglichen Riccischen Schreibweise in der Einleitung eingehend aus. Ohne Zweifel werden viele dieser gründlich durchdachten und in längerem Gebrauch erprobten Abänderungen Anklang finden: ob alle, ist schwer zu entscheiden, da in solchen Dingen erfahrungsgemäß der subjektive Geschmack eine große Rolle spielt.

Mit diesem Werkzeug des Ricci-Kalküls hat nun der Verfasser einen überaus umfangreichen Stoff bearbeitet. Unter anderem findet man hier eine ausführliche Wiedergabe seiner eigenen Untersuchungen über die linearen Übertragungen, über die affinen Mannigfaltigkeiten u. a. m., eingeordnet in eine zusammenhängende Darstellung der wichtigsten Teile der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, an die sich noch ein Kapitel invariantentheoretischer Natur anschließt. Dabei werden in erster Linie gerade die Fragen behandelt, die heute im Vordergrunde stehen. Auf den Inhalt des früher erschienenen Buches von D. J. Struik[1]) ist bei der Stoffauswahl Rücksicht genommen, so daß sich beide Werke vorteilhaft ergänzen. Von dem Umfang des behandelten Stoffes mag die Zusammenstellung der Kapitelüberschriften eine Vorstellung geben: I. Der algebraische Teil des Kalküls. II. Der analytische Teil des Kalküls. III. Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen. IV. Die affine Übertragung. V. Die Riemannsche Übertragung. VI. Die Weylsche Übertragung. VII. Die invariante Zerlegung einer Größe höheren Grades.

Jedem Kapitel ist eine Anzahl von Aufgaben beigegeben, deren Lösungen am Ende des Buches zusammengestellt sind. Ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis erleichtert die Benutzung des Werkes.

Prag. L. Berwald.

1) D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Berlin 1922, J. Springer.

J. A. Schouten, Über die Entwicklung der Begriffe des Raumes und der Zeit und ihre Beziehungen zum Relativitätsprinzip; nach der zweiten holländischen Auflage übersetzt vom Verfasser (Wissenschaftliche Grundfragen II). 41 S. Leipzig und Berlin 1924, B. G. Teubner.

Äußerlich imponiert bei dieser populären Einführung das Fehlen jeder mathematischen Formel, also der weise Verzicht auf den Versuch, einen harmlosen Leser zum „Verständnis" der Form $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ zu überreden. Nicht das „was", sondern das „wie" und „warum" der Relativitätstheorie soll ihm — nach des Verfassers Worten — vor Augen treten.

In der Tat bieten die ersten zehn Kapitel wohl auch einem der Materie Unkundigen ein eindrucksvolles Bild von der Wurzel und dem Wesen des Raumproblems, von der Notwendigkeit der relativistischen Fragestellung und ihrer Beantwortung durch Einstein; daß ihm Kap. XI—XIV, die (auf neun Seiten) von der Weylschen bis zur neuesten Eddington-Einsteinschen Theorie führen, allem didaktischen Geschick zum Trotz kaum mehr als ein Ahnen von diesen Dingen vermitteln können, dürfte in der diffizilen Natur der Sache liegen; immerhin wäre vielleicht auch hier ein Verzicht ratsam gewesen.

Fast durchweg ist des Verfassers von manch originellem Gleichnis belebte Darstellung von großer Klarheit; besonders sympathisch hat den Referenten die klare und energische Zurückweisung der Forderung berührt, „daß eine Naturerklärung ganz mit der Vorstellung zu verfolgen sein müsse" (Kap. X). Wie sich die Philosophen mit dieser und mit ähnlichen Thesen auseinandersetzen wollen, ist ihre Sache; hoffentlich aber trägt Schoutens Schrift ihr Teil dazu bei, solch grundlegende Erkenntnisse wenigstens bei den Naturwissenschaftlern zu befestigen; scheint doch selbst manch moderner Physiker, wie gewisse Auswüchse eines quantentheoretischen Modellfanatismus zeigen, noch prinzipiell anders eingestellt zu sein. Hoffentlich verhallt auch die Klage, daß „... Differentialgeometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Gruppen- und Invariantentheorie ... nicht zum allgemeinen Lehrstoff" gehören „... und selbst Mathematikern von Fach ... an vielen Universitäten nicht als notwendige Prüfungsfächer" gelten (S. 2), nicht gänzlich ungehört!

Die Schrift, die ebenso geschickt ein Zuviel an Einzelheiten wie allzugroße erkenntnistheoretische Allgemeinheit zu vermeiden weiß, wird sich schon um dieser Beschränkung auf den Kern der Probleme willen den ihr gebührenden Platz sichern, trotz der stattlichen Schar ähnlich betitelter Veröffentlichungen.

Königsberg. TH. KALUZA.

J. A. Schouten und D. J. Struik. — **Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.** Deuxième édition. Tome I: *Algebra und Uebertragungslehre*, von J. A. Schouten. — Un volume gr. in-8° de XII-204 pages. Prix: broché, Fl. 6; relié, Fl. 6,90. P. Noordhoff N. V. Groningen-Batavia. 1935.

Ce bel ouvrage, dédié à M. Tullio Levi-Civita, n'est, en effet, que le Calcul différentiel absolu. Mais, depuis une dizaine d'années, que de chemin parcouru ! Les dérivées partielles ordinaires ou généralisées n'ont plus que des notations à indices et il en est de même pour les jacobiens. Dans ces conditions, toute la notation semble algébrique et l'exposé peut commencer par un premier chapitre se rapportant très simplement à une algèbre à indices. C'est aussi l'algèbre des *objets géométriques*, objets transformables en d'autres sans que le procédé de transformation puisse jamais altérer l'objectivité dont il s'agit, l'algèbre des groupes, des géométries kleinéennes, de grandeurs ou quantités d'une merveilleuse richesse. Ces grandeurs sont des scalaires, des vecteurs co- ou contravariants, des affineurs de valence quelconque, des densités scalaires ou affines; on peut leur associer des grandeurs conjuguées d'où les constructions hermitiques auxquelles on a, le plus souvent, donné une origine intégrale mais qui sont maintenant atteintes avec le secours des déterminants fonctionnels. Ceci est d'ailleurs fort naturel puisque le déterminant fonctionnel est l'instrument essentiel de la transformation des intégrales multiples.

Les jeux d'indices donnent des classifications nouvelles pour faits et objets; c'est ainsi qu'il y a une *isomérie* tensorielle qui pourrait bien rapprocher géométrie et chimie encore que, pour le moment, il ne s'agisse que de géométrie.

Plus loin, les transformations linéaires, les modes d'action des groupes, les algorithmes, tels l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann ou les quaternions d'Hamilton, retrouvés comme cas particuliers, montrent la toute puissance des méthodes nouvelles.

La valence des affineurs donne aussi un merveilleux procédé de classification tout imprégné de symétries matricielles surtout hermitiques. Il peut encore y avoir un aboutissement en faveur de la géométrie algébrique ou de celle qui se rattache aux transformations de l'équation de Schrödinger.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée aux déplacements ou transports *(Uebertragungslehre)*. Le déplacement par parallélisme généralisé, dû encore à Levi-Civita, en fut le prototype; il devient ici le *pseudo-parallélisme* mais avec quelles généralisations ! Ce sont d'abord celles, de nature pfaffienne, dues à M. Elie Cartan. Les dérivations covariantes se sont compliquées mais pour atteindre des *courbures* dont la notion logique laisse loin derrière les anciennes notions sensibles. Et cependant ces notions logiques peuvent intervenir dans le domaine phénoménal; au delà des représentations tangibles, elles caractérisent l'effort de l'intelligence pure. C'est là un tournant de la Science qui est d'importance prodigieuse.

Il y a une symbolique particulièrement puissante due à Van der Waerden et Bortolotti, symbolique d'abord appuyée sur une formule de R. Lagrange. L'identité de Bianchi s'est considérablement développée. Les extensions de la formule de Stokes ont acquis un rôle synthétique encore signalé dans les travaux de M. Elie Cartan et qui m'a toujours été personnellement très sympathique.

Enfin les dérivées variationnelles de Lagrange (ne pas confondre avec R. Lagrange) permettent des reconstructions ayant toute la généralité des algorithmes précédents.

On ne saurait trop attirer l'attention sur cette réexposition qui, pour le moment, n'est due qu'à M. Schouten. Ce n'est pas d'une science difficile; qu'on se pénètre bien de la notation et tout coule de source. Mais quoiqu'on puisse penser de l'effort à faire, celui-ci apparaît maintenant comme inéluctable. On sait l'immense importance de la Géométrie différentielle à la manière de Bianchi; il s'agit ici d'un surbianchisme impossible à ignorer désormais. Il constitue comme une curieuse réaction de défense du Calcul différentiel à une époque où tout le monde croit apercevoir beaucoup plus de généralité dans le Calcul intégral. A. Buhl (Toulouse).

J. A. Schouten, D. J. Struik. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. 2. vollständig umgearbeitete Aufl. Bd. I: **J. A. Schouten.** Algebra und Übertragungslehre. XII + 202 S. Groningen, P. Noordhoff.

Wie allein schon ein Vergleich des Umfangs ergibt — die erste Auflage ist in einem einzigen Bande von 77 Seiten erschienen (Groningen, 1924; F. d. M. 48, 857) — ist das Ergebnis der Umarbeitung ein völlig neues Werk. Im vorliegenden ersten Band wird nur die formale Seite, der rein algebraische und analytische Rechenapparat, der Differentialgeometrie dargestellt. Verf. beschränkt sich dabei durchweg auf die lineare Übertragungslehre; projektive und konforme Übertragungen bleiben ebenso wie die Theorie der *Finsler*schen Räume und der allgemeinen Bahnkurvengeometrie unberücksichtigt. Auch auf eine axiomatische Begründung hat Verf. bewußt verzichtet. Der so umgrenzte Stoff hat nun allerdings eine umfassende und einheitliche Darstellung gefunden, die wohl zum ersten Mal in einem Lehrbuch die verschiedenen, nebeneinander laufenden Methoden und Richtungen zu einem Ganzen verschmilzt. Die Grundlage bildet der *Veblen*sche Begriff des geometrischen Objekts. Dieser, verbunden mit der vom Verf. entwickelten und konsequent durchgeführten Symbolik mittels der Kern-Index-Methode, ermöglicht eine einheitliche Behandlung all der verschiedenen Größenklassen, der Affinoren und der Affinordichten, der *Hermite*schen Größen, der noch von Eichfaktoren abhängenden Pseudogrößen sowie der für Fragen der Einbettung wichtigen Verbindungsgrößen, die sich auf mehrere Mannigfaltigkeiten zugleich beziehen. Die Methode der direkten Analysis, die in der ersten Auflage noch mit berücksichtigt worden war, ist endgültig zugunsten des *Ricci*kalküls aufgegeben worden. Es sei noch hervorgehoben, daß Verf. klar unterscheidet zwischen lebendigen und toten Indices (z. B. die Unterscheidung des Einheitsaffinors, vom *Kronecker*schen Symbol als einem System von invarianten Zahlen) und durch Einführung besonderer Bezeichnungen die invarianten, halbinvarianten und nichtinvarianten Gleichungen scharf voneinander trennt. Der algebraische Teil des Werkes zeichnet sich ferner dadurch aus, daß ein enger Anschluß an die Matrizenrechnung hergestellt und ein Abschnitt über die Elementarteilertheorie eingegliedert wird. Im analytischen Teil findet man eine eingehende Behandlung der anholonomen Bezugssysteme und im Anschluß daran einen Abschnitt über das *Pfaff*sche Problem. Dadurch gelingt es Verf. leicht, die *Cartan*sche ω-Symbolik einzugliedern. Im Zusammenhang mit der Theorie der geodätischen Gebilde und der Integrabilitätstheorie geht Verf. auch auf die Methoden der Normalkoordinaten und Normalaffinoren der Princeton-Schule ein. Schließlich sei noch auf die Abschnitte über die D-Symbolik von *van der Waerden-Bortolotti*, die die analytische Behandlung der Einspannung von Mannigfaltigkeiten vereinfacht, und die Deformationstheorie hingewiesen.

Das Buch eignet sich vorzüglich zum systematischen Studium der formalen Seite der Differentialgeometrie und als Nachschlagewerk. Als erste Einführung für den Anfänger dürfte es jedoch eben darum und wegen der knappen, alles Weitschweifige vermeidenden Darstellungsweise des Verf. weniger gut geeignet sein, wenn auch eine umfangreiche Aufgabensammlung mit Lösungen das Einarbeiten erleichtern mag.

Inhaltsverzeichnis: I. Algebraisches: § 1. Koordinatensysteme und Gruppen (Koordinaten, geometrische Objekte, Kleinsche Geometrien). § 2. Die algebraische Geometrie der E_n (Gruppe, invariante Definitionen, Eigenschaften, Zahlen und Gebilde, Größen, invariante Beziehungen, invariante Operationen und Verknüpfungen; einige wichtige Größen, Einschränkung der Gruppe; abkürzende Bezeichnungen). § 3. Affinoren der Valenz Zwei in E_n (Allgemeines, nicht hermitesche gemischte Affinoren der Valenz Zwei, nicht hermitesche ko- und kontravariante Affinoren der Valenz Zwei, hermitesche ko- und kontravariante Affinoren der Valenz Zwei). § 4. Die algebraische Geometrie der R_n (der Fundamentaltensor, die Gruppe, der Hauptachsensatz eines Tensors, der Hauptblättersatz eines Bivektors, infinitesimale orthogonale Transformationen). § 5. Die algebraische Geometrie der U_n (der Fundamentaltensor, die Gruppe, der Hauptachsensatz eines hermiteschen Tensors, infinitesimale unitäre Transformationen). II. Übertragungslehre: § 6. Bezugssysteme (die lokalen E_n, die Maßvektoren, anholonome Bezugssysteme, das Pfaffsche Problem, das X_{n-p}-bildende kovariante einfache p-Vektorfeld). § 7. Die linearen Übertragungen (pseudoparallele Verschiebung, kovariante Differentialquotienten, Asymmetrie einer linearen Übertragung). § 8. Die Übertragung ausgedrückt in $a_{\lambda\varkappa}, \nabla_\mu a^{\varkappa\lambda}$ und $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ (allgemeine lineare Übertragungen, metrische und halbmetrische Übertragungen). § 9. Die D-Symbolik von van der Waerden-Bortolotti (die Formel von R. Lagrange, Einspannung, die in X_m induzierte Übertragung, die D-Symbolik). § 10. Geodätische Gebilde (geodätische Linien, lokalgeodätische und geodätische X_m in A_n, geodätische Bezugssysteme und Normalkoordinaten, der Reduktionssatz, Normalkoordinaten in bezug auf eine X_m in A_n). § 11. Krümmung (mehrfache Differentiation, geometrische Deutung von $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, die vier Identitäten für $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, die einfachsten algebraischen Komitanten von $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, geometrische Bedeutung der Skalare K und $\varkappa$ in einer gewöhnlichen V_n, geometrische Deutung der Tensoren $K_{\lambda\varkappa}$ und $G_{\lambda\varkappa}$ in einer gewöhnlichen V_n, Integrabilitätstheorie, die Bianchische Identität, Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, die E_n als spezieller Fall der A_n, der Krümmungstensor ausgedrückt in $a_{\lambda\varkappa}, Q_\mu^{\cdot\varkappa\lambda}$ und $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$, der verallgemeinerte Satz von Stokes, geometrische Deutung der Bianchischen Identität und der zweiten Identität, geometrische Deutung einer Gleichung der Form $\nabla_\mu P^{\mu\varkappa}_{\cdot\cdot\lambda} = 0$, Beziehungen des Krümmungsaffinors und seiner kovarianten Ableitungen zu den Normalaffinoren in A_n, andere Form des Reduktionssatzes, die Cartansche ω-Symbolik). § 12. Variation und Deformation (Mitschleppen eines Feldes, Linien extremer Länge in einer V_n, die Lagrangesche Ableitung, Deformationsprobleme).

Rinow.

Pfaff's problem and its generalizations. By J. A. Schouten and W. van der Kulk. Oxford, Clarendon Press, 1949. 16+542 pp. $12.50.

As originally conceived, Pfaff's problem was to integrate a single equation obtained by equating to zero a linear homogeneous differential expression. Subsequently, the number of equations was increased to a finite arbitrary r and the left members made skew-symmetric forms of arbitrary degrees. Once the dimension of the integral variety sought has been specified, the equations on the differentials are equivalent to equations on the first derivatives of the variables with respect to the parameters on the variety. The most recent generalization, first made in the junior author's thesis written under the senior author's direction in 1945, replaces the skew-symmetric equations defining the derivatives implicitly by parametric equations defining them explicitly, subject to certain conditions on the rank of matrices in the first and second derivatives.

This book gives in one of the notations associated with the tensor calculus a unified account of the main results in the area just outlined. The classical theories of first order linear partial differential systems, reduction of a Pfaffian form or equation to canonical form, and contact transformations are natural applications and are worked into the treatment at the appropriate places. In the realm of the authors' own contributions, there is an extended discussion of the following topics: arithmetical invariants, reduction of systems to canonical form, van der Kulk's integration theory, Cartan's prolongation, and a comparison of inferences to be drawn for partial differential systems from the existence theorems of Cartan and Riquier. The authors' remarks on prolongation will be read with interest but must remain in the domain of speculation until Cartan's prolongation process has been made precise. In particular, to the reviewer, the authors' attribution of symmetry to Cartan's theory at present seems to express a hope rather than an actuality.

This treatise contains a wealth of material gathered together in a uniform treatment for the first time, although it is by no means exhaustive. Numerous exercises are provided together with suggestions for their solution. In some quarters, the notation will be regarded as forbidding. It is to be regretted that all concerned including societies and congresses do not give more attention to the improvement and standardization of notation and nomenclature.

J. M. THOMAS

✱Schouten, J. A. Tensor Analysis for Physicists. Oxford, At the Clarendon Press, 1951. x+275 pp. $6.00.

This text contains an excellent treatment of tensor analysis and applications to linear elasticity theory, dynamics, relativity, and quantum mechanics. Though the text does not assume a prior acquaintanceship with tensor theory, it is desirable that the reader possess some background in the subject. For such a reader as well as for the specialist, this text will furnish a wealth of useful and unified information.

The subject matter is divided into two parts: (1) the development of tensor analysis in E_n (an n-dimensional space determined by the general affine group of coordinate transformations, G_a) and in X_n (an n-dimensional space determined by the general group of coordinate transformations of class C^2 and non-vanishing Jacobian); (2) the application of this analysis to the previously indicated subjects (elasticity, etc.). In the first part, the stress is placed upon those developments which have a bearing on the applications.

First, the author studies the geometry of E_n. In this section, the notation (kernel-index method) and the role of the group G_a and its subgroups (the equivolumar, orthogonal, etc.) in determining a geometry are explained. The author's diagrammatic representations of covariant vectors, contravariant vectors, and of bivectors and trivectors in E_3 and the identifications of these representations for subgroups of G_a are both interesting and valuable. After a study of tensor algebra, and the normal forms of symmetric and alternating second order tensors, the metric tensor is introduced (thus, E_n becomes a Euclidean space, R_n) and the raising and lowering of indices and also orthogonal components are discussed. The local geometry of X_n is that of E_n. To construct the derivative of geometric quantities (tensors and tensor densities) in X_n, which does not possess a connection, the author deals with p-vectors. With the aid of these alternating tensors, a general formulation of Stoke's theorem is obtained. This is followed by a study of the Lie and Lagrange derivatives and anholonomic (often called non-holonomic) coordinates in X_n. After introducing a connection or linear displacement in X_n (which becomes an L_n) the author discusses geodesic and normal coordinates. For the V_n (L_n with a fundamental tensor) it is shown that the first variation of arc length vanishes along a geodesic. Further, by use of parallel transport along a circuit, the author introduces the curvature tensor and then examines the various identities satisfied by this tensor.

Before discussing the applications of tensor analysis, the author considers physical objects and their dimensions. The theory is based upon the transformation relation between the contravariant (or covariant) components and the orthogonal components (which are the physical components when the n-tuple is appropriately chosen) of a geometric object. The dimension of the contravariant components furnishes the absolute dimensions; the dimension of the orthogonal components is said to determine the relative (or physical) dimension. By use of this scheme, the author considers the absolute and relative dimensions of various physical quantities.

The principal problems treated in the elasticity section are the determination of the elastic constants for the various crystal classes and the study of waves in a homogeneous anisotropic medium. After introducing the displacement vector and the strain tensor, the author considers the vector density associated with a two-dimensional facet and then the stress tensor density. In keeping with this approach, the mass density (or mass per measuring parallelopiped) is introduced. An alternative approach is to work with the stress tensor and the scalar mass (or mass per unit volume). By examining the energy relation, it is shown that the elastic coefficients are the components of a tensor-tensor density (a fourth order tensor density which is symmetric in each index of a pair of indices as well as in the pairs). In addition, the dialectric and piezo-electric constants are shown to be the components of tensors. The study of the structure of the elastic, dialectric and piezo-electric tensors for the various crystal classes depends upon the theory that these tensors are invariant under the group of transformations which leaves the crystal invariant. The results are furnished in the form of tables. In the study of waves, the author represents the displacement vector in terms of its amplitude and phase. By use of physical approximations, the two relations between the displacement vector and the normal to the wave front are obtained. Conditions for self-reciprocity of various crystals are examined. The chapter concludes with a study of the quartz resonator.

The theory of classical dynamics of a system of particles is developed for: (1) holonomic systems which are either scleronomic (Cartesian coordinates independent of time) or rheonomic (Cartesian coordinates time dependent); (2) non-holonomic systems. The rheonomic holonomic systems are discussed by introducing an appropriate connection in an affine film space A_{n+1}. Non-holonomic (or anholonomic) systems are treated by introducing the anholonomic object. Further, the equations of Lagrange, Hamilton and the integration of the Hamilton-Jacobi equation are investigated.

In his treatment of special relativity theory, the author's approach is to start with the classical equations and then determine the modifications of these equations which are necessary in order that they remain invariant under the Lorentz transformation. The electrodynamic force equations, the Newtonian equations of motion, and the hydrodynamical equations of motion are treated in this manner. The extensive symbolism leads to elegance of presentation of the various ideas but requires careful reading.

The last chapter deals with those elements of unitary geometry which are needed for an introduction to Dirac's matrix calculus. By introducing complex linear coordinate transformations and a hermitian tensor of rank n, the E_n becomes a U_n. Anticipating terms used by Dirac, the author introduces two types of vectors in U_n, the "ket" and the "bra". The reason for these names and the relation of these vectors to the generalized vectors of these types in the Dirac calculus is explained. The actual transition from U_n to the infinite-dimensional space used by Dirac is made by use of matrices. *N. Coburn* (Ann Arbor, Mich.).

 Uit: Zentralblatt für Mathematik 44 (1952), 383-384.

● **Schouten, J. A.: Tensor analysis for physicists.** Oxford: At the Clarendon Press 1951. X, 275 p. 30 s. net.

Wie aus dem Titel ersichtlich wird, ist das Buch für Physiker gedacht. Die moderne Physik benötigt stets neue Disziplinen der mathematischen Wissenschaften. Insbesondere macht sich die Tensorrechnung immer mehr als erfolgreiches Werkzeug und Hilfsmittel in den verschiedenen Zweigen der Naturwissenschaften im allgemeinen und speziell in der theoretischen Physik geltend. — Es ist klar, daß die Form des Vortrages einer mathematischen Theorie für den Physiker wohl eine andere sein muß als für den Mathematiker. Es besteht das schwierige Problem, ob die Vorlesungen über mathematische Theorien für die Physiker von den Mathematikern oder von den Physikern selbst gehalten werden sollten. Im vorliegenden Fall ist Verf. des Buches einerseits ein hervorragender Geometer und andererseits einer der bedeutendsten Kenner der modernen physikalischen Theorien; er wirkte überdies bahnbrechend für die Symbolik des Tensorkalküls, wobei man bedenken muß, daß es fast keinen anderen Zweig der Mathematik gibt, in dem eine glücklich gewählte Symbolik derart über die Klarheit der Theorie entscheidet. — Man begegnet in diesem Buch auf Schritt und Tritt Kennzeichen einer einzigartigen Methode, die Verf. bereits in mehreren originellen Beiträgen zur Tensorrechnung vorgetragen hat. — Der gesamte Stoff zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil, der 110 Seiten umfaßt, enthält den eigentlichen Vortrag über den Tensorkalkül, der zweite (140 Seiten) die Anwendungen der Tensorrechnung auf die Physik. Dem ersten Teil folgt ein 15 Seiten umfassendes Resumé, das einen Überblick über die grundsätzlichen Begriffe, Definitionen und Formeln gibt. — Im ersten Teil bedient sich Verf. einer von ihm selbst eingeführten und in mehreren Etappen verbesserten Symbolik (der sogenannten Kern-Indizes-Methode) und beginnt mit den Begriffen der Gruppe, des Koordinatensystems, der Klassifikation der Geometrien (dem Kleinschen Prinzip). Der folgende Abschnitt ist dem Grundbegriff des geometrischen Objektes sowie der Klassifikation der Objekte gewidmet. Hier werden die Skalare, Vektoren, Affinoren, Tensoren, Multivektoren und Dichten eingeführt und die wichtigsten Begriffe aus der Algebra dieser Größen besprochen. Der dritte Abschnitt untersucht das Verhalten der oben angeführten Größen, wenn die affine Gruppe auf spezielle Untergruppen eingeschränkt wird. In den ersten drei Abschnitten wurden die genannten Begriffe im affinen Raume betrachtet, während der vierte Abschnitt die Verallgemeinerung dieser Begriffe darstellt, wenn man zu den allgemeinen Räumen X_n übergeht, die auf der allgemeinen unendlichen Gruppe basieren. Der letzte Abschnitt des ersten Teiles (vielleicht zu kurz gefaßt) bringt die Tensoranalysis, und zwar den Begriff des kovarianten Differentials, der linearen Übertragung, der geodätischen Linien, des Krümmungstensors, der anholonomen Systeme und der Integralformeln. — Die Auswahl der Abschnitte des zweiten Teils ist so getroffen, daß die Anwendungen einerseits an und für sich interessant sind und andererseits die Vorteile der Rechenmethode erkennen lassen. Der erste Abschnitt des zweiten Teiles, der hauptsächlich die Resultate des Verf. und Dorgelos enthält, gibt die präzise Definition des physikalischen Objektes sowie dessen Dimension an, und zeigt, wie die Dimension von der Wahl der ihr zugrunde liegenden Gruppe abhängt (eine axiomatische Theorie der Dimensionen von physikalischen Objekten wurde kürzlich von S. Drobot angegeben). Es folgt ein Abschnitt, der Anwendungen auf die Elastizitätstheorie enthält. Insbesondere werden eingehend die moderne Theorie der Elastizitätskoeffizienten sowie die Theorie der elektrischen und piezoelektrischen Konstanten (Cady, Mason) besprochen. Außerdem werden die Tensoren auf die Klassifikation der kristallographischen Klassen und auf die Theorie der Wellen in den homogenen anisotropen Medien angewendet. Der nächste Abschnitt enthält die Anwendung der Tensoren auf die klassische Dynamik (holonome und anholonome Systeme), wobei die grundlegende Theorie der Integration, die an die Liesche Theorie anknüpft (s. J. A. Schouten und W. v. d. Kulk, Pfaff's Problem and its generalisations, Oxford 1949, dies. Zb. **33**, 369), skizziert wird. Der neunte Abschnitt behandelt die relativistische Kinematik und Dynamik, wobei auch die relativistische Hydrodynamik einbezogen wird (es ist zu bedauern, daß die klassische Hydrodynamik in tensorieller Fassung nicht ausführlicher besprochen wird). Die Matrizenrechnung ist derart mit dem Tensorkalkul verknüpft, daß ihr in diesem Buche mehr Platz eingeräumt wurde. In Abschnitt II spricht Verf. seine originelle Anschauung über das gegenseitige Verhältnis der beiden Rechnungen aus und nennt die Spezialfälle, in denen die Matrizenrechnung der Tensorrechnung überlegen ist. Der letzte Abschnitt bringt eine umfangreiche Anwendung des Matrizenkalküls auf die Quantenmechanik von Dirac. — Man kann dem Verf. nicht zum Vorwurf machen, daß er die Anwendungen des Tensorkalküls auf die Physik nicht erschöpft hätte, da er selbst in dem Vorwort die Gründe anführt, die ihn zu einer solchen und keiner anderen Auswahl des Materials veranlaßt haben. — Das Buch ist prächtig ausgestattet. Die Korrektur (die aus Gründen, die der Symbolik eigen sind, sehr schwer ist) ist sehr sorgfältig durchgeführt worden (die einzige vom Referenten bemerkte Ungenauigkeit ist die falsche Figur auf Seite 11). Jeder Abschnitt ist mit einer Anzahl von Übungen versehen. — Es wäre zu wünschen, daß die Physiker mit Hilfe dieses Handbuches diesen schönen Zweig der Wissenschaft, die Tensorrechnung heißt, beherrschen lernen. Möge das Buch auch dazu beitragen, eine einheitliche Terminologie zu schaffen. Ref. fürchtet jedoch, daß das Buch, obwohl von einem so hervorragenden Kenner der modernen theoretischen Physik geschrieben, für einen durchschnittlichen Physiker zu schwierig verfaßt ist. Verf., der mit seiner eigenen Methode wohl vertraut ist, gibt die Auslegung dieser Methode in einer stenographischen Kürze, die der breiten Masse der Physiker eine schnelle Beherrschung derselben schwerlich gestattet. *St. Golab.*

J. A. Schouten, **Tensor Analysis for Physicists,** 275 pag. Prijs geb. 30/. Oxford Un. Press, London, 1951.

Zoals de titel aangeeft, is dit boek geschreven voor physici. In 't algemeen zal een physicus er de voorkeur aan geven, dat de voor zijn theorieën benodigde wiskunde pas ten tonele wordt gevoerd op het moment, waarop hij deze nodig heeft. Dit heeft het voordeel, dat hij dan beter in staat is te doorzien, waarom de betrokken mathematische grootheden worden ingevoerd en waarom bestudering van hun eigenschappen voor zijn problemen van belang is. Hij toch ziet de wiskunde graag met de physische realiteit op de achtergrond. Het gedeelte van de tensorrekening, dat in de physica een rol speelt, is echter zo uitgebreid geworden, dat de genoemde wijze van behandeling ondoenlijk is geworden. De schrijver ontwikkelt dan ook in de eerste vijf hoofdstukken de tensorrekening van een mathematisch standpunt. Wel komt hij aan een wens van de physici tegemoet door aan het einde van dit gedeelte een vijftiental bladzijden beslaande samenvatting te geven van de voornaamste punten van de theorie. Ook de belangrijkste betrekkingen worden hierin nogmaals opgesomd. De eerste drie hoofdstukken zijn gewijd aan de meetkunde van ondergroepen van de affiene groep. Ze hebben een algebraïsch karakter. Veel aandacht wordt besteed aan de ruimtelijke voorstelling van de verschillende grootheden als co- en contravariante vectoren, bivectoren, tensoren enz. Verschillende diagrammen en figuren, waaronder ook een foto, lichten de theorie op originele wijze toe. Aan de nog veelvuldig gebruikte matrixrekening wordt ook een paragraaf gewijd. De methoden van de matrixrekening en de tensorrekening worden hierin met elkaar vergeleken. Hoofdstuk 4 handelt over de meest algemene ruimte uit de differentiaalmeetkunde, de X_n. Hierin vindt men o.a. behandeld het theorema van S t o k e s en de afgeleiden van L i e en L a g r a n g e. De ruimten met overbrengingen, waaronder de ruimte van R i e m a n n de voornaamste plaats bekleedt, vormen de inhoud van hoofdstuk 5. Vooral aan de voor de physische toepassingen belangrijke integraalstellingen is veel aandacht besteed. In hoofdstuk 6 vindt men een uiteenzetting betreffende het verschil tussen physische en geometrische grootheden, dat vooral tot uiting komt in het dimensiebegrip (relatieve en absolute dimensie). Hoofdstuk 7 geeft enige toepassingen op het gebied van de elasticiteitsleer (o.a. spanningstensor, elastische constanten, kristallen, golven in een homogeen anisotroop medium, kwarts-resonator). De klassieke mechanica biedt veel toepassingsmogelijkheden voor de tensorrekening. In 't bijzonder dient hier vermeld te worden de behandeling van anholonome mechanische stelsels met behulp van anholonome coördinatenstelsels en de homogenisering van de vergelijkingen van L a g r a n g e en H a m i l t o n. In het hoofdstuk over relativiteit wordt bij de relativistische dynamica en de gravitatievergelijkingen slechts kort stil gestaan. Uitvoerig gaat de schrijver echter in op de relativistische hydrodynamica. Het boek sluit met een uiteenzetting van de nieuwe matrixrekening, die door D i r a c is ontworpen (de bra-ket theorie).

Vermeldenswaard is, dat de schrijver zich geen moeite spaart de lezer een duidelijk beeld te geven van de ingevoerde grootheden en begrippen. Met een mathematische definitie alleen stelt hij zich niet tevreden. Dit verhoogt de waarde van het werk aanzienlijk. J. H a a n t j e s.

J. A. Schouten (em. Prof. a. d. Univ. Amsterdam), Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and its geometrical Applications. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete Bd. X.) Zweite Aufl. XX + 516 S. mit 16 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954. Springer-Verlag. Preis geh. 55,— DM, geb. 58,60 DM.

Verfasser gibt mit der 2. Auflage seines erstmalig 1923 erschienenen Werkes ein völlig neues Buch. In einer längeren Einleitung berichtet er über die neuen Entwicklungen, die es notwendig erscheinen ließen, durchgreifende Änderungen und Erweiterungen zu bringen. Wie stürmisch diese Entwicklungen waren, davon zeugt das Literaturverzeichnis, das, obwohl keineswegs erschöpfend, etwa 1400 Arbeiten und 350 Autoren zählt.

Der Inhalt des Buches gliedert sich folgendermaßen: In den beiden ersten Kapiteln werden die algebraischen und analytischen Hilfsmittel zusammengestellt. Das 3. Kapitel bringt die linearen Übertragungen, die Krümmung und die Normalkoordinaten. In den nächsten Kapiteln findet man die Theorie der Lieschen Gruppen, das Einbettungsproblem, die projektiven und die konformen Transformationen der Übertragungen und die Theorie der Holonomiegruppen. Den Abschluß bilden eine Reihe von Beispielen, in denen u. a. der harmonische V_n, die verschiedenen Übertragungen für „hybride" Größen (insbesondere Einbettung und Transformation) und die Räume rekurrenter Krümmung behandelt werden.

Gegenüber der 1. Auflage wurden die Abschnitte über das Pfaffsche Problem und die invariante Zerlegung von Tensoren wesentlich gekürzt bzw. gänzlich fortgelassen, da hier die einschlägigen Bücher von I. A. Schouten, W. v. d. Kulk und D. E. Littlewood vorliegen.

Der Leser kann dem Verfasser nicht dankbar genug sein, daß er dieses Buch als reife Frucht seines Lebenswerkes geschenkt hat.

Dresden. M. Hasse.

Uit: Bull. Amer. Math. Soc. **61** *(1955), 364-367.*

Ricci-Calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. By J. A. Schouten. 2d ed. Berlin, Springer, 1954. 20+516 pp. 55 DM; clothbound, 58.60 DM.

Since the publication in 1901 of the famous paper on absolute differential calculus by G. Ricci and T. Levi-Civita which established the foundation of the so-called Ricci-Calculus and especially since the publication in 1916 of the theory of general relativity by A. Einstein, the importance of Ricci-Calculus in its geometrical and physical applications has been universally recognized. The first edition of this book, published in German in 1923, covered all the researches made until then and played an important instructive role in this new branch of geometry. But since then tensor calculus was further developed to a great extent and many new notions were introduced, for example, normal coordinates, the symbolism of exterior differential forms, infinitesimal deformations, Lie derivatives, subprojective spaces and their generalizations in Hermitian geometry. To cover these new notions, J. A. Schouten and D. J. Struik published in 1935 and 1938 their *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* I and II. In this book they introduced the so-called kernel-index method which is a characteristic of Schouten's school.

Since 1935 Ricci-Calculus was again further developed. For example, the projective and conformal geometries have been studied in great detail from various points of view; Finsler and Cartan spaces, general spaces of paths and those of K-spreads were introduced, the motions in these spaces were studied by the use of Lie derivatives; and the ideas of harmonic spaces and of spaces of recurrent curvature were developed by British mathematicians. The book under review was written to cover these new developments in the Ricci-Calculus and the author tries to retain the instructive and the encyclopedic character which "Der Ricci-Kalkül" has. Thus, although the book is entitled "Ricci-Calculus, the second edition," it is an entirely new book.

It consists of eight chapters. The first chapter is devoted to tensor algebra. In the first section, an n-dimensional affine space E_n is defined and the coordinate transformations and point transformations are discussed. In this section the principle of the kernel-index method is explained. We use the same kernel letter to indicate a geometric object and different kinds of indices to indicate its components with respect to different kinds of coordinates. So, with coordinate transformations the kernel letters do not change but a new set of running and fixed indices is introduced. But with point transformations the kernel letters change and the running and fixed indices remain the same.

In the following sections, the author defines and discusses successively quantities in E_n, algebraic operations applied to quantities, subspaces in E_n, rank of a quantity with respect to one or more indices, symmetric tensors, multivectors, tensors of valence 2, introduction of a metric in an E_n, hybrid quantities, and abridged notations. In the last section, the author gives a survey of many different notations. At the end of Chapter I, we read: "Young authors especially, who cannot yet foresee all the consequences, should abstain as far as possible from introducing ad hoc abbreviations."

Chapter II is devoted to analytic preliminaries. The author starts by defining the arithmetic n-dimensional space $\mathfrak{A}_n$ and the geometrical n-dimensional space X_n. The development is similar to that of O. Veblen and J. H. C. Whitehead. Then he discusses geometric objects in X_n, the X_m in X_n, the (non-holonomic) X_n^m in X_n, operators Rot and Div, Pfaff's problem, the theorem of Stokes, anholonomic coordinates, the Lie derivatives and the Lagrange derivatives. In the last section, he compares his own symbolism with that of E. Cartan. This section should be useful for readers who are already familiar with notations other than those of the present book.

In Chapter III, the author comes to the discussion of linear connexions. After preliminary discussions in E_n, he defines the parallel displacements in X_n in a quite general way. Then there follow discussions on the torsion tensor, the curvature tensor, identities satisfied by the curvature tensor, integrability conditions of some tensor equations, geodesics and normal coordinates, Fermi coordinates and formulas in anholonomic coordinates. At the end of this chapter, the author again compares his formulas with those of E. Cartan. The last section is devoted to the linear connexions depending on a non-symmetric fundamental tensor, which A. Einstein used in 1945 to obtain a unified field theory.

Chapter IV is devoted to Lie groups and linear connexions. The classical theory of Lie groups is developed by an ingenious use of the Ricci-Calculus. This chapter deals with finite continuous groups, the parameter groups and the adjoint groups of a finite continuous group, finite continuous transformation groups, the geometry of group space, invariants of a transformation group in the X_n of the ξ^κ, invariants of a group in group space, and properties of integrable groups. Unfortunately the theory of simple and semi-simple groups, developed by E. Cartan and the author himself, is excluded.

In Chapter V, the author discusses imbedding and curvature. He starts with curves and hypersurfaces in a Riemannian space and in a space with a linear connexion. He next develops the theory of general (holonomic and anholonomic) subspaces making use of the D-symbolism due to van der Waerden and Bortolotti. The chapter ends with discussions on product spaces.

Chapter VI is devoted to projective and conformal transformations of connexions. The author first discusses projective transformations in a space with a symmetric connexion and those in a Riemannian space. He next deals with the behavior of affine conics under a projective transformation. In §4, the projective connexions of T. Y. Thomas are discussed but without using one supernumerary coordinate. In §§5 and 6, the author discusses the conformal transformations in a general Riemannian space and also in an Einstein space. Next comes the theory of conformal connexions of J. M. Thomas. The rest of the chapter is devoted to the subprojective connexions of Kagan, Adati's problem on subprojective spaces, subprojective transformations of a linear connexion, and concircular transformations in a Riemannian space.

In Chapter VII, variations and deformations are discussed. The author first explains the general method for dealing with the deformation problems and gets some of the classical results on motions and affine motions in a Riemannian space and in a space with a linear connexion, as well as some recent results by I. P. Egorov, G. Vranceanu, and the reviewer. He then comes to the discussions of deformations of subspaces. The latter part of the chapter is devoted to the discussions of holonomy groups and the symmetric space of E. Cartan. In the last section, the author applies the method of moving frames of E. Cartan to the study of holonomy groups and of symmetric spaces using his own symbolism. It will be very useful to see the relation between the symbolism of E. Cartan and that of the author.

The last chapter entitled "Miscellaneous examples" contains discussions of harmonic Riemannian spaces, connexions in complex spaces, and spaces of recurrent curvature.

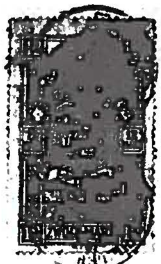
The book has an extensive bibliography. It contains 1400 papers by 350 authors. The author says that in order to retain something of the encyclopedic character of the first edition, he selected the titles in such a way that the reader interested in some topic will always find at least a few titles which can lead him on to more references. The bibliography indicates where each paper is quoted in the text, which is very convenient for the reader.

The main topics in differential geometry which are not treated in this book are the geometries of Finsler and Cartan spaces and their generalizations, the geometries of paths and K-spreads and their generalizations, projective and conformal geometries with the use of supernumerary coordinates, the geometry under contact transformations, the geometry in almost complex spaces, the theory of general geometric objects, the differential geometry of fibre bundles, etc. The reviewer sincerely hopes that the author may soon have another opportunity to give a survey of these interesting topics.

This excellent book by an author who has since 1918 always been a pioneer of research in the fields of differential geometry will serve not only as "an introduction to tensor analysis and its geometrical applications" but also as an encyclopedia for the differential geometers of the front line and it will give all the information in the small necessary for the development of differential geometry in the large.

KENTARO YANO

M. ...11... Pfg. ...... in Marken entwertet.
Berlin W. 9, Linkstr. 41, den 16. ... 192..
Stempel-Verteilung



Verlagsbuchhandlung Julius Springer.

M i t a r b e i t e r v e r t r a g

betreffend die Sammlung

" Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete "

herausgegeben gemeinsam mit den Herren

Professor R u n g e - Göttingen, Professor B o r n - Frankfurt,

von Professor Dr. C o u r a n t.

Zwischen Herrn Professor Dr. J. A. S c h o u t e n , Delft, einerseits und der Verlagsbuchhandlung Julius S p r i n g e r andererseits wird nachstehender Vertrag verabredet und geschlossen :

§ 1.

Herr Professor Schouten gibt auf Grund vorausgegangener schriftlicher und mündlicher Verhandlungen mit dem Herausgeber für die oben erwähnte Sammlung ein von ihm verfasstes, etwa 20 Bogen umfassendes Buch :

Lehrbuch des R i c c i - K a l k ü l s

der Firma Julius Springer in Verlag und hat ihr das vollständige druckfertige Manuskript nebst den Vorlagen für die zugehörigen Abbildungen spätestens bis zum 1. April 1923 abzuliefern.

§ 2.

Die Verlagsbuchhandlung übernimmt die Herstellung des Werkes auf ihre Kosten und sorgt für eine gute, zweckentsprechende Ausstattung in Format und Satzeinrichtung der übrigen in der Sammlung erschienenen Bände.

§ 3.

Herr Professor Schouten erledigt die Korrekturen und Revisionen der einzelnen Druckbogen sowie der Abbildungen. Er enthält sich dabei nach

Contract uit 1922 met de uitgever Julius Springer over de uitgave van *Der Ricci-Kalkül.*

Möglichkeit grösserer, mit besonderen Unkosten verbundener Aenderungen im fertigen Satz, soweit solche nicht durch Schuld des Setzers notwendig werden. Die Rücksendung der Korrekturabzüge muss tunlichst umgehend erfolgen.

§ 4.

Die erste Auflage wird in 1200 Exemplaren gedruckt; ausserdem werden für Freiexemplare, Besprechungs- und Geschenkzwecke 100 Exemplare angefertigt, von denen Herr Professor Schouten 15 Exemplare kostenfrei erhält. Weitere Exemplare für seine persönlichen Zwecke kann Herr Professor Schouten zum buchhändlerischen Nettopreise von der Verlagsbuchhandlung beziehe

§ 5.

Als Honorar erhält Herr Professor Schouten die Hälfte des aus dem Unternehmen sich ergebenden Reingewinns, zahlbar auf Grund jährlicher Abrechnung. Als Reingewinn gilt der Ueberschuss der Einnahmen aus dem Verkaufe von Exemplaren zum buchhändlerischen Nettopreise einschliesslich der Mehrerträgnisse aus Valuta- und Verlegerteuerungszuschlägen über die Ausgaben (nachweisliche Herstellungs- und Vertriebskosten plus 30 % Generalunkosten). Die Abrechnung erfolgt jährlich gegen Ende des Jahres über den Absatz des vorangegangenen Kalenderjahres.

§ 6.

Herr Professor Schouten verpflichtet sich, kein Werk ähnlichen Umfang über das gleiche Thema in einem anderen Verlage erscheinen zu lassen.

§ 7.

Uebersetzungen in fremde Sprachen bedürfen der Zustimmung beider Teile. Die Einnahmen aus dem Verkaufe des Uebersetzungsrechtes werden gleichmässig zwischen beiden geteilt. Die Klischees der Abbildungen sind ausschliessliches Eigentum der Verlagsbuchhandlung.

§ 8.

Die nach Verkauf notwendig werdenden neuen Auflagen erscheinen im gleichen Verlage unter den gleichen Bedingungen. Herr Professor Schouten ist verpflichtet, nach[illegible] ihm die Verlagsbuchhandlung [illegible] der Notwendigkeit einer neuen Auflage Mitteilung gemacht hat, das Manu[illegible] die Vorlagen für etwaige neue Abbildungen für eine solche sp[illegible] halb eines halben Jahres an die Verlagsbuchhandlung abzulie[illegible]

§ 9.

Sollte Herr Professor Schouten durch Krankheit, Tod oder [illegible] Gründen nicht willens oder nicht in der Lage sein, weitere Auflagen zu bearbeiten, so ist die Verlagsbuchhandlung berechtigt, im Einverständnis mit dem Herrn Herausgeber der Sammlung einen neuen Bearbeiter zu wählen. Herr Professor Schouten bezw. seine Rechtsnachfolger erhalten dann für die erste bezw. zweite nicht mehr von ihm herausgegebene Auflage 1/3 bezw. ¼ des Reingewinns auf Grund jährlicher Abrechnung.

Hiermit einverstanden, haben beide Teile diesen doppelt ausgefertigten Vertrag gegenseitig unterschrieben und ausgetauscht.

Delft, den 8 Oktober 1922 — Berlin, den 14. X. 22

J.A. Schouten.

BESCHOUWINGEN van J.A. Schouten

Uit: Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912 / 1913, 105-128.

J. A. SCHOUTEN,

ELECTRO-TECHNISCH INGENIEUR.

OVER HET IMAGINAIRE DER WISKUNDE IN VERBAND MET DE KATEGORIEËNLEER.

Overgedrukt uit de Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912-1913.

OVER HET IMAGINAIRE DER WISKUNDE IN VERBAND MET DE KATEGORIEËNLEER.

Sinds EUCLIDES in zijn „Elementen" de grondslagen legde tot onze moderne wiskunde, hebben er binnen het gebied dier wiskunde twee scherp onderscheiden gebieden bestaan:

1. de leer der op een enkele getallenrij af te beelden hoeveelheid zonder meer, de *Arithmetiek* of *Algebra in engeren zin*, (zonder imaginairen), en

2. de leer van gebieden van meerdere afmetingen, die voorloopig niet zuiver wiskundig werd opgebouwd, maar direct in haar toepassing op de Natuurkategorie Ruimte optrad als Meetkunde.

Bij EUCLIDES berustte die scheiding dan in de eerste plaats op het scherp uiteenhouden van rationeele en irrationeele getallen, welke laatste hij niet als getallen wilde erkennen. Zoo schrijft bij bijv. Elem. Boek 10. 7:

„Onderling onmeetbare grootheden verhouden zich niet als getallen".

Deze scheiding verdween nu in den loop der eeuwen, in 1637 voerde DESCARTES coordinaten in, en werkte met alle verhoudingen van lijndeelen als met getallen, en in 1707 kon NEWTON aan het hoofd van zijn „Arithmetica Universalis" als definitie van het getal schrijven:

„Wij hebben een getal niet zoozeer op te vatten als een veelheid van eenheden, als wel als de abstracte verhouding van de een of andere hoeveelheid tot een andere van dezelfde soort, die dan voor de eenheid gehouden wordt".

Een eeuwenlang bestaande slagboom was hiermede uit den weg geruimd, en de meetkunde kon thans, mede onder gebruikmaking van de door DESCARTES definitief ingevoerde negatieve getallen, in zekeren zin worden teruggevoerd op de rekenkunde. Intusschen nog niet op alleszins bevredigende wijze. Wel was het door de zoogenaamde analytische meetkunde mogelijk geworden voor meetkundige vraagstukken een algebraïsche oplossing te vinden, maar dat was dan ook een oplossing, die allerminst naar den smaak was van den echten meetkundige. Deze toch wil met lijnen, vlakken en hoeken werken, hij wil een methode, die zich direct aanpast aan het in de ruimte gegevene, en niet een, die eerst alle voorkomende gerichte grootheden in 3, voor het vraagstuk beteekenislooze, componenten ontbindt, om dan met die componenten te werken, en de drie gescheiden resultaten eerst later weer samen te stellen. Den echten meetkundige is een dergelijke ontbindingsmethode, hoe gemakkelijk ook vaak in de behandeling, een omweg voor het begrip, een kunstmatige werkwijze, die zich niet geheel aanpast aan de te behandelen stof.

En hij heeft daarin gelijk. De Arithmetiek en de Algebra zonder imaginairen zijn zuiver aangepast aan de betrekkingen tusschen grootheden, die zich laten afbeelden op de rij der reëele getallen van $-\infty$ tot $+\infty$, zij is dus een leer van *eendimensionale uitgebreidheid*, (waarbij we bij uitgebreidheid volstrekt nog niet aan ruimte of tijd moeten denken). Wordt een dergelijke leer nu toegepast op gerichte grootheden, die zich slechts laten afbeelden op een uitgebreidheid van meer dan een afmeting, dan ontstaat er noodzakelijk *disharmonie* tusschen *methode en stof*. Wie de snelheid en de versnelling berekent van een lichaam, dat om een vast punt draait, en dat doet volgens de gewone analytische methode, krijgt een eenvoudige uitkomst, ziet zekere regelmatigheid in de formules, maar de symboliek spreekt niet tot het begrip, en die eenvoudige uitkomst wordt verkregen door een ingewikkelde en ondoorzichtige kunstbewerking. Er onstaat bij hem het *verlangen* naar een rekenwijze, die hetzelfde doet voor meerdimensionale uitgebreidheden, wat de algebra zonder imaginairen doet voor de eendimensionale.

Dit verlangen werd al uitgesproken door LEIBNIZ in 1629, dus 40 jaren voor het verschijnen van DESCARTES' Geometrie, en wel in een schrijven aan HUYGHENS.*) Wij lezen in dat schrijven:

„Ik ben nog niet tevreden met de Algebra, daar zij ons niet in staat stelt de korste wegen te volgen, noch de mooiste constructies te vinden, zooals de Meetkunde dat doet. Daarom geloof ik dan ook, wat dit betreft, dat wij een andere analyse noodig hebben, die eigenlijk geometrisch of lineair is, en die direct een uitdrukking geeft voor de *ligging* (situm), zooals de Algebra dat doet voor de *grootte* (magnitudem). En ik meen hierin het middel te zien om figuren en zelfs machines en bewegingen door letters voor te stellen, zooals de Algebra getallen of grootheden voorstelt".

„De Algebra is niets anders, dan de leer der onbenoemde getallen of grootheden. Maar zij is niet in staat een onmiddellijke uitdrukking te geven voor de ligging, de hoeken, en de beweging, reden waarom het dikwijls moeielijk is, al wat in de figuur is, berekenend af te leiden".

„Doch deze nieuwe rekenwijze, die geheel de figuur volgt, zou zeker ter zelfder tijd kunnen geven èn de oplossing, èn de constructie, èn het geometrisch bewijs, en dat alles op een natuurlijke wijze, en met één analyse".

„Ik geloof, dat men op deze wijze de mechanica bijna zou kunnen behandelen als de geometrie".

Deze aanhalingen zijn wel een sprekend bewijs voor het wonderbaarlijk genie van LEIBNITZ, niet alleen voorzag hij een mathematische ontwikkeling van meer dan twee eeuwen, maar hij wist ook van een hem geheel onbekend stelsel, dat zich eerst na tweehonderd jaar zou beginnen te ontwikkelen, de hoofdeigenschappen en de kenmerkende voordeelen met groote juistheid te voorspellen. Dat het bij voorspellen bleef, en een door LEIBNITZ zelf ontworpen schets van een nieuwe analyse weinig waarde bleek te bezitten, is onbelangrijk, en treedt bij het geniale van zijn visie geheel op den achtergrond.

Intusschen was een der wegen, die tot het nieuwe stelsel zouden voeren reeds betreden, en wel die, welke leidt over

*) Christi Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ed. Uylenbroek. Hagae comitum 1833. fasc. I bldz. 9.

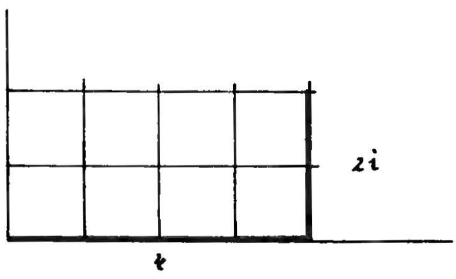
de gewone imaginaire eenheid $\sqrt{-1}$. Reeds de oude Indische mathematicus Bhaskara was zich duidelijk bewust van de onmogelijkheid van een getal, welks tweede macht een negatief getal is. Dit onmogelijke echter als een bepaald *nieuw soort* getal te stellen, bleef voorbehouden aan de Italiaansche algebristen der zestiende eeuw. Bij dat stellen bleek dan, dat met imaginaire getallen even goed gerekend kon worden als met gewone, en dat de uitkomsten juist waren, hoewel volstrekt in het duister bleef, welke beteekenis aan deze nieuwe getallen gehecht moest worden. De zonderlingste denkeelden waren daaromtrent in omloop, zoo beschreef LEIBNIZ ze bijvoorbeeld als:

„elegante(n) und wunderbare(r) Zuflucht des Göttlichen Geistes, amphibienähnliche(n) Grössen zwischen dem Seienden und nicht Seienden".

Er kwam eerst licht, toen men ontdekte, dat de complexe getallen, zijnde de combinaties van een gewoon en een imaginair getal, even geschikt waren, om zekere relaties in een plat vlak af te beelden als de gewone getallen de relaties in een rechte lijn. Nadat door eenige voorloopers, WALLIS 1693, KÜHN 1750, reeds pogingen in deze richting gedaan waren, werd de oplossing gegeven door CASPAR WESSEL in 1799, de ABBÉ BUÉE in 1804, en ARGAND in 1806, welke laatste meestal officieel als de grondlegger der theorie wordt genoemd.

Staan we bij die meetkundige beteekenis een oogenblik stil. Zij $x = x_1 + x_2 i$ een complex getal bijv. $x = 4 + 2i$, waarbij $i = \sqrt{-1}$, dan kan men in een vlak twee onderling loodrechte lijnen aannemen, en op elk een maatverdeeling aanbrengen, bijvoorbeeld in centimeters. We kunnen nu onder $4 + 2i$ in de eerste plaats verstaan de combinatie van twee loodrechte lijnen, de een 4, de ander 2 centimeters lang, en de tweede aanvangende in het eindpunt van de eerste.

Fig. 1.



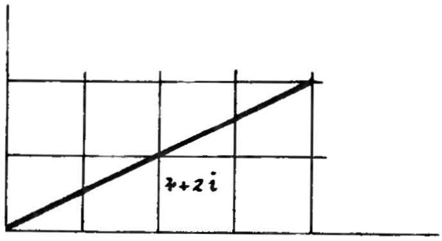


Fig. 2.

Noemen we bijvoorbeeld de horizontale richting Oost, en de verticale Noord, dan kunnen we zeggen, $x = 4 + 2i$ beteekent een reis van 4 centimeters in Oostelijke richting, gevolgd door een reis van 2 centimeters in Noordelijke. Maar we kunnen ook, en dit is principieel verschillend, onder $4 + 2i$ verstaan de eene lijn vanuit O naar het punt P, of, in beeld, een reis in eén enkele richting ergens tusschen Oost en Noord in, die hetzelfde begin- en eindpunt heeft als de eerste reis. (fig. 1 en 2).

Dat die opvattingen principieel verschillen, blijkt bijv. hieruit, dat in het eerste geval een andere beweging als die in Oostelijke of Noordelijke richting niet mogelijk behoeft te zijn, en in het tweede geval alleen de mogelijkheid van een beweging in schuine richting noodig is. Een wandelaar in de straten van New-York kan reizen van de eerste soort volbrengen, die van de tweede soort echter niet, evenzoo een kasteel van het schaakspel; reizen van het aangegeven type der tweede soort kunnen echter worden volbracht door een paard van het schaakspel.

Tellen we nu eens twee complexe getallen bij elkaar op, bijv. $2 + 4i$ en $4 + 2i$, dan luidt die optelling:

$$(2 + 4i) + (4 + 2i) = (6 + 6i)$$

Volgens de eerste opvatting beteekent dit alleen, dat een reis van 2 centimeter naar het Oosten en 4 centimeter naar het Noorden, gevolgd door een reis van 4 centimeter naar het Oosten en 2 centimeter naar het Noorden gelijk staat met een reis van 6 centimeter naar het Oosten en 6 centimeter naar het Noorden.

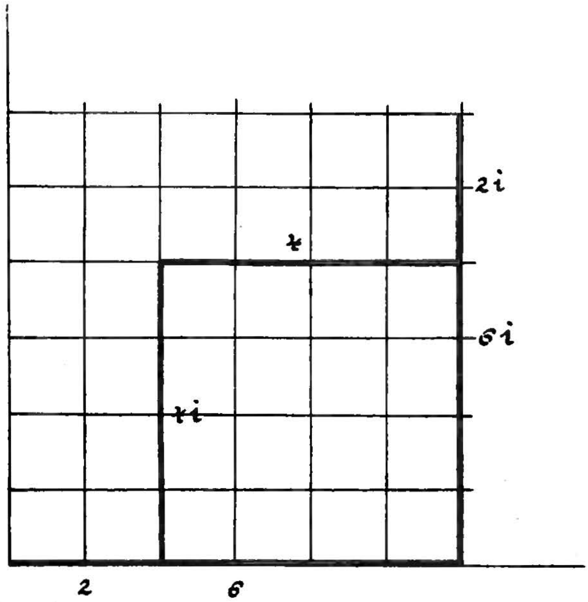


Fig. 3.

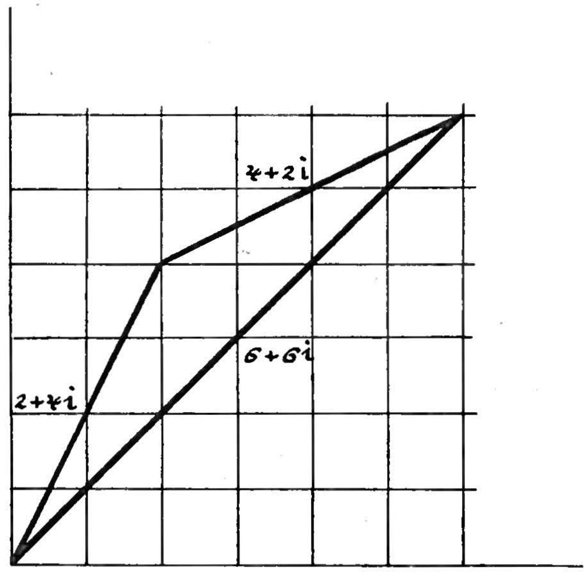


Fig. 4.

Eigenlijk beteekent dus hier de complexe optelling niets anders dan het los en zonder verband naast elkaar bestaan van de twee optellingen:

$$2 + 4 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

welke twee optellingen alleen in *één symbool* zijn samengevat. We verwijderen ons dus hier niet principieel van de gewone wijze van rekenen, en ik stel U voor deze opvatting derhalve te noemen de *arithmetische* of *zuiver quantitatieve*. (fig. 3.)

Nemen we nu de tweede opvatting, dan zien we iets geheel anders, de vergelijking:

$$(2 + 4i) + (4 + 2i) = 6 + 6i$$

drukt nu uit, dat een reis in zekere schuine richting, gevolgd door een reis in een andere schuine richting, te zamen vervangen zouden kunnen worden door een reis in een richting die nog weer anders schuin is. In het schaakspel zouden we zeggen: 4 geschikt gekozen paardesprongen geven aan een paard dezelfde verplaatsing, die een raadsheer in een zet van zes diagonaalvelden zou kunnen bereiken. U voelt direct het principieel nieuwe van deze opvatting, elk complex getal is zelf een entiteit geworden met een eigen richting, niet een louter symbool voor de gelijktijdige aanwezigheid in het denken van twee getallen, en alle richtingen in het vlak zijn als het ware gelijkberechtigd, al zijn ze alle verschillend van aard. (fig. 4.)

Met, dat we echter dien verschillenden aard bedenken, hebben we ons af te vragen, waarin dat verschil, in de eerste plaats dan van de beide richtingen waar we van uitgingen: 1 en i, kan bestaan? En het antwoord kan dan niet meer luiden, dat we hier hebben een *quantitatief* verschil, want alleen 2, 3, enz. verschillen van 1 quantitatief, maar we komen noodzakelijk tot de erkenning van het feit, dat dit verschil er een is van *qualitatieven* aard. 1 en $\sqrt{-1}$ zijn eenvoudig verschillend, afgescheiden van hun quantiteit, ik kan de eene eenheid vergrooten of verkleinen, zonder dat dat verschil ooit is op te heffen, zij verschillen *qualitatief.*

Indien nu echter tellen een niet onderscheidend onderscheiden van iets en wat anders is, dan zijn we bij het rekenen met complexe getallen, die uit *wel* onderscheiden eenheden bestaan, niet meer aan het tellen zonder meer. Anders gezegd brengen we bij het invoeren van complexe getallen zich onderling onderscheidende eenheden in de wiskunde, die als eenheden, die wat inhouden, niet meer eenheden zonder meer zijn; daarmede verlaten we dan echter ook onherroepelijk de kategorieën der *quantiteit*, en halen de kategorieën der *qualitatieve quantitet*, der *maat* binnen.

Volkomen zuiver werd dit reeds in 1804 ingezien door den ABBÉ BUÉE, reeds straks genoemd, die in een in 1806 gedrukte verhandeling schreef:

„La perpendicularité, indiquée par le signe $\sqrt{-1}$ est une qualité. Par conséquent une quantité accompagnée de ce signe, n'est pas une quantité abstraite, parce que ces unités ne sont pas des unités abstraites[1])", woorden, zoo vol dialectisch besef, dat ik niet kan nalaten ze nu nog eens in het Hollandsch te herhalen:

„De loodrechtheid, aangeduid door het teeken $\sqrt{-1}$, is een qualiteit. Een quantiteit, die van dit teeken vergezeld gaat, is dus geen quantiteit zonder meer, aangezien hare eenheden geen eenheden zonder meer zijn".

Dit inzicht gaf nu BUÉE, die zich de wiskunde als leer van zuivere quantiteit dacht, aanleiding, de tweede der straksvermelde twee opvattingen van het complexe getal te verwerpen, en alleen de eerste voor de ware te houden, die dus, waarbij we in een complexe optelling alleen het symbool zien van twee volkomen onafhankelijk naast elkaar bestaande gewone optellingen. Hier moeten wij de groote consequentie van BUÉE erkennen. BUÉE's werk vondt weinig erkenning van tijdgenooten en eerst in 1894 werd er de aandacht weer eens op gevestigd door JANSSEN VAN RAAY[2]). Bij de tijdgenooten voerden de resultaten, bij de werkelijke berekening met complexe grootheden bereikt, al ras tot hunne algeheele erkenning, echter zonder dat men er zich in het algemeen rekenschap van gaf, dat er een nieuwe kategorie was ingevoerd, zoodat men bijvoorbeeld tot op den huidigen dag rustig spreekt over complexe *grootheden*, hoewel dat toch eigenlijk niet heelemaal zuiver is, daar de vraag naar de *hoegrootheid* hier niet zonder meer zin heeft, en er

---

1) Mémoire sur les quantites imaginaires, Philos. Transact. 1806, bldz. 27.

2) W. H. L. Janssen van Raay, Sur les quantités imaginaires en algébre, Archive du Musée Teyler Serie I, T IV part. 2.

voor duidelijke bepaaldheid nog een vraag naar de *hoedanigheid* bij moet komen.

Beschouwen we nu nog eens onze meetkundige voorstelling, dan volgt uit het feit, dat

$$i \times 1 = i$$

dat i niet alleen een gerichte grootheid is, maar ook, verbonden met vermenigvuldigingsteeken, het symbool voor een draaiing over een rechten hoek, een *operatiesymbool* dus. Daar ook $i \times i = -1$, werkt i ook op zichzelf als draai-operator, en daar

$$(i \times i) \times 1 = i \times (i \times 1) = 1,$$

blijft de associatieve wet, dat is de wet, die zegt, dat bijv.:

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

ook voor het complexe stelsel gelden.

Gaan we nu over naar stelsels met meerdere soorten van eenheden, en zulke stelsels bestaan er zeer vele, dan treden er in zooverre geen nieuwe gezichtspunten op, als ook deze stelsels vallen onder de kategorieën der maat. Ook hier kunnen we een complex getal aan de eene zijde duiden als *grootheid*, aan de andere zijde als *operatiesymbool*, een onderscheid, dat overeenkomt met het onderscheid tusschen *gewoon getal* en *ranggetal* in de zuivere quantiteitsleer, en waarvan dat laatstgenoemde onderscheid eigenlijk maar een voorlooper is. Er blijkt echter, dat in die hoogere systemen de gewone wetten van vermenigvuldiging niet zonder meer opgaan, bijvoorbeeld niet meer algemeen $a \times b$ gelijk is aan $b \times a$, waardoor dan de begrippen der operatiewijzen *vermenigvuldiging* en *deeling* een belangrijke verruiming ondergaan.

Daarop wil ik hier nu echter niet verder ingaan, en er liever uw aandacht op vestigen, dat deze hoogere stelsels even geschikt zijn voor de meetkunde in de ruimte als de gewone rekenkunde voor alles wat zich in een rechte lijn afspeelt, en we dus hier inderdaad te maken hebben met de rekenwijzen waarop Leibniz het oog gehad heeft. Om U een voorbeeld te geven, hoe nauw die rekenwijzen zich nu inderdaad aanpassen aan het gebied waarop zij betrekking hebben, wil ik U alleen meedeelen, dat in de algemeene analyse voor het platte vlak, een stelsel met 12 eenheden, het product van twee punten hun verbindingslijn, de som hun gemeenschappelijk zwaartepunt is, en evenzoo het product van twee lijnen van bepaalde grootte en met een bepaalden richtingszin, hun snijpunt, de som hun resultante is.

We hebben dus in de wiskunde onderscheiden een leer van quantiteit en een leer van maat, allicht zult U zich afvragen, is er dan niet ook een deel van de wiskunde, dat leer van zuivere qualiteit zou mogen heeten? En dat is nu inderdaad het geval. Het zal U bekend zijn, dat de logica van ARISTOTELES, de zoogenaamde *formeele logica*, in beeld kan worden gebracht met behulp van cirkeltjes in een plat vlak en het is U wellicht ook bekend, dat wij in plaats van die figuurlijke afbeelding ook een afbeelding in formules kunnen geven. Stellen we begrippen door letters voor, bijvoorbeeld Nederlander door n, en wiskundige door w, dan kunnen we het begrip Nederlander òf wiskundige aangeven door:

$$n + w$$

en het begrip Nederlander èn wiskundige door:

$$n \times w.$$

In beide gevallen vatten we het gelijke der begrippen samen, in het eerste geval het gelijke naar den *omtrek*, in het tweede geval het gelijke naar den *inhoud*. En we hebben dan daarmede een rekenwijze doen ontstaan, waarvoor verschillende der gewone rekenwetten gelden, bijvoorbeeld:

$$a \times b = b \times a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c),$$

en die ook bijzondere eigenschappen heeft, bijvoorbeeld:

$$a + a = a \qquad\qquad a \times a = a$$

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

Over die rekenwijze, de zoogenaamde *Algebra der logica*, die in het laatste deel der vorige eeuw ontwikkeld werd, en thans een deel is van een veel meer omvattend syteem: de *Symbolische logica* van PEANO, wil ik thans niet verder uitweiden, voor mijn doel op het oogenblik is het alleen noodig er Uwe aandacht op te vestigen, dat wij hier met een soort wiskunde te maken hebben, waarin het begrip *quantiteit* nog niet optreedt. Het is een leer van „iets" en „wat anders" in hunne qualitateive betrekkingen, een leer van zuivere *qualiteit*. Als bijzonderheid, die U zeker zal interesseeren, wil ik alleen nog meedeelen, dat de kategorieën „alles" en „niets" in deze algebra gesymboliseerd worden door 1 en 0, aan welke symbolen we dan als het ware zwart op wit den omslag van het „alles" der qualiteit, het „voor zich zijn", tot de eenheid der quantiteit kunnen beleven.

Daarmede zijn we dan echter, alles bij elkaar genomen, zoo heel in het kort, (en anders dan kort kunnen we het hier niet doen), tot een merkwaardig resultaat gekomen, het resultaat namelijk, dat de wiskunde, zooals die thans is, zich opbouwt op de kategorieën van qualiteit, quantiteit en maat, dat is dus op *de eerste hoofdafdeeling der Hegelsche redeleer*, en dat dus eigenlijk alle vragen, betreffende de grondslagen der wiskunde vragen zijn die tot de kategorieënleer behooren.

Het zal u thans interesseeren, hoe men zich van mathematische zijde tegenover dit verband van wiskunde en kategorieënleer stelt. Laat mij u allereerst wijzen op de twee verschillende denkrichtingen, op mathematisch gebied, die in den laatsten tijd om den voorrang dingen, het intuitionisme en het formalisme. (Nog kort geleden werden die richtingen door Proffessor Brouwer van de Universiteit hier ter stede in zijne interessante inaugureele rede*) tegenover elkaar gesteld en vergeleken). Bedenken wij, dat de wiskunde een wetenschap is, waarin het eene uit het andere gededuceerd wordt, dan doemt de vraag op: wanneer alles wordt afgeleid, waaruit leiden we dan eigenlijk af, en daar hebben we dan de principieele vraag naar de grondslagen der wiskunde.

Volgens den formalist stellen we aan het begin eenige definities over het gebruik van symbolen, en voorschriften voor hunne onderlinge samenstelling en verwisseling, uit deze definities en voorschriften, *die volstrekt geen beteekenis hebben*, ontstaan dan, indien men de voorschriften getrouw opvolgt, geheele reeksen van nieuwe samenstellingen van

*) Dr. L. E. J. Brouwer, Intuitionisme en formalisme.

symbolen, *die ook weer geen beteekenis hebben.* Worden nu *bepaalde* symbolen en voorschriften aan het hoofd gesteld, dan is het mogelijk, aan de ontstane reeksen een beteekenis te hechten, *deze* voorschriften en symbolen hebben dus, wat de toepassing betreft, wat voor boven andere willekeurige, dat heeft echter voor den formalist niets met de wiskunde te maken, de wiskunde blijft wiskunde, ook zonder die beteekenis. Brouwer zegt bij zijn karakteriseering van het formalisme:

„De wiskundige exactheid ligt voor den formalist uitsluitend in de wijze van ontwikkeling der relatieserieën, en is onafhankelijk van de beteekenis, die men aan de relaties of aan de daardoor verbonden entiteiten zou willen toekennen. En deze beteekenislooze relatieserieën, voeren volgens den consequenten formalist eerst dan een wiskundig bestaan, wanneer ze met de mathematisch-logische wetten, die hun ontwikkeling beheerschen, in gesproken of geschreven woorden zijn verzinnelijkt tot de zoogenaamde *symbolische logica*"*).

Dat deze denkwijze, waarbij de wiskundige exactheid, zooals Brouwer dat aardig uitdrukt, alleen „op het papier" **) bestaat, tot scherpe kritiek aanleiding heeft gegeven, behoeft geen betoog, laat ik U alleen een nogal heldere uiteenzetting van den intuïtionist en Kantiaan Paul Natorp voorlezen:

„Man setzt an die Spitze Definitionen, die ausdrücklich nur Vereinbarungen über den Gebrauch gewisser Symbole, nicht Urteile, die notwendigerweise wahr oder falsch wären, bedeuten. Man formuliert dann Grundsätze in Hinsicht dieser Symbole, d. h. gibt Vorschriften über die Zulässigkeit gewisser mannichfach wechselnder Zusammenstellungen derselben, Vorschriften die, schon weil sie nur die Zusammenstellung von Symbolen unerklärten Sinnes betreffen, ebenfalls nicht Urteile sein können, welche notwendig wahr oder falsch wären. Auch für diese Zusammenstellungen wird in der Tat kein weiterer Sinn angegeben oder vermisst; sie unterliegen einzig der Beschränkung, dass sie sich nicht selbst aufheben dürfen. Fortan rechnet

*) Dr. L. E. J. Brouwer, Intuitionisme en formalisme.

**) aldaar, bldz. 7.

man, d. h. stellt jene Symbole nach den gegebenen Vorschriften anders und anders zusammen. Ein Verständniss dieses ganzen Thuns wird in keiner Weise geboten, ist auch gar nicht erforderlich, vielleicht eher störend; die Rechnung verläuft genau so und bleibt ganz so zwingend, wenn man nichts dabei versteht, ausser dass den Regeln gemäss verfahren wird. Mau könnte sich die aufgestellten Grundbe griffe durch Rechenmarken ersetzt denken und könnte einen Automaten ersinnen, in den man die Marken nach der durch die Grundsätze bestimmten Ordnung obenhineinsteckte, und der dann das Resultat, nämlich dieselbe Rechenmarken oder gewisse von diesen, nur in einer anderen Ordnung, unten herausfallen liesse. So könnte man in buchstäblichem Sinne Schlüsse „ziehen".

Sei dies nun Wissenschaft oder Spiel, belehrend oder bloss unterhaltend, oder beides oder keins von beiden, für uns genügt zu erklären, dass wir die Aufgabe der Logik so nicht vestehen. Nämlich uns kommt es in der Logik zuerst und zuleztz auf Sinn, auf verstehen an, während wir frank und frei bekennen, bei jenem ganzen Tun nicht viel oder wenig, sondern nichts zu verstehen. Denn weder, dass das Verfahren den aufgestellten Regeln entspricht, noch dass das Ergebniss manchmal (nicht immer) mit etwas, das wir anderweitig zu verstehen glauben, zuzammentrifft, gibt uns ein Verständniss des Sinns dieses Tuns. Soll es überhaupt einen haben".*)

Waarin zien nu de intuïtionisten de fout van het formalisme? In het kort daariu, dat aan alle wiskundige analyse een synthese vooraf heeft te gaan, en niet een beteekenislooze synthese, maar een synthese uit het denken zelf, een *synthese a priori*. En daarbij komt men dan weer terug tot Kant's centrale probleemstelling: „Hoe zijn synthetische oordeelen a priori mogelijk?" waaraan zich de vraag aansluit, welke synthetische oordeelen a priori als de grondslagen der wiskunde moeten worden beschouwd. Daarover zijn de intuïtionisten het nu echter nog allerminst eens.

Poincaré, die, niettegenstaande hij een synthetisch ele-

*) P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, bldz. 6.

ment uit het denken erkent, toch hier en daar sterk tot het formalisme neigt, ziet dat synthetisch element alleen in de zoogenaamde volledige inductie, dat is het bewijs, waarbij men aantoont dat een waarheid voor het getal n geldt, indien bewezen is, dat ze voor n — 1 geldt, en dan zegt: dan geldt die waarheid ook voor alle getallen.*) Overigens maakt hij het bestaan van wiskundige systemen niet afhankelijk van die synthese, maar zegt bijv.: „en mathématique le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie *exempt de contradiction*", wat, zooals u bemerken zult, zuiver formalistisch is.

Zuiver intuïtionistisch is het standpunt van BROUWER. Als grondslag der wiskunde (en van alle werking van het intellect) stelt hij de oerintuïtie der wiskunde. Die oerintuïtie definieert hij dan op verschillende plaatsen ietwat afwijkend; en ik wil derhalve ter wille van de groote belangrijkheid van deze kwestie, eenige verschillende plaatsen even woordelijk aanhalen:

„In de volgende hoofdstukken zullen wij nader ingaan op de oer-intuïtie der wiskunde (en van alle werking van het intellect) als het van qualiteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, eene eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een „tusschen", dat door inschakelen van nieuwe eenheden zich nooit uitput. Waar dus in die oer-intuïtie continu en discreet als onafscheidelijke componenten optreden, beide gelijkberechtigd en even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op zichzelf gestelde andere op te bouwen; immers het is al onmogelijk, dat andere op zichzelf te stellen"**).

„De wiskunde is een vrije schepping, onafhankelijk van de ervaring; zij ontwikkelt zich uit een enkele aprioristische oer-intuïtie, die men zoowel kan noemen *constantheid in wisseling* als *eenheid in veelheid*"***).

*) Verg. bijv. H. Poincaré, la science et l'hypothèse, Deel I, Hoofdstuk I.

**) Dr. L. E. J. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde, bldz. 8

***) Aldaar bldz. 179.

„Hoe zwak nadeze ontwikkelingsperiode der wiskunde het intuïtionisme ook scheen te staan, het heeft zich hersteld, door van de theorie van KANT de aprioriteit der ruimte prijs te geven, doch aan de aprioriteit van den tijd des te vastberadener vast te houden. Dit neo-intuïtionisme ziet het uiteenvallen van levensmomenten in qualitatief verschillende deelen, die alleen gescheiden door den tijd, zich weer kunnen vereenigen, als oergebeuren in het menschelijk intellect, en het abstraheeren van dit uiteenvallen van elken gevoelsinhoud tot de intuïtie van twee-eenigheid zonder meer, als oergebeuren van het wiskundig denken" *).

„Eindelijk is in de oer-instuitie der wiskunde, waarin het saamgehoudene en het gescheiden, het continue en het discrete vereenigd liggen, mede onmiddellijk aanwezig de intuïtie van het lineaire continuum, d.w.z. van het „tusschen". dat door inschakeling van nieuwe eenheden zich nooit uitput, dus ook nooit als verzameling van eenheden zonder meer kan worden gedacht" **).

Zien we nu eens een oogenblik af van de voor onze wijze van denken wat vreemde inmenging van de natuurkategorie tijd, dan blijkt dus de oerintuïtie van BROUWER een samenvatting te zijn van *kategorieën der quantiteit*, te weten:

BESTENDIGING en VERKEERING (alleen quantitatief gedacht),

EENHEID en VEELHEID,

CONTINUITEIT en DISCRETIE.

Bijzonder valt ons dan daarbij nog op het volkomen juiste, en in een niet-Hegeliaan zeker bijzonder te waardeeren besef van de noodzakelijke eenheid van tegendeelen in elk dezer kategorieënparen. Aan den anderen kant bemerken we daarentegen een volkomen, en zelfs uitdrukkelijk, afwijzen van de kategorieën der qualiteit.

We kunnen nu a priori verwachten, dat dit stelsel zonder meer opgaat voor wat wij genoemd hebben het zuiver quantitatieve gedeelte der wiskunde, dat er echter wrijvingsverschijnselen zullen optreden in zijn verhouding tot de algebra der logica aan den eenen kant en tot stelsels

*) Inaugureele Rede, bldz. 11.
**) Aldaar bldz. 12.

met verschillende soorten eenheden aan den anderen kant.

En dat is dan ook inderdaad het geval. In de eerste plaats erkent BROUWER de algebra der logica niet als iets dat een eigen bestaan heeft, wat volkomen consequent is. Hij zegt bijvoorbeeld „dat de wiskunde onafhankelijk is van de zoogenaamde *logische wetten*", waarmee hij dan bedoelt de formeele logica, die wij hier als het quantiteitsvrije deel der wiskunde beschouwd hebben, en iets verder zegt hij:

„Is dus de wiskunde niet afhankelijk van de logica, de logica is wel afhankelijk van de wiskunde: vooreerst het *intuïtief logisch redeneeren* is dat bijzonder wiskundige redeneeren, dat overblijft, als men bij het bekijken der wiskundige systemen zich uitsluitend beperkt tot relaties van *geheel en deel*, de beschouwde wiskunde-systemen zelf dragen in geen opzicht een speciaal elementair karakter, dat een prioriteit van logisch redeneeren ten opzichte van gewoon wiskundig redeneeren zou kunnen wettigen. Men zou kunnen aanvoeren: De relatie *opvolger zijn van*, die het redeneeren in de eigenlijke wiskunde beheerscht, treedt in de wiskunde van het logisch redeneeren *nog niet* op. Dan dient geantwoord: Die relatie treedt weliswaar *niet meer expliciet* op, maar ze is er zoo goed als in alle wiskunde verondersteld; immers ze vergezelt allen wiskundigen opbouw, hoezeer ze ook na het beëindigen van den bouw bij zekere relaties tusschen de elementen niet meer als zoodanig duidelijk in het oog springt"*).

Aan den anderen kant richt hij zich scherp tegen de hoogere getalklassen van CANTOR, die niet zuiver op de quantiteitskategorieën zijn op te bouwen, welke onmogelijkheid hij afdoende bewijst. Die getalklassen wil hij dan ook niet als tot de wiskunde behoorend erkennen en ook dit is weer even consequent. Nu kant hij zich niet tegen het invoeren van stelsels van meerdere afmetingen, iets wat we op grond van het straks gezegde toch hadden moeten verwachten en ik voor mij zou dat hier anders willen hebben, het is echter niet mijn doel hier bestaande

*) Over de grondslagen der wiskunde, bldz. 127.

stelsels te kritiseeren en slechts, u te laten zien, wat er in de denkbaarheden der moderne wiskunde ligt, voorzoover mij dat zelf duidelijk is. Daarom wil ik over dit punt heenloopen, temeer, daar wij straks nog eenige andere schrijvers zullen hooren, die opvattingen huldigen, welke weer meer overeenkomen met de wijze waarop we het hier doordenken.

Ik zou nu eens het volgende met u willen bedenken. Wie op de basis der quantiteitskategorieën de eendimensionale getallenrij opbouwt, komt op twee wijzen in aanraking met de kategorieën der qualiteit. In de eerste plaats zal hij aan het begin, bij het stellen van eenheid en *andere* eenheid, zich moeten afvragen, waarin dat andere van die eenheid dan wel bestaat. En dan is het antwoord, dat dat onderscheid, dat in zekeren zin wel geen onderscheid meer mag heeten, toch in zooverre het nog onderscheid is, in elk geval nog niet quantitatief is, maar alleen *qualitatief* kan wezen. Het is u allen bekend, dat HEGEL het stellen van eenheid en andere eenheid dan ook nog behandelt in het hoofdstuk der qualiteit. Met andere woorden, de mogelijkheid van het stellen van veel eenheden vooronderstelt al het bedacht hebben van de kategorieën „iets" en „wat anders", van de kategorieën der *qualiteit*.

In de tweede plaats komt, bij het invoeren van getallen van verschillende soort, zij het dan hoogere complexe getallen of andere, wederom de noodzakelijkheid van de qualiteitskategorieën op den voorgrond. Want dat verschil kan ook hier weer niet van quantitatieven aard zijn. We hebben dat besef al gevonden bij BUÉE met betrekking tot de complexe getallen, en vinden het in onzen tijd weer terug bij NATORP en bij COHN, welke laatste in dit verband uitdrukkelijk opmerkt, dat de qualitatieve onderscheidbaarheid der eenheden *„unter den Voraussetzungen der Arithmetik nicht vorkommt"*.*)

Hebben wij thans gezien, hoe BROUWER zich geheel baseert op de kategorieën der quantiteit, de Kantiaan PAUL NATORP gaat verder, en legt aan de wiskunde *DE kategorieën* als

*) J. Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, bldz. 214.

zoodanig, en wel in Kantschen zin gevat, ten grondslag. Daarbij ontwikkelt hij dan voorzoover het de kategorieën van qualiteit en quantiteit betreft, die hij iets anders dan KANT, en zuiver als tegendeelen in een eenheid stelt, een stelsel, dat vrij is van natuurkategorieën, en dat inderdaad alle bewondering verdient. Verderop leidt hem het Kantsche schema tot het invoeren van kategorieën die wij daar in dat verband nu nog liever niet zouden zien, houden we ons echter alleen aan quantiteit en qualiteit, dan moet worden erkend, dat NATORP tot een opstelling gekomen is, die alle aandacht verdient, en zeker van dialectischen geest doortrokken is, hoewel er zeer belangrijke afwijkingen met de Hegelsche opstelling te constateeren zijn. Tegenover eenheid, veelheid en hoeveelheid in het quantitatieve stelt hij identiteit, verscheidenheid en gelijkheid in de qualiteit en u bemerkt hier al dadelijk het verschil met de Hegelsche kategorieënleer. Intusschen zijn zijn uitwerkingen van dien aard, dat wel geen Hegeliaan, die van deze dingen een studie gemaakt heeft, zijn boek geheel onbevredigd ter zijde zal leggen. Zijn afleiding der wiskundige grondslagen uit deze kategoriale vooropzettingen is bijzonder interessant, vooral waar hij er telkens weer op wijst, hoe zelfs de zuivere quantiteitsleer eigenlijk toch weer niet zonder meer, en zonder inmenging der qualiteit op te stellen is, een zuiver dialectische gedachte. Inderdaad zijn dan ook het positieve en het negatieve, het rationeele en het irrationeele, de eenheid zonder meer en het als eenheid gestelde getal in een getalverhouding, niet meer zuiver en alleen quantitatief verschillend en hebben wij hier al voorloopers te erkennen van de kategorie der maat.

Het besef, dat wij voor de invoering van CANTORS transfinite getallen, de kategorieën der qualiteit noodig hebben, treedt bij NATORP zeer duidelijk op, en in zooverre vormt NATORPS werk „Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften" een zeer te waardeeren aanvulling op BROUWERS „Grondslagen der wiskunde". Kort uitgedrukt is BROUWERS standpunt: 1e. Transfinite getallen kunnen niet worden afgeleid uit de quantiteit. 2e. Zij behooren dus niet tot de wiskunde, en dat van NATORP: 1e. Transfinite getallen kunnen niet worden afgeleid uit de quantiteit zonder meer, maar wel in verband met de kategorieën der qualiteit, 2e. De wiskunde bouwt zich op op qualiteit *EN* quantiteit, en de genoemde getallen behooren dus wel tot de wiskunde.

Merkwaardig is, dat NATORP zoo weinig zegt over de zoogenaamde Algebra der logica. Aan de hand van het Kantsche schema brengt hij haar ten slotte onder de modaliteit. Dat hij juist tot die modaliteit komt is niet onbegrijpelijk. Aan den eenen kant toch vormt de qualiteitswiskunde de mogelijkheid der wiskunde, evenals in het zuivere quantiteitsdeel die wiskunde zich aan ons vertoont in haar karakter van noodzakelijkheid, en zij zich in de leer der hoogere getallen eindelijk, waar alle gebondenheid aan bepaalde regels van vermenigvuldiging enz. vervalt, tot hare volle vrij heid ontplooit. Anderzijds, en dit is een van NATORP's argumenten, zijn al onze *bewijzen* gericht op het aantoonen van mogelijkheid, onmogelijkheid en noodzakelijkheid, en daar de algebra der logica ons de regels dier bewijsvoeringen verschaft, staat zij in verband met de kategorieën der modaliteit. Nu is er zeer zeker tusschen dit alles verband, evenals er verband is tusschen de formeele logica en den Hegelschen drieslag BEGRIP, OORDEEL en SLUITREDE, maar het gaat hier niet om dat verband, het gaat er om, welke kategorieen als de grondslagen der in formules gebrachte logica van ARISTOTELES te beschouwen zijn, en dan is het zeker, dat deze logica niets anders is, dan een leer van „iets" en „wat anders" in hun onderlinge nog niet quantitatieve betrekkingen, een leer, die zich dus opbouwt op de kategorieën der *qualiteit*.

Hoewel NATORP deelen der wiskunde erkent, die uit een samenwerking van qualiteit en quantiteit zijn geboren, brengt hij deze niet onder een nieuwe kategorieënafdeeling, en een zulke zou hem dan ook in het Kantsche stelsel ontbroken hebben. Waar wij echter in de dialectische redeleer naast qualiteit en quantiteit beschikken over de kategorieënafdeeling der *maat*, daar ligt het voor ons voor de hand, die deelen der wiskunde te beschouwen als een *leer van maat*, en zoo tot de opstelling te komen, die ik reeds straks aangaf:

de logistiek:	leer van qualiteit,
de arithmetiek en de algebra zonder imaginairen:	leer van quantiteit,
de algebra der hoogere getalstelsels:	leer van maat.

De meetkunde en de zuivere bewegingsleer beschouwen wij dan als de leer der maat in hare eerste toepassing, zijnde de toepassing op het eerste paar natuurkategorieën, ruimte en tijd.

* * *

Ik hoop U door deze beschouwingen over de leer van verschillende intuïtionistische schrijvers te hebben doen zien, dat er in de moderne mathematiek een streven bemerkbaar is, de kategorieënleer binnen de sfeer van hare werkzaamheid te trekken, en in deze kategorieënleer het fundament harer, en zoo aller, wetenschap te zoeken. Waar dit nu van Kantiaansche zijde reeds uitdrukkelijk is geschied, daar is het mijns inziens van het grootste belang voor de wetenschap, dat de Hegeliaansche school, die dan toch over de meest uitgewerkte kategorieënleer beschikt, die er op het oogenblik bestaat, deze vragen eens van haar standpunt beziet, en in den modernen mathematischen strijd stelling neemt. Mij dunkt dat hier voor de mathematisch ontwikkelden onder de Hegelianen van onzen tijd, en speciaal onder ons Hollanders, die het voorrecht hebben gehad van een zoo meesterlijke inleiding in de Hegelsche gedachtenwereld, een schoone taak is weggelegd. Met de opstelling, die ik hier gaf, heb ik dan ook slechts getracht u tot verdere bestudeering dezer vragen op te wekken, ik verzoek u vooral, die opstelling als een geheel voorloopige te beschouwen, die voor mij zelf slechts een soort program is, en die naar ik hoop op u, al is het ook wellicht niet overtuigend, dan toch animeerend heeft gewerkt.

Indien dat zoo is, wil ik alleen nog voor twee dingen waarschuwen. Om in deze richting iets te bereiken, wat wetenschappelijke waarde heeft, en alleen daarom kan het ons te doen zijn, is zooveel *detailkennis* noodig, zooveel echt *wiskundig* weten, dat een ieder, mag hij ook nog zoo philosophisch of zelfs logisch geschoold zijn, zonder die kennis buiten staat is iets anders te doen dan tijdverknoeien, het zou dan moeten zijn, dat hij over een genie beschikte, dat hem in staat stelde waarheden te zeggen, die hij zelf niet kan begrijpen. Den niet-wiskundigen onder u beveel ik dus ten sterkste aan: of bestudeer wiskunde, of blijf van de kategorieën der zijnsleer af. In de tweede plaats hebben we te verwachten, dat bij de bestudeering van de grondslagen der wiskunde in verband met de kategorieënleer zal blijken, dat er een eeuw van denken, een eeuw van mathematische ontwikkeling, na HEGEL is voorbijgegaan, een eeuw, waarop HEGEL's arbeid allerminst zonder invloed is gebleven, een eeuw echter ook, waarin zich vele nieuwe begrippen hebben ontwikkeld en waarin vele reeds bekende begrippen zich hebben veranderd en verruimd. Begrippen als: getal, vermenigvuldiging, imaginair, hebben we nu eenmaal in 1913 anders te denken dan in 1813 en HEGEL's behandeling dier begrippen, heeft dan ook in onzen tijd allerminst op ieder punt zonder meer te gelden. Wanneer er dus van Hegeliaansche zijde van deze dingen studie gemaakt wordt, en wanneer dat geschiedt door personen, die het begrip boven de letter stellen, dan is het zeer waarschijnlijk, dat de resultaten in, wellicht belangrijke, punten van HEGEL's opstellingen zullen blijken af te wijken, hoewel zeer zeker ook menigmaal het geniale van HEGEL's visie aan het licht zal treden. Een buitenstaander zou dan kunnen zeggen, dat die resultaten heelemaal niet meer Hegeliaansch zijn, en daar zou hij dan, verstandig gesproken, wel gelijk in kunnen hebben. De ware dialecticus ziet echter de bestendiging juist alleen in de verkeering, hij begrijpt, dat het dialectisch denken, dat blijft staan, geen dialectisch denken meer is, en dat men allerminst HEGEL verloochent, waar men een van zijn opstellingen vervangt door een andere, die, gegrond op een eeuw van ontwikkeling, de resultaten dier ontwikkeling omvat, en zich aanpast aan het denken van onzen tijd. Wij hebben dus, mocht een dergelijk geval eens optreden, te begrijpen, dat dat in de rede ligt, wij hebben te waken tegen het angstvallig vasthouden aan de letter en bovenal zullen wij ons hebben te onthouden van het op touw zetten van ketterjachten.

Want waar het ten slotte om gaat is niet het denken van HEGEL, of laat ik zeggen den vorm, waarin HEGEL het ware denken trachtte te vatten, maar het gaat om het ware denken zelf, om het denken van het *WARE* zelf. En het hoogste wat wij kunnen bereiken is dit, dat wij in een bepaalden tijd den vorm weten te vinden, die voor dien tijd de meest zuivere uitdrukking is van dat denken, van de *IDEE*.

VOORWOORD.

Het volgende is te beschouwen als een betoog voor de wenschelijkheid van een onderzoek naar een mogelijke uitbreiding der vector-analyse. Door overwegingen, liggende buiten het terrein van het hier te bespreken, vestigde zich bij schrijver de overtuiging, dat de bestaande systemen van geometrische analyse, hoeveel ook met hen reeds bereikt is, toch nog niet als afgesloten kunnen worden beschouwd. Deze overtuiging werd te sterker door de opmerking van het feit, dat een geheele klasse van ruimte-grootheden en hare betrekkingen, die der zoogenaamde tensoren, buiten het gebied der eigenlijke geometrische analyses valt. Een onderzoek, dat bij gebrek aan den noodigen tijd niet anders dan zeer vluchtig kon wezen, gaf toch al dit resultaat, dat althans de richting werd gevonden, waarin moest worden gezocht, en in die richting werkelijk reeds iets van stelselmatigen samenhang kon worden ontdekt. Hiervan zij dan in het volgende iets medegedeeld. Bij de beoordeeling, in het bijzonder der afleidingen van vergelijkingsstelsels, moet in het oog worden gehouden, dat werkelijk mathematisch zuivere afleidingen uit den aard der zaak eerst de vrucht kunnen zijn van het onderzoek zelve, en dus in een voorloopige verhandeling niet kunnen worden verwacht, en bovendien, dat schrijver slechts enkele der hoofdwerken kon bestudeeren, en het hem geheel aan de mogelijkheid ontbrak eigen resultaten te toetsen aan de uitkomsten van een behoorlijk literatuur-onderzoek.

Wordt het geheel beschouwd als een beknopt overzicht van de belangrijkste resultaten van een, noodzakelijkerwijs gebrekkig, vooronderzoek, waardoor eerst de lust tot het eigenlijke onderzoek werd gewekt, dan kan er te dien opzichte geen misverstand ontstaan. -

ROTTERDAM, December 1911.

J. A. Schouten

Voorwoord van een geschrift getiteld “Over de wenschelijkheid van een onderzoek naar een mogelijke volledige uitbreiding der Vector-Analyse”, waarin Schouten zijn onderzoeksplannen uiteenzet. Het geschrift van 59 bladzijden is aanwezig in de bibliotheek van de Technische Universiteit te Delft. De eerste resultaten van Schoutens onderzoek werden in 1914 gepubliceerd in zijn proefschrift.

Over de ontwikkeling der begrippen

RUIMTE EN TIJD

in verband met het relativiteitsbeginsel,

DOOR

DR. J. A. SCHOUTEN
Hoogleeraar aan de T. H. te Delft

ROTTERDAM
NIJGH & VAN DITMAR'S UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ
1920

INHOUD.

VOORWOORD

De belangstelling, waarmede schrijver's populair artikel over de theorie van Einstein in „Het Handelsblad" van Donderdag 8 Januari 1920 werd ontvangen, hebben er hem toe gebracht, hetzelfde onderwerp hier uitvoeriger doch, naar hij hoopt, met dezelfde mate van populariteit te behandelen. Er zijn in den laatsten tijd zoo vele voor een grooter publiek bestemde verhandelingen over de relativiteitstheorie verschenen, dat er wel een excuus noodig is, wanneer men dit aantal nog met een wil vermeerderen. Een dergelijk excuus bestaat echter, daar de schrijver zich niet ten doel gesteld heeft het „wat", dat is de feitelijke opbouw der relativiteitstheorie, nog eens op zijne wijze te vertolken, doch veel meer de vraag naar het „hoe" en het „waarom" onder oogen heeft willen zien. Het „hoe", in zooverre als getracht is de ten grondslag liggende gedachte, afgescheiden van alle mathematische formuleering in het licht te stellen, het „waarom", waar een poging werd gedaan te doen zien hoe het relativiteitsbeginsel allerminst een los in de lucht hangend modeverschijnsel is, doch de noodzakelijke consequentie van een eeuwenlang ontwikkelingsproces.

Het boekje is berekend op lezers van „algemeene ontwikkeling", het bevat dienovereenkomstig geen enkele mathematische formule, en de enkele voorkomende vaktermen zijn omstandig verklaard.

Delft, Januari 1920.

J. A. SCHOUTEN.

OVER DE ONTWIKKELING DER BEGRIPPEN RUIMTE EN TIJD IN VERBAND MET HET RELATIVITEITSBEGINSEL

INLEIDING.

De nog zoo jonge algemeene of nieuwere relativiteitstheorie, die eerst omstreeks 1914 door A. Einstein werd opgesteld, kan reeds op groote resultaten terugzien. Niet alleen gelukte het Einstein een lang bekende doch tot nu onverklaard gebleven afwijking in de beweging van de planeet Mercurius uit zijn theorie te verklaren, hij wist ook te voorspellen, dat een lichtstraal, die dicht langs de zon passeert, een afwijking moet ondergaan, en deze voorspelling werd door de metingen der Engelsche expedities naar Sobral en Principe bij gelegenheid van de zonsverduistering van 29 Mei 1919 schitterend bevestigd. Dit laatste succes is van den aard als dat van Leverrier, toen hij door zuivere berekeningen het bestaan van de destijds nog onbekende planeet Neptunus nauwkeurig wist aan te wijzen.

Intusschen zou het nu geheel verkeerd zijn te meenen, dat de algemeene relativiteitstheorie haar beteekenis ontleent aan de verklaring, die zij voor deze beide zeer kleine effecten geeft. Toch is dit een meening, die buiten den engen kring van astronomen, natuurkundigen en natuurkundig geïnteresseerde mathematici veelal wordt aangetroffen. Men heeft daar den indruk, dat de nieuwe theorie een plotseling uit de lucht gevallen buitengewoon lastig en gecompliceerd apparaat is, dat met alle tot nu geldige opvattingen over ruimte, tijd en mechanica breekt, en dat dat alles dan alleen dient om voor enkele nauwelijks meetbare effecten een verklaring te vinden. De groote genialiteit van Einstein wil men, het voetspoor van bekende groote tijdgenooten volgende, wel gaarne erkennen, de opmerking wordt echter wel gewaagd, dat de ware natuurverklaring ook eenvoudig moet zijn en de hoop blijft uitgesproken, dat het eenmaal moge gelukken de effecten in kwestie op eenvoudige wijze op de basis onzer gewone van ouds beproefde begrippen over ruimte, tijd en materie te verklaren. Nu is zulk een oordeel, hoe begrijpelijk ook, niet billijk. In de eerste plaats is zij volstrekt niet zoo ingewikkeld en zeker niet ingewikkelder dan menige andere in hoog aanzien staande theorie op exact wetenschappelijk gebied. Dat de bestudeerder in het begin op moeilijkheden stuit, valt niet te ontkennen, deze moeilijkheden vinden echter hun oorzaak in de omstandigheid, dat de theorie gebruik maakt van onderdeelen der wiskunde, die door toevalligheden in de historie der opleiding aan onze scholen en Universiteiten juist vallen buiten het gebied, dat men op het oogenblik als voor „algemeene ontwikkeling" noodzakelijk heeft afgebakend.

Differentiaalmeetkunde, groepentheorie en invariantentheorie, de bedoelde onderdeelen, zijn niet lastiger dan andere deelen, zij behooren nu echter toevallig niet tot de algemeene leerstof, de beide laatste zijn zelfs voor de zuivere mathematici in vele Universiteiten geen eigenlijke examenvakken.

In de tweede plaats is de relativiteitstheorie geen plotseling opgekomen nieuwigheid, die met al het bestaande breekt ter wille van de verklaring van enkele kleine effecten. Integendeel, zij is de rijpe vrucht van een zeer geleidelijke ontwikkeling, die reeds bij Euclides begint en waartoe de grootste denkers het hunne hebben bijgedragen. Als noodzakelijk eindresultaat dezer ontwikkeling, die stap voor stap kan worden nagegaan, levert zij ons de mogelijkheid tot oplossing van de voor het geheele wetenschappelijk denken centrale problemen van ruimte en tijd, en het is vooral daaraan, dat zij haar buitengewone beteekenis ontleent. In het navolgende zal worden getracht van die ontwikkeling een beeld te geven. [1])

Euclidische en niet-euclidische meetkunde.

Het is bekend, dat het aan Euclides voor het eerst gelukte een opbouw der meetkunde te geven, waarbij enkele grond-

1) Den lezer zij aanbevolen bij de lezing het schema te volgen, dat aan het einde is opgenomen.

stellingen of axioma's als waar werden aangenomen, terwijl alle andere stellingen uit die grondstellingen konden worden bewezen. Hij trachtte zijn grondstellingen zoo eenvoudig te kiezen, dat een ieder ze ook zonder bewijs direct zonder bezwaar kon aanvaarden. Merkwaardigerwijze gelukte hem dat bij één axioma, het zoogenaamde parallellenaxioma, niet. Dat axioma luidt:

„In een plat vlak laat zich door een punt buiten een lijn „slechts één lijn trekken, die de gegeven lijn, hoever ook „verlengd, nooit snijdt."

Het valt op, dat deze stelling allerminst onmiddellijk vanzelfsprekend is, en toch zeker van een geheel andere orde van vanzelfsprekendheid dan een der andere axioma's, bijv.:

„Door twee punten kan altijd één en slechts één rechte lijn „gelegd worden."

Het gelukte Euclides niet het parallellenaxioma door een ander meer vanzelfsprekend te vervangen, hoewel wel als zeker mag worden aangenomen, dat hij lang zal hebben geaarzeld voor hij er toe overging een zoo weinig vanzelfsprekende stelling tot axioma te verheffen. Het getuigt wel van de buitengewone scherpte van zijn inzicht, dat hij zich niet door eenig schijnbewijs, zooals er later zoovele zijn gevonden, heeft laten verleiden het parallellenaxioma als bewezen stelling te aanvaarden.

Intusschen bleef het parallellenaxioma, dat van een zoo geheel anderen aard was als de andere axioma's, na Euclides een steen des aanstoots der wiskundigen en het gaf aanleiding tot het ontstaan van twee fundamenteele vraagstellingen:

A. Welke is de stelling van het parallellenaxioma tot de overige axioma's?

B. Zijn de axioma's der meetkunde a priori gegeven of gronden zij zich op de ervaring?

In de eerste fase van het onderzoek naar vraag A trachtte men het parallellenaxioma uit de andere te bewijzen, tal van schijnbewijzen werden gevonden en ontmaskerd, en men kwam weinig verder. Alleen gelukte het aan te toonen, dat het axioma in nauw verband staat met de stelling, dat de som van de hoeken van een driehoek altijd 180 graden is.

In de tweede fase begon men van een anderen kant en trachtte met behoud van de andere axioma's het parallellen-axioma te vervangen door een zijner beide tegenstellingen:

1. In een plat vlak gaat door een punt buiten een lijn meer dan één lijn, die de gegeven lijn, hoe ver ook verlengd, nooit snijdt.

of

2. In een plat vlak gaat door een punt buiten een lijn geen enkele lijn, die de gegeven lijn, hoe ver ook verlengd, nooit snijdt.

Men verwachtte nu, dat er ergens een tegenspraak zou optreden en daarmede ware dan indirect het parallellenaxioma uit de andere axioma's bewezen. Intusschen, de verwachte tegenspraak bleef uit, en het gelukte aan Lobatschewsky en Bolyay voor de eerste aanname en aan Riemann voor de tweede een op zich zelf logische meetkunde op te bouwen. In de eerste, de hyperbolische meetkunde, kon formeel worden bewezen, dat de som der hoeken van een driehoek grooter was dan 180 graden, in de tweede, de elliptische, dat die som juist kleiner was dan 180 graden. Voor de voorstelling had dit alles voorloopig echter nog niet de minste beteekenis.

In de derde fase gelukte het nu echter aan Riemann aan te toonen, dat de elliptische meetkunde juist de meetkunde is, die geldt op een boloppervlak. In een aardig Engelsch boekje, dat in zijn vertaling „Platland" heet, laat de schrijver ons kennis maken met wezens zonder dikte, wier wereld een plat vlak is. Aan dit beeld eenige uitbreiding gevende kan men zich een boloppervlak gemakkelijk denken als een wereld waarin wezens zonder dikte leven. Die wezens zullen hun kortste verbindingslijnen tusschen twee punten, die voor ons buitenstaanders groote cirkels op den bol zijn, zeker rechte lijnen noemen, en voor die rechte lijnen geldt dan de elliptische meetkunde. Inderdaad is algemeen bekend, dat de som van de hoeken van een boldriehoek grooter dan 180 graden is, en dat er door een punt buiten een grooten cirkel geen groote cirkel gaat, die den eersten niet snijdt, om de eenvoudige reden, dat alle groote cirkels op een bol elkaar snijden. Beltrami wist evenzoo verschillende oppervlakken aan te geven voor welker kortste verbindingslijnen de hyperbolische meetkunde geldt. Een dier oppervlakken lijkt bijvoorbeeld op een servetring. Op elk dier oppervlakken kan een figuur verschoven worden, zonder dat de onderlinge afstanden van zijn punten veranderen, de oppervlakken zijn zooals dat heet in zichzelf verschuifbaar. In de meetkunde dezer oppervlakken treden in de plaats van rechte lijnen de zoogenaamde g e o d e t i s c h e lijnen op, en dat zijn hier weer de kortste verbindingslijnen, die zich tusschen twee punten laten trekken. [1])

Op andere oppervlakken, bijvoorbeeld het oppervlak van een ei of ook het meer bochtige van een aardappel geldt deze eenvoudige eigenschap niet meer, figuren laten zich daar niet meer verschuiven en de meetkunde op zulk een oppervlak is niet meer hyperbolisch of elliptisch, zij is niet-euclidisch in een veel algemeeneren zin. Zelfs behoeven geodetische lijnen niet de kortste verbindingslijnen te zijn, het kunnen ook de langste zijn, voorwaarde is alleen, dat hun lengte een extreme waarde heeft, hetzij minimum, hetzij maximum. Van dit laatste geval is het echter moeilijk een populaire voorstelling te geven.

Men kan zich nu op soortgelijke wijze een denkbeeld maken van drie afzonderlijke ruimten met elliptische, hyperbolische of algemeene meetkunde, indien men zich eerst een gewone of euclidische ruimte denkt van vier of meer afmetingen, en dan een ruimte van drie afmetingen, die in deze hoogere ruimte gekromd ligt op dezelfde wijze als een oppervlak gekromd ligt in onze gewone ruimte of een kromme lijn in een plat vlak. Van den aard der kromming hangt dan af welke meetkunde zal gelden. Natuurlijk moet men zich dit alles alleen *denken* en niet trachten zich meerdimensionale of gekromde ruimten *voor te stellen*. Voor onze voorstelling is toch karakteristiek, dat zij min of meer gebonden is aan de natuurlijke ruimte der ervaring. Daarmede is de derde fase van het onderzoek naar vraag A gekarakteriseerd.

Meetkunde en ervaring.

Inmiddels onderging vraag B een aparte behandeling, in het bijzonder nadat door Newton een scherpe definitie was gegeven van de begrippen a b s o l u t e r u i m t e en a b s o-

---

2) De lezer zij voor bijzonderheden verwezen naar het duidelijke halfpopulaire Nederlandsche boekje van Prof. H. de Vries: „De vierde dimensie".

lute tijd, die voor hem noodig waren voor den opbouw van zijn mechanica. Uitdrukkelijk erkent Newton, dat absolute ruimte en absolute tijd niet voor zinnelijke waarneming toegankelijk zijn, intusschen hebben zij bij hem toch objectief bestaan, d.w.z. zij zijn voor hem geen begrippen zonder meer, doch in zekeren zin bestaande *dingen*. Deze opvatting werd reeds vóór Kant aan scherpe kritiek onderworpen. Waar zich al vroeger de overtuiging gevestigd had, dat eigenschappen als kleur, hardheid enz. (de zoogenaamde secundaire qualiteiten der dingen) niet aan de dingen op zichzelf toekomen, doch slechts aan de dingen in verband met den waarnemer, drongen Leibniz, Law, Maupertuis, Eberhard e.a. door tot het besef, dat ook ruimte en tijd (de zoogenaamde primaire qualiteiten der dingen) evenmin reëel aan de dingen buiten verband met den waarnemer toekomen. Waar dan ook Kant in zijn bekende uitspraken zegt:

„Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äuszeren „Erfahrungen abgezogen wird."

„Der Raum ist eine notwendige Vorstellung a priori, die „allen äuszeren Anschauungen zum Grunde liegt."

„Der Raum stellt gar keine Eigenschaft irgend einiger Dinge „an sich oder sie in ihrem Verhältnissen zu einander vor."

„Der Raum ist nichts anderes als nur die Form aller Er„scheinungen äuszerer Sinne, d.i. die subjective Bedingung „äller Sinnlichkeit, unter der allein uns äuszere Anschauung „möglich ist."

dan is *dat* niet principieel nieuw, doch geheel in overeenstemming met het denken van Kant's tijd. Iets nieuws treedt eerst op, waar Kant de bron aanwijst waaruit de begrippen ruimte en tijd ontspringen. Kant ziet de bron van deze begrippen alsmede van de zoogenaamde hoofdbegrippen of kategorieën (bijv. eenheid, veelheid, substantie, causaliteit) in een oerfunctie van het intellect zelf (de zoogenaamde synthese der apperceptie). Deze oerfunctie schept zoowel de kategorieën als ruimte en tijd, deze laatste zijn dus als het ware de vormen van ons bewustzijn, die iedere ervaring noodzakelijk moet aannemen, wil zij ervaring voor *ons* zijn. Merkwaardig is, dat Kant, niettegenstaande ruimte en tijd voortkomen uit dezelfde bron als de kategorieën, deze toch niet tot de kategorieën rekent. In verschillende perioden van zijn leven heeft hij over het verband tusschen ruimte en tijd en de kategorieën verschillend gedacht, en het is kenschetsend voor de scherpte van Kant's inzicht, dat de vraag naar dit verband, een vraag, die in dien tijd nog onmogelijk beantwoord kon worden, bij hem vaag en eigenlijk onbeantwoord blijft.

Hoewel nu de kategorieën, ruimte en tijd niet uit de ervaring ontstaan, daar zij immers zelf eerst de mogelijkheid voor alle ervaring scheppen, is het toch mogelijk, omgekeerd, uitgaande van de ervaring, door een abstractieproces tot die fundamenteele begrippen op te stijgen. Reeds Hegel merkte op:

„In der empirischen Wissenschaft ist die empirische An„schauung des Raumes das erste, und dann erst kommt man „auf den Gedanken des Raumes."

Voor de ruimte is dit voor het eerst gedaan door Pasch in 1882. De ervaring kent geen punten, lijnen en vlakken alleen kleine lichaampjes, draden en platen. Voor die voorwerpen der ervaring geldt geen enkele meetkundige stelling exact, om de eenvoudige reden, dat geen enkele meting een volkomen exact resultaat oplevert. De ervaring kent ook geen gelijkheid, want die wordt in absoluten zin nergens aangetroffen. De ervaring kent evenmin een „tusschen", althans wanneer met dat begrip ernst gemaakt wordt, want „tusschen" de kleinste materieele deeltjes houdt alle ervaring op. De natuurlijke ruimte der ervaring, zoo men hier het woord „ruimte" al gebruiken wil, is eigenlijk een samenstel van discrete deeltjes, dat in geen enkel opzicht continu is en waarvoor geen enkele meetkundige stelling exact geldt.

De voorstelling gaat nu boven die ervaring uit, zij laat de lichaampjes in de verbeelding hoe langer hoe kleiner worden en de draden en platen hoe langer hoe dunner. Verder postuleert zij een „tusschen" waar de ervaring geen tusschen kent, en schept zoo een soort van continuïteit, de ruimte der voorstelling. Men moet nu volstrekt niet denken, dat de voorstelling al komt tot de mathematische punten, lijnen en vlakken. Terecht merkt Wellstein op, dat men zich wel kan voorstellen, dat een zandkorreltje voortdurend kleiner wordt, maar dat de voorstelling daarbij nooit tot een eind komt, daar men zich altijd een microscoop voor kan stellen, waarvan de vergrooting in dezelfde verhouding toe-neemt, en het korreltje door dien miscroscoop bekeken altijd een korreltje blijkt te zijn en nooit een mathematisch punt wordt. De voorstelling blijft altijd in het vage, de voorstellingsruimte mist de realiteit van de ervaring en is aan de exactheid van het begrip nog niet toe. De voorstellingsruimten van twee personen van ongelijke ontwikkeling zijn dan ook volstrekt ongelijk en zelfs moeilijk vergelijkbaar. Van een exacte geldigheid van eenige meetkundige stelling in de voorstellingsruimte kan geen sprake zijn, om de eenvoudige reden, dat alle exactheid aan de voorstelling ontbreekt, van waarnemingsfouten valt zelfs niet te spreken, omdat er in de voorstellingsruimte, niet te experimenteeren valt. De punten der voorstellingsruimte zijn „ideaal", d.w.z. voor de ervaring niet toegankelijk, daar het geen dingen zijn maar voorstellingen en de voorstellingsruimte kan dan ook volstrekt niet worden waargenomen. Zij zijn echter ook voor het begrip niet toegankelijk, omdat het voorstellingen zijn en nog geen begrippen.

Terecht zegt H. Weber:

„Die ursprüngliche Vorstellung vom Raume enthält nichts „genaues, nichts scharfes in sich. Es gibt darin keinen Punkt, „keine Linie, keine Fläche und also auch keine Geometrie. „Diese Begriffe sind erst Schöpfungen des denkenden Geistes."

Het begrip blijft niet bij de punten, lijnen en vlakken der voorstelling staan, maar gaat verder. In de eerste plaats knoopt het aan aan het verkleiningsproces, dat de voorstelling nooit tot een einde kan voeren en postuleert een grens, die de voorstelling nooit kan bereiken, het punt, de lijn en het vlak van het begrip. Daarmede schept het begrippen, waarvoor de meetkundige stellingen, die in de ervaring binnen de grenzen der waarnemingsfouten geldigheid hebben, en die voor de voorstelling alleen maar een soort richtsnoer ter vermijding van al te groote vaagte zijn, exact gelden.

In de tweede plaats voegt het begrip aan de aldus onmiddellijk aan de voorstelling aansluitende punten nog punten toe, die met de voorstelling niet meer in onmiddellijk verband staan, doch alleen dienen om een volledig stelsel te krijgen, waarvan de eigenschappen zich gemakkelijk laten formuleeren. Denken wij ons bijvoorbeeld eenige kleine materiedeeltjes, en nemen we aan, dat de waarneming leert, dat zij nagenoeg (d.w.z. binnen de grenzen der waarnemingsfouten) op gelijkmatige afstanden op een rechte lijn liggen, en dat er geen andere deeltjes in de buurt zijn. Nummeren we de deeltjes, dan ontstaat op de lijn een schaalverdeeling 1, 2, 3,.... De lijn is in eersten aanleg een product van de voorstelling en van deze lijn staan de punten 1, 2, 3 enz. in meer direct verband met de ervaring. Men kan zich nu voorstellen, dat de stukken tusschen de eerst aanwezige punten middendoor gedeeld worden, en dan hebben de punten $1^1/_2$, $2^1/_2$, enz. aan deze voorstelling hun ontstaan te danken. Exactheid is hier niet te verlangen, en men moet daar zelfs hier heelemaal niet naar vragen, aangezien voorstellingen zich aan iedere metende contrôle onttrekken. Ook een verdeeling in bijv. 7 deelen laat zich wel voorstellen, en men verkrijgt zoo de punten $1^1/_7$, $1^2/_7$, enz. Of een verdeeling in bijv. 23 deelen voor de voorstelling nog mogelijk is, is de vraag — zeker niet voor een Boschjesman, doch misschien wel voor een meer ontwikkeld persoon met een sterk voorstellingsvermogen. Bij nog fijnere verdeelingen begint zeker het begrip al mee te spreken, men kan echter toegeven, dat althans de mogelijkheid van fijnere verdeelingen voor de voorstelling nog beteekenis kan hebben. Zoo zijn dus alle punten, wier plaats zich door een quotiënt van twee geheele getallen laat aanduiden voor de voorstelling althans van eenige beteekenis. De lijn is, zooals dat met een vakterm heet, „overal dicht" met deze voorstellingspunten bezet, d.w.z. tusschen twee gegeven punten ligt altijd nog minstens één ander punt. Het begrip vormt in de eerste plaats naar aanleiding van deze voorstelling het begrip van een lijn bezet met begripspunten, wier plaats exact gegeven is door quotiënten van geheele getallen. Bovendien voegt het begrip nu nog punten toe, die overeenkomen met getallen als de wortel uit het getal 2, het getal π (omtrek cirkel gedeeld door diameter) e.d.m. en bovendien een punt „in het oneindige". Voor de voorstelling hebben deze toevoegingen geen beteekenis meer, zij bestaan alleen voor het begrip en leveren een lijn, die veel eenvoudiger meetkundige eigenschappen heeft dan de nog incomplete lijn, die direct aan de voorstelling aansloot. Aldus de geheele voorstellingsruimte behandelende, vormt het begrip om te beginnen die ruimte door exact maken en completeeren om tot *begripsruimte*. In de begripsruimte gelden de meetkundige eigenschappen, in het bijzonder dus de axioma's, exact, en nemen zij een bijzonder eenvoudigen vorm aan. Eigenlijk is die begripsruimte dan ook niets anders dan dit stelsel van niet met elkaar strijdige axioma's. Het is wel onnoodig te zeggen dat ook de begripsruimte niet kan worden *waargenomen*, en evenzoo dat men zich de begripsruimte ook niet kan *voorstellen*. Wel kan de begripsruimte *aanleiding geven* tot het vormen van voorstellingen, maar die vorming kan dan nog op tal van verschillende manieren plaats hebben. Zoo kan men aantoonen, dat er o.a. een stelsel van bollen, cirkels en punten bestaat, waarvoor alle axioma's gelden van de punten, lijnen en vlakken eener euclidische meetkunde. Dat stelsel vormt dan voor het begrip een ruimte met een euclidische meetkunde, het geeft echter aanleiding tot geheel andere voorstellingen. De punten, lijnen en vlakken der euclidische begripsruimte hebben dus niet speciaal iets te maken met de kleine, lange en platte beelden der voorstelling, zij staan evengoed in verband met heel andere voorstellingsvormen. Zij zullen verband houden met ieder stelsel van voorstellingsvormen, dat beantwoordt aan dingen der ervaring, waarvoor binnen de grenzen der waarnemingsfouten de euclidische axioma's gelden.

De mathematische ruimte van het begrip, in dit geval een euclidische ruimte, bestaat dus alleen voor het begrip en onafhankelijk van iedere voorstelling. Zij kan ook (zonder van nature expliciet in het begrip aanwezig te zijn) door het begrip geschapen worden zonder gebruikmaking van het beschreven abstractieproces doch uit de grondbegrippen of kategorieën, die het begrip in zichzelf aantreft. Haar bestaansrecht ontleent zij uitsluitend aan het niet logisch tegenstrijdig zijn harer axioma's. Hetzelfde geldt voor begripsruimten met andere soorten van meetkunde, deze kunnen evenzeer òf door een abstractieproces uit bepaalde groepen van ervaringsfeiten gewonnen worden, òf door het begrip als stelsel van niet strijdige axioma's worden gesteld. Voor het begrip zijn al deze meetkunden volkomen gelijkwaardig.

Wat dus eenerzijds door abstractie en veralgemeening gewonnen wordt is anderzijds juist datgene, wat uit de oerfunctie van het intellect ontspringt.

Dit is echter niets anders dan het begrip der getallenrij, verbonden met het begrip van de mogelijkheid van meerdere onafhankelijke getallenrijen „de afmetingen". Deze begrippen ressorteeren echter onder de Kant'sche kategorieën qualiteit en quantiteit, en wij hebben dus hier, althans voor de ruimte, de oplossing voor ons van de vraag, die Kant destijds uit den aard der zaak nog niet kon beantwoorden, de vraag naar het verband tusschen ruimte en tijd en de kategorieën. Voorzoover de ruimte ontspringt uit de oerfunctie van het intellect ressorteert zij onder de kategorieën en is a priori, al wat er verder bijkomt behoort niet tot de ruimte van het begrip maar ontspringt uit de ervaring of uit de voorstelling. Voor den tijd geldt hetzelfde.

Hoe verhoudt zich nu het parallellenaxioma tot de ervaring? Voor het begrip zijn alle meetkunden, euclidische, elliptische, hyperbolische en algemeene, volkomen gelijkwaardig. De ervaring zal zich stellig onder eenigen meetkundigen vorm, die de oerfunctie kan scheppen, voordoen, welke vorm zich echter het beste aan de ervaring aansluit kan alleen die ervaring zelf, d.i. het experiment, leeren. Wij begrijpen nu de waarde en de beteekenis van de metingen van de hoeken van groote driehoeken, die al door Gausz werden verricht met het doel een eventueel voorhanden afwijking te constateeren. Evenzoo de onderzoekingen van Zöllner en veel later van P. Harzer, die hebben nagegaan of wellicht een niet-euclidische meetkunde een betere verklaring der waargenomen physische en astronomische verschijnselen zou kunnen geven dan de euclidische. Deze proeven en pogingen, die velen vakphilosophen ten onrechte een gruwel waren, tasten geenszins de aprioriteit van de ruimte en den tijd van het begrip aan, zij betrekken zich alleen op de ruimte der ervaring.

Zöllner meent, dat de aanname van een oneindige ruimte tot een tegenstrijdigheid voert, aangezien er al een oneindige tijd verloopen is, en dus de eindige hoeveelheid aanwezige stof in een oneindige ruimte al verdampt zou moeten zijn. Hij wil dus, dat de ruimte eindig is en in zichzelf terugloopt zooals het oppervlak van een bol, maar dan één dimensie hooger. Harzer heeft zeer serieus nagerekend in hoeverre die aanname van een gesloten ruimte overeen te brengen is met astronomische waarnemingen. In het bijzonder wijdt hij de aandacht aan de

„nabeelden" van zon en sterren die bij die onderstelling zouden moeten ontstaan, terwijl hij ook voor de „kromming" mogelijke waarden berekent.

Intusschen mag nu bij deze proeven en theorieën een opmerking niet uit het oog verloren worden, die reeds door Riemann en von Helmholz gemaakt is en later door Poincaré sterk op den voorgrond gebracht werd. Een meting, bijvoorbeeld van de hoeken van een driehoek leert ons nooit iets over meetkundige eigenschappen op zichzelf, doch alleen iets over physische eigenschappen van materieele dingen. We gaan uit van bepaalde physische aannamen, bijvoorbeeld dat een meetstaaf bij verplaatsing even lang blijft enz. De uitkomst heeft dus naast meetkundige ook physisch-mechanische beteekenis, d.w.z. de meetkunde der ervaringsruimte en de physica zijn niet te scheiden. Veranderen we onze physische aannamen, dan komt er een andere meetkunde voor den dag. Omgekeerd kunnen we uitgaan van een heel willekeurige meetkunde mits we daarbij dan maar passende physisch-mechanische wetten aannemen. Het is de vraag of dit erg practisch is, zal men allicht tegenwerpen, maar in die tegenwerping ligt dan juist de kern van de kwestie: de vraag naar de ware meetkunde moet vervangen worden door de vraag naar de meest practische meetkunde en in deze vraag beslist het door zuiver inzicht geleide en geïnterpreteerde experiment.

De voorstelling heeft daarbij niets in te brengen. Zij zal zich eenerzijds, wil zij geen wanvoorstelling zijn, moeten aansluiten aan de ervaring, anderzijds zal zij zich, wil zij geen waanvoorstelling zijn, moeten aansluiten aan het begrip d.i. aan de resultaten der logische deductie. Over wat de ervaring leert kan, althans tusschen vakmannen, nooit een blijvende strijd bestaan, een dergelijke strijd kan altijd op den duur worden uitgemaakt door behoorlijk verrichte experimenten. Ook kan er geen blijvende strijd bestaan ten aanzien van wat de mathematische deductie leert, de gelijkelijk geschoold onderstelde partijen kunnen alles samen narekenen. Wat echter voorstelbaar is en wat niet, hangt sterk af van ontwikkeling, geestesrichting, persoonlijke voorkeur enz. Een mogelijkheid uit te maken wie de „ware voorstelling" heeft, bestaat niet. Het is nu eenmaal wèl mogelijk elkaars experimenten en bewijsvoeringen te controleeren, doch niet mogelijk contrôle uit te oefenen op elkaars voorstellingen.

Over de waarde der voorstelling voor de ervaring zegt Wellstein:

„Die Erfahrung läszt sich nicht durch Gesetze bestimmen, die jeder sozusagen mit Händen greifen kann; was man an Gesetzen „der Anschauung zu entnehmen" glaubt, sind im günstigsten Falle nur Annäherungen, die den ersten ordnenden Versuchen des Denkens entstammen."

En over de waarde van de voorstelling voor het begrip:

„Aus der Anschauung allein flieszen immer nur isolierte und angenäherte Erkenntnisse; ob diese sich im Zusammenhange mit anderen Anschauungen widerspruchslos zu streng exakter Gültigkeit erheben lassen, kann nur durch Denkarbeit entschieden werden."

Absolute ruimte en absolute tijd.

Inmiddels was sinds Newton een derde fundamenteele vraag aan de orde gesteld:

C. Hebben de absolute ruimte en de absolute tijd physische realiteit?

We zagen dat voor Newton de absolute ruimte en de absolute tijd een objectief bestaan hadden en dienovereenkomstig erkende Newton dan ook een absolute beweging, d.i. een beweging ten opzichte van de absolute ruimte. In de Newton'sche mechanica is een andere aanname zelfs niet mogelijk, aangezien de verschijnselen van de centrifugaalkracht in deze mechanica niet verklaard kunnen worden door relatieve beweging alleen. De vergelijkingen leeren toch, dat op een lichaam, dat zich alleen in de wereldruimte bevindt, toch centrifugaalkracht kan optreden en die kracht kan dan op niets anders teruggevoerd worden dan op een draaiing ten opzichte van de absolute ruimte zelf.

Om den lezer goed duidelijk te maken tot welke zonderlinge consequenties dit voert, beluisteren we het bekende gesprek van Saturnus met zijn ring, die we beiden denken te bestaan uit een rekbaar materiaal. Saturnus ziet den ring draaien en zegt: de ring draait, er moet centrifugaalkracht optreden en tengevolge daarvan moet de ring uitgerekt worden, d.w.z. zich van mij verwijderen. De ring ziet echter Saturnus draaien en zegt: Saturnus draait, Saturnus moet zich tengevolge van de optredende centrifugaalkracht afplatten en in den evenaar een grooteren omtrek krijgen, d.w.z. naar mij toekomen. De meting zal nu gemakkelijk beslissen of Saturnus gelijk heeft of de ring, of beide in zekere mate. Heeft echter bijvoorbeeld alleen Saturnus gelijk, dan verklaart de Newton'sche mechanica dit door te zeggen, dat Saturnus ten opzichte van de absolute ruimte stilstaat en de ring zich beweegt. Als oorzaak voor een materieel effect treedt dus hier op de wisselwerking tusschen Saturnus en de absolute ruimte, d.w.z. de absolute ruimte wordt hier geacht een materieele werking te kunnen uitoefenen.

Hoe zonderling dat is moge uit het volgende verhaal blijken. Een reiziger komt in een dorp en wordt door de bewoners ontvangen in hun dorpshuis. Binnenkomende wordt hij plotseling van achteren aangeraakt, hij wendt zich om maar ziet niemand. Zijn hoed en jas worden hem door een onzichtbare macht afgenomen en op een geschikte plaats gedeponeerd, de hoofddeksels enz. der overige aanwezigen ondergaan dezelfde bewerking, zitplaatsen, tafels, ververschingen en alles wat maar wenschelijk is komen op den juisten tijd aanvliegen en plaatsen zich zonder eenige zichtbare oorzaak waar zij noodig zijn. Hoewel alles zeer aangenaam en in de grootste orde in zijn werk gaat begint de reiziger ietwat te griezelen, en hij vraagt aan een van zijn geleiders naar een verklaring. Op de meest natuurlijke wijze wordt hem dan medegedeeld dat het de begrippen orde en regelmaat zijn, die zich hier op zoo uitnemende wijze verdienstelijk maken. Die begrippen, hoort hij verder, kunnen niet gezien, niet gevoeld, niet gepakt worden en niet gewogen worden en zij uiten zich alleen door hunne aangename zorgen voor den goeden en ordelijken gang van zaken. De reiziger zal met deze verklaring wel niet zeer voldaan zijn en, thuisgekomen, vertellen dat er in het bewuste dorpshuis spoken zijn, vriendelijke, welwillende, zoo men wil nuttige spoken, maar niettemin spoken. Nu vervullen de absolute ruimte en de absolute tijd in de Newton'sche mechanica, die overigens volmaakt onwaarneembaar zijn maar alleen op het juiste oogenblik optreden om een behoorlijken en ordelijken opbouw der theorie mogelijk te maken, juist de mystieke rol van de begrippen orde en regelmaat in het dorpshuis, m.a.w. in de klassieke mechanica spookt het.

Newton ondervond dan ook onmiddellijk scherpe tegenkanting van de zijde zijner tijdgenooten. In het bijzonder verklaarde Huygens zich tegen alle absolute beweging en wenschte hij alleen relatieve beweging te erkennen, zooals blijkt uit een correspondentie met Leibniz. De groote moeilijkheid was echter een mechanica te begronden zonder gebruik te maken van absolute beweging en het is niet bekend geworden welke oplossing Huygens voor oogen had. Zonder die oplossing moest echter het strenge in zichzelf gesloten stelsel van Newton, dat overigens van alle toen bekende mechanische verschijnselen rekenschap wist te geven, het van de opvattingen der relativisten winnen. De negatieve praestatie, de kritiek der relativisten was schitterend, zoo o.a. ook die van Berkeley, de positieve praestatie, t.w. het vervangen der Newton'sche mechanica door een relativistische, bleef uit. De antinomie is zeer scherp gesteld door Euler. Daar het in dien tijd onmogelijk bleek de mechanica anders te fundeeren dan op de begrippen absolute ruimte en absolute tijd, besloot Euler, dat absolute ruimte en tijd wel iets van een reale existentie moesten bezitten, al was het hem dan ook geheel onmogelijk in te zien wat voor soort van realiteit dat zou kunnen wezen. Hij gaf dus aan de antinomie geen schijnoplossing, doch liet haar onopgelost, wat getuigt van de groote helderheid van zijn inzicht, en hij besloot met de profetische opmerking, dat er misschien wel iets niet in orde was met de verschillende klassen, waarin de wijsbegeerte van dien tijd de realiteiten indeelde. Euler voelde dus al, dat er een totale omwenteling noodig was om hier helderheid te brengen. Waar nu Kant, zooals we reeds zagen, later onherroepelijk aantoonde, dat aan de absolute ruimte en den absoluten tijd geen reale doch alleen ideale beteekenis kan toekomen, bleef als eenige uitweg de opbouw van een volkomen relativistische mechanica. Daarvoor was de tijd toen echter nog allerminst rijp.

Tal van onderzoekers hebben sindsdien getracht tot een dergelijke mechanica te komen, en in het bijzonder is Mach een der op den voorgrond tredende absolute relativisten. Een uitweg werd echter vóór Einstein niet gevonden. Wel kwam nog een belangrijke zijde aan het licht door de onderzoekingen van Neumann. Neuman verving de absolute ruimte door een hypothetisch lichaam Alpha, dat dan als reaal existeerend ding de werkingen te voorschijn zou moeten brengen, bijvoorbeeld de centrifugaalkracht, die van de ideale absolute ruimte niet te verwachten zijn. Waar nu echter dat lichaam Alpha weer voor geen enkele waarneming toegankelijk was, bleef het, om hetzelfde beeld te gebruiken, een spook, zij het dan ook nu een gematerialiseerd spook. De tijdgenooten onderwierpen dan ook het lichaam Alpha aan zoo scherpe kritiek, dat Neumann er toe overging het lichaam Alpha te identificeeren met de totale in het heelal aanwezige materie zelf (eigenlijk verving hij Alpha door het stelsel der hoofdtraagheidsassen dier materie, doch dat komt op hetzelfde neer). Dat was echter een belangrijke stap in de goede richting, want als oorzaak der centrifugaalkracht werd hierdoor het totaal der massa's in het heelal aangewezen. Behalve de zwaartekracht moest er dus nog een andere tot dusver onbekende kracht van materie op materie zijn, die we, denkende aan het oude lichaam Alpha, ter eere van Neumann de a l p h a w e r k i n g zouden kunnen noemen. Ware het aan Neumann gelukt de wetten dezer nieuwe kracht te vinden, dan zou hij inderdaad een mechanica hebben kunnen opstellen, die, althans wat de ruimte betreft, spookvrij genoemd kon worden. Dit is echter aan Neumann nooit gelukt, in het begrip alphawerking waartoe zijn theorie ten slotte voerde, ligt echter de blijvende beteekenis van zijn werk.

Het KLEIN'sche principe.

We zijn thans genaderd tot een keerpunt in de ontwikkelingsgeschiedenis, het jaar 1872. In dat jaar publiceerde de bekende mathematicus F. Klein een beginsel, dat aansluitende aan onderzoekingen van Cayley een geheele omwenteling teweegbracht in de opvattingen betreffende de verschillende vormen van meetkunde. Dit beginsel kan als volgt duidelijk gemaakt worden. Ieder, die wel eens met meetkundige eigenschappen van driehoeken en andere figuren te doen gehad heeft, weet, dat het ons in de meetkunde niet interesseert of een driehoek, waar we mee bezig zijn, boven aan het papier staat of onderaan, of dat een bepaald hoekpunt naar boven of naar onder wijst, dat zijn topografische eigenschappen, geen meetkundige. Meetkundige eigenschappen zijn dus niet alle eigenschappen der figuren, maar alleen die, welke bij draaiingen, verschuivingen en spiegelingen onveranderd blijven. Nu zijn draaiingen, verschuivingen en spiegelingen voorbeelden van veranderingen van figuren, die de wiskundige „transformaties" noemt, alle draaiingen, verschuivingen en spiegelingen samen vormen een „groep [1]) van transformaties" en de wiskundige zegt derhalve met een vakterm: de elementaire gewone meetkunde handelt over die eigenschappen, die invariant zijn bij (d.i. onveranderd blijven bij) een bepaalde transformatiegroep, te weten de groep der draaiingen, verschuivingen en spiegelingen.

Nu zijn er nog wel andere transformaties van meetkundige figuren, wat ieder weet, die wel eens een borduurwerk op stramien scheef getrokken heeft of een wat scheef genomen fotografie van een gevel of een vlakke wandschildering vergeleken heeft met het origineel. Ook het beeld, dat op ons netvlies wordt ontworpen van een hellend gehouden vlakke figuur, is een goed voorbeeld van een al vrij ingewikkelde transformatie, waarbij bijvoorbeeld rechte hoeken volstrekt niet alle recht blijven. Er zijn dus behalve draaiingen en verschuivingen nog wel meer ingewikkelde transformaties en vele transformatiegroepen, die voor den wiskundige zeer interessant zijn. F. Klein gaf nu het volgende schijnbaar zeer eenvoudige doch in werkelijkheid buitengewoon ver strekkende principe:

Iedere meetkunde is een theorie over de invarianten behoorende bij bepaalde transformatiegroepen, en omgekeerd behoort bij iedere groep een bepaalde meetkunde.

Daarmede was met één slag het centrale gezichtspunt bereikt, van waaruit het geheel aller meetkunden kon worden overzien. In het bijzonder is het Klein'sche principe voor de fundamenteele vraag A sluitsteen, het onderzoek naar deze vraag was hiermede principieel afgeloopen. Al naarmate men een andere groep van transformaties ten grondslag legt, ressorteert een euclidische, een elliptische, een hyperbolische of ook de een of andere veel algemeenere vorm van meetkunde. Tegelijk

1) Er zijn aan het begrip „groep" nog enkele finesses verbonden, die hier niet besproken behoeven te worden.

echter was het Klein'sche principe voor de fundamenteele vragen B en C de noodzakelijke voorwaarde voor verderen vooruitgang. Dit principe stelt ons toch in staat de fundamenteele vraag B, die zich inmiddels reeds gereduceerd had tot de vraag, welke de meest practische meetkunde voor de ervaringsruimte is, en evenzoo den naar aanleiding van vraag C ontstanen eisch van een absoluut relativistische mechanica, op geheel nieuwe wijze te formuleeren.

Assenstelsels en overgangen van het eene stelsel op het andere.

We moeten daartoe eens de wijze beschouwen, waarop men de een of andere physische gebeurtenis in getallen kan beschrijven. Nemen wij bijvoorbeeld een rechthoekig laboratorium, dan is de plaats van een deeltje volkomen gegeven door zijn hoogte boven den vloer, en zijn afstanden tot 2 zijwanden, bijvoorbeeld den noordelijken en den oostelijken wand. Die 3 getallen heeten dan de *koordinaten* van het deeltje, de vloer en de wanden heeten de *koordinaatvlakken* en de drie lijnen waar vloer en wanden samenkomen de *koordinaatassen*. Het ons interesseerende gebeuren is nu geheel bekend, wanneer we weten, hoe de koordinaten van elk deeltje met den tijd veranderen, en dat kan worden neergelegd in *vergelijkingen* tusschen de koordinaten. Natuurlijk is men geheel vrij een ander stelsel van drie onderling loodrechte koordinaatassen te nemen en hetzelfde verschijnsel te beschrijven door vergelijkingen, die op dat nieuwe assenstelsel betrekking hebben. Heeft men zoo de verschijnselen beschreven ten opzichte van allerlei vaste assenstelsels, dan is het zeer interessant te vragen, of nu al die verschillende beschrijvingen, dat zijn dus de verkregen vergelijkingen, denzelfden vorm hebben of niet. Blijven we voorloopig bij de onbeweeglijke rechthoekige assenstelsels, die dus alle door verschuivingen en draaiingen uit elkaar kunnen ontstaan, en nemen we eens aan, dat het onderzoek leert, dat de vergelijkingen van eenig gebeuren hun vorm niet veranderen bij overgang van het eene tot het andere stelsel, dan kunnen we dat in mathematische taal ook zoo zeggen, dat de *verschijn-*

selen invariant zijn bij de groep der verschuivingen en draaiingen.

Herinneren we ons nu echter, dat bij deze groep een meetkunde hoort, en wel de gewone euclidische, dan spreekt het vanzelf, dat voor verschijnselen van dezen aard die soort van meetkunde de meest aangewezen meetkunde is. Zijn de vergelijkingen niet invariant bij verschuivingen en draaiingen dan zijn er zeker wel transformaties te vinden, waarbij zij wel invariant zijn. Het zou zelfs wel eens kunnen blijken, dat er een transformatiegroep was, waarbij de vergelijkingen van alle mechanische en physische verschijnselen invariant waren. In dat geval zou zeker de meetkunde zijn, die bij die groep behoort, de meest practische meetkunde zijn, die aan ons wereldbeeld ten grondslag gelegd zou kunnen worden. De vraag naar de meest practische meetkunde der ervaringsruimte formuleert zich dus nu als volgt:

Welke vergelijkingen geven het best rekenschap van de waargenomen verschijnselen en bij welke transformaties der ruimtelijke koordinaten zijn deze invariant.

De bij de groep der gevonden transformaties behoorende meetkunde is dan de meest practische.

Tot nu bespraken we alleen vaste assenstelsels, de verschijnselen kunnen echter ook beschreven worden ten opzichte van beweeglijke assenstelsels, bijvoorbeeld t.o.v. een assenstelsel, dat vastzit aan een wagentje, dat door het laboratorium rijdt. Men kan zich bijvoorbeeld een waarnemer denken, die met het wagentje mee beweegt en nu van zijn beweeglijk standpunt de verschijnselen beschrijft. We kunnen dan weer vragen of de vergelijkingen invariant blijven. Voor de klassieke mechanica is dat bijvoorbeeld het geval, wanneer het bewegende assenstelsel niet draait en ook niet op andere wijze een versnelde beweging heeft. In de transformatiegroep treden dan niet alleen de drie koordinaten op, maar ook de tijd en de werkingssfeer van die groep is dus een uitgebreidheid (het woord ruimte zou hier verwarrend werken) van vier afmetingen.

Van die uitgebreidheid kunnen we ons een voorstelling maken door nu niet één maar twee dimensies lager te gaan, Platland voorbij, naar de bewoners van „Lijnland", wier wereld niet een oppervlak maar een lijn is. Van het geheele wereldgebeuren in Lijnland kunnen we ons een overzicht verschaffen, door op een blad papier alle gebeurtenissen die zich in de „ruimte" van Lijnland (die we ons voor een oogenblik eens voorstellen als een rechte lijn) na elkaar afspelen, naast elkaar te teekenen. We krijgen dus een oneindige reeks van verticale rechte lijnen naast elkaar, die elk de ruimte van Lijnland voorstellen op één bepaald oogenblik. Het aldus ontstane beeld waarin we met één oogopslag verleden, heden en toekomst overzien, heet de wereldfilm van Lijnland. Een bewegend punt teekent in de wereldfilm de een of andere kromme lijn af en die lijn noemen we wereldlijn van het punt. Die wereldfilm is nu een twee dimensionale uitgebreidheid, de zoogenaamde ruimte-tijdwereld van Lijnland. Ook Platland heeft een wereldfilm, die een ruimte van drie afmetingen vult. Al wat in Platland na elkaar gebeurt ligt in die film, wanneer Platland bijvoorbeeld altijd horizontaal gedacht wordt, boven elkaar. De opvolgende standen van een bewegend punt zien we in de film allemaal tegelijk als wereldlijn van dat punt. Een driehoekige Platlandbewoner (de schrijver van „Platland" verzekert ons, dat alle Platlanders mooie regelmatige vormen hebben) beschrijft in de film een soort van kromme buis met driehoekige doorsnede, en zijn geheele leven zien we met één oogopslag voor ons liggen. De wereldfilm van onze wereld vult op dezelfde wijze een vierdimensionale uitgebreidheid, onze ruimte-tijdwereld, en we moeten ons die nu natuurlijk niet als een vierdimensionale ruimte willen gaan voorstellen, want dat heeft evenmin zin als het voor den Lijnlander zou hebben zich zijn wereldfilm als plat vlak (iets dat hem totaal onbekend is) voor te stellen.

In die vier afmetelijke ruimte-tijdwereld kunnen we nu algemeen vragen, bij welke transformaties in deze uitgebreidheid de vergelijkingen der verschijnselen invariant blijven. Daar we voorloopig onderstellen, dat de tijd zelf niet meegetransformeerd wordt (immers wat zou dat voor physische beteekenis kunnen hebben?), komt dat daarop neer, dat we vragen of de vergelijkingen ook soms invariant zijn bij overgang tot zekere bewegende assenstelsels. Mochten we ook hier zulke transformaties vinden, dan bepaalt hun groep de meest practische meetkunde der ruimte-tijdwereld. Reeds zagen we in de klassieke mechanica een geval van zulk een invariantie bij overgang tot een bewegend niet versneld assenstelsel.

Er is echter ook onmiddellijk een geval aan te wijzen waar de invariantie niet optreedt. Beschrijven we namelijk de mechanische verschijnselen volgens de klassieke mechanica eerst ten opzichte van een absoluut vast, dan ten opzichte van een draaiend assenstelsel, dan treedt in het tweede geval o.a. de centrifugaalkracht op, die in het eerste geval ontbreekt. Hetzelfde verschijnsel valt op te merken, indien voor het tweede stelsel een in rechte lijn voortbewegend doch versneld (of vertraagd) stelsel gekozen wordt. Ieder reiziger in een trein, die plotseling wordt geremd, voelt de in het vertraagde stelsel optredende kracht aan den lijve. De vergelijkingen der klassieke mechanica zijn dus bij transformaties waarbij versnellingen optreden zeker niet invariant.

Formuleering van den relativiteitseisch.

We kunnen nu de vraag opwerpen, wanneer een mechanica en physica absoluut relativistisch zal zijn. Dat zal alleen dan het geval zijn, wanneer iedere materieele werking in de niet levende natuur op een materieele oorzaak terug te voeren is (niet meer op het ingrijpen van eenig „spook"). Dat wil dan echter zeggen, dat de transformatiegroep, waarbij de verschijnselen invariant zijn, alleen mag afhangen van de verdeeling der materie[1]) in de vierdimensionale ruimtetijdwereld d.w.z. van de wereldfilm, die door het physisch gebeuren in die wereld wordt afgeteekend. Nu zou het wel eens kunnen zijn, dat bij die transformaties ook de tijd mee verandert, d.w.z. dat er in de getransformeerde vergelijkingen een grootheid optreedt, die aldaar als een soort van tijd fungeert zonder dezelfde tijd te zijn uit de oorspronkelijke vergelijkingen. Zelfs zal een absoluut relativistische wereldbeschrijving moeten eischen, dat het al of niet transformeeren van den tijd afhangt alleen van de materieverdeeling en van geen vooropgezette onderstellingen, daar anders de tijd zijn mystieke rol zou blijven spelen, en we het eene spook hadden verdreven alleen om het ander met des te meer zorg te koesteren.

---

1) Materie is hier steeds in den ruimsten zin bedoeld, dus electriciteit inbegrepen.

De transformatiegroepen der mechanische en der electromagnetische verschijnselen.

Wat is nu de transformatiegroep der klassieke mechanica? De vergelijkingen blijven invariant bij overgang tot een stilstaand verschoven of gedraaid assenstelsel, en ook tot assenstelsels, die zich met eenparige snelheid voortbewegen. Echter niet meer zoodra het assenstelsel een versnelling heeft, wat bijvoorbeeld altijd het geval is wanneer het roteert. De geoorloofde transformaties worden saamgevat onder den naam van Galileitransformaties ter eere van Galilei, die een voorlooper was van Newton, en we kunnen dus zeggen, dat de klassieke mechanica invariant is bij de Galileigroep. De bijbehoorende meetkunde is de gewone euclidische en de groep is onafhankelijk van de materieverdeeling, d.w.z. de Newton'sche mechanica is niet-relativistisch, wat we al wisten. Merkwaardiger wijze zijn nu de electromagnetische verschijnselen, zooals die door de Maxwell'sche vergelijkingen beschreven worden, volstrekt niet invariant bij de Galileigroep. Een bewegende electrische lading vertoont bijvoorbeeld voor een meebewegenden waarnemer alleen een electrisch veld, waarentegen voor een stilstaanden waarnemer ook een magnetisch veld, en de vergelijkingen zien er dus voor die twee waarnemers heel anders uit. Dat werd dan o.a. verklaard door den volmaakt rustenden aether, ten opzichte waarvan alle beweging plaats heeft, en die hier dezelfde rol speelt als de absolute ruimte bij Newton of het lichaam Alpha bij Neumann. Dat voert tot een eigenaardige consequentie. Denken we ons een statief en daarop aangebracht een gloeilamp met daartegenover geplaatsten spiegel. De gloeilamp kan een lichtsein uitzenden en er moge een inrichting voorhanden zijn om den tijd te meten, verloopen tusschen het uitzenden van den straal en den terugkeer van den teruggekaatsten straal. Nu kan men het statief òf absoluut laten rusten òf laten bewegen in de richting gloeilamp — spiegel òf ook in de richting loodrecht daarop. Volgens de vergelijkingen voor de voortplanting van het licht moet nu in de beide laatste gevallen een verschillende tijd gemeten worden. Het experiment, door Michelson uitgevoerd, en waarvoor natuurlijk in werkelijkheid een veel ingewikkelder apparatuur noodig was, leerde nu echter, dat het theoretisch verwachte verschil niet optreedt. Men kan dit ook nog op andere wijze zeggen, waardoor het verrassende en nieuwe sterker naar voren komt, men kan zeggen, dat het experiment van Michelson leert, dat de snelheid van het licht dezelfde is ten opzichte van een stilstaanden, als ten opzichte van een bewegenden waarnemer. Beweegt zich dus een trein met een snelheid van dertig meter per seconde en werpt een stilstaande signaallamp een lichtstraal in de richting van de beweging langs den trein, dan heeft dat licht een snelheid van 300.000 K.M. per seconde ten opzichte van de rails en precies dezelfde snelheid ten opzichte van den trein, niet zooals men allicht zou verwachten en zooals de oude theorie ook leerde 299.999,97 K.M. per seconde. Lorentz heeft deze afwijking verklaard door zijn contractiehypothese. Volgens deze hypothese ondergaat ieder bewegend voorwerp een verkorting in de richting van de beweging en deze verkorting maakt dan, dat de maatstaf, waarmede de bewegende waarnemer de snelheid meet, een andere wordt als die van den stilstaanden waarnemer. In de vergelijkingen komt die verandering natuurlijk voor den dag als een verandering van koordinaten, dus als dat, wat we een transformatie genoemd hebben. Daarbij deed Lorentz nu nog een buitengewoon gewichtige ontdekking. De electromagnetische vergelijkingen bleken namelijk voor den stilstaanden en voor den bewegenden waarnemer geheel gelijk te worden, indien de bewegende waarnemer zich maar bedienen wil niet van den gewonen tijd, dien de uurwerken bijvoorbeeld van de kerktorens aanwijzen, maar van een hulpgrootheid, die we zoolang eens „fictieve tijd" zullen noemen. Dat wil dan zeggen, dat de electromagnetische verschijnselen nu invariant zijn geworden bij transformaties in de vierdimensionale ruimte-tijdwereld, die ook den tijd niet met rust laten, dat zijn dus juist transformaties van het soort, dat we reeds boven verlangd hebben. Het totaal van deze transformaties noemt men de Lorentzgroep en deze is, daar zij den tijd niet met rust laat, blijkbaar een geheel andere dan de Galileigroep. Bij de Lorentzgroep behoort een eigenaardige vierdimensionale ruimte-tijd-meetkunde, die we de Minkowski'sche noemen, en die, wat de driedimensionale ruimte betreft, euclidisch is. De Galileigroep en de Lorentzgroep hebben dus dit gemeen, dat zij beide voor de driedimensionale ruimte een euclidische meetkunde vragen. Tot zoover is nu de bewegende waarnemer volstrekt niet in dezelfde conditie als de stilstaande, zijn fictieve tijd heeft heelemaal geen physische beteekenis, zijn vergelijkingen schijnen slechts mathematische „Spielereien" en alleen de ten opzichte van den aether rustende waarnemer, die met den echten tijd werkt, heeft gelijk.

De oudere relativiteitstheorie.

Nu trad Einstein op met de volkomen formuleering der eerste of oudere relativiteitstheorie. We kunnen dien overgang het beste als volgt karakteriseeren. Denken we ons eens alle uurwerken, die op mechanische werking berusten, afgeschaft en vervangen door zuiver electromagnetische uurwerken. Een lichtstraal, die tusschen twee evenwijdige volkomen spiegelende vlakjes voortdurend heen en weer gekaatst wordt, levert ons bijvoorbeeld theoretisch zoo'n uurwerk. We stellen nu beide waarnemers, de stilstaande en de bewegende, in het bezit van een dergelijke klok. De stilstaande ondervindt daarvan geen verandering, zijn nieuwe klok wijst precies hetzelfde aan als vroeger de torenklokken. De klok van den bewegenden waarnemer is onderworpen aan de electromagnetische vergelijkingen en aan niets anders, die klok wijst dus die grootheid aan, die in die vergelijkingen de rol van tijd vervult, en dat is juist de fictieve tijd van zooeven. De twee waarnemers zijn nu precies in dezelfde conditie gekomen, beide hebben hun eigen uurwerk, en hun eigen tijd, die daarop wordt afgelezen, en van geen van beiden kunnen we meer zeggen, dat hij werkt met een tijd, die minder physische beteekenis heeft dan die van den ander. Ziedaar het grondprincipe der oudere relativiteitstheorie. Vragen we nu waar precies de overgang is tusschen Lorentz en Einstein, dan is dat niet te zeggen, hun verdiensten zijn niet te scheiden en aan het genie van beiden danken wij deze eerste of oudere relativiteitstheorie.

De nieuwe theorie stond direct voor tal van moeilijkheden. De mechanische verschijnselen schenen invariant bij de Galileigroep, de electromagnetische bij de Lorentzgroep, mechanische klokken schenen er een wezenlijk anderen gang op na te houden als electromagnetische en de eenheid van ons wereldbeeld scheen totaal verbroken. Bovendien bevat de Lorentzgroep alleen overgangen op assen, die zich met gelijkmatige snelheid, dus zonder eenige versnelling voortbewegen, en de nieuwe theorie wordt dus al direct ontoepasselijk, zoodra er een versnelde beweging optreedt. Versnelde bewegingen treden echter practisch overal op, en er was dus eigenlijk een onhoudbare toestand geschapen. Van een werkelijk volkomen relativistische mechanica en physica scheen men nog ver verwijderd. De oplossing werd echter spoedig gebracht door Einstein.

De algemeene of nieuwere relativiteitstheorie.

Om die oplossing te vertolken gaan we weer naar de bewoners van Lijnland en vragen ons eens af wat een volkomen relativist onder de Lijnlanders voor een wereldbeeld zal verlangen. De Lijnlanders mogen beschikken over klokken waarop zij hun tijd aflezen. De ruimte-tijdwereld of wereldfilm van Lijnland is een tweedimensionale uitgebreidheid, en het is ons om de in die uitgebreidheid geldige meetkunde te doen. Mocht die meetkunde bijvoorbeeld een euclidische zijn, dan zouden wij ons de wereldfilm kunnen denken als een plat vlak, ware zij elliptisch, dan als een bolopperblak, en in een meer algemeen geval als een willekeurig gebogen oppervlak, dat in onze eigen driedimensionale ruimte gekromd voor ons ligt.

De Lijnlander kent nu mechanische en physische verschijnselen, en deze zullen bij bepaalde transformaties invariant zijn. Wenscht hij echter een zuiver relativistisch wereldbeeld, dus een zonder „spoken", dan moet hij verlangen, dat de aard dezer transformaties niet van te voren gegeven is, doch uitsluitend afhangt van de materieverdeeling in de wereldfilm. Met onverbiddelijke consequentie volgt daar echter uit, dat de meetkunde, die voor de wereldfilm als buitengewoon practisch aangewezen is, die meetkunde is, die volgens het Klein'sche principe behoort bij de aldus door de materieverdeeling bepaalde groep van transformaties. De vorm van het gebogen oppervlak, waarop de wereldfilm van de Lijnlanders is afgeteekend, moet dus geheel afhangen van de verdeeling der materie over de film. Wij driedimensionale wezens kunnen nu precies dezelfde eischen opstellen als de Lijnlanders,

alleen in alles twee dimensies hooger, en dan ontstaat juist, wat Einstein ons in zijn algemeene relativiteitstheorie geeft. Einstein stelde zich geheel op de basis eener volkomen relativistische natuurverklaring, waarin de transformatiegroep, waarbij de verschijnselen invariant zijn, alleen afhangt van de materieverdeeling, en het is zijn bijzondere verdienste, dat hij differentiaalvergelijkingen wist aan te geven, waardoor het verband tusschen de materieverdeeling en de transformatiegroep werd aangegeven. Een zeer fijn trekje is, dat de differentiaalvergelijkingen de transformatiegroep niet eenduidig bepalen, men heeft dus nog een zekere vrijheid in de keuze der transformatiegroep, en practisch wil dat zeggen, dat men aan de ruimte tusschen de kleinste deeltjes een binnen zekere grenzen willekeurige meetkunde mag geven. Hilbert heeft aangetoond, dat dan toch alles, wat werkelijk physisch bestaat, eenduidig door de vergelijkingen bepaald is, en dat is dan ook het eenige wat we verlangen kunnen, de rest is slechts interpretatie van de zijde van den waarnemer en mag niet worden vastgelegd, willen we niet weer „spoken" invoeren. Het spreekt nu wel vanzelf, dat de bij de gekozen groep behoorende meetkunde der vierdimensionale ruimte-tijdwereld niet de euclidische is, want bij iedere wijze van verdeeling der materie over de wereldfilm behoort een eigen meetkunde, die voor die verdeeling de meest practische is. Natuurlijk zijn we, zooals reeds boven uit de opmerkingen van Riemann, van Helmholz en Poincaré bleek, geheel vrij toch een euclidische meetkunde te gebruiken, de natuurwetten nemen dan echter op die basis beschreven een anderen en zeker minder eenvoudigen vorm aan. We kunnen ons dus onze vierdimensionale wereldfilm denken als een vriedimensionale uitgebreidheid, die gekromd ligt in een uitgebreidheid van meer afmetingen en om de overeenkomst met Lijnland volkomen te maken een wezen in die hoogere uitgebreidheid, die onze film voor zich heeft en er van buiten af op zit te kijken.
Men moet nu uit het feit, dat de meest practische meetkunde in hoofdtrekken wordt vastgelegd door de materieverdeeling niet afleiden, dat hier weer de wisselwerking tusschen materie en ruimte wordt ingesmokkeld, die we juist boven hebben verworpen. Op zoo'n manier zou men ruimte en tijd, die niets anders zijn dan een begripsschema, weer materialiseeren.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Alle gegevens van de bevolking van een land kunnen ordelijk worden samengevat in een bevolkingsstatistiek. Zoo'n statistiek is een begripsschema, en dat schema is uit den aard der zaak afhankelijk van gebeurtenissen als epidemieën, oorlogen enz. Dat is echter geen materieele werking, waarop men de wet van actie en reactie zou mogen toepassen, om te concludeeren, dat nu de statistiek omgekeerd ook materieelen invloed zou kunnen uitoefenen op de bevolking. Niet het sterftecijfer bepaalt de sterfgevallen, maar de sterfgevallen bepalen wel het sterftecijfer. Zoo bepaalt ook de materieverdeeling de meest practische meetkunde, maar er kan geen werking van ruimte en tijd uitgaan op de materie, zooals de klassieke mechanica dat zou verlangen.

Wat moeten we nu echter verstaan onder onze driedimensionale eigenlijke „ruimte"? We dalen weer twee dimensies af en denken ons de wereldfilm van Lijnland als een gebogen oppervlak voor ons liggen. Nemen we aan, dat het een of ander stelsel van naast elkander liggende kromme lijnen op die film zoo is gelegen, dat elke lijn ervan Lijnland op een bepaald tijdstip voorstelt. De tijd zij daartoe op de een of andere geschikte wijze gedefinieerd. Al wat dan n a elkaar gebeurt zien wij toeschouwers n a a s t elkaar voor ons. Nu bepaalt de materieverdeeling een transformatiegroep in de voor ons liggende film, waarbij alle verschijnselen in Lijnland invariant zijn. We kunnen dus met behulp van transformaties dier groep de kromme lijnen op de een of andere wijze op de film verschuiven en verbuigen, en wanneer we dan maar voor tijd nemen wat d i e z e l f d e transformaties ons opleveren, dan is het zoo verkregen stelsel van elkaar in dien nieuwen tijd opvolgende Lijnlanden volkomen gelijkgerechtigd met het eerste. Wat nu voor Lijnland geldt, geldt ook voor onze ruimte, al kunnen we dat dan met de voorstelling niet meer zoo mooi volgen. De in den tijd op elkaar volgende fasen onzer ruimte kunnen op zeer verschillende wijze in de vierdimensionale ruimte-tijdwereld gekozen worden, mits men bij elke keuze een passende definitie aan den tijd geeft. Het zal echter in het algemeen niet mogelijk zijn die ruimten zoo te kiezen, dat er een euclidische meetkunde in geldt, althans wanneer men wil vasthouden aan het beginsel die meetkunde te nemen, die het eenvoudigste is, dat is dus die, welke met de transformatiegroep in verband staat. Principieel is men echter in de keuze der meetkunde der ruimte veel vrijer dan in die van de ruimte-tijdwereld, daar de laatste immers direct van de gegeven materieverdeeling afhangt. Men kan als het ware van de vierdimensionale ruimte-tijdwereld op verschillende manieren een driedimensionale doorsnede maken en elk zoo'n doorsnede kan bij een passende definitie van den tijd als ruimte op een bepaald tijdstip opgevat worden, die voor op bepaalde wijze bewogen waarnemers „de" ruimte is. De splitsing van de wereldfilm in ruimte en tijd hangt dus af van den toestand van den waarnemer en is niet voor iedereen op dezelfde wijze gegeven.

Wanneer we nu zoo de oude ons zoo wel vertrouwde euclidische meetkunde vaarwel zeggen terwille van de eenvoudigheid der natuurverklaring, dan mag daar dan ook wel wat heel bijzonders tegenover staan, de mechanisch-physische vergelijkingen mogen wel erg eenvoudig worden, willen zij een zoo ingrijpende daad wettigen. Dit is nu echter ook inderdaad het geval, en dat laat zich het gemakkelijkste toonen aan de beweging van een zwaar massadeeltje. Beschouwen we zulk een deeltje, dat zich onder den invloed van de zon en eenige planeten moge bewegen. In de klassieke mechanica ziet die beweging er allerminst eenvoudig uit, de baan van het deeltje is een zeer ingewikkelde kromme lijn. Daarentegen blijkt de wereldlijn in de ruimte-tijdwereld buitengewoon eenvoudig te zijn, het is de eenvoudigst denkbare lijn, namelijk de geodetische lijn, die we reeds boven ontmoetten, en die de meest rechte lijn is, die zich in die vierdimensionale uitgebreidheid laat trekken. We hebben hier met een geval te doen, waarbij die geodetische lijn altijd den maximum afstand geeft. De Engelsche astronoom Eddington, die niet al te best over de Engelsche vakvereenigingen (trade-unions) te spreken is, heeft daarover de volgende politieke aardigheid ten beste gegeven. Hij zegt, een zwaar massadeeltje heeft trade-union-achtige allures, het gebruikt voor het doorloopen van zijn wereldlijn altijd den grootst mogelijken tijd.

Mercurius als een voldoende klein deeltje beschouwende kunnen we dus constateeren, dat de wereldlijn van Mercurius een geodetische lijn is. De baan van Mercurius is nu een soort van projectie van die lijn op onze driedimensionale ruimte en volstrekt geen geodetische lijn meer. Physisch drukken we dat zoo uit, dat er „krachten" zijn, zwaartekracht en alphawerking, die de baan van Mercurius van een geodetische lijn doen afwijken. Hier wordt de relativiteitstheorie theorie der zwaartekracht, en komt tegelijk de alphawerking voor den dag. Wat zich aan ons als zwaartekracht en alphawerking vertoont is een gevolg van het feit, dat een geodetische lijn in de ruimte-tijdwereld zich tengevolge van den aard der meetkunde in die wereld op deze ruimte niet als een geodetische lijn projecteert.

Onze driedimensionale ruimte heeft een meest practische meetkunde die in de buurt van de zon, die als zware massa de meetkunde sterk beïnvloedt, merkbaar van de euclidische afwijkt. Dat heeft ten gevolge, dat de baan van Mercurius (de binnenste planeet) er anders uitziet, dan wanneer de meetkunde euclidisch was, en het hier optredende verschil is juist de afwijking in de beweging, die reeds vóór Einstein uit de waarnemingen bekend was, doch nog geen afdoende verklaring gevonden had, en die nu door de relativiteitstheorie verklaard is.

Ook de wereldlijn van een lichtstraal is een geodetische lijn. De baan van een lichtstraal is dus dezelfde als die van een met lichtsnelheid voortbewegend massadeeltje, d.w.z het licht ondervindt den invloed van de zwaartekracht en gedraagt zich dus als iets, dat zwaarte heeft. Tegenover de vroegere theorieën geeft dit voor een lichtstraal, die langs den rand der zon gaat, een afwijking van 0,85 boogseconden, in de onderstelling, dat in de driedimensionale ruimte een euclidische meetkunde zou gelden. Deze afwijking is niet in strijd met de theorie van Newton, zelfs heeft Newton in zijn optica steeds de vraag aan de orde gesteld of wellicht het licht door de zwaartekracht beïnvloedt wordt. Nu is echter de meetkunde onzer driedimensionale ruimte in de nabijheid van de zon niet euclidisch en geeft nog eens een afwijking, die toevallig even groot is als de eerste en in dezelfde richting. Deze tweede afwijking is natuurlijk niet met de op euclidischen grondslag rustende klassieke mechanica te verklaren. Totaal moet dus volgens de relativiteitstheorie een afwijking van 1,7 boogseconden resulteeren, en dat is practisch, wanneer men de waarschijnlijke waarnemingsfouten in rekening brengt, juist het bedrag, dat thans door de Engelsche expedities gevonden is. De waarnemingen hebben dus zoowel bij Mercurius als bij den lichtstraal geleerd, dat de meest practische meetkunde in de buurt van de zon merkbaar van de euclidische afwijkt.

De tegenwerping van de zijde der alledaagsche voorstelling.

De lezer, die tot hier geduldig gevolg heeft, komt nu met een tegenwerping, die voor hem buitengewoon belangrijk is, en die hem vooralsnog belet de theorie volledig te apprecieeren. Hij zegt, alles goed en wel, dat is allemaal logisch in orde, en de experimenten zullen ook wel goed zijn, maar ik kan mij die nieuwe ruimte en dien nieuwen tijd absoluut niet v o o r s t e l l e n. Is hij wat meer belezen, dan staaft hij zijn bewering door tal van paradoxen ten aanzien van den gang van klokken aan te halen, die uit de relativiteitstheorie voortvloeien, paradoxen die aan de voorstelling werkelijk een harde noot te kraken geven. Hij houdt zich dan toch maar liever bij de euclidische ruimte en bij de gewone opvattingen over mechanische en electrische verschijnselen.

Dit bezwaar, dat iedere leek, die voor het eerst met de theorie in aanraking komt, noodzakelijk voelen m o e t, mag volstrekt niet worden genegeerd, maar moet behoorlijk onder oogen gezien worden. Dan heft het zich echter ook vanzelf op.

Men merke op, dat het hier niet gaat om denken, om begrijpen, want alles wat behoorlijk gedefinieerd is en geen tegenstrijdigheden bevat laat zich door het begrip vatten. Het gaat alleen om de v o o r s t e l l i n g.

In de eerste plaats is het genoemde bezwaar er een van particulieren aard, geen twee menschen zijn, wat hun voorstellingsvermogen betreft, gelijk, en niemand kan aan een ander voorschrijven hoever hij met zijn voorstellingsvermogen kan en mag gaan en hoever niet. In de tweede plaats leert de historie, dat wat al niet voorstelbaar geacht wordt met den tijd sterk wisselt. De relativiteitstheorie is nog slechts enkele jaren oud en de voorstelling heeft nog slechts kort en nog maar bij enkelen den drang gevoeld zich aan te passen. In de derde plaats zijn er tal van dingen, ook in de oudere natuurverklaring, die men zonder meer accepteert en die toch moeilijk voorstelbaar geacht kunnen worden. Zoo is bijv. in de euclidische meetkunde m.i. volstrekt niet alles voorstelbaar. Ik voor mij acht het onmogelijk twee rechte lijnen, die, hoever ook verlengd, elkaar nooit snijden, met de voorstelling te volgen, en de mogelijkheid van zulke lijnen is voor de euclidische meetkunde juist essentieel. Ook een steeds grooter wordende driehoek, wiens hoekensom 180 graden blijft, mede een essentieel punt der euclidische meetkunde, is m.i. met de voorstelling niet te volgen. Van de physische verschijnselen zijn alleen de mechanische met de voorstelling te volgen, en met de electromagnetische wil dat maar niet gelukken. Dat de voorstelling hier inderdaad te kort schiet, blijkt uit het groote aantal „hulpvoorstellingen", dat in den loop der jaren verzonnen is om den wensch naar voorstellingen tegemoet te komen.

De eisch, dat een natuurverklaring geheel met de voorstelling gevolgd moet kunnen worden, is dan ook een eisch, die in redelijkheid niet gesteld mag worden. Veelmeer is deze eisch te beschouwen als een overblijfsel uit den tijd, toen de menschheid aan het door het begrip geleide experiment en aan het tot mathematische exactheid geschoolde begrip nog niet toe was, en trachtte zich een wereldbeschouwing op te bouwen uit de vage beelden der voorstelling.

Hulpvoorstellingen zullen ten allen tijde van groote waarde blijven, in het bijzonder als tijdelijk richtsnoer voor den experimentator, en aan hulpvoorstellingen, die ons het nieuwe ruimte- en tijdbegrip nader brengen, ontbreekt hte reeds nu niet, en zal het in de toekomst zeker nog minder ontbreken.

Nimmer echter mag de voorstelling worden geproclameerd tot rechter om te oordeelen over een theorie, die voor het forum van begrip en experiment haar bestaansrecht bewezen heeft. De voorstelling heeft zich, zoo mogelijk direct, zoo noodig langs den weg der hulpvoorstellingen, aan te passen aan wat begrip en experiment leeren. Zij is een hulpmiddel, een tusschenstadium tusschen experiment en begrip, dat als zoodanig buitengewoon nuttig kan zijn, zij heeft echter zelf niets in te brengen.

De theorie van WEYL.

Het zou nu niet juist zijn den lezer in den waan te laten, dat er in de nieuwere relativiteitstheorie geen enkele moeilijkheid meer overblijft, en wij reeds nu in staat zijn het geheele physische gebeuren met behulp van die theorie te verklaren. Niets is natuurlijk minder waar dan dat. Op enkele moeilijkheden kan nog even gewezen worden. Zooals boven gezegd, wordt de transformatiegroep, waarbij alle verschijnselen invariant moeten zijn, bepaald door de materieverdeeling, en men kan daaraan uitdrukking geven door differentiaalvergelijkingen, die door Einstein zijn aangegeven. Nu zijn die differentiaalvergelijkingen niet de eenige mogelijke en het is dus nog volstrekt niet zeker of de Einstein'sche opstelling niet voor verdere verbetering vatbaar is. Wij hebben hier te doen met een eersten stouten stap, die al op groote resultaten kan bogen, maar die niet de laatste stap behoeft te zijn. Reeds heeft Weyl er de aandacht op gevestigd, dat er in een klein hoekje der relativiteitstheorie nog een oud niet relativistisch aanhangseltje is blijven zitten, een klein spookje dus, dat, toen de groote spoken absolute ruimte en absolute tijd verdreven werden, aan de aandacht ontsnapt is. Hij heeft op dat spookje meedoogenloos het volle licht laten vallen, en practisch wil dat zeggen, dat hij o.a. tot een ietwat andere opstelling der differentiaalvergelijkingen is gekomen, die zeker alle aandacht verdient. Of er nog meer van die spookjes zijn is niet ineens te overzien, maar het is in het geheel niet uitgesloten, dat er nog eens een formeele klopjacht gehouden moet worden.

Teneinde iets van het beginsel duidelijk te maken, dat aan de theorie van Weyl ten grondslag ligt, knoopen we aan aan de bekende reeds bovengenoemde eigenschap, dat de som van de hoeken van een driehoek op een bol grooter dan 180° is. Met een vakterm heet de afwijking van 180 graden het sferische exces, en in de meetkunde bewijst men, dat dat exces niet voor alle driehoeken even groot is, maar aangroeit naarmate de driehoek grooter wordt. Denken we ons nu een vlaktewezen op een boloppervlak om een driehoek heen wandelen met hoeken van bijvoorbeeld 65, 80 en 85 graden, dan zal die bolbewoner bij het omslaan van het eerste hoekpunt 115 graden (dat is 180 min 65) draaien, bij het tweede 100 graden en bij het derde 95 graden, totaal 310 graden. Ware het vlaktewezen op zijn plaats gebleven, dan zou het 360 graden om zijn middelpunt hebben moeten draaien om eenmaal met het gezicht naar alle windstreken toegekeerd te zijn, bij het doorloopen van den driehoek is hem echter datzelfde gelukt met een totale draaiing van 310 graden, dat is 50 graden minder. Dit is een zeer eigenaardige ervaring, die alleen in een gebogen tweedimensionale wereld en niet in een plat vlak kan worden beleefd, en die een vlaktewezen dus als een criterium zou kunnen gebruiken om uit te maken of hij in een gebogen oppervlak of in een plat vlak leeft. Het is daartoe alleen noodig, dat hij in staat is behoorlijk te meten of, en hoeveel, hij op eenig oogenblik om zijn middelpunt draait. Hij zou dat kunnen doen door waarneming van voorwerpen in zijn buurt, dat is echter een weinig bevredigende methode, want wanneer die voorwerpen dan zelf eens bewegen en door elkaar dwarrelen wordt een meting onmogelijk.

Nu bestaan er echter instrumenten waarmede dat inderdaad mogelijk is. De bekende slinger van Foucault, waarmede men de draaiing van de aarde ten opzichte van de vaste sterren kan constateeren, ook wanneer die sterren in het geheel niet zichtbaar zijn, is een dergelijk instrument. We onderstellen nu het wezen op het boloppervlak in het bezit van zoo'n instrument en wel een van een zeer eenvoudig soort, namelijk een mechanisme, dat, hoe ook de drager zich moge bewegen, zelf nooit meedraait. Dat instrument noemen we een k o m p a s l i c h a a m. Bij het omloopen van den driehoek draait nu de wandelaar achtereenvolgens 115, 100 en 95 graden ten opzichte van het kompaslichaam of, wat hetzelfde is, het kompaslichaam draait in totaal 310 graden ten opzichte van hem. Na de beweging is dus de wandelaar in zijn oorspronkelijken stand terug, maar het kompaslichaam is 50 graden ten opzichte van zijn vroegeren stand uitgeweken, en dat niettegenstaande het kompaslichaam toch geen oogenblik gedraaid heeft, want krachtens zijn constructie kan het immers nooit draaien. We kunnen nu zeer algemeen zeggen wanneer een oppervlak plat is, d.w.z. wanneer er een euclidische meetkunde in geldt. Dat is dan en alleen dan het geval, wanneer een kompaslichaam, langs de een of andere gesloten baan, die bijvoorbeeld een driehoek kan zijn maar ook iets anders, steeds, hoe we die baan ook kiezen, in zijn uitgangspunt teruggekeerd, niet in stand veranderd blijkt te zijn. In alle andere gevallen geldt de een of andere niet-euclidische meetkunde. Brengt men een kompaslichaam langs twee verschillende wegen van een punt A naar een punt B, dan volgt hieruit, dat de eindstand van het lichaam alleen bij een euclidische meetkunde altijd in beide gevallen hetzelfde is, en bij een niet-euclidische meetkunde afhankelijk is van den gekozen weg. Woordelijk hetzelfde geldt nu voor uitgebreidheden van drie, vier of meer afmetingen, en het kompaslichaam levert dus een eenvoudig middel den aard van een uitgebreidheid te onderzoeken.

Het merkwaardige gedrag van het kompaslichaam in een niet-euclidische ruimte brengt met zich, dat in zoo'n ruimte het begrip evenwijdigheid zijn beteekenis verliest. Nemen we eens onze gewone euclidische ruimte, dan weet ieder, dat een vertikale lijn voor ons een andere richting heeft dan voor een bewoner van New York, maar we zijn overtuigd, dat we onze vertikale richting in New York zouden kunnen vertoonen eenvoudig door die richting evenwijdig aan zichzelf, dat is zonder draaien, naar New York over te brengen. We kunnen bijvoorbeeld die richting in een kompaslichaam markeeren en dan het kompaslichaam langs een willekeurigen weg overbrengen en het ter contrôle weer terugbrengen. Ware onze ruimte niet euclidisch, dan zou dit onmogelijk worden, omdat de toestand waarin het kompaslichaam te New York aankwam afhankelijk zou worden van den weg dien het lichaam doorloopen had. Het ware derhalve totaal onmogelijk op twee verschillende plaatsen twee onderling evenwijdige richtingen te definieeren.

We denken ons nu onze vierdimensionale ruimte-tijdwereld of wereldfilm voor een oogenblik euclidisch. Dan zou het mogelijk zijn een richting door een bepaald punt evenwijdig aan zichzelf naar een ander punt over te brengen op één enkele wijze, die onafhankelijk ware van de materieverdeeling in de wereldfilm. We zouden dus een meetkundige betrekking hebben tusschen twee richtingen, onafhankelijk van de materieverdeeling, d.w.z. het zou in ons wereldbeeld spoken. Nu zagen we reeds, dat het, om deze spoken te verdrijven, noodzakelijk is, dat de meetkunde afhangt van de materieverdeeling. Dan is inderdaad alles in orde, we kunnen een richting wel met behulp van een kompaslichaam zonder draaien naar een ander punt overbrengen, maar het resultaat hangt van den doorloopen weg af en van de meetkunde, d.i. van de materieverdeeling, zoodat we niet een van te voren door iets buiten de materieverdeeling vastgelegd resultaat volgen.

Het is nu mogelijk om den stap van Weyl te begrijpen. In de Einstein'sche relativiteitstheorie werd als vanzelfsprekend aangenomen, dat de maat van 1 centimeter (en evenzoo 1 seconde) van eenig punt van de wereldfilm kan worden overgebracht naar eenig ander punt op een wijze, die geheel van den doorloopen weg en van de materieverdeeling onafhankelijk was. M.a.w. men nam aan, dat het kompaslichaam eventueel gedraaid maar toch altijd nog even groot in zijn uitgangspunt terugkeerde na een gesloten baan doorloopen te hebben. Weyl heeft met groote scherpzinnigheid opgemerkt, dat men dat volstrekt niet van te voren mag vastleggen, maar dat in een consequente relativiteitstheorie, ook de afmetingen van het teruggekeerde kompaslichaam moeten afhangen van de materieverdeeling in de wereldfilm en van niets anders.

Daarmede heeft hij dan inderdaad het spook verdreven, dat in de Einstein'sche relativiteitstheorie er buiten de materieverdeeling om voor zorgt, dat de afmetingen van het kompaslichaam na een omgang niet veranderd zijn, op dezelfde wijze als Einstein het spook (de absolute euclidische ruimte) verdreven had, dat er in de klassieke mechanica voor zorgt, dat de stand van het kompaslichaam na een omgang niet veranderd is. De consequenties van de Weyl'sche theorie laten zich nog slechts zeer gedeeltelijk overzien, te meer daar ook op het standpunt van Weyl nog verschillende mogelijkheden ten aanzien van de differentiaalvergelijkingen bestaan. Ook heeft men nog geen experiment kunnen bedenken waaraan de theorie van Weyl zou kunnen worden getoetst.

Makrokosmos en Mikrokosmos.

Bij het onderzoek der verschillende mogelijkheden, die ten aanzien van differentiaalvergelijkingen bestaan, is aan den dag gekomen, dat de vorm dezer vergelijkingen ten nauwste samenhangt met de vraag of wij ons de ruimte als oneindig of als eindig en gesloten (dus als een gesloten oppervlak maar dan een dimensie hooger) moeten voorstellen. Anderzijds is gebleken, dat de vorm der vergelijkingen evenzeer samenhangt met onze denkbeelden over de samenstelling der materie met name over electronen en positieve kernen van atomen. De geweldige draagwijdte der relativiteitstheorie treedt hier wel sterk in het licht, waar zij eenerzijds ingrijpt in astronomische vraagstukken betreffende den opbouw van het heelal, anderzijds in physische vraagstukken betreffende atoomstructuur. Dit voor oogen kan men zeker niet met grond verwachten, dat de relativiteitstheorie spoedig haar beslag zal krijgen en heelemaal in orde zal zijn, veelmeer moet men zich voorstellen, dat er met Newton een ontwikkelingsfase begonnen is, die met Einstein is geëindigd, en dat wij nu aan het begin staan van een nieuwe ontwikkelingsfase der exacte wetenschappen, waarvan het einde voor ons nog niet is te zien.

Slotopmerking.

Men moet nu vooral niet denken, dat in die nieuwe nu aan gebroken periode de oudere theorieën al hare waarde verloren hebben, dat de Newton'sche mechanica, de Maxwell'sche vergelijkingen en in het bijzonder ook de theorie van den aether geheel nutteloos geworden zouden zijn. Al deze theorieën blijven als grondslag, zij het dan gecorrigeerd en van een verruimd standpunt beschouwd, in het nieuwe voortleven. Wat den aether betreft, zullen wij nu wel moeten erkennen, dat deze tot onze interpretatie der verschijnselen behoort en niet ergens als ding bestaat, doch dat neemt niet weg, dat het dikwijls even gewenscht kan zijn een aether in te voeren, als het een of ander assenstelsel, dat immers ook eigenlijk niet bestaat, doch alleen voor onze behoefte geschapen wordt. Juist de eigenaardige bijzonderheid der relativiteitstheorie, dat zij vele meeningen en opvattingen naast elkaar als gelijkgerechtigd erkent en alleen het betrekkelijke er van in het licht stelt, maakt het haar als geen vroegere mogelijk verschillende uiteenloopende gedachtengangen te erkennen en te waardeeren.

Er is in dit opzicht een groot verschil te constateeren tusschen den geest van redelijkheid en van laten gelden van verschillende meeningen, die de aangebroken nieuwe fase kenmerkt, en den betrekkelijk starren en dogmatischen geest van het afgeloopen tijdperk. Dit verschil is van het grootste belang ook buiten het terrein der exacte wetenschappen. De voortgang der wijsbegeerte in de achttiende en negentiende eeuw stond sterk onder den invloed der zich ontwikkelende exacte wetenschappen, en in de toekomst zal die invloed zeker niet minder sterk zijn. De zoo geweldige omwenteling, die op exact wetenschappelijk gebied plaats heeft, zal ongetwijfeld en misschien reeds spoedig haar werking doen gevoelen op andere gebieden van menschelijk denken en in het bijzonder onze algemeene wereldbeschouwing in redelijken zin ontwikkelen en verruimen.

SCHEMA

Euclides — Newton

I. Hoe verhoudt zich het parallellen-axioma tot de andere axioma's?	II. Hoe verhouden zich de axioma's tot de ervaring?	III. Hebben absolute ruimte en absolute tijd physische realiteit?
1. Zoeken naar een bewijs. 2. Axiomatische onderzoekingen: Bolyay. Lobatschewsky. Riemann. 3. Realiseering op gebogen oppervlakken: Riemann. Beltrami.	1. Aprioriteit van ruimte en tijd: Kant. Pasch. 2. De meetkunde onverbrekelijk verbonden met mechanica en physica: Riemann. v. Helmholtz. Poincaré.	1. Negatief-kritisch relativisme: Huygens. Euler. Kant. Berkeley. Mach. 2. De alphawerking: Neumann.
4. Het Klein'sche principe: Meetkunde = invariantentheorie bij bepaalde transformatiegroepen.	3. Welke vergelijkingen geven het best rekenschap der verschijnselen en bij welke transformaties zijn deze vergelijkingen invariant: Galileigroep. Lorentz-contractie. Lorentzgroep. 4. Eerste relativiteitstheorie: Lorentz-Einstein.	3. Eisch: De transformatiegroep in koordinaten en tijd is bepaald door de verdeeling der materie.

↓

Algemeene relativiteitstheorie
Einstein.
Weyl.

↓

Theorieën over den opbouw van het heelal. → Veld van het hedendaagsche onderzoek. ← Theorieën over den opbouw van het atoom.

NIJGH & VAN DITMAR'S
UITGEVERS-MIJ

TELEGRAMMEN:
NIJGH-DITMAR, ROTTERDAM
TELEFOON:
7841-7842-7843-7861
OPGERICHT 1837

Zy/v.L. ROTTERDAM, 2 Februari 19 20
WIJNHAVEN 111-113

den HoogGel.Heer Prof. J.A.Schouten E.I.

Rotterdamscheweg 2, 5

D E L F T .

HoogGel.Heer,

Wy hebben nog te beantwoorden Uw schryven van 17 Januari betr. de uitgave van Uw manuscript " Begrippen over Ruimte en Tyd ".

Hoewel wy gaarne toestemmen, dat voor een dergelyk onderwerp veel belangstelling is, deelen wy tot onze spyt Uw optimisme, wat de verkoop van dit werk betreft, niet. Daar het echter een werk is van geringen omvang, zyn wy bereid dit uit te geven op een tantième-basis van 15 % van den verkoopsprys over elk verkocht exemplaar. Deze verkoopsprys zal vermoedelyk worden ± f 1.90.

Wy hebben gerekend op 50 present-exemplaren voor U.

Indien U in beginsel met ons accoord gaat, zullen wy U dezer dagen contract ter teekening toezenden.-

Inmiddels

met de meeste hoogachting

p.proc. N.V. NIJGH & VAN DITMAR'S UITG. MIJ.

3-2-20 [illegible] 15% [illegible]

De uitgever meende aanvankelijk dat een oplage van 500 exemplaren voor Schoutens boekje over "Ruimte en Tijd" ruim voldoende zou zijn. Uit de hiernaast afgedrukte brief blijkt dat er aanmerkelijk meer belangstelling bestond. Zelfs in 1938 werden er nog exemplaren van het boekje verkocht (zie de brief op bladzijde 118).

NIJGH & VAN DITMAR'S
UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ

Zy/v.G.

ROTTERDAM, 6 Mei 1920
WIJNHAVEN 113

Den Hooggeleerden Heer Prof.Dr. J.A.Schouten. e.i.
Rotterdamscheweg 2⁵

DELFT.

Hooggeleerde Heer,

Inderdaad is Uw boekje " Ruimte en tyd " goed verkocht, maar in herdruk, tenminste in verband met uitverkocht zyn, was geen sprake.

Wy hebben den boekhandel n.l. tamelyk ruim in commissie gezonden en het overblyvende getal was 3 dagen na die zending by ons uitverkocht. Wy konden toen onmogelyk de exemplaren by den boekhandel terug vragen en hebben er toen maar zoo spoedig mogelyk 400 exemplaren by gedrukt.

De totale oplage van het boekje is dus geworden 1000 exemplaren.

Inmiddels met de meeste
Hoogachting,

[illegible signature]

NIJGH & VAN DITMAR N.V.

DIRECTEUREN: J. TH. PIEK – D. ZIJLSTRA

Den Hooggeleerden Heer
Prof Dr J.A.Schouten c.i.
Rotterdamscheweg 111
Delft

ROTTERDAM
WIJNHAVEN 113
TELEFOON 27840

8 Juni 1939

Hooggeleerde Heer,

Wij hebben de eer U mede te deelen, dat over het boekjaar 1938 werden verkocht van

Ruimte en Tijd
3 ex. à f. 0.26¼ f. 0.78

welk bedrag wij heden op Uw girorekening nr. 29707 doen overschrijven.

Hoogachtend,
Nijgh & van Ditmar n.v.
L. Meijer

M/B.

Meetkunde en ervaringsstructuur.

Rede, uitgesproken op den gedenkdag van de Technische Hoogeschool op 9 Januari 1939, door den Rector Magnificus, Prof. dr. ir. J. A. Schouten.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren onzer Technische Hoogeschool, Mijne Heeren Professoren en Lectoren, Dames en Heeren Privaatdocenten en Assistenten, Dames en Heeren Studenten, en voorts Gij allen, die door Uwe tegenwoordigheid de beteekenis van dezen feestdag verhoogt,

Zeer gewaardeerde Toehoorderessen en Toehoorders,

Gebruik makende van het voorrecht, dat den Rector Magnificus is gegeven, om op dezen dag een onderwerp te behandelen uit zijn eigen veld van onderzoek, wil ik tot U spreken over het verband tusschen meetkunde en ervaring. Aanwezige mathematici en physici wil ik van te voren mijn excuus aanbieden voor den weinig exacten causerievorm, dien ik wel gedwongen was aan het geheel te geven en voor het voor hen minder interessante, daar voor het meerendeel overbekende, eerste gedeelte; andere belangstellenden daarentegen voor een wat meer op details ingaand, en daardoor minder algemeen begrijpelijk, gelukkig voor hen echter ook zooveel korter, later gedeelte. Het gewenschte „elk wat wils" in een voordracht als deze moet noodzakelijk als zijn tegendeel met zich brengen, dat een ieder ook wel dingen te hooren krijgt, die hem niet kunnen boeien.

Het is een oude vraag of de wiskunde een wetenschap a priori of a posteriori is. Nader gepreciseerd luidt die vraag: gaat de menschelijke geest uit van eenige van te voren en buiten alle ervaring om aanwezige grondbegrippen om daaruit, wederom buiten alle ervaring om, het systeem der wiskunde op te bouwen, of speelt bij den opbouw der wiskunde ook de ervaring ergens een rol? In het eerste geval zou de op zichzelf merkwaardige omstandigheid, dat de wiskunde in ieder stadium van haren opbouw op de een of andere wijze op de ervaring van toepassing blijkt te zijn, voor den theoretischen wiskundige als zoodanig eigenlijk geen beteekenis hebben; voor hem zou de wiskunde ook buiten ieder ervaringsverband leven en zich ontwikkelen. Nu is het inderdaad een feit, dat, gegeven enkele grondbegrippen, bijvoorbeeld „geheel getal" „continuïteit" e.d., de geheele wiskunde, buiten de ervaring om, **kan** worden ontwikkeld. Het zou er dus nog slechts op aankomen om te bewijzen, dat ook die grondbegrippen, die ik met opzet hier niet nauwkeurig preciseerde, buiten iedere ervaring om in den menschelijken geest aanwezig zijn, om de juistheid van de aprioristische opvatting te verzekeren. Een dergelijk bewijs is echter tot heden noch in positieven noch in negatieven zin geleverd, en het is zelfs niet uitgesloten, dat de geheele vraag op zichzelf zinledig is en behoort tot die zoogenaamde schijnproblemen, die vanzelf verdwijnen zoodra zij behoorlijk worden geformuleerd.

Stellen wij de vraag dus liever eens volkomen anders, vragen wij niet wat **kan** de wiskundige doen, in het bezit van zijn door teekens en regels gesymboliseerde grondbegrippen, maar wat **doet** hij **in feite**? Hoe ontwikkelt zich de wiskunde nu **werkelijk**, geschiedt die ontwikkeling zuiver buiten de ervaring om, of grijpt de ervaring hetzij bij voortduring, hetzij incidenteel in het ontwikkelingsproces in? Wij vragen dus niet meer wat er **zou kunnen** gebeuren, maar wat er **werkelijk** gebeurt, d.w.z. wat zich aan de hand der geschiedenis laat vaststellen. Deze vraag, die in elk geval **geen** schijnprobleem is, daar naar principieel vaststelbare feiten gevraagd wordt, wil ik trachten te beantwoorden voor dat deel der wiskunde, dat men gewend is „meetkunde" te noemen. De vraag, wat dan eigenlijk precies onder „meetkunde" te verstaan is, zal daarbij vanzelf aan de orde komen, daar de verschillende fasen harer geschiedenis zich juist scherp onderscheiden door het antwoord, dat in ieder dier fasen op deze vraag werd gegeven.

Vooraf een opmerking van meer algemeene strekking. Bij de ontwikkeling van een ervaringswetenschap kan er onder omstandigheden een oogenblik optreden, waarop het complex der ervaringen, dat in den aanvang nog verward en onsamenhangend scheen, een min of meer duidelijke **structuur** gaat vertoonen. Veelal gelukt het dan van die structuur een **structuurschema** te ontwerpen, d.i. een stelsel van symbolen en van regels aangaande het gebruik en de combinatie dier symbolen. Ware zulk een structuurschema volledig, dan zou het ieder ervaringsfeit afbeelden en zou het dus mogelijk zijn ten aanzien van den uitslag van ieder experiment in het beschouwde ervaringscomplex voorspellingen te doen. Een ervaringscomplex met een volledig structuurschema heet **volledig gemathematiseerd,** het structuurschema heet de **wiskunde** van het complex en de bewerkingen, die wij de symbolen in het schema laten ondergaan om tot voorspellingen, althans van de mate van waarschijnlijkheid van een gebeurtenis, te komen, heeten **berekeningen,** alle deze uitdrukkingen opgevat in den ruimsten zin van het woord. Ik noem eenige voorbeelden. De dagelijksche ervaring van het samenvoegen en scheiden van voorwerpen heeft tot structuurschema de gewone rekenkunde met hare symbolen, de getallen, en hare aan vaste regels onderworpen bewerkingen, optellen, aftrekken, enz. Dit ervaringscomplex is volledig gemathematiseerd, niemand zal er over denken nog eens experimenteel te toetsen of nu werkelijk 132 gulden plus 346 gulden wel precies 478 gulden is. De gewone dagelijksche ruimtelijke ervaring, die wij hebben van de voorwerpen in de ruimte rondom ons, heeft tot structuurschema de zoogenaamde „gewone" meetkunde of meetkunde van Euclides, die, zooals wij thans weten, werkelijk een binnen de door de waarnemingsfouten gestelde grenzen volledige mathematiseering geeft, zoolang er geen sterk gravitatieveld optreedt, de afmetingen groot (t.o. van een atoom) en de snelheden klein (t.o. van het licht) zijn. De ervaring, die wij hebben van electrische en magnetische verschijnselen, is ten deele gemathematiseerd in een structuurschema, dat zich groepeert om de wetten van Maxwell, maar het is bijvoorbeeld niet mogelijk den specifieken electrischen weerstand van een metaal uit dit schema te berekenen. Onze ervaring ten aanzien van de spectraallijnen vindt voor een deel haar structuurschema in de quantenmechanica, maar is nog evenmin volledig gemathematiseerd. Er is een natuurlijke neiging om al deze verschillende structuurschemata met elkaar in verband te brengen en zoo mogelijk tot één enkel schema te vereenigen en deze neiging bestaat niet alleen bij de onderzoekers, die naar vereenvoudiging streven, maar zij komt ook als het ware in die schemata zelve tot uiting, doordat telkens weer blijkt, dat men niets blijvend kan isoleeren, dat men bijvoorbeeld geen electrische verschijnselen behoorlijk kan behandelen zonder de magnetische er bij te nemen, geen electromagnetisme zonder gravitatie en geen gravito-electromagnetisme zonder quanten.

Deze unificeering is alleen mogelijk, doordat de schemata een groote mate van soepelheid bezitten, waardoor zij in staat zijn zich te wijzigen en zich aan elkaar aan te passen, niet alleen zonder verlies hunner toepasselijkheid, maar zelfs onder uitbreiding hunner toepaselijkheid tot ervaringsgebieden, waar men van te voren de mogelijkheid eener volledige mathematiseering niet zou hebben durven vermoeden. Van deze soepelheid en beweeglijkheid der schemata wil ik U nu eenige voorbeelden geven.

Gaan wij daartoe terug tot de gewone meetkunde der dagelijksche ruimtelijke ervaring. Over het al of niet a priori zijn dier meetkunde zullen wij niet spreken; historisch staat vast, dat zij zich in elk geval ontwikkelde, wellicht niet uit, maar dan toch naar aanleiding van het practische meten, in het bijzonder van het landmeten. Maar daarna, eenmaal door Euclides volledig geaxiomatiseerd, werd zij tot een veld van onderzoek, los van iedere ervaring. In de eerste eeuwen bestond dat onderzoek alleen uit het opsporen van nieuwe stellingen en het bewijzen van deze op grond van de axioma's. Eerst in de eerst helft van de negentiende eeuw kwam men na heel veel strubbelingen tot een nieuw denkbeeld. Het bleek namelijk, dat men uit een axiomastelsel een ander axiomastelsel kon verkrijgen door eenvoudig één der axioma's te wijzigen, met dien verstande natuurlijk, dat dan het nieuwe stelsel even consistent (d.w.z. niet tot tegenstrijdigheid voerende) moest zijn als het oude. Overigens bleef de keuze van het nieuwe axioma geheel vrij. Aan zulk een axiomawijziging hebben de niet-euclidische meetkunden, aan wier ontdekking de namen van Bolyay, Lobatschevsky en Gauss verbonden zijn, hun ontstaan te danken. Hier betrof het een verandering van het laatste axioma, het zoogenaamde parallellenaxioma, maar men kan natuurlijk ook allerlei andere veranderingen invoeren, wat dan ook later gedaan is, nadat het principe eenmaal gevonden was. Zoo ontstonden bijv. door het afzien van de beperking van het dimensieaantal tot drie de meerdimensionale meetkunden, door het afzien van de maatverhoudingen de projectieve meetkunde, door het uitsluitend vasthouden van de maat in het kleine de meetkunde van Riemann en door het opgeven van het oneindige aantal punten, lijnen en vlakken de zoogenaamde „eindige" meetkunden als bijv. een der meetkunden van Veblen, die maar 21 punten en 21 lijnen bevat en niet meer, en toch aan alle axioma's van snijden en bepalen voldoet. Van een niet-euclidische meetkunde is de tweedimensionale meetkunde op het oppervlak van een bol een voorbeeld, de rechtste lijnen zijn daar groote cirkels, twee van die lijnen snijden elkaar altijd, en in een uit rechtste lijnen opgebouwden driehoek is de som der hoeken grooter dan 180°. Een tweedimensionale Riemannsche meetkunde geldt op ieder willekeurig gebogen oppervlak, bijv. op het oppervlak van een aardappel, ook daar bestaan rechtste lijnen, tusschen twee voldoend naburige punten bestaat één rechtste verbindingslijn, die tegelijk de kortste verbindingslijn is, en de „afstand" van de punten is de lengte van die lijn. Dit alles echter alleen, wanneer men uit de buurt blijft van de zoogenaamde „oogen" van den aardappel, waar de meetkunde haar beteekenis gaat verliezen en die een wat ruw maar wel tot de verbeelding sprekend voorbeeld geven van „singuliere punten", die in een meetkunde kunnen optreden.

Al die meetkunden schenen nu voorloopig zoo maar zonder verband los naast elkaar te bestaan, totdat het Klein in 1872 [1]) gelukte het beginsel aan te geven, waaruit zij allen konden worden afgeleid, waardoor eenerzijds een gezichtspunt tot klassificeering verkregen was en anderzijds voor het eerst een wel gepreciseerd antwoord gegeven kon worden op de vraag wat meetkunde nu eigenlijk is. Men kan het Kleinsche indeelingsbeginsel op de eenvoudigste wijze karakteriseeren door uit te gaan van de eenvoudige opmerking, dat de gewone meetkunde niet **alle** eigenschappen van figuren behandelt, maar alleen die, die **invarant** zijn (d.w.z. blijven bestaan) wanneer men de figuur draait of verschuift. Verdraaiingen en verschuivingen vormen samen wat men noemt een groep van transformaties en wel een zoogenaamde **eindige groep van Lie.** Deze speciale eindige Liesche groep heet de bewegingsgroep. Men kan dus zeggen, dat de gewone meetkunde de theorie der invarianten der bewegingsgroep is. Gaat men nu uit van een andere eindige Liesche groep, dan verkrijgt men een andere meetkunde en het bleek, dat alle omstreeks 1872 bekende meetkunden op deze manier te verkrijgen waren, met uitzondering van de Riemannsche meetkunde. Maar ook daar wist Klein raad te schaffen. [2]) De voor een Riemannsche meetkunde van n afmetingen karakteristieke maatverhoudingen werden vastgelegd door den zoogenaamden fundamentaaltensor, d.i. een **geometrisch object**, dat door een aantal $\frac{n(n+1)}{2}$ getallen, de **kentallen**, wordt vastgelegd. Beschouwt men nu de verandering, die die kentallen ondergaan bij verandering van het coördinatenstelsel, dan blijkt, dat men een Riemansche meetkunde kan opvatten als de theorie van de invarianten van een bij dit geometrische object behoorende **oneindige** Liesche groep. Het had nu wel voor de hand gelegen ook eens andere geometrische objecten ten grondslag te leggen en zoo andere op oneindige Liesche groepen gebaseerde meetkunden te ontwikkelen, maar de geschiedenis is nu eenmaal dien weg niet gegaan en de hier afgebroken draad werd eerst veel later weer opgevat. Wat de meetkunde der eindige groepen betreft, werkte het Kleinsche beginsel, dat orde bracht in de veelheid van meetkunden, echter in hooge mate bevruchtend en gaf het aanstoot tot tal van onderzoekingen zoowel op meetkundig gebied alsook op het gebied der theorie der eindige transformatiegroepen. Het scheen alsof het beslissende woord gesproken was en alsof zich het gebouw van meetkunde, groepentheorie en aanverwante gebieden (als bijv. partieele differentiaalvergelijkingen) zich nu verder rustig geheel onafhankelijk van de ervaring zou kunnen ontwikkelen tot een fraai afgerond geheel, dat de tijden zou trotseeren.

In werkelijkheid gebeurde er betrekkelijk spoedig geheel iets anders. Er kwam een nieuwe inslag van de zijde der ervaringswetenschappen. De speciale relativiteitstheorie van 1905, die tot het inzicht voerde, dat de meetkunde der ruimtetijdwereld de meetkunde van de transformatiegroep van Lorentz was, en die dus volkomen in het Kleinsche schema past, bracht dien nieuwen inslag nog niet en beteekende veeleer een triomf voor de meetkundigen, wier theoretische en schijnbaar van de werkelijkheid afgekeerde onderzoekingen hadden geleid tot zoo bij uitstek practisch bruikbare resultaten *). Einstein's algemeene relativiteitstheorie van 1916 echter, die de meetkunde der Lorentzgroep voor het **kleine** behoudende, voor het **groote** een Riemannsche meetkunde der ruimtetijdwereld proclameerde en op grond van deze meetkunde onmiddellijk de verklaring wist te geven voor een nog onverklaarde onregelmatigheid in de beweging van Mercurius,

---

Ter karakteriseering kan ik het beste de in 1908 door Minkowski te Göttingen uitgesproken woorden aanhalen: [3])

„Überhaupt werden die neuen Ansätze, falls sie tatsächlich die Erscheinungen richtig wiedergeben, fast den grössten Triumpf bedeuten, den je die Anwendung der Mathematik gezeigt hat. Es handelt sich darum, dass die Welt in Raum und Zeit in gewissem Sinne eine vierdimensionale Nichteuklidische Mannigfaltigkeit ist. Es würde zum Ruhme der Mathematiker, zum grenzenlosen Erstaunen der übrigen Menschheit offenbar werden, dass die Mathematiker rein in ihrer Phantasie ein grosses Gebiet geschaffen haben, dem, ohne dass dieses je in der Absicht dieser so idealen Gesellen gelegen hätte, eines Tages die vollendete reale Existenz zukommen sollte."

voerde ook voor den meetkundige tot nieuwe problemen. Wij zagen, dat de Riemannsche meetkunde niet zonder invoering van een geometrisch object en van een oneindige Liesche groep in het gebruikelijk geworden schema paste, en hier werd nu plotseling een vierdimensionale Riemannsche uitgebreidheid gepresenteerd met de pretentie de werkelijke maatverhoudingen in onze ruimtetijdwereld juist weer te geven. Weliswaar had het differentiaalmeetkundig onderzoek van mechanische problemen met meerdere vrijheidsgraden vroeger ook al wel geleid tot het beschouwen van uitgebreidheden met Riemannsche maatverhoudingen, maar die Riemannsche ruimten schenen meer het karakter van mathematische hulpvoorstellingen te dragen, terwijl de maatverhoudingen in de ruimte, die zich nu aan de beschouwing opdrong, met behulp van meetstaven en klokken werkelijk getoetst konden worden. In den geest der geometers van dat tijdsgewricht, die zich in die nieuwe ruimte wilden inleven en dat binnen de grenzen der bestaande structuurschemata niet op bevredigende wijze konden, ontstond een toestand van spanning, die op de een of andere wijze tot een ontlading moest voeren. Die ontlading kwam reeds zeer spoedig en nog voor het einde van den wereldoorlog door de ontdekking van het **pseudoparallelisme.** Dat er in een Riemannsche ruimte geen gewoon parallelisme bestaat, is duidelijk, men denke slechts aan de tweedimensionale Riemannsche meetkunde op het oppervlak van een aardappel. Wat zou immers op zoo'n oppervlak evenwijdigheid kunnen beteekenen? Dat er echter in een zoodanige ruimte toch één en slechts één bijzondere manier bestaat om een richting door een punt naar een ander punt te verplaatsen, vormt den inhoud van de nieuwe ontdekking. Nu is het hoogst merkwaardig, dat dat verplaatsingsvoorschrift of „pseudoparallelisme" lang van te voren ontdekt had **kunnen** worden. De onderzoekingen toch van Christoffel, Lipschitz, Ricci en vele anderen hadden alles voorbereid en men had de pseudoparallele verplaatsing bijv. onmiddellijk kunnen verkrijgen door den „covarianten differentiaal" van Ricci gelijk nul te stellen. Maar het is nu eenmaal een feit, dat de ontdekking **niet** gedaan werd, voor en aleer van de ervaringswetenschappen uit via de algemeene relativiteitstheorie de stoot werd gegeven. In de twee verhandelingen, die onafhankelijk van elkaar het pseudoparallelisme introduceerden, een Italiaansche [4]) en een Nederlandsche [5]), gaan dan ook beide auteurs reeds in den eersten zin van het eerste hoofdstuk van de relativiteitstheorie uit.

Hoewel de toepassing van het pseudoparallelisme onmiddellijk leidde tot de ontdekking van een nieuw relativistisch effect in de praecessiebeweging van de aarde, ligt de beteekenis van het nieuwe beginsel niet zoozeer in zijn onmiddellijke toepasselijkheid op de ruimtetijdwereld. Veeleer moet deze gezien worden in de talrijke uitbreidingen, die de geometers het onmiddellijk, en nu weer geheel **onafhandelijk** van iedere ervaring, hebben doen ondergaan. Het pseudoparallelisme werd direct veralgemeend tot de zoogenaamde theorie der overbrengingen, waarbij een soort van meetkunde tot stand komt door een voorschrift hoe men naburige lokale ruimten (eventueel te denken als oneindig kleine omgevingen) op elkaar heeft af te beelden. Zulke afbeeldingen, als transformaties opgevat, behooren tot de een of andere **cindige** Liesche transformatiegroep, en zoo komen we dus weer tot een indeeling van meetkunden naar de ten grondslag gelegde **eindige** Liesche groep, maar in een geheel anderen zin als de indeeling van Klein. De meetkunden van Klein hebben, om het eens zoo te zeggen, de transformatiegroep van binnen in de ruimte zelf, de nieuwe overbrengingsmeetkunden hebben haar van buiten in de betrekkingen tusschen de lokale ruimten. Bij iedere Kleinsche meetkunde behoort een overbrengingsmeetkunde, die zich tot de eerste verhoudt als de meetkunde der gekromde Riemannsche ruimte tot die der vlakke euklidische ruimte en op deze wijze kan men dus een „gekromde" projectieve meetkunde, een „gekromde" conforme meetkunde, enz. ontwikkelen. Maar ook daarmede was het laatste woord nog niet gesproken en er ontstonden nog tal van andere uitbreidingen, waarover ik hier echter niet wil uitweiden.

Intusschen lag het voor de hand, dat de draad, die na de erkenning van de Riemannsche meetkunde als meetkunde van een geometrisch object bij een **oneindige** Liesche groep was afgebroken, nu weer zou worden opgevat. Dat geschiedde dan ook reeds in 1922 door Eisenhart en Veblen [6]). Spoedig bleek, dat, zooals te vermoeden was, alle overbrengingsmeetkunden ook als objectmeetkunden op te vatten waren, maar ook, dat het omgekeerde niet het geval was. Weliswaar gelukte het, de meest interessante objectmeetkunden als overbrengingsmeetkunden te formuleeren, maar dat nam niet weg, dat het begrip objectmeetkunde tenslotte toch ruimer was. Dat bracht de vraag opnieuw op den voorgrond, wat nu eigenlijk meetkunde is. Men moet daarbij bedenken, dat door de geweldige uitbreiding, die de meetkunde ondergaan had, eerst door de overbrengingstheorie en onmiddellijk daarop door de objecttheorie, enorme gebieden van de wiskunde, die oorspronkelijk tot de analyse gerekend werden, zoo maar zonder meer tot de legitieme jachtvelden der geometers geworden waren. Een nauwkeurige analyse van de begrippen geometrisch object en geometrische figuur in 1935 [7]) leidde dan ook eenerzijds tot de bevestiging van de schijnbaar vage en toch zoo juiste uitspraak van Veblen en Whitehead in 1932 [8]):

,,.... een deel van de wiskunde wordt meetkunde genoemd, omdat deze naam aan een voldoend aantal competente menschen op gronden van emotie en traditie juist voorkomt,"

anderzijds echter ook tot een nadere preciseering van het in deze uitspraak zoo gelukkig geïntroduceerde **emotioneele** element. Dat emotioneele element is inderdaad, meer dan het traditioneele, de spil waarom alles draait. Dat leidt er wel toe, dat de ,,competente" menschen het er een enkelen keer niet over eens zijn of iets wel meetkunde is of niet. Zoo zagen Eisenhart en Veblen de objecttheorie als de ,,natuurlijke" opvatting, terwijl Cartan op het internationale congres te Oslo in 1936 [9]) juist als zijn meening te kennen gaf, dat deze theorie, bijv. toegepast op de Riemannsche meetkunde, ,,masque complétement, ce qu'il y a en elle de géométrique, au sens intuitiv du mot", een uitspraak, die dan overigens weer getemperd werd door de opmerking, dat er ook wel weer gevallen zijn, waar de objecttheorie tot vraagstellingen voert, die toch zonder eenigen twijfel geometrisch moeten worden genoemd. Maar wat nood? Wat doet het er eigenlijk toe of een onderzoek ,,meetkundig" of ,,analytisch" genoemd wordt, waar het toch alleen maar wezenlijk is, dat het probleem belangrijk en de behandeling goed is. En juist in die waardeering der problemen, in de onderscheiding van dat, wat op zeker oogenblik **wel**, en dat, wat **niet** of **nog niet** belangrijk is, speelt het emotioneele element **de** groote rol.

Het is toch inderdaad niet zoo, dat de mathematicus na opstelling van een indeelingsbeginsel, hetzij dat van Klein, hetzij dat der overbrengingstheorie, hetzij dat der objecttheorie, zich nu doodkoud aan het werk zet om achtereenvolgens eens alle door zoo'n indeeling aangegeven mogelijkheden te gaan uitwerken. Reeds de oneindigheid der binnen het kader van ieder dier indeelingen denkbare gevallen zou zulk een program onmogelijk maken, nog afgezien van het feit, dat een mathematicus geen rekenmachine, maar een mensch is, een mensch met bepaalde neigingen, staande in de maatschappij in zeker tijdsgewricht en beïnvloed door en geïnteresseerd in de groote vragen, die in dat tijdsgewricht in de verschillende andere wetenschappen rijzen. Een indeeling, welke dan ook, levert hem slechts voorgeordend materiaal, dat hij als vrij scheppend kunstenaar ter bevrediging van een in hem levende, voornamelijk aesthetische, behoefte bewerkt, daarbij zijn onderwerpen kiezend, weliswaar naar eigen smaak en eigen aanleg, maar bovenal sterk beïnvloed door de vragen van zijn tijd op physisch, technisch of ook wel economisch gebied. Hier komt in de wiskunde zelf duidelijk het boven ieder structuurschema uitgaande element aan den dag: de eigen belangstelling, de eigen wil, het eigen kunnen van den onderzoeker bepaalt de richting van voortgang. Een formalistische schema-peuteraar is misschien een bekwaam rekenaar, maar nooit een scheppend mathematicus. De groote invloed van het emotioneele element verklaart met één slag waarom geen deel der wiskunde op den duur gedijt zonder den vernieuwenden en richtenden invloed der ervaringswetenschappen.

Van dien voortdurenden invloed der ervaringswetenschappen in den tijd na 1918, wil ik nu eerst enkele voorbeelden geven. Nooit is er een tijd geweest, waarin die invloed zoo groot was, physici en wiskundigen kloppen om zoo te zeggen dagelijks aan elkaars deur. Reeds onmiddellijk na invoering der algemeene relativiteitstheorie ontstonden er tal van vragen, waarvan ik er hier slechts enkele, die van speciaal belang voor de meetkunde zijn, noem. In de eerste plaats werd er gevraagd naar een algemeene veldtheorie, die de theorie van het gravitatieveld en van het electromagnetische veld tot één geheel vermocht te vereenigen, zooals de relativiteitstheorie dat al gedaan had voor het electrische en het magnetische veld. Herinneren we aan het feit, dat die laatste vereeniging gelukt was door den overgang van onze gewone meetkunde in drie afmetingen tot de meetkunde der Lorentzgroep in vier afmetingen, dan wordt het duidelijk, dat er nu eigenlijk weer een nieuwe meetkunde, een generaliseering van de Riemannsche. gevraagd werd. Met de thans ter beschikking staande machtige meetkundige hulpmiddelen kon aan die vraag gemakkelijk worden voldaan; al te gemakkelijk, want er ontstond een stortvloed van meetkunden, die alle de gewenschte unificeering gaven. Daarbij kwam het merkwaardige feit aan het licht, dat bij alle meetkunden, die zich konden handhaven, de vijfdimensionale van Th. von

Kaluza (1921) [10]), die van A. Einstein en W. Mayer (1931) [11]), de projectieve van O. Veblen en B. Hoffmann (1931) [12]), de homogene projectieve van Delftsche onderzoekers (1932) [13]), de anholonome van G. Vranceanu (1935) [14]) en ten slotte de vijfdimensionale van A. Einstein en P. Bergmann (1938) [15]), het getal 5 op de een of andere manier, hetzij als dimensiegetal, hetzij als aantal der coördinaten in de algemeene of in de lokale ruimte een rol speelt. Welke dier meetkunden òf als de meest juiste òf als de meest elegante formuleering der ervaringsfeiten den strijd zal winnen, is voorloopig niet uit te maken, maar het is wel zeer waarschijnlijk, dat het getal 5 een zeer bijzondere beteekenis zal blijven bewaren, òf als zoodanig, òf ook als noodzakelijke overgangstrap tot een misschien nog belangrijker getal, namelijk 6. De onderzoekingen over de fijnstructuur der spectraallijnen, die tot de quantenmechanica behooren, hadden namelijk intusschen weer tot een nieuwen vorm van meetkunde gevoerd, de meetkunde van de spinruimte. Die spinruimte is niets mystieks en vooral niet een ruimte, die zich buiten en naast onze driedimensionale ruimtetijdwereld zou bevinden. Beschouwt men namelijk in die laatste ruimte de figuur, die men in drie dimensies een bol met straal 1 zou noemen, dan liggen er op dien „hyperbol" ∞^3 rechte lijnen en op elk van die lijnen liggen ∞^1 vectoren. De spinruimte is nu niets anders als de verzameling van deze ∞^4 vectoren als vierdimensionale uitgebreidheid opgevat.*) De noodzakelijkheid van het werken met de spinruimte beteekent dus slechts, dat de juiste beschrijving van de werkelijk waargenomen spectraallijnen niet mogelijk is, wanneer men alleen maar van de gewone scalairen, vectoren, enz. van de ruimtetijdwereld gebruik maakt, maar dat men eerst de meetkunde met deze eigenaardige vectoren op dien hyperbol moet verrijken. Nu bleek merkwaardigerwijze, dat de spintheorie niet alleen den overgang tot het getal vijf verdraagt, maar wat meer is, er zeer bepaaldelijk om vraagt, en zelfs met die 5 nog niet geheel tevreden is daar zij zich op de elegantste wijze laat formuleeren onder tengrondslaglegging van het getal 6. Een oud onderzoek van Cunningham en Bateman in 1910 [16]) kwam nu ook in een geheel ander licht. Deze auteurs hadden er namelijk de aandacht op gevestigd, dat de Maxwellsche vergelijkingen niet alleen invariant zijn bij de Lorentzgroep, maar ook nog bij een andere groep, de zoogenaamde conforme groep, een resultaat overigens, waarvan men de consequenties tot heden nog niet ten volle heeft kunnen overzien. De conforme groep is echter

*) Elke vector correspondeert daarbij met 2 punten van de spinruimte en is dus dubbel te tellen.

een eindige Liesche groep, die zich op de meest natuurlijke wijze laat behandelen met 6 coördinaten.

Tot zoover hebben wij dus, ook na 1918, een sterken invloed van de ervaringswetenschapen op de meetkunde kunnen constateeren, maar een invloed van betrekkelijk tam karakter, er ontstonden wel tal van nieuwe meetkunden, maar dat waren toch altijd nog overbrengingsmeetkunden, die in het nu bestaande moderne schema pasten. De ervaring werkte hier richtend en stimuleerend maar nog niet revolutionair. Revolutionair werd die invloed eerst, toen het meest centrale probleem van het huidig natuurwetenschapelijk onderzoek, het probleem der materie, opnieuw aan de orde gesteld werd. In alle veldtheoriën treedt de materie (in den ruimsten zin: electronen, protonen, photonen, enz.) in eersten aanleg als een vreemd element op. Blijven we als voorbeeld bij het electron, dan kan men òf dit deeltje eindige afmetingen geven en trachten het te beschouwen als een stuk van het veld, een stuk, waar dat veld erg sterk of erg buitengewoon is, òf men kan het deeltje als exact puntvormig en als „singulariteit" van het veld opvatten. Beide methoden hebben moeilijkheden en deze treden zoowel bij de klassiekmechanische als bij de quantenmechanische behandeling op. Populair zou men zich die moeilijkheden als volgt kunnen voorstellen. Blijft men bij eindige afmetingen, en wil men dus de materie uit het veld afleiden, dan zouden de geweldige krachten, die noodig zijn om de negatieve electrische lading op te hoopen, uit het veld verklaard moeten worden en dat gaat niet, tenzij men met H. Born de Maxwellsche vergelijkingen in het gebied binnen het electron voor ongeldig verklaart. Anderzijds voert de puntvormige concentratie tot oneindige waarden voor de eigen-energie. W. Pauli toonde in 1933 aan, dat de moeilijkheid bij het electron eigenlijk zit in de moeilijkheid de eigen-energie eindig te houden en tegelijkertijd in overeenstemming te blijven met de relativistische invariantie-eischen.[17]) De omstandigheid, dat de oneindige eigen-energie ook optreedt bij het gravitatieveld van een lichtquant, hoewel men hier toch geen concentratie in een punt heeft ingevoerd, leidde hem tot de conclusie, dat niet alleen het veldbegrip **maar ook het ruimtetijdbegrip in het kleine een principieele verandering zal moeten ondergaan.** [18]) Ook bij de berekening van de nulpuntsenergie der zwarte straling en bij die van de potentiaal der combinatie neutron-proton treden oneindige waarden op. Augustus 1938 zegt P. A. M. Dirac [19]) in een onderzoek over de straling van het bewegende electron, dat het binnenste van een electron niet zoo zeer een gebied is waar de veldvergelijkingen mis loopen, maar veeleer een, **waar de elementaire eigenschappen van ruimte en tijd hun geldigheid verliezen.** Ziedaar de revolutionnaire inslag van de zijde der ervaring, die zich sindsdien bij allerlei auteurs herhaalt. *) Het gewone ruimte-tijd-continuum is blijkbaar als beschrijvingsraam in het kleine niet te gebruiken en men wil dus eenvoudigweg, weliswaar niet met de meetkunde, maar dan toch met de tot nu beschouwde vormen van meetkunde, in het kleine breken. En deze revolutionaire denkbeelden komen niet uit de hoofden van al te theoretische en van de werkelijkheid vervreemde mathematici, maar uit de praktijk der ervaringswetenschappen zelf! Het is de verruimde ervaring, die opnieuw de mathematici tot verruiming hunner begrippen **dwingt.**

Als eersten van de onderzoekers op dit terrein noem ik H. T. Flint [20]) en Yositaka Mimura [21]), die in 1935 onafhankelijk van elkaar op het denkbeeld kwamen de metriek in het kleine te vervangen door een zeer vreemde metriek, die samengesteld is met behulp van de matrices die Dirac in de theorie van de spin invoerde. Het lijnelement is geen lengte meer, maar een matrix, d.i. een operator van de soort, zooals men die in de quantenmechanica aantreft. Voor het overige blijven deze onderzoekers en hunne medewerkers nog vasthouden aan de gewone overbrengingsmeetkunde en speelt zich alles nog af in het gewone ruimte-tijd-continuum.

De bijdragen die A. March heeft geleverd, dateeren vanaf 1936. Uitgaande van het denkbeeld van de principieele onmogelijkheid afstanden te meten kleiner dan een zekere lengte γ, heeft hij zijn verdere onderstellingen herhaaldelijk herzien en getuigt vooral zijn laatste samenvattende verhandeling van October 1938 [22]) van zelfkritiek en prijzenswaardige voorzichtigheid. γ is bij hem een principeel voor exacte meting in aanmerking komende natuurconstante. In plaats van de in de golfmechanica optredende oneigenlijke Diracsche functie δ, die overal nul is behalve in één punt, en in dat éene singuliere punt oneindig, voert hij een nieuwe functie D in, die nergens meer oneindig wordt, maar nog veel oneigenlijker is dan de Diracsche functie, omdat zij in de buurt van het singuliere punt volstrekt niet mag worden vastgelegd (dat

*) Men vergelijke de gedetailleerde uiteenzetting van W. Heisenberg in: Die Grenzen der Anwendbarkeit der bisherigen Quantentheorie, Zeitschr. f. Physik 110 (1938) 251—266.

verbiedt de relativistische invariantie) en men alleen maar weet, dat zij heeft te voldoen aan de eigenschap, dat de integraal over een voldoend groot gebied om het singuliere punt heen, gelijk 1 is. Daarmee gaat March veel verder dan Flint en Mimura, hij verbiedt niet alleen een metriek in het kleine, hij laat daar ook geen „matrixlengte" meer toe, en hij verbiedt zelfs het vastleggen van een functie in het kleine, welke dan ook, omdat, zooals hij uitdrukkelijk verklaart, de afzonderlijke punten van een voldoend klein gebied hun onderscheidbaarheid verloren hebben. Dit is een zeer belangrijke stap, want hij laat daarmede eigenlijk het ruimte-tijd-continuum met zijne althans principieel onderscheidbare punten los. De Marchsche functie is dan ook eigenlijk geen puntfunctie, d.i. een toevoeging van getalwaarden tot de punten van een ruimte, maar een verzamelingsfunctie, d.i. een toevoeging van getalwaarden tot de elementen van een elementverzameling, die zoodanig is geconstrueerd, dat met ieder niet te klein ruimtelijk gebied een element correspondeert. Maar daarmede zijn wij al boven March uit en bij ideeën aangeland, die tot het terrein behooren van een anderen onderzoeker, D. van Dantzig.

In het werk van van Dantzig met betrekking tot dit probleem (vanaf 1934) [23]) zijn drie verschillende stadia te onderscheiden. In het eerste stadium toonde hij aan, dat een veel grooter deel van de physica, dan men vroeger vermoed had, geformuleerd kan worden zonder gebruik te maken van metrische begrippen (d.i. dus van lengten en hoeken). Dit programma werd door hem reeds uitgevoerd voor de klassiekrelativistische puntmechanica en electrodynamica, voor de quantenelectrodynamica van het vacuum en voor de klassiekrelativistische thermodynamica. Metrische begrippen bleken eigenlijk alleen wezenlijk te zijn voor de betrekkingen tusschen impuls en snelheid en tusschen potentiaal en stroom en het gelukte hem aan te toonen, dat ook deze betrekkingen kunnen worden opgevat als niet noodzakelijke specializeeringen van algemeenere niet-metrische integraalbetrekkingen. De omstandigheid, dat hier juist integraalbetrekkingen optreden inplaats van differentiaalbetrekkingen, voerde hem dan vanzelf tot het tweede stadium, waarin er principieel van afgezien wordt een physische grootheid als functie van een geometrisch punt te bepalen, en alleen nog een bepaling ten opzichte van kleine gebieden die tenminste één partikel bevatten, wordt toegelaten. Deze gebieden kunnen niet meer tot in het oneindige worden onderverdeeld en voeren dus niet meer als vanouds door een limietovergang tot een geometrisch punt. Maar de geometrische punten worden nog niet geheel geëcarteerd, daar elk gebied werkelijk nog als puntverzameling wordt opgevat. De beschouwde functies zijn echter van puntfuncties tot verzamelingsfuncties geworden, d.w.z. functies, die niet meer voor elk punt maar alleen voor elke voorkomende verzameling (d.i. gebied) gedefinieerd zijn. In betrekkingen, waarin de tijd of gerichte grootheden optreden, voert deze opvatting tot de flitsenhypothese, die een einde maakt aan de continue materieverdeeling ook in de tijd-richting. Gepubliceerd zijn tot nu alleen de gronddenkbeelden en de wijze waarop de theorie der Stieltjes-Lebesgue-integralen moet worden toegepast. In het derde stadium wordt het geometrische punt en daarmede het ruimte-tijd-continuum in het kleine geheel geëlimineerd. De onderstelling, dat de „gebieden" met betrekking tot welke de functies gedefinieerd zijn, verzamelingen van punten in een ruimte-tijd-continuum zijn, wordt losgelaten, terwijl bovendien de waarden, die de functie kan aannemen, niet meer noodzakelijk getallen zijn, maar daarnaast ook getallenverzamelingen mogen worden toegelaten. Dit derde en belangrijkste stadium is nog in zijn eerste fase van ontwikkeling; behalve uit gehouden voordrachten put ik hier slechts uit mondeling verstrekte gegevens. De nu geëmancipeerde „gebieden" voeren, wanneer zij zelf weer als „punten" van een „ruimte" worden opgevat, tot een soort van ∞-dimensionale „ruimte". Eigenlijk is dat woord „ruimte" hier in zeer algemeenen zin op te vatten, daar men te doen heeft met een zeer abstracte verzameling van elementen. Er zijn „punten" van die „ruimte" (de elementen), die met gebieden van het ruimte-tijd-continuum correspondeeren, maar er zijn ook gebieden, die niet meer met een „punt" correspondeeren, terwijl het niet uitgesloten is, dat men ook „punten" zal beschouwen die niet meer met een gebied correspondeeren.

Tenslotte nog iets over het allerlaatste werk van M. Born (April en Juni 1938) [24]. Hij gaat uit van de dualiteit tusschen plaats-tijd en impuls-energie en de onnauwkeurigheidsrelaties van Heisenberg, die tot uitdrukking brengen, dat de fout, die men noodzakelijk bij het bepalen van plaats en tijd maakt, kleiner is, naarmate de fout bij de gelijktijdige bepaling van impuls en energie grooter is, en omgekeerd. Bij afgesloten kleine systemen, zooals electronen, protonen, kernen, e.d., wordt de bepaling van een plaatsverschil zeer onnauwkeurig, de bepaling van een energieverschil daarentegen, aan de hand der spectraallijnen, zeer nauwkeurig. Dit voert hem er toe, de metriek voor lengte en tijd in het extreme geval van zeer kleine gebieden geheel los te laten en instede daarvan een metriek voor impuls en energie in te voeren, die van de gewone lengte-tijd-metriek volkomen onafhankelijk is. In het groote blijft een Riemannsche metriek gelden, die bij bepaalde, door vele astronomen gemaakte onderstellingen over de kromming der ruimte, voert tot een gesloten gekromde driedimensionale ruimte, dat is dus een ruimte, waarin een langste afstand bestaat. Op dezelfde wijze kan men voor impuls en energie van een klein energetisch afgesloten systeem een metriek invoeren, die tot een gesloten impuls-energie-ruimte leidt, waarin eveneens een langste „afstand" bestaat, welke „afstand" hier natuurlijk een maximaal energieverschil beteekent. Dat zich hier een weg opent om van de oneindige energieën af te komen, is duidelijk. Maar met dat al is dit nog maar een begin van een theorie. Alleen de twee grensgevallen: groote afstanden, met vervaging der impuls-energie-metriek, en kleine afstanden, met vervaging der ruimte-tijd-metriek, zijn belicht, en er is nog geen algemeene theorie, die voor gemiddelde afstanden geldt en bij specialisatie juist tot die grensgevallen voert. Daar de punten van een klein gebied ook bij Born hun beteekenis verliezen, zal verdere uitwerking (misschien van wege de dualiteit via de theorie der contacttransformaties) wel voeren tot een soort van ∞-dimensionale „ruimte" als te voren geschetst.

Het is dan de meetkunde van die eigenaardige ∞-dimensionale „ruimte" waarnaar eigenlijk gezocht wordt. Het is in die „ruimte", dat zich de golffuncties der toekomstige quantenmechanica zullen moeten ontplooien, iets wat op zichzelf niet behoeft te bevreemden, daar golffuncties in meerdimensionale en ∞-dimensionale ruimten reeds nu in de golfmechanica voortdurend aan de orde zijn. Maar dit alles is toekomstmuziek, er heeft zich, zelfs bij de meest voortgeschreden onderzoekers, nog niets blijvends kunnen uitkristalliseeren. Misschien zullen nieuwe ervaringen uit de kernphysica den stoot moeten geven, misschien komt de nieuwe verlossende gedachte uit een geheel anderen hoek. In elk geval staat er iets zeer buitengewoons te wachten, een nieuwe meetkunde, niet geboren uit abstracte bespiegelingen alleen, maar als structuurschema der werkelijkheid geboren in en uit den theoretischen en practischen strijd om de beheersching der natuurverschijnselen.

In bewuste afwijking van veelal gebruikelijke methoden, heb ik deze rede niet gecomponeerd op het tevreden grondmotief

„und wie wir 's dann zuletzt so herrlich weit gebracht" maar heb ik U integendeel gevoerd tot in de werkplaats zelve, de plaats van strijd en teleurstelling, de plaats waar wij vele malen moeten zeggen: „ik weet niet" tegen een enkele maal „ik meen iets te weten". En ik heb niet geaarzeld U daarbij de meest wonderlijke en abstracte structuren voor oogen te voeren, structuren waarvan zeker velen van U alleen de wonderlijkheid zullen onthouden. En toch heb ik het meest wonderlijke tot het laatst bewaard, de bewering namelijk, dat dit alles, tegen allen schijn in, van de meest practische beteekenis is.

Al dat, wat men met het woord moderne cultuur pleegt aan te duiden, berust toch, wat de technische zijde betreft, op de mogelijkheid energie te winnen en deze energie om te zetten in voor den mensch bruikbare vormen. Men kan zich natuurlijk de vraag stellen, en die vraag is ook meermalen gesteld, of de moderne techniek de menschheid nu eigenlijk gelukkiger maakt, maar het is niet waarschijnlijk, dat overwegingen van deze soort, zelfs al mochten zij juist zijn, de menschen er toe zullen brengen de wijzers van de klok terug te draaien en vrijwillig terug te gaan tot het leven onzer verre voorouders, dat wij ook niet al te zeer moeten idealizeeren. De vraag is dus gewettigd, of de weg, dien wij thans gaan, in werkelijkheid wel ergens heen leidt, m.a.w., of het op den duur mogelijk zal blijken voldoende energie te winnen om op dezen ingeslagen weg voort te gaan.

Volgens gegevens, ontleend aan de verslagen der wereld-krachtconferentie in 1929 [25]), bedroeg de totale over de geheele wereld in 1925 verbruikte hoeveelheid kool, olie en water, op kool omgerekend, 1,6 milliard ton, waarvan 0,74 milliard ton in de Vereenigde Staten en 0,65 milliard ton in Europa. De beschikbare wereldvoorraad aan kolen en olie bedraagt naar een eveneens in deze verslagen te vinden schatting, op kool omgerekend, 5,6 billioen ton en daarnaast staat nog een totale beschikbare waterkracht, die, bij volledig gebruik, per jaar een hoeveelheid energie zou kunnen leveren gelijkstaande met 2 milliard ton kool. De op de wereld aanwezige waterkracht is niet zeer groot en zou volkomen onvoldoende zijn om de energiebehoefte van Europa alleen te dekken, indien in Europa het energieverbruik per hoofd van de bevolking zou stijgen tot de in 1925 in de Vereenigde Staten bereikte hoogte, en dienovereenkomstig een cijfer van 3,68 milliard ton kool zou bereiken. Laten wij de waterkracht buiten beschouwing, dan staan tegenover elkaar een totale voorraad van 5,6 billioen ton en een jaarverbruik van 1,47 milliard ton in 1925. Bij gelijkblijvend verbruik resulteert daaruit een duur van 3800 jaar, een schijnbaar geruststellend cijfer. Neemt echter het verbruik per jaar met slechts ½ % toe, dan wordt die duur gereduceerd tot 600 jaar *), terwijl een toename met 1 % per jaar tot de eenigszins ontstellende uitkomst van 370 jaar voert. Nu wil het mij voorkomen, dat, gezien de duur der ontwikkeling van den mensch op aarde, die zeker wel niet op minder dan 200 000 jaren geschat moet worden, een cijfer van 3800 jaar van een algemeen standpunt bezien al even ontstellend is, en dat wij zouden moeten constateeren met onzen geheelen technischen vooruitgang in een betrekkelijk kort doodloopend slop geraakt te zijn, waarin wij eigenlijk niets anders doen dan energetisch ver boven onzen stand leven. Zelfs al maken wij gebruik van ruimere schattingen van de hoeveelheid steenkool, zooals die van Lippincott (1930), die bij aanname van ontginningsmogelijkheid tot 2000 Meter diepte komt tot 7,4 billioen ton, of ook van de meest fantastische van van Heys (1924), die komt tot 10,8 billioen ton, dan vinden wij bij gelijkblijvend verbruik 5000 jaren resp. 7400 jaren en bij een jaarlijksche toename van het verbruik met ½ % slechts 650 resp. 725 jaren, in elk geval dus slechts uitstel van een onvermijdelijke executie. Tenzij er natuurlijk eenig uitzicht bestond op het exploiteeren van andere energiebronnen, die ons van kool en olie onafhankelijk zouden maken.

Men is geneigd het eerst aan de zon te denken, wier stralen dagelijks enorme energiebedragen aan de aarde toevoeren, echter in een vorm, die, voorloopig althans, allerminst geschikt schijnt te zijn voor technische exploitatie. Wel geven de biologen ons hoop, dat het eenmaal zal gelukken stralingsenergie in een bruikbaren vorm over te voeren door middel van biologische processen, maar voorloopig zijn er nog geen zichtbare resultaten, en kennen wij practisch alleen het zeer langzame biologische proces, dat onafzienbare geologische tijdperken noodig gehad heeft om de steenkool te vormen, die wij nu bezig zijn in enkele eeuwen te verbruiken. De relativiteitstheorie bracht echter nog een andere energiebron aan het licht, de materie zelf, die, zooals theoretische

*) Na die 600 jaar zou het jaarlijks verbruik gestegen zijn tot 29 milliard ton, voldoende voor een verbruik per hoofd van de geheele bevolking der aarde van nog niet 2½ maal het verbruik per hoofd in de Vereenigde Staten in 1925. Een toename met ½ % per jaar leidt dus volstrekt nog niet tot fantastische cijfers voor het verbruik per hoofd.

overwegingen leerden, niets anders is dan een vorm van opgehoopte energie. Men berekent gemakkelijk, dat 64 Liter water gelijk staat met een energie van 1,6 billioen Kilowattuur, of omgerekend in kool (op een basis van 1 Kilowattuur = 1 K.G. kool) met 1,6 milliard ton kool, dat is juist de totale in kool omgerekende energieproductie over de geheele wereld in 1925. Daarbij is ondersteld, dat de geheele materie in nuttige energie omgezet wordt. Maar zelfs al gelukte het maar 100 K.G. en 7 ons waterstof om te zetten in 100 K.G. helium, bij welk proces 7 ons materie in vrije energie overgaat, dan zou de gewonnen energie van 1¾ milliard KWU, berekend tegen 1 cent per KWU, een bedrag vertegenwoordigen van 175 millioen gulden. Indien dergelijke metachemische processen, die thans reeds in de laboratoria op zeer kleine schaal worden gerealiseerd, en waarschijnlijk op zeer groote schaal optreden bij het opvlammen van een nova, op technische schaal en met een bruikbaar rendement mogelijk zouden worden, zou de zich verder ontwikkelende techniek niet alleen onafhankelijk gemaakt worden van de met zekerheid vroeger of later dreigende uitputting der kolenvelden, maar de menschheid zou bovendien de beschikking krijgen over practisch ongelimiteerde hoeveelheden energie.

Het is dus van het grootste belang er achter te komen of er een mogelijkheid tot practisch bruikbare metachemische energiewinning bestaat, of dat er de een of andere natuurwet is, die deze mogelijkheid uitsluit of zoover beperkt, dat er voor werkelijk practisch gebruik geen uitzichten bestaan. Men denke hier bijvoorbeeld aan de eerste hoofdwet der thermodynamica, die het perpetuum mobile uitsluit, en aan de tweede wet, die de exploitatie van de enorme in het zeewater aanwezige warmte naar het rijk der schoone droomen verwijst. Kenden wij slechts de natuurwetten, die het gedrag der kleinste materiedeeltjes beheerschen, anders gezegd het **structuurschema der metachemie** of de **meetkunde in het kleine,** dan zouden wij in staat zijn een prognose uit te spreken ten aanzien van het verdere verloop van de technische periode der geschiedenis, de periode waarin wij thans verkeeren. Maar om dit structuurschema te leeren kennen zal er nog veel onderzoek noodig zijn, practisch onderzoek in de laboratoria en theoretisch onderzoek van de mathematische physici en de mathematici over de geheele wereld. Van het aandeel der wiskunde in dat onderzoek heb ik getracht het een en ander, zij het ook kort en vaag, aan te duiden. Mocht ik bij U de overtuiging gevestigd hebben dat het vele, dat tot nu bereikt is, betrekkelijk nog zeer weinig is en dat ons wellicht reeds binnenkort nieuwe resultaten van groote theoretische en practische beteekenis te wachten staan, dan is mijn doel voor heden bereikt.

Ik heb gezegd.

LITTERATUUR.

1) F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlanger Antrittsprogramm 1872; Ges. Werke I. 460—497.

2) Ges. Werke I, blz. 487.

3) Das Relativitätsprinzip, Ann. der Phys. (4) 47 (1915) 927 e.v., Jahresber. d. D.M. 24 (1915) 372 e.v.

4) T. Levi Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque etc., Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917) 173—205.

5) J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam Bd. 12, No. 6, 95 blz.

6) L. P. Eisenhart and O. Veblen, The Riemann geometry and its generalisation; Proc. Nat. Acad. of Sc. U.S.A. 8 (1922) 19—23.

7) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Was ist Geometrie? Abh. aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis, Moskau, 2 (1935) 15—48.

8) O. Veblen and J. H. C. Whitehead, The foundation of differential geometry, Cambr. Tracts No. 29, 1932.

9) E. Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936, I 92—103.

10) Th. von Kaluza, Zum Unitätsproblem des Physik, Sitz der Preuss. Ak. der Wiss. 54 (1921) 966—972.

11) A. Einstein und W. Mayer, Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Sitz. der Preuss. Ak. der Wiss. 25 (1931) 541—557; 26 (1932) 130—137.

12) O. Veblen and B. Hoffmann, Projective relativity, Phys. Rev. 36 (1931) 810—822.

13) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie, Proc. Kon. Ak. v. Wet. 24 (1931) 1398—1407; Zum Unifizieringsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie, aldaar 25 (1932) 642—655; Generelle Feldtheorie, Zeitschr. für Physik, 78 (1932) 639—667; On projective connexions and their applications to the general field-theory, Annals of Math. 34 (1933) 271—312. J. A. Schouten, La théorie projective de la relativité, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 5 (1935) 51—88 (samenvatting). J. A. Schouten und J. Haantjes, Generelle Feldtheorie VIII, Zeitschr. f. Phys. 89 (1934) 357—369. Verg. W. Pauli, Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten, Ann. der Phys. 5, 18 (1933) 305—336; 337—372.

[14]) G. Vranceanu, La théorie des champs et les hypersurfaces non holomes, C. R. 200 (1935) 2056; Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques, C. R. d. sc. de l'Acad. des sc. de Roumanie I (1936), Journal de physique et le radium 7 (1936) 514—526.

[15]) A. Einstein and P. Bergmann, On a generalization of Kaluza's theory of electricity, Ann. Math. Princeton 39 (1938) 683—701.

[16]) E. Cunningham, Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910) 77—98. H. Bateman, aldaar 223—264, 469—488.

[17]) W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handb. d. Phys. XIV 2, 83—272, blz. 271.

[18]) L.c. blz. 272.

[19]) P. A. M. Dirac, Classical theory of radiating electrcns, Proc. Roy. Soc. London 167 (1938) 148—169, blz. 160.

[20]) H. T. Flint, A relativistic basis of quantum theory III, Proc. Roy Soc. 150 (1935) 421—441; Ultimate measurements of space and time, Proc. Roy. Soc. 159 (1937) 45—56.

[21]) Y. Mimura, Relativistic quantum mechanics and wave geometry, Journ. of Sc. of the Hirosima Univ. 5 (1935) 99. In dit tijdschrift verschenen verder talrijke verhandelingen van Y. Mimura en zijne medewerkers over dit onderwerp.

[22]) Samenvattende verhandeling met litteratuuropgave: A. March, Die Idee einer atomistischen Struktur des Raumes, Die Naturwissenschaften 26 (1938) 649—656.

[23]) D. van Dantzig, Electromagnetism ,independent of metrical geometry, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 37 (1934) 521—526; 526—531; 644—652; 825—836; 39 (1936) 126—131; The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry, Proc. Cambr. Phil. Soc. 30(1934) 421—427; Ricci-Calculus and Functional Analysis, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 39 (1936) 785—794; Ueber das Verhältniss von Geometrie und Physik, Comptes Rendus du Congr. Int. des Math., Oslo 1936 II 225—227; Some possibilities of the future development of the notions of space and time, Erkenntnis 7 (1938) 142—146; Vragen en schijnvragen over ruimte en tijd, inaugureele rede Delft 1938.

[24]) M. Born, A suggestion for unifying quantum theory and relativity, Proc. Roy. Soc. 165 (1938) 291—203; Application of „reciprocity" to nuclei, Proc. Roy. Soc. 166 (1938) 552—557.

[25]) Power resources of the world (potential and developed), London, World Power Conference 1929.

October 24, 1930.

Dear Sir

I have the honor to inform you that at a meeting of the Trustees of Princeton University held October 23rd you were appointed Lecturer in Mathematics, for the present academic year, without salary.

Respectfully yours

[signature]

Secretary of the University

To

Mr. Jan A. Schouten,

Schouten verbleef van oktober 1930 tot april 1931 in Amerika en gaf daar onder andere colleges aan de Harvard University, aan het Massachusetts Institute of Technology en aan de Princeton University.

*Uit: Ingenieur-studie-praktijk, 61-83.
Centr. Commissie voor Studiebelangen, Delft, 1940.*

DE BETEEKENIS VAN DE EXACTE VAKKEN IN DE VOOROPLEIDING VAN DEN INGENIEUR *)

PROF. DR. IR. J. A. SCHOUTEN

*) Dit verslag is niet naar een manuscript, maar naar een stenogram gedrukt en heeft dus den iets meer vrijen vorm van het gesproken woord behouden.

Mijne Heeren,

Er was mij dan gevraagd om iets te zeggen over „De beteekenis van de exacte vakken in de vooropleiding van den ingenieur" en wie nu van mij verwacht, dat ik een speech zal gaan houden om te vertellen, dat die zoo belangrijk zijn, heeft het mis. Dit was ik niet van plan en dat is maar goed ook. Want dan zou ik niets anders te doen hebben dan te herhalen, wat door alle vorige sprekers is gezegd, waar die zoo vriendelijk waren om uit te spreken, dat die vakken zoo nuttig en zoo belangrijk zijn, en dat zou toch overbodig zijn. Van een mathematicus gelooft U immers wel dat hij zijn eigen vak belangrijk vindt.

Ik zal het over andere dingen hebben en ik wou ingaan op de moeilijkheden die optreden bij de technische studie in verband met de exacte wetenschappen. In den titel „De beteekenis van de exacte vakken in de vooropleiding van den ingenieur" schuilt een klein addertje en wel in het woord „vooropleiding". U zult U afvragen: Waarom niet in de „opleiding?" Omdat in de vooropleiding die moeilijkheden het sterkste tot uiting komen. Ik wil hiervan een voorbeeld geven. Wanneer wij naar een machine-fabriek gaan en wij zouden zeggen: Mijnheer, maakt U voor mij een machine, dan zou de eerste vraag luiden: Waartoe moet die machine dienen? Als nu het antwoord luidt: dat weet ik niet, want die machine moet overal voor dienen en wanneer wij er dan nog bij vertellen, dat zij niet veel kosten mag en dat de levertijd zoo kort mogelijk moet zijn, dan geloof ik, dat wij niet tot de gewaardeerde klanten zullen gaan behooren.

Zoo is het nu ook met de Technische Hoogeschool. Er wordt hier van ons gevraagd om ingenieurs te fabriceeren, maar men vertelt er niet bij, waarvoor men ze noodig heeft. En ze moeten ook gauw „in de wei" komen. Dan lijkt het, alsof de opgave, die ons gesteld wordt, onmogelijk is. Maar de vergelijking gaat mank, want wij zijn geen fabriek van ingenieurs en de mensch is geen machine. *Wij* maken geen ingenieurs, zij moeten *zichzelf* vormen. Wij moeten ze de gelegenheid daartoe geven en alleen leiding geven aan de zelfvorming van den ingenieur. Wat er niet in zit kunnen wij niet in hen wekken en tot ontwikkeling brengen. Als wij de jongens eerst bekijken als ze hier aankomen en dan, als ze na 5, 6 jaar hun eindexamen doen, dan moeten wij ons niet verbeelden, dat wij dat allemaal gedaan hebben. Nee, er is een jong menschelijk leven tot ontwikkeling gekomen en wij moeten dankbaar zijn, dat wij daartoe iets bijgedragen hebben. Het leven heeft zich ontwikkeld van binnen uit. Ik wilde dit als eerste beeld in U griffen: Wij vormen niet, maar helpen bij de vorming.

Wanneer ik nu overga tot die moeilijkheden wil ik eerst op het bord een klein lijntje schetsen. Het onderste deel is de lagere school, het middelste is de Middelbare School, het bovenste stuk is de T.H.-opleiding; de lengteduur is 6 jaar L.O., dan 5-jarige H.B.S., dan de propaedeutische en daarna de verdere studie. Ik wil het nu verder hebben over de twee punten A en B en over de moeilijkheden, die daar zijn. [1]) Ik wil hier die moeilijkheden even opschrijven, daar die het stramien vormen van hetgeen ik U vertellen wil.

De eerste moeilijkheid is de aansluiting in punt A, die in twee deelen uiteenvalt, n.l. *de aansluiting wat de stof betreft* en *de aansluiting wat de menschen betreft.*

De tweede moeilijkheid is *de aansluiting van de methode,* vóór en ná A.

Als derde moeilijkheid zie ik *de verdeeling van de stof* vóór en ná B.

Nu wil ik eerst even optreden als zwartgallig mensch, die eens alles gaat schilderen, wat er aan narigheid te zien is. Naderhand zal ik dan ook van een anderen kant belichten. Maar laten wij nu eerst eens aanklagen. In de eerste plaats hebben wij bij de aansluiting in punt A eraan te denken, dat wij de menschen krijgen van de H.B.S. en dat wij dan zien, dat zij voor ons doel te weinig geleerd hebben. Er is voor de exacte vakken een opvallend gebrek aan oefening en dat is zeer jammer. Er is weinig geoefendheid in het practisch kunnen rekenen, in het oplossen van vergelijkingen, in het practisch makkelijk kunnen werken met goniometrische en trigonometrische vormen en met complexe grootheden. Er

---

[1]) A is het punt van aansluiting van H.B.S. en T.H., B het punt tusschen de propaedeutische studie en de studie daarna.

is een angst voor formules en wie die niet op de H.B.S. overwonnen heeft, blijft die angst behouden in de verdere studie en dat is vervelend voor den student, maar ook voor den lateren ingenieur, die onmiddellijk tegen een artikel in een technisch tijdschrift zit aan te kijken als er groote vormen in voorkomen en dan zegt: Dat is mij te mathematisch. Het zou veel beter zijn, als op de H.B.S. meer aandacht geschonken werd aan technische vaardigheid in het rekenen. Dit is geen verwijt aan de organisatoren van de H.B.S., noch aan de leeraren, want deze doen hun uiterste best om er het beste van te maken in den tijd, dien hun ervoor toegemeten is, maar wij mogen toch wel eens iets zeggen van den aard van het afgeleverde. Ik wil alleen nog hier de aandacht vestigen op iets, dat pas in den laatsten tijd naar voren is gekomen en dat is de z.g. „begripziekte". Er wordt vaak gezegd, dat je ze het „begrip" van iets leeren moet en dat het op de feiten niet zoo aankomt. Dat is nu allemaal goed bij andere vakken, b.v. bij geschiedenis; dan is het goed als je ze het begrip van de geschiedenis bijbrengt inplaats van allemaal jaartallen. Maar wanneer iemand het heeft over het „begrip" van de algebra, dan zeg ik, *dat ik niet weet, wat dat is.* Je moet leeren met de algebraische formules te werken of de mogelijkheid opgeven om er mee te kunnen werken. Het eenige wat je kunt doen, is behoorlijk te leeren met de formules te werken en zoo den schrik ervoor te overwinnen. Dat mag men nooit wegdoezelen met te zeggen: Ze moeten het „begrip" van de algebra hebben. Nogmaals, ik weet niet wat dat is. Het is met algebra eenigszins als met steno, je moet de teekens en de regels kennen en ze vlot kunnen toepassen om er mede te kunnen werken. Ik zal hier even een typisch voorbeeld opschrijven:

$$\frac{1}{\frac{p^2}{a^4} + \frac{q^2}{b^4}} = \frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2}$$

dat eenige weken geleden voorkwam in examenwerk van een student van het derde jaar! Dat is zeker iemand geweest, dien ze het „begrip" van de algebra hebben bijgebracht. Maar ze vergaten hem te leeren rekenen.

Nu kom ik tot de aansluiting van de methode. Vóór het punt A hebben wij een sterke gebondenheid, wel niet zoo verschrikkelijk erg, wanneer wij deze vergelijken met Fransche en Duitsche scholen, dat loopt heusch nog wel los. Maar in elk geval is er een groot verschil tusschen de gebonden studie vóór A en de volkomen vrijheid, of — om een onvriendelijk woord te gebruiken — ongebondenheid, na de school. Die overgang is erg sterk. Daar is reeds van verschillende kanten de aandacht op gevestigd en er zijn ook verschillende middelen aangegeven om er iets aan te doen. Die sterke overgang maakt dat voornamelijk de zwakken en diegenen, die ruim in de geldmiddelen zitten, er den grootsten last van hebben; de zwakken, omdat zij zwak zijn, de anderen omdat het zoo gemakkelijk is om naar een repetitor te loopen. Aan het eind van mijn voordracht kom ik daarop terug. Ook het studentenleven in het eerste en tweede jaar stelt enorme eischen. Wanneer wij alles bij elkaar rekenen dan is de totale belasting van het eerste en tweede jaar — ten eerste tengevolge van de overgangsmoeilijkheden, ten tweede tengevolge van het volle programma, ten derde tengevolge van de eischen van het studentenleven — zeer zwaar.

Dan kom ik tot het derde punt, de verdeeling van de stof vóór en ná B. Daar hebben wij de groote fundamenteele vraag: Hoeveel moeten wij doen aan wiskunde en aan natuurkunde voor iedere studierichting en waar moeten wij nu die exacte vakken plaatsen, geheel vooraan of meer naar achteren, hoe moeten wij dat schuiven, opdat de opleiding één geheel wordt? U begrijpt, daar zitten enorme moeilijkheden. Wie over deze dingen praat, zelfs wie er over denkt, moet zich afwennen felle critieken te geven over personen of instellingen. Dat is heelemaal verkeerd. Over het algemeen kunnen wij zeggen, dat er in Nederland geen ernstige misstanden bestaan. De menschen, die het werk uit te voeren hebben, zijn allen van goeden wil en doen eerlijk hun best. Beter doet men dus tot onderling overleg te komen met allen, die ermede te maken hebben, met de menschen uit het onderwijs, met de leerlingen en ook met de industrie. En wat ik nu wil doen — en dat is de hoofdschotel van mijn voordracht — is U laten zien, hoe de opleiding is in de verschillende landen, hoe men die moeilijkheden tracht te overwinnen en welke oplossingsmethoden men daar gekozen heeft. Dat brengt ons boven het standpunt uit van altijd naar ons zelf te kijken. Misschien — als wij van dien tocht terug komen — kunnen wij zeggen: Het is bij ons zoo slecht nog niet. *)

Die opleidingen — om even bij Europa te blijven — zijn in te deelen in verschillende groepen. Ten eerste de Midden-Europeesche groep, omvattend Duitschland, Oostenrijk, Polen, Tchecho-Slowakije, verder in het Noorden Noorwegen, Zweden en Denemarken en tenslotte ook Nederland. Dan een heel andere groep, de Engelsche. Verder, weer totaal anders, Frankrijk. En tenslotte het tegenwoordige Rusland, wat ook weer volkomen anders is. Buiten Europa hebben wij nog Amerika, dat veel lijkt op Engeland, doch toch groote verschillen daarmede vertoont.

In de eerste plaats wil ik hier Engeland bespreken. Daar bestaat de onderbouw uit de Public Schools, zooals Eton en Rugby, de kostscholen. Daarnaast zijn ook andere instellingen, de Secondary Schools, doch deze hebben zich allemaal gevormd naar het voorbeeld van Eton en Rugby, de Public Schools. De sterke karaktertrekken van deze scholen zijn: 1. de strengheid van de opvoeding zelfs tot het lijfstraffelijke toe; de scholieren vinden het heel gewoon om een pak slaag te krijgen, 2. de nadruk, die gelegd wordt op de karaktervorming, iets wat wij hier heelemaal niet doen; daardoor 3. een gekweekte *locale* gemeenschapszin, die in het latere leven blijft en 4. een sterke invloed van de sport.

Een dergelijke Secondary School geeft twee certificaten, een „schoolcertificate" voor de menschen, die niet verder gaan, en dan een „higher certificate", waarvoor veel meer verlangd wordt.

Op deze scholen volgen de Universiteiten, die soms Federal zijn, hetgeen beteekent, dat zij bestaan uit verschillende Colleges, tot zelfs twintig toe. Voorbeelden hiervan zijn Cambridge en Oxford. Onder de Colleges zijn er vele met de eigenschappen van een Technische Hoogeschool, zooals het Imperial College of Science and Technology, behoo-

*) Men vindt vele belangrijke gegevens in The University in a changing world, a symposium, edited by W. M. Kotschnig and Elined Prys, Oxf. Un. Press 1932 en verder in het hierna geciteerde boek van A. Flexner.

rende tot de Universiteit van Londen. De inrichting van deze laatste is dikwijls totaal verschillend en vaak naar Midden-Europeesch voorbeeld ingericht; wij zien, dat de technische scholen veel geleerd hebben van de Midden-Europeesche school en minder aansluiten bij de Engelsche groep. Het typische van deze scholen is, dat aan het samenleven ontzettend groote waarde wordt gehecht. Vele studenten leven in Colleges, maar lang niet allen en er zijn in dit opzicht groote verschillen tusschen de Universiteiten. Het aantal studenten is zoo toegenomen, dat zelfs in Cambridge niet meer dan 56 % in de Colleges wonen kan; in Oxford is dat cijfer 39 %. In Schotland echter wonen 54.5 % van de menschen thuis bij hun familie en daarnaast nog een groot deel op kamers.

Wanneer wij nu vragen, hoe de opleiding is, zien wij, dat deze aan de Universiteiten uiteenvalt in twee verdiepingen, waarvan de onderste verdieping ook als kopschool werkt en dus menschen in de Maatschappij aflevert en wel zoo, dat die niet worden beschouwd als gesjeesde studenten, maar als universitair opgeleiden. Deze opleiding voert naar het Bachelor-degree en wel na 4 jaar. Dit examen is moeilijk te vergelijken met wat dan ook uit ons onderwijs. In de eerste plaats komen de menschen van de Secondary-School met een heel andere kennis aan dan bij ons. Ook bestaan van het Bachelor-degree drie soorten, een pass degree en een honours degree, dat nog onderscheiden wordt in first class en second class. De pass degree is het minste wat er bij is en dat zegt trouwens reeds het woord „pass". Het geeft niet veel meer dan wat algemeene ontwikkeling, doch de bezitters van het diploma worden in het algemeen wel bruikbare menschen daar waar niet speciale vakkennis verlangd wordt. Intusschen neemt het aantal pass degrees hoe langer hoe meer af. Over geheel Engeland was in 1932 het aantal pass degrees 2048 en het aantal honours degrees 4000. Voor het behalen van een honours degree wordt veel meer geëischt, dat is de vooropleiding van de tweede verdieping en dat is in alle Universiteiten zoo.

Voor de opleiding voor het Bachelor-degree beschikken de Engelsche Universiteiten over een enormen staf. Er zijn Professoren, Assistent Prof., Lecturers, Readers, Demonstrators, Tutors en Instructors en daardoor is er veel persoonlijke leiding. De student, die aankomt wordt aan iemand toegewezen en blijft meestal bij dezen persoon. Hij moet hem alles van zijn studiën vertellen, wordt overhoord en krijgt een nieuwe taak op, die weer uitgevoerd moet worden voor hij verder mag gaan. De examens zijn voor een pass degree verschrikkelijk gemakkelijk, doch voor een honours degree zijn ze strenger en dat geldt voornamelijk voor de inrichtingen met een technischen inslag.

Merkwaardig is de standing van de studenten. Men heeft zoo het idee, dat er in Oxford en Cambridge alleen rijkelui studeeren. Dat is heelemaal niet waar. Het is hier weinig bekend, dat enorm veel studenten veel ondersteuning genieten en het beurzenstelsel is dan ook enorm uitgebreid. Het cijfer zal ik U hiervan even noemen, het is in Engeland 40.6 %, in Wales 67.3 % en in Schotland 52.7 %, met een totaal gemiddelde van 45 %. Het is nu zeer merkwaardig, dat wij in Oxford en Cambridge samen een percentage van 38 % ondersteunde studenten aantreffen, wat we niet verwachten zouden.

Na de bovengenoemde voorbereidende cursussen komen de postgraduate cursussen. Deze duren 3 jaar en eindigen met een dissertatie en bovendien een buitengewoon streng examen. In het algemeen hebben die postgraduates heel weinig leiding in vergelijking met de andere studeerenden, doch dat is niet zoo op de Technische scholen. Dat is ook heel begrijpelijk, want je kunt wel een student in de oude talen laten losloopen, maar een a.s. ingenieur niet.

Merkwaardig is, dat de Engelsche Universiteiten er nog iets op na houden, wat wij niet kennen, dat is de z.g. service, welke hieruit bestaat, dat de Universiteit zich geroepen acht om Public Lectures te geven voor allerlei soort menschen. Ik vertel dit hier, omdat dit in Amerika teruggevonden wordt.

Laten wij nu eens kijken naar de eerste moeilijkheid. Deze is in Engeland niet zoo brandend als hier, omdat ten eerste de Secondary Schools vrij goed aansluiten en ten tweede omdat de toelatings-examens voor de Universiteit vrij zwaar zijn, zoo zelfs, dat men om toegelaten te worden dikwijls twee examens moet afleggen. Ten derde begint de studie op lager peil dan bij ons. De tweede moeilijkheid, die van de methode, bestaat al evenmin, want er is een streng onderwijs vóór maar ook tijdens de under-graduate studie. Een bezwaar van de schoolsche leiding is, dat de student, die in handen van een minder goeden tutor valt, minder goed af is. De derde moeilijkheid kennen ze in Engeland net zoo goed als wij. De exacte stof strekt zich uit tot in het derde jaar. Er is veel beschrijvende meetkunde en geweldig veel teekenen. Merkwaardig is, dat alhoewel men in Engeland op een lager plan begint, men toch een vak als partieele differentiaal-vergelijkingen er in weet te brengen als een verplicht studievak voor alle richtingen. Als wij die opleiding daar bekijken, moeten wij zeggen: Hoe is het mogelijk, dat dat gaat: als wij dat hier zouden probeeren, kwam er geen steek van terecht. En dat zit hem daarin, dat wij geen fabriek zijn, dat wij met menschen-materiaal werken en dat die menschen in de verschillende landen verschillend zijn. De mentaliteit van den Engelschman is een andere dan die van den Hollander. De strenge opleiding is voor den Engelschman schitterend, er worden mooie resultaten bereikt en dat kan ook niet anders, want anders zou Engeland het wereldrijk niet zijn, wat het is. Maar zij zou voor den Hollander ten eenenmale ongeschikt zijn. Ik wil er hier nog eens speciaal de aandacht op vestigen, dat de opleiding bekeken moet worden in verband met de mentaliteit van het volk waarvoor die opleiding bestemd is. Wij moeten altijd vragen: Waar? en Voor Wie?

Als voorbeeld voor de Midden-Europeesche groep neem ik nu Duitschland.*) Daar hebben wij tot aan A een heel streng onderwijs. Vanaf A is er net diezelfde groote vrijheid, die wij ook kennen, misschien iets getemperd door het volkskarakter, meer dan door den letter van de voorschriften. In de vooropleiding wordt dan ook veel gedaan aan karaktervorming. De Duitscher is ijverig, een werker en geneigd tot gehoorzaamheid en daardoor iets gebondener dan hier. Er zijn op de Universiteiten en vooral op de Technische Hoogescholen verschrikkelijk veel colleges, er is een zeer zwaar programma. Het is heel gewoon, dat men daar om 7 uur op college moet komen. Toen ik in Hamburg college gaf en uit

*) Bedoeld is natuurlijk het Duitschland vóór 1933.

beleefdheid ook eens een college van een collega moest bijwonen, moest ik om 6 uur mijn bed uit om differentiaalmeetkunde aan te hooren. Er is een neiging om de exacte stof zooveel mogelijk naar het eerste jaar te brengen. De wiskunde zooveel mogelijk naar het eerste jaar en de mechanica naar het tweede. Dit heeft ook in Duitschland geen prettige gevolgen.

Er is in Duitschland geen officieele splitsing in twee verdiepingen. Maar heel merkwaardig heeft zich in de praktijk toch een dergelijke splitsing ontwikkeld. Wij kunnen b.v. in tijdschriften de volgende annonces lezen: Biedt zich aan een ingenieur met 4 semesters Hochschul-Bildung. Wat is dat eigenlijk, zooiets noemt men hier toch een gesjeesde student. Toch worden die menschen aangenomen en ik heb wel eens aan fabrieksleiders gevraagd: Waarom doen jullie dat? Dan wordt daarop geantwoord: Het is al goed als ze de theoretische grondslagen maar kennen, de techniek leeren ze bij ons in de fabriek wel. Dat is een heel eigenaardig standpunt en dat zou hier niet opgaan. Na 1918 is er in Duitschland verschrikkelijk veel veranderd, d.w.z. men heeft zooveel mogelijk getracht om oude dingen op te ruimen. Ik wil hier een paar van de heel typische reformeeringen noemen (die echter geen blijvenden ingang hebben gevonden).

Ten eerste was er een voorstel van E. Spranger om twee verdiepingen te maken, dat was in 1930. De eerste verdieping zou zijn de beroepsopleiding waarbij ook een synthetisch beeld van de beschaving — met een titel in het Duitsch om van te smullen — gedoceerd zou worden en waarbij een sterke inperking van de studie-vrijheid voor die eerste jaren zou plaats hebben. Dit is voor de technische studie niet doorgegaan, maar het is merkwaardig, dat een dergelijk systeem in 1931 is ingevoerd voor de juristen, met het tutor-stelsel en beperking van de studie-vrijheid. Er was een geweldige tegenkanting van de zijde van de Universiteit en na 1933 is deze geschiedenis natuurlijk weggeblazen. Hoe het nu is, weet ik niet. Verder is er in Karlsruhe nog een verandering geweest. Daar is een vermindering gecreëerd van de technische speciaal-colleges; er werden meer algemeene ideeën en minder speciale gebieden gegeven. Er kwam daardoor meer ruimte vrij voor algemeene ontwikkeling. Ook deze verandering heeft niet lang geduurd.

Dan is er een vermindering van de wiskunde-eischen als een golf over de geheele Midden-Europeesche groep — Holland incluis — gegaan. Wij hebben die golf gevoeld in 1924, toen bij ons de wiskunde met 26.7 % werd verminderd. Alleen in Duitschland is dit zeer ver doorgevoerd, de anderen hebben niet zoo sterk meegedaan.

Verder is er nog de merkwaardige beweging „practische Mathematik", die uitgegaan is van Prof. Runge in Göttingen. Ik heb zelf altijd veel gevoeld voor het practisch uitrekenen en heb van het goede in deze ideeën veel overgenomen. Er zijn handige boekjes over verschenen, die ik ook op mijn colleges noem. Die beweging is later in handen gevallen van leerlingen van Runge, die haar hebben opgeblazen tot een systeem, waarbij de student niet veel meer leert dan dergelijke rekenkunstjes, terwijl de eigenlijke basis van de mathematische ontwikkeling ontbreekt. Daarom heeft deze beweging in haar overdreven vorm dan ook geen navolging gevonden.

Ik ga nu over tot Frankrijk. Frankrijk is het land waar alles heelemaal anders is dan overal elders. Daar is de middelbare opleiding verschrikkelijk streng in de Lycées en Collèges, nog strenger dan in Duitschland. Men heeft daar belachelijke eischen voor wiskunde, dat is werkelijk door het dolle heen. Er is daar een centrale regeling, alles gaat over Parijs. Dat zien wij zeer duidelijk daaraan, dat nog in 1890 17 universiteiten werden opgericht buiten Parijs, waarvan trouwens de studenten nog examens moesten komen doen in Parijs. De eigenlijke technische opleiding geschiedt in Parijs en de Ecole Polytechnique is berucht om zijn geweldige eischen en ook de toelating — trouwens tot al deze instellingen — is zeer streng. Bijna alle examens zijn vergelijkende examens. Wanneer wij eens naar de stemming van de families kijken in den examentijd, dan kunnen wij wel zeggen, dat heel Frankrijk zit te bibberen. Of de Fransche ingenieur zooveel beter is, weet ik niet. Het hoogere onderwijs is in twee verdiepingen opgebouwd. De eerste graad heet licencié en de hoogere graad is de doktersgraad. Merkwaardig is, dat de moeilijkheden in Frankrijk meer sociaal dan technisch zijn. In den laatsten tijd is er een geweldige toestrooming uit alle lagen der bevolking tot de Lycées. Dat is voortgekomen uit de idee: Vrij onderwijs voor de geheele natie en de besten op de beste plaats. Hieraan knoopt zich natuurlijk een geweldige selectie vast, die zich alleen richt naar de examens en niet naar den levensstandaard van de ouders. Maar toen had je de poppen aan het dansen. Men kan maar niet zoo gemakkelijk zeggen: De besten op de beste plaats, dat is een te groot sociaal probleem, want men kan niet altijd iemand voor een opleiding weigeren, als zijn vader b.v. minister is of een andere hooge plaats bekleedt. Daarom heeft men het niet zoo ver door kunnen zetten.

Nu onze 3 punten. De eerste moeilijkheid van de aansluiting van de stof is er natuurlijk niet. Ook de tweede moeilijkheid doet zich in veel mindere mate voor. Wel is er vrijheid van studie aan de Universiteit, maar door de geweldige selectie kunnen die menschen het wel verdragen. Wat punt 3 betreft is er een sterke overdrijving van de wiskunde, maar dit wordt minder gevoeld door de geweldige selectie. De menschen slikken het wel en men weet niet beter, of het hoort zoo. Frankrijk staat veel verder van ons af dan iedere andere opleidings-groep.

En nu dus Amerika. Daar is het onderwijs heel interessant, maar ik wil hier niet herhalen, wat door vorige sprekers op zoo voortreffelijke wijze is gezegd. Men zegt in Amerika: Undergraduate is the heart of the University. Dat is het cardinale punt. Het geheele onderwijs is geboren uit undergraduate-courses en pas in 1847 is een poging gedaan om graduates te krijgen. Deze graduate-courses hebben als model de Midden-Europeesche opleiding genomen en niet de Engelsche. De Universities zijn er dus in hoofdzaak voor de undergraduate-courses. Wat er in de vooropleiding geschiedt in de Secundary Schools en de High Schools is volgens onze begrippen slecht. Er is daar een systeem van slagen voor de examens, dat lijnrecht tegen onze begrippen ingaat, het puntensysteem. Als men maar 15 punten heeft behaald, hoe dan ook, slaagt men voor het examen. Het eene jaar doet men Algebra, Engelsch en Duitsch en heeft dan 3 punten en het volgend jaar b.v. 3 totaal andere vakken. Dat is natuurlijk zeer belangrijk voor het vervolg, want het Hooger Onderwijs krijgt te werken met dit raar gevormde materiaal. Men werkt 4 jaar voor de undergraduate-courses, maar men moet in de eerste 2 jaar nog datgene leeren, wat eigenlijk op de middelbare school thuishoort. U vindt daarover veel in een uitstekend boek van Abraham Flexner, dat in 1931 verschenen is. *). Men studeert dus 4 jaar voor het Bachelor-degree, en er is daar hetzelfde verschil als in Engeland: een pass degree en een honours degree, al is ook hier bij de opleiding de honours degree hoofdzaak. Vooral in Harvard, waar één onderwijskracht is op 15 studenten, doet men zijn best om de opleiding op te voeren met behulp van tutors. Het studentenleven is in colleges, in dormitories. Om een vergelijking te treffen met Engeland, zien wij in Amerika, dat de helft van de studenten hun eigen brood verdienen of aangewezen zijn op ondersteuning. In de Bachelor-studie is van vrijheid geen sprake. Het onderwijs is zeer schoolsch en dat kan ook niet anders, gezien den aard van het onderwijs. Ik heb hier cijfers van Minnesota over de resultaten. Na één jaar wordt 30% weggestuurd. (Men kan daar ook weggestuurd worden). Na twee jaar nog eens 20%. Dat ligt niet aan de Universiteit, maar aan de vooropleiding. Op deze Bachelor-degree volgt nu de Masterdegree. Deze vordert één jaar aan de Universiteit met het werken voor een master-essay, daarna komen nog 3 jaar voor de dokters-studie, die besloten wordt met een zwaar examen en een dissertatie. Nu hangt het van de Universiteit af of dat serieus is; er kunnen daar allerlei mopjes over gemaakt worden, maar dat doe ik niet, omdat er in de Amerikaansche opleiding zooveel goeds is. Merkwaardig is hier de service, waar ik het bij Engeland al over had. Deze is in Amerika opgeblazen tot een systeem met veel vervelende dingen. Vooral Columbia is daar berucht om. Ik weet niet of U hier wel eens advertenties heeft gelezen van Instituten, die zorgen voor de „volksontwikkeling". Ik heb hooren zeggen, dat die dingen niet slecht zijn, dus ik wil daar niets kwaads over zeggen. Maar wanneer Columbia dat in het groot bedrijft en met zijn schriftelijke cursussen $ 300.000 per jaar verdient, dan krijgt de zaak een bedenkelijken kant.

---

*) A. Flexner, Universities, American, English, German.

Nu willen wij daar onze 3 punten eens bekijken. Eerst moet ik echter nog zeggen, dat de Colleges heel strenge toelatings-eischen hebben, bijv. Princeton is daarvoor zelfs berucht. In de T. H. van Californië worden per jaar slechts 600 leerlingen toegelaten, die uit een totaal van eenige duizenden candidaten worden uitgezocht door middel van een vergelijkend examen.

Aan de eerste moeilijkheid kan alleen tegemoet gekomen worden door zelf op een heel laag peil te beginnen en de eerste jaren dienen dan ook om in te halen, wat vroeger verzuimd werd. Wat het tweede betreft, de methode gaat door, zij was schoolsch en blijft schoolsch. En wat het derde punt betreft, in Amerika heeft men een veel meer overladen programma dan wij hebben. Daarom heb ik mij er steeds over verbaasd, wanneer gezegd wordt, dat die Amerikaansche studenten het zoo best hebben, zij hebben notabene 50 uren per week aan colleges en oefeningen te besteden!

Tot besluit nog een enkel woord over het huidige Rusland. Theoretisch is het zoo, dat het geheele volk Lager Onderwijs geniet, er zijn geen analphabeten meer; uit deze menschen, die tot een behoorlijk peil opgeleid worden, worden diegenen geselecteerd, die naar de Middelbare School gestuurd worden — iedere Rus is immers staats-ambtenaar — en de besten van dezen worden gedetacheerd naar de Hoogere opleiding. Nu is de praktijk hiervan — de selectie is wel gezond en in orde — dat de menschen, die een behoorlijke positie innemen en kinderen hebben, ook verlangen, dat die kinderen een hoogere opleiding ontvangen en dat is dus hetzelfde probleem als in het kapitalistische Franrijk. Ook in Rusland vindt de directeur van een fabriek het niet zonder meer goed, dat zijn zoon niet mag studeeren, maar op grond van zakken voor examens fabrieksarbeider moet worden.

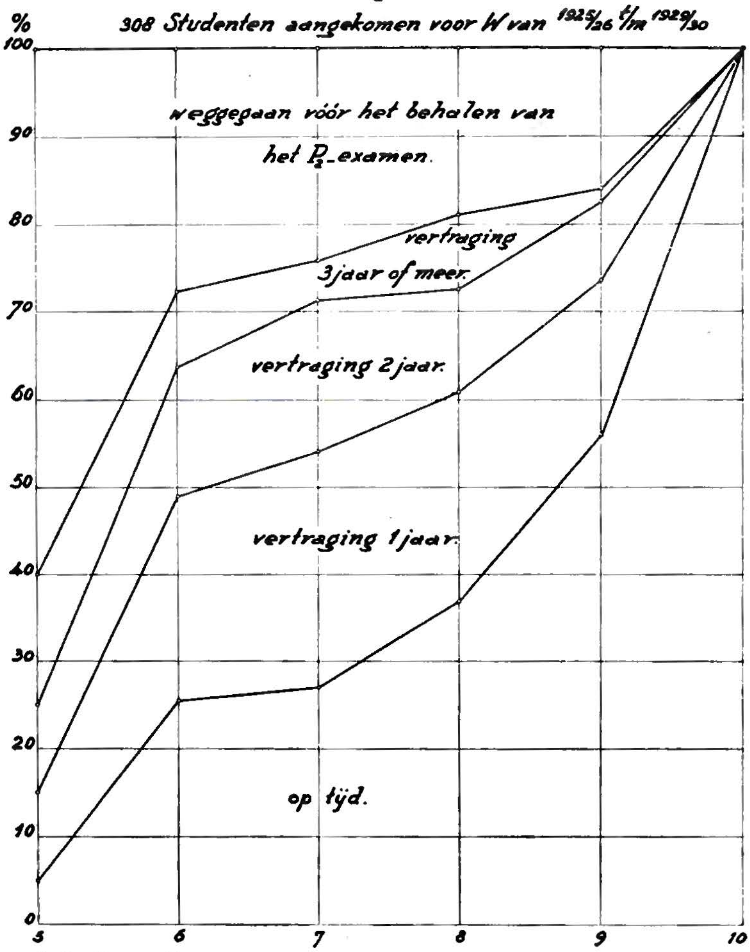
Dit nu, Mijne Heeren, was een uitstapje naar het buiten land om onzen geest te verruimen.

En nu wil ik tenslotte — heelemaal persoonlijk — mijn meening zeggen over wat ik denk van die verschillende moeilijkheden en wat ik mij voorstel als een geschikte methode om ze te overwinnen. Ik geef het graag voor iets beters en ik ben ook vatbaar voor goede argumenten.

Ik wilde U eerst spreken over de aansluiting in Punt A.

Voorkomen van de M.O. cijfers in verband met de studieduur voor het P_2-examen.

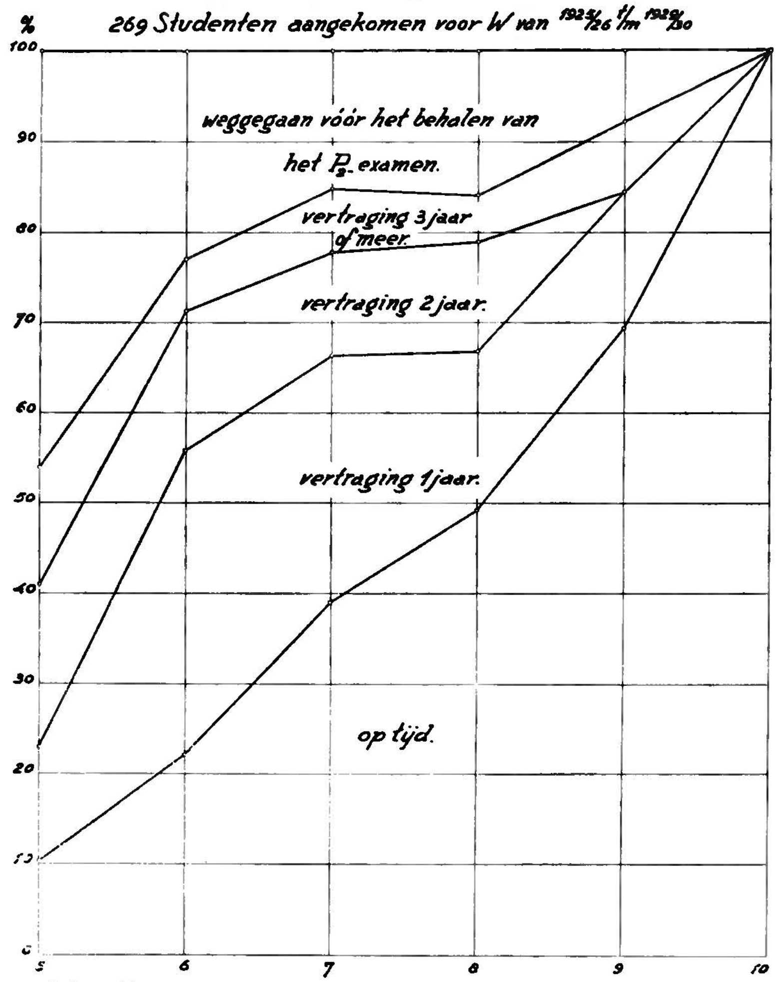
308 Studenten aangekomen voor W van 1925/26 t/m 1929/30



Wiskunde.

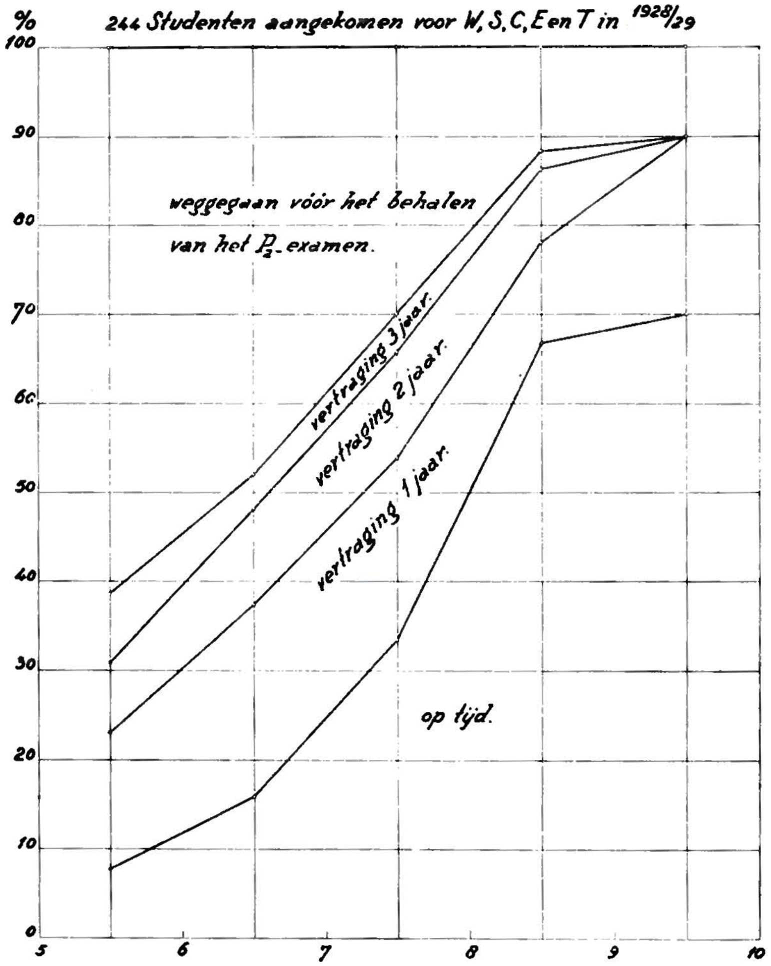
Voorkomen van de M.O. cijfers in verband met de studieduur voor het P_2-examen.

269 Studenten aangekomen voor W van $^{1925}/_{26}$ t/m $^{1929}/_{30}$



Mechanica.

Voorkomen van de M.O.cijfers in verband met de studieduur voor het P_2-examen.



Gem. Wisk.-Scheik.-en Natuurk.

en wel speciaal over den mensch. Daartoe zal ik eerst 3 plaatjes vertoonen, waarin U zult zien, dat de cijfers, die op de H.B.S. behaald worden, in zeer nauw verband staan met de resultaten, die op de T.H. bereikt worden. Het eerste plaatje geeft de gegevens van de wiskunde, het tweede die van de mechanica en het derde geeft deze gegevens van de exacte vakken — wiskunde, natuurkunde en scheikunde — gezamenlijk. In het derde plaatje is de mechanica er vermoedelijk niet bij genomen, omdat dat destijds geen verplicht vak was. Op alle plaatjes ziet U een frappante overeenstemming tusschen de cijfers van de H.B.S. en den tijd noodig voor het prop. examen. De gegevens voor de eerste twee grafieken zijn ontleend aan de discussie over het Rapport-Limburg *) in de vergadering van de Ver. v. Delftsche Ingenieurs op 12 November 1936 en die voor de laatste grafiek aan dit rapport zelf.

Aan hetzelfde rapport ontleen ik, dat 54½ % van de H.B.S. leerlingen opgaan voor hoogere opleiding. De leerlingen, die niet verder gaan en diegenen, die wel verder studeeren, ontvangen dezelfde opleiding en nu beweer ik, dat wanneer werkelijk de H.B.S. behoorlijk opleidt voor hooger onderwijs, zij niet goed opleidt voor de anderen en omgekeerd. Men kan nu eenmaal niet tegelijk én kopschool én vooropleiding zijn. Het liefste zou ik dus zien, als ik het voor het zeggen had, dat er naast de H.B.S. A. en B. in de hoogste klassen of in de hoogste klas nog een H.B.S. C. zou komen voor de menschen voor de hoogere opleiding. Doch wij hebben het niet voor het zeggen — de heeren in den Haag verwijten ons reeds, dat er te onzen behoeve reeds te veel Koninklijke Besluiten worden uitgevaardigd — en wij moeten werken met de H.B.S.-ers zooals wij die krijgen. Dan echter zou ik ervoor zijn de directe toelating tot Delft te beperken tot die menschen, die gemiddeld voor de exacte vakken 7 of meer hebben en voor de anderen, willen zij toch tot Delft toegelaten worden, eerst den omweg over de M.T.S. verplicht te stellen. Ik bedoel dus, dat wij de menschen met 7 of meer *onmiddellijk*

---

*) De toekomst der academisch gegradueerden, J. B. Wolters, Groningen-Batavia 1936.

toe kunnen laten, doch voor de anderen den weg niet *afsluiten*, dat zou wreed en on-Hollandsch zijn. Voor de zwakkeren is het vrije onderwijssysteem blijkbaar niet de aangewezen weg. Die moeten eerst nog een opleiding met steun doormaken aan een M.T.S. Dezen menschen zou ik het verder bij den overgang naar Delft niet lastig willen maken, doch ik zou gemakkelijke wegen willen creëeren, waarbij ten volle de kennis aangerekend wordt, die zij op de M.T.S. reeds hebben opgedaan. Daarmede zouden wij 33 % van den toevloed hebben afgesneden, doch daarvan kunnen wij later het betere deel door de M.T.S. weer tot ons krijgen. Wanneer ik nu aan den anderen kant nog eenige cijfers voor den dag haal, dan is dat in de eerste plaats het cijfer van 30 % van de menschen, die hier aankomen en verdwijnen zonder afgestudeerd te zijn. Verder heeft de Civiele Afdeeling de afgestudeerden eens onder de loupe genomen en eens getaxeerd hoeveel van hen eigenlijk onvoldoende algemeene geschiktheid voor ingenieur hebben. Men kan dit vriendelijk taxeeren, dan is het 8 % en onvriendelijk, dan is het 10 %. *) Wij komen dus dan tot een cijfer van 37% van menschen, die wij liever niet gehad hadden. Daartegenover staat dus mijn cijfer van 33%, waaruit blijkt, dat ik niet iedereen gevangen heb en ik weet ook zeer goed, wie ik niet gevangen heb. Uit de cijfers van de statistiek blijkt, dat niet alleen de menschen met 6 te lang over de studie doen, maar dat ook de menschen met 7 en 8 te lang erover studeeren en wij zouden tot merkwaardige resultaten komen, wanneer wij in de grafiek nog in de derde dimensie de portemonnaie van de ouders konden uitzetten. Ook daarvoor heb ik een plan. Mijn wensch is om te bepalen — zooals ook in het buitenland geschiedt — dat men niet ad libitum altijd maar weer hetzelfde examen kan doen, maar dat degene, die twee keer gezakt is, niet meer tot een examen kan worden toegelaten. Wanneer iemand na twee keer en na nader onderzoek niet in staat is iets te bereiken, dan is het beter, dat zoo iemand verdwijnt. U begrijpt natuurlijk wel waar ik naar toe wil, want ik kom nu tot punt twee en wil daarmede redden de *vrije studie*.

Mijne Heeren, het is op het oogenblik 34 jaar geleden,

---

*) Dit cijfer is ontleend aan de reeds boven geciteerde discussie.

dat er een vergadering was in de Stads Doelen, omdat men meende, dat de overgang naar de Technische Hoogeschool een zoodanige zou kunnen worden, dat de vrije studie in gevaar kwam. In de studentenbladen verschenen artikelen met titels als: Dreigen er gevaren? Ik had de eer te behooren tot de 5 oprichters van de eerste Centrale Commissie en ik heb toen op de bres gestaan voor de vrije studie in Delft en ik zou ook nu nog een lans daarvoor willen breken. En ik wil mijn standpunt dan ook verdedigen. Iedere opleiding moet zoo zijn, dat zij zich aanpast aan het volk, waarvoor zij gemaakt is en er is geen volk, dat zoo voelt voor de vrijheid als het onze. Van den Hollander kun je alles gedaan krijgen, als je hem maar niet dwingt, want dan vertikt hij het. Hiermede is op de H.B.S. reeds rekening gehouden in de hoogste klassen, want daar is de studie reeds veel vrijer dan in het buitenland. En willen wij nu die menschen, die den dwang op de H.B.S. reeds zat hebben, op de T.H. inspannen in het gareel? Wat zou daarvan het gevolg zijn? En hoe zouden de studenten staan tegenover die der andere Universiteiten? Trouwens ik vraag mij af, of wij die 63 % die dan toch wel deugen, dien dwang wel mogen opleggen. Ik geloof, dat dat niet noodig is, het kan op een andere manier ook nog wel. Er is verder ook nog dit, en dat zal misschien niet plezierig zijn, maar ik wil het toch zeggen, ook al krijg ik geen applaus. Wanneer wij de vrijheid van studie houden, dan moeten de studenten zich die ook waard toonen. Vierendertig jaar geleden werd er gevraagd: Dreigen er gevaren, doch ik zou nu deze vraag kunnen omdraaien en zeggen: Er dreigen gevaren! De stemming is langzamerhand omgedraaid en is op het oogenblik zeer tegen de vrije studie. Laten wij eens kijken, wat die dwang uitmaakt. Als je zooiets doet, moet je het goed doen, dan komen er tutors, instructors, er komen M.O.-mannen, paedagogen, die wanneer een student bij hen komt om te vertellen, dat hij een college gemist heeft, onmiddellijk moet kunnen doorzien of Tante werkelijk dood is, enz. enz.; ik kan U wel zeggen, mijn sympathie heeft dat niet. We kunnen wel heel sterk werken voor selectie op Hollandsche manier, ik wil mij daarin niet verdiepen, maar wanneer wij dien weg volgen, dan is één ding noodig, n.l. de medewerking van de studenten zelf, want wanneer wij die niet krijgen, dan voorzie ik, dat de vrijheid van onderwijs ernstig in gevaar komt. Er moet ook bij de studenten een andere geest komen, ook in corporaties. Wanneer ik denk aan de grootste corporatie met jammer genoeg niet meer dan 25% van het totaal aantal studenten, dan zie ik daar ook veel, wat niet in orde is. Het is niet in orde, dat er lezingen georganiseerd worden door de Ver. Vrije Studie, waarop slechts 5 studenten verschijnen. Er moeten veel dingen worden herzien en daarom doe ik een beroep op de studenten om niet alleen te kletsen, maar ook iets te doen.

Nu nog heel wat anders en dat zal kort zijn. Ik heb de geheele voordracht evenals de andere sprekers, die hier het woord gevoerd hebben, in majeur probeeren te houden. Er zou echter ook iets voor mineur te zeggen zijn geweest. Want wij spreken hier nu over deze dingen, of de heele wereld zoo zal blijven, als deze op het oogenblik is. En nu denk ik niet aan de verschrikkingen van een oorlog over ons land, maar zelfs als wij gevrijwaard blijven, dan moeten wij niet denken, dat het net zoo gemakkelijk afloopt als in 1918. Wanneer er vrede komt en dan nog in het allergunstigste geval, dan zal er een heel andere wereld zijn en zal het misschien noodzakelijk zijn om heel andere maatregelen te nemen vanwege geheel andere financieele en economische condities. Op dat stramien had ik mijn voordracht ook kunnen borduren. Wij weten niet, wat er komt, maar wel weten wij, dat het zeer ernstig zal zijn en dat dus alle pogingen om de fouten, die er mogelijk zijn, te verbeteren ook met het oog op de toekomst hun beteekenis zullen hebben.

Ik dank U.

DEBAT.

Tijdens het debat na afloop van de inleiding van Prof. dr. ir. J. A. Schouten kwam tot uiting:

1e. De overgang M.T.S.-T.H. is nog betrekkelijk zwaar. Er is moeilijk een studiejaar mee te winnen. Wanneer de weg om tot studie aan de T.H. te komen ging via de M.T.S. — zooals het rapport van prof. Dresden aangaf —, dan hoort er een goede samenwerking te komen tusschen beide lichamen, om de studie zoo kort mogelijk te houden. Meer en meer wordt de M.T.S. als voorstudie gekozen.

2e. De vrije studie wordt bedreigd. Ook de vorige inleiders hebben hierop gewezen.

3e. De cijfers, op de H.B.S. gekregen, geven wel degelijk eenige aanwijzing over het in Delft te behalen succes. Aan de hand van de 3e statistiek is op te merken, dat iemand, die op de H.B.S. zeer matige cijfers heeft voor alle exacte vakken, hier weinig kans van slagen heeft. Exacte vakken zijn altijd noodig als basis van de ingenieursstudie.

4e. Professor Schouten is sterk gekant tegen het afleggen van tentamina, speciaal in de eerste studiejaren. Voor den toekomstigen ingenieur is het nuttig, nu reeds geoefend te worden in het verrichten van diverse werkzaamheden tegelijk.

5e. De verplichte leerstof voor de wiskunde in de propadeuse is sedert 1922—23 uitsluitend afgenomen en wel is het aantal uren met 26,7 % verminderd. Voor de natuurkunde is het aantal uren gelijk gebleven, en voor de technische vakken is dit aantal met 68 % vermeerderd.

Mobilisatiedictaat

Theoretische Mechanica.

Voorwoord uit het Mobilisatiedictaat Theoretische Mechanica.

Voorwoord.

Het is de bedoeling van dit dictaat gemobiliseerden gelegenheid te geven tot zelfstudie. Tusschen de theoretische begripsvormingen van den voorbereidenden cursus in het tweede jaar en de practische toepassingen, zooals die in de opgaven van Handleiding 57 voorkomen, gaapt een kloof, die in het normale geval door het college moet worden overbrugd. De eenvoudigste oplossing scheen te zijn het collegedictaat te vermenigvuldigen. Het gewone collegedictaat echter ontleent zijn grootste waarde aan de omstandigheid, dat het bestaat uit zelfgemaakte aanteekeningen over reeds met den docent doordachte en dus voor een deel reeds geleerde of althans verhelderde stof. In handen van ieder ander dan den maker zelf wordt zoo'n dictaat, zelfs in het gunstigste geval dat alle fouten verbeterd en alle hiaten gestopt zijn, een leerboekje van zeer matige qualiteit. Ik heb derhalve getracht iets samen te stellen, dat eenigszins tegemoet kan komen aan de wenschen van den gemobiliseerde, die ver van Delft alleen met zijn dictaat 2e jaar, maar wij hopen ook met een goed leerboek en met handleiding 57 zit en nu aan het werk wil komen. Daarbij heb ik mij steeds voor oogen gehouden, dat het er voor den aanstaanden ingenieur niet om gaat alleen geleerdheid op te doen maar wel

wel om te leeren practisch werkelijk een probleem aan te pakken en dit althans te brengen tot het punt waar slechts rekenwerk overblijft. Dus geen grauwe theorie, maar alleen die afleidingen, die voor het begrip noodzakelijk zijn, en verder zooveel mogelijk aanwijzingen en raadgevingen bij het eigenlijke werk, het oplossen van problemen. Dit eigenlijke werk moet nu echter in dit geval geheel van den leerenden zelf komen, daar geen bedrukt papier ooit het hooren van het levende woord en het „zien doen" kan vervangen. Het zwaartepunt is dus verplaatst, waar voor den normalen student het college en het daaruit voortspruitende dictaat samen met studieboeken hoofd-bronnen voor de studie vormen en het vraagstukkenboek daarnaast gelegenheid geeft tot zelfwerkzaamheid, zal voor den gemobiliseerde het vraagstukkenboek eigenlijk als voornaamste studieboek dienst moeten doen terwijl dit mobilisatiedictaat alleen den toegang tot dit boek tracht te vergemakkelijken. De weg is moeielijker maar ook weer niet zoo moeielijk als het bovenstaande zou doen veronderstellen, immers voor den normalen student is het voornaamste werk toch ook het zelf oplossen van problemen. Zonder dat is het nu eenmaal niet mogelijk een vak als mechanica te leeren. Bovendien ben ik gaarne bereid gemobiliseerden, die eens naar Delft komen, mondeling met moeielijkheden te helpen. Ook een schriftelijk S.O.S. zal ik gaarne beantwoorden, echter mogen eventueele vragenstellers bedenken, dat een practisch resultaat slechts kan worden bereikt, indien alleen zeer gedetailleerde en duidelijk geformuleerde vragen worden gesteld.

De gelegenheid is tevens gebruikt om enkele fouten in het vraagstukkenboek te verbeteren.

Delft November 1939

J.A. Schouten

Uit: Verslag van de Gewone vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling ***49*** *(1940), 24-26.*

KONINKLIJKE NEDERLANDSCHE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

Over de tien eenvoudigste meetkundige grootheden

DOOR

J. A. SCHOUTEN

Wiskunde. — J. A. SCHOUTEN: *Over de tien eenvoudigste meetkundige grootheden.*

Men kan een meetkundige grootheid definieeren als een figuur, die ten opzichte van eenig rechtlijnig coördinatenstelsel is vastgelegd door een aantal getallen, de kentallen van de grootheid. Transformeert men het coördinatenstelsel, dan transformeeren zich deze kentallen en het is juist aan deze transformatiewijze der kentallen, dat men verschillende soorten van meetkundige grootheden van elkaar onderscheidt. Laat men in de keuze der rechtlijnige coördinatenstelsels een zoo groot mogelijke vrijheid toe, d.w.z. laat men ook scheefhoekige coördinatenstelsels toe met op elke as een willekeurige maateenheid, dan is er een groep van tien verschillende grootheden, wier transformatievergelijkingen eenvoudiger zijn dan die van alle anderen en die men dus als de „eenvoudigste" meetkundige grootheden mag beschouwen. In de eerste plaats heeft men een co- en een contravarianten vector, dan een co- en een contravarianten bivector en ten slotte een co- en een contravarianten trivector, welke beide laatsten echter met één en dezelfde figuur correspondeeren. Het meetkundige beeld van al deze grootheden bevat steeds een pijl, die òf in de figuur ligt òf er buiten (er doorheen of er omheen). Vervangt men nu een pijl in de figuur door een pijl er buiten of omgekeerd, dan ontstaan nog vijf geometrische grootheden, de zoogenaamde Weylsche grootheden, zoodat er in het geheel van deze eenvoudigste grootheden juist tien zijn. Aan de hand van eenige modellen wordt dit nader toegelicht.

Beperkt men de keuze der coördinatenstelsels, dan laten zich verschillende dezer grootheden door één en dezelfde figuur voorstellen, zoodat het aantal schijnbaar minder wordt. Het sterkst treedt dit verschijnsel op indien men zich vastlegt op gewone rechthoekige rechtsche coördinatenstelsels met op elke as dezelfde gewone maat. Dan laten zich alle acht vectoren en bivectoren voorstellen door één figuur (een pijl) terwijl de twee trivectoren zich door één enkel invariant (d.i. zich niet transformeerend) getal laten vastleggen. Dit geeft eenerzijds vereenvoudiging, daar men nu maar met twee soorten grootheden te maken heeft, „gewone" vectoren (pijlen) en getallen. Anderzijds leidt deze zeer simplistische beschrijvingswijze dikwijls tot een meer gecompliceerd meetkundig beeld.

Een sprekend voorbeeld levert de strooming van een vloeistof. De stroomdichtheid is in wezen een covariante Weylsche bivector en heeft als meetkundig beeld een buis met een door een pijl langs de buis aangegeven zin. De continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbare vloeistof bij een stationairen toestand beteekent meetkundig eenvoudig dat alle buizen precies aan elkaar passen en samen de ruimte vullen. Dit mooie eenvoudige beeld gaat verloren, indien men de buizen door pijlen vervangt. De verkregen fijnere onderscheiding kan er dus eenerzijds toe leiden, dat de physicus (juist bij behoud van gewone rechthoekige coördinatenstelsels) weet, dat er behalve de pijl nog zeven andere meetkundige voorstellingen voor een „vector" bestaan en dat het volstrekt niet noodig is een physische grootheid, die zich nu juist van nature op een van die zeven andere wijzen presenteert, toch maar weer, als het ware tegen de natuur in, door een pijl voor te stellen. Anderzijds leveren zij den physicus het instrument voor die gevallen, waar geen gewone metriek bestaat en dus van gewone rechthoekige coördinatenstelsels geen gebruik kan worden gemaakt. Uit onderzoekingen van VAN DANTZIG is gebleken dat vele betrekkingen in de electriciteitsleer, de hydrodynamica en de thermodynamica, in werkelijkheid geheel onafhankelijk zijn van de metriek en dus ook een van de metriek onafhankelijke formuleering toelaten. Het zijn juist deze onderzoekingen, die aanleiding gaven tot deze hernieuwde klassificeering der meetkundige grootheden, die ook voor een dimensiegetal grooter dan drie werd doorgevoerd [1], maar waarvan hier slechts iets over de eenvoudigste resultaten voor de gewone ruimte werd medegedeeld.

[1]) J. A. SCHOUTEN, Ueber die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und W-p-Vektoren und den korrespondierenden Dichten, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 709—716 (1939); Ueber die Beziehungen zwischen den geometrischen Grössen in einer X_n und in einer in X_n eingebetteten X_m, aldaar 568—575; J. A. SCHOUTEN and D. VAN DANTZIG, On ordinary quantities and W-quantities, Comp. Math. **7**, 447—473 (1940).

ONDERWIJS

UITWISSELING HOOGLEERAREN

Prof. dr. J. A. Schouten naar Londen.

(Van onzen S.-correspondent.) 1936

Londen, 17 Maart.

Met ingenomenheid kan worden vermeld dat het, vele jaren geleden door de Anglo Batavian Society te Londen en de vereeniging Nederland-Engeland gemaakte plan, om docenten van beide landen uit te wisselen, dank zij den bemoeiingen van Sir William J. Collins, K.C.V.O., vice-president der Anglo Batavian Society, dr. W. Roosegaarde Bisschop en dr. S. J. Worsley, Academic Registrar van de Universiteit van Londen weder is herleefd, en dat onder dit stelsel gisteravond dr. J. A. Schouten, hoogleeraar in de wiskunde aan de Technische Hoogeschool te Delft, in King's College, Strand, voor een talrijk gehoor van studenten en andere belangstellenden een lezing heeft gehouden over „de theorie van het geometrische object". Bij afwezigheid van den Londenschen hoogleeraar in de wiskunde prof. A. E. Jolliffe leidde prof. aan de Temple den spreker in.

Prof. Schouten had voor de lezing het geheele bord gevuld met reeksen formules en geometrische symbolen, en aan de studenten papieren doen uitdeelen met de definities van het geometrische object als gegeven door geleerden in de meetkunde van Felix Klein uit Göttingen in 1909 tot O. Veblen, J. M. Thomas, J. H. C. Whitehead, J. A. Schouten, D. van Dantzig en A. Wundheiler, waarbij hij opmerkte dat sinds de ontdekking van pseudo parallelisme in 1917 het geometrisch object het middenpunt was geworden van de moderne geometrische onderzoekingen. Hij betoogde in voortreffelijk Engelsch, dat de tot dusver gegeven definities niet volkomen nauwkeurig zijn, en dat dit merkwaardige feit te wijten is aan het bestaan van twee gezichtspunten, het componentale en het functionale. Van laatstgenoemd standpunt krijgt men het macro-geometrische object, terwijl men van het componentale standpunt het micro-geometrale of gewone geometrische object verkrijgt. Is elk micro-geometrisch object tevens macro-geometrisch, het tegenovergestelde is niet het geval. Het is mogelijk voorbeelden te geven van een macro-geometrisch object dat stellig niet micro-geometrisch is. Deze laatste komen slechts zeer zelden voor: als zij tot een bepaalde klasse behooren, gelijk door Veblen en Whitehead is gedefinieerd, zijn zij deel van een micro-geometrisch object. Professor Schouten, die bij het begin van zijn voordracht de universiteit gedankt had voor de uitnoodiging en de Anglo-Batavian Society voor de organisatie der uitwisseling van hoogleeraren tusschen Engeland en Nederland en de hoop uit uitgesproken dat dit tot intiemer contact zou leiden tusschen de wetenschappelijke mannen van beide landen, deed aan het einde de mededeeling, dat hij op de boot van Nederland naar Engeland reizende meende de oplossing te hebben gevonden voor een der vraagstukken, die zich bij de behandeling voordoen, en dat hij hoopte daar spoedig een mededeeling over te kunnen doen. Na afloop werden nog eenige vragen gesteld en prof. Schouten werd in waardeerende bewoordingen en met daverend applaus dank gebracht voor zijn belangrijke voordracht.

Onder het stelsel van uitwisseling van geleerden zal naar ik verneem, dit jaar nog prof. Brouwer uit Groningen overkomen; antwoord wordt nog verwacht van prof. Vening Meinesz uit Utrecht. In Nederland is naar ik vermeen de lijst der uitnoodigingen nog niet opgemaakt.

Door Schouten bewaard kranteknipsel uit de avondeditie van het Algemeen Handelsblad van 17 maart 1936.

OVER DE WISSELWERKING TUSSEN WISKUNDE EN PHYSICA IN DE LAATSTE 40 JAREN

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN BUITENGEWOON
HOOGLERAAR AAN DE UNIVERSITEIT
VAN AMSTERDAM OP 21 FEBRUARI 1949

DOOR

J. A. SCHOUTEN

P. NOORDHOFF N.V. • 1949 • GRONINGEN-BATAVIA

Mijne Heeren Bestuurderen van Stad en Universiteit, Dames en Heeren Professoren, Lectoren en Privaat-Docenten, Dames en Heeren Studenten, en voorts Gij allen, die door Uwe tegenwoordigheid de waarde van deze samenkomst verhoogt, zeer gewaardeerde toehoorders,

Vijf en dertig jaar geleden heb ik bij mijn ambtsaanvaarding te Delft een rede uitgesproken over het wezen en de practische beteekenis der directe analyses. Onder een direkte analyse verstond men toen een invariante symboliek, die het uitschrijven van coördinaten althans gedurende de berekeningen onnoodig maakte en het was destijds nog noodig voor dergelijke symbolische methodes een lans te breken. Er is in die 35 jaren veel gebeurd, symbolische methodes worden thans overal gebruikt en zij geven zooveel gemak en arbeidsbesparing dat men wel over het bezwaar heen moet stappen dat zij als zoovele geheimschriften den toegang tot een verwant vakgebied nu niet bepaald gemakkelijker hebben gemaakt.

De vraag naar de al of niet wenschelijkheid van symbolische methodes is dus geen vraag meer en zeker geen geschikt onderwerp voor de bespreking van heden. Daarentegen lijkt het aangewezen het eens te hebben over de ontwikkeling in de laatste 40 jaren en in het bijzonder over de eigenaardige wisselwerking tusschen physica en wiskunde, die wel nooit zoo intens geweest is als juist in dit tijdperk. Mijn voordracht zal uit twee deelen bestaan. Het eerste deel zal wat meer technisch-mathematisch zijn en ik verzoek hier aanwezige niet vakgenooten niet zoozeer op de details te letten dan wel op de hoofdlijnen, die ik zoo zwaar hoop aan te zetten dat zij voor een ieder te volgen te zijn. Het tweede en belangrijkste deel is in meer menschelijke taal en zeker voor een ieder begrijpelijk.

In mijn studietijd trof ik een meetkunde aan, die tot een prachtige en schijnbaar afdoende afsluiting was gekomen. De strijd tusschen de meetkunden van Euclides, van Bolyay en van Lobatschewsky, de controversies tusschen projectieve, affine en metrische meetkunden waren in een hoogere harmonie opgeheven. Immers had Felix Klein al in 1872 in het „Erlanger program" het beginsel uitgesproken dat iedere meetkunde slechts de invariantentheorie is behoorende bij een bepaalde (eindige of oneindige) Lie'sche transformatiegroep en nadien hadden Klein en zijn leerlingen dit beginsel volkomen uitgewerkt en was het inzicht, dat de meetkunde één groot gebouw is met vele kamers, elk geregeerd door een der vele ondergroepen van de alomvattende groep der continue transformaties, gemeengoed geworden van een groote groep van mathematici waartoe ook reeds enkele physici behoorden.

Er is in de geschiedenis der wiskunde een sinistere wet, die zegt, dat wanneer een gebied zóó goed is doorwerkt en belicht, dat er eigenlijk niet veel meer overblijft dan een stelsel van afzonderlijke puzzles, de aandacht der beste mathematici zich spoedig van dit gebied af en andere minder goed doorvorschte gebieden toewendt. Zoo verging het de klassieke differentiaalmeetkunde in drie afmetingen na een periode van grooten bloei en hetzelfde geschiedde met de projectieve meetkunde, die eenmaal in het centrum der belangstelling had gestaan. Als ingedijkte polders kwamen deze gebieden buiten den stroom te liggen, als veilig bezit klaar om vruchten op te leveren waar noodig, maar niet langer tooneel van strijd en overwinning.

Ongetwijfeld ware het in het begin van deze eeuw ook zoo gegaan met de door Klein geordende en geconsolideerde meetkunden, ware het niet dat er omstreeks dien tijd in de physica een probleem opdoemde, dat juist het Klein'sche gebouw der meetkunden zou blijken noodig te hebben. De reeds door Voigt in 1887 even aangeraakte, door Lorentz in 1892 nader beschouwde en in 1906 tot een voorloopige formuleering gebrachte invariantie der Maxwellsche vergelijkingen bij orthogonale transformaties in 4 afmetingen (Lorentz transformaties) wachtte slechts op een physicus vertrouwd met de moderne meetkunde om tot een geheel nieuwen inslag in de physica te voeren. Inderdaad formuleerden Poincaré, die steeds in nauwe betrekking tot Klein had gestaan, en Einstein, die reeds geheel in de traditie van het Erlanger program was opgegroeid, in 1905 onafhankelijk van elkaar het relativiteitsbeginsel, terwijl het aan Einstein als physicus voorbehouden bleef het relativiteitspostulaat te formuleeren, dat invariantie van alle natuurverschijnselen bij de Lorentz-groep verlangt. Voor de physica was het gebeurde een omwenteling, voor de wiskunde daarentegen voorloopig niet meer dan een mooi voorbeeld van een meetkunde met een indefiniete metriek naast vele anderen. Intusschen gingen de gebeurtenissen zeer snel en wist Einstein, wederom gebruik makende van groote hoeveelheden mathematische kennis, opgehoopt in de werken van Riemann, Christoffel en verschillende Italiaansche geometers waaronder vooral Ricci Curbastro, zijn algemeene relativiteitstheorie te formuleeren (afsluiting 1916) waarin de vergelijkingen der physische verschijnselen invariant werden bij algemeene continue transformaties der coördinaten. De ruimte-tijd wereld werd nu een gekromde Riemannsche ruimte, „gekromd" omdat er niet meer van rechte lijnen kon worden gesproken maar alleen van geodetische lijnen, en de eenvoudige relativiteitstheorie van 1906 bleef slechts geldig in iedere „lokale" ruimte-tijd. Op zichzelf was dit mathematisch nog niet verontrustend daar ook de Riemannsche ruimte nog in het Klein'sche schema paste, zij het dan ook dat de ten grondslag liggende Lie'sche groep een zoogenaamde „oneindige" is, die tot een zeker geometrisch object, den „fundamentaaltensor" behoort. Maar toch ontstond door de onverwachte realizeering van zulk een gekromde ruimte in onze eigen ruimte-tijd-wereld een eigenaardig gevoel van wanbevrediging. Onwillekeurig drongen zich vragen op als: hoe moet een proefpersoon zich in zoo'n ruimte voelen, wat zal hij ervaren bij een verplaatsing, e.d. In de geometers van dat tijdsgewricht, die zich in die nieuwe werelden daadwerkelijk wilden inleven en dat binnen de grenzen der bestaande structuur schema's niet of kwalijk konden, ontstond een toestand van spanning, die vroeg of laat tot een ontlading moest voeren. En die ontlading kwam dan ook nog vóór het einde van den eersten wereldoorlog toen onafhankelijk van elkaar een Italiaansch en een Nederlandsch auteur het begrip van het *pseudoparallelisme* introduceerden [1]). Nu is het merkwaardigste aan dit parallelisme dat het niet lang van te voren was ontdekt. De onderzoekingen van Christoffel, Lipschitz, Ricci, Curbastro en vele anderen hadden alles voorbereid en men had eenvoudig maar den „covarianten differentiaal" van Ricci Curbastro nul behoeven te stellen om de pseudoparallele verplaatsing te verkrijgen. Maar niets van dit alles gebeurde en het nieuwe begrip werd eerst gevonden nadat de physica na de algemeene relativiteitstheorie den aanstoot had gegeven. Het is dan ook teekenend dat in de verhandelingen der genoemde twee auteurs beide in den eersten zin van de inleiding uitgaan van de relaticiteitstheorie!

Het nieuwe denkbeeld werkte in hooge mate stimuleerend op het wiskundig onderzoek. Het raderwerk der meetkunde, dat een oogenblik in tevreden zelfbeschouwing dreigde te zullen gaan stil staan, kwam weer op volle toeren en men kan wel zeggen, dat de eigenlijke moderne differentiaalmeetkunde met het pseudoparalle-

---

[1]) Levi Civita, Rend. Circ. Mat. Pal. 42 (1917) 173—205; Schouten, Verh. Kon. Akad. v. Wet. 12 (1918) No 6, 95 blz.

lisme begint. Directe veralgemeening, nu weer geheel onafhankelijk van eenige ervaringswetenschap, voerde tot de theorie der lineaire overbrengingen, waarbij een meetkunde tot stand komt door een voorschrift hoe men locale ruimten (hoe dan ook gedefinieerd) op elkaar kan afbeelden. Zulk een afbeelding behoort steeds tot de een of andere eindige Lie'sche transformatiegroep en zoo ontstaat er weer een indeeling van meetkunden naar de ten grondslag liggende groepen, maar een geheel andere als die van Klein. De meetkunden van Klein hadden als het ware de groep van binnen in de ruimte zelf, de overbrengingsmeetkunden hebben haar alleen van buiten in de betrekkingen tusschen naburige locale ruimten. Bij iedere Klein'sche meetkunde behoort een overbrengingsmeetkunde, die zich tot de eerste verhoudt als de meetkunde op een gebogen oppervlak tot die in een plat vlak, en men kan dus op deze wijze bijvoorbeeld „gekromde" projectieve of conforme meetkunden ontwikkelen.

De nieuwe meetkunden noopten nu andere onderzoekers en onder hen als eersten Eisenhart en Veblen in 1922 [1]), alles eens vanuit een ander gezichtspunt te bezien en weer aan te knoopen aan de Klein'sche opvatting van de Riemannsche meetkunde als de invariantentheorie van een oneindige Lie'sche groep behoorende tot een bepaald geometrisch object. In plaats van een overbrenging legden zij een of meer geometrische objecten ten grondslag en ontwikkelden de bij deze behoorende objectmeetkunde. Alras bleek, dat iedere overbrengingsmeetkunde ook als objectmeetkunde op te vatten was en ook dat de meest interessante objectmeetkunden als overbrengingsmeetkunden konden worden geduid, hetgeen niet weg nam dat het begrip objectmeetkunde tenslotte toch iets ruimer was. Weliswaar gaf Cartan in 1936 in Oslo als zijn meening te kennen, dat de objecttheorie, bijvoorbeeld toegepast op de Riemannsche meetkunde „masque complètement ce qu'il y a en elle de géométrique au sens intuitiv du mot", maar daar stond tegenover dat anderen juist in de objecttheorie de meest „natuurlijke" opvatting zagen. Dit bewijst alleen dat het emotioneele element bij mathematici (gelukkig) een veel grooter rol speelt dan de buitenstaander pleegt te denken. Afgescheiden van alle emoties vulden overbrengingstheorie en objecttheorie elkaar prachtig aan en leidden zij tot allerlei andere onderzoekingen, bijv die over Finsler'sche en aan deze aanknoopende Cartan'sche meetkunden

[1]) Proc. Nat. Acad. of Sc. 8 (1922) 19—23.

en die over geometrische objecten als zoodanig. Inderdaad was het bedrijf weer in vollen gang.

Het pseudoparallelisme werkte op de physica terug, eerst direkt door de ontdekking van een nieuw relativistisch effect in de praecessiebeweging van de aarde en vervolgens, na een eerste mathematische generalizeering, door de theorie van Weyl. Reeds in 1910 hadden Cunningham [1]) en Bateman [2]) ontdekt, dat de Maxwellvergelijkingen eigenlijk invariant waren bij een veel ruimere groep dan de 10 parameters tellende van Lorentz, namelijk bij de 15 parameters tellende groep der conforme transformaties. Nu verving Weyl 1918 de Riemannsche overbrenging door een andere, die inderdaad in iedere locale ruimte-tijd behoort tot de conforme groep, alleen was zijn overbrenging niet volledig invariant bij conforme transformaties maar nog mede afhankelijk van de transformaties van een soort vectorveld dat dan met den electromagnetischen potentiaalvector werd geidentificeerd. Het belangrijke was dat Weyl daarmede voor de eerste maal een „unificeering" bereikte van gravitatie en electromagnetisme. Een bezwaar was dat bij zijn pseudoparallelisme maatstaven bij rondvoering in electromagnetische velden hun lengte konden veranderen, wat niet in overeenstemming was met de meetresultaten. De pseudoparallelverplaatsing uit de theorie mocht dus niet met de werkelijke parallelverplaatsing worden geidentificeerd en daarmede verloor de theorie veel van haar aantrekkelijkheid. De eenmaal gewekte gedachte van een unificeering liet echter de onderzoekers niet meer met rust en reeds in 1921 wist Kaluza [3]) die te bereiken door het invoeren van een vijfde dimensie. In plaats van den spanning-impuls-energietensor der materie in de gewone theorie met een matrix van 4 rijen en 4 kolommen treedt dan een tensor met een matrix van 5 rijen en 5 kolommen, waarin de vijfde alleen electromagnetische grootheden bevat. De raadselachtige vijfde dimensie bezorgde eerst wat last maar Veblen en Hoffmann [4]) wezen er in 1930 op dat de vijf coördinaten konden worden opgevat als homogene coördinaten in een locale ruimte-tijd. Hier kwam te stade dat de projectieve differentiaalmeetkunde intusschen door verschillende scholen en op verschillende wijzen was ontwikkeld. Bij Veblen en zijn school bleef de homogene behandeling tot de lokale ruimte-tijd beperkt, men had dus hier een ruimte-tijd-wereld met 4 (kromlijnige)

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910) 77—98.

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910), 23—264; 469—488.

[3]) Sitz Ber. Preuss Akad. d. Wiss. (1921) 966—972.

[4]) Phys. Rev. 36 (1930) 810—822.

coördinaten en in elke locale ruimte-tijd 5 homogene projectieve coördinaten en een door een kwadratische vergelijking in deze coördinaten vastgelegd 3-dimensionaal hyperoppervlak dat den fundamentaaltensor representeert. Hier in Holland gebruikten wij daarentegen [1]) in de ruimte-tijd-wereld de door v. Dantzig [2]) in 1932 ingevoerde 5 homogene kromlijnige coördinaten, die zich fraaier aan de 5 locale coördinaten aanpasten. Spoedig bleek, dat het niet moeilijk was een unificeerende theorie op te stellen, er kwamen er eigenlijk zelfs veel te veel, die allen met het getal 5 in verband stonden, allen op hun wijze betrekkelijk behoorlijke resultaten lieten zien zoolang het ging om unificeering en allen vrij behoorlijk in elkaar konden worden vertaald. Toch kwam het weer tot een stilstand omdat alles misliep zoodra het ging om het probleem van de verhouding van veld tot deeltje, culmineerende in de vraag hoe een oneindige eigenenergie van puntvormige deeltjes kon worden vermeden. Tegen die vraag bleek ook geen der vijfdimensionale theoriën opgewassen en voorloopig was de stand dus zoo, dat unificeering blijkbaar gemakkelijk kon worden verkregen met behulp van 5 coördinaten hoe dan ook geduid, maar dat het raadsel der eigenenergie niet was opgelost en dat de conforme invariantie voorloopig weer van de baan was.

Van geheel onverwachte zijde kwam er nu hulp voor de conforme theorie. Wederom lag er een groote hoeveelheid mathematisch materiaal opgestapeld dat slechts scheen te wachten op een nieuwen impuls van de physica. De representatietheorie der eindige groepen was reeds lang opgesteld door Frobenius [3]) en Cartan gaf in 1913 [4]) reeds een vrij volledige theorie van de representatie van de halfenkelvoudige continue groepen inclusief een spintheorie voor een willekeurig aantal dimensies, dit laatste onbewust van het feit dat reeds in 1901 E. Waelsch [5]) in zijn binairanalyse beschikte over het geheele apparaat van de 2-dimensionale spin en na 1910 [6]) van de 4-dimensionale spin (dubbel binaire vormen) zonder dat hij met deze dingen eigenlijk iets kon beginnen. Wederom onafhankelijk

---

[1]) Zie bijv. Ann. of Math. 34 (1933) 271—312; Ann. de l'Inst. H. Poincaré 5 (1935) 51—88.

[2]) Math. Ann. 106 (1932) 400—454.

[3]) Sitz Ber. Berl. Akad. (1897) 994—1015; (1899) 482—500; (1900) 516—534; (1903) 328—358.

[4]) Bull. Soc. Math. de Fr. 41 (1913) 53—96.

[5]) Wiener Anzeiger 38 (1901) 303—314, zie verder Jahresber. D.M.V. 24 (1915) 382—389.

[6]) Jahresber. D.M.V. 19 (1910) 90—98.

had A. Young[1]) 1901 al een theorie gegeven over wat men tegenwoordig invariante splitsing van affinoren of ook representatietheorie van de affine-groep zou noemen en was Waelsch met zijn binairanalyse zelfs voor de dimensiegetallen 3 en 4 al doorgedrongen tot invariante splitsingen bij de orthogonale groep. Maar dit alles bleef eigenlijk braak liggen, wat dan soms tragisch was zooals in het geval van Waelsch, die voor zijn levenswerk overal belangstelling trachtte te wekken en die eigenlijk nergens wist te vinden. Tot dat eindelijk in 1925 de lont in het kruit viel en Uhlenbeck en Goudsmit het electron lieten spinnen. Dat voerde dan via de eenvoudige Pauli'sche 2 dimensionale spinruimte in 1927 (het sterfjaar van Waelsch!) tot de vierdimensionale spinruimte van Dirac in 1928, die het verband zou leggen tusschen de relativiteitstheorie en de inmiddels op ieder gebied veld winnende quantenmechanica. Ook hier was er weer een sterke terugslag op de wiskunde, eerst eischte het nieuwe gebied hergroepeering en consolidatie van voorhanden stof, maar spoedig gingen de mathematici al weer aan het werk om de zaak zelf en zagen tal van nieuwe publicaties over de representatie van eindige en continue groepen en over de theorie der spinruimten het licht. Zelfs vatte D. E. Littlewood vanaf 1943[2]) het oude probleem van de invariante ontbinding van affinoren van A. Young weer op, maar nu voor de orthogonale groep en met behulp van spingrootheden, daarmede zonder het te weten denzelfden weg volgend dien Waelsch al voor 3 afmetingen had begaan met zijn binaire vormen.

Wat is nu eigenlijk die spinruimte? In een R_n (vlakke n-dimensionale ruimte met gegeven vasten fundamentaaltensor) beschouwe men een $(n-1)$-dimensionale eenheidshyperbol. Op die hyperbol liggen voor $n = 2\nu$ *een* stelsel van $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ $(\nu-1)$-dimensionale *vlakke* uitgebreidheden en voor $n = 2\nu+1$ *twee* stelsels van elk $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ ν-dimensionale *vlakke* uitgebriedheden. Bij een orthogonale transformatie in R_n is de bol in zijn geheel invariant en al die vlakke uitgebreidheden en hun doorsnijdingen worden in elkaar getransformeerd op een wijze, die een afbeelding (representatie) is van de orthogonale transformatie in R_n. De spinruimte is nu, populair gezegd, niets anders als het stelsel van deze vlakke uitgebreidheden en hunne doorsnijdingen. Deze uitspraak, hoewel populair, is volkomen correct, al zou het dan ook nogal wat tijd vorderen om precies de verhouding tusschen spinruimte en eenheidsbol aan te

[1]) Proc. Math. Soc. London 33 (1901) 97—146; 34 (1902) 361.
[2]) Proc. Lond. Math. Soc. 49 (1943) 307—327; 50 (1945) 349—379.

geven en bijv. te bewijzen dat de dimensie N van de spinruimte altijd gelijk 2^{ν} is, dus bijv. $N = 4$ voor $n = 4$ en $N = 8$ voor $n = 6$. In R_4 zijn de vectoren der spinruimte bijv. de ∞^4 gebonden vectoren, die liggen in de ∞^3 rechte lijnen op den eenheidsbol, of wat hetzelfde is, de ∞^4 enkelvoudige bivectoren, die liggen in de ∞^3 platte vlakken op den lichtkegel in ruimte-tijd.

Intusschen is er nog een andere weg om juist voor een R_6 tot de bijbehoorende spinruimte te komen. Het was al aan F. Klein bekend dat men de rechte lijnen in de gewone ruimte kan opvatten als punten van een kwadratisch 4-dimensionaal hyperoppervlak in een projectieve vijfdimensionale ruimte (dus met 6 homogene coördinaten) of, wat op hetzelfde neerkomt, de bivectoren in de vierdimensionale affine ruimte als vectoren in een R_6 (Plücker-Klein'sche correspondentie). Veblen kwam reeds 1930 op het denkbeeld dit toe te passen op de spintheorie. De vierdimensionale affine ruimte wordt dan spinruimte en de coördinaten der R_6 kunnen desgewenscht worden opgevat als de overtallige 6 coördinaten van een vierdimensionale conforme meetkunde. Dit denkbeeld werd vanaf 1933 in Princeton [1]) en ook bij ons in Holland [2]) nader uitgewerkt en daarbij bleek duidelijk, dat de vierdimensionale spinruimte het fraaist en eenvoudigst verbonden is met een R_6, dus met een conforme ruimte-tijd-wereld, en dat zoowel de projectieve behandeling met 5 coördinaten alsook de gewoon relativistische met 4 eerst hieruit door specializatie ontstaan.

Hoe klopt dat nu echter met de dimensie van de spinruimte van een R_6, die toch naar wij zagen $N = 8$ is? In iedere spinruimte liggen altijd twee invariante vlakke uitgebreidheden met dimensie $N/2$, die geen richting gemeen hebben. Bij draaiingen in R_6 blijven deze elk voor zich invariant en bij spiegelingen worden zij eenvoudig verwisseld. Bepalen we ons nu tot draaiingen in een R_n (de spiegelingen kunnen altijd later nog achterhaald worden door bijv. één spiegeling apart te beschouwen), dan kan men voor $n = 4$ met één der uitgebreidheden van de dimensie 2 volstaan op grond van het verrassende feit dat de transformatie in de éene volkomen de transformatie in de andere bepaalt. Dit leidt tot de oorspronkelijke eenvoudige 2-dimensionale spintheorie (Pauli matrices, spinoranalyse van v. d. Waerden). Ook voor $n = 6$ geldt nu iets dergelijks, tengevolge van het optreden van een nieuwe onverwachte inva-

---

[1]) Veblen, Proc. Nat. Acad. 19 (1933) 462—474.

[2]) Schouten en Haantjes, Zeitschr. f. Phys. 81 (1933) 405—417; Ann. di Pisa 4 (1935) 175—189.

riant [1]) kan men voor draaiingen in de R_6 werkelijk met één der 4-dimensionale spinruimten uitkomen, en dat leidt dan precies tot dezelfde spinruimte die zich ook uit de Plücker-Klein'sche correspondentie laat afleiden.

Ten tweeden male was dus nu, omstreeks 1934, de conforme meetkunde op den voorgrond gekomen en wel van een geheel onverwachte zijde. Niet ten onrechte kon ik dan ook in mijn rectoraatsrede van 1939 de verwachting uitspreken dat het getal 6 eerlang in de physica een zeer belangrijke rol zou gaan spelen, te meer, omdat het aan Haantjes en mij inmiddels gelukt was een principieele moeielijkheid, die een conforme theorie in den weg scheen te staan, geheel uit den weg te ruimen.

Er is namelijk een incongruentie tusschen de 4 gewone ruimte-tijd-coördinaten en de 6 locale coördinaten in iedere locale ruimte-tijd, die ontstaan wanneer men aan die lokale ruimte-tijd, een conforme meetkunde toekent. Men zou derhalve in de groote ruimte-tijd-wereld 6 homogene v. Dantzig'sche coördinaten willen gaan gebruiken. Daarbij treedt nu een moeielijkheid op. Ligt in een gewone vlakke projectieve ruimte van 3 afmetingen een oppervlak, dan is bekend dat de twee asymptotische richtingen in elk punt vanzelf in dat oppervlak een conforme metriek vastleggen (niettegenstaande er in de ruimte *geen* metriek was) en dat de 4 homogene coördinaten in de ruimte op dat oppervlak als overtallige conforme coördinaten kunnen worden gebruikt. Omgekeerd kan men nu, uitgaande van een tweedimensionale ruimte met een conforme meetkunde, een driedimensionale vlakke projectieve ruimte construeeren die die tweedimensionale bevat èn men kan bewijzen, *dat twee op zoodanige wijze geconstrueerde ruimten niet wezenlijk verschillen*, d.w.z. dat zij op elkaar invariant en eeneenduidig kunnen worden afgebeeld. Deze afbeeldbaarheid is natuurlijk zeer belangrijk, men zou immers anders behalve de conforme meetkunde nog de een of andere ongewenschte hulpinvariant noodig hebben om de ruimte te kunnen vastleggen.

In meer afmetingen geldt precies hetzelfde *mits* men eischt dat de conforme meetkunde conformeuclidisch is [2]). Dat kunnen we echter juist niet gebruiken, de ruimte-tijd-wereld zou dan „leeg" blijven. Wij bewezen nu 1935—'36 [3]) dat, uitgaande van een alge-

---

[1]) Deze invariant zal elders worden behandeld.

[2]) D.w.z. transformeerbaar in een euclidische ruimte door middel van een conforme transformatie.

[3]) Proc. Kon. Akad. v. Wet. 38 (1935) 706—708; 39 (1936); Math. Ann. 112 (1936) 594—629; 113 (1936) 568—583.

meene n-dimensionale conforme meetkunde steeds een $(n+1)$-dimensionale ruimte met een bepaalde projectieve overbrenging kan worden geconstrueerd, die de n-dimensionale ruimte bevat, en dat verschillende aldus geconstrueerde ruimten *niet wezenlijk verschillen* mits òf n oneven is òf $n = 4$ is, maar in dit laatste geval dan ook een zekere projectieve tensor van de valentie 2 (van de orde 4 in de afgeleiden van den fundamentaaltensor) verdwijnt. Gelukkig kon ook nog worden bewezen, dat die tensor steeds nul is wanneer de ruimte-tijd-wereld conform-einsteins [1]) is, dus precies in het geval dat de physica noodig heeft. Verder kwam aan het licht dat de massa geen conforminvariant is maar wel het product van een massa met een lengte en werd er in verdere publicaties van Haantjes aangetoond dat er een verband bestaat tusschen conforme transformaties en versnelde systemen [2]).

Bij iedere theorie in 6 coördinaten treedt er natuurlijk een veralgemeening van den materietensor op, die een matrix heeft van 6 rijen en 6 kolommen. De vijfde rij en kolom waren reeds in de projectieve theorie door de electromagnetische verschijnselen ingenomen en men zou dus omstreeks 1935 hebben kunnen opmerken dat, waar zoowel de invariantie van Cunningham en Bateman als de theorie van de spinruimte kennelijk invoering van een zesden coördinaat vroegen, er vermoedelijk een nog niet ontdekt natuurverschijnsel moest bestaan dat de zesde rij en kolom zou kunnen vullen. Merkwaardigerwijze werd echter deze zoo voor de hand liggende opmerking noch door ons noch voor zoover mij bekend door Amerikaansche onderzoekers gemaakt. Ware dit wel het geval geweest, dan zou het mesonveld, dat in 1935 door Yukawa werd voorspeld omstreeks denzelfden tijd dubbel voorspeld zijn. De geschiedenis nam echter een ander verloop, de conforme theorie verzuimde het mesonveld te eischen, maar het mesonveld kwam er langs een anderen weg en eischte een conforme theorie.

Nadat Yukawa 1935 [3]) op het denkbeeld gekomen was de in de kern optredende krachten terug te voeren tot een speciaal soort veld, correspondeerende met een nieuw soort deeltjes, ontdekte Kemmer [4]) in 1938 dat, in de plausibele onderstelling dat de uitdrukking voor de energie positief definiet is, de golffunctie der

---

[1]) D.w.z. transformeerbaar in een einsteinsche ruimte door middel van een conforme transformatie.

[2]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet 43 (1940) 1288—1299, opnieuw ontdekt door E. L. Hill, Phys. Rev. 72 (1947) 143—149.

[3]) Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.

[4]) Proc. Cambr. Phil. Soc. 34 (1938) 354.

nieuwe deeltjes de valentie 2 moest hebben. Daaruit volgde dan het bestaan van vier soorten mesonvelden, het scalaire mesonveld met 5 en het vectorische mesonveld met 10 kentallen en twee velden die ontstaan door verwisseling van scalar en vector met pseudoscalar en pseudovector. Möller en Rosenfeld [1]) vonden daarop in 1940 dat de experimenten juist een zeer speciale combinatie van scalair en vectorisch veld verlangden en daarop ontdekte Möller [2]) in 1941 dat juist die speciale combinatie als het ware vanzelf voor den dag kwam als men 5 coördinaten invoerde. Het belangrijke hiervan was niet zoozeer het vinden van die combinatie, die zooals later bleek niet de eenige en misschien niet eens de beste was, maar het feit dat het door invoering van een meer omvattende fundamenteele groep (hier de projectieve) mogelijk bleek relaties tusschen verschillende velden te fixeeren. Noch belangrijker was echter de vondst van Lubanski en Rosenfeld [3]), die in 1942 konden bewijzen dat de typische relaties tusschen de matrices in de golfvergelijkingen van het mesonveld identiek zijn met de zoogenaamde structuurvergelijkingen van de groep der draaiingen in R_6, d.i. de conforme groep in 4 afmetingen.

Ten derden male kwam zich dus de conforme groep ongevraagd aanmelden. Thans kwam het echter tot een regelrechte uitnoodiging. B. Hoffmann, opmerkzaam geworden op de 5-dimensionale behandeling van het mesonveld, vatte zijn vroegere met Veblen doorgevoerde onderzoekingen over projectieve relativiteit weder op en trachtte 1947 [4]) de veldvergelijkingen af te leiden uit een variatieprincipe in 5 coördinaten. Daar de resultaten niet zeer bevredigend waren overwoog hij reeds in dat jaar de mogelijkheid van een conforme behandeling en werkte dit denkbeeld uit in twee verhandelingen in 1948 [5]). Hij gebruikt nog niet de conforme groep maar een ondergroep en zijn onderzoekingen, die hij zelf nog als exploraties betitelt zijn nog allerminst afgesloten. Dit neemt niet weg dat hem de eer toevalt als eerste het conforme character van het mesonveld te hebben doorzien en het getal 6 optredende in de golffunctie te hebben verklaard.

Ook de onderzoekingen van H. Flint zijn misschien in verband te brengen met een conforme mesontheorie, hoewel zij uit een geheel andere bron stammen. Evenals Yositaka Mimura trachtte

1) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 17 (1940).
2) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 18 (1941).
3) Physica 9 (1942) 117—134.
4) Phys. Rev. 72 (1947) 458—465.
5) Phys. Rev. 73 (1948) 30—35; 1042—1046.

hij reeds 1935—'37 [1]) de lengte van het lijnelement te vervangen door een matrix. Van 1940 [2]) af gebruikt hij 5 coördinaten. Hij gaat uit van een geunificeerde theorie en introduceert dan een mesonveld door middel van een ykfacor in de maat op dezelfde wijze als Weyl dat deed in de 4-dimensionale theorie. Zijn mesonveld staat dus in dezelfde verhouding tot gravitatie-electromagnetisme als het electromagnetische veld tot de gravitatie. Nu riekt deze variabele ijkfaktor sterk conform en men komt er dus vanzelf toe zich af te vragen of niet de invoering van 6 coördinaten zou kunnen leiden tot een belangrijke vereenvoudiging van Flint's theorie. Er is een bezwaar, Flint schijnt te werken met invariante lengten en massa's terwijl conform alleen het product van massa en lengte invariant kan zijn, maar dat kan liggen aan het totaal andere uitgangspunt, dat een vergelijking uiterst moeielijk maakt.

In het voorgaande heb ik aan de hand van een aantal voorbeelden getracht te schetsen hoe telkens weer wiskunde en physica stimuleerend op elkaar inwerken. Bezien wij deze inwerking nader en vestigen wij de aandacht speciaal op effecten van groot formaat, dan zien wij schematisch de folgende figuur [3]). Op wiskundig gebied is er eerst een tijdperk waarin een groote hoeveelheid materiaal wordt bijeengebracht en tot een geordend geheel verwerkt. Daarbij wordt niet gedacht aan practische toepassing maar zucht naar weten en naar aesthetische bevrediging schijnt de eenige drijfveer te zijn. Kenmerkend voor deze periode is ook een groot enthousiasme bij de beoefenaars. Na deze periode, die ik met den naam van „mathematische voorbereiding" wil aanduiden, dreigt een zekere zelfvoldaanheid tot stilstand te voeren. Intusschen hebben zich in de physica allerlei moeielijkheden opgehoopt [4]), die langzamerhand onhoudbaar worden. Dan komt de inslag, een mathematisch voldoende georiënteerd physicus maakt gebruik van het gedurende de mathematische voorbereiding opgehoopte en geordende materiaal en ontketent in de physica een verlossende omwenteling. Achteraf bezien lijkt dan alles erg eenvoudig en verbaast men er zich over dat de physica den sleutel niet al lang zelf had gevonden. De physica gaat nu haar materiaal opnieuw ordenen en nieuw materiaal vergaren. Daarbij wordt niet gedacht aan eenig

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441.

[2]) Phil. Mag. 29 (1940) 330.

[3]) Met „wiskunde" en „physica" duid ik voor het gemak die bepaalde onderdeelen dier wetenschappen aan, die ter sprake komen.

[4]) Men denke bijv. eens aan mechanische aethermodellen e.d.

nut voor de wiskunde, eenige drijfveer schijnt te zijn zucht tot ordelijke aansluiting aan het experiment en de periode, die we „physische voorbereiding" zullen noemen, kenmerkt zich weer door groot enthousiasme. Het proces wordt met aandacht gevolgd door eenige physisch voldoend georiënteerde mathematici en een van hen vindt in al die nieuwe denkbeelden plotseling iets dat voor de wiskunde een geheel nieuwe inslag beteekent. De mathematische molen komt weer op gang en draait lustig verder, waarbij men achteraf weer verbaasd is een inductie van de physica noodig gehad te hebben. Schematisch zien wij dus dat een mathematische voorbereiding door een inslag voert tot een physische nawerking, die na consolidatie physische voorbereiding wordt voor een inslag met mathematische nawerking, enz. Natuurlijk beweer ik niet dat de volgens dit schema verloopende wisselwerking tusschen wiskunde en physica de eenige is. We hebben immers ook uitdrukkelijk alleen naar groote effecten gekeken. Het andere uiterste, de voortdurende dagelijkse wisselwerking, de gewone mathematisch-physische „kleinhandel", bestaat even goed en er zijn tal van tusschenvormen.

Maar bezien wij enkele voorbeelden. De consolidatie van de meetkunde in de Klein'sche school vormde de mathematische voorbereiding voor den relativistischen inslag in de physica; verdere ordening en consolidatie tot algemeene relativiteitstheorie was de physische voorbereiding voor den inslag van het pseudoparallelisme in de wiskunde. Intusschen was er in de wiskunde een andere periode van voorbereiding aan den gang, waarin eenerzijds representatietheorie van eindige en oneindige groepen, anderzijds theorie van eigenwaarden en eigenfuncties werden ontwikkeld, die juist materiaal konden leveren dat voor den quantenmechanischen inslag in de physica onontbeerlijk was. De zich consolideerende quantenmechanica gaf weer den stoot aan allerlei zuiver mathematische onderzoekingen, te midden waarvan wij ons thans bevinden en die nog moeielijk te overzien zijn en inmiddels had de wiskunde er via pseudoparallelisme en objecttheorie al weer voor gezorgd dat nieuwe vormen van meetkunde als algemeene projectieve en conforme gereedstonden toen de physica die zou blijken noodig te hebben. Telkens dus een werken op eigen gebied, *bewust* met op dit eigen gebied gerichte doelstellingen doch *onbewust* vóórwerkend voor het andere gebied. De hier gesignaleerde figuur is zeer in het oog vallend en dan ook niet onopgemerkt gebleven. Verschillende schrijvers hebben op het bestaan van een dergelijk eigenaardig verband genezen. Reeds in 1914 schreef Voss [1]) „Hätten

[1]) Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart, Berlin 1914.

die Griechen, unbekümmert um eine praktische Anwendung, nicht die Theorie der Kegelschnitte entwickelt, so würde Kepler wohl kaum das Geheimniss der Planetenbewegung enträtselt haben" en hij geeft daar ter plaatse nog een aantal andere treffende voorbeelden en een desbetreffend citaat van v. Humboldt. F. Klein wijst er in zijn bekende „Vorlesungen über die Entwiklung der Mathematik im 19-ten Jahrhundert" met nadruk op [1]) „dass die Physiker die mathematischen Hilfsmittel, dessen sie sich bei der Durchführung ihrer modernen Spekulationen bedienen, in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fertig ausgebildet vorfinden" en spreekt zijn meening over dit feit wel zeer duidelijk uit waar hij op een andere plaats zegt [2]): „Hier möchte ich nun auf den eigentümlichen Zusammenhang der reinen und angewandten Wissenschaft hinweisen, den ich nach Leibnizschem Vorbild als ‚prästabilierte Harmonie' bezeichne, und der bewirkt, dass die Theorie sehr häufig gerade die Gebilde schafft und ausbaut aus rein wissenschaftlichem Trieb, welche die Anwendung bald darauf zur Bewältigung der ihr von aussen zuströmenden Problemen benötigt." Ook Weyl [3]) spreekt 1928 van de „unverkennbare geheimnissvolle Parallelität" tusschen moderne wiskunde en physica en Slater [4]) wijst er 1946 op dat telkens weer een vooruitgang in de physica de meest waardevolle ontwikkelingen in de wiskunde stimuleert. Dit zijn zoo enkele plaatsen, die mij toevallig in de herinnering bleven. Historici kennen er stellig veel meer. Het belangrijke punt is, dat hier wordt erkend of althans vermoed dat er tusschen twee gebieden van menschelijke werkzaamheid [5]) een soort van, al of niet collectieve, onbewuste doelgerichte werking bestaat van hetzelfde soort als men die aantreft bij organismen of groepen van organismen. Dat zou dan met zich brengen dat in het beschrijvingsschema naast causale ketens ook finale ketens zouden moeten worden opgenomen. Uitdrukkelijk moet er echter op worden gewezen, eenerzijds, dat men tegenwoordig in het toelaten van finale ketens niets onwetenschappelijks meer ziet, anderzijds dat het gebruik van zulke ketens niets te maken heeft met de populaire teleologie die de natuur als geheel volgens het een of andere wijze plan wenscht te zien ingericht. Van volkomen onverdachte positivistische zijde

---

[1]) L.c. II 135.

[2]) L.c. I 150.

[3]) Gruppentheorie und Quantenmedranik, voorwoord eerste druk.

[4]) Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 392—400.

[5]) Wat hier voor twee speciale gebieden is geformuleerd zou natuurlijk voor alle gebieden moeten gelden.

wordt dit duidelijk erkend, bijv. waar Jordan zegt dat de finale wijze van beschouwing een onontbeerlijk element der biologische begripsvorming is [1]) en waar hij verklaart dat een dusdanig in gebruik nemen van finale beschrijvingselementen in geen enkel opzicht de deur opent voor enige vorm van mystieke of metaphysische „natuurverklaring". Dit laatste is trouwens vanzelfsprekend daar het een positivist nooit te doen is om een natuurverklaring (die hij als schijnprobleem beschouwt) maar alleen om begripsverheldering door doelmatig geordende natuurbeschrijving. Ook behoeft er allerminst angst te bestaan dat finale beschouwingswijzen zouden kunnen voeren tot bespiegelingen over een „laatste doel". De quantenmechanica heeft toch geleerd dat het wel zin heeft van afzonderlijke causale ketens gebruik te maken, die echter principieel nooit tot één causaal geheel kunnen worden samengesmeed, en waar men dus wel bezwaarlijk kan onderstellen dat het met eventueele finale ketens anders gesteld zou zijn, blijken het „laatste doel" te zamen met de „eerste oorzaak" ficties te zijn, die slechts door ongeoorloofde extrapolaties konden ontstaan.

In de eerste plaats moet nu de vraag worden beantwoord of het bestaan van finale ketens in het schema der wisselwerking tusschen wiskunde en physica aan de ervaring kan worden getoetst. Aan de hand van een bepaalde wel geconstateerde voorbereidingsperiode bijv. in de wiskunde zou men moeten gaan voorspellen dat juist de hier opgehoopte stof weldra in de physica noodig zou zijn. Het werkelijke verloop geeft dan de toetsing. Ook kan men in het verleden teruggaan en vindt dan toetsing in het bekende historische verloop. Zulk een onderzoek is zeker mogelijk, maar het kan alleen worden uitgevoerd door werkelijke historici, die niet alleen groote bekwaamheid moeten bezitten, maar bovendien zoo vertrouwd moeten zijn met vele uiteenloopende gebieden van wiskunde en physica, dat zij met die geheele stof meeleven en alle verbanden als het ware voelen. Er is nog een andere weg, die veel minder goed is, maar op een betrekkelijk gemakkelijke manier voert tot een zij het dan ook minder betrouwbaar resultaat. Men kieze een onderwerp uit de physica en ontwerpe aan de hand van uitspraken van goede physici (niet van mathematici!) een prognose van de mathematische middelen, die vermoedelijk op dat gebied noodig zullen worden. Vervolgens dient te worden nagegaan of er nu inderdaad groepen van wiskundigen zijn, die zich uit zuiver theoretisch interesse met élan op deze onderwerpen hebben geworpen en of deze

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 287, 292.

groepen al tot een zekere consolidatie gekomen zijn. Vooral aan dat élan hecht ik veel waarde. Overal waar in de natuur onbewust doelgerichte handelingen plaats hebben, worden deze, zooals bekend is, met een onmiskenbaar élan uitgevoerd. Klopt een en ander niet, dan spreekt dit tegen de organische opvatting, klopt het echter wel dan moet men natuurlijk het werkelijke verloop nog afwachten maar er is althans een merkwaardig samentreffen geconstateerd.

Als voorbeeld kies ik hier de kernphysica. Vele physici zijn het er duidelijk over eens dat in het kleine onze gewone ruimte-tijd geometrie niet meer opgaat. Bohr [1]) spreekt 1926 van een „tiefgehendes Versagen des raumzeitlichen Bildes mittels welches man bisher die Naturerscheinungen zu beschreiben versuchte"; Pauli [2]) zegt 1933 dat niet alleen het veldbegrip maar ook het ruimte-tijd begrip in het kleine een principieele verandering moet ondergaan; Dirac [3]) verklaart 1928 dat de verdere vooruitgang ligt in de richting van het invariant maken van de vergelijkingen bij steeds meer omvattende transformatiegroepen (dat wil dus zeggen bij andere meer algemeene meetkunden) en nog duidelijker in 1938 [4]) dat in het binnenste van het electron de elementaire eigenschappen van ruimte en tijd hun geldigheid verliezen; Flint [5]) en Yositaka Mimura [6]) komen 1935 met een eigenaardig lijnelement dat geen lengte is maar een matrix en ook Hartland en Snijder gaan 1947 in die richting; Born [7]) verlaat 1938 de metriek voor ruimte en tijd in het kleine en voert daarvoor in de plaats een metriek voor impuls-energie in, hetgeen eigenlijk neerkomt op de invoering van een oneindig dimensionale ruimte en in die richting gaan ook March [8]) en v. Dantzig [9]) met hun verzamelingsfuncties, maar daarmede ben ik dan al bij de mathematici terecht gekomen, die ik in dit verband eigenlijk niet mee wil laten spreken. Inderdaad een overstelpende hoeveelheid aanwijzingen, die alle in de richting gaan

---

[1]) Naturw. 14 (1920) 1.

[2]) Handb. der Physik XXIV 1, Quantentheorie, 2de druk 272.

[3]) Quantummechanics, 1e druk, voorrede.

[4]) Proc. Roy. Soc. 167 (1938) 160.

[5]) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441; 159 (1937) 45—56.

[6]) Journ. of Sc. Hirosima Univ. 5 (1935).

[7]) Proc. Roy. Soc. 165 (1938) 291-303; 166 (1938) 552—557.

[8]) Die Naturwisschenschaften 26 (1938) 649—56.

[9]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. 37 (1934) 521—26; 526—31; 644—52; 825—36; 39 (1936) 126—31; 785—94; Proc. Cambr. Phil. Soc. 30 (1934) 421—27. Comptes Rendus Oslo 1936 II 225—27; Erkenntniss (1938) 142—46. Inaugureele rede Delft 1938. Zie verder voor overzicht Schouten, rectoraatsrede Delft 1939.

van een verruimde metriek, erger nog een ametrische meetkunde of nog erger een verzamelingsleer of topologie in plaats van een meetkunde. Vergelijken we dit nu nog met de ontwikkeling van de theorie van het mesonveld. Spintheorie gaf eenerzijds aanleiding tot de ontwikkeling van de spin voor meer dimensies, anderzijds tot den opbouw van een conforme theorie. De conforme theorie past in het schema van de zooeven geëischte verruimde metriek. Voor de hoogere mesonvelden moet men wel verwachten dat zij de hoogere spin zullen opeischen, welnu de theorie hiervan ligt klaar en er werd uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes aan gewerkt (Cartan, Weyl, Brauer). Verder zullen die hoogere mesonvelden allicht niet tevreden zijn met de conforme meetkunde en een uitbreiding eischen waarvoor dan als naastliggende zeker de conforme Finslersche meetkunde het eerst in aanmerking komt. Inderdaad is nu aan de Finsler'sche meetkunde door tal van onderzoekers uit zuiver theoretisch interesse met élan en succes gewerkt en ligt er een groote hoeveelheid materiaal klaar, voor zoover mij bekend nog niet met de fine touche der conformiteit, die echter vermoedelijk gemakkelijk aan te brengen is. Gezien de vergaande eischen, die wij zooeven hebben hooren stellen is het niet aan te nemen dat deze verruimingen iets anders zijn dan overgangsstadia en dat het tenslotte via oneindig dimensionale ruimten en verzamelingsfuncties naar de topologie toegaat. Inderdaad, waar principieel niet meer gemeten kan worden, behoudt alleen nog de topologie het woord. Dat de topologie uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes bewerkt is en tot een zekere afsluiting is gekomen zal wel niemand ontkennen en het was mede het enthousiasme dat ik altijd bij topologen aantrof en dat ik nu weer op den laatsten topologendag in Amsterdam mee mocht beleven, dat bij mij de gedachte nog vaster vorm deed aannemen, dat er hier heftige onbewuste natuurkrachten bezig waren, die zeker iets tot stand moesten brengen dat ook in grooter verband zijn waarde zou toonen.

De topologie is een der laatste woorden van de wiskunde. Maar er is een nog later woord, het grondslagenonderzoek. Dat dat onderzoek niet op practische toepassingen gericht is, is duidelijk, en dat het met élan en met succes wordt uitgevoerd behoeft in Amsterdam zeker niet te worden bewezen. Merkwaardig is het nu, dat Reichenbach [1]) in zijn laatste boek over de philosophische grondslagen der quantenmechanica zeer duidelijk heeft gewezen

---

[1]) Philosophical Foundations of Quantum Mechanics, University of California Press 1946.

op de beteekenis van een driewaardige (dat is dus een niet klassieke) logica voor de quantenmechanica. Anderzijds is door Jordan [1]) uitgesproken, dat de ordening der levenlooze verschijnselen, die wij tegenwoordig quantenmechanica noemen, niets anders is als een limietgeval van een ordening, die ook de levensverschijnselen mee zou moeten omvatten. Hij zegt zeer duidelijk dat „die angemessene Auffassung die sein dürfte, dass die anorganischen Phänomene und Gesetzmässigkeiten ein *vereinfachter Grenzfall* der organischen sind." Waar nu reeds de quantenmechanica in haar huidig stadium een driewaardige logica verlangt is de onderstelling niet gewaagd, dat die toekomstige „organica" ook meerwaardige logica's zou gaan eischen en misschien zelfs wel die oneindig waardige, die door Heyting in verband gebracht is met het formeele schema der intuitionistische wiskunde. Ware dit zoo dan zou er ook aan het grondslagenonderzoek duidelijk een onbewust doelgerichte kant zijn.

Concludeerende mogen wij wel zeggen dat de hier zeer vluchtig geschetste toetsing van de mogelijkheid van finale ketens aan het voorbeeld der kernphysica werkelijk geen slecht, ja eigenlijk een verrassend gunstig resultaat heeft opgeleverd. En dat brengt ons dan direct tot de vraag wat het nut van de nieuwe causaal-finale beschouwingswijze zou kunnen zijn. Zeker *niet* dat wij mathematici de ontdekking van een onbewuste doelgerichtheid noodig zouden hebben om daaraan het goed recht onzer abstracte onderzoekingen te ontleenen. Dat goede recht hebben wij ook zonder dit alles en hier geldt nog steeds het trotsche woord van Jacobi „que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain". Maar van een algemeen standpunt is het toch kennelijk wel van het grootste belang dat alle verbanden, causaal en finaal, tusschen alle verschillende gebieden van menschelijke werkzaamheid zooveel mogelijk worden gekend en schematisch wel geordend. Ook is er nog een zekere practische kant, er mag namelijk wel eens een lans gebroken worden voor het goed recht en het groote nut van het bij elkaar over de heining kijken, en wel grondig kijken, niet alleen met behulp van popularizeeringen. Indien dit eens meer geregeld en meer systematisch dan tot nu zou kunnen gebeuren, dan zou dit het proces van wederzijdsche inductie in niet onbelangrijke mate kunnen versnellen. Daarbij denk ik natuurlijk niet aan wiskunde en physica alleen. Het besef dat er een aardige kans bestaat dat er aan de andere zijde van de heining iets bruikbaar ligt te wachten, zou hier een stimulans kunnen zijn.

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 301.

Mijne Heeren Bestuurderen van Stad en Universiteit,

Met mijn dank voor het in mij gestelde vertrouwen geeft ik U gaarne de verzekering dat ik mijn functie hier met vreugde aanvaard en dat ik in de mij nog resteerende jaren alles zal doen om mijn onderwijs zoo vruchtbaar mogelijk te doen zijn en mijn geboortestad Amsterdam eer aan te doen.

Dames en Heeren Professoren der Amsterdamsche Universiteit,

Wanneer ik zeg dat ik mij verheug in Uwen kring te worden opgenomen, dan zult U uit wat ik over samenwerking en wederzijdsche inductie heb gezegd naar ik hoop opmaken dat deze verheugenis allerminst platonisch behoeft te blijven en dat ik steeds gaarne tot samenspreking en samenwerking bereid zal worden gevonden.

Mijne Heeren Mathematische en Physische Collega's in de Amsterdamsche Faculteit,

Wanneer ik hier met het gewone verhaaltje zou komen dat ik met een zekeren schroom in Uw midden plaats neem dan zoudt U dat toch niet gelooven. U zult mij echter wel gelooven wanneer ik mijn groote vreugde over mijn benoeming hier uitspreek. De meesten van U kennen mij al vele jaren en zeer goed, zoodat U geen kat in den zak koopt. Uit den aard der zaak zal ik mij zoo min mogelijk bemoeien met vragen van bestuur en beleid, die ik in Uwe handen veilig weet, en mijn krachten geheel wijden aan wetenschappelijke samenwerking. Gaarne zou ik ieder van U iets persoonlijks zeggen maar dat zou te lang worden en ik maak dus slechts twee uitzonderingen.

Waarde Brouwer,

Dat gij door ernstige gezondheidsredenen verhinderd zijt hier tegenwoordig te zijn, doet mij zeer leed. Moge Uw kuur in het buitenland U volledige genezing brengen zoodat gij spoedig weer geheel hersteld in ons midden kunt terugkeeren.

Waarde Clay,

Oude vriend, onze kennismaking gaat terug tot de collegebanken en wij hebben in al die jaren heel wat meegemaakt en veel gemeenschappelijke interessen gehad. Nooit had ik kunnen denken dat het leven ons nog eens zou samenvoeren in de rollen van Voorzitter der Faculteit en jong benoemd collega. Daar is iets aardigs in, dat wij beiden weten te apprecieeren.

Mijne Heeren Collega's uit Delft,

Ik apprecieer het buitengewoon hier gezichten te zien die mij aan mijn oude veste herinneren. U is bekend dat ik in Delft altijd prettig heb gewerkt en dat alleen een zeer bijzondere samenloop van omstandigheden mijn vertrek van daar tengevolge had. Wees er derhalve van overtuigd dat de goede verstandhouding tusschen het Mathematisch Instituut te Delft en de Mathematische Instellingen te Amsterdam steeds mijn volle belangstelling zal hebben.

Hier aanwezige Vrienden uit Epe,

Toen ik tijdens den oorlog toevallig naar Epe verslagen werd, had ik niet gedacht dat ik daar zoo spoedig zou assimileeren. In het bijzonder in de Rotary Club Epe, mede hier vertegenwoordigd, mocht ik een vriendenkring vinden, die door mij zeer op prijs wordt gesteld. Uw aller aanwezigheid hier, getuige van Uw belangstelling voor mijn persoon en werk, stemt mij tot dankbaarheid.

Dames en Heeren Studenten,

Ten slotte kom ik hier in Amsterdam voor *U*. Er zullen er allicht onder U zijn, die mijn rede van vandaag wat te fantastisch, te weinig exakt en te emotioneel hebben gevonden. Hen kan ik de verzekering geven dat het in de collegezaal anders zal zijn en dat daar weer het strenge mathematische betoog zal weerklinken. Gelukkig kunnen ook wij geometers ons tegenwoordig permitteeren streng te zijn en zoogenaamd „intuitieve" bewijzen, die in werkelijkheid geen bewijzen zijn maar illustraties, ook werkelijk alleen als illustratie te gebruiken. Alleen op één punt zal het emotioneele nog doorbreken en dat is waar ik U er op zal wijzen dat de mathematicus een scheppend kunstenaar is en zijn doel in de eerste plaats het ontwerpen van gedachteconstructies van onvergankelijke schoonheid. Moge het mij gegeven zijn nog velen van U te doordringen van dat enthousiasme voor de schoonheid der wiskunde dat mij reeds vervulde toen ik nog een jongmaatje was en dat nog niet in het minst is verflauwd.

Ik dank U voor Uw aandacht.

M. C. ESCHER
van Heemstralaan 32
Baarn-Holland
Telef. 2920

Baarn, 9-IX-1954.

De Heer Prof.Dr.Ir.
J.A.Schouten,
Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.

Zeer Geachte Professor Schouten,

Hartelijk dank voor Uw brief van 7 Sept. met de bijlagen, die Mevrouw Schouten mij gisteren overhandigde.

De heer Kortenoeven bood aan om de rest van het geschrift over de vlakverdeling, met de nog ontbrekende afbeeldingen, voor mij te laten reproduceren, hetgeen ik zeer waardeer en graag aanvaard, want het kan zijn dat er systemen bij zijn die ik niet ken. Ik zou U graag eens mijn eigen "theorie" over de vlakverdeling tonen, die ik opstelde in een schrift waarvan één bladzijde op mijn tentoonstelling in het Stedelijk Museum zichtbaar is. Bij de samenstelling daarvan heb ik mij min of meer gebaseerd op artikelen uit het Zeitschrift für Kristallographie, met name van Prof. G.Pólya, Zürich en F. Haag, Stuttgart. Alle wetenschappelijke uiteenzettingen die mij tot nu toe onder ogen kwamen over dit onderwerp, ook de tekeningen die ik gisteren door Uw bemiddeling ontving, hebben echter voor mij het nadeel, dat er geen aandacht geschonken wordt aan het minimum aantal contrasterende tinten of kleuren, waarin de zich herhalende congruente, door een gesloten contour begrensde figuren zichtbaar gemaakt kunnen worden. Ik vraag mij af, of in de wetenschappelijke literatuur daaraan wel ooit aandacht geschonken is; voor mij, als zwart-wit man, is deze kwestie van groot belang en ik heb er dan ook zorg aan besteed in mijn eigen theorie.

Verder ben ik zeer verheugd over Uw aanbod om een houten model, aangaande het omslaan van perspectief, voor mij te laten namaken. Ik vermoed dat zo'n model mijn voorstellingsvermogen ten goede zal komen en ik ben er dus erg benieuwd naar. Misschien wordt het een prikkel tot voorzetting van mijn reeks perspectief verbeeldingen.

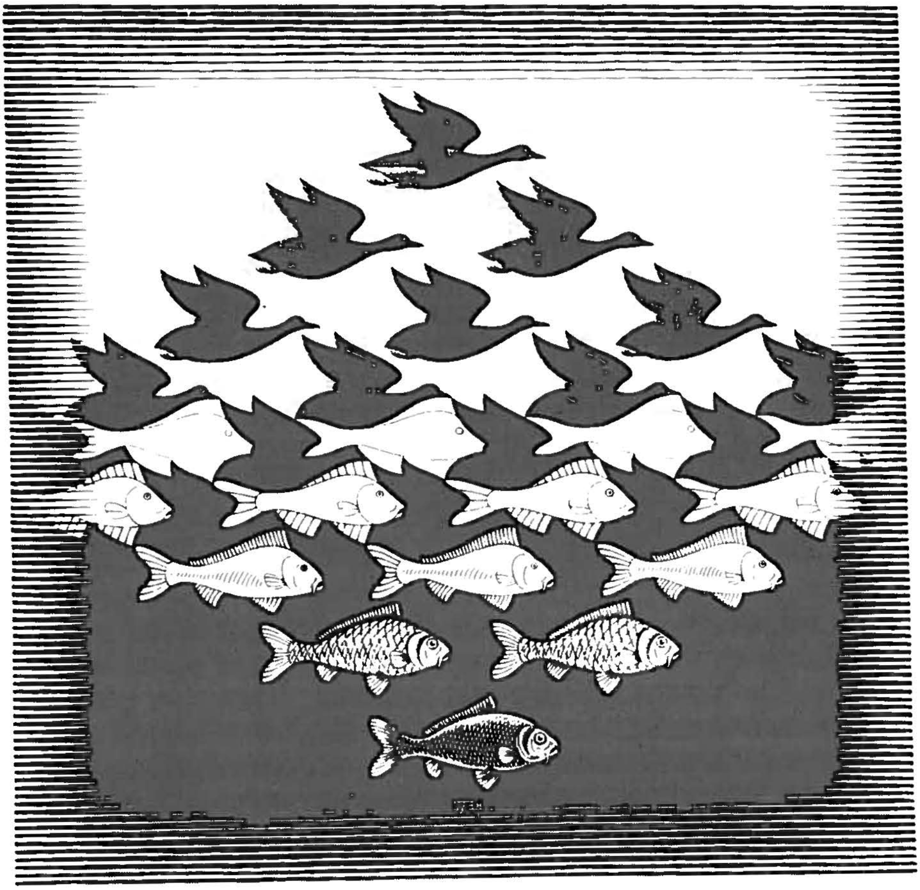
Zou het mogelijk zijn om eens rustig met U van gedachten te mogen wisselen omtrent deze zaken? Ik wil U graag eens komen opzoeken, op een tijd en plaats die U schikken; op het Mathematisch Centrum misschien, of bij U thuis. Vanaf begin tot einde Oct. a.s. ga ik met vacantie buitenslands.

Mevrouw Loonstra zeide mij dat men op het M.Centrum een of andere verbeelding van mijn hand zou willen ophangen. Ik ben graag bereid een van mijn grafische prenten voor dit doel cadeau te doen en laat de keuze geheel aan U over. Misschien wilt U , op mijn tentoonstelling, er een uitzoeken die U geschikt voorkomt uit een wiskundig standpunt. Wat mij betreft: liever een houtsnede dan een litho, omdat de oplagen van de laatste soort gelimiteerd zijn en ik hier en daar al moet woekeren met mijn beschikbare voorraad afdrukken.

Met vriendelijke groeten, ook aan Mevrouw,

M.C. Escher

Brief van M.C. Escher aan Schouten met het aanbod voor het Mathematisch Centrum een grafische prent uit te kiezen.



De door Schouten uitgekozen prent van Escher hangt in de directiekamer van het CWI.

M. C. ESCHER
van Heemstralaan 32
Baarn-Holland
Telef. 2926

Baarn [illegible]-54

De heer Prof. Dr. J. A. Schouten
Mathematisch Centrum
2e Boerhaavestr. 49
Amsterdam O.

Zeer geachte Professor Schouten,

Bijgaand de prent die ik gisteren uitzocht, als geschenkje van het Math. Centrum.

Ik was [illegible] [illegible] [illegible] met het model van de trap, [illegible] mij [illegible] maken. Daar groeit vast een nieuwe prent uit in de toekomst!

Met vriendelijke groeten en de meeste hoogachting

M. C. Escher

Brief van M.C. Escher behorend bij de door hem aangeboden prent.

BIBLIOGRAFIE

In onderstaande lijst zijn de publikaties van J.A. Schouten jaarsgewijs genummerd, in beginsel in volgorde van de datum van (eerste) verschijnen. Artikelen, die onder gelijkluidende titel in verscheidende afleveringen zijn uitgekomen, zijn echter onder één nummer bijeengenomen, ook als een deel van deze artikelen in een later jaar is gepubliceerd. Als er heruitgaven of vertalingen zijn verschenen, staat dit achter de oorspronkelijke publikatie aangegeven [tussen rechte haken] en niet bij het jaar van verschijnen. Nadere toelichtingen staan eveneens tussen rechte haken vermeld.

[1908.1] *Stroomverdeeling en weerstand van een kooianker* (met K.H. HAGA). De Ingenieur **23**, 390-391.

[1908.2] *Stromverteilung und Widerstand des Käfigankers* (met K.H. HAGA). Elektrotech. Z. **29**, 669-670.

[1909.1] *Diagram voor den spanningsafval in een transformator. I-III.* De Ingenieur **24**, 888-889; **25** (1910), 97-99, 166.

[1910.1] *Over den spanningsafval bij meerphasige synchronemachines.* De Ingenieur **25**, 26-36. [Voordracht]

[1910.2] *Ein Einfaches Diagramm des Spannungsabfalles eines Transformators.* Elektrotech. Z. **31**, 37, 229.

[1910.3] *Over componenten.* De Ingenieur **25**, 282-285.

[1910.4] *Vereenvoudigde ijk van draaistroommeters. I,II.* (met A. VAN DEN PAUVERT). De Ingenieur **25**, 384, 612-614.

[1910.5] *De spanningsregulatie van wisselstroommachines. I,II.* De Ingenieur **25**, 449, 530-531.

[1910.6] *Über den Spannungsabfall mehrphasiger synchroner Maschinen.* Elektrotech. Z. **31**, 877-881, 1174-1175.

[1911.1] *Über die Gegen- und Querwindungen eines Drehstromgenerators.* Elektrotech. Z. **32**, 935-936.

[1911.2] *Beiträge zur Theorie der Tarifbilding. I-III.* Elektrotech. Z. **32**, 1253-1256, 1303-1305; **33** (1912), 100, 848-849, 1067-1068, 1225-1226.

[1912.1] *Bijdragen tot de theorie der tariefvorming. I, II.* De Ingenieur **27**, 69-76, 713-715.

[1912.2] *Een geval van overspanning door resonnantie.* De Ingenieur **27**, 586-588. [Voordracht]

[1913.1] *Ein Elektrizitätsgezetz in Holland.* Elektrotech. Z. **34**, 474.

[1913.2] *Overspanning door resonnantie. I-III.* De Ingenieur **28**, 656-658, 884-887; **29** (1914), 141-143.

[1913.3] *Elektrizitätsversorgung in den Niederlanden und neue Pläne.* Elektrotech. Z. **34**, 917-918.

[1913.4] Boekbespreking: J. ZENNECK, *Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie*, 2. Auflage. Elektrotech. Z. **34**, 754-755.

[1913.5] *Beiträge zur Theorie der Tarifbildung*. Elektrotech. Z. **34**, 1113-1114.

[1913.6] *Over het imaginaire der wiskunde in verband met de kategorieënleer*. Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912/1913, 105-128. [Voordracht]

[1914.1] *Bijdragen tot de theorie der tariefvorming. III*. De Ingenieur **29**, 29-31.

[1914.2] *Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis*. Teubner, Leipzig, viii+266 p. [Handelsuitgave van proefschrift met inleiding van F. KLEIN]

[1914.3] *Over het wezen en de practische beteekenis der directe analyses*. Waltman, Delft, 32 p. [Intreerede TH Delft]

[1914.4] *Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme*. Math. Ann. **76**, 1-66. *Zusätze:* ibid. **77** (1916), 307; **78** (1917), 218-220.

[1915.1] *Über die Zahlensysteme geometrischer Grössen bis zur beliebigen Ordnung*. Rend. Circ. Mat. Palermo **39**, 385-394.

[1915.2] Boekbespreking: P.C.E. MEERUM TERWOGT, *Meetkunde en Redeleer*. Tijdschr. voor Wijsbegeerte **9**, 244-245.

[1916.1] *Über das Verhältnis der Vektor- und Affinoranalysis zur Binäranalyse*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **24**, 382-389.

[1916.2] *Über die Dualität in den Formeln der Arithmetik und die harmonische Addition*. Nieuw Arch. Wisk. (2) **12**, 1-18.

[1916.3] *Eenige toepassingen der vectoranalyse. Vectoranalytische behandeling der veldentheorie.* (naar colleges en aantekeningen bewerkt door W.TH. BÄHLER). Technisch Studenten-Tijdschrift **6**, 90-93, 108-112, 125-131, 151-157, 161-167, 182-185, 201-207, 265-269.

[1916.4] *Toepassing der veldentheorie op een randwaardeprobleem*. Technisch Studenten-Tijdschrift **6**, 269-272. [De overdrukken van [1916.3] en [1916.4] zijn tezamen uitgegeven als boek, Waltman, Delft, 40 p.]

[1916.5] *Über eine neue Theorie der Systeme direkter Rechnung und ihre Bedeutung für die mathematische Physik*. Arch. Math. Phys. (3) **25**, 243-260. *Berichtigung:* ibid., 328.

[1917.1] *Over de invoering van ideale elementen*. Handelingen 16e Nederl. Natuur- en Geneesk. Congres, 's Gravenhage, 149-160.

[1917.2] *Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen*. Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **26**, 566-580. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **21**, 327-341.]

[1918.1] *Vraagstukken vector-analyse*. Waltman, Delft, i+36 p. [Handleiding TH Delft. 2e druk, 1920]

[1918.2] *Meetkunde en moderne algebra.* Wisk. Tijdschr. **14**, 270-274; **15**, 19-32. [Voordracht]

[1918.3] *Over het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewegende assenstelsel en de omvattende euklidische ruimte met het geringste aantal afmetingen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **27**, 16-22. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **21**, 607-613.]

[1918.4] *Over het ontstaan eener praecessiebeweging tengevolge van het niet euklidisch zijn der ruimte in de nabijheid van de zon* (met addendum van W. de Sitter). Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **27**, 214-220. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **21**, 533-539.]

[1918.5] *Over het verband tusschen meetkunde en mechanica bij statische problemen* (met D.J. Struik). Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **27**, 801-809. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **21**, 1176-1183.]

[1918.6] *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.* Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam Afd. Natuurk. Sect. I. **12**, no. 6, 1-95.

[1919.1] *Over reeksontwikkelingen van ko- en kontravariante grootheden van hoogeren graad bij de lineaire homogene groep.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **27**, 1277-1292. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **22**, 251-266.]

[1919.2] *Over reeksontwikkelingen van algebraische vormen met verschillende rijen van variabelen van verschillenden graad.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **27**, 1481-1495. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **22**, 268-282.]

[1919.3] *Over n-voudig orthogonale stelsels van $n-1$-dimensionale uitgebreidheden in een algemeene uitgebreidheid van n afmetingen. I, II.* (met D.J. Struik). Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **28**, 201-212, 452-463. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **22**, 594-605, 684-695.]

[1920.1] *Die Zahlensysteme der geometrischen Grössen. I, II.* Nieuw. Arch. Wisk. (2) **13**, 141-156, 249-266.

[1920.2] *De theorie van Einstein.* Algemeen Handelsblad, 8 januari.

[1920.3] *Ruimte en tijd als voorstelling en als begrip.* Algemeen Handelsblad, 2 maart.

[1920.4] *Over de ontwikkeling der begrippen ruimte en tijd in verband met het relativiteitsbeginsel.* Nijgh & Van Ditmar, Rotterdam, 44 p. [2e druk, 1923; Duitse vertaling: Teubner, Leipzig, 1924]

[1920.5] Boekbespreking: J. Clay, *De dialectiek en de leer van de tegenstrijdigheid bij Hegel en Bolland.*
J. Hessing, *De bezwaren van de zijde des verstands tegen de*

redelijkheid van het begrip zooals die nu door Dr. J. Clay in zijne veroordeeling van de denkwijze van Hegel en Bolland geuit zijn besproken. Tijdschr. voor Wijsbegeerte **14**, 224-226.

[1920.6] *Die relative und absolute Bewegung bei Huygens.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **29**, 136-144.

[1921.1] *Over de geodetische praecessie.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **29**, 1150-1154. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **23**, 1108-1112.]

[1921.2] *Vectoranalyse* (naar colleges en aanteekeningen bewerkt door J.H.M. MANDERS). Nijgh & Van Ditmar, Rotterdam, xii + 224 p.

[1921.3] *Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung.* Math. Z. **11**, 58-88.

[1921.4] *Über das Theorem von Malus-Dupin und einige verwandte Theoreme in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Maszbestimmung* (met D.J. STRUIK). Rend. Circ. Mat. Palermo **45**, 313-331. *Berichtigung:* ibid., **46** (1922), 346.

[1921.5] *Absolute en relatieve beweging bij Huygens.* Christiaan Huygens **1**, 94-95.

[1921.6] *On curvature and invariants of deformation of a* V_m* *in* V_n (met D.J. STRUIK). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **24**, 146-161.

[1921.7] *On some properties of general manifolds relating to Eistein's theory of gravitation* (met D.J. STRUIK). Amer. J. Math. **43**, 213-216.

[1921.8] *Über die verschiedenen Arten der Übertragung, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können, und ihre Beziehung zur Weylschen Relativitätstheorie.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **30**, 2. Abt., 76. [Samenvatting congresvoordracht]

[1922.1] *Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können.* Math. Z. **13**, 56-81. *Nachtrag:* ibid. **15, 168.**

[1922.2] *Über Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger kwadratischer Massbestimmung eingebettet ist* (met D.J. STRUIK). Rend. Circ. Mat. Palermo **46**, 165-184.

[1922.3] *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. I-IV.* (met D.J. STRUIK). Christiaan Huygens **1**, 333-353; **2**, 1-24, 155-171, 291-306. [De overdrukken zijn gebundeld uitgegeven als boek, Noordhoff, Groningen, 1924, 77 p.]

[1922.4] Boekbespreking: V. ESBACH, *Vectoranalyse.* Nieuw Arch. Wisk. (2) **14**, 72-74.

[1922.5] *Bezeichnungen für Vektorgrößen.* Z. Angew. Math. Mech. **2**, 227-231.

[1922.6] *Die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **31**, 2. Abt., 101. [Samenvatting congresvoordracht]

[1923.1] *Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen.* Math. Z. **17**, 111-115.

[1923.2] *Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. I, II.* Math. Z. **17**, 161-182, 183-188.

[1923.3] *Der Ricci-Kalkül.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **32**, 91-96. [Historisch overzicht]

[1923.4] *Iets over conforme afbeelding.* Handelingen 19e Nederl. Natuur- en Geneesk. Congres, Maastricht, 123-124.

[1923.5] *Un théorème sur la transformation conforme dans la géométrie différentielle à n dimensions* (met D.J. STRUIK). C.R. Acad. Sci. Paris **176**, 1597-1600.

[1923.6] *Einige Sätze über konforme Abbildung.* Christiaan Huygens **3**, 33-36.

[1923.7] *Over een niet-symmetrische affine veldtheorie.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **32**, 842-849. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **26**, 850-857.]

[1923.8] *Over een niet symmetrische affiene veldtheorie.* Physica, Nederl. Tijdschr. Natuurk. **3**, 365-369. [Voordracht]

[1923.9] *Über die Anwendung der allgemeinen Reihenentwicklung auf eine bestimmte quaternäre Form sechsten Hauptgrades.* Rend. Circ. Mat. Palermo **47**, 409-425.

[1924.1] *Note on Mr. Harward's paper on the identical relations in Einstein's theory.* Phil. Mag. **47**, 584-585.

[1924.2] *Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 10. Springer, Berlin, x+312 p.
[2e druk: Edwards, Ann Arbor (Michigan), 1945 (lithoprint)]

[1924.3] *Over de plaats der conforme en projectieve meetkunde in de theorie der lineaire overbrengingen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **33**, 401-418. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **27**, 407-424.]

[1924.4] Boekbespreking: A FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, zweiter Auflage. Tijdschr. voor Wijsbegeerte **18**, 162.

[1924.5] *Sur les connexions conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König.* C.R. Acad. Sci. Paris **178**, 2044-2046.

[1924.6] *Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen* (met A. FRIEDMANN). Math. Z. **21**, 211-223.

[1924.7] Boekbespreking: R. WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie.* Nieuw Arch. Wisk. (2) **14**, 252-256.

[1924.8] *Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Differentialgeometrie.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **33**, Abt. 2, 89-91. [Samenvatting congresvoordracht]

[1925.1] *On the conditions of integrability of covariant differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 441-473. [Samenvatting in: Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 18-19.]

[1925.2] *Projectieve en konforme invarianten bij halfsymmetrische overbrengingen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **34**, 1300-1302. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **29**, 334-336.]

[1926.1] *Over de meetkunde der groepuitgebreidheid van halfeenvoudige en eenvoudige groepen* (met E. CARTAN). Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **35**, 387-399. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **29**, 803-815.]

[1926.2] *Over Riemannsche meetkunden, die een absoluut parallelisme toelaten* (met E. CARTAN). Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **35**, 505-518. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **29**, 933-946.]

[1926.3] *Erlanger Program und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie.* Rend. Circ. Mat. Palermo **50**, 142-169.

[1926.4] *Über die Umkehrung eines Satzes von Lipschitz.* Nieuw Arch. Wisk. (2), **15**, 97-102.

[1926.5] Boekbespreking: F.M. DENTON, *Relativity and common sense.* Physica **6**, 266.

[1926.6] Boekbespreking: HANS REICHENBACH, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre.* Physica **6**, 266.

[1926.7] *Über die Projektivkrümmung und Konformkrümmung halbsymmetrischer Übertragungen.* In memoriam N.I Lobačevski, vol. 2, 90-98, Soc. Phys.-Math. Kazan.

[1926.8] *Vraagstuk XCII - XCVI, met oplossingen.* Wisk. Opgaven **14**, 202-207.

[1927.1] *Over de invarianten eener lineaire overbrenging bij verschillende transformaties.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **36**, 155-160. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **30**, 276-281]

[1927.2] *Vorlesungen über die Theorie der halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen.* Universiteit Leiden, 1926/27, 285 p. [gehectografeerd]

[1927.3] *Sur les groupes à connexion semisymétrique.* C.R. du Congrès de Lyon (1926), 85-87. Assoc. Franç. Avancement Sci., Paris.

[1927.4] *Über n-fache Orthogonalsysteme in V_n.* Math. Z. **26**, 706-730.

[1927.5] Boekbebespreking: TH. DE DONDER, *Théorie des champs gravifiques.* Physica **7**, 185.

[1927.6] Boekbespreking: W. VON IGNATOWSKI, *Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik.* Nieuw Arch. Wisk. (2) **15**, 271-273.

[1927.7] Boekbespreking: H. KAFKA, *Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik.* Nieuw Arch. Wisk. (2) **15**, 273-275.

[1927.8] *Quelques remarques sur l'écart géodésique et des problèmes pareils.* C.R. Acad. Sci. Paris **185**, 1096-1098.

[1927.9] *Over infinitesimale vervormingen van een V_m in een V_n.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **36**, 1121-1131. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **31**, 208-218.]

[1928.1] *Die Geometrien der kontinuierlichen Transformationsgruppen.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **37**, Abt. 2, 20-23. [Samenvatting congresvoordracht]

[1928.2] *Over niet holonome overbrengingen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **37**, 228-236. [Engelse versie: Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **31**, 291-299.]

[1929.1] *Über die Differentialgeometrie einer Hermitischen Differentialform und ihre Beziehungen zu den Feldgleichungen der Physik* (met D. VAN DANTZIG). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **32**, 60-64. [Nederl. samenvatting: Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **38**, 13-14.]

[1929.2] *Über die in der Wellengleichung verwendeten hyperkomplexen Zahlen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **32**, 105-108. [Nederl. samenvatting: Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **38**, 22.]

[1929.3] *Sur la signification géométrique de la propriété semi-symétrique d'une connexion intégrale, qui laisse invariant le tenseur fondamental. I, II.* C.R. Acad. Sci. Paris **188**, 955-957, 1135-1136.

[1929.4] *Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n.* Math. Z. **30**, 149-172.

[1929.5] *Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung* (met V. HLAVATÝ). Math. Z. **30**, 414-432.

[1929.6] *Über unitäre Geometrie.* Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **32**, 457-465.

[1929.7] Boekbespreking: THOMAS TOMMASINA, *La physique de la gravitation et la dynamique de l'universe.* Physica **9**, 288.

[1929.8] *Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.* Math. Ann. **102**, 244-272.

[1929.9] *Theoretische mechanica vraagstukken met aanwijzingen en oplossingen* *(voor C, S, E en N).* Waltman, Delft, x+114 p. [Handleiding TH Delft]

[1930.1] *Die Darstellung der Lorentzgruppe in der komplexen E_2 abgeleitet aus den Diracschen Zahlen.* Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **33**, 189-197. [Nederl. samenvatting: Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen Afd. Natuurk. **39**, 57.]

[1930.2] *Über unitäre Geometrie* (met D. VAN DANTZIG). Math. Ann. **103**, 319-346.

[1930.3] *Über projektive Übertragungen und Ableitungen. I, II.* (met ST. GOŁĄB). Math. Z. **32**, 192-214. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **8**, 141-157.

[1930.4] Boekbespreking: A.D. FOKKER, *Relativiteitstheorie.* Physica **10**, 207-208.

[1930.5] *Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde* (met E.R. VAN KAMPEN). Math. Ann. **103**, 752-783.

[1930.6] *Short algebraic introduction to the lectures on modern differential geometry to be held in 1930-'31.* Harvard University, iii+24 p. [gehectografeerd]

[1930.7] Boekbespreking: R. GANS, *Vektoranalysis mit Anwendungen auf Physik und Technik.* Nieuw Arch. Wisk. (2) **16**, no. 4, 95-97.

[1931.1] *Klassifizierung der alternierenden Gröszen dritten Grades in 7 dimensionen.* Rend. Circ. Mat. Palermo **55**, 137-156.

[1931.2] *Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie* (met E.R. VAN KAMPEN). Math. Ann. **105**, 144-159. *Nachtrag:* ibid., 792.

[1931.3] Boekbespreking: JEAN CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste.* Physica **11**, 88-89.

[1931.4] Boekbespreking: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, I: Geometrical Optics.* Eds. A.W. CONWAY and J.L. SYNGE. Physica **11**, 158-159.

[1931.5] *Über unitäre Geometrien konstanter Krümmung* (met D. VAN DANTZIG). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **34**, 1293-1304.

[1931.6] *Über eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie* (met D. VAN DANTZIG). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **34**, 1398-1407.

[1931.7] *Dirac equations in general relativity. I: Four dimensional theory; II: Five dimensional theory.* J. Math. and Phys. **10**, 239-283.

[1932.1] Boekbespreking: TH. DE DONDER, *Applications de la gravifique Einsteinienne.* Physica **12**, 140-141.

[1932.2] *Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie* (met D. VAN DANTZIG). Akad. Wetensch. Amsterdam

Proc. **35**, 642-655. [GF I. Eerste van een serie van 9 artikelen, aangeduid met GF I - GF IX, over een algemene veldtheorie]

[1932.3] *Zur generellen Feldtheorie. Diracsche Gleichungen und Hamiltonsche Funktion* (met D. VAN DANTZIG). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **35**, 843-852. [GF II]

[1932.4] *Generelle Feldtheorie* (met D. VAN DANTZIG). Z. Physik **78**, 639-667. [GF III]

[1932.5] *Projektiver Zusammenhang mit Fundamentalquadrik* (met D. VAN DANTZIG). Verhandl. Intern. Math. Kongres Zürich, 2. Band, 302-303.

[1932.6] *Verwendung eines projektiven Zusammenhangs mit Fundamentalquadrik zur Bildung einer generellen Feldtheorie* (met D. VAN DANTZIG). Verhandl. Intern. Math. Kongres Zürich, 2. Band, 304-305.

[1933.1] *Zur generellen Feldtheorie; Ableitung des Impulsenergiestromprojektors aus einem Variationsprinzip.* Z. Physik **81**, 129-138. [GF IV]

[1933.2] *Zur generellen Feldtheorie. Raumzeit und Spinraum.* Z. Physik **81**, 405-417. [GF V]

[1933.3] *On projective connexions and their application to the general field-theory* (met D. VAN DANTZIG). Ann. of Math. (2) **34**, 271-312. [GF VI]

[1933.4] *Zur generellen Feldtheorie. Semivektoren und Spinraum.* Z. Physik **84**, 92-111. [GF VII]

[1933.5] *Beiträge zur Theorie der Deformation* (met E.R. VAN KAMPEN). Prace Mat.-Fiz. **41**, 1-19.

[1934.1] *Generelle Feldtheorie. Autogeodätische Linien und Weltlinien* (met J. HAANTJES). Z. Physik **89**, 357-369. [GF VIII]

[1934.2] *Über die konforminvariante Gestalt der Maxwellschen Gleichungen und der elektromagnetischen Impulsenergiegleichungen* (met J. HAANTJES). Physica **1**, 869-872.

[1935.1] *La théorie projective de la relativité.* Ann. Inst. H. Poincaré **5**, 51-88. [GF IX]

[1935.2] *Was ist Geometrie?* (met D. VAN DANTZIG). Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. **2/3**, 15-48. [Russische samenvatting: ibid., 49-50]

[1935.3] *Konforme Feldtheorie II; R_6 und Spinraum* (met J. HAANTJES). Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **4**, 175-189.

[1935.4] *Über allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung. I, II.* (met J. HAANTJES). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **38**, 706-708; **39** (1936), 27.

[1935.5] *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Band I: Algebra und Übertragungslehre.* Noordhoff, Groningen, xii+202 p. [volledig omgewerkte 2e druk van [1922.3]. Russische vertaling: Gos. Ob"ed. Nauchno-Tekhn. Izdat., Moskou, 1939.] [Band II: *Geometrie,* door D.J. STRUIK, ibid., 1938, xii+338 p. Russische vertaling: Gos. Izdat. Inostr. Lit., Moskou, 1948].

[1936.1] *Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten* (met J. HAANTJES). Monatsh. Math. Phys. **43**, 161-176.

[1936.2] *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie* (met J. HAANTJES). Compositio Math. **3**, 1-51.

[1936.3] *Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie. I, II.* (met J. HAANTJES). Math. Ann. **112**, 594-629; **113**, 568-583.

[1936.4] *Über die konforminvariante Gestalt der relativistischen Bewegungsgleichungen* (met J. HAANTJES). Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **39**, 1059-1065.

[1936.5] *Zur Theorie des geometrischen Objektes* (met J. HAANTJES). C.R. Congr. Intern. Math. Oslo, tome 2, 155-159.

[1937.1] *On the theory of the geometric object* (met J. HAANTJES). Proc. London Math. Soc. (2) **42**, 356-376.

[1937.2] *Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. I-III.* Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **40**, 100-107, 236-245, 470-480.

[1937.3] *Über einige Ziele und Probleme der modernen Differentialgeometrie.* Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. **4**, 36-41. [Russiche vertaling: ibid., 42-47.] [Openingsvoordracht op de Conferentie voor tensoriële differentiaalmeetkunde, Moskou, 1934]

[1938.1] *Über die Beziehungen zwischen den geometrischen Grössen in einer X_n und in einer in der X_n eingebetteten X_m.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **41**, 568-575.

[1938.2] *Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. IV.* (met J. HAANTJES). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **41**, 576-584.

[1938.3] *Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und W-p-Vektoren und den korrespondierenden Dichten.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **41**, 709-716.

[1939.1] *Meetkunde en ervaringsstructuur.* Jaarboek Techn. Hoogeschool Delft, 3-23. Waltman, Delft. [Rede op de gedenkdag van de TH Delft]

[1940.1] *De beteekenis van de exacte vakken in de vooropleiding van den ingenieur.* In: Ingenieur-studie-praktijk, 61-83. Centr. commissie voor studiebelangen, Delft.

[1940.2] *Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. I-V.* (met W. VAN DER KULK). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **43**, 18-31, 179-188, 453-462, 674-686; **45** (1942), 624-629.

[1940.3] *On ordinary quantities and W-quantities. Classification and geometrical* *applications* (met D. VAN DANTZIG). Compositio Math. **7**, 447-473.

[1940.4] *Over de tien eenvoudigste meetkundige grootheden.* Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurk. **49**, 24-26.

[1940.5] *Über Differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **43**, 449-452.

[1940.6] *Über algebraische Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. I, II.* (met W. VAN DER KULK). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **43**, 955-963, 1160-1170.

[1941.1] Boekbespreking: LÉON BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité.* Nederl. Tijdschr. Natuurk. **8**, 148-150.

[1942.1] *Levensbericht van Tullio Levi-Cività.* Jaarboek Nederl. Akad. Wetensch. 1941/42, 218-219.

[1943.1] *Bijdragen tot de theorie der systemen van Pfaffsche vergelijkingen. VI-XI.* (met W.VAN DER KULK). Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurk. **52**, 17-22, 138-145, 197-200, 415-420, 571-574, 646-653.

[1946.1] *On unities and dimensions. I-III.* (met H.B. DORGELO). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **49**, 123-131, 282-291, 393-403.

[1947.1] *Regular systems of equations and supernumerary coordinates.* Rapport ZC 4. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 46 p. [Syllabus] [Uitgebreidere versie: MC Scriptum no. 6. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1950, ii + 83 p.]

[1947.2] *Tensorrekening voor physici.* Rapport TC 2. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 2 + 53 p. [Syllabus]

[1947.3] *Relativistische mechanica.* Rapport TC 6. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 129 p. [Collegediktaat]

[1948.1] *Integratietheorie van Hamilton-Jacobi.* Rapport TC 9. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 76 p. [Syllabus]

[1948.2] *Over Pfaffs probleem en zijn generalisaties* (met W. VAN DER KULK). Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. **6**, 249-256. [In het Russisch]

[1949.1] *Pfaff's problem and its generalizations* (met W. VAN DER KULK). Clarendon Press, Oxford, xvi + 542 p. [2e verbeterde druk: Chelsea Publishing Co., New York, 1969.]

[1949.2] *Over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de laatste 40 jaren.* Noordhoff, Groningen, 22 p. [Ook in: Euclides **24**, 265-282.] [Intreerede Univ. Amsterdam]

[1949.3] *Mesonvelden en conforme meetkunde.* Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurk. **58**, 12-16.

[1949.4] *On meson fields and conformal transformations.* Rev. Modern Phys. **21**, 421-424.

[1949.5] *On the geometry of spin spaces. I-IV.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc.

52, 597-609, 687-695, 938-948; **53** (1950), 261-272. = Indag. Math. **11**, 178-190, 217-225, 336-346; **12** (1950), 41-52.

[1949.6] *Stelsels van partiële differentiaalvergelijkingen (Pfaffs probleem enz.)* Rapport TC 11. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 69 p. [Collegediktaat] [Herziene versie: Rapport TC 11a (1951), 79 p.]

[1949.7] *De differentiaaloperator van Lie.* Rapport ZW 1949-010. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 7 p. [Voordracht]

[1950.1] *Differentiaalmeetkunde 1949-50.* Rapport ZC 11. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 2 + 82 p. [Collegediktaat]

[1951.1] *Vektorachtige grootheden in de physica.* Handelingen 32e Nederl. Natuur-en Geneesk. Congres, Eindhoven, 71-72.

[1951.2] *Sur les tenseurs de V_n aux directions principales V_{n-1}- normales.* Colloque de Géométrie Différentielle, Louvain, 67-70. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris.

[1951.3] *Tensor analysis for physicists.* Clarendon Press, Oxford, x + 275 p. [2e druk, 1954]

[1951.4] *Levensbericht van Élie Cartan.* Jaarboek Nederl. Akad. Wetensch. 1951/52, 196-197.

[1951.5] *Differentiaalmeetkunde: Capita selecta 1950-51. Lie-groepen.* Rapport ZC 15. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 13 + 72 p.

[1952.1] Boekbespreking: I.S. SOKOLINKOFF, *Tensor Analysis.* Nederl. Tijdschr. Natuurk. **18**, 281.

[1953.1] *On subprojective affine connections.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **56** = Indag. Math. **15**, 72-79.

[1953.2] *On the differential operators of first order in tensor calculus.* Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Venezia, 1-7. Edizioni Cremonese, Roma, 1954. [Ook verschenen als: Rapport ZW 1953-012. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 6 p.]

[1953.3] Boekbespreking: C. MØLLER, *The theory of relativity.* Nederl. Tijdschr. Natuurk. **19**, 196-197.

[1954.1] *Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications.* 2d ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 10. Springer-Verlag, Berlin, 1954, xx + 516 p. [Volledig herschreven herdruk van [1924.2]]

[1955.1] *On an intrinsic connexion in an X_{2n} with an almost Hermitian structure* (met K. YANO). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58** = Indag. Math. **17**, 1-9. [Ook verschenen als: Rapport ZW 1954-22. Mathematisch Centrum, Amsterdam.]

[1955.2] *On the geometrical meaning of the vanishing of the Nijenhuis tensor in an X_{2n} with an almost complex structure* (met K. YANO). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58** = Indag. Math. **17**, 133-138.

[1955.3] *On invariant subspaces in the almost complex X_{2n}* (met K. YANO). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58** = Indag. Math. **17**, 261-269.

[1955.4] *On pseudo-Kählerian spaces admitting a continuous group of motions* (met K. YANO). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58** = Indag. Math. **17**, 565-570.

[1955.5] Boekbespreking: H. LICHMEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme: relativité generale et théories unitaires.* Nederl. Tijdschr. Natuurk. **21**, 304.

[1956.1] *In memoriam J. Haantjes.* Nieuw Arch. Wisk. (3) **4**, 61-70.

[1956.2] *On currents and their invariant derivatives. I-IV.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **59** = Indag. Math. **18**, 371-380, 381-385; Proc. Ser. A **60** = Indag. Math. **19** (1957), 1-11, 233-241.

[1956.3] *Über Strömungen (courants), ihre Ableitungen und Konkomitanten.* Rapport ZW 1956-014. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 4 p. [Congresvoordracht]