Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

Op de grens van twee werelden
Ervaringen met wiskunde in een overgangstijdperk

A.F. Monna

CWI Publications

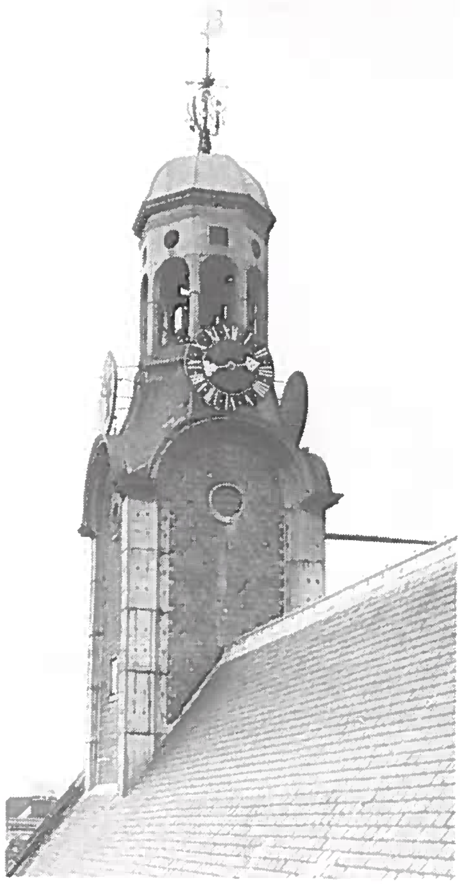
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands

The CWI is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

Op de grens van twee werelden
Ervaringen met wiskunde in een overgangstijdperk

A.F. Monna



ISBN 90 6196 367 2
NUGI-code: 811

Printed in the Netherlands

Inhoudsopgave

Voorwoord

Onder de titel "Op de grens van twee werelden" zijn samengebracht opstellen over persoonlijke ervaringen van de schrijver met de wiskunde. Zij zijn ontstaan door overpeinzingen over 60 jaren bemoeienis met de wiskunde. Als centrale idee staat in deze opstellen het besef een overgangsperiode met betrekking tot de ontwikkelingen in de wiskunde persoonlijk te hebben meegemaakt: de overgang van de klassieke naar de moderne wiskunde. Dergelijke overpeinzingen leiden tot het trekken van vergelijkingen tussen de toestand zoals die destijds was en de hedendaagse situatie. Het gaat om het schetsen van een tijdsbeeld. Rond deze centrale idee zijn gegroepeerd beschouwingen over het universitaire onderwijs zoals dat er destijds ten aanzien van de wiskunde uitzag, maar ook vindt men bespiegelingen over de wiskunde als zodanig: over de wiskunde van toen en die van nu.

De opstellen hebben een informeel karakter want zij zijn grotendeels gebaseerd op herinneringen en gesprekken die aanleiding waren tot in een lange reeks van jaren gegroeide inzichten en meningen. Zij zijn dus persoonlijk gekleurd en hebben niet de strenge status die de historicus verlangt. Ten dele hebben zij een verhalend karakter. Zij proberen dan een indruk te geven van het dagelijkse werk van de wiskundige toen en nu. Juist het slinken van het aantal dergenen die deze belangrijke overgangsperiode hebben beleefd maakt het van belang dienaangaande de persoonlijke ervaringen neer te schrijven. Dit geschrift beoogt hiertoe een bijdrage te zijn.

Grote dank ben ik verschuldigd aan mijn collega's A.W. Grootendorst te Delft en T.A. Springer te Utrecht, beide oud-"Leidenaren". Zij hebben de tekst kritisch gelezen en met hun kennis van verleden en heden zijn vele aanvullingen en verbeteringen daaruit voortgekomen. Eerstgenoemde heeft bovendien de taak van een eerste correctie van de drukproeven van mij willen overnemen. Ik ben hem daarvoor zeer erkentelijk. Zonder beider aanmoediging zou dit boek niet tot stand zijn gekomen.

de Bilt, 1988

Hoofdstuk 1

Wiskunde toen en nu: terugblik op een Leidse studietijd

Voor mijn eerste ervaringen met dat facet van de wiskunde dat mij in mijn leven het meest is blijven boeien - n.l. het theoretische aspect ervan - moet ik teruggaan tot de tijd van de middelbare school. Daar stonden destijds de differentiaal- en integraalrekening nog niet op het programma. In het laatste jaar gaf mijn leraar P. Visser echter buiten het normale programma een inleiding daarin, speciaal voor degenen die de intentie hadden in die richting verder te gaan studeren. Hij deed dat aan de hand van een boekje *Grenswaarden* van W.L. van de Vooren, een collega van Visser. Van hem kreeg ik in het laatste schooljaar mechanica, een vak dat hij op wat onorthodoxe, meer theoretische, wijze gaf (o.a. rotaties, momenten, enz.); het was wel inspirerend, uitzicht biedend op latere ontwikkeling. De lessen van Visser boeiden mij zeer, de idee van een differentiaalquotiënt, maar bovenal het begrip integraal en de invoering daarvan; het integraalsymbool fascineerde mij. Trouwens, mijn vader studeerde in zijn avonduren wiskunde en als jongen vond ik het integraalteken al mysterieus zonder er iets van te begrijpen. Deze feiten zijn stellig voor mij een aanleiding geweest voor mijn besluit om wiskunde te gaan studeren. Maar wist hij, die juist het eindexamen had afgelegd, eigenlijk waaraan hij ging beginnen? Gaat een gewekte belangstelling, nauwelijks op goede gronden gefundeerd, samen met begaafdheid voor wiskunde?

Mijn studie voerde mij naar Leiden. Over de Leidse tijd, die aanving in 1927, heb ik al eerder iets op schrift gesteld (zie [8]; de nummering verwijst naar de literatuuropgave). Ik maak wat verdere opmerkingen.

Er zijn twee facetten te onderscheiden. Eerst is er het onderwijs-organisatorische aspect, de inrichting van het onderwijs. Daarnaast is er het aspect van de feitelijke inhoud van de toentertijd aangeboden leerstof in de wiskunde.

De volgende opmerkingen beogen een beeld te geven van de inrichting van de studie zoals die in Leiden destijds voor de wiskunde was - maar het beeld zal waarschijnlijk wel een ruimere strekking hebben.

Er waren voor de wiskunde twee hoogleraren. Eén ervan had de algebra en de analyse in zijn opdracht, de andere was belast met de meetkunde en de theoretische mechanica. Men mag wel aannemen dat het feit dat de mechanica in handen was van een wiskundige, rust op historische gronden. Klassiek was er een sterke binding tussen de wiskunde en de natuurwetenschappen, en in het bijzonder met de mechanica, die in haar opbouw verder weg staat van het experiment. Men denke aan Lagrange met zijn *Mécanique analytique* en Laplace met de *Mécanique céleste.* Later ging in Leiden de mechanica over naar de theoretische natuurkunde. Naast de hoogleraren was er een lector die was belast met wat men zou moeten noemen het elementaire gedeelte, onder meer de wiskunde voor de chemici. Medewerkers of assistenten waren er bij de wiskunde niet. Die situatie is onveranderd gebleven tot na 1945; daarna kwamen er geleidelijk veranderingen. Maar op die latere lokale historie zal ik niet ingaan. Mijn werkkring voerde mij in een andere richting waardoor ik daarover niet op verantwoorde wijze kan schrijven. Er was in die tijd geen Instituut, de hoogleraren hadden geen kamer op de universiteit. Na afloop van de colleges gingen zij naar huis - tenzij misschien andere universitaire besognes hun verdere aanwezigheid vereisten. Tentamens werden ten huize van de docenten afgenomen. Het Academiegebouw waar de hoofdcolleges werden gegeven, bevatte geen ruimte voor een bespreking, voor zover daartoe al gelegenheid zou zijn gegeven. Voorlichting voor studenten bestond er niet of nauwelijks. Een systeem van voorlichtingsdagen, zoals thans gebruikelijk, was destijds ondenkbaar. Studenten werden geacht zelf hun weg te vinden. Voor de aankondiging van de colleges in de diverse faculteiten kon men de z.g. *Series Lectionum* aanschaffen, een groot formulier waarop, in het Latijn gesteld, jaarlijks het programma van de colleges werd vermeld. Men moest zelf, eventueel met steun van ouderejaarsstudenten, uitvinden welke colleges men geacht werd te volgen. Veelal was het aanvangstijdstip vermeld op een korte kennisgeving die was opgeprikt op de deur van het hoofdgebouw aan het Rapenburg (z.g. ad valvas). De colleges - althans die voor de wiskunde - begonnen na 3 oktober; Leidenaren begrijpen de reden daarvan. Het moet gezegd worden dat in die jaren het collegerooster voor de docenten groter was dan in latere jaren. In sommige jaren - maar er zijn onderbrekingen geweest - werd door de Philosofische Faculteit een jaarboekje uitgegeven waarin althans iets meer informatie was opgenomen. Het werd aangemoedigd om van die faculteitsvereniging lid te worden. In enkele van die jaarboekjes vond ik een opsomming van de hoogleraren en lectoren met vermelding van hun leeropdracht. Ik verwijs naar bijlage 1; de leeropdrachten doen ons curieus aan. De omschrijving is archaïsch te noemen; zij is nog klassiek. Men sprak toen nog van de Philosofische Faculteit. Deze benaming berust op historische gronden uit de beginperiode van de universiteiten; ik moet het aan de historici overlaten dit toe te lichten. Een aankomend student in deze faculteit heette dan phil. stud.; na het kandidaatsexamen was men phil. cand. en tenslotte phil. drs. Men mag aannemen dat de toestand in Leiden niet essentieel verschilde van die aan de andere Nederlandse universiteiten, al zijn er misschien lokale verschillen aan te wijzen. Ik denk dan bij voorbeeld aan Brouwer in Amsterdam en aan moderniserende invloeden van Hurewicz en Freudenthal aldaar in de dertiger jaren, ook aan Denjoy in Utrecht rond 1920 - die trouwens toen al korte tijd assistenten had [7]. Het is een kwestie die vraagt om het schrijven van lokale histories. Dit neemt niet weg dat men, ook elders, de indruk krijgt van een vrijwel statische situatie, zelfs tot lang na 1945. En dat niet alleen ten aanzien van de inrichting van het onderwijs, het organisatorische deel, maar ook met betrekking tot de inhoud van de collegestof, die - behoudens meer incidenteel te noemen feiten - klassiek getint bleef. Naar aanleiding van mijn in het begin genoemde eerdere publikatie schreef D.J. Struik, die in 1912 in Leiden aankwam, mij dat de situatie in zijn tijd nauwelijks verschilde van de omstandigheden zoals ik die daar aantrof, dat is 15 jaren later.

Er valt nog iets te zeggen over de examenprogramma's. Deze waren vastgelegd in het Academisch Statuut. Het kandidaatsexamen omvatte twee hoofdvakken en een bijvak. Om tot een doctoraalexamen met hoofdvak wiskunde te worden toegelaten kon worden gekozen uit drie kandidaatsexamens:
A. Wiskunde en natuurkunde met sterrenkunde;
B. Wiskunde en sterrenkunde met natuurkunde;
D. Natuurkunde en wiskunde met scheikunde.
De variant C: Sterrenkunde en natuurkunde met wiskunde, kwam daarvoor om evidente redenen niet in aanmerking.

De gangbare, en voor zover ik mij herinner meest gekozen variant was het kandidaatsexamen A. Het examen B, bij voorbeeld, gaf zekere problemen. Het programma voor sterrenkunde kon aanleiding zijn voor moeilijkheden wegens onvoldoende coördinatie met de wiskunde, waarin men dan nog niet genoeg gevorderd was. Ik denk bij voorbeeld aan zaken uit de hemelmechanica. Trouwens, coördinatie van programma's was een zwak punt. Bij een college Thermodynamica werd gemanipuleerd met partiële afgeleiden, kringintegralen, totale differentialen in relatie tot eindige differenties (kleine aangroeiingen) en dat op een tijdstip waarbij men daar bij de wiskunde nauwelijks aan toe was. Ik laat overigens in het midden of deze begrippen bij de natuurkunde op mathematisch verantwoorde wijze werden ingevoerd. Ik moet bekennen dat het voor een wiskundige niet zeer helder was. Maar binnen de wiskunde waren er ook wel problemen van volgorde. Het college Analytische meetkunde was tweejarig: het eerste jaar het platte vlak, het tweede jaar de ruimte. Het lijkt een logische volgorde. Niettemin kon men het treffen dat men in zijn eerste jaar de analytische meetkunde van de ruimte, dit is $\mathbb{R}^3$, kreeg gepresenteerd, en in het tweede jaar die in het platte vlak. Problemen gaf dat echter blijkbaar niet en dit demonstreert het artificiële karakter van deze splitsing. Een samenhangende behandeling in het kader van de lineaire algebra was er toen nog niet, kon er misschien ook nog niet zijn in de twintiger jaren.

Deze opmerkingen voeren mij tot de inhoud van de colleges. De gepresenteerde materie was toen nog strikt klassiek te noemen: klassieke algebra - na het kandidaatsexamen geen algebra meer -, klassieke analyse, klassieke analytische meetkunde, misschien zouden wij nu zeggen niet bijzonder spannend. Het was de wiskunde van de klassieke periode in de ontwikkelingsgang van de wiskunde. Er waren incidentele, moderner gerichte colleges zoals tijdelijk van J.A. Schouten en in vastere vorm van H.D. Kloosterman, maar wat betreft deze laatste loopt men dan al tegen eind dertiger jaren. Maar deze kunnen nauwelijks de klassieke indruk van het geheel veranderen. Onlangs kwam mij in handen een boek van F. Müller *Führer durch die Mathematische Literatur* (Teubner 1909). Het boek geeft een systematisch overzicht, teruggaande tot Euler, Lagrange, Gauss,..., van boeken en ook artikelen. Ik herken in deze opgave de boeken die wij in de twintiger jaren nog raadpleegden; het patroon was niet essentieel anders. Een dergelijke opsomming is nu ondenkbaar geworden. De situatie is op dit punt lang statisch gebleven, zelfs tot na 1945 - de periode 1940-1945 kan buiten beschouwing blijven. In één van de eerdergenoemde jaarboekjes van de Philosofische Faculteit trof ik aan een opsomming van aanbevolen studieboeken. Ter vergelijking met wat enige tientallen jaren later aan de orde zou komen voeg ik een kopie als bijlage toe (bijlage 2).

Prof.dr. H.D. Kloosterman

Nog kort geleden bood zich de gelegenheid aan om nog weer eens kennis te kunnen nemen van het oude programma. In de nalatenschap van D.N. van der Neut bevond zich n.l. een vrijwel complete collectie van uitgewerkte collegedictaten uit een periode enkele jaren vóór die van mij. Het betrof onder andere: traditionele klassieke Algebra (men sprak van "hogere algebra"), colleges Infinitesimaalrekening, "Bepaalde integralen", "Differentiaalvergelijkingen", "Functietheorie", dit is de theorie van complexe analytische functies; voor meetkunde de klassieke reële analytische meetkunde, coördinaatsgewijs, cartesiaans, algebraïsche meetkunde over de reële getallen, klassieke differentiaalmeetkunde aansluitend aan Gauss. De inhoud verschilde nauwelijks van die uit mijn tijd en uit wat Prof. Struik mij schreef, krijg ik de indruk dat er sedert zijn tijd ook op dit punt niets essentieels was veranderd.

Hoewel dit eigenlijk buiten mijn onderwerp valt, wil ik toch enkele opmerkingen maken over de natuurkunde van vóór het kandidaatsexamen. Er was een algemeen college Natuurkunde van W. de Haas en daarnaast enkele capita: Kinetische gastheorie, thermodynamica, radio-activiteit. Naast het algemene college gebruikten wij voornamelijk de twee delen van het boek van Lorentz, *Beginselen der natuurkunde* (Brill, Leiden). In de boekenlijst (zie bijlage 2) waren zij speciaal vermeld naast enige andere algemene boeken die wij konden gebruiken bij het maken van verslagen van de voorgeschreven practicumproeven. Deze boeken van Lorentz waren wat merkwaardig: zij waren vrijwel geheel verbaal, formules en afleidingen komen er niet in voor. Het eerste deel bevat een zeer elementaire wiskundige inleiding waarin zelfs van het integraalbegrip slechts een korte aanduiding is te vinden. Wat voor doel Lorentz met deze boeken nastreefde weet ik niet. Maar wezenlijk natuurkunde er uit leren van universitair niveau kon men toch niet. In dit opzicht was de inleiding tot de natuurkunde pover te noemen. Dat werd, uiteraard, wel anders bij de theoretische natuurkunde van Ehrenfest na het kandidaatsexamen!

Over de sterrenkunde als bijvak voor het kandidaatsexamen valt weinig te zeggen: in mijn eerste jaar volgde ik het algemene college van W. de Sitter. Beseften wij dat hij een groot geleerde was? Ik geloof het niet.

Cortège in de Kloksteeg, Leiden 1924, met Lorentz, Kluyver, Schreinemakers, Ehrenfest, Van der Woude

Ik maak hier nog een opmerking terzijde. Het was in die tijd gebruikelijk dat studenten zelf hun dictaten maakten; syllabi werden niet verstrekt. Jaren later, in Utrecht gekomen, waar, zoals algemeen gebruikelijk was geworden, vele syllabi werden samengesteld, heb ik mij wel eens afgevraagd wat er eigenlijk op tegen was dat men vroeger werd verondersteld zelf zijn dictaten te maken. Ik heb wel eens schertsenderwijs de vraag gesteld waarom de boekdrukkunst was uitgevonden. Er is geloof ik nog niet veel veranderd.

Het duurde tot in de jaren na 1945 voor het beeld essentieel begon te veranderen en, wat betreft Leiden, kan men wel stellen dat de invloed van Kloosterman daarbij een grote rol heeft vervuld. Elders in Nederland zal het totaalbeeld wel niet veel anders zijn geweest, al zijn er, zoals ik al opmerkte, plaatselijke verschillen aan te wijzen; ik denk aan Amsterdam met Brouwer, Mannoury, en in de dertiger jaren Van Dantzig, Freudenthal; in Groningen korte tijd Van der Waerden.

Interessant vergelijkingsmateriaal vond ik nog in een dictaat *Algebra en Meetkunde,* gegeven door Freudenthal in Utrecht 1946-1947; er was toen al een syllabus van. Er komt een beeld uit naar voren dat geheel verschillend is van dat wat in de hiervoor door mij beschreven periode werd aangeboden. Het begint met "vectoren" en lineaire ruimten, axiomatisch gedefinieerd, lineaire afbeeldingen, kwadrieken, ruimten met inprodukt, het begrip isometrie enz., om slechts enkele onderwerpen te noemen. Kortom, er spreekt een andere wereld uit.

Als ik nu terugblik op mijn Leidse tijd - ruimer gezegd op de statische toestand van vóór 1945 - en die vergelijk met de latere ontwikkelingen, het heden, dan kom ik tot de vraag wat globaal genomen het meest opvallend is, waarbij ik dan speciaal denk aan de wiskunde van toen en nu. Het gaat daarbij om de spontane persoonlijke impressie. De waarde van zo'n impressie is uiteraard beperkt. Immers, zo'n globale indruk wordt in sterke mate bepaald door iemands ontwikkelingsgeschiedenis en interessesfeer en daarbij speelt het klimaat waarin men na een strikt klassieke opleiding is komen te leven een grote rol. In mijn geval was dat het wiskundige klimaat dat ik later, na een lange buiten-universitaire werkkring, aantrof in Utrecht, een klimaat waarin ik, terugziende, zelfstandig eigenlijk al eerder was terecht gekomen. Dat klimaat was, naar mijn gevoelen althans, sterk abstract en algebraïsch gericht. Is het dat nog of is de analyse en de toegepaste wiskunde gaan domineren? Is dat een algemeen "modeverschijnsel"? Komt in mijn impressies de toegepaste wiskunde onvoldoende tot zijn recht?

Het beeld dan dat ik nu, terugziende, krijg van deze ontwikkelingsperiode is er één van spectaculaire veranderingen, in onderwijskundige zin en in het bijzonder, en dat is het belangrijkste aspect, in inhoudelijke zin - al heb ik, en kon ik, die overgang misschien destijds niet aldus ervaren. Voor mij verrijst het beeld van twee werelden: de wereld van de klassieke wiskunde en de wereld van de hedendaagse wiskunde. Mijn klassieke studietijd komt mij zeer globaal gezegd en stellig wat gechargeerd, voor als de wiskundige cultuur van het reële getal in haar vele facetten: ruimten met reële coördinatenstelsels, de oude algebra over de reële getallen, de analyse met de "ϵ, δ-cultuur", de uitbreiding van het lichaam van de reële getallen tot dat van de complexe getallen $z=x+iy,...$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Reeds het vluchtig doorzien van moderne leerboeken en artikelen doet een heel ander beeld oprijzen. Het is een beeld van de wiskunde waarin abstracte begrippen aan de basis staan. De ontwikkelingen in de eerste decennia van de 20e eeuw ervaar ik als een explosie van abstracte begrippen:
het abstracte groepbegrip;
topologische begrippen, in de beginperiode vaak wat exotisch;
het begrip metriek, via abstractie komend van de euclidische afstand;
het begrip "variëteit" in de meetkunde;
abstracte algebra's;
vectorruimten over een lichaam;
het begrip uniforme ruimte, voortgekomen uit de idee zich te ontdoen van onnodige aftelbaarheidscondities bij metrische ruimten;
abstracte maatbegrippen op klassen van groepen;
en nog vele andere, onder andere het begrip filter in verband met limietbegrippen, ingevoerd door H. Cartan in 1937.
Men kan ook wijzen op verbindende begrippen tussen verschillende onderwerpen. Ik noem het begrip lineaire afbeelding in zijn verschillende verschijningsvormen, zoals homomorphismen, isomorphismen, lineaire operatoren. Het is een begrip dat is verbonden met de cultuur van de additieve structuur die zich in vele delen van de wiskunde manifesteert. Het gaat terug tot de triviale klassieke lineaire functie, maar is nu op een hoger niveau gebracht, een hogere graad van abstractie en daarin ook nu weer een triviaal elementair begrip geworden. Van dit begrip was in mijn Leidse tijd niets te merken; dat was wellicht ook nog niet mogelijk omdat de tijd er niet rijp voor was.

Waren er in de klassieke periode zulke verbindende begrippen? Terugziende op mijn klassiek getinte opleiding, komt het mij voor dat wij deze hebben ervaren als een complex van gescheiden onderdelen, onderdelen met weinig verbindingen, althans met veel minder bindingen dan ik thans meen te ervaren. Misschien zou men, voor wat betreft de klassieke periode, moeten wijzen op het begrip reëel getal als verbindend element, maar dat is wel zeer globaal gezien. Daarom sprak ik hiervoor al over de cultuur van het reële getal. Waar ik geloof in de wiskunde van nu meer onderlinge verbindingen te kunnen zien tussen de onderwerpen, dan meen ik dat de sterke tendens naar abstractie daarin een rol speelt; deze fungeert als basis voor gemeenschappelijke fundamentele grondbegrippen wegens haar flexibele karakter. Op de weg naar abstractie kom ik in een later hoofdstuk terug.

Voor wat betreft de wiskunde van nu dringt zich aan mij het beeld op van een wiskundig systeem met een hogere abstractiegraad, het beeld van een abstracte cultuur waarbij het oude gebied niet is verdwenen maar daarin is opgegaan. De taal is anders geworden, maar het is niet louter een kwestie van taal of symboliek: in mijn visie is de wiskunde op een ander, naar mijn oordeel hoger, niveau gekomen. Het komt mij voor dat deze ontwikkelingsgang zich ook in de zogenaamde toegepaste gebieden manifesteert; ook daar hanteert men algebra's, functieruimten, abstracte algebraïsche begrippen, ... In een eerdere publikatie heb ik deze wiskunde aangeduid als handelend over een "abstracte realiteit", in tegenstelling tot de "fysische realiteit" van de klassieke wiskunde van Lagrange, Laplace, Gauss, Dirichlet, F. Klein, ..., waarin men destijds in Leiden werd onderricht [11]. Zoals ik hiervoor al opmerkte: ik heb de indruk van twee werelden. Nog zeer kort geleden trof mij een illustratie van dit denkbeeld. In een gesprek met O. Bottema - die enige jaren ouder is dan de schrijver dezes - vertelde hij mij dat hij zich voelde als een wiskundige van de 19e eeuw. Om een toelichting gevraagd, deelde hij mij mede dat dit betekende dat hij zich voelde als een mathematicus van de tijd van Steiner, Felix Klein, ... Dus twee werelden.

De overgang van de klassieke tijd naar de moderne tijd heb ik in eerdere publikaties beschreven als een *discontinuïteit* in de totale evolutie van de wiskunde - waarbij ik overigens wees op eerdere discontinuïteitsverschijnselen (Descartes, Leibniz, Newton, ...). Zij is niet te verstaan als een incident dat was gebonden aan een korte episode of aan bepaalde personen, maar het resultaat was zeer ingrijpend, zie [9] en [10].

De discontinuïteit heeft zich uiteraard weerspiegeld in het universitaire wiskundeprogramma, maar de overgang heeft zich daarin met vertraging voorgedaan. Men kan zich dan de vraag stellen of niet reeds vóór 1940 de ontwikkelingsgang zich meer kenbaar had kunnen maken. Het komt mij voor dat dit stellig op een aantal gebieden mogelijk zou zijn geweest. Maar in zulke processen spelen generatieverschillen een grote rol.

Ehrenfest temidden van studenten en medewerkers bij de leeskamer Bosscha

Hoofdstuk 2

Het schrijven van een dissertatie

1. De weg naar de dissertatie destijds

In de twintiger en dertiger jaren, geschiedde het schrijven van een dissertatie nog onder totaal andere omstandigheden dan in de situatie zoals die zich na 1945 geleidelijk ging ontwikkelen. In de vooroorlogse periode moest promoveren veelal geschieden naast een hele of gedeeltelijke werkkring, en dat was dan niet, zoals heden ten dage, een werkkring aan de universiteit. Er waren in die tijd immers geen Instituten voor de wiskunde met daaraan verbonden wetenschappelijke medewerkers. Daardoor miste men de later zo belangrijk geworden contacten. Aan wie kon men zijn moeilijkheden voorleggen? Men werkte buiten de wiskundesfeer, het was in zekere zin een solitaire bezigheid. Het contact met de hoogleraren - en ik spreek hier vanuit mijn Leidse ervaring - was in het algemeen maar matig. Men sprak de hoogleraren toen niet zo gemakkelijk aan, men had wat ontzag. Een opmerking tijdens een college dat men iets niet begreep en dat men het graag nog eens zag uitgelegd lag meestal wat moeilijk. De hoogleraar Van der Woude kon er op reageren door het hele bord schoon te vegen en opnieuw te beginnen. Er zullen wel uitzonderingen zijn geweest. Zo herinner ik mij een tijdgenoot J. Haantjes. Ik meen dat hij door ons al vrij vroeg werd aangezien als de toekomstige opvolger van Van der Woude. Hij zal dus wel nauw contact met hem hebben gehad. Hij is inderdaad Van der Woude opgevolgd, maar helaas is Haantjes jong overleden. De hier geschetste moeilijke werkomstandigheden hebben zich stellig weerspiegeld in het karakter van de dissertaties. De vraag komt bij mij op of heden ten dage onder zulke omstandigheden nog wiskunde-dissertaties tot stand zouden kunnen komen overeenkomstig de eisen die thans worden gesteld. Ik betwijfel dat zeer - uitzonderingsgevallen daargelaten.

Prof.dr. W. van der Woude

Prof.dr. J. Haantjes

Over de kwestie van het kiezen van een onderwerp kunnen wat meer op de wiskunde gerichte opmerkingen worden gemaakt.

In de huidige situatie zijn degenen die menen in aanmerking te komen voor het schrijven van een dissertatie en die daartoe in de gelegenheid worden gesteld, daarvoor in zekere mate voorbereid en dat vindt reeds plaats vóór het doctoraalexamen. Er zijn tegenwoordig seminaria, vele voordrachten en keuzecolleges over verschillende onderwerpen. Men heeft daardoor zijn voorkeuren kunnen ontwikkelen en staat dichter bij het lopende onderzoek dan vroeger. Daardoor wordt men geprepareerd op een promotie-onderwerp. Krijgt men een tijdelijke aanstelling aan het Instituut, dan kan men in Instituutsverband werken aan het schrijven van de dissertatie. Is zo'n aanstelling niet mogelijk, en moet men dus buiten het formele verband van een Instituut werken, dan blijft in ieder geval de mogelijkheid aanwezig om voor moeilijkheden steun te vinden op het Instituut. Deze situatie heeft zich na 1945 geleidelijk ontwikkeld door de totstandkoming en groei van Instituten.

Vóór 1940 was de situatie voor degene die een onderwerp voor een dissertatie wenste aanzienlijk anders. Ik betrek mij hiervoor weer op ervaringen in Leiden. Er zijn wellicht plaatselijke verschillen aan te wijzen, maar in grote trekken geven die wel de algemene situatie weer.

In die oude toestand volgde ieder dezelfde reeks van standaardcolleges met daarnaast zekere wisselende caputcolleges. Deze waren nauwelijks richtinggevend. Tegen het einde van de dertiger jaren was er misschien wat meer variatie onder leiding van Kloosterman. Maar een idee van keuzepaketten - zoals thans - bestond niet. Men was niet betrokken bij het wetenschappelijk werk. De afstand tussen hoogleraren en studenten was, zoals ik al opmerkte, groot. Wenste men een onderwerp voor een dissertatie dan moest men zich wenden tot één van de hoogleraren en de zaak met hem bespreken. Men mag aannemen dat de hoogleraren in de laatste fase vóór het doctoraalexamen wel enige indruk hadden gekregen van hun studenten, onder andere door een colloquiumvoordracht die ieder éénmaal moest houden, en door de tentamens die mondeling plaats vonden en soms lang konden duren. Overigens zij opgemerkt dat het aantal tentamens veel minder in aantal was dan thans; een scriptie werd niet gemaakt. Wel was er nog een echt examen waarbij ook gevraagd werd. Men moest zelf een keuze bepalen tussen de twee hoofdrichtingen: meetkunde bij W. van der Woude of analyse bij J.C. Kluyver, na diens emeritaat in 1930 bij J. Droste. Algebra of getaltheorie zal er vóór de midden-dertiger jaren wel niet bij zijn geweest. De gedoceerde algebra was immers nog klassiek: "moderne algebra" was nog niet aan de orde, die kwam later onder de invloed van Van der Waerden en Kloosterman. Een bibliografisch onderzoek zou hier meer helderheid kunnen verschaffen.

2. Specifieke onderzoeksrichtingen en promotie-onderwerp

Er is nog een ander aspect dat een grote rol speelde bij de keuze van een onderwerp. Afgaande op mijn herinneringen aan de twintiger en dertiger jaren - een nader onderzoek zou dit moeten bevestigen - waren er in Leiden geen geprofileerde richtingen van wiskundig onderzoek, er was om zo te zeggen geen

"School", zoals men dat wel pleegt uit te drukken. De studenten waren niet of nauwelijks op enige wijze betrokken bij of in verbinding met lopende wiskundig-wetenschappelijke onderzoekingen. Van de publikaties van de hoogleraren wisten wij, meen ik, weinig of niets. Wisten wij, bijvoorbeeld, waarmee Kluyver zich bezighield? Men komt ertoe te vergelijken met de lokale traditie rond grondslagen en topologie in Amsterdam. Maar was deze traditie bekend, of voelbaar, bij de studenten? Ik denk ook aan de lokale "School" in de meetkunde in Groningen, daar gevestigd door P.H. Schoute, o.a. bekend door zijn boeken over meerdimensionale meetkunde. Later kwam daar G. Schaake met de studie van meetkundige verwantschappen en afbeeldingen. Daar kwamen in ieder geval dissertaties uit voort, later ook bij Gerretsen. In verbinding daarmee stonden in Utrecht de meetkundigen Jan de Vries en J.A. Barrau (meetkundige configuraties). In Utrecht blijvende noem ik J. Wolff, de opvolger van A. Denjoy, die verbindingen had met de Franse school aangaande de theorie van de functies, maar dat was, meen ik, toch al iets minder geprononceerd. Meer markant was, maar dan wat later, de school van J.F. Koksma met de getaltheorie (de diophantische approximaties) aan de Vrije Universiteit in Amsterdam.

Het komt mij voor dat er in die vroege periode in Leiden zulke uitgesproken richtingen niet waren. Dat verlangt enige toelichting. Opgemerkt moet dan eerst worden dat de ontwikkelingen rond Kloosterman zich pas in latere jaren ontplooiden.

In Leiden was W. van der Woude de puur meetkundige - met daarnaast grote belangstelling voor de mechanica. Hij promoveerde in 1908 in Groningen bij P.H. Schoute op een proefschrift getiteld *Over elkaar snijdende normalen aan een ellipsoïde en een hyperellipsoïde.* Zijn interesse ontwikkelde zich speciaal naar de algebraïsche meetkunde. Dit kwam tot uiting in de oratie die hij op 17 mei 1916 in Leiden hield bij zijn aanvaarding van het ambt van hoogleraar aldaar. Zij luidde: *Over 't snijpuntenstelsel van twee algebraïsche krommen.* Zijn publikaties over de stelling van Noether zijn bekend, maar kenden *wij* ze? Inderdaad, op het college algebraïsche meetkunde behandelde hij het onderwerp, maar ik betwijfel of wij besef hadden van de diepere betekenis ervan. Evenwel was dit geen geprofileerde richting, een richting waarvoor men, eventueel incidenteel, naar Leiden zou zijn gegaan, zoals ik mij zou kunnen indenken destijds naar Amsterdam voor de grondslagen en later misschien naar Utrecht voor Lie-groepen, nog in het midden gelaten dat een, eventueel tijdelijke, verwisseling van universiteit toen weinig gebruikelijk was. Om niet te spreken van studiereizen bijvoorbeeld naar Göttingen, waar toch enkelen enige tijd verbleven. Later noem ik er enkelen.

J.C. Kluyver had een wat merkwaardige carrière. In 1881 behaalde hij in Delft het diploma van civiel-ingenieur en was daarna een aantal jaren leraar. Aanvankelijk was zijn interessegebied de meetkunde, daarnaast de algebra. In 1892 werd Kluyver benoemd in Leiden. Zijn oratie, gehouden op 28 september 1892, was getiteld : *Beschouwingen over de nieuwere algebra.* In Leiden bewoog hij zich daarna speciaal op het terrein van de analyse en hij had daarbij, evenals Wolff in Utrecht, zekere bindingen met de Franse school, maar zeer geprononceerd was dit niet. In zijn algebracolleges was van "nieuwere algebra" weinig te bespeuren. Kluyver was betrokken bij de uitgave van de *Oeuvres complètes* van Th.J. Stieltjes (Groningen 1914). Tezamen met W. Kapteyn en E.F. van de Sande Bakhuyzen vormde hij de redactiecommissie die onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap dat werk voltooide.

W. Kapteyn was van 1878 tot 1916 hoogleraar te Utrecht. Hij werd opgevolgd door A. Denjoy.

E.F. van de Sande Bakhuyzen was van 1909 tot 1918 buitengewoon hoogleraar in de sterrenkunde te Leiden. Niet te verwarren met H.G. van de Sande Bakhuyzen die van 1872-1908 hoogleraar in de sterrenkunde was, eveneens te Leiden.

Prof.dr. J.C. Kluyver

Van J. Droste, na het emeritaat van Kluyver diens opvolger, zijn geen specifieke interessesferen aan te wijzen. Evenals van Kluyver, was zijn carrière wat merkwaardig. Droste was van origine theoretisch natuurkundige. Hij was een leerling en assistent van Lorentz en promoveerde bij hem in 1916 in Leiden op een proefschrift over de algemene relativiteitstheorie, toen een geavanceerd onderwerp: *Het zwaartekrachtsveld van een of meer lichamen volgens de theorie van Einstein*; zie [4] en enkele verdere artikelen in hetzelfde tijdschrift.

Prof.dr. J. Droste

Men kan zich de vraag stellen wat de reden is geweest dat Droste overging naar de wiskunde, in het bijzonder de analyse, als men bedenkt dat wiskunde en natuurkunde toch in de grond in verschillende denkwerelden liggen. Te meer is dit merkwaardig daar deze dissertatie een grote prestatie was in de prille jaren van de algemene relativiteitstheorie, die begripsmatig en mathematisch nog zeer moeilijk werd gevonden. Is deze overgang misschien verklaarbaar als een reminiscentie aan de klassieke idee van de eenheid van de wiskunde en de natuurkunde zoals die bestond in de klassieke periode, een idee die wij nu nauwelijks, misschien in het geheel niet meer hebben? De analyse en de natuurkunde en mechanica waren toen, althans van technisch oogpunt bezien, nauw met elkaar verweven - met misschien meer daarnaast de meetkunde en de algebra. Leest men de stellingen die Droste aan zijn proefschrift toevoegde, dan vindt men daarin kennelijk reeds een zekere voorkeur voor de wiskunde, een meer op de voorgrond treden van de wiskunde dan men van een fysicus zou verwachten - hoewel ik de betrekkelijke waarde van stellingen besef.

Men zou hebben kunnen verwachten dat, nadat Droste eerst lector later hoogleraar was geworden, deze fysische achtergrond op enigerlei wijze toch nog tot uiting zou zijn gekomen bij zijn colleges over de analyse in de vorm van voorbeelden of toepassingen. Het vak biedt daartoe toch ruimschoots gelegenheid. Ik denk bijvoorbeeld aan de "echte" theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen, die met het slagwoord "Courant-Hilbert" kan worden gekarakteriseerd. Hij heeft daarover bij mijn weten nooit college gegeven, hoewel het belang daarvan de analytici toch wel duidelijk moet zijn geweest, zeker in Leiden rond Ehrenfest. Of was dit het domein van de theoretische fysica? Maar Droste was dat toch van origine! Van dit alles was, voor zover ik mij herinner, niets te bespeuren. Op ons verzoek heeft hij nog eens een college gegeven over de speciale relativiteitstheorie. Zijn normale colleges betroffen de zuivere analyse: hoofdcolleges en enkele wisselende caputcolleges. Ik herinner mij een caputcollege van omstreeks 1932 over de theorie van de conforme afbeelding waarin hij melding maakte van het vermoeden van Bieberbach over univalente functies, een vermoeden dat pas kort geleden in positieve zin tot oplossing is gebracht. De problematiek rond de uniformisering kwam niet ter sprake. Overigens kwam de koerswijziging in de richting van de wiskunde opvallend duidelijk tot uiting in de oratie die Droste hield op 24 september 1930 naar aanleiding van zijn ambtsaanvaarding als hoogleraar. Zij was getiteld: *De eenheid der wiskunde* en boeide mij bijzonder. Het gebied dat hij daarin behandelde was nieuw voor mij - misschien is het beter te zeggen voor ons. Droste kwam in zijn rede tot beschouwingen over de grondslagenproblematiek, de theorie der verzamelingen, axiomatiek, de kwestie van de antinomieën, het intuïtionisme, predikatieve en impredikatieve definities, kortom zaken van mathematisch-filosofisch karakter. Het onderwerp interesseerde mij, maar in zijn colleges werd daaraan verder geen gevolg gegeven. Wat aan verzamelingenleer in de colleges was ingevoegd mag geen naam hebben: aftelbaarheid,..., enkele elementaire topologische begrippen. Als men een oratie in zekere mate mag zien als een voorgenomen programma, kan men daarover zijn verwondering uitspreken. Ik merk terloops op dat dit soort filosofische kwesties ook ter sprake komt in de oratie van J. Wolff gehouden op 16 oktober 1922 te Utrecht, getiteld: *Over het subjectieve in de wiskunde.*

Wat betreft dissertaties zal het duidelijk zijn dat uit meer geprononceerde studierichtingen ook meer geprofileerde proefschriften voortkomen. Maar onder de geschetste omstandigheden destijds in Leiden was de keuze van een promotie-onderzoek wel wat meer vrijblijvend. Zo kon een enige jaren oudere vriend die bij Kluyver op een onderwerp uit de analyse wilde promoveren van deze het advies krijgen maar eens wat te lezen en op te schrijven over het onderwerp “analytische voortzetting”. Het is nauwelijks te verwonderen dat dat op niets uitliep. Hij zocht daarna zelf een onderwerp en promoveerde er op bij Droste.

3. Keuze of aanleg?

Bij dit soort beschouwingen komt men tot de vraag waardoor iemands keuze in zulk soort zaken wordt bepaald. Kluyver, ingenieur zijnde, koos voor de zuivere wiskunde; Droste deed hetzelfde. En als een student een keuze maakt uit algebra, meetkunde of analyse, op welke gronden doet hij dat dan? Ik wil slechts een aantal factoren noemen die daarbij in overweging kunnen worden genomen. Men kan bij een student die een keuze maakt denken aan een toevallige interesse, gewekt door een speciale situatie: een voordracht, een artikel. Maar men kan dieper gaan en dan denken aan aanleg voor een bepaalde richting. Wat is de rol van het milieu en de omstandigheden waaronder iemand zich heeft ontwikkeld? Kan er sprake zijn van een aangeboren aanleg voor een bepaalde richting? Die zou dan in verband kunnen staan met karakteristieke trekken van het gebied waarnaar iemands belangstelling in het bijzonder uitgaat: de algebra meer formeel, algoritmisch van karakter, te verbinden met een structureel geaarde geest; de meetkunde - althans zoals die vroeger was - met de ruimtelijke aspecten; de analyse met het streven naar uiterste strengheid. In dit verband denk ik aan de kritiek van Leibniz op de door Descartes in de meetkunde ingevoerde algebraïsche methode die hij te automatisch van aard vond, te weinig ruimte biedend aan de inventie, terwijl anderszijds Leibniz toch niet wars was van algoritmische methoden. Waarom wordt de ene mathematicus algebraïcus en de andere een man van de analyse? Ik meen dat een ieder wel zijn voorkeursrichting heeft; ik ken er die al zeer vroeg gedisponeerd waren voor de algebra, ver stonden om maar een voorbeeld te noemen, van integralen. Moet misschien worden gezegd dat iemand zich ontwikkelt als algebraïcus omdat hij dat in zijn wezen al is, als overeenkomend met zijn mentale structuur? De voorbeelden zijn welbekend: G. Steiner als fervent zuiver-meetkundige, Emmy Noether als algebraïca; Weierstrass, Hermite, Stieltjes als analytici - hoewel in de klassieke periode de onderscheiden misschien niet zo pregnant waren. Had Emmy Noether ook een even befaamd wiskundige in de richting van de analyse kunnen worden of zou dat niet met haar wezen hebben gestrookt?

Dit zijn vragen die bij mij opkomen in verband met het probleem van de keuze van een promotie-onderwerp. Een analyse ervan, hoe interessant ook, vraagt meer dan hier kan worden gegeven.

4. Keuze-overwegingen: meetkunde of analyse?

Ik ga iets nader in op de overwegingen die voor mij persoonlijk een rol hebben gespeeld.

Zoals ik eerder opmerkte, moest men kiezen tussen de meetkunde bij Van der Woude en de analyse, eerst bij Kluyver later bij Droste. Uiteraard moest de keuze worden gemaakt op grond van de op de colleges behandelde materie en wat men daarnaast op eigen initiatief had bestudeerd. Mijn keuze viel op de analyse. De colleges over analyse resp. meetkunde waren zeer verschillend van karakter. Enerzijds kan dit zijn gelegen in de aard van het vak, maar anderzijds speelt daarbij ook de persoonlijkheid van de docent een rol. De colleges van Van der Woude waren levendig, werden impulsief gegeven en stimuleerden. De stof had een zeker beeld van concreetheid; de meetkunde was nog niet gealgebraïseerd in de mate als thans. De colleges van Droste waren wat monotoon, zij muntten uit door uiterste strengheid - ik denk aan de vele ϵ's en δ's -, waren strak en formeel opgebouwd en werden wat onaandoenlijk gegeven. Misschien ligt dit in de aard van de materie als ik die vergelijk met de meetkunde zoals wij die kregen gepresenteerd: analyse was een vak dat streng behoorde te worden opgebouwd, iets wat in het verleden (althans in Leiden) niet altijd gebeurde - zonder overigens aan de meetkunde te kort te willen doen; Kluyver was met het betrachten van strengheid al begonnen. De beide persoonlijkheden waren zeer verschillend: Van der Woude levendig, kon zich opwinden, Droste wat meer afstandelijk, boezemde een zekere vrees in, ook bij tentamens en examens, hij was minder toegankelijk hoewel hij later, bij nader contact, toch ook wel een ander beeld opriep. Op grond van deze omstandigheden zou misschien een keuze voor de meetkunde voor de hand hebben gelegen, en velen deden dat ook. Dat ik desondanks koos voor de analyse heeft dus blijkbaar te maken met een kwestie van een zekere aanleg, een interessesfeer. Het is een aspect dat ik meen reeds te kunnen bespeuren in mijn middelbare schooltijd. Zoals ik in hoofdstuk I al schreef, was ik toen al meer geïnteresseerd in de theorie, minder in het specifieke dat, naar ik toen meende, de meetkunde in zich had. Ik was minder geboeid door vraagstukken. Het was uiteraard een onjuist beeld van de meetkunde waarbij aan dat vak geen recht werd gedaan. Maar de behandelde meetkundematerie gaf misschien wel aanleiding tot zo'n beeld. Laat ik dit nader toelichten. Er was de traditionele analytische meetkunde met veel metrische stellingen over kegelsneden en kwadratische oppervlakken, bundels van kegelsneden, dualiteit, punt- resp. lijncoördinaten en vooral veel vraagstukken, alles zeer gedetailleerd. Later in de algebraïsche meetkunde stellingen over dubbelpunten van krommen, keerpunten, de formules van Plücker, meer specifiek elliptische krommen, maar alleen over de reële getallen. Er werd dus geen verband gelegd met algebraïsche functies, Riemann-oppervlakken, elliptische en abelse integralen. Het is eigenlijk merkwaardig dat Van der Woude daarover niet sprak want in zijn oratie die ik hiervoor noemde wees hij op deze zaken. Bovendien behandelden Kluyver en Droste elliptische functies. Deze zaken heb ik, tot aanvulling, toen zelf bestudeerd aan de hand van de boeken van Appell en Goursat: *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (1894, 1926). Ik las daarin ook wat meer over birationele transformaties die wel aan de orde waren gekomen op het college. Het verhelderde mijn beeld, maar desondanks vond ik dit destijds erg specialistisch. Waarom alleen krommen van de 3^e graad? Later, met meer ervaring, gaat men inzien dat dit oordeel oppervlakkig was en dat er, vooral van algebraïsche kant, toch veel meer achter zit - hoewel ik, van algebra gesproken, mij herinner dat "optelling van punten" op een 3^e graadskromme toch wel aan de orde was geweest. Thans zijn immers elliptische krommen een vooraanstaand onderwerp dat in verband staat met moderne algebraïsche en getaltheoretische ontwikkelingen. Is het een modeverschijnsel? Erkend moet echter worden dat het in de eind-twintiger jaren misschien toch nog te vroeg was voor dit soort zaken. Volledigheidshalve vermeld ik nog dat Van der Woude ook sprak over lijnenmeetkunde en dat er een groot college over differentiaalmeetkunde was.

Hoe dit ook zij, ik was meer geïnteresseerd in theorieën, ik zocht naar "algemene" richtingen, ontwikkelingen die uitgaan boven het specifieke. Misschien moet ik zeggen dat mijn belangstelling reeds toen blijkbaar ging in de richting ervan de grote lijnen, methoden en ideeën, die zich later ontwikkelde in de richting van de evolutie van de wiskunde die ik destijds meende te kunnen vinden in steeds algemenere uitspraken en theorieën. Ik zal toen, in die vroege jaren, wel over het hoofd hebben gezien dat feiten, vraagstukken en toepassingen toch wel een voorwaarde zijn om tot de essentie door te dringen, om te weten waarover men spreekt.

Deze overwegingen voerden mij tot de analyse, die ik als "algemener", meer theoretisch zag. Ik dacht aan de theorie van de infinitesimaalrekening: kwesties over differentieerbaarheid, stellingen over integralen, theorie van de analytische functies, existentiestellingen en meer zaken van dit genre. De theorie was hier misschien meer aanwezig dan in de hiervóór geschetste ontwikkelingen in de meetkunde. Uiteraard komt men dan later tot de overtuiging dat een idee om iets te doen met de theorie van "algemene functies" een illusie is. Als een stelling wordt geformuleerd voor een "willekeurige" functie f, leert men beseffen dat zo'n stelling toch meestentijds slechts geldt onder zware voorwaarden. Maar die maken op de beginner niet veel indruk; het gaat dan toch maar over een "willekeurige" f; tegenvoorbeelden geven lag niet zo in de mode. Men neemt dan later kennis van stellingen, bewezen met middelen uit de topologie en de functionaalanalyse, die - om maar een voorbeeld te geven - uitdrukken dat de verzameling van alle differentieerbare functies een zekere metrisch-topologische eigenschap bezit die verwant is met verzamelingen van de maat 0, d.w.z. dat differentieerbaarheid in zekere zin exceptioneel is in de verzameling van de continue functies. Dat zijn resultaten van de dertiger jaren waarmee men in Leiden nog geen kennis maakte. Niettemin heeft een idee van "algemeenheid" mij in mijn verdere leven toch niet geheel losgelaten. Ik kom daarop terug in een volgend hoofdstuk.

5. ANALYSE
Het verging mij als de hiervoor genoemde vriend. Van mijn promotor Droste kreeg ik de raad het befaamde boek van J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* te bestuderen; het was toen juist verschenen (1932). Ik vond daarin de door mij geapprecieerde theoretische aspecten. Het boek bevat als inleiding een bespreking van de verschillen tussen elliptische en hyperbolische partiële differentiaalvergelijkingen met betrekking tot het z.g. probleem van Cauchy. Er is een discussie over de kwestie van de analyticiteit van oplossingen en men vindt er aanwijzingen over een klasse van functies tussen de oneindig vaak differentieerbare functies en de analytische functies, de z.g. quasi-analytische functies die in verband worden gebracht met de oplossingen van parabolische differentiaalvergelijkingen (de warmtevergelijking). De behandeling van oplossingsmethoden voert Hadamard tot het invoeren van een nieuw integratiesymbool (nouveau symbole d'intégration). Dit wordt gebruikt voor het aangeven van het door Hadamard genoemde "partie finie" van een divergente integraal waarvoor hij de notatie

$$\int_a^b f(x)dx$$

invoert. Dit symbool heeft, voor zover mij bekend, verder geen ingang gevonden. Men vindt dit begrip terug in de eerste verhandeling van Schwartz over de theorie van de distributies (1946). Er is in dit boek een uitvoerige behandeling van het principe van Huygens aangaande de voortplanting van golven in relatie tot de dimensie van de betrokken ruimte (even of oneven). Is, toen Droste mijn aandacht vestigde op dit boek, daarmee toch iets van zijn fysische achtergrond tot uiting gekomen? De kwestie van de voortplanting van golven is mij aanleiding tot een opmerking terzijde. Kunnen studenten die zoals thans meer gebruikelijk, naast de wiskunde niet meer de natuurkunde als bijvak hebben, zo'n hoofdstuk over golven in verband met de dimensie nog begrijpen? Kennen zij de betekenis van de hyperbolische vergelijking in verband met de golfvoortplanting nog? Zouden zij een opmerking die Ehrenfest eens maakte dat wij het licht te danken hebben aan het minusteken in de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

nog kunnen waarderen? En als ik daaraan toevoeg dat de potentiaalvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ staat aan de basis van de elektriciteit? Zo het antwoord ontkennend zou moeten luiden, zou ik dat toch zien als een culturele verarming. Ehrenfest's opmerking zij studenten ter overdenking aanbevolen. . . . Maar overigens was het uiteraard moeilijk om aan Hadamard's resultaten iets te verbeteren of toe te voegen. Zo bestond bijvoorbeeld de theorie van de distributies, waarin dit onderwerp later werd ingevoegd, nog niet. Ik vind het boek nog steeds bijzonder interessant en wellicht heeft het mijn belangstelling gewekt voor het werk van de Franse wiskundigen.

De bestudering van dit boek voerde mij tot de elliptische differentiaalvergelijkingen en de potentiaaltheorie, meer in het bijzonder de vergelijking van Laplace $\Delta u = 0$ en het probleem van Dirichlet, een randwaardeprobleem. Het gaat daarbij om de existentie van een oplossing van die vergelijking - de oplossingen worden harmonische functies genoemd - in een willekeurige open verzameling van $\mathbb{R}^3$ die gegeven randwaarden aanneemt. Tot aan het einde van de vorige eeuw - misschien zelfs nog wat langer - had "existentie" nog de betekenis van het geven van een expliciete oplossing, een oplossing in gesloten vorm zoals in de gedaante van een integraal of een reeksontwikkeling. Voor speciale open verzamelingen was men daarin geslaagd, maar voor de algemene situatie was dit niet gelukt. Het probleem werd daarom beschouwd als nog niet opgelost totdat in 1911 een tegenvoorbeeld werd gegeven: er zijn open verzamelingen waarvoor er geen zodanige oplossing bestaat. Misschien voelde Droste zich enigermate betrokken bij dit probleem want in zijn dissertatie vergelijkt hij de gravitatievergelijkingen van Einstein met die van de klassieke van Newton en de vergelijking $\Delta u = \rho$. Hij gaf er echter geen blijk van. Men heeft daarna het probleem gemodificeerd en in verband daarmede formuleerde ik, geïnspireerd door de middelen van de functionaalanalyse, een uniciteitsprobleem waartoe ik een aanvankelijke bijdrage gaf (introductie van een maatbegrip dat later de harmonische maat zou heten) en wat later een gedeeltelijke oplossing. Dit proefschrift (1935) viel op de grens van de klassieke potentiaaltheorie en de moderne ontwikkelingen in dit gebied. Belangrijke bijdragen tot de theorie kwamen van Franse wiskundigen, in het bijzonder van M. Brelot, zie [12]. Vermeldenswaard is nog een vermakelijk incident toen ik met het werk bezig was. Al enige tijd zocht ik naar een bewijs voor een stelling, een hoofdresultaat, maar het wilde niet gelukken. Op een zeker moment verzuchtte ik "Ik kan dat bewijs maar niet vinden", waarop een toevallig aanwezige, een niet-wiskundige, opmerkte: "Maar waar heb je dat bewijs dan gelaten?" Toch zit er in dit incident een diepere achtergrond. Blijkbaar had ik voor mijzelf zekerheid aangaande de juistheid van de bewuste stelling, maar het bewijs wist ik niet. Zulke situaties zijn welbekend in de wiskunde. Maar waaraan ontleent de wiskundige een dergelijke zekerheid? Misschien zou een mathematicus die een platonistisch standpunt inneemt daar passend op kunnen reageren. Maar wat zegt degene die gelooft in de mentale schepping van de wiskunde? Zou er dan toch iets "achter de wiskunde" zijn? Hieraan verbindt zich een vraag: hoe ontstaan eigenlijk stellingen? Overigens, ik vond een bewijs.

In de daarna volgende episode vervolgde ik de studie op dit terrein en dan blijkt hoeveel vertakkingen zo'n probleem kan hebben. De topologische structuur van de rand van de open verzameling speelt een rol en in verband met singulariteiten introduceert men een begrip "oneigenlijk deel" van de rand. Er zijn verbanden met het topologische begrip dimensie, met de z.g. capaciteit van een verzameling - een zekere subadditieve maat - met de Hausdorff-maat en de Hausdorff-dimensie, de transfiniete diameter van een verzameling. Een boekje van Bouligand, *Les définitions modernes de la dimension* verschafte mij een inleiding in deze ontwikkelingen. Ik kom op dit boekje terug in het volgende hoofdstuk.

6. DISSERTATIES

Bezie ik de dissertaties van vóór 1940, dan meen ik voorzichtig te mogen zeggen dat zij een ander karakter hadden dan de dissertaties zoals die zich geleidelijk ontwikkelden na 1945. Het komt mij voor dat zij verder af stonden van wat actueel gebeurde dan later werd geëist. Er werden destijds ook andere, naar het mij voorkomt minder stringente maatstaven aangelegd. Een bibliografisch onderzoek in volle omvang is voor zover mij bekend niet gedaan. Misschien is de zaak daarvoor ook niet belangrijk genoeg, hoewel zo'n onderzoek toch wel een beeld zou kunnen geven van de ontwikkelingsgang. Daarin zouden uiteraard ook de andere universiteiten moeten worden betrokken.

Een opsomming van dissertaties van vóór 1940 zal ik hier niet geven want dit zou te ver voeren. Ik zal ook geen selectie maken omdat ik geen waardeoordelen wens uit te spreken, voor zover mij dat al mogelijk zou zijn bij de veelheid van onderwerpen. Bovendien zou ik dan moeten treden in een bespreking van de gehanteerde maatstaven. Als ik toch enkele uitzonderingen maak is dat om bijzondere redenen.

Wegens het grote belang voor de algebraïsche topologie moet de dissertatie van Van Kampen worden genoemd: E.R. van Kampen (1929), *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätsätze,* promotor W. van der Woude. Dit proefschrift kwam tot stand na studiereizen naar Göttingen en Hamburg die werden ondernomen op aanraden van Ehrenfest. In zijn voorwoord dankt Van Kampen zijn promotor voor zijn belangstelling, speciaal omdat het onderwerp buiten diens studierichting lag. Het is toch eigenlijk wel vreemd dat de theoretisch fysicus Ehrenfest degene is geweest die de wiskundige Van Kampen naar Göttingen heeft gezonden (zo kan men het geloof ik wel zeggen). Hier moet dan ook worden genoemd Ehrenfest's dochter T. van Aardenne- Ehrenfest die in 1931 bij Van der Woude promoveerde op de dissertatie: *Oppervlakken met scharen van gesloten geodetische lijnen.* Ook zij was in Göttingen geweest, waar zij colleges volgde bij Harald Bohr en bij Born (quantummechanica), de invloed van haar vader zal daaraan wel niet vreemd zijn geweest. Voor wat betreft buitenlandse studiereizen moet ook worden genoemd H.D. Kloosterman. Hij bracht enige tijd door in Kopenhagen, eveneens bij Harald Bohr en in Oxford bij Hardy, waarschijnlijk eveneens op instigatie van Ehrenfest. Naar mij zeer onlangs uit informatie bleek heeft Kloosterman op de middelbare school wiskundeles gehad van de leraar P. Visser, die ook mijn leraar was; ik duidde er op in hoofdstuk 1. Het bracht in mijn herinnering terug dat Visser er eens over sprak; hij was zeker trots op zijn oud-leerling. Ik herinner mij nu dat hij er daarbij zijn verwondering over uitsprak dat Kloosterman wel bij Harald, de mathematicus, studeerde, maar nooit Niels Bohr, de fysicus, had ontmoet. Als het waar is! Kloosterman promoveerde in 1924 op het proefschrift: *Over het splitsen van geheele getallen in een som van kwadraten,* bij Kluyver.

Zou men misschien kunnen zeggen dat Ehrenfest door zijn loutere aanwezigheid een grote invloed heeft gehad op de jonge Leidse wiskundigen? Een studie van de lokale geschiedenis van faculteiten en instituten zou hier helderheid kunnen verschaffen, maar zulke lokale geschiedschrijving ontbreekt bij mijn weten. Deze leemte verdient te worden aangevuld.

Eveneens was Van der Woude promotor bij de twee volgende promoties:
B.M. Reestman, *Inleiding tot de theorie der klasselichamen* (1933);
H.L. Oussoren, *Relatief-Abelse algebraïsche functielichamen met een eindig constantenlichaam* (1933).
Beide volgden na buitenlands verblijf (Göttingen, Hamburg).
Dan noem ik:
W.Th.L. van Geldrop, *Lichamen van algebraïsche functies bij een volkomen constantenlichaam* (1936)
waarvoor Droste optrad als promotor. Deze drie dissertaties ontstonden onder leiding van Kloosterman.

Ik noem de laatste drie dissertaties in de eerste plaats wegens de daarin voorkomende p-adische beschouwingen in algebraïsch-getaltheoretische context. Dit is het gebied waarin ik mij in de veertiger jaren ging bewegen, zij het op het terrein van de analyse. Op mijn werk hadden zij echter geen invloed.

Bovendien, en dat is een belangrijker reden, geloof ik deze dissertaties te mogen zien als een aankondiging van een nieuw tijdvak in de universitaire activiteiten, in mijn eerder gebruikte terminologie een intrede in de nieuwe mathematische wereld, zij het ook vertraagd ten opzichte van de stand van het wetenschappelijk onderzoek.

Wel van invloed op mijn p-adische werk was een andere dissertatie, maar dan moet ik mij wenden tot de Vrije Universiteit te Amsterdam:
H. Turkstra, *Metrische bijdragen tot de theorie der diophantische approximaties in het lichaam der p-adische getallen* (1937). Promotor J.F. Koksma.

Hoofdstuk 3

Streven naar algemeenheid

1. Ontwikkelingslijnen

In het voorgaande wees ik op een zekere door mij destijds, terecht of onterecht, gevoelde tegenstelling tussen de meer concreet gerichte aspecten van de wiskunde, meer specifiek te noemen onderwerpen, met daarnaast algemene theorieën, ontwikkelingen van abstract karakter, men zou kunnen zeggen het theoretische, structuralistische facet van de wiskunde. Men kan argumenteren dat een soortgelijke tegenstelling ook thans nog is aan te wijzen, maar ik wil daarop niet ingaan. Dit theoretische aspect boeide mij, en is mij steeds blijven fascineren. Ik meende dit algemene facet destijds meer te kunnen vinden in de ontwikkelingen in de analyse dan in de meetkunde. Ik merkte in dit kader op dat de eerste decennia van de 20e eeuw een explosie van abstracte concepten te zien hebben gegeven. De aanvangsjaren van mijn wiskundige activiteiten vielen in deze periode en zij kunnen dus vergelijkingsmateriaal leveren. Ik geef in dit hoofdstuk wat losse gedachten verbonden met deze ontwikkelingen. Ik wil belichten hoe ik thans terug kijk naar de ontwikkelingen in die jaren, waarbij ik in zekere mate in het centrum stel het aspect dat ik aanduid als "streven naar algemeenheid", leidende tot de wiskunde van een "abstracte realiteit". Mijn beschouwingen hebben betrekking op de eerste decennia van de 20e eeuw, tot ongeveer de veertiger jaren. Zij zijn gebaseerd op persoonlijke indrukken en pogen een tijdsbeeld te schetsen zoals ik dat heb ervaren. Daarbij zal ik mij onder meer laten leiden door series van boeken uit die periode. Juist in die jaren begonnen enkele series van monografieën, veelal van niet te grote omvang, die een beeld geven van de explosieve ontwikkelingen en die daarom waard zijn te worden gememoreerd. Men bedenke daarbij dat jonge mathematici in die jaren, veel meer dan thans, een wat geïsoleerd bestaan leidden waarin boeken een grote rol speelden. Boeken behoren tot ons cultuurbezit. Vooraf gaan enige algemene beschouwingen.

Het schijnt de mathematici in zekere mate eigen te zijn voor hun resultaten een onder de gegeven omstandigheden zo groot mogelijke algemeenheid na te streven. Het is een trek die men door de loop van de historie kan volgen. Er zijn voorbeelden van die wij thans als min of meer triviaal zien, maar er zijn ook dieper liggende en vele liggen in het overgangsgebied van de klassieke naar de moderne wiskunde. Men pleegt stellingen van anderen - of van zichzelf - aan te vullen of te corrigeren door ze onder ruimere of andere condities te formuleren. Men geeft nieuwe definities die oude definities uitbreiden tot ruimere klassen van objecten. Ik wijs bijvoorbeeld op de opvolging van de integraalbegrippen in de loop der jaren van Riemann tot Lebesgue en Denjoy en, van een ander karakter, tot een integraalbegrip conform Bourbaki. Het is opvallend hoe dikwijls men in boeken en tijdschriftartikelen de termen "generalisatie " en "algemene theorie" aantreft. Men generaliseert theorieën en zulke processen van generalisatie kunnen vèrstrekkende gevolgen hebben. In uiterste consequentie kunnen zij leiden van theorieën die wij concreet noemen tot theorieën die mathematici als "abstract" aanduiden.

Overigens is bij deze ontwikkelingsaspecten niet steeds de generalisatie-idee als primair motief aan te wijzen. Aan de idee van een synthese, van het scheppen van algemene, vaak abstracte, theorieën kunnen andere, misschien zelfs dieper liggende creatieve factoren ten grondslag liggen. Wellicht moeten die zelfs worden gezien als essentieel voor de fundamentele voortgang. Ik volsta met het noemen van enkele fundamentele namen en episodes (maar er zijn ook de meer secundaire): Descartes, Leibniz en Newton, Cantor en de theorie van de verzamelingen, Poincaré, Hilbert en aspecten van axiomatisering. Maar zelfs dan blijft bij de opbouw van een theorie de generalisatie-idee een scheppende functie vervullen. Men denke aan de doorwerking van de oude additieve structuur, bijvoorbeeld bij het optellen van functies en in de groepentheorie, aan de idee van een algemeen begrip metriek, in laatste instantie gebaseerd op het begrip afstand in de euclidische meetkunde. Sommigen zullen hier misschien liever spreken van analogie dan van een proces van generalisatie. Beide zijn echter nauw met elkaar verbonden. Voor zulke ontwikkelingstendensen zou misschien in plaats van de aanduiding "Streven naar algemeenheid" beter op zijn plaats zijn te spreken van "Streven naar abstractie". Overigens, de vraag blijft dan wat in deze context wordt bedoeld met de term "abstract"; het heeft te maken met verzamelingen, structuren, axiomatiek. Niet-wiskundigen zullen zeggen dat alle wiskunde een abstracte wetenschap is, maar voor wiskundigen zelf heeft de term een andere betekenis. Voor mij was generalisatie, het scheppen van algemene theorieën, in zekere mate verbonden met de neiging tot abstractie, althans in mijn wat latere jaren. Daarbij zij dan opgemerkt dat in mijn Leidse tijd - wat ruimer gezegd, vóór 1940 - de terminologie "abstract" in de gepresenteerde stof in het geheel niet voorkwam: er waren daarin geen abstracte groepen, abstracte ruimten, . . . Overigens, als mathematici een uiteenzetting beginnen met de woorden "zij f een functie..." en daarop een redenering baseren dan zit daarin voor de niet-wiskundige een zekere abstractie, zo men wil een abstractie van hoger niveau dan wanneer een functie expliciet wordt aangegeven. Hij zal vragen: "welke functie dan?". Is dit bijvoorbeeld een punt waarom wiskunde "moeilijk" wordt gevonden?

Maar ook indien wij, retrospectief, lijnen in de ontwikkeling menen te kunnen aanwijzen die samenhangen door opvolgende generalisaties, maar waaraan toch andere bronnen blijkbaar ten grondslag lagen en waarbij andere denkbeelden zijn op te merken, blijft het waardevol op zulke verbanden te attenderen. Deze beschrijvingsvorm versterkt onze blik op het ontstaan en de samenhang van de wiskunde. Het is, om zo te zeggen, beoefening van de historie met behulp van een van te voren geconcipieerd beschrijvingsmodel, een soort geschiedenistheorie. Dit moge misschien een onwetenschappelijke methode zijn, het blijft boeiend om lijnen en eenheid in de ontwikkeling te zien.

Door een elementair voorbeeld wil ik aan deze gedachten wat concreter vorm geven.

Ik noem de uitbreiding van de analytische meetkunde van het platte vlak tot de analytische meetkunde van de ruimte. In essentie gaat het hierbij om een afbeelding van de twee- resp. driedimensionale euclidische ruimte op een "ruimte" van getallenrijen (x_1,x_2) resp. (x_1,x_2,x_3) waarbij de meetkundige eigenschappen worden vertaald in formules; het is de verbinding tussen meetkunde en algebra. Het lijkt ons een triviale generalisatie. Maar was het dat ook in het verleden? Waarom werden de traditionele leerboeken over de analytische meetkunde vaak geschreven in twee delen (of twee gebundelde delen): een eerste deel over het platte vlak, een tweede over de ruimte? Men zie het eerder genoemde bibliografische boek van F. Müller. Was dit louter om utilitaire redenen, om de zaken gescheiden te houden? Gaven de resultaten in de onderscheidene gevallen daartoe aanleiding en lag unificatie, zoals thans in de lineaire algebra, nog niet in de rede? Uiteraard trekt men dan de lijn door naar de vierdimensionale meetkunde. Een introductie van een "ruimte" van getallenrijen $(x_1, \cdots ,x_4)$ - en algemener $(x_1, \cdots ,x_n)$ - is evident; het is de vierdimensionale, resp. n-dimensionale analytische meetkunde. Maar de verbinding met de vierdimensionale resp. n-dimensionale euclidische ruimte zal toch wel verbonden zijn geweest met conceptuele problemen. De vierdimensionale, en algemener de n-dimensionale, meetkunde kwam pas tot ontwikkeling incidenteel in de 19e eeuw, o.a. door Möbius, Cayley en speciaal Grassmann (1844). Het rekenen met rijen van n-getallen mag ons dan als generalisatie triviaal voorkomen, over het concept van een ruimte van vier dimensies zijn nog tot in onze eeuw boeken geschreven. Ik noem bijvoorbeeld P.H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie, 1. Teil: Die lineare Räume* (1902); *2. Teil: Die Polytope* (1905). Meer introducerend zijn Hk. de Vries, *De vierde dimensie* (1915) en R. Weitzenböck, *Der vierdimensionale Raum* (1929). Deze laatste wijdde er zijn oratie getiteld *Over de vierde dimensie*, aan bij zijn ambtsaanvaarding op 30 april 1923 in Amsterdam. In de richting van de mystiek noem ik M. Maeterlinck, *La vie de l'espace* (1928). In deze boeken gaat het om de niet-gealgebraïseerde meetkunde, over het concept van een vierde dimensie.

Hier heeft men de conditie van rijtjes van 2 resp. 3 reële getallen laten vallen en uitbreiding gezocht naar rijtjes van n-getallen. Ingrijpender wordt het als men de conditie van eindige rijen laat vallen en uitbreiding zoekt naar ruimten

van oneindige rijen $(x_1, x_2, \cdots)$. Onder de conditie $\Sigma x_i^2 < \infty$ leidt dat tot de Hilbert-ruimte. De bronnen van de invoering van de Hilbert-ruimte, hetzij zoals hier als rijtjesruimte, hetzij als een zekere functieruimte, zijn weliswaar niet primair gelegen in de uitbreidingsidee, zij waren directer en kwamen van verschillende zijden in de analyse. Maar in de theorie van de Hilbert-ruimte treft men verschillende begrippen aan die zijn te zien als generalisaties van elementaire meetkundige concepties: het begrip afstand, het begrip orthogonaliteit enz. Het gaat daarbij om de hantering van dergelijke begrippen onder algemene situaties. Overigens moet wel worden opgemerkt dat in sommige oudere boeken over de theorie van de Hilbert-ruimte, deze ruimte wel werd gepresenteerd in een vorm die staat nabij de idee van een uitbreiding van eindig-dimensionale naar oneindig-dimensionale ruimten. Men zal misschien zeggen dat het dan gaat over een kwestie van didactiek. Eén van de eerste boeken waarmee ik met dit onderwerp kennis maakte was dat van Julia:
Gaston Julia, *Introduction mathématique aux théories quantiques,* I (1936), II (1938). Ik was destijds op dit boek afgegaan vanwege zijn wat merkwaardige titel: ik had gedacht iets te vinden over verbindingen tussen ontwikkelingen in de wiskunde en de quantentheorie, hetgeen mij interesseerde. De realiteit bleek anders, want behalve enkele zinnen in het voorwoord en wat literatuuropgaven dienaangaande bevat het boek niets dat wijst in die richting. Dit neemt niet weg dat het een interessant boek is. Deel I bevat de theorie van de vectorruimten van n-dimensies: lineaire transformaties, matrices, normaalvormen van matrices, spectrum, kwadratische vormen, ... , vrij uitvoerig behandeld. Het zijn onderwerpen die wij nu rekenen onder de lineaire algebra, die in mijn Leidse tijd nog niet werd geïntroduceerd. Dit deel I was mijn eerste kennismaking met de lineaire algebra in de dertiger jaren. Ik sprak over dit boek met C. Visser; beiden woonden wij in Dordrecht. Hij was er zeer in geïnteresseerd en, in aanmerking nemende dat hij uit Utrecht stamde, ik uit Leiden, mag men misschien concluderen dat er toen op dit punt niet veel verschil van klimaat was tussen Leiden en Utrecht. Er waren overigens in de dertiger jaren wel meer boeken die iets bevatten over de lineaire algebra, maar vergeleken met Julia waren het slechts korte inleidingen. Ik noem de boeken van Van der Waerden, *Moderne algebra* I, II, maar ze waren toch blijkbaar nog niet erg doorgedrongen. Verder, al vroeger, H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (1923). Maar ik meen dat ook dit boek destijds nog niet "in de lucht" was bij de mathematici (vergelijk de boekenlijst op bijlage 2). Stond het te dicht bij de algemene relativiteitstheorie en daarom als meer fysisch gezien? Het had Droste toch moeten aanspreken, zou men zeggen.

Om op de boeken van Julia terug te komen, deel II behandelt de theorie van de Hilbert-ruimte, onder andere lineaire operatoren. Julia schrijft: "Nous étendrons à l'espace de Hilbert à une infinité de dimensions les résultats obtenus sur les équations linéaires; . . .". De daar behandelde materie lag, meen ik, wat dichter bij ons wegens de verbinding met de analyse. Voor het algebraïsche aspect lag dat blijkbaar toch wat anders. Voor wat betreft de mathematische kant - ondanks de fysisch aandoende titel - werd onder andere verwezen naar een wat ouder en toen veel geraadpleegd boek: M.H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis* (1932). Dit boek bevat veel meer dan de boeken van Julia. Maar als het gaat om de presentatie van de theorie in verband met de introductie van vectorruimten, meetkundige analogieën, axiomatiek, gaf ik de voorkeur aan de boeken van Julia. Het gaat daarbij om stijlverschillen.

Deze opvolging van theorieën komt ons thans voor als vrij trivial. Men kan zeggen dat deze processen worden gevoed door overwegingen van analogie met niet al te grote diepgang. Maar dieper grijpt men als men de lijn van de ontwikkelingen in deze sector verder vervolgt. Zij voert dan naar de analyse: functieruimten, abstracte ruimten, lokaal convexe ruimten en de analyse daarin, en ook tot abstracte meetkunden en algebra's. Weliswaar gaat het wat ver om deze ontwikkelingen te zien als een opvolging van directe generalisaties, hoewel verschillende concepten die men daarbij invoert op enigerlei wijze zijn terug te voeren tot oudere concepten, waarbij men dan aan een vorm van generalisatie kan denken. Zoals ik hiervoor al opmerkte liggen aan ontwikkelingen vaak andere motieven ten grondslag. Het gaat dan om *specifieke creatie;* ik noemde enige voorbeelden. Eerder duidde ik zulke processen, specifiek nieuwe ideeën, aan als *discontinuïteiten* in de ontwikkelingsgang van de wiskunde. Ik verwijs hiervoor naar vroegere publikaties.

Men kan gemakkelijk meer voorbeelden van dit soort processen geven. Ik noem er enkele:

De ontwikkeling van het functiebegrip van functies van één variabele naar functies van oneindig veel variabelen; de idee van de overgang van eindig naar oneindig ligt ook hier ten grondslag. De ontwikkelingen in de topologie waarbij ik in het bijzonder denk aan uitbreidingen van het begrip dimensie om aan het dimensiebegrip een ruimere strekking te geven. Deze ontwikkelingen deden hun intrede in de eerste decennia van de 20e eeuw, ten dele reeds aan het eind van de 19e eeuw. Zij liggen in het brede overgangsgebied van de wereld van de klassieke wiskunde en die van de moderne wiskunde, ten dele behoren zij reeds tot deze laatste periode.

Als ik nu terugzie naar de periode tot in de veertiger jaren, die ik als een aanloopperiode voor mijzelf kan beschouwen, en poog een totaalbeeld te geven van de ontwikkelingen in dit tijdvak zoals die nu op mij overkomen, dan meen ik die te moeten interpreteren als een proces van een groeiende tendens naar algemene, flexibele, abstracte theorieën die de oude, klassieke, theorieën absorberen: verbreding van het ruimtebegrip, wiskunde over lichamen verschillend van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, algemene vormen van algebra en analyse, structuurbeschouwingen. De mathematici van de generatie van de schrijver hebben dit bewust meegemaakt. Zij hebben de overgangen ervaren en moeten verwerken, zoals b.v. van de klassieke planimetrie en de stereometrie in het vooruniversitaire stadium naar de klassieke cartesiaanse analytische meetkunde met coördinaten - cartesisch, homogeen, projectieve meetkunde - naar de coördinaatvrije meetkunde met vectoren en de lineaire algebra, naar de oneindig dimensionale ruimten en de dan volgende abstracties leidende tot onderwerpen uit de moderne meetkunde en de analyse. In de algebra is er een dergelijk beeld. Zij beleefden de geschiedenis. Aanvaarden de jongere mathematici deze ontwikkelingen, de abstractie, zonder bijgedachten, simpelweg als feit?

Men kan de vraag opwerpen naar de *zin* van diepgaande pogingen tot veralgemening. Hoewel in mijn visie zo'n vraag nauwelijks relevant is, simpelweg omdat die ontwikkelingen er als gevolg van een scheppingsproces nu eenmaal zijn, maak ik er een enkele opmerking over.

Men kan wijzen op een streven naar algemeenheid als een methodiek om tot de kern van theorieën door te dringen. Men kan dan hopen dat in grote algemeenheid de essentiële dingen worden gehandhaafd en bijkomstige specialistische zaken worden geëlimineerd.

Dan is er het aspect aan verbonden om de draagwijdte van methoden en theorieën te peilen. Het is een aspect dat is aan te wijzen in mijn eigen werk over de niet-archimedische analyse; men kan zeggen dat het daarbij gaat om de rol van het basislichaam. En op dit punt kan worden gewezen op de rol van het keuze-axioma. Dit apparaat voert tot strikt niet-constructieve resultaten, zoals de existentie van een universeel maatbegrip, en universeel sommatiebegrip voor divergente reeksen. Het zijn puur theoretische resultaten en de practicus zal er anders tegenover staan dan de theoreticus. De eerstgenoemde zal zich afvragen wat men aan zulke niet-constructieve resultaten heeft. De theoreticus denkt daar anders over. Op de verschillen tussen beide categorieën van mathematici kom ik terug in een later hoofdstuk.

2. Ervaringen met boeken

De fundamentele ontwikkelingen in het hiervoor bedoelde tijdvak zijn neergelegd in verschillende in die tijd verschenen monografieën. Zij geven een beeld van deze ontwikkelingen. Ik schrijf wat gedachten neer over series van boeken waarmee ik persoonlijk speciaal affiniteit had en die ik als markant zag voor de moderne periode. Zij betekenen voor mij een tijdsbeeld. Ik behandel dit onderwerp wat breed in die zin dat ik soms inga op korte episoden waarin mijn activiteiten buiten mijn gewone interessesfeer lagen.

Zoals ik in hoofdstuk 1 al opmerkte zie ik als markant voor de eerste decennia van de 20e eeuw de opkomst van vele abstracte begripsvormingen. In dit kader is het relevant dat tegen het einde van de 19e eeuw en in het bijzonder vanaf 1900 de theorie van de verzamelingen en daarmee verbonden de topologie begon door te dringen op het terrein van de analyse, later de algebra. Mijn indruk is dat de Franse School op dit punt bijzonder produktief was. Maar een breder onderzoek dan deze persoonlijke ervaringen bedoelen te zijn, zou hierover meer helderheid moeten verschaffen. Hoe dit ook zij, ik vond deze gedachtenwereld gereflecteerd in de Franse series van monografieën.

In 1900 nam E. Borel het initiatief tot het opzetten van een serie die speciaal zou zijn gewijd aan de algemene theorie van de functies: *Collection de monographies sur la théorie des fonctions,* beter bekend als de: *Collection Borel* (Paris, Gauthier-Villars). Verschillende boeken uit die serie handelen over algemene onderwerpen aangaande reële functies in relatie tot verzamelingen en topologie. Zoals bijvoorbeeld een boek van Borel zelf: *Leçons sur la théorie des* *fonctions* (1898). Later van hem: *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions* (1922). Aan verschillende boeken uit die serie zijn aanvullende noten toegevoegd, veelal van polemische aard. Er was destijds discussie over de zin van "algemene" functies, door sommigen beschouwd als pathologische objecten. Overigens zijn er in deze serie ook meer specifiek gerichte boeken gepubliceerd, bijvoorbeeld over gehele functies. Ik zal daar verder niet op ingaan omdat ik over deze serie in eerdere publikaties uitvoerig heb geschreven. Wel vermeld ik nog dat ik al vroeg in contact kwam met deze reeks van boeken door lezing van een monografie van Ch. de La Vallée Poussin: *Integrals de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire* (1916), eveneens in die serie (men placht op de omslagen een lijst van reeds verschenen delen af te drukken). In mijn beginjaren leerde ik uit dit boek de theorie van de integraal van Lebesgue, een onderwerp dat niet op het standaardprogramma van de colleges stond. De behandeling van het onderwerp daarin sprak mij meer aan dan die in het destijds veel gebruikte - en door Droste ook wel aanbevolen - boek van E. Kamke: *Das Lebesguesche Integral,* hoewel daarin ook de Perron-integraal wordt behandeld. Daarbij spreken ongetwijfeld verschillen van stijl van schrijven een grote rol. Wie schrijft eens iets over stijlverschijnselen in wiskundige publikaties? In het boek van De La Vallée Poussin boeide mij speciaal het hoofdstuk over de "fonctions d'ensembles", met o.a. differentiatie van verzamelingsfuncties. Het maakte op mij de indruk van een theorie die algemenere aspecten had dan een theorie van "puntfuncties". In latere jaren poogde ik dit differentiatieprocédé te introduceren in een theorie van integralen in de niet-archimedische analyse. Ook trachtte ik deze theorie van De La Valleé Poussin al vrij vroeg te generaliseren door verzamelingsfuncties te beschouwen met waarden in zekere lichamen, verschillend van het lichaam van de reële getallen; ik was toen, meen ik, al op het spoor van de niet-archimedische analyse. Het is niet zo verwonderlijk dat daar niets uitkwam, want maattheorie - en daar gaat het hier in wezen om - in niet-archimedische gewaardeerde lichamen stelt meer eisen en bleek later niet zonder meer vatbaar voor analogie. Ik wijs op het latere werk van Van Rooy en Schikhof. Maar men kan aan dergelijke activiteiten vragen verbinden. Zulke processen zijn n.l. niet ongewoon voor mathematici en dan rijst de vraag naar de beweegredenen. Het ligt blijkbaar in zekere mate in het gedragspatroon van de mathematici om zich af te vragen of zekere resultaten ook zouden gelden onder andere omstandigheden; in het begin van dit hoofdstuk wees ik er al op. Is het pure nieuwsgierigheid of is het een essentieel aspect van de voortgang? Gaat het om generalisatie om haarszelf wil?

De Collection Borel heeft belangrijke boeken opgeleverd. Ook niet-Franse wiskundigen hebben hun bijdragen geleverd, o.a. Volterra. Voor zover ik weet is deze serie in de dertiger jaren tot een einde gekomen. In bijlage 3 treft men een opgave aan van de tot 1924 verschenen delen.

In die tijd is een andere Franse serie opgekomen die belangrijke boeken heeft opgeleverd. Het is de serie *Actualités scientifiques et industrielles* (Paris, Hermann), afgekort Act. sci. et ind.. Zij bestaat nog steeds en in deze serie is ook de reeks *Bourbaki* gepubliceerd. Mijn weg tot deze reeks liep waarschijnlijk via een daarin verschenen boekje van M. Brelot, *Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* (1934). Het onderwerp ligt op het terrein van mijn dissertatie en ik veronderstel dat de schrijver, met wie ik in de periode na 1935 veel correspondeerde, er mijn aandacht op vestigde.

De reeks opende in 1929. Zij bestreek het brede terrein van de wiskunde en de natuurwetenschappen - natuurkunde, sterrenkunde, scheikunde, onderwerpen uit de biologie - en er zijn ook meer filosofisch georiënteerde monografieën in verschenen. Zij waren toen veelal van beperkte omvang. In de aanvang betrof het vooral de natuurwetenschappen: relativiteitstheorie, golfmechanica, radioactiviteit, quantummechanica ... . Eerst in 1932 volgt een boekje over een wiskundig onderwerp (E. Cartan) en daarna ziet men dit aantal toenemen. Het is een vruchtbare serie: in 1929 begon het met 9 boeken en in 1924 was het aantal reeds opgelopen tot 142. En het eerste deel van *Bourbaki*: *Théorie des ensembles* - dat in 1939 verscheen - telt no. 846. Juist dit gemengde karakter maakte in die jaren deze reeks zo boeiend. Reeds de titels en de daaruit te constateren veranderingen in onderwerpen konden mij een zeker beeld geven, zij het een oppervlakkig beeld, van wat er omging, ook buiten de wiskunde. De twee jaren college bij Ehrenfest, juist in een belangrijke periode, gaven mij daarbij een zekere basis. Om een indruk te geven van het gevarieerde beeld dat deze serie opriep, voeg ik als bijlage 4 een overzicht toe van de titels met jaartallen uit de eerste jaren zoals die toen werd afgedrukt op het omslag. Men treft er fameuze namen in aan. De reeks opent met: L. de Broglie, *La crise récente de l'optique ondulatoire* (1929). Het is gerubriceerd in een deelreeks: *Conférences d'actualités scientifiques et industrielles faites en 1929 au conservatoire national des Arts et Métiers.* Uit deze zelfde reeks noem ik G. Darmois, *La structure et les mouvements de l'univers stellaire* (1930). Er is daarin een verwijzing naar het werk van onze landgenoot Oort (Bull. of the Astr. Inst. of the Netherlands).

De reeks is, ten dele, onderverdeeld in meer specifiek gerichte deelreeksen van fysische of van mathematische aard en om deze laatste zal het in het navolgende in het bijzonder gaan. Maar ook in fysische richting waren er delen die mijn belangstelling hadden. Ik noem de deelreeks: *Exposés de physique générale, publiés sous la direction de Paul Langevin,* met daarin Sir Arthur Eddington: *Sur le problème du déterminisme* (1934). In een deelreeks: *Exposés de physique théorique, publiés sous la direction de M. Louis de Broglie,* verschenen enkele korte monografieën die, behalve van fysische zijde, ook mathematisch interessant waren: G. Bouligand, *Relations d'incertitude en géometrie et en physique* (1934); J. Pascotte, *L'espace Hermitien quantique* (1938). Wegens de verbinding met de theorie van abstracte ruimten had in het bijzonder dit laatste boek mijn belangstelling; misschien zijn de uiteenzettingen daarin nu wel als verouderd te zien, ik kan dat moeilijk beoordelen. Ik mag wel aannemen dat dit boek, evenals het hierna te noemen boek van Destouches, een zekere rol voor mij heeft gespeeld in veel later te dateren bespiegelingen over een eventuele mogelijkheid van de toepassing van z.g. niet-archimedische metrieken (in het bijzonder p-adische) in de natuurkunde, dit in vertband met discrete aspecten (1965, 1968). Er is trouwens meer dienaangaande gepubliceerd (Everett and Ulam; Manin). Blijkbaar voelde ik toch behoefte aan toepassingsmogelijkheden van abstracte theorieën. Is het een ambivalente houding?

Van geheel andere aard is de deelreeks *Théories mécaniques (hydrodynamique-acoustique)* met daarin: Y. Rocard, *Propagation et absorption du son* (1935). Dit boek was mij van nut in de korte periode waarin ik mij in het kader van de onderzoekingen aan de Afdeling Technische Natuurkunde van de T.H. te Delft bezighield met een mathematisch onderzoek over geluidsabsorptie. Het was in zekere zin een projectmatig onderzoek dat leidde tot een publikatie (1938). De theoretische resultaten werden experimenteel getoetst. Ik ontving er verschillende reacties uit het buitenland over, o.a. van prof. J. Holtsmark van het Fysisk Institut van Norges Teknisk Høiskole in Trondheim en van L. Brillouin van het Collège de France. Niettemin zag ik in dat dit terrein toch niet het mijne kon worden, te projectgebonden en te weinig theoretisch. Het kon slechts een episode zijn.

Iets meer aandacht moet ik geven aan de deelreeks *Exposés d'analyse générale, publiés sous la direction de Maurice Fréchet,* waarvan de boeken destijds meer op het gebied van mijn interesse lagen. Ik vermeld de titels uit de beginperiode omdat daaruit reeds kan blijken waar het hierin omgaat. Later heb ik deze rubriek niet meer gevolgd.

1. M. Fréchet, *L'arithmétique de l'infini* (1933).
2. A. Appert, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. Ensembles ouverts, fermés, denses en soi, clairsemés, connexion. Préface de M. Fréchet* (1934).
3. *A. Appert, Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. Compacité, séparabilité, transformations et fonctionnelles* (1934).
4. J.-L. Destouches, *Le rôle des espaces abstraits en physique nouvelle* (1935).
5. G. Bouligand, *Les définitions modernes de la dimension* (1935).
6. O. Ore, *L'algèbre abstraite* (1936).

In het bijzonder de beide boeken van Appert bevatten een ruim assortiment en een analyse van begrippen uit de algemene topologie zoals verfijningen van traditionele begrippen als verdichtingspunt, open en gesloten, variaties van definities van separabele ruimten enz., en tenslotte toepassingen op transformaties en functionalen, alles zeer algemeen opgezet. Is het te algemeen? Ik citeer uit het voorwoord van Fréchet: "A premier abord, l'étude des espaces abstraits peut apparaître d'une généralité excessive". En wat later: "Le risque à courir était d'aboutir à des espaces si généraux que l'extension des propriétés euclidiennes à ces espaces en devint à peu près impossible". En, zoals Fréchet opmerkt, generalisatie van eigenschappen van de euclidische ruimten en van "gewone functies" tot abstracte ruimten en functies is nu juist het doel. Fréchet geeft echter een motivering en hij gaat daarin nog verder. In het voorwoord merkt hij op dat de algemeenheid van "abstracte ruimten" nog wordt overtroffen door die van "abstracte verzamelingen" en hij schrijft: "Or, ceux-ci sont à la base de la théorie des nombres ordinaux et cardinaux, théorie maintenant entrée dans le domaine classique de la Science". Dit is dan de motivering van het eerste deel uit deze serie dat Fréchet zelf schreef. In dit kader moet uiteraard ook worden genoemd het werk van Fréchet zelf in deze richting: M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale;* Collection-Borel 1928. En wat de "algemene analyse" betreft, moet dan worden vermeld: E.H. Moore, *General analysis, Part I* (1935) waaruit ik citeer: "The existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a general theory which underlies the particular theories and unifies them with respect to those central features". Ik ga hierop niet verder in en verwijs naar mijn boek *"Functional analysis in historical perspective"* (1973).

De abstract georiënteerde boeken van Appert boeiden mij echter juist door hun grote algemeenheid: het gaat om generalisaties tot algemene omgevingsruimten, zoals Fréchet opmerkte veel algemener dan de door hem zelf geïntroduceerde metrische- en limietruimten. Later, met een meer bezonken oordeel, gaat men zich dan toch afvragen of deze extreme generalisatie van begrippen daarmee toch niet te ver wordt doorgetrokken. Men komt tot een genuanceerder oordeel. Hoe hebben deze begrippen gefunctioneerd in de latere ontwikkelingen? Kan extreme generalisatie een spel zijn, een activiteit om haarzelfswil? Verschillende zijn belangrijk gebleken, maar vele schoven naar de achtergrond, zoals exotische topologische ruimten die misschien nog dienden als voorbeelden en tegenvoorbeelden, zoals Destouches opmerkte: "Pour justifier la diversité des espaces abstraits, il est nécessaire de citer des espaces qui soient d'une certaine classe, sans être d'une classe plus particulière" (Destouches, serie deel 4, p. 31). Toch ben ik later door deze extreme begrippengeneralisatie van Appert nog beïnvloed. In de veertiger jaren publiceerde ik in het kader van de niet-archimedische analyse een studie over integraalvergelijkingen in functies met waarden in een niet-archimedisch gewaardeerd lichaam. Om mij te ontdoen van onnodige beperkende voorwaarden beschouwde ik functies gedefinieerd op een algemene omgevingsruimte waaraan ik zekere condities oplegde ontleend aan het werk van Appert. Waarom een dergelijke algemeenheid? Een spel?

Een dergelijk abstract beeld geeft het boek van Destouches, maar nu niet binnen de wiskunde maar in een repercussie van wiskunde en ruimtebegrippen in de natuurkunde. Het boek is voor de mathematicus wat ongewoon. Het bevat geen uitgewerkte theorieën met stellingen en bewijzen. Het is meer bespiegelend ten aanzien van de rol die abstracte ruimten in de natuurkunde kunnen of moeten vervullen. Men zou kunnen zeggen dat het een rechtvaardiging is van de ontwikkeling naar abstractie, voor zover men daaraan behoefte heeft. Ook voor dit boek schreef Fréchet een voorwoord waarin hij een verdediging opneemt. Ik citeer daaruit: "Or il est advenu que cette nouvelle théorie (de theorie van de abstracte ruimten) a pu trouver son application dans d'autres domaines. C'est ainsi, entre autres exemples, qu'elle a transformé la topologie en lui offrant la possibilité d'affranchir la notion de dimensions de celle de coordonnées. De même elle a fourni à la théorie des nombres un utile instrument en donnant à M. Kürschack l'idée de forger, à partir de la notion de distance abstraite, la notion si commode de valeur absolue (...) d'un élément d'un corps de nombres. C'est dans un domaine entièrement différent, celui de la Physique nouvelle, que M. Jean-Louis Destouches nous expose ici une application a la théorie des espaces abstraits". Het uitgangspunt van Destouches is de overweging dat in de natuurkunde diverse "ruimte"-typen een rol spelen: de Riemannse meetkunde en de relativiteitstheorie, de Hilbert-ruimte in verband met quantentheorieën en golfmechanica en Destouches noemt meer voorbeelden. De vraag rijst dan naar een proces van unificatie, een synthese, waarbij het gaat om natuurkunde in abstracte ruimten, een vorm van natuurkunde waarin abstracte ruimten de basis vormen. Het volgende citaat illustreert zijn bedoelingen: "A ce point de vue, nous sommes amené à penser que, pour la mécanique générale et la physique abstraite générale, l'Analyse générale et les espaces abstraits jouent le même rôle que l'analyse classique et la géometrie euclidienne pour la mécanique rationelle et la physique classique". Destouches wijst op door hem eerder ontwikkelde theorieën: "Mécanique générale abstraite", "Physique abstraite générale", "Cinématique généralisée". Fréchet spreekt van een "abstractionisme empirique". In het kader van dit programma bespreekt Destouches verschillende abstracte ruimten die daarbij een rol spelen. Ik noem slechts dat hij in verband met discretiseringsaspecten wijst op door Linfield in 1925 geïntroduceerde z.g. Linfield en semi-Linfield ruimten. Het zijn ruimten waarin een zeker systeem van discrete omgevingen is gedefinieerd. Het is mij niet bekend of zij later nog hebben gefunctioneerd. Ik herinner er aan dat ik mij veel later ook heb bezig gehouden met dergelijke bespiegelingen in verband met de p-adische analyse. Het is mij niet bekend of deze abstracte ideeën in verbinding staan met de moderne dynamische systemen; het is een onderwerp dat buiten mijn competentie valt.

De serie *Actualités Sci. et Ind.* heeft meer interessante publikaties in die jaren opgeleverd. Ik volsta met er nog enkele te noemen:

1. *Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jaques Herbrand*
met daarin
J. von Neumann, *Characterisierung des Spektrums eines Integraloperators* (1935).
Het boek van Brelot dat ik eerder noemde valt eveneens onder deze serie.

2. *Ensembles et Fonctions. Exposés publiés sous la direction de A. Denjoy* met daarin o.a.
Stefan Kempisty, *Fonctions d'intervalles non additives* (1939).

3. *Publications de l'Institut Mathématique de l'université de Strasbourg*
met daarin als eerste
A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (1937).
De schrijver constateert in de inleiding de overbodigheid van het 2e aftelbaarheidsaxioma voor vele zaken en dit leidt hem ertoe om in de plaats van het begrip afstand (een metriek) het begrip uniforme structuur in te voeren, een ruimer begrip.

4. *Publications de l'Institut Mathématique de Clermont Ferrand*
met daarin als IV (Act. Sci. et Ind. 2e no. 869)
A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (1940).
Weil draagt dit boek op aan E. Cartan en in een voorrede getuigt hij van zijn diep respect voor Cartan. Deze voorrede schreef hij in de stijl van Louis XIII:

"c'est sous cette impressions que j'adoptai le style de Louis XIII pour ma dédicace" (zie A. Weil, *Oeuvres, Vol. 1,* p. 549).
Vooral de beide laatste boeken illustreren fraai de snelle opvolging van nieuwe ideeën. Men vindt in dit geheel een groeiende tendens naar generalisatie en abstractie, zelfs in vormen van abstracte mechanica.

Boekjes uit deze serie nog eens doorbladerende, valt mij op hoeveel inspiratie men kan opdoen uit goede literatuurverwijzingen, mij althans hebben zij gevoerd naar verschillende terreinen. Om maar een voorbeeld te noemen: in het boekje van Bouligand, *Les définitions modernes de la dimension* - ik noem het in hoofdstuk 2 in relatie tot de potentiaaltheorie - trof mij weer de verwijzing naar een boekje van Paul Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie* (Springer Verlag 1932). Het bevat een inleiding tot de algebraïsche topologie (combinatorische topologie): algebraïsche complexen, simpliciale afbeeldingen, Betti getallen, homologiegroepen, invariantiestellingen. Het heeft een Geleitwort van Hilbert. Het is slechts een korte inleiding, zeker geen leerboek, maar wel inspirerend. Het bevat ook een verwijzing naar de dissertatie van Van Kampen die ik noemde in hoofdstuk 2. Overigens heb ik deze route naar de algebraïsche topologie niet verder vervolgd. De verzamelingstheoretische topologie met de toen door mij onderstelde grotere "algemeenheid" met de namen van Fréchet en Hausdorff ging mij nader liggen. In dat verband noem ik ook van Alexandroff de verhandeling Paul Alexandroff et Paul Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts, dédié à Monsieur D. Egoroff* (Verhandelingen door Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Afdeling Natuurkunde (Eerste Sectie) Deel XIV, no. 1, 1929).

In de dertiger jaren verscheen in Frankrijk nog een tweede serie van doorgaans vrij korte monografieën van eenzelfde karakter als de Sci. et Ind.: de reeks *Mémorial des sciences mathématiques.* Ook van deze serie voeg ik een lijst van verschenen boeken toe, eveneens met de bedoeling een indruk te geven van de opvolging van de onderwerpen (zie bijlage 5). In het volgende hoofdstuk kom ik terug op enkele boeken uit die reeks.

Het beeld dat ik in dit bibliografische overzicht van de situatie van vóór 1940 heb geschetst is natuurlijk eenzijdig en ook te beperkt. Dit valt te verklaren uit de omstandigheid dat ik mij al zeer vroeg in het bijzonder bij deze Franse series van boeken betrokken voelde. Maar er was meer in de literatuur. Ik moet dan noemen de serie *Ergebnisse der Mathematik und ihren Grenzengebiete,* die een aanvang nam in 1932. Er verschenen belangrijke, "klassieke" boeken in. Toch heeft deze serie naar mijn idee een ander karakter dan de hiervoor genoemde series, althans in de eerste jaren. Ik vind in de Ergebnisse minder onderwerpen van beschouwelijke filosofische, abstract getinte aard. Men zie in de inhoudsopgave vermeld in T. Rado, *Subharmonic Functions* (1937), een boek dat overigens mijn belangstelling had toen ik actief was in de potentiaaltheorie.

In het voorgaande beschouwde ik de tendens onder mathematici naar generalisatie, naar het opstellen van algemene - vaak abstracte - theorieën. Ik noemde voorbeelden van grote theorieën, maar ik releveerde ook minder pretentieuze pogingen in eigen werk (in niet-archimedische integraalvergelijkingen, discretiseringsaspecten in wis- en natuurkunde). Ter illustratie voeg ik nog enkele van dergelijke pogingen toe.

In de begin-veertiger jaren begon ik mij intensief bezig te houden met onderzoekingen naar de eigenschappen van niet-archimedische genormeerde vectorruimten over een niet-archimedisch gewaardeerd lichaam. Aanvankelijk veronderstelde ik dat de norm waarden aanneemt in een geordende abelse groep, dat wil zeggen niet noodzakelijk reëelwaardig. De motivering daarvan was gelegen in het feit dat bij een niet-archimedische norm de waarden van de norm slechts behoeven te worden vermenigvuldigd en optelling van de waarde niet voorkomt (zoals wel bij de traditionele archimedische norm). Ik volgde daarbij een opmerking van W. Krull in diens uitvoerige artikel over *Allgemeine Bewertungstheorie* (1932). Bij een dergelijke algemene opzet deden zich problemen voor met kwesties over de bovenste grens van verzamelingen, o.a. bij de definitie van de norm van een operator. Ik formuleerde dienaangaande enkele problemen, maar deze algemene situatie liet ik toch los (zie mijn artikel *Over geordende groepen en lineaire ruimten*, 1944). Deze algemeenheid functioneerde niet. Dit is dan tevens het antwoord op een vraag die Narici, Beckenstein en Backman in hun boek *Functional analysis and valuation theory* (1971) stellen waarom ik mij toch ging beperken tot reëelwaardige normen. De algemeenheid was te ver doorgetrokken.

Soms echter kunnen zeer algemene begrippen zinvol blijken te zijn. Het hiervoor genoemde boekje van Weil over uniforme structuren inspireerde mij in het kader van mijn werk over niet-archimedische metrieken tot de introductie van "niet-archimedische uniforme structuren", een generalisatie van "niet-archimedische metrieken". Een generalisatieproces leidde daarna in de algemene topologische sfeer tot het begrip "niet-archimedische topologie"; het staat in verbinding met 0-dimensionale ruimten (1950). Dit bleek zinvol. Er zijn verschillende publikaties over verschenen o.a. van J. de Groot en H.-Chr. Reichel in Wenen.

Teruggrijpende op mijn aanvankelijke vakgebied, de potentiaaltheorie, heb ik later nog eens gefilosofeerd over de mogelijkheid van een vorm van potentiaaltheorie in de niet-archimedische analyse, een samengaan van beide theorieën op dit punt. In dit licht formuleerde ik een axiomatische potentiaaltheorie door middel van schoven met waarden in een categorie waarvan de objecten geordende verzamelingen zijn. Maar die poging had toch geen succes.

Ik noem nog een ander geval. In de archimedische situatie zijn de begrippen norm en orde op de bekende wijze met elkaar verbonden. Voor een niet-archimedische norm kan niet op deze traditionele manier daarmee een "orde" worden verbonden. Men moet andere wegen gaan om toch in de beide gevallen tot een algemeen resultaat, een synthese, te komen. Dit voerde mij tot het begrip "pseudo-orde" waarbij het markant is dat, in afwijking van de situatie op de getallenreeks $\mathbb{R}$ waar het getal 0 twee kanten heeft (+ en -), het nulelement van het lichaam oneindig veel kanten heeft die een abelse groep vormen. Aldus heeft het verband tussen norm en orde een algemene vorm.

Een voorbeeld in een geheel ander gebied is nog vermeldenswaard. In 1940 had J.F. Koksma een zeer algemene stelling bewezen over diophantische approximaties. Zijn beschouwingen hadden betrekking op de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$. In een publikatie van 1948 merkte ik op dat die stelling nog algemener kan worden geformuleerd in compacte topologische groepen, niet noodzakelijk metrische groepen. Ik gaf een toepassing in de p-adische analyse. Voor deze algemene stelling maakte ik gebruik van de Haar-maat en van uniforme structuren, mij refererend aan de eerder genoemde boeken van A. Weil. Later, in 1951, kwam ik op deze generalisatie terug en bestudeerde ik in dit kader zekere transformatiegroepen, waarbij ik onder meer het probleem stelde van een zekere karakterisering van de transformatie (mod 1) in $\mathbb{R}$. Het is mij niet bekend of daar verder iets mee is gedaan. Mijn aandacht ging later in een andere richting.

Tenslotte releveer ik mijn werk over de theorie van harmonische functies in ruimten van drie of meer dimensies, analoog aan stellingen uit de complexe functietheorie.

Men kan uiteraard nog vele voorbeelden van deze vorm van mathematische activiteit geven; ik merkte al op hoe veelvuldig men de termen “algemeen” en “generalisatie” aantreft. De laatste wat incidenteel en specifiek te noemen voorbeelden roepen de vraag op naar de *functie* daarvan in het mathematische bedrijf. Gaat het om een spel gebaseerd op nieuwsgierigheid? Misschien moet daar wel een bevestigend antwoord op worden gegeven. Maar het is dan wel een spel met een functie. Men moet deze vragen beantwoorden in het kader van de onderzoekingen waarmede de mathematicus op zekere momenten bezig is. Hij exploreert het gebied, probeert algemene situaties om te zien wat gelukt en wat niet. Pas in een later stadium vallen de zaken dan af die niet blijken te functioneren en kan een goede zinvolle theorie overblijven. Dit soort van wat specifieke generalisaties die men probeert, vervullen in deze zienswijze een soort van generatieve rol. Zij weerspiegelen de werkmethoden van de mathematici; het gaat hierbij om de habitus van de mathematici.

Hoofdstuk 4

Modeverschijnselen in de wiskunde

De idee van wat ik noem "Streven naar algemeenheid" illustreerde ik in het vorige hoofdstuk onder meer met de theorie van "algemene" reële topologieën. Onder invloed van de sterk opgekomen theorie van de verzamelingen waren dit in de jaren rond de eeuwwisseling tot in de eerste decennia van de 20e eeuw belangrijke onderwerpen die echter later, in hun grote algemeenheid, wat naar de achtergrond schoven onder invloed van de wisselende omstandigheden. Het is een algemeen verschijnsel in de ontwikkelingslijn van de wiskunde. Er zijn onderwerpen, theorieën aan te wijzen die men tot op zekere hoogte als van temporair karakter kan zien. Onderwerpen, methoden, verschuiven van plaats, verdwijnen van het toneel, maar komen soms later terug, onder invloed van gewijzigde inzichten, in nieuwe vormgevingen. Soms zijn zij gebonden aan personen of tijdvakken. Het aspect is ook verbonden met de idee van twee "werelden" dat ik introduceerde in hoofdstuk 1. De idee van een oude en een nieuwe wereld gaat gepaard met opkomen, verdwijnen en terugkeer.

Ontwikkelingen van deze aard zal ik aanduiden als "modeverschijnselen", ontwikkelingen gebonden aan tijdvakken. Dit aspect zal ik hier niet in volle algemeenheid, door de historie lopende, behandelen. Mijn bedoeling is slechts die idee te verhelderen voor een aantal voorbeelden, hierbij eveneens teruggrijpende op persoonlijke ervaringen en impressies.

Als eerste voorbeeld keer ik terug tot de theorie van de reële functies in strikte zin. De theorie betrof diverse algemene eigenschappen van reële functies: zaken over continuïteit en typen van discontinuïteit, differentieerbaarheidskwesties, classificatie, enz. Zoals ik eerder al vermeldde, had dit onderwerp destijds mijn grote belangstelling en ik moet zeggen dat ik er nog steeds een zekere affiniteit mee heb. In het bijzonder de Franse en de Poolse School waren toen produktief op dit gebied. Evenwel is dit onderwerp sterk in belangstelling teruggelopen; het heeft zeker niet meer de aandacht die het destijds had. Sedert vele decennia is de produktiviteit in dit onderwerp verminderd, ook al moet men wijzen op recente pogingen om het onderwerp tot nieuw leven te wekken. Terugziende meen ik te moeten constateren dat ik dit gebied nu ervaar als een modeverschijnsel, ontstaan onder invloed van de groeiende ontwikkelingen rond de theorie van de verzamelingen en de topologie. Wellicht kan zelfs worden gezegd dat dit onderwerp één van de eerste - zo niet het eerste - deelgebieden van de analyse was waarop die theorieën werden, of konden worden, toegepast. Ik spreek daarom ook niet van een modegril: die terminologie zou duiden op een ontwikkeling zonder een diepere aanleiding en een zinvolle achtergrond, een ontwikkeling zonder consequenties. Uiteraard heeft deze theorie een belangrijke functionele plaats ingenomen en zij is dan ook niet vergeten. Misschien heeft zij een onmisbare rol vervuld bij de penetratie van de theorie van de verzamelingen. Men kan speculeren over de oorzaak van de teruggelopen belangstelling. In een eerdere publikatie over het algebraïseringspatroon van de wiskunde deed ik de suggestie dat een aanleiding zou kunnen zijn gelegen in de geringe mogelijkheid tot algebraïsering van dit onderwerp: het is te "algemeen" en te weinig vatbaar voor structurering. De wiskunde ging een andere weg.

Ik noem een ander voorbeeld, nu meer specifiek gericht. Ook daarbij kan ik teruggrijpen op persoonlijke ervaring. In de eerste jaren van mijn studie te Leiden - de twintiger jaren - werd in het college over de algebra zoals dat toen werd gegeven door Kluyver vrij uitvoerig aandacht besteed aan de theorie van de kettingbreuken. Daarbij ging het over de theorie van de eindige kettingbreuken, benaderende breuken, enz., maar ook over convergentieproblemen voor oneindig voortlopende kettingbreuken. Tegenwoordig zou dit onderwerp waarschijnlijk bij de analyse worden ondergebracht; het heeft weinig te doen met structuren. Het is een wat weerbarstig onderwerp: men denke aan de moeilijkheden bij het uitvoeren van arithmetische operaties met kettingbreuken. De kettingbreuken hebben echter nooit een plaats kunnen innemen vergelijkbaar met die van de reeksen. Toch is het onderwerp eeuwenoud; men vindt kettingbreuken reeds bij de wiskundigen van het oude India in rekenkundige context. De positie van de kettingbreuken werd later teruggedrongen, men hoorde er in latere jaren niet zoveel meer van. De algebra was, al ver voor 1945, een andere koers gegaan, de weg naar wat aanvankelijk heette de "moderne algebra"; ook de analyse ontwikkelde zich langs andere wegen waarbij de kettingbreuken buiten het gezichtsveld kwamen te vallen. Eerst in recente jaren vindt men weer publikaties en monografieën over de kettingbreuken, wijzende op weer toegenomen belangstelling. Nog steeds wordt gerefereerd aan het klassieke boek van O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen* van 1913, dat wij destijds reeds raadpleegden, hoewel het boek wel zeer uitvoerig was (520 blz.). Er zijn weer proefschriften over geschreven. Ik noem bijvoorbeeld de dissertatie van C. de Vroedt, *Metrical problems concerning continued fractions,* VU Amsterdam (1960). De promotor was J.F. Koksma; als wiskundige van de getallentheorie lag dit onderwerp wel in zijn richting. Men kan dan de vraag stellen naar de oorzaak van de terugkeer.

Als ik nu weer terug kijk naar de Leidse tijd, moet men dan de kettingbreuken destijds aldaar aanmerken als een lokaal modeverschijnsel, in zekere mate verbonden met de persoon van Kluyver? Ik heb niet nagegaan hoe de situatie op dit punt elders in Nederland was. Wel kan worden opgemerkt dat de kettingbreuken destijds een hoofdstuk vormden in de leerboeken over de z.g. "Hoogere algebra". Wellicht is er aanleiding toe om te veronderstellen dat Kluyver een speciale reden had om dit onderwerp in zijn colleges op te nemen. In hoofdstuk 2 vermeldde ik dat Kluyver betrokken was bij de uitgave van de verzamelde werken van Th. Stieltjes en juist die heeft fundamenteel werk verricht over de theorie van de kettingbreuken. Een klasse van kettingbreuken is naar hem genoemd: de "kettingbreuken van Stieltjes". W.L. van de Vooren, wiens naam ik in hoofdstuk 1 al noemde, schreef er een dissertatie over: *Eene bijdrage tot de kennis der kettingbreuken van Stieltjes;* Utrecht 1915, promotor W. Kapteyn. Ik herinner er aan dat hij met Kapteyn en Van de Sande Bakhuyzen, in de redactiecommissie zat voor de werken van Stieltjes. Men zou wellicht eerder moeten constateren dat ten aanzien van onderwerpen een golfbeweging moet worden opgemerkt: onderwerpen verdwijnen tijdelijk, maar keren later, eventueel in gemodificeerde vorm, terug. Het is een mode-aspect, maar veelal met diepere gronden dan wat men in het gewoon spraakgebruik onder "mode" verstaat.

Zoals ik opmerkte was destijds de theorie van de kettingbreuken ingedeeld bij de algebra. Ik vind daarin aanleiding voor enige beschouwingen over de inhoud van de algebra van toen en van de moderne periode die, wat universitaire programma's betreft, begon in de veertiger jaren.

Wanneer ik de hedendaagse algebra vergelijk met die van destijds, de algebra die ons in de midden-twintiger tot in de dertiger jaren werd onderwezen, de "klassieke algebra", dan ervaar ik daarin een essentiële verandering. Van onderwerpen uit de "hogere algebra" van destijds zijn veel zaken verloren gegaan of vergeten en, zo zij dan al niet zijn vergeten, zijn zij in het nieuwe gewaad voor degene die bij de "oude" algebra werd opgevoed vaak moeilijk herkenbaar. Thans zijn de ontwikkelingen in de algebra in grote mate gecentreerd om groepen, ringen, de Galois-theorie, .., kortom rond structuren. De algebraïcus van toen herkent er zijn achtergrond niet in - zo gaat het mij althans. Om een beeld te krijgen van de oude zogenaamde "hogere algebra" sloeg ik de drie delen *Lessen over de hoogere algebra* van F. Schuh nog eens op. Zij zijn van resp. 1921, 1924, 1926 en aanvankelijk bedoeld als nieuwe druk van Lobatto's *Lessen over de hoogere algebra* (5e druk 1899). Vele zaken die daarin staan zijn nu verdwenen; ik zal niet proberen een overzicht te geven, dat zou mij te ver voeren.

Sinds lang pleegt men over deze boeken een wat genuanceerd oordeel uit te spreken. Maar voor zo'n oordeel moeten deze boeken wel worden geplaatst in het licht van het wiskundige klimaat dat hier heerste ten tijde dat die boeken werden geschreven, de midden-twintiger jaren. Dat klimaat was fundamenteel anders. Het heeft daarom niet veel zin die boeken te vergelijken met de boeken van B.L. van der Waerden over "Moderne algebra" - die trouwens in latere drukken zijn overgegaan in simpelweg "Algebra". Schuh's boeken bevatten veel waardevol materiaal, zij zijn een soort compendium, men kan erin "opzoeken". Is het niet enigszins een modeverschijnsel om die oude stof op de achtergrond te plaatsen en te zweren bij structuren? Schuh's boeken mogen dan dor en saai zijn, zij waren correct en dat kan niet worden gezegd van alle boeken uit die tijd (ik denk aan boeken van Hk. de Vries). Bovendien, is "saaiheid" - of juist "niet-saaiheid" - een goede maatstaf voor het uitspreken van een waarde-oordeel? Ik noem bijvoorbeeld het boek van E. Landau, *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung* (1934), dat in zijn strenge deduktiviteit toch ook geen toonbeeld is van levendigheid en weinig laat zien van de ontwikkelingsgang. Schuh's boeken vervulden een zekere rol in die tijd, er waren er niet zoveel en het klimaat in die tijd was verbonden met de studie voor de middelbare akten. Daarover maak ik later enkele opmerkingen. Ik had voor mijn vergelijking kunnen grijpen naar H. Weber's *Lehrbuch der Algebra*, een boek met een ander karakter. Maar dat boek lag in mijn Leidse tijd ver van ons, "bestond" niet. Na het kandidaatsexamen was er in het geheel geen algebra meer. "Schuh" had, terecht of ten onrechte, een zekere naam. In het begin van hoofdstuk 1 vermeldde ik dat ik op de middelbare school in 1926 en 1927 extra lessen volgde bij de leraar Visser. Ik herinner mij dat wij hem toen als dank een boek wilden geven. Welk boek moest dat zijn? Het moest een wiskundeboek zijn en het lag voor ons voor de hand dat het dan een boek van Schuh zou zijn; Schuh had er verschillende geschreven. Het beeld van het klimaat in zijn aanvangsjaren (schooljaren zo men wil) raakt men toch nooit geheel kwijt en het beïnvloedt de oordelen over latere ontwikkelingen. Zoals ik opmerkte heeft Schuh diverse boeken over verschillende onderwerpen geschreven en ook die pleegt men met reserve te bekijken. Maar ook hier geldt dat ik ze zou willen bezien in het licht van het destijds geldende klimaat, en dat was niet vooruitstrevend. Ik noem bijvoorbeeld *Grepen uit de moderne meetkunde* van 1916; eerste deel: reciproke transformaties in het vlak en in de ruimte, hyperboloïden en kegelsneden, harmonische eigenschappen en cirkelbundels. Het werk was kennelijk wat uit de hand gelopen want in het voorbericht schrijft Schuh dat het oorspronkelijk was bedoeld als artikel voor het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde; het telt nu 520 bladzijden. Schuh sprak van "modern", maar uit de inhoud blijkt duidelijk het betrekkelijke van het begrip "modern". Het boek handelt over kegelsneden, kwadratische oppervlakten en in belangrijke mate over daarmee in verband staande transformaties, alles in puur meetkundige, synthetische, behandeling. Er is echter niets over axiomatische systemen en geen enkele verbinding met algebraïsche opvattingen die wij thans in moderne meetkundige geschriften aantreffen. Eerlijkheidshalve moet worden opgemerkt dat dat misschien in die vroege tijd (1916) nog niet wel kon.

Hetzelfde aspect van de betrekkelijkheid van "modern" doet zich trouwens ook voor in de analyse. Ik noem bijvoorbeeld het befaamde boek van Whittaker en Watson, *A course of modern analysis*, eerste druk 1902, vierde editie 1927/1935 (onlangs herdrukt). Van wat wij thans allang als moderne analyse aanmerken vindt men er niets in terug. Dit omvangrijke boek - ruim 600 bladzijden - handelt over wat wij thans klassieke analyse plegen te noemen: niets over connecties met de theorie van de verzamelingen, niets over topologische grondslagen. Het moet worden toegegeven dat dit in de tijd van de eerste druk misschien nog wel wat verder af lag, hoewel de eerder genoemde "Collection Borel" toen reeds een ander beeld opriep.

Het schrijven van zulke omvangrijke compendia - meer handboeken dan leerboeken - was tegen het eind na de 19e eeuw en in de eerste decennia van de 20e eeuw blijkbaar een soort mode. Ik wijs op de diverse *Cours d'analyse* die in die periode werden gepubliceerd, soms in twee delen. Zij geven soms, wat betreft "modern", een wat ander beeld. Ik noem bijvoorbeeld de *Cours d'analyse* van C. Jordan. In de tweede editie van 1893 bevindt zich een paragraaf over de theorie van de verzamelingen waarin ook een maattheorie voor verzamelingen is opgenomen (de Jordan-maat). In de eerste editie van 1882 worden verzamelingen nog niet behandeld; het was toen blijkbaar nog te nieuw. Dan noem ik de *Cours d'analyse* van De La Vallée Poussin, die van Goursat en de zeer uitvoerige twee delen *Traité d'analyse* van E. Picard, alle ver over de 500 bladzijden. Ik noem nog Schlömilch's *Kompendium der höheren Analysis,* ook in twee delen (1874). Het waren destijds veel geraadpleegde handboeken die in zekere mate de gehele analyse poogden te behandelen. Zijn zulke handboeken thans nog mogelijk?

Hier ging het over handboeken. In de eerste decennia van de 20e eeuw was er in Nederland een zekere traditie van *leerboeken*, geschreven in de Nederlandse taal. Zij verschenen in de reeks *Noordhoff's verzameling van wiskundige werken.* Schuh schreef zijn boeken ook in deze serie. Vele hoogleraren (verschillende uit Delft) schreven boeken in deze serie, zoals behalve Schuh, G. Schouten, Hk. de Vries, J.A. Barrau, J.G. Rutgers. Zij betroffen de traditionele analytische meetkunde, getaltheoretische onderwerpen, grondslagen van de rekenkunde, differentiaal- en integraalrekening, dit laatste onderwerp wel te onderscheiden van de veel pretentieuzere analyse uit de diverse *Cours d'analyse* met de theorie van de analytische functies, harmonische functies, randwaardeproblemen. Deze serie is ook heel anders van opzet dan de in het vorige hoofdstuk genoemde Franse series waarin het speciaal ging over nieuwe resultaten van lopende onderzoekingen. De serie Noordhoff was primair opgezet om te voorzien in de behoefte aan leerboeken voor degenen die studeerden voor de middelbare akten, al waren er ook wel anders gerichte boeken. Zij hadden dus een heel ander doel. Het bestaan van middelbare akten is wellicht een specifiek Nederlandse aangelegenheid. Het systeem stamt van 1863 en werd door Thorbecke ingesteld in het kader van zijn onderwijshervormingen, in het bijzonder de oprichting van de middelbare school, toen genaamd h.b.s. Daarvoor was het nodig maatregelen te treffen voor het voorzien in de behoefte aan bevoegde leraren voor de schoolvakken, niet alleen voor de wiskunde, maar ook voor scheikunde, natuurkunde, de talen. Via de middelbare akten kon onderwijsbevoegdheid worden verkregen buiten universitair verband. Voor de wiskunde waren dit de akten K I (wiskunde), en K V (hogere wiskunde), waarbij het bezit van K I vereist was voor het afleggen van K V (K II betrof mechanica, K III natuurkunde en scheikunde, K IV plant- en dierkunde). De terminologie slaat op de codering in de betreffende Besluiten. De akte l.o.-wiskunde voor onderwijzers ging hieraan nog vooraf. Veel later, pas in 1958, werden dit de zogenaamde akten wiskunde A en B. Het doel van deze akten was medebepalend voor de daarin opgenomen stof die sterk traditioneel was, misschien is het beter te zeggen is gebleven want er veranderde weinig. Zo bleef de algebra beperkt tot K I (zoals bij de universiteiten de algebra eindigde bij het kandidaatsexamen). Hoogleraren hadden zitting in de examencommissie, o.a. vele uit Delft en Leiden. Het lijkt niet onaannemelijk dat de middelbare akten een factor van betekenis zijn geweest voor het wiskundige klimaat in de jaren vóór 1940; hierop doelde ik toen ik naar aanleiding van de boeken van Schuh sprak over het toenmalige klimaat dat ver was verwijderd van het front. Een studie voor middelbare akten was destijds voor velen een normaal begin van een loopbaan. Historisch onderzoek zou op dit punt licht kunnen verschaffen. Het is een stuk regionale geschiedenis (als ik denk aan het mondiale karakter van de wiskunde), klimaatsgeschiedenis en onderzoek naar de rol van de middelbare akten. Ook de talen moeten daarbij worden betrokken (befaamde literatoren behaalden akten, zoals Couperus de middelbaar akte Nederlands, Van Schendel de akte Engels). Wordt in Nederland dit soort culturele geschiedenis beoefend? Ik meen nauwelijks, evenmin als er voor zover ik weet geen lokaal historisch onderzoek bestaat naar de totstandkoming en de groei van de Mathematische Instituten na 1945, een onderwerp dat ook is verbonden met klimaatsverschijnselen. Het is misschien nog wat te vroeg, maar men bedenke dat de personen die erbij waren betrokken, verdwijnen.

Zoals ik al opmerkte zijn er bij de serie Noordhoff ook enkele minder traditionele boeken verschenen. Ik noem: C.H. van Os, *Moderne integraalrekening*, no. 10 uit de serie (1925). Dit boek geeft een inleiding tot de theorie van de Lebesgue-integralen, in 1925 nog een ongewoon onderwerp, stellig voor de middelbare akten (dat is het daar nog steeds), maar toen ook in het universitaire onderwijs. De Lebesgue-integraal was toen nog niet "in de mode", waarmee niet wil worden beweerd dat zij nooit weer "uit de mode" zal raken. Verder is er H. Bremekamp, *Partiële differentiaalvergelijkingen*, no. XX (1939). Blijkens het voorwoord was dit boek speciaal bestemd voor studenten aan de T.H. te Delft. In dit voorwoord staat een curieuze passage die ik niet wil nalaten te vermelden. Bremekamp heeft in dit boek enige existentiestellingen opgenomen, die dus minder technisch zijn dan de overige inhoud. Het gaat om de stelling van Cauchy voor gewone en partiële differentiaalvergelijkingen (calcul des limites). Hij schrijft: "Men kan meenen, dat die voor de ingenieur en voor ieder, wien het om de toepassingen te doen is, van geen belang zijn. Ik houd het echter voor belangrijk, dat deze studerenden althans met het begrip existentiebewijs kennis maken, al was het alleen al, opdat zij niet later, als zij in de literatuur een dergeljik bewijs ontmoeten, het artikel, waarin het voorkomt, direct ter zijde leggen met de opmerking "dat is een soort wiskunde, die ik niet ken". Iets dergelijks geldt voor bepaaldheidsstellingen."

Existentiestellingen waren, zo zou men zeggen nog niet zo "in de mode". Nu moet worden gezegd dat nog in mijn Leidse tijd het begrip "existentie" als fundamenteel wiskundig begrip weinig op de voorgrond trad. Ik meen dat de existentiestelling van Cauchy bij de differentiaalvergelijkingen werd behandeld, maar de stelling maakte op ons, studenten, weinig speciale indruk. Het was een stelling als vele andere. Van niet-constructieve existentiestellingen, met het keuze-axioma als middel, was al helemaal geen sprake. Koksma koos het begrip "existentie" in zijn verschillende vormen nog als onderwerp voor zijn op 20 oktober 1938 aan de Vrije Universiteit te Amsterdam uitgesproken rede *Existentiebewijzen in de wiskunde.* Zien evenwel de huidige studenten het fundamentele karakter van de existentie-problematiek in of is er, bij het moderne beleid van compressie, geen tijd voor of geen tijd meer voor om daarop in te gaan? Staan zij erbij stil wat, in diepere zin, de betekenis is van uitspraken als "Er is ..." of "Er bestaat ..."?

Overigens merk ik op dat Bremekamp, hoogleraar te Delft, evenals Droste, die ik noemde in hoofdstuk 2, een leerling was van Lorentz. Hij promoveerde in 1905 bij Lorentz op een proefschrift *Beschouwingen over de lichtvoortplanting in dispergerende media (middenstoffen).* In het bovengenoemde boek zijn verschillende fysische voorbeelden en aanwijzingen opgenomen voor wat betreft de vergelijkingen van de tweede orde, en die nemen de grootste plaats in het boek in. Voor dit onderwerp is dit uiteraard niet zo opmerkelijk. In Leiden ging men destijds niet verder dan de algemene vergelijking van de eerste orde en die staat meer in verbinding met de meetkunde dan met de natuurkunde. Bij Droste lagen op dit punt daarom fysische voorbeelden minder in de rede - hoewel de analyse in algemene zin daartoe toch volop aanleidingen geeft. Maar in het algemeen verloochende Bremekamp toch minder zijn afkomst. Men vindt zijn naam ook in een serie boeken *Lessen in de theoretische natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Leiden gegeven door dr. H.A. Lorentz.* Hij bewerkte daarin de delen: *De theorie van Maxwell (1900-1902)* (Brill, Leiden 1925) en *Aethertheorieën en Aethermodellen (1901-1902)* (id.). De overige delen uit deze serie zijn: *Stralingstheorie (1910-1911),* bewerkt door dr. A.D. Fokker;
Theorie der Quanta (1916-1917), bewerkt door dr. G.L. de Haas-Lorentz;
Thermodynamica, bewerkt door dr. T.C. Clay-Jolles;
Kinetische problemen (1911-1912), bewerkt door dr. E.D. Bruins en dr. J. Reudler;
Het relativiteitsbeginsel (1910-1912), bewerkt door dr. A.D. Fokker;
Entropie en waarschijnlijkheid, bewerkt door dr. C.A. Crommelin. Overigens schreef Fokker later ook zelfstandig een boek *Relativiteitstheorie* (Groningen 1929). Ook doctoraalstudenten met hoofdvak wiskunde studeerden destijds uit deze boeken.

Een ander voorbeeld vanuit het gezichtspunt van modeverschijnselen is vermeldenswaardig. Het ligt op het terrein van de meetkunde. Vóór 1940 hield G. Schaake in Groningen zich intensief bezig met het "afbeelden" van stelsels van meetkundige figuren. Het betrof zuiver-meetkundige studies, dat wil zeggen in niet-analytische vorm. Een oude jaargang van het Nieuw Archief voor Wiskunde doorbladerende, vond ik een karakteristiek artikel van Schaake getiteld: *Over de congruentie van Reyn* (deze congruentie heeft betrekking op zekere kubische ruimtekrommen en Schaake onderzocht uitbreidingen daarvan); zie N.A.v.W. (2) XVIII (1936), 67-75. Ook J. de Vries in Utrecht hield zich bezig met verwante onderzoekingen, eveneens zuiver-meetkundig. In 1928 volgde J.A. Barrau in Utrecht J. de Vries op. Barrau bestudeerde de theorie van meetkundige configuraties in verband met groepentheoretische problemen en combinatoriek; hij hanteerde meer analytische methoden. Later, althans na 1945, hoorde men niet meer zo veel over dergelijke meetkundige studies. Was met dit onderwerp sprake van een modeverschijnsel, gebonden aan de personen van Schaake en J. de Vries? Schaake overleed in de oorlogsjaren. Vergelijk met wat ik schreef in hoofdstuk 2 over een meetkundige "School" in Groningen. Of zou er aanleiding kunnen zijn dit onderwerp toch anders te zien, namelijk als een late voortzetting van het werk van de geometer G. Steiner in het midden van de vorige eeuw, die immers ook met zuiver-meetkundige middelen zijn resultaten verkreeg? Men zou er het werk van Schaake op kunnen nagaan of van een affiniteit met Steiner sprake is. Hoe zijn zijn verwijzingen? Overigens zal men dan deze ontwikkelingen ook moeten bezien in het licht van de vergaande tendensen naar algebraïsering waarbij zuiver-meetkundige methoden uit de mode raakten.

In het volgende zeer persoonlijke voorval zou men misschien aanwijzingen kunnen vinden dat er zo iets als plaatselijke modeverschillen bestaan. In 1937 had ik een artikel gereed gemaakt over het onderwerp: *Krommen in een* functieruimte; in 1938 schreef ik er een vervolg op. Het ging over een generalisatie van de begrippen kromming, torsie en over inbeddingen in euclidische ruimten. Ik was toen al gefascineerd door generalisaties in algemenere situaties dan de klassieke wiskunde. Achteraf realiseer ik mij dat ik mij vrij snel had leren bewegen op dit terrein, dat toch in wezen vreemd was aan de klassieke analyse wegens de overgang van de eindig-dimensionale naar de oneindig-dimensionale situatie. Uiteraard had ik steun aan de oude differentiaalmeetkunde. Ook hier boeiden mij de Franse publikaties; ik verwees naar:
J. Delsarte, *Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert* (1932);
S. Minetti, *Sur quelques espaces fonctionnels et sur la géométrie de certains holoespaces* (1936).

Wat betreft het begrip "ruimte", in casu functieruimten, vond ik trouwens aanleiding te refereren aan de monografieën van Appert die ik heb genoemd in hoofdstuk 3. Deze monografieën van Delsarte en Minetti waren verschenen in de serie *Mémorial des sciences mathématiques* die ik noemde in hoofdstuk 3. Ik zag deze artikelen graag gepubliceerd in het toenmalige tijdschrift "Mathematica". In de redactie van dit tijdschrift zat toen onder andere S.C. van Veen, toen nog leraar in Dordrecht, later hoogleraar in Delft. In die jaren kon zo'n functie nog samengaan met het leraarschap. Aangezien ik in die jaren ook in Dordrecht woonde, presenteerde ik het stuk aan hem. Hij accepteerde het. Ik herinner mij dat hij, het artikel gelezen hebbende, mij determineerde als te komen uit Utrecht. Zelf kwam hij uit Leiden. Ik kan uit die opmerking slechts opmerken dat er toendertijd blijkbaar een verschil van wiskundig klimaat heerste tussen Leiden en Utrecht. Zelf ben ik mij daarvan niet bewust geweest: in Leiden waren er voor de analyse Kluyver, daarna Droste; in Utrecht aanvankelijk Kapteyn, in de jaren rond de eerste oorlog Denjoy, maar in mijn tijd al lang opgevolgd door Wolff met wie ik in de eerste oorlogsjaren nog wel heb gecorrespondeerd. Heerste er in Utrecht toch een andere "mode" dan in Leiden?

Overigens, als ik in mijn herinnering terugga naar mijn eerste jaren in Utrecht en enige jaren daaraan voorafgaand - eind vijftiger en zestiger jaren - dan heb ik daaraan ook de impressie overgehouden van een zekere "mode". Ik heb de idee dat Lie-groepen toen een vooraanstaande plaats innamen en ik was daarvan zeer onder de indruk. Maar het kan zijn dat dit een indruk is die is ontstaan bij de late overgang in een voor mij nieuwe positie. Het is een zelfde soort idee dat ik nu heb als ik hoor over algebraïsche groepen. Zijn het onjuiste impressies?

Ik wil het onderwerp van dit hoofdstuk vervolgen met enkele beschouwingen op wat breder terrein, minder incidenteel.

In een vroegere publikatie (zie in [5]) heb ik uitvoerig het thema behandeld van de algebraïsering van de wiskunde. Het betreft, zeer globaal gezegd, de tendens tot algebraïsche vormgeving en algebraïsche methoden. Ik wees er op dat die ontwikkeling valt aan te wijzen vanaf het fundamentele werk van Descartes met zijn introductie van de getallen in de meetkunde. Met voorbeelden uit de contemporaine wiskunde heb ik gemeend te kunnen aantonen dat deze tendens tot algebraïsering voortduurt. Op grond hiervan zou men nauwelijks van een modeverschijnsel kunnen spreken: algebraïsering schijnt een blijvende tendens te zijn. In de historische ontwikkelingsgang echter kan men zekere ontwikkelingen aanwijzen die er op duiden dat ook bij de algebraïsering aspecten van "mode" een rol hebben gespeeld. In mijn genoemde publikatie wees ik er op dat reeds zeer spoedig na Descartes kritiek werd uitgeoefend op de nieuwe methode van Descartes door niemand minder dan Leibniz. Kort gezegd vond hij de analytische methode in de meetkunde te automatisch van karakter waardoor de voor de wiskundige essentiële inventiviteit te veel in het gedrang kwam. Hij wees op de beperkingen van deze methode. Men kan deze kritiek zien als een aanmerking op de door Descartes ingevoerde "algebraïsche mode", met dien verstande evenwel dat Leibniz haar niet geheel verwierp - hetgeen een radicaal standpunt zou zijn geweest. Het was zijn bedoeling te wijzen op een overwaardering van de algebra. Deze "mode" is echter gecontinueerd. Men kan zelfs zeggen dat een andere toen opkomende "mode", de infinitesimaalrekening, er in wezen op is gefundeerd.

Overigens vertoont dit kritische standpunt enige gelijkenis met de vroeger op de lagere school (de terminologie basisschool was nog niet uitgevonden) heersende mode om redeneersommen te laten leren, sommen zoals over treinen die zich met verschillende snelheid in tegengestelde richting bewegen waarbij dan door redeneren het punt van ontmoeting wordt gevraagd en wat dies meer zij. Trouwens de stereometrie, later, vertoonde een zelfde beeld: de orthogonaliteit van 2 lijnen, bijvoorbeeld, moet worden beredeneerd, niet berekend.

In het begin van de 19e eeuw herhaalt de historie op dit punt zich in zekere zin. Monge en Poncelet waren van oordeel dat door de algebraïsche methodiek de echte meetkunde niet tot zijn recht was gekomen en was achtergebleven. Het was een kritiek op het gangbare systeem als mode. Men weet dat uit die kritiek uiteindelijk een nieuwe richting voortkwam: de projectieve meetkunde, synthetisch van opzet, werd ontwikkeld. Deze synthetische meetkunde kan dan worden gezien als een contra-richting, een contra-mode. Men krijgt aldus het verschijnsel dat als gevolg van kritiek op bepaalde systemen, zich naast het bestaande systeem een contra-systeem ontwikkelt, met dien verstande dat beide systemen blijven bestaan. Het gaat dan niet om "modeverschijnselen" in die zin dat een oude "mode" verdwijnt en wordt vervangen door een nieuwe. Deze "moden" zijn niet tijdgebonden. In mijn Leidse jaren had Van der Woude in zijn vóórkandidaatscollege een plaats, zij het een niet al te grote, ingeruimd voor de projectieve meetkunde. Ik herinner mij dat hij graag manipuleerde met de lijn in het oneindige en daarop de imaginaire punten I en J. Homogene coördinaten (driehoekscoördinaten) kwamen aan de orde. Intussen is in de moderne tijd de projectieve meetkunde ook niet ontkomen aan de algebraïsche mode, iets wat Monge en Poncelet juist wensten te vermijden (Moebius, Plücker). Misschien mag men zeggen dat de analytische mode is gaan domineren. Ik noem hier het boekje van A. Heyting, *Projectieve meetkunde* (1963). Voor wat betreft de synthetische richting noem ik het klassieke, destijds zeer bekende, boek van Th. Reye, *Die Geometrie der Lage* (1880); (Engelse ed. 1898).

In dit kader moet worden gewezen op de beschrijvende meetkunde, een techniek van meetkundige afbeeldingen die uit de beschouwingen van Monge en Poncelet is voortgekomen. Hoe oordeelt men over deze dicipline? Het onderwerp heeft zich lang gehandhaafd. Nog in de twintiger jaren stond de orthogonale parallelprojectie op het programma van de hogere burgerscholen (de gymnasia hadden al vroeg de analytische meetkunde en de beschrijvende meetkunde vond er geen plaats). Voor mij was het nog in 1927 een eindexamenvak. Maar ook bij het hoger onderwijs vond de beschrijvende meetkunde een plaats: de parallelprojectie, de centrale projectie, de axonometrie. Van der Woude besteedde er enige uren aan en tentamineerde er in. Bij de technische hogescholen is het lang een vrij belangrijk vak geweest. Nog lang na 1945 was het een onderdeel bij de middelbare akten, geïncorporeerd bij de projectieve meetkunde; thans is de "B.M." ook daar geheel verdwenen. Moet men constateren dat dit vak eigenlijk een technische vaardigheid is? Kan men het beschouwen als een modeverschijnsel dat gedoemd was ten onder te gaan? Zo men dit zou willen beamen, dan moet toch worden opgemerkt dat die mode dan toch wel een functionele rol heeft vervuld in de ontwikkelingsgang van de wiskunde, enerzijds in het kader van de synthetische meetkunde, anderzijds bij technische toepassingen. Verschillende leerboeken werden er over geschreven in Nederland zowel als in het buitenland en niet slechts vóór 1940 toen het vak nog meer leefde, maar ook in recentere jaren toen de wiskunde reeds lang de weg van de algebraïsering was opgegaan (bijvoorbeeld E. Salkowski, *Darstellende Geometrie,* 1958). Ik noem wat betreft Nederland het leerboek van H.J. van Veen, *Leerboek der beschrijvende meetkunde,* destijds algemeen gebruikt op de T.H. in Delft; daarnaast J.G. Rutgers, *Centrale* *projectie* (nog geciteerd door Heyting in zijn projectieve meetkunde). Op deze gronden kan ik dit vak toch niet zien als een "mode".

Ik voeg aan deze beschouwingen nog enkele algemene overpeinzingen toe. In een ontwikkelingsgang van een halve eeuw heeft de wiskunde zich onder de invloed van algebraïsering, axiomatisering en andere daaraan nog toe te voegen tendensen ontwikkeld tot een wetenschap van een zeer abstract karakter - zonder daarmee te willen pretenderen dat het concrete uit het beeld is verdwenen. Ik wijs hier bijvoorbeeld op het Bourbakisme. Nu doet zich het feit voor dat men tegenwoordig in sommige publikaties waarin het gaat over algemene, vaak filosofisch gekleurde, beschouwingen over de evolutie van de wiskunde leest dat ook op dit algemene punt zich een contra-richting manifesteert. Het schijnt dat in recente jaren de tendens bestaat om weer terug te gaan naar het "concrete", naar meer specifieke theorieën zonder overigens te pretenderen dat de abstracte methoden verdwenen zijn. Zij zijn bruikbaar geworden voor concrete problemen. Is men van oordeel dat men in de pure abstractie te ver is gegaan? Met andere woorden: is ook de tendens naar abstractie in zekere mate een mode?

Ik verbind er een vraag aan. Kan men, de ontwikkeling in haar totaliteit overziende, zich daaruit in de evolutie zoals die is verlopen stukken wegdenken? Uiteraard denk ik hierbij niet aan zeer specifieke onderwerpen die al dan niet een rol kunnen spelen of hebben gespeeld in het leven van mathematici. Het overgrote deel van de mathematici kan, om maar een voorbeeld te geven, zeer wel leven zonder kennis van de theorie van de kettingbreuken - hoewel men de verbindingen van dit onderwerp met andere onderwerpen, zoals het momentenprobleem en approximatieprobleem (onder andere quadraturen), niet moet onderschatten (zie J.A. Shohat and J.D. Tamartin, *The Problem of Moments,* 1963). En wanneer dat nodig blijkt zal hij het wel bijleren. Maar daarom gaat het hier niet. De vraag die ik stel is of onderwerpen, ook al zijn die thans naar de achtergrond geschoven, toch in de totstandkoming van het gebouw een onmisbare functie hebben vervuld. Hoewel, in mijn mening, de vrije creatie bij de totstandkoming van de wiskunde een overwegende rol speelt, rijst toch de vraag of de evolutie van de wiskunde, in haar totaliteit beschouwd, moet worden gezien als een onverbrekelijke eenheid? Groeit de wiskunde, ondanks haar vrijheid, volgens zekere patronen waaruit geen schakels kunnen worden weggedacht? Laat ik dit probleem illustreren aan het voorbeeld van de ontwikkeling van de algebra. Bij dit onderwerp springen, zoals ik al eerder opmerkte, de verschillen tussen de algebra zoals wij die destijds - meer dan een halve eeuw geleden - leerden en de hedendaagse algebra wel bijzonder in het oog. Deze oude, klassieke algebra over de reële getallen was sterk specifiek, meer incidentele problematiek, een vraagstukkencultus, meer afleidingen van betrekkingen dan theorie: determinanten, complexe getallen met meetkundige toepassingen, stelsels van lineaire vergelijkingen, hogeremachtsvergelijkingen, eliminatie, breuksplitsing, vele convergentiecriteria van reeksen, ... Heden ten dage is de algebra structureel gericht, theoretisch van karakter, het gaat over algebra's. De vraag is dan wat de rol is geweest van deze klassieke algebra bij de totstandkoming van de moderne algebra. In hoeverre was de oude algebra een vooronderstelling bij de schepping van de moderne algebra? Op welke basis is de hedendaagse algebra ontstaan? Zijn er gedeelten aan te wijzen die in het bijzonder een rol hebben gespeeld? Is toch een zekere continuïteit aan te wijzen?

Daarnaast kan men zich afvragen welke delen van deze klassieke algebra een beginnend mathematicus nu moet weten om tot de hedendaagse algebra door te dringen. Het is uiteraard een wezenlijk andere vraagstelling want het gaat dan niet om een onstaansproces, maar om een *leerproces*. Ik geloof dat grote delen van deze klassieke algebra daarbij nauwelijks meer een rol spelen - al zijn zij nuttig voor historisch besef. Er is een andere denkwereld ontstaan, een denkpatroon dat andere eisen onderstelt. Ik vraag mij af of de oude generaties die zich veel later zagen geplaatst voor de noodzaak zich de moderne algebra eigen te maken daarbij aan de oude specifieke problematiek veel speciale steun hadden. Zij moesten met hun eigen algemeen mathematisch inzicht een eigen, nieuwe, weg gaan. Voor hen konden, achteraf, grote delen worden gemist. Maar het is een andere zaak wanneer het gaat om een *ontstaansproces*. Men kan over de ontstaansprocessen hoogstens filosoferen gesteund op historisch onderzoek. Ik ga daar verder niet op in.

Hoofdstuk 5

Theorie en vraagstukken

Aan het slot van het vorige hoofdstuk plaatste ik tegenover elkaar de klassieke algebra zoals die in mijn eerste opleidingstijd, de midden-twintiger jaren, nog werd gedoceerd - een algebra die nog nauwelijks was verbonden met theorie en structuren - en de huidige op theorievorming en structuren gerichte algebra. Die oude algebra heb ik destijds ervaren als gericht op concrete problemen, een vraagstukkencultus, een toepassingsgericht gebied, meer praktisch dan theoretisch. Daar staat tegenover in de moderne vorm de theorie van groepen, ringen,..., en bijvoorbeeld de theoretisch getinte Galoistheorie. Voor de analyse meen ik een zelfde aspect te kunnen aanwijzen. In de colleges analyse waren concrete onderwerpen destijds belangrijk zoals, om maar wat voorbeelden te noemen, de concrete oplossing van differentiaalvergelijkingen (voor partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde de methode van Charpit-Lagrange) berekening van bepaalde, veelal moeilijke, integralen, eventueel met methoden ontleend aan de complete functietheorie enz. Het waren onderwerpen voor tentamen. Daartegenover thans de theorie van Lie-groepen, harmonische analyse, de theorie van Banach-ruimten, de functionaalanalyse, enz. De berekening van integralen is weliswaar niet verdwenen, maar het is toch stellig, zoals destijds, geen hoofdonderwerp meer. Daarbij moet dan worden opgemerkt dat de oude analyse in haar oorsprong nauw was verbonden met de natuurkunde en de mechanica en de daarvan uitgaande constructieve invloed had ondergaan, niet geneigd tot abstractie. Het gaat hier in zekere zin om complementaire aspecten in de opbouw van de wiskunde: de theoretische zijde, de opbouw van theorieën, het scheppingsproces, tegenover de concrete, niet tot abstractie geneigde toepassingen, de vraagstukkenproblematiek.

Als men deze facetten onderkent in hun functie bij de opbouw van de wiskunde is een primaire vraag die rijst welke de houding is van de mathematici tegenover deze aspecten. Bestaan er specifieke belangstellingssferen bij de mathematici, theoretisch dan wel praktisch gericht? Het is een vraag die te maken heeft met de psychologie van de mathematicus.

Ik stel mij voor deze beide aspecten te belichten waarbij mijn persoonlijke interessesfeer een rol zal spelen. Het zal daarbij gaan over de verhouding tussen de theoretisch gerichte wiskundige, de man van de theorie, en de prakticus, de man van de vraagstukken als ik die zo mag aanduiden. De zogenaamde "toegepaste wiskunde" blijft hier buiten beschouwing: het zal gaan over de interne problematiek van de wiskunde. Ik zal enkele voorbeelden van ontwikkelingen noemen waarbij beide aspecten zijn aan te wijzen. Daarbij zal mijn specifieke belangstelling voor de theoretische ontwikkelingen naar voren komen: ik was geen "vraagstukkenmaker", geen "prakticus".

(i). In hoofdstuk 2 schreef ik over het probleem van Dirichlet binnen de potentiaaltheorie, het klassieke probleem aangaande de existentie van een harmonische functie in een open verzameling met gegeven randwaarden. Beide aspecten zijn hierbij aan te wijzen: de effectieve berekening van een oplossing enerzijds en de existentie anderzijds. Mij interesseerde hierbij primair de *existentie problematiek* als zodanig, de pure existentie voor een willekeurige open verzameling, en de daarmee verbonden theoretische beschouwingen over de algemene eigenschappen van harmonische en superharmonische functies, waarbij topologische concepten een rol spelen. Het wordt dan een algemene theorie, meer gericht op structurele eigenschappen dan op expliciete oplossingen. Dit laatste facet had minder mijn belangstelling. Uit die onderzoekingen is de axiomatische theorie van de harmonische functies voortgekomen, een van de differentiaalvergelijking van Laplace los gemaakte theorie, gericht op structuren; de naam van M. Brelot is er mee verbonden. Het is een fraai voorbeeld van abstracte theorievorming.

De *klassieke* potentiaaltheorie van Gauss, Dirichlet,..., waaruit deze abstracte theorie voortkwam, was uit de aard der zaak anders gericht: zij betreft specifieke eigenschappen van potentialen, stellingen over de oplossingen van de vergelijking $\Delta u = 0$. Daarin past een andere zienswijze aangaande het probleem van Dirichlet, n.l. de *opgave* een *effectieve berekening* te geven van de gevraagde harmonische functie met *gegeven* randwaarden in een *gegeven* open verzameling, hetzij in $\mathbb{R}^2$, hetzij in $\mathbb{R}^3$, d.w.z. de concrete oplossing van het probleem, niet de oplosbaarheid ervan. Voor een bol biedt dit geen moeilijkheden; het is een klassiek probleem waarvan de oplossing is gegeven door de integraal van Poisson. Maar voor een ellipsoïde of, in $\mathbb{R}^2$, voor een rechthoek, toch geen gecompliceerde figuren, is dit concrete probleem bepaald niet eenvoudig. Ik verwijs naar Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*. Voor fysische toepassingen op trillingsverschijnselen noem ik nog Rayleigh, *The Theory of Sound* (1877, 1894, 1929). Deze concrete problematiek had niet mijn eerste belangstelling. Het concept "existentie" in de wiskunde is mij blijven boeien. Ik neig ertoe te zeggen dat het in de beide situaties, de existentieproblematiek tegenover de effectieve problematiek, gaat om verschillende "soorten" van wiskunde, de abstracte problematiek tegenover de concrete problemen, wiskunde met een andere doelstelling, van een andere orde, zij het ook dat beide bindingen met elkaar hebben, al zijn die misschien alleen historisch.

(ii). De ontwikkeling in de loop der eeuwen van het concept van een integraal vertoont een analoog beeld. Ik schreef er reeds over in hoofdstuk 3 waarbij ik dit voorbeeld noemde in het kader van successievelijke generalisaties. De lijn loopt van het klassieke begrip integraal via Riemann en Lebesgue om tenslotte uit te monden in het begrip integraal conform Bourbaki. Bij deze laatste zijn dan niet meer de traditionele sommen - Riemann-sommen en bij Lebesgue in een wat gecompliceerdere vorm - het uitgangspunt, maar wordt uitgegaan van het structuur van het object: de integraal gedefinieerd als een lineaire vorm op bepaalde functieruimten. Het gaat bij deze ontwikkelingsgang om een *theorie* van het integraalbegrip, niet om effectieve berekeningen in concrete, soms moeilijke, situaties. Het zijn ontwikkelingen van verschillende orde. In het feit dat deze theoretische lijn mij meer aansprak dan de effectieve berekeningen, spreekt de man van de theorie. In die tijd verschenen boeken over de *theorie* van de integraal; ik noem S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (1933; engelse editie 1937). De vroegere boeken, behoudens bijvoorbeeld die van Lebesgue, betroffen meer de effectieve problematiek.
(iii). In hoofdstuk 3 wees ik op de in de begin-veertiger jaren begonnen ontwikkeling van de analyse over niet-archimedisch gewaardeerde lichamen, een klasse van lichamen verschillend van dat van de reële getallen. Het onderzoek voerde tot een functionaalanalyse over dergelijke lichamen. Het is een voorbeeld van de vorming van een nieuwe theorie - waarin overigens uiteraard analogie-overwegingen een rol spelen. In het raam van deze onderzoekingen kwam ik er toe mij de vraag te stellen of het mogelijk zou zijn het concept van een integraal te definiëren voor klassen van functies met waarden in een niet-archimedische gewaardeerd lichaam. Een aanvankelijke poging tot het volgen van de klassieke weg voerde niet tot een bevredigend resultaat, maar een later, in samenwerking met T.A. Springer, gevolgde methode aansluitend bij Bourbaki, slaagde. Het was het begin van interessante ontwikkelingen (o.a. harmonische analyse). Men herkent hetzelfde theoretische beeld: *kan zo'n concept in de nieuwe situatie worden gedefinieerd?* Het is een vraag van andere orde dan berekening, en ook hierin spreekt de man van de theorie.

Intussen blijft, ongeacht persoonlijke voorkeur, het oplossen van problemen en het maken van vraagstukken in het kader van een theorie een essentieel en onmisbaar facet om zich de essentie van een theorie wezenlijk eigen te maken. Het zijn, ook historisch, met elkaar verbonden aspecten. Men kan er de bruikbaarheid van een theorie en haar functie binnen het gebouw mee toetsen. Men kan niet volstaan met het leren van definities en stellingen, maar men moet er ook mee werken. Ik kan op dit punt wijzen op persoonlijke ervaringen. Toen ik, na lange jaren anders gerichte beroepsactiviteit, in de begin-zestiger jaren op voor een mathematicus gevorderde leeftijd in Utrecht kwam, werd ik daar in verschillende voordrachten geconfronteerd met de homologische algebra: men speelde met schema's en diagrammen. Ik heb de indruk dat het toen in de mode was om diagrammen op te sporen. Het lag buiten mijn wiskundig gebied, maar ik vond het interessant en meende dat men er toch wat van behoorde te weten. Daarom bestudeerde ik de definities en de elementen van die theorie uit boeken. Maar ik werkte er niet mee, het viel toch buiten mijn sfeer. Ik heb mij daarom nooit goed kunnen indringen in deze materie: het leren van definities is daartoe niet voldoende, men vergeet de definities weer snel.

VRAAGSTUKKEN OPLOSSEN

Het maken van opgaven is intussen een belangrijke activiteit. Ik denk dat iedere mathematicus in zijn leven vraagstukken heeft moeten maken. Het begint uiteraard al bij het middelbaar onderwijs. Om een indruk te geven van wat die vraagstukken toen inhielden voeg ik als bijlage 6 toe de eindexamenopgaven voor het jaar 1927. Zij zijn exemplarisch voor die tijd en nog voor vele jaren later. Voor het eindexamen moest men op dit punt ervaring op doen. Als steun daarbij diende het destijds veel gebruikte boek van Kruytbosch, *Schriftelijke opgaven van het eindexamen der hogere burgerscholen B met vijfjarige cursus,* waarin de opgaven die in de loop der jaren waren opgegeven, waren bijeengebracht (de 17e druk bevat de opgaven van 1920 tot circa 1945; er staan trouwens ook de opgaven voor de andere eindexamenvakken in). Het is curieus de wijzigingen na te gaan. Zo waren er in de twintiger jaren nog regelmatig opgaven over het onderwerp "samengestelde interest" (annuïteiten) als toepassing van de meetkundige reeksen. Overigens is mij terzake door een in de historie op dit punt deskundige verteld dat het verband juist andersom scheen te zijn: reeksen werden ingevoerd vanwege de annuïteiten. Er waren overigens meer van dit soort van boeken (Th.G.D. Stoelinga en M.G. van Tol; J.E. Edie). De lezer make een vergelijking met de huidige situatie. Later, op de universiteit, was het maken van vraagstukken eveneens een belangrijk punt, er werd immers in getentamineerd, althans voor het kandidaatsexamen, maar ook voor het doctoraalexamen hoewel dat meer theoretisch was. Van het kandidaatsexamen herinner ik mij maxima en minima, het berekenen van eenvoudige typen van integralen (primitieve functies), de opgaven waarbij verlangd werd om analytische uitdrukkingen met differentiaalquotiënten van de 1e orde, 2e orde, lineair, kwadratisch,... op nieuwe coördinaten te transformeren of om de afhankelijke en de onafhankelijke variabele te verwisselen. Bij de meetkunde, bij Van der Woude, waren het vraagstukken over lijn- resp. driehoekscoördinaten; hij had een bijzondere voorkeur voor kegelsnedenbundels. Voor het doctoraalexamen waren er in het kader van het college "Bepaalde integralen" onder meer nogmaals het berekenen van bepaalde integralen, maar nu van een gecompliceerde soort, met methoden als differentiatie onder het integraalteken met uitvoerige behandeling van de condities waaronder dat geoorloofd is - een onderwerp dat, zo het nog voorkomt, valt in de eerste jaren - "$\epsilon-\delta-$ techniek"; de concrete oplossing van partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, wat over elliptische functies, enz. Ik herinner mij boeken die wij gebruikten om ons te oefenen. Voor de algebra was er: J.J.C. Westendorp, *Vraagstukken over de hoogere algebra* (1911). Het is een boek met honderden vraagstukken, ook over onderwerpen die wij nu tot de analyse rekenen bijvoorbeeld convergentie en divergentie van reeksen. Het is een "Sommenboek". Men bedenke dat er in de twintiger jaren na het kandidaatsexamen geen algebra meer werd gegeven.

Voor de analyse noem ik speciaal: M.F. Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitesimal* (1891). Het is een boek van een heel andere orde, geen "vraagstukkenboek" in zijn eenvoudige vorm; het bevat historische aantekeningen, bronnen van problemen, theorie, een interessant boek waarin ook uitvoerige oplossingen zijn vermeld. Ik had er wat aan, maar gebruikte "men" het? Ten gebruike bij de Technische Hogeschool te Delft werden in Delft (Waltman) verschillende handleidingen over analytische meetkunde en analyse, ook verzamelingen met opgaven, uitgegeven waarvan men gebruik maakte. Voor differentiaalmeetkunde, een onderwerp voor het doctoraalexamen, maakten wij de vraagstukken, opgenomen in het destijds veel gebruikte boek van Eisenhart. Maar overigens was de stof voor het doctoraalexamen wel wat meer op theorie gericht dan die voor het kandidaatsexamen. Uiteraard verschijnen er ook nu nog vraagstukkenboeken (zie b.v. J.E.H. Bor, *Vraagstukken over lineaire algebra*).

De cultus van het oplossen van opgaven heb ik later nauwelijks voortgezet. Voor het oplossen van de lastige vraagstukken uit het eerdergenoemde boek *A Course of Modern Analysis* van Whittaker and Watson heb ik, om maar een voorbeeld te noemen, nooit ambitie gehad. Evenmin heb ik deelgenomen aan het maken van de opgaven opgenomen in het Nieuw Archief voor Wiskunde. Tot 1966 publiceerde het Wiskundig Genootschap een afzonderlijke uitgave "Wiskundige opgaven met de oplossingen". Is het een afkeuringswaardige houding voor een wiskundige?

Op dit punt herinner ik mij een voorval, op zich zelf een volstrekt onbelangrijk incident, naar aanleiding van enige voordrachten over de ontwikkeling van het integraalbegrip voor een groep van leraren. Ik behandelde de ontwikkeling vanaf Leibniz, Newton, de Riemann-integraal, via de Stieltjes- en de Lebesgue-integraal naar een axiomatisch integraalbegrip conform Bourbaki. Een toehoorder merkte op dat ik zo interessant kon spelen met deze begrippen in onderling verband. Mijn antwoord was toen dat leraren bij de stereometrie - toen nog niet geheel verdwenen - op analoge wijze zo goed konden manipuleren met de stellingen aangaande de loodrechte stand van lijnen, vlakken en wat dies meer zij. Maar dit antwoord gaf natuurlijk de situatie niet goed weer. Zij hanteerden de theorie in toepassingen op concrete situaties, kubussen, prisma's, bollen,... . Ik daarentegen manipuleerde met de theorie zelf en de opbouw daarvan en bleef meer verwijderd van de toepassingen, de vraagstukken, om zo te zeggen de "lastige" integralen. Hier raakt men aan de kern, althans een essentieel facet, van wat ik dan noem de tegenstelling tussen theorie en toepassing. Ik kom daarop nog terug.

Het komt mij voor dat de bekwaamheid tot het oplossen van vraagstukken van hoog niveau een aparte kwaliteit vereist. In nog sterkere mate geldt dit misschien voor het omgekeerde: het samenstellen van opgaven als illustratie en toepassing van een theorie; het vereist, wanneer dat om het hogere niveau gaat, fantasie. Het is een belangrijke, misschien zelfs primaire, kwaliteit en ik heb steeds met een zekere bewondering opgezien naar degenen die deze capaciteit bezitten. Het is de oude, in het spraakgebruik blijkbaar onuitroeibare idee dat men als wiskundige wel goed zal kunnen rekenen. Zijn dit de "echte" wiskundigen en de theoretici meer een soort filosofen? Beter is het misschien deze beide kwaliteiten te zien als complementair, beide onmisbaar, theorie en vraagstukken als complementaire aspecten van de wiskunde.

WISKUNDIGE TYPEN

Bij deze beschouwingen komt een kwestie aangaande de geaardheid van de wiskundigen in het geding. De vraag is wel eens bij mij opgekomen of de mathematici in hoofdlijnen naar hun aard zouden kunnen worden getypeerd. Ik denk daarbij dan niet aan een indeling in meetkundigen, algebraïci,... Het gaat mij om de aard van hun interessesfeer en de richting van hun creativiteit. Ik heb het oog op de psychologie van hun werkpatronen. Zijn er typen van wiskundigen? In verband met het voorgaande denk ik dan in de eerste plaats aan twee typen: de theoretici, in creatief opzicht dan wel in interesse, tegenover de meer toepassingsgerichte mathematici. Uiteraard pretendeer ik niet dat deze groepen elkaar zouden uitsluiten: beide hebben gemeenschappelijke facetten, maar het komt mij voor dat hun creativiteit in hoofdtrekken verschillend is gericht. Men zou er de werkpatronen van befaamde wiskundigen eens op moeten onderzoeken. Het gaat dan om een karakterologische studie. Laat ik wat voorbeelden noemen. Kan men Bolyai, Lobatschewsky, Grassmann, Peano, Cantor, Brouwer in hoofdzaak rekenen tot de theoretici? Hoe oordeelt men over Laplace als ik bijvoorbeeld denk aan zijn werk over de waarschijnlijkheidsrekening? En over Lagrange met zijn *Mécanique analytique?* Wat is de plaats van Galois? Dan is er, in de contemporaine wiskunde, de groep "Bourbaki". Afgaande op de lange systematische reeks van boeken die onder deze naam zijn verschenen is het op mij overgekomen als een fraai voorbeeld van een groot gebouw opgetrokken door theoriebouwers. Het is de geleidelijke opvolging van definities, stellingen, verhelderd door vele voorbeelden - waaraan overigens opgaven zijn toegevoegd - die tot zo'n oordeel zou kunnen leiden. Het valt niet te verwonderen dat "Bourbaki" mij aanstonds interesseerde. Het eerste deel *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)* verscheen in 1939 en ik kon er reeds vroeg (ik meen nog in datzelfde jaar) kennis van nemen. Toch moet het oordeel hier meer genuanceerd zijn. Het gebouw mag dan een abstracte indruk wekken, dit neemt niet weg dat er in een de laatste tijd weer te bespeuren tendens naar het "concrete", verbindingen zijn tussen die abstracte methoden en de oude concrete problemen. Nog onlangs werd ik attent gemaakt op voorbeelden van dergelijke ontwikkelingen (de oplossing van het vermoeden van Mordell; het gebruik van middelen uit de algebraïsche topologie bij problemen aangaande eindige Lie-groepen). Aldus zijn er ook in het Bourbakistische gebouw concrete klassieke achtergronden aanwezig.

Zijn de Bourbakisten in hoofdlijnen "theoriebouwers"? Een nadere studie van de achtergronden van de groep Bourbaki lijkt belangwekkend uit een oogpunt van typologie van wiskundigen, voor voor zover die niet reeds is verricht. Dit alles neemt niet weg dat het opgerichte gebouw mij zeer heeft geïmponeerd.

Misschien is in de historie de groep van de pure theoriebouwers zoals ik die op het oog heb niet groot. Het merendeel van de mathematici zal eerder op deze punten wel veelzijdig zijn. Echter, om aan de andere zijde te denken: hoe kwalificeert men de pure meetkundige Jacob Steiner?

Er is nog een type van wiskundigen die ik moeilijk van een passende naam kan voorzien. Het zijn de "speelse" wiskundigen, in zekere mate de kunstenaars onder de wiskundigen, de meesters in het geven van briljante voordrachten. Het zijn de veelzijdigen, de mathematici met een speciale "esprit", een sprankelende geest. Hun creativiteit uit zich niet in het opbouwen van theorieën, maar in het leggen van onverwachte verbindingen tussen soms van elkaar verwijderde onderwerpen met interessante consequenties. Zij bezitten een levendigheid van geest die staat tegenover het formele, structuralistische denken dat sommingen als dor zal overkomen. Onder hen vindt men de samenstellers van verrassende, ingenieuze, opgaven. Ik onthoud mij van het noemen van namen.

Ik kom terug op de hiervoor aangeroerde kwestie van theorie versus toepassingen. Ik heb deze zaak beschreven als een zekere tegenstelling tussen theorie-vorming en de toepassing daarvan, ook opgaven in het raam van zo'n theorie. De vraag rijst waaruit dan zo'n tegenstelling in wezen zou bestaan en hoe die zou kunnen worden verklaard.

In de geschiedenis van de wiskunde zijn verschillende voorbeelden aan te wijzen van algemene theorieën die zijn voortgekomen uit speciale concrete situaties. De abstracte integratietheorie conform Bourbaki is tot stand gekomen uit bijzondere integratietheorieën; de axiomatische theorie is daarop, uit structuur overwegingen, gegroeid. Dezelfde situatie deed zich voor bij de op axiomatische basis ingevoerde Banach-ruimten; zij is gegroeid op basis van concrete functieruimten, $L^2, L^p, C, \ldots$ Zo'n stap naar een theorievorming vereist een *synthese* die berust op herkenning van gemeenschappelijke structuren in bijzondere situaties en het daaruit trekken van consequenties. De bijzondere gevallen verschijnen daarna in het licht van de abstracte theorie als toepassingsgebieden. Om tot deze synthese te komen is een stap nodig, een drempel moet worden overschreden. In eerdere publikaties heb ik deze ontwikkelingsfase aangemerkt als een *discontinuïteit* in de evolutie in die zin dat creatieve vermogens moeten leiden tot een synthese naar een volgende fase.

De lijn van theorie naar toepassingen is in zekere zin te zien als een omgekeerd proces. Als men, om een voorbeeld te noemen, beschikt over een axiomatische theorie en dan wordt geconfronteerd met een eventuele mogelijkheid van toepassingen in concrete situaties, dan is, om daaromtrent uitsluitsel te verkrijgen, daarvoor vereist dat in die bijzondere gevallen de axiomatische structuren van de theorie worden herkend. Het gaat om het herkennen van analogiepatronen. Het oplossen van vraagstukken - en dan denk ik uiteraard aan vraagstukken van niveau - die zijn opgesteld om een theorie te illustreren is naar het mij voorkomt eveneens verbonden met het onderkennen van analogiepatronen en daarna deze weten te hanteren. Dat kan een moeilijk proces zijn, zeker indien deze vraagstukken liggen in een gebied dat wat verwijderd lijkt te zijn van die theorie. Het is de omgekeerde weg van de synthese:

het is de *analyse*. Ook het samenstellen van opgaven is verbonden met processen van analyse van het terrein waarbinnen men die opgaven wil opstellen, met als belangrijke factor daarnaast een speciale inventiviteit op dit gebied. In een necrologie van Kluyver, die in het voorgaande een aantal malen ter sprake is gekomen, wordt speciaal genoemd zijn grote inventiviteit in het samenstellen van opgaven in het kader van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap (zie Nieuw Archief voor Wiskunde, 2e reeks, XVIII, 1936).

Om terug te komen op het hiervoor genoemde elementaire voorbeeld van vraagstukken in de stereometrie valt op te merken dat het daarbij gaat om in concrete situaties, kubus, bol,..., de structuren van de definities en stellingen uit de theorie te herkennen en weten toe te passen. Het is denkbaar dat voor dit proces een speciale capaciteit is vereist, die misschien niet allen in gelijke mate bezitten.

Het is misschien interessant dit voorbeeld uit de elementaire meetkunde te vergelijken met de situatie in de traditionale analytische meetkunde. Het zou kunnen zijn dat in dat vakgebied het maken van vraagstukken minder is verbonden met het herkennen van structuren. Het gaat daarin veel meer over wat ik noem "rekenwerk". Vraagstukken kan men op een technische wijze oplossen. Ik herinner er aan dat juist op dit punt de door Descartes geïntroduceerde methode werd gekritiseerd, o.a. door Leibniz. Ik schreef daarover reeds in hoofdstuk 4. Leibniz achtte de algebraïsche methode van Descartes te automatisch waardoor het eigen karakter van de meetkunde niet tot zijn recht kwam en er te weinig inventiviteit, analytisch vermogen, was. Ik wijs er op dat nog in mijn schooltijd de oplossing van vraagstukken in niet-gealgebraïseerde vorm - bijvoorbeeld de constructie van figuren die aan zekere voorwaarden voldoen - begon met het geven van een analyse, waarna de constructie, het bewijs en een bespreking volgen. Daarbij was er geen automatisme en dat maakte de moeilijkheid uit. Van dit viertal is slechts de analyse overgebleven.

Hoofdstuk 6

Het pad van de wiskundige vroeger en nu

Niet alleen de universitaire wiskundestudie in de eerste decennia van deze eeuw verschilde essentieel van de situatie zoals die zich ná 1945 ging ontwikkelen, ook het verdere pad van de afgestudeerde mathematicus - misschien inmiddels gepromoveerd - was destijds anders wegens de andere maatschappelijke omstandigheden. Ik schrijf er wat over op, waarbij ik in het bijzonder het oog heb op de mogelijkheden van voortgezette studie en een wetenschappelijke loopbaan. Ik verbind er wat beschouwingen aan over de loop van het wiskundig onderzoek.

De weg naar een universitaire loopbaan, als men die ambiëerde, was destijds zeer verschillend van de toestand zoals men die sedert een aantal decennia aantreft. Heden, bij de aanwezigheid van Instituten met medewerkers, kan zich voor een student op grond van zijn prestaties tot op zekere hoogte het perspectief openen van een tijdelijke wetenschappelijke positie aan een Instituut. Zoals ik al eerder opmerkte, geschiedt de promotie immers normaliter in instituutsverband met een zekere mogelijkheid voor continuering ter plaatse of elders.

Kon de inmiddels gepromoveerde wiskundige vroeger bewust een universitaire loopbaan voor ogen staan? Dat had dan moeten zijn een lectorsplaats of een hoogleraarschap, en dat lag ver weg. Als men doorstudeerde gebeurde dat niet uit carrière-overwegingen. Zo heb ik persoonlijk dat althans ervaren. Misschien waren er in Delft enkele assistentsplaatsen vrij waarnaar men kon uitzien - ik herinner mij er enkele uit mijn tijd - maar in het algemeen moest men afwachten. De weg naar de Universiteit verliep dan ook anders dan nu: aan een positie aan de Universiteit ging doorgaans een leraarsbetrekking bij het toenmalige middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs (h.b.s., gymnasium) vooraf. Vóór 1940 waren veel leraren nog gepromoveerd - ik denk daarbij uiteraard niet alleen aan de wiskunde - en ook ná 1945 bleef deze toestand ten dele bestaan maar geleidelijk aan begonnen de gepromoveerde leraren een kleine minderheid te vormen. In de groep van de leraren was later nauwelijks meer een reservoir te vinden voor een wetenschappelijke functie.

In het algemeen werd men leraar, want er waren nauwelijks andere mogelijkheden. Ik heb hier uitdrukkelijk het oog op de wiskunde. Voor wat betreft de natuurkunde en de scheikunde waren er, naar ik aanneem, ook destijds reeds meer mogelijkheden en aangaande andere vakken moet ik mij van een oordeel onthouden. Voor de wiskundige was er de positie van actuaris bij een levensverzekeringsmaatschappij, maar het aantal plaatsen was uiteraard beperkt. Uit het tijdvak van vóór 1945 zijn mij verspreid over verschillende jaren, enkelen bekend die deze weg zijn opgegaan. De wiskundestudie sloot er niet op aan. Pas veel later zou deze richting, maar dan in breder verband, worden geïntroduceerd.

Ook vonden in die jaren enkelen een plaats in het bedrijfsleven of bij een technische dienst bij het Rijk. Maar het bleven uitzonderingsgevallen. Voor zuiver-wiskundigen waren er destijds in die richting slechts geringe mogelijkheden. Enkelen vonden hun weg in de statistiek. De weinigen die een plaats vonden buiten het onderwijs moesten zich in de nieuwe materie zelfstandig inwerken en erkend moet worden dat dat blijkbaar gelukte op basis van het gefixeerde universitaire programma. Men bedenke hierbij dat, zoals ik al eerder opmerkte, er destijds een vast schema van colleges was waarin geen plaats was voor voorkeursrichtingen. Men kon niet, zoals veel later mogelijk werd, afstuderen in bepaalde richtingen zoals toegepaste wiskunde of statistiek. Op zichzelf was dat merkwaardig want de sector "toegepaste wiskunde", wat men daaronder dan ook heeft verstaan, bestond al lang. Ik noem slechts de tijdschriften "Journal für die reine und angewandte Mathematik" en het "Journal de mathématique pure et appliquée", en reeds voordien vindt men al "toegepaste wiskunde". In enkele oraties uit die jaren werd aandacht gevraagd voor de plaats van de toegepaste wiskunde naast de zuivere wiskunde. Er spreekt een zekere bezorgdheid uit voor de groeiende verwijdering tussen deze beide sectoren. Ik noem de rede *Zuivere en toegepaste wiskunde,* op 5 oktober 1902 uitgesproken door P. Zeeman te Leiden als opvolger van P. van Geer aldaar. Zeeman was de voorganger van Van der Woude. Dan noem ik de rede van S.C. van Veen *Zuivere en toegepaste wiskunde en hun betekenis voor den ingenieur* van 28 februari 1946 te Delft.

Overigens is het vermeldenswaard dat in veel recentere jaren abstract gerichte mathematici, mathematici van de niet-toegepaste sector zoals algebraïci, toch ook hun weg hebben kunnen vinden in het bedrijfsleven. Zou men mogen concluderen dat de afstudeerrichting ook nu niet steeds doorslaggevend is? Is de mathematische habitus misschien toch belangrijker? Voortzetting van de studie na het doctoraalexamen betekende onder die omstandigheden in feite een dubbele functie; ik merkte het al op in hoofdstuk 2. Dat kon dan zijn de studie voor een promotie. Promoveren naast een leraarsbetrekking behoorde destijds nog tot de mogelijkheden. Thans is dit, althans bij de wiskunde, een uitzondering geworden. De studie kon betreffen een voortzetting van het promotie-onderwerp - zoals bij mij ten dele het geval was - maar uiteraard ook in een andere richting gaan. Prefereerde men een universitaire loopbaan dan moest men vooral publiceren en maar hopen op een vacature. Naar van daarnaar solliciteren was al helemaal geen sprake. Men moest afwachten of men werd gevraagd omdat men was opgevallen door publikaties of gegeven voordrachten.

Er waren mogelijkheden om zich in het wiskundige leven te presenteren. Ik noem de maandelijkse zaterdagmiddagbijeenkomsten van het Wiskundig Genootschap in Amsterdam (na afloop van de Academievergadering). Het waren destijds erg druk bezochte vergaderingen en het was een gelegenheid om met verschillende wiskundigen te spreken. Er werd een voordracht gehouden, vaak door prominente figuren. Maar er werden ook wel minder geavanceerde wiskundigen door het bestuur uitgenodigd tot het houden van een voordracht; mij geschiedde dit in mijn aanvangsjaren enkele malen. Maar niet voor een ieder was het bijwonen van deze bijeenkomsten mogelijk: in de scholen werd destijds nog op de zaterdagochtenden onderwijs gegeven. Ik herinner mij uit mijn studententijd zelfs nog wel eens enkele colleges op zaterdag. Het was te meer bezwaarlijk als men een betrekking had wat verder van Amsterdam. Veel later zijn deze bijeenkomsten komen te vervallen. Met de komst van de mathematische instituten en daar veelal gegeven wekelijkse colloquiumvoordrachten raakten deze maandelijkse bijeenkomsten inderdaad hun functie kwijt. Dit neemt niet weg dat ik met veel genoegen aan deze geanimeerde zaterdagmiddagbijeenkomsten terugdenk.

Hier moeten ook worden genoemd de activiteiten van een vereniging die, hoewel zij nog steeds bestaat, thans toch niet meer zo bekend is. Het is de vereniging “Het Nederlands Natuur- en Geneeskundig Congres”. Zij werd opgericht in 1887. Deze vereniging organiseerde destijds om het andere jaar driedaagse congressen op wisselende plaatsen. Nog steeds worden bijeenkomsten gehouden, maar zij zijn van karakter veranderd en zij duren niet langer drie dagen; ik heb de historie niet nagegaan omdat het hier daarvoor niet de aangewezen plaats is. De vereniging telde destijds verschillende afdelingen met onderafdelingen: de afdeling Wis- en Natuurkundige Wetenschappen met onderafdelingen voor Wiskunde, Natuurkunde, Scheikunde; een afdeling voor Biologische wetenschappen en afdelingen voor Geneeskunde, Geologie. Er was een algemeen bestuur waarvan - naar ik uit nog in mijn bezit zijnde programmaboekjes kan terugvinden - diverse prominente figuren deel uitmaakten, zo bijvoorbeeld Ornstein, Veningh Meinesz, Holst, Minnaert om er slechts enkelen te noemen. Overeenkomstig deze organisatievorm werden de congressen gesplitst in verschillende secties, waaronder een sectie wiskunde, waarin korte voordrachten werden gehouden. Uiteraard waren er enkele grote algemene voordrachten. Voor de korte voordrachten werd men uitgenodigd door de sectievoorzitter. Voor de wiskunde was dat in 1939 J. Droste, in 1941 J.A. Barrau. Ik heb, terugziende, enige mate de indruk dat deze congressen voor degenen die voor een korte voordracht werden uitgenodigd toen in zekere mate een introductie vormden. Van hen die blijkens de programma's van 1939 en 1941, een wiskundige voordracht hielden zijn de meesten hoogleraar geworden - voor zover zij dat niet reeds waren. Werd men uitgenodigd omdat men was opgevallen door publikaties? Ik voeg als bijlage 7 deze programma's toe om van de onderwerpen een indruk te geven.

Er was ook wiskundig leven op regionale schaal. In de naoorlogse jaren werd in Rotterdam opgericht het Gezelschap "Thomas Stieltjes" dat periodiek avondvoordrachten organiseerde. De toehoorders waren meest leraren, maar ik herinner mij dat S.C. van Veen, inmiddels hoogleraar in Delft geworden en W. Boomstra, destijds hoogleraar aan de Technische Hogeschool in Bandung en na zijn terugkeer woonachtig in Den Haag, ook trouwe bezoekers waren.

Men kon publiceren in het Nieuw Archief voor Wiskunde. Op wat lager niveau was er het in 1921 tot stand gekomen tijdschrift "Mathematisch Tijdschrift Christiaan Huygens", dat echter omstreeks 1940 werd opgeheven. Het werd gevolgd door het tijdschrift "Mathematica" (A en B), later vervolgd door het tijdschrift "Simon Stevin". Daarnaast waren er de verhandelingen van de Koninklijke Academie. De procedure was destijds als heden ten dage: een lid van de Academie moest bereid worden gevonden na zijn goedkeuring, artikelen aan te bieden. Met erkentelijkheid maak ik er gewag van dat mijn Leidse leermeester Van der Woude daartoe gedurende vele jaren bereid was. Na dit alles moest men afwachten of men werd gevraagd. Kon men een aanbieding zien aankomen? Ik kan er geen antwoord op geven.

PROJECTEN

Tenslotte maak ik enkele opmerkingen over de totstandkoming en het verloop van het wiskundig onderzoek. Het zijn beschouwingen van meer intrinsiek karakter. Langs welke wegen verloopt de voortgang? Ook hier is er aanleiding voor een vergelijking tussen de huidige situatie en die in het verleden. Sedert een aantal jaren is het in de wiskunde in zekere mate gebruikelijk geworden - zelfs voorgeschreven - om plannen voor wiskundige onderzoekingen te presenteren in de vorm van onderzoeksprojecten. Het is een vorm van een wetenschappelijke werkwijze geworden. Voor verschillende vakken is zo'n werkwijze traditioneel en misschien de aangewezen weg, maar voor wat betreft de wiskunde kan ik mij niet onttrekken aan de indruk dat het hier gaat om een modeverschijnsel. Het verkrijgen van financiële middelen speelt daarbij blijkbaar een overwegende rol. Tot voor enige jaren bestond in de wiskunde deze projectmatige idee niet.

Een algemene bespreking van de vraag wat moet worden verstaan onder een project blijft hier achterwege; het is een kwestie op algemeen methodologisch terrein. Voor de wiskunde denk ik daarbij aan iets als een behandeling van een gefixeerd thema dat men in een daarvoor uitgetrokken tijd tot afsluiting meent te kunnen brengen. Men verwacht een antwoord, conclusies, uitspraken. Het is de idee dat er "iets" is dat men zal gaan bestuderen en waarvoor wel vaststaat dat er, als men dat maar forceert, een oplossing voor moet kunnen worden gevonden, in welke vorm dan ook, althans dat daaromtrent enige zekerheid bestaat. Vóór 1940 bestond in de wiskunde deze terminologie niet, ook al zou men misschien sommige dissertaties uit die tijd qua inhoud als projectmatig kunnen beschouwen. Maar ik betwijfel of zij als zodanig werden opgezet. Men kan zich afvragen hoe in dit opzicht de grote mathematici uit de historie werkten. Hoe kwamen Euler, Lagrange, Laplace, . . . tot hun theorieën? Zijn er projectmatige elementen in hun werk aan te wijzen? Kan men zich ooit voorstellen dat Cantor projectmatig tot zijn ideeën kwam? Zal deze mode, om financiële redenen, bestendig blijken te zijn?

Het principiële probleem dat daarbij aan de orde komt is de vraag hoe de grote voortgang, de vernieuwing, de grensverlegging tot stand komt. Mijn antwoord is dat fundamenteel wiskundig onderzoek zich niet leent voor inpassing in projectvorm om de eenvoudige reden dat dit wetenschappelijk werk in de praktijk zo niet geschiedt. Men kan natuurlijk wel projecten formuleren zoals, om maar een voorbeeld te noemen - toegegeven het is een dwaas voorbeeld - het vermoeden van Riemann tot een oplossing te brengen. Maar zoiets heeft volstrekt geen zin. Heeft de onlangs gevonden oplossing van het vermoeden van Bieberbach aangaande univalente functies plaatsgevonden langs projectmatige weg? Projecten zijn m.i. beperkt, te gebonden aan incidentele problematiek en ik mis er het opbouwelement in. Het essentiële werk verloopt niet via projecten en het was in het verleden niet anders dan nu. Weet de wiskundige steeds van te voren wat hij zoekt, waarop hij zal stuiten? In het algemeen betwijfel ik dat. Fundamenteel wiskundig werk verloopt langs hoofd- en zijwegen en heeft vele vertakkingen. Men creëert en bouwt aan theorieën en dan zal blijken hoe die er uit gaan zien. Dat geeft de werkelijke voortgang. Binnen zulke theorieën kan men projecten formuleren en die zijn dan in zekere zin secundair. Maar de essentie komt van de Idee, en die kan niet in projectvorm worden ondergebracht. In projecten kan het creatieve aspect niet worden gerealiseerd, niet tot zijn recht komen; men mist er de vrijheid in. Zoals ik vroeger heb uiteengezet zie ik in "vrije" creatie de bron van de werkelijk fundamentele voortgang - zij het geen ongenuanceerde "vrijheid", zie [10].

In het kader van "projecten" moet dan ook worden gewezen op het in recente jaren opgekomen - zelfs voorgeschreven - streven naar de instelling van vakgroepen waarbinnen de projecten door "onderzoekers" (promovendi) worden uitgevoerd. Zij zijn te zien als groepen die elkaar beconcurreren in het aantrekken van "onderzoekers" met alle gevolgen daarvan. De beste vakgroep is die, die de meeste mensen aantrekt. Ik heb dit gezien als een ongelukkige ontwikkeling waarbij de splitsing in gescheiden onderdelen, zoals die er destijds in mijn Leidse tijd was en die ik als kunstmatig heb ervaren, in ere wordt hersteld. Het is een tendens die ik als strijdig zie met de universiteitsidee.

Op het punt van projecten heb ik mijn eigen werk nog eens overwogen. Eerst noem ik mijn werk aangaande het probleem van Dirichlet, een onderwerp uit de potentiaaltheorie waarover ik in hoofdstuk 2 heb geschreven. Er op terugziende kan ik geen aspecten van projectmatigheid er in constateren: ik had geen vooraf bepaalde doelstelling. Wanneer men zich in zo'n gebied begint in te werken dienen de problemen zich al werkende aan. Ik kwam aldus tot het formuleren van een eenduidigheidsproblematiek die als zodanig nog niet in de literatuur was behandeld. Tot de oplossing kon ik met het apparaat van de functionaalanalyse nieuwe elementen aandragen; het zou onmogelijk zijn geweest vooraf deze problematiek te formuleren, laat staan de ervoor benodigde tijdsduur vast te stellen. De nieuwe idee stond hierbij op de voorgrond. In latere jaren is aan dit probleem verder gewerkt en zijn er nieuwe ontwikkelingen uit voortgekomen. Dat ik later dit gebied voor andere verwisselde - afgezien van het feit dat ik colleges over potentiaaltheorie gaf - is het aspect van de vrijheid van beweging dat men in een project mist. Anderen (o.a. Brelot) bleven daarentegen werken op dit terrein.

Ik ging daarna over tot de z.g. niet-archimedische analyse, dit is analyse over niet-archimedisch gewaardeerde lichamen, in een bijzonder geval over het lichaam van de p-adische getallen. In vorige hoofdstukken schreef ik reeds daarover (zie hoofdstuk 3). Het was toen een nauwelijks geëxploreerd gebied. Ik vatte de idee op analyse te bedrijven op basis van deze lichamen. Men gaat in zo'n geval aan het werk waarbij bijvoorbeeld analogieën met de reële of complexe analyse een rol spelen. Er volgt dan een periode van opbouw, het uitproberen van ontwikkelingslijnen, afwachtende waartoe men wordt gevoerd. Ik kwam bij de niet-archimedische functionaalanalyse, maar begaf mij daarbij ook op zijwegen. Misschien zullen sommigen zeggen dat dit nu een project was: de ontwikkeling van de niet-archimedische analyse. Maar ik heb dit nooit als zodanig gevoeld. Gesteld al dat de idee van project toen in de wiskunde was gehanteerd: ik wist van te voren niet wat ik kon verwachten op dit terrein en hoe zou ik er ooit een tijdsduur voor hebben kunnen aangeven? Zo'n onderzoek functioneert niet projectmatig. Overigens, nadat ik dit gebied eveneens had verlaten, heeft het zich breed uitgebreid, veel eerder dan ik aanvankelijk ooit heb kunnen verwachten, en er hebben zich verschillende vertakkingen ontwikkeld: in de richting van de traditionele analyse, in algebraïsche richting, verbindingen met de algebraïsche meetkunde. Misschien behoort het tot de mogelijkheden om binnen dit gebied, nu het eenmaal aldus is ontstaan, dan projecten te formuleren van beperkte schaal.

Is de hier geschetste werkwijze voor een mathematicus ongewoon? Het komt mij voor dat vele mathematici, zo niet de meeste, hun vak op onprojectmatige wijze beoefenen, zoals de wiskunde ook op niet-projectmatige wijze is gegroeid.

Toen ik dit gebied verliet was het mij voldoende te weten dat de idee vruchtbaar was gebleken en dat anderen er verder aan bouwden. Mijn interesse in de grote algemene ontwikkelingslijnen herleefde. Ik bestudeerde speciaal de aspecten van de grote lijnen in de evolutie van de wiskunde. Ik noem in het bijzonder het aspect van de algebraïsering, de penetratie van algebraïsche methoden en concepten. Had deze studie ooit als project kunnen zijn geformuleerd? Ik geloof het niet. Er lag de idee aan ten grondslag dat ik meende te kunnen constateren dat door de hele evolutie heen een spoor van algebraïsering in de diverse disciplines valt op te merken. De idee wordt geboren door een analyse van de feiten uit de historie. Zo iets is niet vooraf in een programma vast te leggen, zo'n zienswijze groeit. En als men een dergelijke studie toch als een project wenst te zien, ook al werd die niet expliciet als zodanig geformuleerd, dan is dat een constatering a posteriori: de analyse van de historische feiten en de daaruit geboren idee is er immers al aan voorafgegaan en daarmee is een groot gedeelte van het voorbereidende werk gebeurd. Binnen dit kader zou men dan eventueel nader projecten kunnen aangeven door bijvoorbeeld een bepaalde historische ontwikkeling aan een onderzoek te onderwerpen met het oog op de vraag of daarin ook de inmiddels beschreven tendens van algebraïsering kan worden geconstateerd. Zo'n aanvullend onderzoek kan worden opgezet met het doel een ondersteuning te zijn van de idee van algebraïsering.

De kern van de voorgaande beschouwingen is, naar mij voorkomt, gelegen in het feit dat men tegenover elkaar moet plaatsen het creatieve element en het onderzoekelement en beide zijn essentieel aanwezig in de ontwikkelingsgang van de wiskunde. De onderzoeker bestudeert bestaande gebieden en theorieën en voegt daaraan nieuwe elementen toe. Het creatieve aspect leidt tot de opbouw van nieuwe theorieën, zonder daarmee overigens te kort te willen doen aan het feit dat ook "onderzoek" creativiteit verlangt. Er is uiteraard geen strikte scheiding. Om deze reden lijkt mij, vanuit de wiskunde gezien, de recent ingevoerde term "onderzoeker" voor hen die wetenschappelijk werk verrichten niet gelukkig. De idee ligt er aan ten grondslag dat "onderzocht moet worden" en de idee dat dat in projectvorm kan (of moet) plaatsvinden vloeit daaruit voort.

Hoofdstuk 7

Op de grens van twee werelden

Twee werelden

In dit slothoofdstuk kom ik tot enkele samenvattende opmerkingen en conclusies en ik verbind daaraan enige beschouwingen over de plaats van de wiskunde.

De in de voorgaande hoofdstukken beschreven ervaringen zijn in sterke mate verbonden met de verschijnselen die zijn op te merken bij de overgang van de klassieke naar de moderne wiskunde. Enerzijds zijn dat aspecten van het academisch onderwijs van toen en van nu, anderzijds intrinsieke aspecten van de wiskunde. Terugziende is thans mijn sterkste impressie het grensgebied van twee tijdperken te hebben meegemaakt, en men mag veilig aannemen dat de meesten van degenen - zo niet allen - die in die jaren, ik spreek van de twintiger en dertiger jaren - misschien zelfs nog later - in Leiden hun eerste kennismaking met de wiskunde meemaakten een soortgelijke ervaring moeten constateren wanneer zij thans terugzien. Was het elders anders? Die studiejaren stonden nog geheel in het teken van de klassieke wiskunde, het traditionele klassieke wiskundige klimaat. Het was een klimaat dat sterk achterlag bij de ontwikkelingen aan het front waar nieuwe ontwikkelingen aan de gang waren. Had het anders gekund? In voortgezette studie hebben wij ons moeten losmaken van dit oude klimaat om over te gaan in de wereld van een andere mathematische cultuur. Ik heb deze overgang als fundamenteel ervaren in die zin dat ik zou willen spreken van twee werelden: de klassieke en de moderne. Het gaat daarbij niet om een breuk in die zin dat met het nieuwe tijdperk al het oude werd afgebroken, maar om de idee dat de oude periode, die van de klassieke wiskunde, is geabsorbeerd in een nieuw tijdperk en daarbij een proces van assimilatie heeft ondergaan. Op de oude wereld groeide een nieuwe wereld. Maar de overgang in de begrippenwereld was essentieel en ik heb daarvoor in eerdere publikaties de discontinuïteitsidee geïntroduceerd. Het mag dan zo zijn dat in het kader van een soort van golfbeweging in recentere jaren de meer concrete wiskunde - gesteld tegenover de tendens naar abstractie - naar het schijnt weer meer naar voren komt, de invloeden van de ontwikkelingen in de moderne tijd gaan niet verloren en blijven ook daarbij aan te wijzen. Intussen moet wel worden opgemerkt dat ik destijds - midden-twintiger en begin-dertiger jaren - geen idee had te leven in een overgangsgebied, en het zal vermoedelijk mijn tijdgenoten net zo zijn gegaan. De behandelde materie was immers nog streng klassiek met geen of nauwelijks verwijzingen naar nieuwe richtingen. De algebra van Kluyver, bijvoorbeeld, bevatte geen aanduidingen aangaande nieuwere algebraïsche inzichten. De oratie van Droste waarin hij nieuwe inzichten aanroerde - ik vermeldde deze in hoofdstuk 2 - kon daarin nauwelijks veranderingen aanbrengen, want er werd immers geen gevolg aan gegeven. Het is wellicht een natuurlijk verschijnsel dat de perceptie van te leven in een overgangsgebied pas goed tot bewustzijn kan komen wanneer men is gekomen in het nieuwe tijdvak; voor ons was dat pas op latere leeftijd.

Wanneer ik hier spreek van een overgangsgebied tussen twee werelden, dan wordt men intussen wel geplaatst voor de opgave deze beide werelden ten opzichte van elkaar te karakteriseren. Men mag niet verwachten dat zo'n karakteristiek in enkele zinnen kan worden samengevat.

Voor het klassieke tijdvak lijkt dit een niet al te bezwaarlijke opgave. In de voorgaande hoofdstukken is de materie van de klassieke wiskunde op verschillende plaatsen reeds ter sprake gekomen. Daarbij is gewezen op de sterke klassieke binding met de mechanica en de natuurkunde die haar invloed deed gelden en in zekere mate karakteristiek was, zij het voor het ene onderwerp meer dan voor het andere. Ik merkte op (zie onder andere in hoofdstuk 2) dat deze bronnen en de onderlinge relaties in mijn Leidse tijd in de colleges overigens nauwelijks tot uiting kwamen. Daarbij moet ik dan wel vermelden de colleges in de theoretische mechanica, die echter - door de mathematicus gegeven - sterk mathematisch van karakter waren. Dat zal wel liggen in de aard van die discipline waarbij het experiment verder verwijderd is dan in onderwerpen van de natuurkunde. Overigens, maar dit terzijde, zijn er in de laatste jaren misschien zekere tekenen aan te wijzen van een nieuwe toenadering tussen wiskunde en natuurkunde (ijktheorie, "string"theorie, algemene relativiteitstheorie).

Maar wat het moderne tijdvak aangaat, het tijdperk van de huidige wiskunde, is een karakterisering aanzienlijk moeilijker. Daarbij denk ik dan speciaal aan de abstracte ontwikkelingen in de contemporaine wiskunde. In vorige hoofdstukken is daar al een en ander over gezegd. Hoe karakteriseert men die ontwikkelingen?

In verband met deze problematiek valt het op dat in het bijzonder in de laatste jaren met een zekere regelmaat artikelen worden gepubliceerd die er op wijzen dat mathematici zich met deze zaken bezighouden. Men vindt beschouwingen over de algemene ontwikkelingsproblematiek, de gigantische groei van de wiskunde, de aard van de wiskundige objecten in deze abstracte periode, besprekingen aangaande het probleem wat de wiskundigen in diepste essentie bezighoudt, de vraag waartoe de ontwikkelingen leiden. Soms betreffen zij meer de problematiek van de grondslagen van de wiskunde, m.i. wel te onderscheiden van het thema van het wezen van de wiskunde. Zo besprak Saunders MacLane verschillende keren de vraag wat algebra in essentie is, maar hij kon niet tot een voor alle tijden bevredigend antwoord komen. Blijkbaar gaat het in essentie over de vraag wat wiskunde in wezen *is*. Men zou uit deze publikaties kunnen opmaken dat er in kringen van mathematici dienaangaande een zekere ongerustheid heerst die is terug te voeren tot de gigantische ontwikkeling van de wiskunde in de moderne tijd. Maar antwoorden van enige bevredigende inhoud vindt men echter nauwelijks in deze geschriften.

Deze publikaties waren voor mij aanleiding om na te gaan of iets van dit soort bespiegelingen valt te bespeuren in wiskunde-oraties die in de eerste helft van de twintigste eeuw - dit is het hiervoor genoemde grensgebied tussen twee werelden - in Nederland zijn gehouden, en daarbij van uitgaande dat men misschien mag verwachten dat iets van ontwikkelingslijnen zich weerspiegelen in oraties als hoogtepunten in een loopbaan. In sommige vond ik inderdaad aanwijzingen. Ik vermeld enkele uit historisch oogpunt interessante redevoeringen; van een uitvoerige bespreking zal ik mij onthouden.

In hoofdstuk 6 noemde ik al de oraties van P. Zeeman en S.C. van Veen waaruit een zekere zorg sprak over de ontwikkeling van de wiskunde speciaal in verband met de toegepaste wiskunde. Op 8 februari 1910 sprak J.C. Kluyver, toen Rector Magnificus, onder de titel: *De gestadige vervorming der wiskunde* een rede uit ter gelegenheid van *den 335sten verjaardag der Leidsche Hoogeschool.* Hij stelde de vraag naar het doel en wezen der wiskunde en bracht deze vraag in verband met methoden en ontwikkelingslijnen.

Enige zorg spreekt uit een rede gehouden vanuit een andere richting. Op 8 februari 1926 sprak de Rector Magnificus W. de Sitter, hoogleraar in de sterrenkunde, *op den 351sten verjaardag van de Stichting der Rijksuniversiteit te Leiden* een rede *De eenheid der wetenschap* uit. Hij bespreekt de eenheid der wetenschap vanuit zijn gezichtsveld, refererend aan de hand van een vrees voor wetenschappelijke chaos. Maar hij besluit zijn rede met een passage over de rol van het getal waarbij hij schrijft: “Het getal, beter gezegd de wiskunde, die meest volmaakte en meest onmateriële schepping van den menschelijke geest, is ons het middel waardoor wij hopen ons hoe langer hoe meer te bevrijden van de beperkingen ons door onze menschelijke onvolmaaktheid en materiële gebondenheid opgelegd, de trap waarlangs wij hopen op te klimmen tot steeds zuiverder, steeds vrijer en onbevangener aanschouwing van het, voor altijd onbereikbare, wonder”.

De Sitter aanvaardde zijn ambt op 21 oktober 1908 met een oratie *De nieuwe methoden in de mechanica der hemellichamen.* Hij vermeldt daarin dat zijn benoeming was verbonden met de door de Universiteit uitgesproken wens tot introductie van de “mathematische sterrenkunde”.

Van latere datum - en dan bevindt men zich al ruim in de nieuwe wereld - noem ik de volgende oraties.

In Groningen gaf op 24 oktober 1946 J.C.H. Gerretsen een rede: *Mathesis*

en aesthetica, waarin de spreker de verbindingen tussen wiskunde en Kunst aan de orde stelt in bespiegelingen over aard en wezen van de wiskunde.

In Leiden op 2 mei 1947 hield H.D. Kloosterman een rede: *Waarde en waardering der wiskunde.* Daarin komt o.a. de kwestie van een definitie van de wiskunde aan de orde.

Tenslotte noem ik in Groningen op 26 mei 1950 de rede van J. Ridder: *Aard en structuur der wiskunde.* Men is dan volop in het nieuwe tijdperk en dit reflecteert zich in deze oratie.

Al deze oraties vertonen een wat beschouwend, licht filosofisch karakter. Mijn historische studies hebben mij ook in deze richting gevoerd. Zij voerden mij tot beschouwingen over de algemene ontwikkelingslijnen van de wiskunde: het proces van de algebraïsering van de wiskunde, de ontwikkelingen van fundamentele mathematische concepten, de invloed van externe en interne factoren in de evolutie. Ik kwam daarbij tot de wat retorisch aandoende vraag waartoe de ontwikkeling van de wiskunde zou leiden. Ik gaf daar, wat later, als antwoord op dat zo'n vraag niet veel zin heeft omdat wat wij wiskunde noemen de facto al meer dan 2000 jaren bestaat en wel zal blijven bestaan. Intussen, zo'n antwoord heldert niets op over de essentie van de wiskunde, waarbij ik dan speciaal denk aan de abstracte wiskunde in het moderne tijdperk. Want *wat* is dan datgene wat wij wiskunde noemen?

Het probleem van de rol en de essentie van de wiskunde ligt op wetenschapsfilosofisch terrein en is ook verbonden met de historische ontwikkelingen. Het is niet mijn bedoeling hier diep op in te gaan, voor zover dat al binnen mijn competentie zou vallen. Ik wil er alleen enkele opmerkingen over maken en probleemstellingen formuleren.

De wetenschappen in hun totaliteit beschouwende kan men de vraag stellen wat en waar in die totaliteit de plaats van de wiskunde is. Welke is de rol van de wiskunde binnen deze totaliteit en hoe karakteriseert men die? Het gaat om een poging tot markering en zij is van comparatief karakter: wat is de verhouding van de wiskunde tot andere wetenschappen? Dit vereist enige toelichting.

Men doet binnen de wetenschappen uitspraken. Soms zijn die gebaseerd op experimenten, soms op vormen van bewijs en bewijsmethoden die men binnen de betrokken discipline aanvaardt, soms op andere gronden. Hoe passen de uitspraken die men in de wiskunde pleegt te doen of die men rekent te behoren tot het gebied van de wiskunde binnen dit systeem? Wat zijn naar hun aard wiskundige uitspraken als men die vergelijkt met die in andere wetenschappen? In relatie tot de geschiedenis, die immers haar waarde heeft voor het begrijpen van het heden, kan men daaraan aansluitend het probleem formuleren hoe naar vorm en aard de wiskundige uitspraken historisch zijn tot stand gekomen en zijn geëvolueerd. Het probleem van de aard van de wiskunde in het nieuwe tijdperk, zoals bijvoorbeeld de vraag waarop de uitspraken in dat tijdvak in essentie betrekking hebben, dat zijn de objecten, voegt zich in dit schema. In een zodanige studie zal ook het gebied van de algemene bewijsmethodiek en bewijsproblematiek en de historische ontwikkeling daarvan in de beschouwingen moeten worden betrokken. De hiervoor geschetste idee van twee werelden en de historische overgang daartussen kan hierdoor een helderder beeld krijgen. Ik zal dit thema niet verder in beschouwing nemen.

MATHEMATISERINGSPROCESSEN

De problemen rond de essentie van de wiskunde worden aldus benaderd vanuit de wiskunde zelf in een poging tot plaatsbepaling. Het is een interne problematiek. Hierbij aansluitend kan men een ander probleemgebied aanwijzen door de wiskunde te beschouwen maar nu gezien vanuit de andere wetenschappen, of althans sommige ervan. Het is in zekere zin een complementair probleem. Het betreft dan de functie van de wiskunde ten opzichte van andere wetenschappen en als zodanig heeft het historische achtergronden. Ik wil hiervoor teruggrijpen op het boek van E.J. Dijksterhuis, *De Mechanisering van het wereldbeeld.* Het is uiteraard niet de bedoeling om van dit veelomvattende boek een résumé te geven. Voor mijn doel is het voldoende om aan te geven dat Dijksterhuis onder meer behandelt de historische rol van de wiskunde als middel bij de verklaringen van verschijnselen met behulp van mechanische processen, processen van reductie tot mechanische modellen, een fase in de ontwikkeling van de natuurwetenschappen. Dijksterhuis sluit zijn beschouwingen af bij het werk van Newton.

Als men de ontwikkelingen in de moderne tijd beschouwt, krijgt men de impressie dat de rollen in zekere zin zijn omgekeerd: ten opzichte van andere wetenschappen schijnt de wiskunde, de mathematisering, van middel tot doel te zijn geworden. Ik heb hier het oog op de toenemende mathematisering van de wetenschappen. Ik wil niet trachten te preciseren tot hoever daarvoor in de geschiedenis moet worden teruggegaan, maar het is een ontwikkeling die vermoedelijk pas lang na Newton is ingezet. Het gaat dan niet meer om mechanische modellen - die tijd is lang voorbij - maar om beschrijving met mathematische modellen. De indruk bestaat dat thans het standpunt wordt ingenomen dat men processen pas goed leert begrijpen als zij in mathematische modellen zijn vervat. De voorbeelden daarvoor blijven niet beperkt tot de natuurkunde. In dat gebied is deze idee al lang traditioneel. Ik noem de theorie van Maxwell. Het is curieus in Casimir's boek, *Het toeval van de werkelijheid. Een halve eeuw natuurkunde* te lezen dat die pas begon iets van elektriciteit te begrijpen nadat hij de wiskundige theorie van elektriciteit en magnetisme was gaan bestuderen (blz. 76). Dan moeten worden genoemd de relativiteitstheorie, de speciale zowel als de algemene, de quantenmechanica, de golfmechanica. Maar er is mathematisering in vele gebieden. Volterra hanteerde reeds mathematische modellen in de biologie. Ik wijs op de econometrie waarmee de naam van J. Tinbergen is verbonden. Hij promoveerde in Leiden in die richting bij Ehrenfest die getroffen was door analogieën tussen economie en thermodynamica en poogde hiermee te komen tot mathematische modellen in de economie (zie M.J. Klein, *Paul Ehrenfest,* blz. 306). Men hanteert wiskundige modellen in de psychologie en in andere verwijderde onderwerpen. Aldus rijst de vraag wanneer de *idee* van een mathematisch model in andere wetenschappen is opgekomen en langs welke wegen deze ontwikkeling is verlopen. Het gaat, als complement tot de studie van Dijsterhuis, over de *Mathematisering* *van het wereldbeeld, zoals dat beeld zich weerspiegelt in de wetenschappen.* Het is een boek dat, voor zover mij bekend, nog zou moeten worden geschreven.

Ik grijp in dit verband nogmaals terug op de situatie destijds in Leiden. Bij het doctoraalexamen met hoofdvak wiskunde kon destijds als bijvak slechts worden gekozen uit de natuurkunde, de mechanica en de sterrenkunde. Door de meesten werd gekozen voor de theoretische natuurkunde bij Ehrenfest. Van de introductie van een idee van mathematisering in de zin van modelvorming zou dus alleen sprake kunnen zijn geweest via dit vak. Dat had dan kunnen zijn bij de Maxwell-theorie. Voor zover ik mij herinner werd die niet gepresenteerd in de vorm van een model, dat wil zeggen als een afbeelding van de verschijnselen op een mathematisch model als beschrijvings- en verklaringssysteem. Laat ik het voorzichtiger zeggen: het heeft destijds op mij niet die indruk gemaakt. We bestudeerden de gastheorie en iets over de statistische mechanica waarvoor Ehrenfest ons wees op het, blijkbaar nog steeds niet vergeten, Encyclopedie-artikel *Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik*, geschreven door P. en T. Ehrenfest. In dat artikel vindt men de modelidee voor een gas en daaraan aansluitend axiomatische beschouwingen. Er was dus alle aanleiding voor een behandeling van het onderwerp in de zin van een mathematisch model, een afbeelding. Maar ook dit onderwerp heeft op mij destijds geen model-matige indruk gemaakt, althans niet dat het als zodanig expliciet naar voren werd gebracht. Ook voor de bijvakstudenten was er wat quantenmechanica. Ik las over de golfmechanica en het duale karakter van de materie. Het lijkt mij een fraai voorbeeld van mathematisering, maar het is het oordeel van een mathematicus, niet-fysicus. Ook las ik over de algemene relativiteitstheorie en het uitdijend heelal - de heelalmodellen van Einstein resp. De Sitter, mathematische modellen. Ik geloof niet dat ik die mathematische beschouwingen toen al zag als doelgerichte mathematiseringsmodellen. Het was een mathematische theorie. Paste de modelidee nog niet in het tijdsbeeld?

De huidige situatie met een veel grotere vrijheid in de keuze van de bijvakken is heel anders. Velen kiezen thans voor het doctoraalexamen niet meer de natuurkunde als bijvak. Sommigen doen, bij de huidige structuur van de studie, in het eerste jaar nog iets aan natuurkunde, maar het is dan van elementair niveau. Men kiest bijvoorbeeld voor economie of linguistiek, maar er zijn verschillende variaties. Misschien komt in dergelijke gevallen de modelidee, de mathematisering van een discipline, wel meer pregnant tot uiting juist omdat het dan gaat om vakken die intrinsiek niet-mathematisch zijn en daarom voor theorievorming een mathematische model - dat is niet de discipline zelf - nodig hebben. Toch gaat met het wegvallen van de natuurkunde een historisch besef verloren en dat valt te betreuren, het is een cultureel verlies. Hoe zeer de wiskunde ook autonoom is geworden, dit neemt niet weg dat in het verleden de mechanica en de natuurkunde bronnen zijn geweest voor mathematische concepten, hoewel dat thans vaak nauwelijks meer expliciet tot uiting komt. Het is goed dat, om een voorbeeld te noemen, studenten bij een college over potentiaaltheorie beseffen dat het begrip potentiaal stamt uit de natuurkunde. Het verhoogt het inzicht indien zij weten dat differentiaalvergelijkingen in oorsprong te maken hebben met problemen uit de mechanica en de natuurkunde en dat het niet een formeel spel is. Uiteraard kunnen zij strikt formeel worden ingevoerd door analytische uitdrukkingen waarin afgeleiden van een functie voorkomen tot een vergelijking te maken door ze gelijk te stellen aan 0 en naar oplossingen te vragen, op de wijze zoals men doet in de algebra bij algebraïsche vergelijkingen. Aan het eind van de vorige eeuw is door Bourlet inderdaad aldus een theorie opgebouwd, waarin ook het begrip afgeleide formeel als een zekere afbeelding werd ingevoerd. Deze formele algebraïsche methode diende om het begrip "afgeleide" van een functie te onderzoeken naar zijn essentiële betekenis. Weliswaar kunnen differentiaalvergelijkingen eveneens worden gemotiveerd vanuit andere wetenschappen, zoals de biologie of de economie, maar de oorspronkelijke bronnen liggen toch elders. Een opmerking van Ehrenfest over de hyperbolische partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde in verband met de voortplanting van het licht - ik schreef er over in hoofdstuk 2 - kunnen zij dan echter niet op haar waarde schatten. De opmerking was dan ook delicaat, maar getuigend van esprit. Misschien zal men aanvoeren dat bij de huidige gigantische en abstracte ontwikkelingen dergelijke vragen omtrent motivering van concepten om praktische redenen niet meer aan de orde kunnen komen. Ziet men de ontwikkelingen thans inderdaad als een formeel spel? Moeten daarom opmerkingen over verbindingen tussen disciplines en over motivering van ingevoerde concepten worden gereserveerd voor colleges over de geschiedenis van de wiskunde omdat daarvoor bij het huidige beleid van compressie in het normale programma geen tijd meer voor is - colleges die dan wel niet door allen zullen worden gevolgd? Zoals ik al opmerkte, ik acht deze ontwikkeling een cultureel verlies; wiskunde is meer dan een vak van pure techniek. Wiskunde neemt een plaats in in onze Cultuur, zij is een element van onze Cultuur. Onze Cultuur is niet beperkt tot de Letteren, de Historie, de Kunsten - de z.g. α-vakken verbonden met de esthetica -, zoals men zou moeten geloven en zou kunnen opmaken uit recensies van boeken en journalistiek werk. Wat dit betreft wijs ik terug naar de hiervoor genoemde oratie van Gerretsen; ook wiskunde is verbonden met een schoonheidsidee. Men kan de stelling verdedigen dat de wiskunde ondanks haar historische bindingen met experimentele disciplines, een geesteswetenschap pur sang is. Zij is gegroeid door geestelijke creativiteit. Vallen deze facetten in het universitaire bestel weg om utilitaire redenen dan wordt daardoor het peil verlaagd en wordt afbreuk gedaan aan de breedheid van de universitaire idee. Bij het huidige beleid lijkt enige bezorgdheid op dit punt niet ongerechtvaardigd.

LITERATUUR

1. H.B.G. CASIMIR (1983, 1984). *Het toeval van de werkelijkheid. Een halve eeuw natuurkunde*, Amsterdam.
2. E.J. DIJKSTERHUIS (1950; div. ed.). *De mechanisering van het wereldbeeld*, Amsterdam.
3. W. HEISENBERG (1974). *Fysica in perspectief*, Utrecht, Antwerpen.
4. A.J. KOX (1988). Hendrik Antoon Lorentz, The ether and the general theory of relativity. *Archive for History of Exact Sciences, Vol. 38, Number 1*, 67-78.
5. A.F. MONNA (1973). *Functional Analysis in Historical Perspective*, Utrecht.
6. A.F. MONNA (1975). *Dirichlet's Principle. A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis*, Utrecht.
7. A.F. MONNA (1978). La théorie des fonctions, réflexions historiques. *Nieuw Archief voor Wiskunde (3), Vol. 26*, 41-53.
8. A.F. MONNA (1980). Un demisiècle de vie mathématique. In: *Symposion dédié à A.F. Monna.* Communications of the Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht, 12.
9. A.F. MONNA (1983). Where does the development of mathematics lead to? *Nieuw Archief voor Wiskunde (4), Vol. 1*, 33-56.
10. A.F. MONNA (1984). *The Way of Mathematics and Mathematicians; a Historical-Philosophical Study.* Communications of the Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht, 17.
11. A.F. MONNA (1986). *Methods, Concepts and Ideas on Mathematics: Aspects of an Evolution*, CWI Tract 23, CWI, Amsterdam.
12. A.F. MONNA (1988). Marcel Brelot (1903-1987), Hommage posthume. *Nieuw Archief voor Wiskunde (4), Vol. 6*, 63-68.

Bijlage 1

Faculteit der Wis- en Natuurkunde
Hoogleeraren, Lectoren en Privaatdocenten

Bron: Jaarboekje van de Philosophische Faculteit der Leidsche Studenten, 1930/31

NAAM.	ADRES.	LEERVAKKEN.
Gewone hoogleeraren:		
Dr. K. Martin.	Rijnsburgerweg 139.	Emeritus 20. IX. 1921.
Dr. J. C. Kluyver.	Plantsoen 95, Tel. 546.	Hoogere stelkunde, differentiaal- en integraalrekening, theorie der functiën, waarschijnlijkheidsrekening.
Dr. J. M. Janse.	Witte Singel 30, Tel.873, Tel. lab. 258.	Plantkunde.
Dr. F. A. H. Schreinemakers.	Witte Singel 87, Tel. lab. 262.	Anorganische scheikunde.
Dr. L. van Itallie.	Plantage 14, Tel. 806, Tel. lab. 252.	Artsenijbereidkunde, vergiftleer.
Dr. W. de Sitter.	Sterrewacht, Kaiserstr. 57, Tel. 1430, Tel.Sterrewacht 260.	Sterrekunde.
Dr. P. Ehrenfest.	Witterozenstr. 57, Tel. 1269, Tel. inst. 1257.	Theoretische natuurkunde.
Dr. J. J. Blanksma.	Stadhouderslaan 26, Tel. 463, Tel. lab. 457.	Organische scheikunde.
Dr. W. van der Woude.	Morschsingel 7, Tel.2548	Analytische en beschrijvende meetkunde, theoretische werktuigkunde.
Dr. P. N. van Kampen.	Zoeterw. Singel 81, Tel. 236, Tel. lab. 259.	Dierkunde, vergelijkende ontleedkunde, vergelijkende physiologie.
Dr. B. G. Escher.	Huize Mukashi, Dorpsstr., Oegstgeest, Tel. Leiden 2064, Tel. mus. 261.	Aard- en delfstofkunde, palaeontologie, crystallografie.
Dr. W. H. Keesom.	Wasstraat 3, Tel. 1560, Tel. lab. 2564.	Natuurkunde.
Dr. W. J. de Haas.	Plantsoen 59, Tel. 2421, Tel. lab. 2564.	Natuurkunde, meteorologie .
Dr. L. E. Goester.	Thomsonlaan 19, Den Haag, Tel. 30600, Tel. lab. 252.	Pharmacographie, Galenische pharmacie, receptuur.

AMBTSAAN-VAARDING.	SPREEKUUR.	GELEGENHEID TOT HET AFLEGGEN VAN TENTAMEN
8 XII 1877		
28 IX 1892	Di. 12 u., acad. Do. 12 u., acad.	Na afloop van elke vacantie na bekendmaking.
1 XI 1899	Do. 10—12 u., lab.	Ten allen tijde.
18 IX 1901	Vr. 11.30—12.30, lab.	Voor candidaatsexamen eerste Dinsdag van de maand.
25 IX 1907	Ma. 11—12 u., lab. Do. 11—12 u., lab.	Laatste week van elke maand, uitgezonderd de vacantie; aanvragen steeds een week te voren.
21 X 1908	's namiddags, sterrewacht.	Ten allen tijde.
4 XII 1912	Di. 10 u., inst. v. theor. natuurk. Wo. 10 u., inst. v. theor. natuurk.	Bij voorkeur in een nader aan te kondigen tijdvak.
23 IX 1914	Do. 11 u., lab.	Voor candidaatsexamen vóór de groote vacantie tot 15 Juni.
17 V 1916	Ma. 12 u., fac.kamer acad. Wo. 12 u., " " Vr. 12 u., " "	
14 II 1917	Steeds, behalve Wo. en Vr, lab.	Ten allen tijde, doch voor het candidaatsexamen niet vóór de zomervacantie na het tweede studiejaar.
11 X 1922	Ma. 14 u., mus. Wo. 14 u., " Do. 14 u., " Vr. 14 u., "	
26 IX 1923	Ma. 14 u., lab.	
3 XII 1924	Ma. 11 u., lab.	
b.gew. 13 X 1920 gew. 20 IX 1926	Dagelijks 10—16 u. lab., behalve Ma.	Laatste week van elke maand, uitgezonderd de vacantie; aanvragen steeds een week te voren .

NAAM.	ADRES.	LEERVAKKEN.
Buitengewone hoogleeraren:		
Dr. E. Hertzsprung.	Sterrewacht 9, Tel. Sterrew. 260.	Sterrekunde.
Dr. E. D. van Oort.	Witte Singel 10, Tel. 731, Tel. mus. 616.	Dierkunde.
Bijzonder hoogleeraar vanwege het Universiteitsfonds:		
Dr. A. Einstein.	Haberlandtstrasse 5, Berlin, Tel. inst. 1257.	Theoretische Natuurkunde.
Bijzonder hoogleeraar vanwege Teyler's Stichting:		
Dr. A. D. Fokker.	Conollyweg 1, Santpoort (Station), Tel. Haarlem 23115, Tel. inst. 1257.	Theoretische Natuurkunde.
Lectoren:		
Dr. W. P. Jorissen.	Hooge Rijndijk 11, Tel. 1449, Tel. lab. 262.	Anorganische scheikunde.
Dr. J. W. C. Goethart.	Witte Singel 69, Tel. 704, Tel. herb. 254.	Systematische plantkunde.
Dr. J. Droste.	Aloëlaan 9.	Wiskunde voor de chemici, functieleer.
Dr. J. Woltjer.	Bréloftpark, Noordwijk a/Z, Tel. sterrew. 260.	Theoretische sterrekunde.
Dr. C. A. Crommelin.	Oranjelaan 6, Park de Kieviet, Wassenaar, Tel. 76179, Tel. lab. 2564.	Natuurkunde.
Dr. H. Boschma.	Julianalaan 12, Oegstgeest, Tel. 1569, Tel. lab. 259.	Dierkunde.
Dr. J. van Alphen.	Leidsche weg 31, Voorschoten, Tel. lab. 457.	Organische scheikunde.

AMBTSAAN-VAARDING.	SPREEKUUR.	GELEGENHEID TOT HET AFLEGGEN VAN TENTAMEN
3 VII 1920	Geen vast spreekuur.	
1 XII 1920	Dagelijks 14 u., mus., behalve Ma. en Za.	
27 X 1920	Geen vast spreekuur.	
26 IX 1928	Ma. 10.30, inst. v. theor. natuurk. (beneden).	Ten allen tijde.
23 IX 1908	Na elk college.	Tot 1 Juni ten allen tijde; in het tijdvak van 1—15 Juni slechts bij aanvrage vóór 1 Juni.
14 IV 1910		
30 I 1918	Ma. 14 u., inst. v. theor. natuurk. (beneden).	Voor candidaatsexamen alleen na bekendmaking.
24 X 1919		
12 V 1925	Geen vast spreekuur, te spreken dagelijks 9—12, 14—17, lab.	Alleen voor a.s. medici, vóór en na de zomervacantie.
1 VII 1928		
1 VII 1928	Geen vast spreekuur, te spreken dagelijks 9—12, 14—17, lab.	Ten allen tijde; in het tijdvak van 1 Juni tot de zomervacantie echter slechts bij aanvrage vóór 1 Juni.

Bijlage 2

Boekenlijst

Bron: Jaarboekje van de Philosophische Faculteit der Leidsche Studenten, 1930/31 en 1931/32

Hieronder volgt een opgave van eenige boeken, die door verschillende hoogleeraren en lectoren op de colleges aanbevolen worden. Bovendien zijn er aan deze lijst eenige werken toegevoegd, welke niet zoozeer geschikt zijn als leiddraad bij de studie, doch waarvan het lezen zeer aanbevelenswaardig is.

Uit den aard der zaak is vooral wat deze laatste categorie betreft de lijst geenszins volledig. Men doet daarom goed met het aanschaffen van boeken te wachten, totdat ze op het college opgegeven zijn.

Astronomie.

Russell Dugan Stewart. — Astronomy.
A. S. Eddington. — Stellar movements and the structure of the universe.
Newcomb—Engelmann. — Populäre Astronomie.

Wiskunde.

Salmon—Fiedler. — Analytische Geometrie der Ebene. I en II.
J. Wolff. — Inleiding tot de analytische meetkunde van het platte vlak. Noordhoff, Groningen.
J. A. Barrau. — Analytische Meetkunde, 1. Noordhoff, Groningen.
Bromwich. — An Introduction to the theory of infinite series.
Goursat. — Cours d'analyse.
Forsyth. — A treatise on differential equations.
Hk. de Vries. — Leerboek der differentiaal- en integraalrekening, 1e deel. Noordhoff, Groningen.
E. Czuber. — Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I en II, Teubner.
G. Kowalewsky. — Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Teubner.
E. Cesàro. — Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Teubner.

Natuurkunde.

H. A. Lorentz. — Beginselen der Natuurkunde, 2 deelen.
E. Grimsehl. — Lehrbuch der Physik.
Arthur Haas. — Einführung in die theoretische Physik.
F. Kohlrausch. — Lehrbuch der praktischen Physik.
A. Sommerfeld. — Atombau und Spektrallinien.

Arthur Haas. — Materiewellen und Quantenmechanik.
P. Drude. — Lehrbuch der Optik.
R. Wood. — Physical Optics.
H. A. Lorentz. — Lessen over Theoretische Natuurkunde I—VIII.
M. Planck. — Vorlesungen über Thermodynamik.
K. Herzfeld. — Kinetische Theorie der Wärme.
Eichenwald. — Elektrizität.
P. Weiss et G. Foëx. — Le Magnétisme.
E. C. Stoner. — Magnetism and atomic structure.
Siegbahn. — Spektroskopie der Röntgenstrahlen.
Ewald. — Kristallen und Röntgenstrahlen.

Dr. W. VAN DER WOUDE.
Analytische meetkunde. Ma. 9—10, 11—12 en Wo. 9—10
Voor candidaten:
Algebraïsche meetkunde. Wo. 9—11.
Mechanica. Ma. 10—11, Vr. 10—12.

Studiewerken:
SALMON-FIEDLER, Analytische Geometrie der Ebene, I, II.
J. A. BARRAU, Analytische Meetkunde, I.
C. M. JESSOP, Treatise on the line complex.
E. L. DICKSON, Algebraic invariants.
H. HILTON, Plane Algebraic Curves.
APPELL, Traité de Mécanique, I.

Bijlage 3

Collection Borel

Bron: G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, 1924

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET C^IE

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6^e)

Collection de monographies sur la Théorie des fonctions, publiée sous la direction d'EMILE BOREL, Membre de l'Institut. Volumes in-8 (25-16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions*), par EMILE BOREL, 2^e édition, 1914 .... 15 fr.

Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL, 2^e édit., 1921. 20 fr.

Leçons sur les séries divergentes, par E. BOREL; 1901 .... 9 fr.

Leçons sur les séries à termes positifs, par E. BOREL; 1902 (réd. par *R. d'Adhémar*) .... 7 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, par E. BOREL; 1903 (réd. par *L. Zoretti*) .... 7 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, par H. LEBESGUE; 1904 .... 7 fr.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, par E. BOREL; 1905 (réd. par *M. Fréchet*, Notes de *P. Painlevé* et *H. Lebesgue*) .... 9 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy;* 1905 .... 7 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905 .... 7 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE; 1906 .... 7 fr.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier; avec une *Note* de PAUL PAINLEVÉ; 1908 .... 13 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910 .... 11 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la F^té des Sciences de Paris, par É. BOREL, recueillies et rédigées par *A. Denjoy;* 1910.... 11 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910 .... 7 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par LUDOVIC ZORETTI; 1911 .... 7 fr. 50

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la F[té] des Sciences de Rome en 1910, par VITO VOLTERRA et publiées par *M. Tomassetti* et *F.-S. Zarlatti*; 1913... 11 fr.

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest, par PAUL DIENES; 1913 .... 11 fr.

Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1911, par VITO VOLTERRA, recueillies et rédigées, par *J. Pérès*; 1913... 15 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues; par F. RIESZ; 1913 .... 13 fr.

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Leçons professées au Collège de France, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Professeur à l'Université de Louvain, Membre correspondant de l'Institut de France; 1916 .... 14 fr.

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par MAXIME BÔCHER, recueillies et rédigées par *Gaston Julia*; 1917.. 10 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par ÉMILE BOREL, rédigées par *G. Julia;* 1917 .... 15 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1919.............................. 16 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes, par G. GIRAUD; 1920.... 13 fr.

Leçons d'Analyse fonctionnelle, par P. LÉVY; préface de *J. Hadamard*, 1922.. 35 fr.

Méthodes et problèmes de théorie des fonctions; par Emile BOREL, 1922.. 12 fr.

68464 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et C[ie], quai des Grands-Augustins, 55.

Bijlage 4

Serie Actualités scientifiques et industrielles

Bron: A. Appert, Propriétés des espaces abstraits les plus généraux, 1934

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET Cie

6, rue de la Sorbonne, Paris (5e)

Actualités Scientifiques et Industrielles (*suite*)

Série 1933 :

52. G. Urbain. La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique. Première partie .... 12 fr.
53. G. Urbain. La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique. Deuxième partie .... 12 fr.
54. M. Chatelet. Spectres d'absorption visibles et ultra-violets des solutions .... 7 fr.
55. L. Leprince-Ringuet. Les transmutations artificielles : particules alpha, neutrons, protons, rayons cosmiques .... 15 fr.
56. E. Néculcéa, Sur la théorie du rayonnement .... 7 fr.
57. G. Fournier et M. Guillot. Sur l'absorption exponentielle des rayons β du radium E .. 10 fr.
58. Jean Perrin. La recherche scientifique .... 6 fr.
59. L. Brillouin. La diffraction de la lumière par des ultra-sons .... 10 fr.
60. A. Magnan et A. Sainte-Laguë. Le vol au point fixe .... 10 fr.
61. M. Prettre. L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux, 1re partie Hydrogène et oxyde de carbone .... 15 fr.
62. Mme P. Curie. Les rayons α, β, γ, des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire .... 12 fr.
63. H. Mineur. L'Univers en expansion .... 12 fr.
64. T. Cahn. Les phénomènes biologiques dans le cadre des sciences exactes .... 6 fr.
65. A. Magnan et A. Planiol. Sur l'excédent de puissance des oiseaux .... 8 fr.
66. A. Magnan et A. Planiol. Sur l'excédent de puissance des insectes .... 8 fr.
67. J. Trillat. Organisation et principes de l'enseignement en U. R. S. S. .... 12 fr.
68. E. Meyerson. Réel et déterminisme dans la physique quantique .... 10 fr.
69. P. Urbain. Les sciences géologiques et la notion d'état colloïdal .... 18 fr.
70. L. Goldstein. Les théorèmes de conservation dans la théorie des chocs électroniques 9 fr.
71. L. Brillouin. La méthode du champ self-consistant .... 12 fr.
72. E. Cartan. Les espaces métriques fondés sur la notion d'air .... 12 fr.
73. P. Swings. Molécules diatomiques. Etude des termes spectraux .... 12 fr.
74. P. Swings. Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques .... 14 fr.
75. G. Champetier. La structure de la cellulose dans ses rapports avec la constitution des sucres .... 8 fr.
76. Rudolf Carnap. L'ancienne et la nouvelle logique .... 8 fr.
77. Lucien Godeaux. Questions non résolues de géométrie algébrique .... 8 fr.
78. Vera Dantchakoff. Le devenir du sexe .... 15 fr.

Série 1934 :

79. E. Cartan. Les espaces de Finsler .... 12 fr.
80. P. Delens. La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentille projective .... 12 fr.
81. E. Dubois. L'effet Volta .... 6 fr.
82. M. A. H. Wilson. The electrical properties of semi conductors and insulators .... 4 fr.
83. E. Keightley-Rideal. On phase boundary potentials .... 4 fr.
84. O. Scarpa. Pile metalliche che funzionano in eccezione alla legge delle tensioni elettriche nei circuiti metallici .... 6 fr.
85. M. Volmer. Das elektrolytische Kristallwachstum .... 4 fr.
86. F. Bloch. Les électrons dans les métaux. Problèmes statiques. Magnétisme .... 5 fr.
87. A. F. Joffé. Conductibilité électrique des isolants solides et des semi-conducteurs .... 10 fr.
88. L. Brillouin. Les électrons dans les métaux du point de vue ondulatoire .... 9 fr.
89. L. Brillouin. Conductibilité électrique et thermique des métaux .... 18 fr.
90. J. Heyrovsky. A polarographic study of the électro-kinetic phenomena of adsorption, electro-reduction and overpotential displayed at the dropping mercury cathode .... 12 fr.
91. R. Audubert. Phénomènes photoélectrochimiques. Action de la lumière sur le potentiel métal-solution .... 8 fr.
92. Gillet et N. Andrault de Langeron. Les colloïdes et la couche de passage .... 10 fr.
93. P. Dutoit. Sur le potentiel métal-solution dans les dissolvants autres que l'eau .... 4 fr.
94. G. Brooks. Laque d'Indochine rhus succedanea, la Laccase et le Laccol .... 18 fr.
95. G. Teissier. Dysharmonies et discontinuités dans la croissance .... 10 fr.
96. V. A. Kostitzin. Symbiose, parasitisme et évolution (étude mathématique) .... 15 fr.
97. P. Frank. Théorie de la connaissance et physique moderne .... 10 fr.
98. P. Swings. La fluorescence des molécules diatomiques, molécules homopolaires des des groupes, V, VI, VII, du tableau périodique .... 10 fr.
99. P. Swings. La fluorescence des molécules diatomiques, phénomènes complexes .... 10 fr.

Actualités Scientifiques et Industrielles (suite)

Série 1934 (*suite*) :

100. M. Dubuisson. Polarisation et dépolarisation cellulaires .... 12 fr.
101. Perez. Les pagures ou Bernard l'Ermite (un exemple d'adaptation) .... 9 fr.
102. Florkin. Transporteurs d'oxygène .... 12 fr.
103. M. Prenant. Adaptation, écologie et biocœnotique .... 15 fr.
104. S. Veil. Les phénomènes périodiques de la chimie. I. les périodicités de structure. .... 15 fr.
105. M. Prettre. L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux. 2e partie : les hydrocarbures, étude théorique du phénomène de choc dans les moteurs .... 15 fr.
106. G. Bohn. La cellule et les protozoaires .... 18 fr.
107. J. Ullmo. Les idées d'Eddington sur l'interaction électrique et le nombre 137 .... 7 fr.
108. N. Marinesco. Equilibre de membrane .... 15 fr.
109. H. Hasse. Uber gewisse Ideale in einer einfachen Algebra .... 4 fr.
110. J.-J. Trillat. Les preuves expérimentales de la mécanique ondulatoire, la diffraction des électrons et des particules matériellels .... 12 fr.
111. G. Allard. Mécanique quantique et chimie .... 8 fr.
112. Sir A. Eddington. Sur le problème du déterminisme .... 6 fr.
113. T. Cahn et J. Houget. Biochimie de la contraction musculaire .... 12 fr.
114. J. Dieudonné. Sur quelques propriétés des polynomes .... 6 fr.
115. H. Mineur. Histoire de l'astronomie stellaire jusqu'à l'époque contemporaine .... 15 fr.
116. H. Mineur. Eléments de statistique mathématique applicables à l'étude de l'astronomie stellaire .... 12 fr.
117. L. Gay et P. Jaulmes. Dissociation électrolytique, méthode distillatoire .... 10 fr.
118. L. Gay et P. Jaulmes. Dissociation électrolytique, cryoscopie des électrolytes forts .... 15 fr.
119. V. Dantchakoff. La cellule germinale dans le dynamisme de l'ontogénèse .... 18 fr.
120. G. Bohn. Reproduction, sexualité, hérédité .... 15 fr.
121. E. Darmois. Un nouveau corps simple, le deuterium ou hydrogène lourd .... 7 fr.
122. G. Malfitano et M. Catoire. Les composés micellaires selon la notion de complexité croissante en chimie .... 9 fr.
123. L. Godeaux. Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls .... 10 fr.
124. J. Duclaux. L'analyse physico-chimique des fonctions vitales (Introduction du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 6 fr.
125. J. Duclaux. Etude de l'eau et des solutions, azéotropisme-démixtion (chapitre I du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 17 fr.
126. J. Duclaux. Viscosité (chapitre II du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 18 fr.
127. J. Duclaux. Rigidité thixotropie, coacervation (chapitre III du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 10 fr.
128. J. Duclaux. Capillarité (chapitre IV du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 12 fr.
129. J. Duclaux. Suspensions, émulsions (chapitre V du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) 12 fr.
130. Carl Benedicks. Nouveaux résultats expérimentaux sur l'effet électrothermique homogène .... 8 fr.
131. Lothar Nordheim. Die Theorie der thermoelektrischen Effekte .... 6 fr.
132. P. Langevin. La notion de corpuscules et d'atomes .... 12 fr.
133. G. Bohn. Les Invertébrés (Cœlentérés et Vers) .... 15 fr.
134. P. Chouard. La multiplication végétative et le bourgeonnement chez les plantes vasculaires .... 10 fr.
135. Z. M. Pacq. Essai de Classification des Substances Sympathicomimétiques .... 8 fr.
136. Z. M. Bacq. Hormones et Vitamines. Un aspect du problème des quantités infinitésimales en biologie .... 8 fr.
137. Edgar Lederer. Les Carotenoïdes des plantes .... 18 fr.
138. Lucien godeaux. La Théorie des surfaces et l'espace réglé .... 12 fr.
139. Marcel Brelot. Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point ...... 14 fr.
140. J. L. Destouches. Les principes de la mécanique générale .... 15 fr.
141. H. Mineur. Photographie stellaire. Mesure photographique des positions et des magnitudes des étoiles .... 18 fr.
142. René Souèges. L'embryologie végétale, résumé historique, 1re époque : Des origines à Hanstein (1870) .... 12 fr.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 7-5-1934.

Bijlage 5

Serie Mémorial des sciences mathématiques

Bron: S. Minetti, Sur quelques espaces fonctionnels et sur la Géométrie de certains Holoespaces, 1936

LIBRAIRIE-IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6^{e})

Envoi dans toute l'Union Postale, contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus (Chèques postaux : 29323.) R. C. Seine 99506.

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Nouvelle collection fondée sous le haut patronage des Académies Française et Étrangères, avec la collaboration de nombreux savants.

Volumes in-8° raisin (25-16), *se vendant séparément* **15 francs.**

1. *Paul Appell.* — 2. *G. Valiron.* — 3. *Paul Appell.* — 4. *M. d'Ocagne.* — 5. *P. Lévy.* — 6. *E. Goursat.* — 7. *A. Buhl.* — 8. *Th. de Donder.* — 9. *E. Cartan.* — 10 *P. Humbert.* — 11. *G. Bouligand* — 12. *R. Gosse.* — 13. *A. Véronnet.* — 14. *Th. De Donder.* — 15. *S. Zaremba.* — 16. *A. Buhl.* — 17. *G. Valiron.* — 18. *A. Sainte-Laguë.* — 19. *R. Lagrange.* — 20. *A. Bloch.* — 21. *M. Janet.* — 22. *L Godeaux.* — 23. *Georges Rémoundos.* — 24. *N.-E. Nörlund.* — 25. *Georges Darmois.* — 26. *Bertrand Gambier.* — 27. *Paul Appell.* — 28. *Emile Cotton.* — 29. *C. Guichard.* — 30. *Ludovic Zoretti.* — 31. *Bertrand Gambier.* — 32. *Ch. Riquier.* — 33. *A. Buhl.* — 34. *H. Vergne.* — 35. *Léon Lecornu.* 36. *Paul Appell.* — 37. *G. Cerf.* — 38. *G. Valiron.* — 39. *T. Nagell.* — 40. *S. Lefschetz.* — 41. *Sainte-Laguë.* — 42. *E. Cartan.* — 43. *de Donder.* — 44. *P.-L. Leau.* — 45. *W. Wilkosz.* — 46. *J. Haag.* — 47. *G. Tzitzéica.* — 48. *Michel Petrovitch.* — 49. *Kryloff (Nicolas).* — 50. *N. Saltykow.*

51. *Ervand Kogbetliantz.* — Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques.
52. *B. Hostinsky.* — Méthodes générales du Calcul des Probabilités.
53. *Panajiotis Zervos.* — Le problème de Monge.
54. *S. Mandelbrojt.* — La singularité des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor.

55. *Husson.* — Les trajectoires de la dynamique.
56. *G. Evans.* — Stabilité et Dynamique de la Production dans l'Économie Politique.
57. *J. Delsarte.* — Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.
58. *Th. de Donder.* — Application de la Gravifique einsteinienne à l'Électrodynamique des Corps en mouvement.
59. *L. Leau.* — Les suites de fonctions en général (domaine complexe).
60. *Th. Got.* — Propriétés générales des groupes discontinus.
61. *H. Dulac.* — Points singuliers des équations différentielles.
62. *A. Buhl.* — Gravifiques, Groupes, Mécaniques.
63. *Václav Hlavatý.* — Les courbes de la variété générale à *n* dimensions.
64. *O. Ore.* — Les corps algébriques et la théorie des idéaux.
65. *R. d'Adhémar.* — La balistique extérieure.
66. *J. Shohat.* — Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef.
67. *L. Godeaux.* — Les transformations birationnelles de l'espace.
68. *Th. Got.* — Domaines fondamentaux des groupes fuchsiens et automorphes.
69. *V.-A. Kostitzin.* — Applications des équations intégrales (applications statistiques).
70. *Saltykow.* — Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue.
71. *G. Bouligand.* — Géométrie infinitésimale directe de physique mathématique classique.
72. *A. Rosenblatt.* — Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux.
73. *J.-L. Walsh.* — Approximation by Polynomials in the complex Domain.
74. *Cl. Guichard.* — Théorie des Réseaux.
75. *J. Herbrand.* — Le développement moderne de la théorie des corps algébriques (Corps de classes et lois de réciprocité).
76. *G. Vranceanu.* — Les espaces non holonomes.

102675-36 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

Bijlage 6

Eindexamens der hoogere burgerscholen in 1927

Woensdag 1 Juni, voormiddag.

ALGEBRA.

$2^1/_2$ uur.

1. Van de vergelijking:

$$x^2 - 2\,mx + 3\,(m^2 - 4) = 0$$

is gegeven, dat de wortels *reëel* zijn, en dat de som der vierkanten van de wortels, vermenigvuldigd met het product der wortels, gelijk is aan: $-102 + 120\sqrt{2}$.

Gevraagd: m en de *wortels* der vergelijking.

2. Van een meetkundige reeks met positieve termen is de middelste 24 en het product der termen is $2^{15} \times 3^5$.

Men beschouwt ook de reeks, die gevormd wordt door de omgekeerde waarden der termen van oneven rangorde der eerste reeks.

Als men deze tweede reeks tot in het oneindige voortzet, dan heeft haar som $\frac{8}{21}$ tot grens.

Bepaal de oorspronkelijke reeks.

Donderdag 2 Juni, voormiddag.

TRIGONOMETRIE.

$2^1/_2$ uur.

1. Van den scherphoekigen driehoek ABC neemt men AC als basis. Van dezen driehoek is H het hoogtepunt en M het middelpunt van den omgeschreven cirkel.

Bewijs:

1° dat de afstand van M tot de zijde b gelijk is aan $^1/_2\ b$ cotg. B;

2° dat $HB = b$ cotg. B;

3° dat de lijn MH de zwaartelijn uit het hoekpunt B snijdt in het zwaartepunt Z van dien driehoek.

Hiermede is bewezen, dat in elken scherphoekigen driehoek de punten H, Z en M op een rechte lijn liggen.

Onderzoek ten slotte of de punten H, Z en M ook op een rechte lijn liggen, als hoek B stomp of recht is.

2. In een driehoek ABC stelt R den straal voor van den omgeschreven cirkel en r_c den straal van den cirkel, die raakt aan de zijde c en aan de verlengden der beide andere zijden.

Bewijs, dat deze driehoek gelijkbeenig is, als de volgende betrekking gegeven is:

$$r_c = 4\,R \sin \tfrac{1}{2}\,C \cos^2 (45^\circ - \tfrac{1}{4}\,C).$$

Donderdag 9 Juni, voormiddag.

STEREOMETRIE.

$2^1/_2$ uur.

1. Men beschrijft een bol, die door drie in eenzelfde zijvlak gelegen hoekpunten van een kubus gaat en het overstaande zijvlak raakt.

In welke verhouding zal het eerstgenoemde zijvlak, zoover als noodig uitgebreid, het oppervlak en den inhoud van den bol verdeelen?

2. Het grondvlak van een driezijdige pyramide is een rechthoekige driehoek ABC, rechthoekig in B. De loodrechte projectie van den top op het grondvlak is een punt D op BC, zoodanig gelegen, dat $CD:DB = 1:3$.

Men brengt door BC een snijvlak, zoodat de doorsnede met de pyramide een gelijkbeenige driehoek is met BC als basis en vraagt de verhouding van de inhouden van de beide deelen, waarin de pyramide door dit snijvlak verdeeld wordt.

Vrijdag 10 Juni, voormiddag.

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

$2^1/_2$ uur.

1. Van een vlak maakt de horizontale doorgang VV_1 met de as een hoek van 45° (opening naar rechts) en de verticale doorgang VV_2 een hoek van 60° (opening naar links).

Neem het punt V op de as tweemaal zoover van den rechter- als van den linkerkant van het papier.

In dit vlak V_1VV_2 ligt een vierkant $ABCD$ zoodanig, dat AD op een afstand van 6 cM. en BC op een afstand van 3 cM. evenwijdig loopt aan den horizontalen doorgang VV_1. De afstand van het punt V tot de zijde CD is 4 cM. en tot de zijde AB 7 cM.

Gevraagd wordt:

1°. de horizontale en de verticale projectie van het vierkant te bepalen;

2°. door den horizontalen doorgang VV_1 een vlak W_1WW_2 te brengen, waarop het vierkant $ABCD$ zich projecteert als een rechthoek, wiens zijden zich als 1 : 2 verhouden (het vlak W_1WW_2 ligt binnen den stompen tweevlakshoek, dien het vlak V_1VV_2 met het horizontale projectievlak maakt);

3°. de horizontale en de verticale projectie van dien rechthoek te construeeren.

2. Een regelmatige vierzijdige pyramide $TABCD$ staat met zijn grondvlak $ABCD$ op het horizontale en vóór het verticale projectievlak. De ribbe AB van het grondvlak maakt met de as van projectie een hoek van 45° (opening naar links).

Het hoekpunt A ligt 1 cM. vóór het verticale projectievlak.

De ribbe van het grondvlak is 4 cM. en de hoogte van de pyramide is 10 cM. Men laat deze pyramide om de ribbe AB zóóver wentelen, dat de top T 2 cM. achter het verticale projectievlak komt.

Bepaal van de pyramide in laatstgenoemden stand de horizontale en de verticale projectie, alsmede de doorsnede met het verticale projectievlak.

Bijlage 7

Programma's Het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congressen

Bron: Programma van het zevenentwintigste Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig congres te Nijmegen, 11, 12 en 13 april 1939 en Programma van het achtentwintigste Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres te Utrecht, 15, 16 en 17 april 1941

Tweede Vergadering

DONDERDAGOCHTEND 13 APRIL

Eerste afdeeling:

Onderafdeeling voor Wiskunde

te stipt 9 uur

in de Hoogere Burgerschool voor Meisjes, Julianaplein 1
(plattegrond M)

9 u.	PH. DWINGER (Leiden). Differentiaalmeetkundige eigenschappen van regeloppervlakken in de elliptische ruimte.
9 u. 30.	M. M. FULD (Weert). Enkele nieuwere resultaten in verband met het probleem van Waring.
10 u.	A. F. MONNA (Dordrecht). Over het probleem van Dirichlet.
10 u. 30.	J. POPKEN (Scheveningen). Iets over rechtlijnig bewegende punten.
11 u.	C. VISSER (Dordrecht). Over een stelling in de „Geometrie der Zahlen".
Daarna:	Benoeming van den voorzitter der onderafdeeling voor het 28e congres.

Onderafdeeling voor Natuurkunde

te stipt 9 uur

in de Hoogere Burgerschool voor Meisjes, Julianaplein 1
(plattegrond M)

9 u.	J. DE BOER (Amsterdam). Verdeelingsfunctie van moleculen in vloeistoffen en gassen.
9 u. 20.	C. J. GORTER mede namens P. TEUNISSEN (Groningen). Paramagnetische dispersie.
9 u. 40.	J. A. SMIT (Utrecht). Overgangswaarschijnlijkheden.
10 u.	J. M. W. MILATZ (Utrecht). Spectroscopie van β-stralen.
10 u. 20.	F. BARENDREGT (Amsterdam). Paarvorming door β-stralen.
10 u. 40.	Pauze.
11 u.	C. J. MATTHIJS (Leiden). Thermoëlectrische verschijnselen in supergeleiders.
11 u. 20.	F. VAN WIJK (Delft). Diëlectrische verliezen in rubber.
11 u. 40.	J. F. SCHOUTEN (Eindhoven). Het gebruik van Fourier-analyse bij de interpretatie van onscherpe monochromatische afbeelding.
Daarna:	Benoeming van den voorzitter der onderafdeeling voor het 28e congres.

Tweede Vergadering

DONDERDAGOCHTEND 17 APRIL

Eerste Afdeeling:

Onderafdeeling voor Wiskunde

te stipt 9½ uur
in de kleine collegezaal van het Physisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6 (Plattegrond 4)

9 u. 30. J. DE GROOT (Utrecht). Mededeeling betreffende het lichaam der rationale functies.

9 u. 50. H. J. E. BETH (Amersfoort). Een kinematisch vraagstuk voor R_4.

10 u. 10. J. KOKSMA (Amsterdam). Niet-lineaire simultane approximaties.

10 u. 30. O. BOTTEMA (Deventer). De meetkunde van een bepaalde groep van projectieve transformaties.

10 u. 50. B. MEULENBELD (Ginneken). Enkele lineaire problemen uit de meetkunde der getallen.

11 u. 10. A. F. MONNA (Dordrecht). Enkele opmerkingen over de toepassing van de moderne theorie van het probleem van Dirichlet en de theorie der subharmonische functies op de functietheorie.

Daarna: Benoeming van den voorzitter der onderafdeeling voor het 29e congres.

Onderafdeelingen voor Natuurkunde

te stipt 9½ uur
in het Physisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6 (Plattegrond 4)

9 u. 30. W. J. BEEKMAN (Utrecht). Onderzoekingen met de Wilson-camera.

9. u 55. J. H. OORT (Leiden). De interstellaire materie.

Onderafdeelingen Natuurkunde met de Afdeeling Geneeskunde in het Physiologisch Laboratorium, Vondellaan 24 (Plattegrond 2):

10 u. 30. H. C. BURGER (Utrecht). Het electrisch geleidingsvermogen van het menschelijk lichaam.

10 u. 50. A. BOUWERS (Eindhoven) en D. L. BARTELINK (Nijmegen). De biologische en medische toepassingen van kunstmatige radioaktiviteit.

11 u. 10. L. BLOK (Eindhoven) en H. J. KÖSTER (Den Haag). Een toestel voor het electrisch meten van de gehoorscherpte (met demonstratie).

Onderafdeelingen Natuurkunde alleen in het Physiologisch Laboratorium, Vondellaan 24 (Plattegrond 2):

11 u. 30. C. F. E. SIMONS (Groningen). Absorptie van metalen in het ultraviolet.

11 u. 55. R. DORRESTEIN (Utrecht). Metingen over den aanslag van metastabiele toestanden met behulp van secundaire electronenemissie.

Daarna: Benoeming van den voorzitter der onderafdeeling voor het 29e congres.

SCHRIFTELIJK EXAMEN WISKUNDE K I,

door Prof. Dr. FRED. SCHUH.

Meetkunde (29 Aug., $1\frac{1}{2}$—$4\frac{1}{2}$ uur).

1. Gegeven drie punten. Bepaal een in hetzelfde vlak gelegen vierde punt, dat het middelpunt is van een inversie, dat de drie gegeven punten doet overgaan in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek.

2. Het middelpunt van den bol, om het viervlak $ABCD$ beschreven, ligt op AB. Men brengt een vlak α aan loodrecht op AB, dat de ribben AC, BC, AD en BD resp. snijdt in P, Q, R en S. Bewijs, dat deze vier punten op een cirkelomtrek liggen en bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van dezen cirkel, als α evenwijdig verplaatst wordt.

Driehoeksmeting (30 Aug., 9—12 uur).

1. Tusschen de zijden a, b en c van een boldriehoek bestaat de betrekking

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = 0.$$

Bewijs, dat de som der hoeken van dien boldriehoek 360° is.

2. De vlakke driehoek ABC heeft de eigenschap, dat de som der oppervlakken van den ingeschreven cirkel en den aangeschreven cirkel aan de zijde BC gelijk is aan de som der oppervlakken van de beide andere aangeschreven cirkels.

Gevraagd wordt:

I. formules ter berekening van de hoeken B en C, als hoek A gegeven is;

II. het interval waartoe in dit geval hoek A moet behooren;

III. formules ter berekening van de hoeken A en C, als hoek B gegeven is;

IV. het interval waartoe in dit geval hoek B moet behooren.

3. Bepaal φ, χ en ψ uit de vergelijkingen:

$$\sin\chi\cos\psi = \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\sin\psi\cos\varphi = \frac{3}{4},$$

$$\sin\varphi\cos\chi = -\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Algebra (30 Aug., $1^1/_4$—$4^1/_4$ uur).

1. Bereken met behulp van complexe getallen het product van alle zijden en diagonalen van een regelmatigen n-hoek, beschreven in een cirkel met straal 1.

2. Wanneer de wortels van de vergelijking

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

welker coëfficiënten complexe getallen kunnen zijn, in drie opvolgende hoekpunten van een regelmatigen zeshoek liggen, die zijn middelpunt in 0 heeft, geldt

$$2a_0 : 3a_1 = a_1 : a_2 = 3a_2 : 2a_3.$$

Bewijs deze stelling en haar omgekeerde.

3. Onderzoek voor reëele waarden van x de gelijkmatigheid der convergentie van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2x^4}.$$

Analytische Meetkunde [1] (31 Aug., 9—12 uur).

1. Een raaklijn der parabool $y^2 = 4ax$ wordt in het punt S loodrecht gesneden door een raaklijn der parabool $x^2 = 4by$. Bepaal de meetkundige plaats van S.

2. De vergelijkingen $x = t^2 - 1$ en $y = t^3 - t$, waarin t een parameter is, bepalen een kromme K. Toon aan, dat K een dubbelpunt heeft. Bepaal de betrekking tusschen de parameters t_1, t_2, t_3 van drie collineaire punten. Een willekeurige cirkel door het dubbelpunt snijdt K nog in vier punten: bepaal twee onafhankelijke betrekkingen tusschen de parameters dier punten.

3. Een veranderlijke cirkel raakt de parabool $y^2 = 4x$, gaat door haar brandpunt en snijdt de kromme in de punten P en Q.
Bewijs, dat de rechte PQ door een vast punt gaat en bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van dien cirkel.

---

[1] Bij de drie vraagstukken onderstellen we het assenkruis rechthoekig.

Beschrijvende Meetkunde (31 Aug., $1^1/_4$—$4^1/_4$ uur).

De wijze, waarop in onderstaande opgaven de ligging van een punt wordt aangegeven, kan ontleend worden aan de bijgevoegde teekening, waarin XOZ het vertikale projectievlak voorstelt en XOY het horizontale.

1. Gegeven is een driehoek ABC. Bepaal de punten P, waaruit deze driehoek op het tweede hoekdeelvlak der projectievlakken XOZ en XOY geprojecteerd wordt als een gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijde, overeenkomende met BC, een hoek van 45 graden met de X-as maakt en achter het verticale vlak ligt.
$x_A = 12$ cm, $y_A = z_A = 2$ cm;
$x_B = 17$ cm, $y_B = z_B = 5$ cm;
$x_C = 20$ cm, $y_C = z_C = 4$ cm.

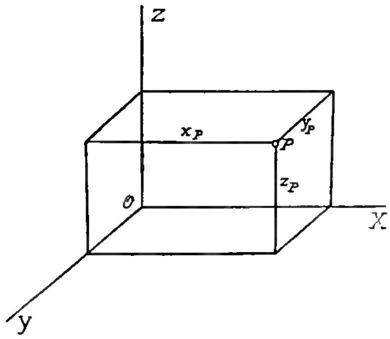


Fig. 4.

De lijn OX te nemen evenwijdig aan de lange zijden van het papier, op een afstand van 18 cm van de onderzijde; het punt O op 12 cm van de linkerzijde.

2. Van een bolschijf, gesneden uit een bol van 18 cm middellijn, is de straal van den grootsten randcirkel 8 cm, de hoogte 4 cm. In de schijf bevindt zich een kegelvormig gat, waarvan de rand samenvalt met den kleinsten randcirkel van de schijf en waarvan de top met het middelpunt van den grootsten randcirkel samenvalt.

De schijf is in den eersten ruimtehoek geplaatst op een vlak ABC, zóó, dat de grootste randcirkel aan de doorgangen van dit vlak raakt.

$x_A = 28$ cm, $y_A = 20$ cm, $z_A = 0$; $x_B = 12$ cm, $y_B = z_B = 0$; $x_C = 32$ cm, $y_C = 0$, $z_C = 16$ cm.

Men vraagt de verticale projectie van het hierdoor beschreven lichaam, benevens de constructie zoowel van de assen der in de projectiefiguur voorkomende kegelsneden als van de in deze figuur optredende raakpunten.

De lijn OX te nemen evenwijdig aan de lange zijden van het papier, op een afstand van 24 cm van de onderzijde; het punt O op 12 cm van de linkerzijde.

DE OPGAVEN VAN HET SCHRIFTELIJK EXAMEN WISKUNDE M.O. K_5 1935.

DIFFERENTIAALREKENING.

(5 Sept., 9—12 uur)

1. De coördinaten van een veranderlijk punt P eener rectificeerbare ruimtekromme zijn een voldoend aantal malen differentieerbare functies van de booglengte s, die gemeten wordt van een vast punt der kromme tot P. Men noemt N het normaalvlak en r de raaklijn in P; verder V het vlak, dat door het kromtemiddelpunt van P gaat en loodrecht staat op de hoofdnormaal van P. Indien gegeven is, dat alle vlakken N aan eenzelfden bol raken, vraagt men te bewijzen, dat de vlakken V door het middelpunt van dien bol gaan en dat het kwadraat van den afstand van r tot dat middelpunt een lineaire functie van s is.

2. Voor $x \geqq 0$ heeft $f(x)$ een afgeleide $f'(x)$, waarvoor $\sqrt{x}\,.\,f'(x)$ begrensd is. Bewijs voor alle reëele x:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n^4x^2)}{n^4} = 2x\sum_{x=1}^{\infty} f'(n^4x^2)$$

waarin voor $x = 0$ het rechterlid het getal nul beteekent.

Opmerking. Men mag desnoods onderstellen dat $f'(x)$ voor $x \geqq 0$ continu is.

3. Voor alle bestaanbare waarden van x stelt $g(x)$ een continue toenemende functie voor en wordt

$$f(x) = \int_0^x (x - t)g(t)dt$$

gesteld. Bewijs, dat

$$f(x + \tfrac{1}{2}) + f(x - \tfrac{1}{2}) - 2f(x)$$

tusschen $\frac{1}{4}g(x - \frac{1}{2})$ en $\frac{1}{4}g(x + \frac{1}{2})$ ligt. Bewijs verder, dat als $g(x)$ voor iedere bestaanbare x een negatieve tweede afgeleide bezit,

$$f(x + \tfrac{1}{2}) + f(x - \tfrac{1}{2}) - 2f(x) < \tfrac{1}{4}g(x)$$

is.

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

(5 Sept., $13\frac{1}{2}$—$16\frac{1}{2}$ uur.)

1. Wanneer een beschrijvende van een quadratischen kegel loodrecht staat op de vlakken van een der bestaanbare stelsels cirkelsneden, dan is er ook een beschrijvende van dien kegel die loodrecht staat op de vlakken van het andere stelsel.

2. Bewijs, dat de omhullingskegel van de ellipsoïde

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

met top $P(x_1, y_1, z_1)$ bepaald is door de vergelijking

$$E_1E - \Pi_1^2 = 0.$$

$$\left(E_1 \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1\,;\quad \Pi_1 \equiv \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1\right).$$

Bewijs, dat twee dergelijke omhullingskegels met de toppen P_1 en P_2 elkaar snijden volgens vlakke krommen; in het geval dat het product der loodlijnen uit P_1 en O — het middelpunt der ellipsoide — op het poolvlak van P_1 neergelaten, gelijk is aan het product der loodlijnen uit P_2 en O op het poolvlak van P_2 neergelaten, te bewijzen dat de vlakken dier beide krommen loodrecht op elkaar staan.

3. Door elk punt van de z-as brengt men een vlak aan loodrecht op de rechte die door dat punt gaat en met de z-as op het oppervlak

$$x^2 + y^2 + 2xz - 2by = 0$$

ligt. Bewijs, dat de keerkromme van het voortgebrachte ontwikkelbaar oppervlak slechts op één quadratischen cylinder ligt en bepaal de vergelijking van dien cylinder.

INTEGRAALREKENING.

(6 Sept., 9—12 uur.)

1. De vlakke kromme, welker vergelijking in poolcoördinaten luidt

$$r = a\,\frac{\sin^p \Theta}{\cos \Theta},$$

waarin Θ het interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ doorloopt, en a en p positieve getallen voorstellen, begrenst met haar asymptoot en de poolas een figuur. Druk uit in gammafuncties den inhoud van het lichaam, dat ontstaat als deze figuur wentelt om de lijn, door de pool evenwijdig aan de asymptoot getrokken.

2. Bewijs

$$\lim_{t \to \infty} t \int_t^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{t}}{(x+1)^2 \log (x+1)}\, dx = 0$$

en

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ t \int_0^t \frac{\sin \frac{x}{t}}{(x+1)^2 \log (x+1)}\, dx - \int_0^t \frac{x}{(x+1)^2 \log (x+1)}\, dx \right\} = 0.$$

Bereken met behulp hiervan

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{\log \log t} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{t}}{(x+1)^2 \log (x+1)}\, dx.$$

3. Gegeven zij een rechthoekig assenstelsel. Gevraagd wordt het door het punt $(2, 0, \frac{1}{2})$ en de rechte

$$x = 1, \quad z = 1$$

gaande oppervlak, waarvan elk punt (x, y, z) de volgende eigenschap bezit: de door dat punt gaande raaklijn, die de z-as snijdt, vormt een constanten hoek met de lijn, die het punt $(x, y, -z)$ met den coördinatenoorsprong verbindt.

Opmerking. Het verdient aanbeveling, cylindercoördinaten in te voeren.

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

(6 Sept., $13\frac{1}{2}$—$16\frac{1}{2}$ uur.)

Alle gegeven lengten zijn in cm uitgedrukt.

1. *Axonometrie.*

De zijden van den tafereeldriehoek zijn $XY = 17$, $YZ = 22$, $XZ = 20$; X links, Y rechts, XY evenwijdig aan de korte zijden van het papier, op 30 van den onderrand.

Een torus heeft de z-as tot omwentelingsas, zijn middelpunt M ligt tusschen O en Z, de ware lengte van $OM = 6$.

Het middelpunt van een meridiaancirkel van den torus ligt op een afstand 6 van M, de straal van den meridiaancirkel is $3\frac{1}{2}$.

Construeer de raakvlakken V_1 en V_2 aan den torus, welke gaan door ZY, benevens hunne raakpunten S_1 en S_2.

Construeer van de snijkromme van den torus met dat raakvlak, waarvan het snijpunt met OX tusschen O en X ligt, de punten P_1, P_2, P_3 en P_4, welke op een afstand 4 van het vlak OXY liggen (bovenzijde).

2. *Centrale projectie.*

Distantie-cirkel midden op het papier, distantie $= 10$.

Op den distantie-cirkel liggen vier punten: A (boven), B (rechts, bg $AB = 90°$), C (rechts onder, bg $BC = 45°$), D (links boven, bg $AD = 45°$, C en D liggen dus diametraal tegenover elkander).

A is doorgangspunt, C vluchtpunt van een rechte a_1; B is doorgangspunt, D vluchtpunt van een rechte b_1; in het tafereel liggen nog de rechte a_2, welke den distantie-cirkel in B raakt, en de rechte b_2, welke den distantie-cirkel in A raakt.

De rechten a_1, b_1, a_2 en b_2 liggen op een bepaalde hyperbolische paraboloïde. Construeer den top T dezer paraboloïde.

Construeer van de rechte l, die door den top T gaat en welker vluchtpunt valt in het punt E, gelegen 10 zuiver onder B, de reciproke poollijn ten opzichte van de paraboloïde.