

8. Differentiatie.

Het differentieren van een functie, welke gegeven is door haar waarde in een aantal basispunten, geschiedt door het interpolerende polynoom aan die bewerking te onderwerpen. Daarbij hebben wij natuurlijk de keuze welke polynomen wij wensen te nemen.

Eerst beschouwen wij de interpolatie volgens Gregory-Newton (2.13):

$$f_p = f_0 + p \Delta_0 + \binom{p}{2} \Delta_0^2 + \binom{p}{3} \Delta_0^3 + \binom{p}{4} \Delta_0^4 + \dots \quad (8.1)$$

Omdat $x = x_0 + p w$ is $\frac{d}{dx} = \frac{1}{w} \frac{d}{dp}$. Als wij invoeren een coefficient

$$G^{j,k} = \frac{d^k \binom{p}{j}}{dp^k}, \quad \text{geldt blijkbaar:}$$

$$w^k \frac{d^k f_p}{dx^k} = G^{0,k} f_0 + G^{1,k} \Delta_0 + G^{2,k} \Delta_0^2 + G^{3,k} \Delta_0^3 + \dots \quad (8.2)$$

Om de polynomen $G^{j,k}(p)$ te berekenen, schrijven wij het beste de binomiaalcoefficienten in (8.1) uit en differentieren ze k maal. Dan vinden wij het volgende staatje:

Functie:	1 ^e Afgeleide:	2 ^e Afgeleide:	3 ^e Afgeleide:	4 ^e Afgeleide:
$G^{0,0} = 1$	$G^{0,1} = 0$	$G^{0,2} = 0$	$G^{0,3} = 0$	$G^{0,4} = 0$
$G^{1,0} = p$	$G^{1,1} = 1$	$G^{1,2} = 0$	$G^{1,3} = 0$	$G^{1,4} = 0$
$G^{2,0} = \binom{p}{2}$	$G^{2,1} = p - \frac{1}{2}$	$G^{2,2} = 1$	$G^{2,3} = 0$	$G^{2,4} = 0$
$G^{3,0} = \binom{p}{3}$	$G^{3,1} = \frac{1}{2} p^2 - p + \frac{1}{3}$	$G^{3,2} = p - 1$	$G^{3,3} = 1$	$G^{3,4} = 0$
$G^{4,0} = \binom{p}{4}$	$G^{4,1} = \frac{1}{6} p^3 - \frac{3}{4} p^2 + \frac{11}{12} p - \frac{1}{4}$	$G^{4,2} = \frac{1}{2} p^2 - \frac{3}{2} p + \frac{11}{12}$	$G^{4,3} = p - \frac{3}{2}$	$G^{4,4} = 1$
.....

De polynomen $G^{j,0}$ zijn eenvoudig de interpolatiepolynomen, dus de binomiaalcoefficienten, welke wij getabelleerd hebben op pag. 20 en 21. Op pag. 84 en 85 hebben wij de meest belangrijke polynomen, welke voor de 1^e afgeleide nodig zijn, getabelleerd.

Belangrijk zijn de waarden van de $G^{j,k}$ polynome voor $p = 0$, d.w.z. die welke nodig zijn voor differentiatie op de basispunten. Dan vinden wij:

$$w f_0' = \Delta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0^2 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 - \frac{1}{4} \Delta_0^4 + \frac{1}{5} \Delta_0^5 - \frac{1}{6} \Delta_0^6 + \dots \quad (8.3)$$

$$w^2 f_0'' = \Delta_0^2 - \Delta_0^3 + \frac{11}{12} \Delta_0^4 - \frac{5}{6} \Delta_0^5 + \frac{137}{180} \Delta_0^6 - \dots \quad (8.4)$$

$$w^3 f_0''' = \Delta_0^3 - \frac{3}{2} \Delta_0^4 + \frac{7}{4} \Delta_0^5 - \frac{15}{8} \Delta_0^6 + \dots \quad (8.5)$$

$$w^4 f_0^{(4)} = \Delta_0^4 - 2 \Delta_0^5 + \frac{17}{6} \Delta_0^6 - \dots \quad (8.6)$$

Moderne Rekenmethoden.

p	G ^{2,1}	G ^{3,1}	G ^{4,1}	G ^{5,1}	G ^{6,1}
0,00	-0,50	+0,3333333	-0,2500000	+0,2000000	-0,1666667
0,01	-0,49	+0,3233833	-0,2409082	+0,1917538	-0,1591488
0,02	-0,48	+0,3135333	-0,2319653	+0,1836807	-0,1518157
0,03	-0,47	+0,3037833	-0,2231705	+0,1757785	-0,1446644
0,04	-0,46	+0,2941333	-0,2145227	+0,1680454	-0,1376923
0,05	-0,45	+0,2845833	-0,2060208	+0,1604794	-0,1308965
0,06	-0,44	+0,2751333	-0,1976640	+0,1530785	-0,1242743
0,07	-0,43	+0,2657833	-0,1894512	+0,1458408	-0,1178232
0,08	-0,42	+0,2565333	-0,1813813	+0,1387644	-0,1115402
0,09	-0,41	+0,2473833	-0,1734535	+0,1318472	-0,1054230
0,10	-0,40	+0,2383333	-0,1656667	+0,1250875	-0,0994687
0,11	-0,39	+0,2293833	-0,1580198	+0,1184833	-0,0936748
0,12	-0,38	+0,2205333	-0,1505120	+0,1120326	-0,0880387
0,13	-0,37	+0,2117833	-0,1431422	+0,1057337	-0,0825579
0,14	-0,36	+0,2031333	-0,1359093	+0,0995847	-0,0772299
0,15	-0,35	+0,1945833	-0,1288125	+0,0935836	-0,0720521
0,16	-0,34	+0,1861333	-0,1218507	+0,0877286	-0,0670221
0,17	-0,33	+0,1777833	-0,1150228	+0,0820180	-0,0621373
0,18	-0,32	+0,1695333	-0,1083280	+0,0764497	-0,0573954
0,19	-0,31	+0,1613833	-0,1017652	+0,0710221	-0,0527940
0,20	-0,30	+0,1533333	-0,0953333	+0,0657333	-0,0483307
0,21	-0,29	+0,1453833	-0,0890315	+0,0605815	-0,0440030
0,22	-0,28	+0,1375333	-0,0828587	+0,0555649	-0,0398087
0,23	-0,27	+0,1297833	-0,0768138	+0,0506818	-0,0357455
0,24	-0,26	+0,1221333	-0,0708960	+0,0459302	-0,0318110
0,25	-0,25	+0,1145833	-0,0651042	+0,0413086	-0,0280029
0,26	-0,24	+0,1071333	-0,0594373	+0,0368151	-0,0243191
0,27	-0,23	+0,0997833	-0,0538945	+0,0324479	-0,0207573
0,28	-0,22	+0,0925333	-0,0484747	+0,0282054	-0,0173153
0,29	-0,21	+0,0853833	-0,0431768	+0,0240859	-0,0139908
0,30	-0,20	+0,0783333	-0,0380000	+0,0200875	-0,0107818
0,31	-0,19	+0,0713833	-0,0329432	+0,0162086	-0,0076861
0,32	-0,18	+0,0645333	-0,0280053	+0,0124476	-0,0047016
0,33	-0,17	+0,0577833	-0,0231855	+0,0088026	-0,0018262
0,34	-0,16	+0,0511333	-0,0184827	+0,0052721	+0,0009422
0,35	-0,15	+0,0445833	-0,0138958	+0,0018544	+0,0036056
0,36	-0,14	+0,0381333	-0,0094240	-0,0014522	+0,0061661
0,37	-0,13	+0,0317833	-0,0050662	-0,0046493	+0,0086257
0,38	-0,12	+0,0255333	-0,0008213	-0,0077385	+0,0109863
0,39	-0,11	+0,0193833	+0,0033115	-0,0107216	+0,0132500
0,40	-0,10	+0,0133333	+0,0073333	-0,0136000	+0,0154187
0,41	-0,09	+0,0073833	+0,0112452	-0,0163754	+0,0174942
0,42	-0,08	+0,0015333	+0,0150480	-0,0190495	+0,0194786
0,43	-0,07	-0,0042167	+0,0187428	-0,0216237	+0,0213736
0,44	-0,06	-0,0098667	+0,0223307	-0,0240996	+0,0231812
0,45	-0,05	-0,0154167	+0,0258125	-0,0264789	+0,0249031
0,46	-0,04	-0,0208667	+0,0291893	-0,0287631	+0,0265413
0,47	-0,03	-0,0262167	+0,0324622	-0,0309536	+0,0280975
0,48	-0,02	-0,0314667	+0,0356320	-0,0330522	+0,0295734
0,49	-0,01	-0,0366167	+0,0386998	-0,0350602	+0,0309709
0,50	0,00	-0,0416667	+0,0416667	-0,0369792	+0,0322917

p	$G^{2,1}$	$G^{3,1}$	$G^{4,1}$	$G^{5,1}$	$G^{6,1}$
0,50	0,00	-0,0416667	+0,0416667	-0,0369792	+0,0322917
0,51	+0,01	-0,0466167	+0,0445335	-0,0388107	+0,0335374
0,52	+0,02	-0,0514667	+0,0473013	-0,0405562	+0,0347099
0,53	+0,03	-0,0562167	+0,0499712	-0,0422171	+0,0358107
0,54	+0,04	-0,0608667	+0,0525440	-0,0437951	+0,0368416
0,55	+0,05	-0,0654167	+0,0550208	-0,0452914	+0,0378042
0,56	+0,06	-0,0698667	+0,0574027	-0,0467076	+0,0387000
0,57	+0,07	-0,0742167	+0,0596905	-0,0480452	+0,0395307
0,58	+0,08	-0,0784667	+0,0618853	-0,0493055	+0,0402979
0,59	+0,09	-0,0826167	+0,0639882	-0,0504899	+0,0410032
0,60	+0,10	-0,0866667	+0,0660000	-0,0516000	+0,0416480
0,61	+0,11	-0,0906167	+0,0679218	-0,0526371	+0,0422339
0,62	+0,12	-0,0944667	+0,0697547	-0,0536025	+0,0427624
0,63	+0,13	-0,0982167	+0,0714995	-0,0544978	+0,0432350
0,64	+0,14	-0,1018667	+0,0731573	-0,0553242	+0,0436532
0,65	+0,15	-0,1054167	+0,0747292	-0,0560831	+0,0440183
0,66	+0,16	-0,1088667	+0,0762160	-0,0567759	+0,0443319
0,67	+0,17	-0,1122167	+0,0776188	-0,0574039	+0,0445954
0,68	+0,18	-0,1154667	+0,0789387	-0,0579684	+0,0448100
0,69	+0,19	-0,1186167	+0,0801765	-0,0584709	+0,0449773
0,70	+0,20	-0,1216667	+0,0813333	-0,0589125	+0,0450985
0,71	+0,21	-0,1246167	+0,0824102	-0,0592946	+0,0451750
0,72	+0,22	-0,1274667	+0,0834080	-0,0596186	+0,0452082
0,73	+0,23	-0,1302167	+0,0843278	-0,0598856	+0,0451992
0,74	+0,24	-0,1328667	+0,0851707	-0,0600969	+0,0451495
0,75	+0,25	-0,1354167	+0,0859375	-0,0602539	+0,0450602
0,76	+0,26	-0,1378667	+0,0866293	-0,0603578	+0,0449327
0,77	+0,27	-0,1402167	+0,0872472	-0,0604097	+0,0447681
0,78	+0,28	-0,1424667	+0,0877920	-0,0604111	+0,0445676
0,79	+0,29	-0,1446167	+0,0882648	-0,0603630	+0,0443325
0,80	+0,30	-0,1466667	+0,0886667	-0,0602667	+0,0440640
0,81	+0,31	-0,1486167	+0,0889985	-0,0601234	+0,0437632
0,82	+0,32	-0,1504667	+0,0892613	-0,0599343	+0,0434311
0,83	+0,33	-0,1522167	+0,0894562	-0,0597005	+0,0430691
0,84	+0,34	-0,1538667	+0,0895840	-0,0594234	+0,0426782
0,85	+0,35	-0,1554167	+0,0896458	-0,0591039	+0,0422594
0,86	+0,36	-0,1568667	+0,0896427	-0,0587433	+0,0418139
0,87	+0,37	-0,1582167	+0,0895755	-0,0583428	+0,0413427
0,88	+0,38	-0,1594667	+0,0894453	-0,0579034	+0,0408468
0,89	+0,39	-0,1606167	+0,0892532	-0,0574262	+0,0403274
0,90	+0,40	-0,1616667	+0,0890000	-0,0569125	+0,0397853
0,91	+0,41	-0,1626167	+0,0886868	-0,0563633	+0,0392217
0,92	+0,42	-0,1634667	+0,0883147	-0,0557796	+0,0386374
0,93	+0,43	-0,1642167	+0,0878845	-0,0551627	+0,0380335
0,94	+0,44	-0,1648667	+0,0873973	-0,0545135	+0,0374109
0,95	+0,45	-0,1654167	+0,0868542	-0,0538331	+0,0367704
0,96	+0,46	-0,1658667	+0,0862560	-0,0531226	+0,0361132
0,97	+0,47	-0,1662167	+0,0856038	-0,0523830	+0,0354399
0,98	+0,48	-0,1664667	+0,0848987	-0,0516153	+0,0347517
0,99	+0,49	-0,1666167	+0,0841415	-0,0508207	+0,0340492
1,00	+0,50	-0,1666667	+0,0833333	-0,0500000	+0,0333333

In de eerste formule zien wij al heel duidelijk de regelmaat van de coëfficiënten. Dit is geen toeval. Om hier nader op in te gaan zullen wij een hulpmiddel ontwikkelen, dat ons ook later van veel nut zal zijn, nl. dat van de differentieoperator. Beschouw eens de voorwaartse differentie, gedefinieerd door

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n \quad ,$$

Wij beschouwen nu het symbool Δ als een zelfstandige eenheid, een operator, die uitdrukt, dat op de functie, die er achter staat een bepaalde bewerking dient uitgevoerd te worden, i.c. die van het nemen van de voorwaartse differentie. Ons hele notatiesysteem houdt er al rekening mee, dat met deze operatoren als zodanig gerekend mag worden, alsof het algebraïsche grootheden waren. Zo is een tweede differentie eenvoudig de eerste differentie van de eerste differentie, dus

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n)$$

De notatie suggereert dus al, dat $\Delta \Delta = \Delta^2$. Nu blijkt, dat, mits met enige zorg uitgevoerd, dit rekenen met operatoren als algebraïsche grootheden, altijd tot de juiste formules leidt, hoewel van mathematische kant op de wettigheid van de methode nog al wat valt aan te merken.

Nu voeren wij enige nieuwe operatoren in en herhalen nog enige bekende door de volgende definities:

$$1. \text{ Verschuivingsoperator } E: \quad E f_n = f_{n+1} \quad (8.7)$$

$$2. \text{ Voorwaartse differentieoperator } \Delta: \quad \Delta f_n = f_{n+1} - f_n \quad (8.8)$$

$$3. \text{ Centrale differentieoperator } \delta: \quad \delta f_n = f_{n+1/2} - f_{n-1/2} \quad (8.9)$$

$$4. \text{ Achterwaartse differentieoperator } \nabla: \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1} \quad (8.10)$$

$$5. \text{ Middelingoperator } \mu: \quad \mu f_n = \frac{1}{2} (f_{n+1/2} + f_{n-1/2}) \quad (8.11)$$

$$6. \text{ Differentiaaloperator } D: \quad D f_n = \left(\frac{d f}{d x} \right)_{x=x_n} \quad (8.12)$$

Hierbij moet worden bedacht, dat, willen de bovenstaande definities zin hebben, de rechterzijden van de vergelijking betekenis moeten hebben, dus dat de daarin voorkomende functiewaarden in de tabel moeten voorkomen. Dat betekent, dat in (8.7), (8.8) en (8.10) alleen gehele waarden van n in aanmerking komen, terwijl in (8.9) en (8.11) n gelijk moet zijn aan een geheel getal plus een half. De operator D van (8.12) neemt een wat uitzonderlijke plaats in, in zover het geen differentieoperator, maar een differentiaaloperator is en dus a priori nog niet bepaald is door de functietabel alleen. Denkt men zich voorlopig ook afgeleiden van de functie meegetabelleerd, dan moet n ook hier geheel zijn.

De verschuivingsoperator E neemt een uitzonderlijke plaats in onder de eerste vijf. Deze zijn immers voorlopig nog slechts grootheden, die differenties definiëren en nog niets vertellen over interpolatie. Maar voor E geldt:

$$E^p f_n = f_{n+p} \quad (8.13)$$

Immers $E^{a+b} f_n = E^a (E^b f_n) = E^a (f_{n+b}) = f_{n+a+b} = E^{a+b} f_n$, zodat inderdaad met E gehandeld is als of het een algebraïsche grootheid was, terwijl de aansluiting bij (8.7) in orde is. Een dergelijke stelling geldt niet voor de andere operatoren. Zo geldt bijv. niet, dat $\Delta^p f_n = f_{n+p} - f_n$, want dan zou gelden $\Delta f_n = \Delta^{1/2} (\Delta^{1/2} f_n) = \Delta^{1/2} (f_{n+1/2} - f_n) = (f_{n+1} - f_{n+1/2}) - (f_{n+1/2} - f_n) = f_n - 2f_{n+1/2} + f_{n+1} \neq \Delta f_n$. Alles wat met interpolatie te maken heeft moet dus in eerste instantie op E teruggevoerd worden.

Wij kunnen de andere operatoren in E uitdrukken met de volgende methode:

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = E f_n - f_n = (E - 1) f_n, \text{ dus } \Delta = E - 1$$

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1} = f_n - E^{-1} f_n = (1 - E^{-1}) f_n, \text{ dus } \nabla = 1 - E^{-1}$$

$$\delta f_n = f_{n+1/2} - f_{n-1/2} = E^{1/2} f_n - E^{-1/2} f_n = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f_n, \text{ dus } \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

$$\mu f_n = \frac{1}{2}(f_{n+1/2} + f_{n-1/2}) = \frac{1}{2}(E^{1/2} f_n + E^{-1/2} f_n) = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}) f_n, \text{ dus } \mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$$

Om D in E uit te drukken, nemen wij aan, dat de functie binnen een zeker gebied in een Taylor-reeks kan worden ontwikkeld. Dan geldt nl.:

$$E^p f_n = f_{n+p} = f_n + \frac{p w}{1!} D f_n + \frac{p^2 w^2}{2!} D^2 f_n + \frac{p^3 w^3}{3!} D^3 f_n + \dots =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{p w D}{1!} + \frac{(p w D)^2}{2!} + \frac{(p w D)^3}{3!} + \dots \right\} f_n =$$

$$= e^{p w D} f_n, \text{ dus } E^p = e^{p w D} \text{ of } E = e^{w D} \text{ of } D = \frac{1}{w} \log E.$$

In de praktijk blijkt het prettig nog een andere grootheid in te voeren, nl. $S = \frac{1}{2} w D$. In de onderstaande tabel geven wij een overzicht van de relaties tussen de operatoren.

	E	Δ	δ	∇	D	S
E =	E	= 1 + Δ	= 1 + $\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$	= 1/(1-∇)	= e ^{wD}	= e ^{2S}
Δ =	E-1	= Δ	= $\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$	= ∇/(1-∇)	= e ^{wD} - 1	= e ^{2S} - 1
δ =	E ^{1/2} - E ^{-1/2}	= Δ(1+Δ) ^{-1/2}	= δ	= ∇(1-∇) ^{-1/2}	= 2sinh($\frac{wD}{2}$)	= 2 sinh S
∇ =	1 - E ⁻¹	= Δ/(1+Δ)	= $-\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$	= ∇	= 1 - e ^{-wD}	= 1 - e ^{-2S}
D =	$\frac{1}{w} \log E$	= $\frac{1}{w} \log (1+\Delta)$	= $\frac{2}{w} \operatorname{arsinh} \frac{1}{2} \delta$	= $\frac{1}{w} \log(1-\nabla)$	D	= 2S/w
S =	$\frac{1}{2} \log E$	= $\frac{1}{2} \log (1+\Delta)$	= $\operatorname{arsinh} \frac{1}{2} \delta$	= $-\frac{1}{2} \log(1-\nabla)$	$\frac{w}{2} D$	= S
μ =	$\frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$	= $(1 + \frac{1}{2}\Delta)(1+\Delta)^{-1/2}$	= $\sqrt{(1 + \frac{1}{4}\delta^2)}$	= $(1 - \frac{1}{2}\nabla)(1-\nabla)^{-1/2}$	= $\cosh \frac{1}{2} wD$	= cosh S

Ook kan men allerlei nuttige relaties vinden tussen meer dan twee operatoren, bijv.

$$\Delta = E \nabla, \quad \nabla = E^{-1} \Delta, \quad \delta = E^{-1/2} \Delta = E^{1/2} \nabla, \quad \delta^2 = \Delta \nabla,$$

$$\mu \delta = \frac{1}{2} (E - E^{-1}) = \frac{1}{2} (\Delta + \nabla) = \sinh w D = \sinh 2 S,$$

$$E^{1/2} = \mu + \frac{1}{2} \delta, \quad E^{-1/2} = \mu - \frac{1}{2} \delta, \quad \mu^2 = 1 + \frac{1}{4} \delta^2, \text{ enz.}$$

Als eerste voorbeeld van toepassing van operatoren geven wij nog eens de afleiding van een bekende formule:

$$f_p = E^p f_0 = (1 + \Delta)^p f_0 = 1 + p \Delta_0 + \binom{p}{2} \Delta_0^2 + \binom{p}{3} \Delta_0^3 + \dots,$$

wat dus de formule van Gregory-Newton is! Met wat meer rekentechniek kan men zo ook de andere interpolatieformules afleiden.

Om nu de formules (8.3) en volgende te vinden gaan wij als volgt te werk:

$$w D = \log (1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \frac{\Delta^6}{6} + \dots$$

$$w^2 D^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \frac{137}{180} \Delta^6 - \dots$$

$$w^3 D^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + \frac{7}{4} \Delta^5 - \frac{15}{8} \Delta^6 + \dots$$

$$w^4 D^4 = \Delta^4 - 2 \Delta^5 + \frac{17}{6} \Delta^6 - \dots$$

Door links en rechts met f_0 te vermenigvuldigen volgen (8.3) enz. Door naar p te integreren kan men uit de bovenstaande coëfficiënten de $G^{j,k}$ -polynomen afleiden.

Nu gaan wij dezelfde taktiek toepassen op de centrale differentie-reeksen. Wij kiezen daarvoor allereerst de formule van Bessel omdat die ons het best bekend is. Wij kunnen ook die van Everett kiezen, dat maakt geen essentieel verschil, want beide formules hebben hun basispunten symmetrisch rond het punt $p = \frac{1}{2}$. Voor interpolatie zijn deze reeksen dus ook het best geschikt in de buurt van $p = \frac{1}{2}$. Maar ook voor p in de buurt van $p = 0$ en $p = 1$ zijn deze formules goed bruikbaar, want daar is de afwijking van de functiewaarde t.o.v. de basiswaarden toch gering. Maar dit argument geldt niet meer voor differentiatie! Daarom moeten wij erop bedacht zijn, dat onze resultaten beter geslaagd zullen zijn in de buurt van het intervalmidden dan in de buurt van de basispunten. Daarom zullen wij de formule van Bessel wat anders schrijven, dan wij gewoon zijn. Wij zullen nl. schrijven $p = \frac{1}{2} + m$ en dan luidt de formule:

$$f_p = f_{\frac{1}{2}+m} = \delta_{\frac{1}{2}}^0 + m \delta_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2!} \delta_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{m(m^2 - \frac{1}{4})}{3!} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \frac{(m^2 - \frac{1}{4})(m^2 - \frac{9}{4})}{4!} \delta_{\frac{1}{2}}^4 + \frac{m(m^2 - \frac{1}{4})(m^2 - \frac{9}{4})}{5!} \delta_{\frac{1}{2}}^5 + \frac{(m^2 - \frac{1}{4})(m^2 - \frac{9}{4})(m^2 - \frac{25}{4})}{6!} \delta_{\frac{1}{2}}^6 + \dots \quad (8.14)$$

Consequent hebben wij geschreven $\delta_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$, $\delta_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2}(\delta_0^2 + \delta_1^2)$, enz.

Deze formule kunnen wij weer een aantal malen differentieren waarna volgt:

$$w^k f_{\frac{1}{2}+m}^{(k)} = B^{0,k} \delta_{\frac{1}{2}}^0 + B^{1,k} \delta_{\frac{1}{2}}^1 + B^{2,k} \delta_{\frac{1}{2}}^2 + B^{3,k} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + B^{4,k} \delta_{\frac{1}{2}}^4 + B^{5,k} \delta_{\frac{1}{2}}^5 + B^{6,k} \delta_{\frac{1}{2}}^6 + \dots \quad (8.15)$$

Na uitschrijving van de coëfficiënten in (8.14) vinden wij dan het volgende schema:

Diff. Functie	1^e Afgeleide:	2^e Afgeleide:	3^e Afgeleide:	4^e Afgeleide:
$\delta_{\frac{1}{2}}^0 B^{0,0} = 1$	$B^{0,1} = 0$	$B^{0,2} = 0$	$B^{0,3} = 0$	$B^{0,4} = 0$
$\delta_{\frac{1}{2}}^1 B^{1,0} = m$	$B^{1,1} = 1$	$B^{1,2} = 0$	$B^{1,3} = 0$	$B^{1,4} = 0$
$\delta_{\frac{1}{2}}^2 B^{2,0} = \frac{m^2}{2} - \frac{1}{8}$	$B^{2,1} = m$	$B^{2,2} = 1$	$B^{2,3} = 0$	$B^{2,4} = 0$
$\delta_{\frac{1}{2}}^3 B^{3,0} = \frac{m^3}{6} - \frac{m}{24}$	$B^{3,1} = \frac{m^2}{2} - \frac{1}{24}$	$B^{3,2} = m$	$B^{3,3} = 1$	$B^{3,4} = 0$
$\delta_{\frac{1}{2}}^4 B^{4,0} = \frac{m^4}{24} - \frac{5m^2}{48} + \frac{3}{128}$	$B^{4,1} = \frac{m^3}{6} - \frac{5m}{24}$	$B^{4,2} = \frac{m^2}{2} - \frac{5}{24}$	$B^{4,3} = m$	$B^{4,4} = 1$
$\delta_{\frac{1}{2}}^5 B^{5,0} = \frac{m^5}{120} - \frac{m^3}{48} + \frac{3m}{640}$	$B^{5,1} = \frac{m^4}{24} - \frac{m^2}{16} + \frac{3}{640}$	$B^{5,2} = \frac{m^3}{6} - \frac{m}{8}$	$B^{5,3} = \frac{m^2}{2} - \frac{1}{8}$	$B^{5,4} = m$
$\delta_{\frac{1}{2}}^6 B^{6,0} = \frac{m^6}{720} - \frac{7m^4}{576} + \frac{7m^2}{144} - \frac{7}{24}$	$B^{6,1} = \frac{m^5}{120} - \frac{7m^3}{144} + \frac{7m}{24} - \frac{7}{24}$	$B^{6,2} = \frac{m^4}{24} - \frac{7m^2}{48} + \frac{m^2}{6} - \frac{7m}{24}$	$B^{6,3} = \frac{m^3}{6} - \frac{7m}{24}$	$B^{6,4} = \frac{m^2}{2} - \frac{7}{24}$
$+ \frac{259m^2}{11520} - \frac{15}{3072}$	$+ \frac{259m}{5760}$	$+ \frac{259}{5760}$		

Op pag. 91 en 92 hebben wij enkele van deze polynomen getabelleerd, nl. $B^{2,1}$, $B^{3,1}$, $B^{4,1}$, $B^{5,1}$. Daaruit zijn trouwens eenvoudig de leidende polynomen voor de hogere afgeleiden af te leiden. Immers:

$$B^{4,2} = B^{3,1} - \frac{1}{6} \quad B^{5,3} = B^{3,1} - \frac{1}{12} \quad B^{6,4} = B^{3,1} - \frac{1}{4}$$

$$B^{5,2} = B^{4,1} + \frac{m}{12} \quad B^{6,3} = B^{4,1} - \frac{m}{12}$$

Belangrijk is het geval $m = 0$, d.w.z. differentiatie ter plaatse van de intervalmiddens. Dan geldt:

$$f_{1/2} = \delta_{1/2}^0 - \frac{1}{8} \delta_{1/2}^2 + \frac{3}{128} \delta_{1/2}^4 - \frac{5}{1024} \delta_{1/2}^6 + \frac{35}{32768} \delta_{1/2}^8 - \frac{63}{262144} \delta_{1/2}^{10} + \dots \quad (8.16)$$

$$w f'_{1/2} = \delta_{1/2}^1 - \frac{1}{24} \delta_{1/2}^3 + \frac{3}{640} \delta_{1/2}^5 - \frac{5}{7168} \delta_{1/2}^7 + \frac{35}{294912} \delta_{1/2}^9 - \dots \quad (8.17)$$

$$w^2 f''_{1/2} = \delta_{1/2}^2 - \frac{5}{24} \delta_{1/2}^4 + \frac{259}{5760} \delta_{1/2}^6 - \frac{3229}{322560} \delta_{1/2}^8 + \frac{117469}{51609600} \delta_{1/2}^{10} - \dots \quad (8.18)$$

$$w^3 f'''_{1/2} = \delta_{1/2}^3 - \frac{1}{8} \delta_{1/2}^5 + \frac{37}{1920} \delta_{1/2}^7 - \frac{3229}{967680} \delta_{1/2}^9 + \dots \quad (8.19)$$

$$w^4 f^{(4)}_{1/2} = \delta_{1/2}^4 - \frac{7}{24} \delta_{1/2}^6 + \frac{47}{640} \delta_{1/2}^8 - \frac{17281}{987680} \delta_{1/2}^{10} + \dots \quad (8.20)$$

Vervolgens leiden wij formules af, welke juist aan de intervaluiteinden beter geschikt zijn. Daartoe gaan wij natuurlijk uit van de formule van Stirling, omdat de basispunten in dat geval symmetrisch om $p = 0$ gelegen zijn. Wij schrijven (2.21) over in de vorm:

$$f_p = f_0 + p \delta_0 + \frac{p^2}{2!} \delta_0^2 + \frac{p(p^2-1)}{3!} \delta_0^3 + \frac{p^2(p^2-1)}{4!} \delta_0^4 + \frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{5!} \delta_0^5 + \\ + \frac{p^2(p^2-1)(p^2-4)}{6!} \delta_0^6 + \dots \quad (8.21)$$

Door weer een aantal malen te differentieren gaat dit over in:

$$w^k f_p^{(k)} = S^{0,k} f_0 + S^{1,k} \delta_0 + S^{2,k} \delta_0^2 + S^{3,k} \delta_0^3 + S^{4,k} \delta_0^4 + S^{5,k} \delta_0^5 + S^{6,k} \delta_0^6 + \dots \quad (8.22)$$

Na uitschrijven vinden wij het volgende schema:

p	B ^{2,1}	B ^{3,1}	B ^{4,1}	B ^{5,1}
0,00	-0,50	+0,08333	+0,08333	-0,00833
0,01	-0,49	+0,07838	+0,08248	-0,00792
0,02	-0,48	+0,07353	+0,08157	-0,00750
0,03	-0,47	+0,06878	+0,08061	-0,00709
0,04	-0,46	+0,06413	+0,07961	-0,00667
0,05	-0,45	+0,05958	+0,07856	-0,00626
0,06	-0,44	+0,05513	+0,07747	-0,00585
0,07	-0,43	+0,05078	+0,07633	-0,00544
0,08	-0,42	+0,04653	+0,07515	-0,00504
0,09	-0,41	+0,04238	+0,07393	-0,00464
0,10	-0,40	+0,03833	+0,07267	-0,00425
0,11	-0,39	+0,03438	+0,07136	-0,00385
0,12	-0,38	+0,03053	+0,07002	-0,00347
0,13	-0,37	+0,02678	+0,06864	-0,00309
0,14	-0,36	+0,02313	+0,06722	-0,00271
0,15	-0,35	+0,01958	+0,06577	-0,00234
0,16	-0,34	+0,01613	+0,06428	-0,00198
0,17	-0,33	+0,01278	+0,06276	-0,00162
0,18	-0,32	+0,00953	+0,06121	-0,00128
0,19	-0,31	+0,00638	+0,05962	-0,00093
0,20	-0,30	+0,00333	+0,05800	-0,00060
0,21	-0,29	+0,00038	+0,05635	-0,00027
0,22	-0,28	-0,00247	+0,05467	+0,00004
0,23	-0,27	-0,00522	+0,05297	+0,00035
0,24	-0,26	-0,00787	+0,05124	+0,00065
0,25	-0,25	-0,01042	+0,04948	+0,00094
0,26	-0,24	-0,01287	+0,04770	+0,00123
0,27	-0,23	-0,01522	+0,04589	+0,00150
0,28	-0,22	-0,01747	+0,04406	+0,00176
0,29	-0,21	-0,01962	+0,04221	+0,00201
0,30	-0,20	-0,02167	+0,04033	+0,00225
0,31	-0,19	-0,02362	+0,03844	+0,00249
0,32	-0,18	-0,02547	+0,03653	+0,00271
0,33	-0,17	-0,02722	+0,03460	+0,00292
0,34	-0,16	-0,02887	+0,03265	+0,00311
0,35	-0,15	-0,03042	+0,03069	+0,00330
0,36	-0,14	-0,03187	+0,02871	+0,00348
0,37	-0,13	-0,03322	+0,02672	+0,00364
0,38	-0,12	-0,03447	+0,02471	+0,00380
0,39	-0,11	-0,03562	+0,02269	+0,00394
0,40	-0,10	-0,03667	+0,02067	+0,00407
0,41	-0,09	-0,03762	+0,01863	+0,00418
0,42	-0,08	-0,03847	+0,01658	+0,00429
0,43	-0,07	-0,03922	+0,01453	+0,00438
0,44	-0,06	-0,03987	+0,01246	+0,00446
0,45	-0,05	-0,04042	+0,01040	+0,00453
0,46	-0,04	-0,04087	+0,00832	+0,00459
0,47	-0,03	-0,04122	+0,00625	+0,00463
0,48	-0,02	-0,04147	+0,00417	+0,00466
0,49	-0,01	-0,04162	+0,00208	+0,00468
0,50	0,00	-0,04167	0,00000	+0,00469

p	B ^{2,1}	B ^{3,1}	B ^{4,1}	B ^{5,1}
0,50	0,00	-0,04167	0,00000	+0,00469
0,51	+0,01	-0,04162	-0,00208	+0,00468
0,52	+0,02	-0,04147	-0,00417	+0,00466
0,53	+0,03	-0,04122	-0,00625	+0,00463
0,54	+0,04	-0,04087	-0,00832	+0,00459
0,55	+0,05	-0,04042	-0,01040	+0,00453
0,56	+0,06	-0,03987	-0,01246	+0,00446
0,57	+0,07	-0,03922	-0,01453	+0,00438
0,58	+0,08	-0,03847	-0,01658	+0,00429
0,59	+0,09	-0,03762	-0,01863	+0,00418
0,60	+0,10	-0,03667	-0,02067	+0,00407
0,61	+0,11	-0,03562	-0,02269	+0,00394
0,62	+0,12	-0,03447	-0,02471	+0,00380
0,63	+0,13	-0,03322	-0,02672	+0,00364
0,64	+0,14	-0,03187	-0,02871	+0,00348
0,65	+0,15	-0,03042	-0,03069	+0,00330
0,66	+0,16	-0,02887	-0,03265	+0,00311
0,67	+0,17	-0,02722	-0,03460	+0,00292
0,68	+0,18	-0,02547	-0,03653	+0,00271
0,69	+0,19	-0,02362	-0,03844	+0,00249
0,70	+0,20	-0,02167	-0,04033	+0,00225
0,71	+0,21	-0,01962	-0,04221	+0,00201
0,72	+0,22	-0,01747	-0,04406	+0,00176
0,73	+0,23	-0,01522	-0,04589	+0,00150
0,74	+0,24	-0,01287	-0,04770	+0,00123
0,75	+0,25	-0,01042	-0,04948	+0,00094
0,76	+0,26	-0,00787	-0,05124	+0,00065
0,77	+0,27	-0,00522	-0,05297	+0,00035
0,78	+0,28	-0,00247	-0,05467	+0,00004
0,79	+0,29	+0,00038	-0,05635	-0,00027
0,80	+0,30	+0,00333	-0,05800	-0,00060
0,81	+0,31	+0,00638	-0,05962	-0,00093
0,82	+0,32	+0,00953	-0,06121	-0,00128
0,83	+0,33	+0,01278	-0,06276	-0,00162
0,84	+0,34	+0,01613	-0,06428	-0,00198
0,85	+0,35	+0,01958	-0,06577	-0,00234
0,86	+0,36	+0,02313	-0,06722	-0,00271
0,87	+0,37	+0,02678	-0,06864	-0,00309
0,88	+0,38	+0,03053	-0,07002	-0,00347
0,89	+0,39	+0,03438	-0,07136	-0,00385
0,90	+0,40	+0,03833	-0,07267	-0,00425
0,91	+0,41	+0,04238	-0,07393	-0,00464
0,92	+0,42	+0,04653	-0,07515	-0,00504
0,93	+0,43	+0,05078	-0,07633	-0,00544
0,94	+0,44	+0,05513	-0,07747	-0,00585
0,95	+0,45	+0,05958	-0,07856	-0,00626
0,96	+0,46	+0,06413	-0,07961	-0,00667
0,97	+0,47	+0,06878	-0,08061	-0,00709
0,98	+0,48	+0,07353	-0,08157	-0,00750
0,99	+0,49	+0,07838	-0,08248	-0,00792
1,00	+0,50	+0,08333	-0,08333	-0,00833

Diff.:	Functie:	1 ^e Afgeleide:	2 ^e Afgeleide:	3 ^e Afgeleide:	4 ^e Afgeleide:
f_0	$s^{0,0} = 1$	$s^{0,1} = 0$	$s^{0,2} = 0$	$s^{0,3} = 0$	$s^{0,4} = 0$
δ_0	$s^{1,0} = p$	$s^{1,1} = 1$	$s^{1,2} = 0$	$s^{1,3} = 0$	$s^{1,4} = 0$
δ_0^2	$s^{2,0} = \frac{p^2}{2}$	$s^{2,1} = p$	$s^{2,2} = 1$	$s^{2,3} = 0$	$s^{2,4} = 0$
δ_0^3	$s^{3,0} = \frac{p^3}{6} - \frac{p}{6}$	$s^{3,1} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{6}$	$s^{3,2} = p$	$s^{3,3} = 1$	$s^{3,4} = 0$
δ_0^4	$s^{4,0} = \frac{p^4}{24} - \frac{p^2}{24}$	$s^{4,1} = \frac{p^3}{6} - \frac{p}{12}$	$s^{4,2} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{12}$	$s^{4,3} = p$	$s^{4,4} = 1$
δ_0^5	$s^{5,0} = \frac{p^5}{120} - \frac{p^3}{24} + \frac{p}{30}$	$s^{5,1} = \frac{p^4}{24} - \frac{p^2}{8} + \frac{1}{30}$	$s^{5,2} = \frac{p^3}{6} - \frac{p}{4}$	$s^{5,3} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{4}$	$s^{5,4} = p$
δ_0^6	$s^{6,0} = \frac{p^6}{720} - \frac{p^4}{144} + \frac{p^2}{180}$	$s^{6,1} = \frac{p^5}{120} - \frac{p^3}{36} + \frac{p}{90}$	$s^{6,2} = \frac{p^4}{24} - \frac{p^2}{12} + \frac{1}{90}$	$s^{6,3} = \frac{p^3}{6} - \frac{p}{6}$	$s^{6,4} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{6}$

Op pag. 94 & 95 hebben wij weer enige van deze polynomen getabelleerd, nl. $s^{2,1}$, $s^{3,1}$, $s^{4,1}$ en $s^{5,1}$. Er gelden weer eenvoudige relaties, als:

$$s^{4,2} = s^{3,1} + \frac{1}{12} \qquad s^{5,3} = s^{3,1} - \frac{1}{12} \qquad s^{6,4} = s^{3,1}$$

$$s^{5,2} = s^{4,1} - \frac{p}{6} \qquad s^{6,3} = s^{4,1} - \frac{p}{12}$$

welke ons in staat stellen, uit de getabelleerde polynomen uit het hoofd rekenend de leidende polynomen van de hogere afgeleiden te vinden.

Voor $p = 0$ vinden wij de belangrijke formules van de afgeleiden ter plaatse van de basispunten, nl.:

$$w f'_0 = \delta_0 - \frac{1}{6} \delta_0^3 + \frac{1}{30} \delta_0^5 - \frac{1}{140} \delta_0^7 + \frac{1}{630} \delta_0^9 - \dots \qquad (8.23)$$

$$w^2 f''_0 = \delta_0^2 - \frac{1}{12} \delta_0^4 + \frac{1}{90} \delta_0^6 - \frac{1}{560} \delta_0^8 + \frac{1}{3150} \delta_0^{10} - \dots \qquad (8.24)$$

$$w^3 f'''_0 = \delta_0^3 - \frac{1}{4} \delta_0^5 + \frac{7}{120} \delta_0^7 - \frac{41}{3024} \delta_0^9 + \dots \qquad (8.25)$$

$$w^4 f^{(4)}_0 = \delta_0^4 - \frac{1}{6} \delta_0^6 + \frac{7}{240} \delta_0^8 - \frac{41}{7560} \delta_0^{10} + \dots \qquad (8.26)$$

Nu gaan wij weer eens zien, hoe wij deze formules met operatorenmethodes af kunnen leiden.

Daartoe gaan wij uit van de ontwikkeling van de differentiaaloperator D naar de centrale differentieoperator δ . Volgens het lijstje is:

$$wD = 2 \operatorname{arsinh} \frac{\delta}{2} .$$

Om de $\operatorname{arsinh} \frac{\delta}{2}$ naar δ te ontwikkelen diene even het volgende:

$$y = \operatorname{arsinh} x \text{ betekent } x = \sinh y, \text{ dus } \frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1 + x^2}, \text{ dus}$$

p	$s^{2,1}$	$s^{3,1}$	$s^{4,1}$	$s^{5,1}$
0,00	0,00	-0,16667	0,00000	+0,03333
0,01	+0,01	-0,16662	-0,00083	+0,03332
0,02	+0,02	-0,16647	-0,00167	+0,03328
0,03	+0,03	-0,16622	-0,00250	+0,03322
0,04	+0,04	-0,16587	-0,00332	+0,03313
0,05	+0,05	-0,16542	-0,00415	+0,03302
0,06	+0,06	-0,16487	-0,00496	+0,03288
0,07	+0,07	-0,16422	-0,00578	+0,03272
0,08	+0,08	-0,16347	-0,00658	+0,03254
0,09	+0,09	-0,16262	-0,00738	+0,03232
0,10	+0,10	-0,16167	-0,00817	+0,03209
0,11	+0,11	-0,16062	-0,00894	+0,03183
0,12	+0,12	-0,15947	-0,00971	+0,03154
0,13	+0,13	-0,15822	-0,01047	+0,03123
0,14	+0,14	-0,15687	-0,01121	+0,03090
0,15	+0,15	-0,15542	-0,01194	+0,03054
0,16	+0,16	-0,15387	-0,01265	+0,03016
0,17	+0,17	-0,15222	-0,01335	+0,02976
0,18	+0,18	-0,15047	-0,01403	+0,02933
0,19	+0,19	-0,14862	-0,01469	+0,02888
0,20	+0,20	-0,14667	-0,01533	+0,02840
0,21	+0,21	-0,14462	-0,01596	+0,02790
0,22	+0,22	-0,14247	-0,01656	+0,02738
0,23	+0,23	-0,14022	-0,01714	+0,02684
0,24	+0,24	-0,13787	-0,01770	+0,02627
0,25	+0,25	-0,13542	-0,01823	+0,02568
0,26	+0,26	-0,13287	-0,01874	+0,02507
0,27	+0,27	-0,13022	-0,01922	+0,02444
0,28	+0,28	-0,12747	-0,01967	+0,02379
0,29	+0,29	-0,12462	-0,02010	+0,02312
0,30	+0,30	-0,12167	-0,02050	+0,02242
0,31	+0,31	-0,11862	-0,02087	+0,02171
0,32	+0,32	-0,11547	-0,02121	+0,02097
0,33	+0,33	-0,11222	-0,02151	+0,02021
0,34	+0,34	-0,10887	-0,02178	+0,01944
0,35	+0,35	-0,10542	-0,02202	+0,01865
0,36	+0,36	-0,10187	-0,02222	+0,01783
0,37	+0,37	-0,09822	-0,02239	+0,01700
0,38	+0,38	-0,09447	-0,02252	+0,01615
0,39	+0,39	-0,09062	-0,02261	+0,01528
0,40	+0,40	-0,08667	-0,02267	+0,01440
0,41	+0,41	-0,08262	-0,02268	+0,01350
0,42	+0,42	-0,07847	-0,02265	+0,01258
0,43	+0,43	-0,07422	-0,02258	+0,01165
0,44	+0,44	-0,06987	-0,02247	+0,01070
0,45	+0,45	-0,06542	-0,02231	+0,00973
0,46	+0,46	-0,06087	-0,02211	+0,00875
0,47	+0,47	-0,05622	-0,02186	+0,00775
0,48	+0,48	-0,05147	-0,02157	+0,00675
0,49	+0,49	-0,04662	-0,02123	+0,00572
0,50	+0,50	-0,04167	-0,02083	+0,00469

p	$s^{2,1}$	$s^{3,1}$	$s^{4,1}$	$s^{5,1}$
0,50	+0,50	-0,04167	-0,02083	+0,00469
0,51	+0,51	-0,03662	-0,02039	+0,00364
0,52	+0,52	-0,03147	-0,01990	+0,00258
0,53	+0,53	-0,02622	-0,01935	+0,00151
0,54	+0,54	-0,02087	-0,01876	+0,00043
0,55	+0,55	-0,01542	-0,01810	-0,00067
0,56	+0,56	-0,00987	-0,01740	-0,00177
0,57	+0,57	-0,00422	-0,01663	-0,00288
0,58	+0,58	+0,00153	-0,01581	-0,00400
0,59	+0,59	+0,00738	-0,01494	-0,00513
0,60	+0,60	+0,01333	-0,01400	-0,00627
0,61	+0,61	+0,01938	-0,01300	-0,00741
0,62	+0,62	+0,02553	-0,01195	-0,00856
0,63	+0,63	+0,03178	-0,01083	-0,00972
0,64	+0,64	+0,03813	-0,00964	-0,01088
0,65	+0,65	+0,04458	-0,00840	-0,01204
0,66	+0,66	+0,05113	-0,00708	-0,01321
0,67	+0,67	+0,05778	-0,00571	-0,01438
0,68	+0,68	+0,06453	-0,00426	-0,01556
0,69	+0,69	+0,07138	-0,00275	-0,01673
0,70	+0,70	+0,07833	-0,00117	-0,01791
0,71	+0,71	+0,08538	+0,00049	-0,01909
0,72	+0,72	+0,09253	+0,00221	-0,02027
0,73	+0,73	+0,09978	+0,00400	-0,02145
0,74	+0,74	+0,10713	+0,00587	-0,02262
0,75	+0,75	+0,11458	+0,00781	-0,02380
0,76	+0,76	+0,12213	+0,00983	-0,02497
0,77	+0,77	+0,12978	+0,01192	-0,02613
0,78	+0,78	+0,13753	+0,01409	-0,02729
0,79	+0,79	+0,14538	+0,01634	-0,02845
0,80	+0,80	+0,15333	+0,01867	-0,02960
0,81	+0,81	+0,16138	+0,02107	-0,03074
0,82	+0,82	+0,16953	+0,02356	-0,03188
0,83	+0,83	+0,17778	+0,02613	-0,03300
0,84	+0,84	+0,18613	+0,02878	-0,03412
0,85	+0,85	+0,19458	+0,03152	-0,03523
0,86	+0,86	+0,20313	+0,03434	-0,03632
0,87	+0,87	+0,21178	+0,03725	-0,03741
0,88	+0,88	+0,22053	+0,04025	-0,03848
0,89	+0,89	+0,22938	+0,04333	-0,03954
0,90	+0,90	+0,23833	+0,04650	-0,04058
0,91	+0,91	+0,24738	+0,04976	-0,04161
0,92	+0,92	+0,25653	+0,05311	-0,04262
0,93	+0,93	+0,26578	+0,05656	-0,04361
0,94	+0,94	+0,27513	+0,06010	-0,04459
0,95	+0,95	+0,28458	+0,06373	-0,04554
0,96	+0,96	+0,29413	+0,06746	-0,04648
0,97	+0,97	+0,30378	+0,07128	-0,04739
0,98	+0,98	+0,31353	+0,07520	-0,04828
0,99	+0,99	+0,32338	+0,07922	-0,04915
1,00	+1,00	+0,33333	+0,08333	-0,05000

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1} x^2 + \binom{-1/2}{2} x^4 + \binom{-1/2}{3} x^6 + \binom{-1/2}{4} x^8 + \dots$$

$$y = x + \frac{1}{3} \binom{-1/2}{1} x^3 + \frac{1}{5} \binom{-1/2}{2} x^5 + \frac{1}{7} \binom{-1/2}{3} x^7 + \dots$$

$$= x + \frac{1}{3} \cdot \binom{-1/2}{1} x^3 + \frac{1}{5} \frac{(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2} x^5 + \frac{1}{7} \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^7 + \dots$$

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \frac{1}{9} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^9 - \dots$$

Dus is ook:

$$w_D = \delta - \frac{1}{24} \delta^3 + \frac{3}{640} \delta^5 - \frac{5}{7168} \delta^7 + \frac{35}{294912} \delta^9 - \dots$$

$$w_D^2 = \delta^2 - \frac{1}{12} \delta^4 + \frac{1}{90} \delta^6 - \frac{1}{560} \delta^8 + \frac{1}{3150} \delta^{10} - \dots$$

$$w_D^3 = \delta^3 - \frac{1}{8} \delta^5 + \frac{37}{1920} \delta^7 - \frac{3229}{967680} \delta^9 + \dots$$

$$w_D^4 = \delta^4 - \frac{1}{6} \delta^6 + \frac{7}{240} \delta^8 - \frac{41}{7560} \delta^{10} + \dots$$

Door de eerste en derde vergelijking vermenigvuldigen met $f_{1/2}$ en door de tweede en vierde te vermenigvuldigen met f_0 vinden wij resp. (8.17) en (8.19) en (8.24) en (8.26). Om de ontbrekende vergelijkingen te vinden, moeten wij een kunstje toepassen, nl. vermenigvuldigen met $\frac{1}{\mu} \cdot \mu$. De tweede μ laten wij staan, maar de $1/\mu$ ontwikkelen wij naar δ :

$$\frac{1}{\mu} = (1 + \frac{1}{4} \delta^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{8} \delta^2 + \frac{3}{128} \delta^4 - \frac{5}{512} \delta^6 + \frac{35}{32768} \delta^8 - \dots$$

Dan is dus bijv.

$$w_D = \frac{1}{\mu} w_D \cdot \mu = (1 - \frac{1}{8} \delta^2 + \frac{3}{128} \delta^4 - \frac{5}{512} \delta^6 + \frac{35}{32768} \delta^8 - \dots) \cdot$$

$$(\delta - \frac{1}{24} \delta^3 + \frac{3}{640} \delta^5 - \frac{5}{7168} \delta^7 + \frac{35}{294912} \delta^9 - \dots) \cdot \mu =$$

$$= \mu \delta - \frac{1}{6} \mu \delta^3 + \frac{1}{30} \mu \delta^5 - \frac{1}{140} \mu \delta^7 + \frac{1}{630} \mu \delta^9 - \dots$$

Door nu links en rechts te vermenigvuldigen met f_0 vinden wij (8.23) enz.

Door de vergelijkingen (8.17) en (8.20) en (8.23) - (8.26) met elkaar te vergelijken, ontdekken wij een belangrijk feit, nl. dat de reeksen voor oneven afgeleiden beter convergeren in het intervalmidden dan op de basispunten, terwijl juist het omgekeerde het geval is voor de even afgeleiden. De best convergerende reeksen zijn juist die welke ongedwongen uit de operatorontwikkelingen te voorschijn kwamen. Natuurlijk kan men niet altijd kiezen, waar men de afgeleide wenst te vinden. Maar toch zijn er vele gevallen, waarin men er gebruik van kan

maken. Dit hangt ten nauwste samen met een andere merkwaardigheid van het numeriek differentieren. Tot nu toe was het bij het interpoleren altijd zo, dat verfijning van het interval van de tafel, versnelling van de convergentie en verbetering van de precisie met zich meebracht. Dit eerste blijft gelden bij differentiatie, maar het laatste niet! Dat komt, omdat de formules nooit $f^{(k)}(x)$ leveren, maar $w^k \cdot f^{(k)}(x)$. Om $f^{(k)}(x)$ te bepalen, moet dus nog gedeeld worden door w^k en dit is bij klein interval een klein getal. Dat komt, omdat wat door de formule geleverd wordt ook snel daalt met kleinere w . Dit verlies aan significante cijfers is ernstig maar min of meer een noodzakelijk kwaad. De kunst is om het interval zo groot te kiezen, dat de reeksen nog voldoende convergeren, terwijl het verlies aan significante cijfers tot een minimum beperkt blijft. Dit betekent meestal, dat wij voor differentiatie een veel groter interval wensen dan waarin de tafel berekend is. Dat is niet erg, want men behoeft alleen een aantal tafelwaarden buiten beschouwing te laten en met superdifferenties te werken, vooropgesteld natuurlijk, dat de tafel lang genoeg is om zulk een intervalvergroting toe te laten, wat des te zwaarder weegt, omdat men natuurlijk met groter interval ook meer basispunten nodig heeft.

Stel nu bijv. dat men een eerste afgeleide moet bepalen en men heeft bepaald, dat dit dient te geschieden met een tienmaal zo grof interval. Kies dan de basispunten zo gelegen, dat het punt, waarin wij de afgeleide wensen te kennen zo goed mogelijk in het nieuwe intervalmidden ligt.

Het kan ook zijn dat wij de k -de afgeleide van een functie moeten berekenen, terwijl de functie zelf eenvoudig is, doch de gewenste afgeleide zeer ingewikkeld. Dan loont het vaak de moeite de functie in een groot aantal cijfers te berekenen en de gewenste differentiatie numeriek i.p.v. analytisch uit te voeren. Het grote aantal cijfers is vaak nauwelijks een bezwaar. Dit systeem pasten wij met succes toe. Wij moesten een ingewikkelde functie en haar nog veel ingewikkelder afgeleide berekenen, beide in vijf cijfers. Wij berekenden de functie in acht cijfers, wat alleen betekende wat meer cijfers inslaan op de machine en differentieerden numeriek.

Bij het oplossen van bepaalde types differentiaalvergelijkingen zal het van belang zijn voor de leidende differenties de functiewaarden zelf te plaatsen. Daarbij hebben wij practisch altijd de afgeleiden op de basispunten nodig. Zo is bijv.:

$$w f'_0 = -\frac{1}{2} f_{-1} + \frac{1}{2} f_1 - \left(\frac{1}{6} \delta_0^3 - \frac{1}{30} \delta_0^5 + \frac{1}{140} \delta_0^7 - \dots \right) \quad (8.27)$$

$$w^2 f''_0 = f_{-1} - 2 f_0 + f_1 - \left(\frac{1}{12} \delta_0^4 - \frac{1}{90} \delta_0^6 + \frac{1}{560} \delta_0^8 - \dots \right) \quad (8.28)$$

Daarbij noemen wij de eerste termen rechts de hoofdwaarde en de term tussen haakjes de differentiecorrectie. Deze correctie zal i.h.a. klein zijn. Het belang van deze schrijfwijze zal later duidelijk worden.

Vervolgens zullen wij, even als wij dit deden bij interpolatie, het asymptotisch gedrag van de interpolatiepolynomen nagaan. Wij gaan daartoe uit van de in paragraaf 4 ontwikkelde asymptotische voorstellingen van de interpolatiecoëfficiënten en differentieren deze k -maal.

Allereerst de Gregory-Newton formule. Met de notaties van (8.2) volgt uit (4.4):

$$G^{k,0}(p) = \binom{p}{k} \sim \frac{(-1)^{k+1}}{k} p! k^{-p} \sin \pi p \quad (8.29)$$

Dit moet een aantal malen naar p worden gedifferentieerd. Daartoe schrijven wij met voordeel

$$p! k^{-p} \sin \pi p = \operatorname{Im} e^{\log p! - \log k^p + i\pi p}.$$

De differentiatie kan nu vlot geschieden met invoering van de psi-functie $\Psi(p) = \frac{d \log p!}{dp}$.

Voor het gemak bepalen wij ons tot $p = 0$. Als $C = 0,577215665\dots$ de constante van Euler voorstelt en $\zeta(x)$ de zêta-functie van Riemann is, waarvoor geldt

$\zeta(2) = \pi^2/6$; $\zeta(3) = 1,2020569\dots$; $\zeta(4) = \pi^4/90$; etc., dan vinden wij:

$$G^{k,0}(0) = 0 \quad (8.30)$$

$$G^{k,1}(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (8.31)$$

$$G^{k,2}(0) \sim \frac{(-1)^{k+2}}{k} \cdot 2 (C + \log k) \quad (8.32)$$

$$G^{k,3}(0) \sim \frac{(-1)^{k+3}}{k} \cdot 3 \left\{ (C + \log k)^2 - \zeta(2) \right\} \quad (8.33)$$

$$G^{k,4}(0) \sim \frac{(-1)^{k+4}}{k} \cdot 4 \left\{ (C + \log k)^3 - 3 \zeta(2)(C + \log k) + 2 \zeta(3) \right\} \quad (8.34)$$

$$G^{k,5}(0) \sim \frac{(-1)^{k+5}}{k} \cdot 5 \left\{ (C + \log k)^4 - 6 \zeta(2)(C + \log k)^2 + 8 \zeta(3)(C + \log k) + 24 \zeta(4) - 9 \zeta^2(2) \right\} \quad (8.35)$$

Hieruit zien wij, dat de polynomen voor differentiatie volgens Gregory-Newton met toenemende orde van differenties nog langzamer tot nul convergeren dan de corresponderende interpolatiepolynomen.

Vervolgens beschouwen wij differentiatie volgens Bessel. Uit (4.7) en (4.8) zien wij dat alle Besselpolynomen asymptotisch gelijk zijn aan het product van een functie van k met een functie van p . Door

naar p te differentieren wordt de functie van k onaangetast gelaten, zodat voor alle differentiatiepolynomen geldt, dat ze **even** goed convergeren als de interpolatiepolynomen, dus zeer veel beter dan de corresponderende Gregory-Newton-polynomen. De verschillen in convergentiesnelheid tussen de reeksen (8.17) - (8.20) en (8.23) en (8.26) kunnen op deze wijze ook onderzocht worden, wat wij aan de cursist overlaten.

Tenslotte nog een opmerking in verband met het terugwerpen van differenties. Stel, dat men een tafel heeft, waarin gewijzigde tweede differenties voorkomen volgens de formule $\delta^{2*} = \delta^2 - 0,184\delta^4$. Dan kan de volgende benaderingsformules opstellen:

$$w f'_0 = \delta_0 - \frac{1}{6} \delta_0 \delta^{2*} + \frac{1}{400} \delta_0^3 \delta^{2*}, \quad (8.36)$$

$$w^2 f''_0 = \delta_0^2 + \frac{1}{10} \delta_0^2 \delta^{2*}, \quad (8.37)$$

$$w f'_{1/2} = \delta_{1/2} - \frac{1}{24} \delta_{1/2} \delta^{2*} + \frac{1}{335} \delta_{1/2}^3 \delta^{2*}, \quad (8.38)$$

$$w^2 f''_{1/2} = \delta_{1/2}^2 - \frac{1}{40} \delta_{1/2}^2 \delta^{2*}. \quad (8.39)$$

De afleiding laten wij aan de cursist over.

9. Integratie.

Het integreren van een functie voeren wij uit door het interpolerende polynoom aan die bewerking te onderwerpen. Evenals wij dit in de vorige paragraaf hebben gedaan, gaan wij verschillende interpolatiemethodes achtereenvolgens na.

In tegenstelling met wat wij tot nu toe behandeld hebben bij interpolatie en differentiatie, wat operaties waren, die slechts betrekking hadden op een enkele waarde van het argument, treedt bij een integratie met niet gespecificeerde benedengrens een onbepaalde constante op, welke wij op praktische wijze moeten hanteren. Laat ons dit verduidelijken aan de Gregory-Newton formule.

Uit :

$$f_p = f_0 + p\Delta_0 + \binom{p}{2}\Delta_0^2 + \binom{p}{3}\Delta_0^3 + \dots$$

volgt na integratie

$$w^{-1} \int_p^{x_p} f(t) dt = C + (p+a_0)f_0 + \left(\frac{1}{2}p^2 + a_1\right)\Delta_0 + \left(\frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{4}p^2 + a_2\right)\Delta_0^2 + \left(\frac{1}{24}p^4 - \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + a_3\right)\Delta_0^3 + \left(\frac{1}{120}p^5 - \frac{1}{16}p^4 + \frac{11}{12}p^3 - \frac{1}{8}p^2 + a_4\right)\Delta_0^4 + \dots$$

Hierin zijn $C, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ vooralsnog onbepaalde constanten. Natuurlijk behoeft in de formule maar één constante voor te komen, tenminste, als wij haar maar één keer wensen te gebruiken. Maar wij willen meer. Allereerst willen wij, dat a_0, a_1, a_2, \dots vaste getallen zijn, eens en vooral . Verder willen wij, dat C minder onbepaald is. Aan de formule zien wij, dat C geduid moet worden als een differentie van de orde minus één, ofwel eerste somfunctie. Die is inderdaad slechts op een constante na bepaald, maar het scheidt toch verplichtingen. Immers is, als $C = \Delta_0^{-1}$,

$$w^{-1} \int_p^{x_p} f(t) dt = \Delta_0^{-1} + (p+a_0)f_0 + \left(\frac{1}{2}p^2 + a_1\right)\Delta_0 + \left(\frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{4}p^2 + a_2\right)\Delta_0^2 + \left(\frac{1}{24}p^4 - \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + a_3\right)\Delta_0^3 + \dots \quad (9.1)$$

Maar wij kunnen natuurlijk ook in plaats van het basispunt x_0 kiezen het basispunt x_1 . Wij behoeven dan rechts slechts p te vervangen door $p - 1$. Dan is:

$$\begin{aligned}
 w^{-1} \int_p^x f(t) dt &= \Delta_1^{-1} + (p-1 + a_0) f_1 + \left\{ \frac{1}{2}(p-1)^2 + a_0 \right\} \Delta_1 + \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{6}(p-1)^3 - \frac{1}{4}(p-1)^2 + a_2 \right\} \Delta_1^2 \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{24}(p-1)^4 - \frac{1}{6}(p-1)^3 + \frac{1}{6}(p-1)^2 + a_3 \right\} \Delta_1^3 + \dots \\
 &= \Delta_0^{-1} + f_0 + (p-1 + a_0) \{f_0 + \Delta_0\} + \left\{ \frac{1}{2}(p-1)^2 + a_0 \right\} \{ \Delta_0 + \Delta_0^2 \} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{6}(p-1)^3 - \frac{1}{4}(p-1)^2 + a_2 \right\} \{ \Delta_0^2 + \Delta_0^3 \} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{24}(p-1)^4 - \frac{1}{6}(p-1)^3 + \frac{1}{6}(p-1)^2 + a_3 \right\} \{ \Delta_0^3 + \Delta_0^4 \} + \dots,
 \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
 w^{-1} \int_p^x f(t) dt &= \Delta_0^{-1} + (p+a_0) f_0 + \left(\frac{1}{2} p^2 + a_1 + a_0 - \frac{1}{2} \right) \Delta_0 + \\
 &+ \left(\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{4} p^2 + a_2 + a_1 + \frac{1}{12} \right) \Delta_0^2 + \left(\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{6} p^2 + a_3 + a_2 - \frac{1}{24} \right) \Delta_0^3 + \dots \\
 &\hspace{15em} (9.2)
 \end{aligned}$$

Door vergelijking van (9.1) en (9.2) zien wij, dat beide uitdrukkingen dan en slechts dan identiek zijn, indien

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{12}, \quad a_2 = \frac{1}{24}, \quad a_3 = -\frac{19}{720}, \quad a_4 = \frac{3}{160}, \quad \dots$$

Dus is:

$$\begin{aligned}
 w^{-1} \int_p^x f(t) dt &= \Delta_0^{-1} + \left(p + \frac{1}{2} \right) f_0 + \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{12} \right) \Delta_0 + \left(\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{24} \right) \Delta_0^2 + \\
 &\quad \left(\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{2} p^2 - \frac{19}{720} \right) \Delta_0^3 + \left(\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{16} p^4 + \frac{11}{72} p^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8} p^2 + \frac{3}{160} \right) \Delta_0^4 + \dots \\
 &= \Delta_0^{-1} + G^{0,-1} f_0 + G^{1,-1} \Delta_0 + G^{2,-1} \Delta_0^2 + G^{3,-1} \Delta_0^3 + G^{4,-1} \Delta_0^4 + \dots \\
 &\hspace{15em} (9.3)
 \end{aligned}$$

Op pag. 102 en 103 hebben wij $G^{0,-1}$, $G^{1,-1}$, $G^{2,-1}$ en $G^{3,-1}$ als functie van p getabelleerd.

Op analoge wijze kan men herhaalde integralen berekenen waarbij de optredende integratie constanten weer met een redenering als boven gehouden, gevonden dienen te worden. Zo vindt men:

p	$G^{0,-1}$	$G^{1,-1}$	$G^{2,-1}$	$G^{3,-1}$
0,00	+0,50	-0,0833333	+0,0416667	-0,0263889
0,01	+0,51	-0,0832833	+0,0416418	-0,0263724
0,02	+0,52	-0,0831333	+0,0415680	-0,0263235
0,03	+0,53	-0,0828833	+0,0414462	-0,0262434
0,04	+0,54	-0,0825333	+0,0412773	-0,0261328
0,05	+0,55	-0,0820833	+0,0410625	-0,0259928
0,06	+0,56	-0,0815333	+0,0408027	-0,0258243
0,07	+0,57	-0,0808833	+0,0404968	-0,0256284
0,08	+0,58	-0,0801333	+0,0401520	-0,0254058
0,09	+0,59	-0,0792833	+0,0397632	-0,0251577
0,10	+0,60	-0,0783333	+0,0393333	-0,0248847
0,11	+0,61	-0,0772833	+0,0388635	-0,0245880
0,12	+0,62	-0,0761333	+0,0383547	-0,0242682
0,13	+0,63	-0,0748833	+0,0378078	-0,0239265
0,14	+0,64	-0,0735333	+0,0372240	-0,0235635
0,15	+0,65	-0,0720833	+0,0366042	-0,0231803
0,16	+0,66	-0,0705333	+0,0359493	-0,0227776
0,17	+0,67	-0,0688833	+0,0352605	-0,0223563
0,18	+0,68	-0,0671333	+0,0345387	-0,0219171
0,19	+0,69	-0,0652833	+0,0337848	-0,0214611
0,20	+0,70	-0,0633333	+0,0330000	-0,0209889
0,21	+0,71	-0,0612833	+0,0321852	-0,0205014
0,22	+0,72	-0,0591333	+0,0313413	-0,0199993
0,23	+0,73	-0,0568833	+0,0304695	-0,0194835
0,24	+0,74	-0,0545333	+0,0295707	-0,0189546
0,25	+0,75	-0,0520833	+0,0286458	-0,0184136
0,26	+0,76	-0,0495333	+0,0276960	-0,0178611
0,27	+0,77	-0,0468833	+0,0267222	-0,0172980
0,28	+0,78	-0,0441333	+0,0257253	-0,0167248
0,29	+0,79	-0,0412833	+0,0247065	-0,0161424
0,30	+0,80	-0,0383333	+0,0236667	-0,0155514
0,31	+0,81	-0,0352833	+0,0226068	-0,0149526
0,32	+0,82	-0,0321333	+0,0215280	-0,0143466
0,33	+0,83	-0,0288833	+0,0204312	-0,0137343
0,34	+0,84	-0,0255333	+0,0193173	-0,0131161
0,35	+0,85	-0,0220833	+0,0181875	-0,0124928
0,36	+0,86	-0,0185333	+0,0170427	-0,0118650
0,37	+0,87	-0,0148833	+0,0158838	-0,0112335
0,38	+0,88	-0,0111333	+0,0147120	-0,0105987
0,39	+0,89	-0,0072833	+0,0135282	-0,0099615
0,40	+0,90	-0,0033333	+0,0123333	-0,0093222
0,41	+0,91	+0,0007167	+0,0111285	-0,0086817
0,42	+0,92	+0,0048667	+0,0099147	-0,0080403
0,43	+0,93	+0,0091167	+0,0086928	-0,0073989
0,44	+0,94	+0,0134667	+0,0074640	-0,0067578
0,45	+0,95	+0,0179167	+0,0062292	-0,0061178
0,46	+0,96	+0,0224667	+0,0049893	-0,0054793
0,47	+0,97	+0,0271167	+0,0037455	-0,0048429
0,48	+0,98	+0,0318667	+0,0024987	-0,0042090
0,49	+0,99	+0,0367167	+0,0012498	-0,0035784
0,50	+1,00	+0,0416667	0,0000000	-0,0029514

p	$G^{0,-1}$	$G^{1,-1}$	$G^{2,-1}$	$G^{3,-1}$
0,50	+1,00	+0,0416667	0,0000000	-0,0029514
0,51	+1,01	+0,0467167	-0,0012498	-0,0023286
0,52	+1,02	+0,0518667	-0,0024987	-0,0017104
0,53	+1,03	+0,0571167	-0,0037455	-0,0010974
0,54	+1,04	+0,0624667	-0,0049893	-0,0004899
0,55	+1,05	+0,0679167	-0,0062292	+0,0001113
0,56	+1,06	+0,0734667	-0,0074640	+0,0007061
0,57	+1,07	+0,0791167	-0,0086928	+0,0012938
0,58	+1,08	+0,0848667	-0,0099147	+0,0018742
0,59	+1,09	+0,0907167	-0,0111285	+0,0024467
0,60	+1,10	+0,0966667	-0,0123333	+0,0030111
0,61	+1,11	+0,1027167	-0,0135282	+0,0035667
0,62	+1,12	+0,1088667	-0,0147120	+0,0041133
0,63	+1,13	+0,1151167	-0,0158838	+0,0046503
0,64	+1,14	+0,1214667	-0,0170427	+0,0051776
0,65	+1,15	+0,1279167	-0,0181875	+0,0056947
0,66	+1,16	+0,1344667	-0,0193173	+0,0062013
0,67	+1,17	+0,1411167	-0,0204312	+0,0066969
0,68	+1,18	+0,1478667	-0,0215260	+0,0071814
0,69	+1,19	+0,1547167	-0,0226068	+0,0076542
0,70	+1,20	+0,1616667	-0,0236667	+0,0081153
0,71	+1,21	+0,1687167	-0,0247065	+0,0085641
0,72	+1,22	+0,1758667	-0,0257253	+0,0090006
0,73	+1,23	+0,1831167	-0,0267222	+0,0094242
0,74	+1,24	+0,1904667	-0,0276960	+0,0098349
0,75	+1,25	+0,1979167	-0,0286458	+0,0102322
0,76	+1,26	+0,2054667	-0,0295707	+0,0106160
0,77	+1,27	+0,2131167	-0,0304695	+0,0109860
0,78	+1,28	+0,2208667	-0,0313413	+0,0113421
0,79	+1,29	+0,2287167	-0,0321852	+0,0116838
0,80	+1,30	+0,2366667	-0,0330000	+0,0120111
0,81	+1,31	+0,2447167	-0,0337848	+0,0123237
0,82	+1,32	+0,2528667	-0,0345387	+0,0126215
0,83	+1,33	+0,2611167	-0,0352605	+0,0129042
0,84	+1,34	+0,2694667	-0,0359493	+0,0131718
0,85	+1,35	+0,2779167	-0,0366042	+0,0134239
0,86	+1,36	+0,2864667	-0,0372240	+0,0136605
0,87	+1,37	+0,2951167	-0,0378078	+0,0138813
0,88	+1,38	+0,3038667	-0,0383547	+0,0140864
0,89	+1,39	+0,3127167	-0,0388635	+0,0142755
0,90	+1,40	+0,3216667	-0,0393333	+0,0144486
0,91	+1,41	+0,3307167	-0,0397632	+0,0146055
0,92	+1,42	+0,3398667	-0,0401520	+0,0147462
0,93	+1,43	+0,3491167	-0,0404988	+0,0148704
0,94	+1,44	+0,3584667	-0,0408027	+0,0149783
0,95	+1,45	+0,3679167	-0,0410625	+0,0150697
0,96	+1,46	+0,3774667	-0,0412773	+0,0151446
0,97	+1,47	+0,3871167	-0,0414462	+0,0152028
0,98	+1,48	+0,3968667	-0,0415680	+0,0152445
0,99	+1,49	+0,4067167	-0,0416418	+0,0152694
1,00	+1,50	+0,4166667	-0,0416667	+0,0152778

$$\begin{aligned}
 w^{-2} \int_{x_0}^{x_p} dt \int^t f(u) du &= \Delta_0^{-2} + (p+1) \Delta_0^{-1} + \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{12}\right) f_0 + \left(\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{12} p\right) \Delta_0 \\
 &+ \left(\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{12} p^3 + \frac{1}{24} p - \frac{1}{240}\right) \Delta_0^2 + \left(\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{24} p^4 + \frac{1}{18} p^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{13}{720} p + \frac{1}{240}\right) \Delta_0^3 + \\
 &+ \left(\frac{1}{720} p^6 - \frac{1}{80} p^5 + \frac{11}{288} p^4 - \frac{1}{24} p^3 + \frac{3}{160} p + \frac{181}{60480}\right) \Delta_0^4 + \dots \\
 &= \Delta_0^{-2} + G^{-1,-2} \Delta_0^{-1} + G^{0,-2} f_0 + G^{1,-2} \Delta_0 + G^{2,-2} \Delta_0^2 + G^{3,-2} \Delta_0^3 + \\
 &\quad + G^{4,-2} \Delta_0^4 + \dots \quad (9.4)
 \end{aligned}$$

Specificeert men een bepaalde benedengrens a van de integralen in (9.3) of (9.4) dan moet men de constante in de somfuncties Δ_0^{-1} en Δ_0^{-2} zodanig kiezen, dat de integralen voor $x_p = a$ nul zijn.

Het belangrijkste voor de toepassingen is het geval van de integraal over een interval, dus van $p = 0$ tot 1. Dan is

$$w^{-1} \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt = f_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 - \frac{1}{12} \Delta_0^2 + \frac{1}{24} \Delta_0^3 - \frac{19}{720} \Delta_0^4 + \frac{3}{160} \Delta_0^5 - \frac{863}{60480} \Delta_0^6 + \dots \quad (9.5)$$

$$w^{-1} \int_{x_0}^{x_1} dt \int^t f(u) du = \Delta_0^{-1} + f_0 + \frac{1}{12} \Delta_0 - \frac{1}{240} \Delta_0^3 + \frac{1}{240} \Delta_0^4 + \dots \quad (9.6)$$

Eerst gaan wij weer even na, hoe wij deze formules met behulp van operatormethodes kunnen afleiden. Daartoe merken wij op, dat integratie overeenkomt met toepassen van de operator D^{-1} , want eerst integreren en dan differentieren (d.i. toepassen van de operator D) laat een functie onveranderd.

Dus is:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{wD} &= \frac{1}{\log(1+\Delta)} = \frac{1}{\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} \dots} = \Delta^{-1} \left\{ 1 - \left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{3} + \frac{\Delta^3}{4} - \frac{\Delta^4}{5} + \dots \right) \right\}^{-1} = \\
 &= \Delta^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 - \frac{19}{720} \Delta^4 + \dots \right) = \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \Delta + \frac{1}{24} \Delta^2 - \\
 &\quad - \frac{19}{720} \Delta^3 \dots
 \end{aligned}$$

Door links en rechts met f_0 te vermenigvuldigen volgt (9.3) voor $p = 0$. Om (9.5) te vinden doen wij hetzelfde met f_1 en trekken dan af.

Om de herhaalde integraal te vinden, behoeven wij slechts de operator te kwadrateren:

$$\frac{1}{w^2 D^2} = \Delta^{-2} + \Delta^{-1} + \frac{1}{12} - \frac{1}{240} \Delta^2 + \frac{1}{240} \Delta^3 + \dots$$

Door dit weer te opereren op f_0 vinden wij (9.4) voor $p = 0$ en door ook te opereren op f_1 en af te trekken, vinden wij (9.6).

Om de complete uitdrukkingen (9.3) of (9.4) te vinden opereren wij met de operator E^p op $\frac{1}{wD}$ of op $\frac{1}{2^p D}$. Zo voor de eerste integraal:

$$\begin{aligned} E^p \frac{1}{wD} &= \frac{(1+\Delta)^p}{wD} = \left\{ 1 + p\Delta + \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right)\Delta^2 + \left(\frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p\right)\Delta^3 \dots \right\} \\ &\quad \left\{ \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\Delta + \frac{1}{24}\Delta^2 \dots \right\} = \\ &= \Delta^{-1} + \left(p + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{12}\right)\Delta + \left(\frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{24}\right)\Delta^2 + \dots \end{aligned}$$

Door hiermede te opereren op f_0 volgt de volledige formule (9.3) enz.

Van groot belang voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen zijn die formules, welke niet met voorwaartse differenties (Δ^k), maar met achterwaartse differenties (∇^k) werken. De theorie kan geheel op dezelfde wijze bewerk worden als bij de voorwaartse differenties. Wij zullen het nu maar eens direct met operatoren doen. Wie het niet vertrouwt, rekene het maar op de officiële wijze na. Te bepalen zij de integraal over het interval, uitgedrukt in terugwaartse differenties van x_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{wD} &= \frac{-1}{\log(1-\nabla)} = - \left\{ -\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} - \frac{\nabla^5}{5} - \dots \right\}^{-1} = \\ &= \nabla^{-1} \left\{ 1 + \frac{\nabla}{2} + \frac{\nabla^2}{3} + \frac{\nabla^3}{4} + \frac{\nabla^4}{5} \dots \right\}^{-1} = \\ &= \nabla^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \frac{3}{160}\nabla^5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{863}{60480}\nabla^6 \dots \right\} \\ &= \nabla^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\nabla - \frac{1}{24}\nabla^2 - \frac{19}{720}\nabla^3 - \frac{3}{160}\nabla^4 - \frac{863}{60480}\nabla^5 - \dots \end{aligned}$$

Voorts bepalen wij:

$$\begin{aligned} \frac{E}{wD} &= (1 - \nabla)^{-1} \frac{1}{wD} \\ &= (1 + \nabla + \nabla^2 + \nabla^3 + \nabla^4 + \dots) \left(\nabla^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\nabla - \frac{1}{24}\nabla^2 - \frac{19}{720}\nabla^3 - \frac{3}{160}\nabla^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{863}{60480}\nabla^5 - \dots \right) \\ &= \nabla^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4 + \frac{95}{288}\nabla^5 + \frac{19087}{60480}\nabla^6 + \dots \end{aligned}$$

Door kolomsgewijs te sommeren vinden wij:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt &= (\Delta_n^{-1} - \Delta_0^{-1}) + \frac{1}{2} (f_n - f_0) - \frac{1}{12} (\Delta_n - \Delta_0) + \frac{1}{24} (\Delta_n^2 - \Delta_0^2) - \\ &- \frac{19}{720} (\Delta_n^3 - \Delta_0^3) + \frac{3}{160} (\Delta_n^4 - \Delta_0^4) - \frac{863}{60480} (\Delta_n^5 - \Delta_0^5) + \frac{275}{24192} (\Delta_n^6 - \Delta_0^6) - \dots \end{aligned} \quad (9.10)$$

In het algemeen staat deze formule weer verre ten achter bij de hierna te behandelen corresponderende centrale formule. Alleen als in de omgeving van x_0 een singulariteit is (vgl. par. 5) kan de Δ -vorm voordelen hebben. Ook van belang is het geval, dat aan weerszijden van x_0 en x_n (dus buiten het integratiegebied) geen functiewaarden bekend zijn. Dan moeten de Δ_n^k uit (9.10) weggewerkt worden en in ∇_n^k uitgedrukt worden. Merk daartoe op, dat volgens het voorgaande

$$\Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\Delta + \frac{1}{24}\Delta^2 - \frac{19}{720}\Delta^3 + \dots = \frac{1}{wD} = \nabla^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\nabla - \frac{1}{24}\nabla^2 - \frac{19}{720}\nabla^3 \dots$$

Door links en rechts te vermenigvuldigen met f_n , zien wij dat (9.10) geschreven kan worden als

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt &= (\nabla_n^{-1} - \Delta_0^{-1}) - \frac{1}{2}(f_n + f_0) - \frac{1}{12}(\nabla_n - \Delta_0) - \frac{1}{24}(\nabla_n^2 + \Delta_0^2) \\ &- \frac{19}{720}(\nabla_n^3 - \Delta_0^3) - \frac{3}{160}(\nabla_n^4 + \Delta_0^4) - \frac{863}{60480}(\nabla_n^5 - \Delta_0^5) - \frac{275}{24192}(\nabla_n^6 + \Delta_0^6) \dots \end{aligned} \quad (9.11)$$

Hierbij is nu inderdaad geen gebruik gemaakt van basispunten buiten het integratiegebied. Let op de merkwaardige afwisseling van + en - tekens.

Wij wijzen er nog op, dat de eerste twee termen in (9.10) en die in (9.11) de volgende betekenis hebben:

$$\begin{aligned} (\Delta_n^{-1} - \Delta_0^{-1}) + \frac{1}{2} (f_n - f_0) &= (\nabla_n^{-1} - \Delta_0^{-1}) - \frac{1}{2} (f_n + f_0) = \\ &= \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Dit betekent, dat de kop van (9.10) en (9.11) de trapeziumregel is en de daarop volgende termen de differentiecorrecties voorstellen.

Wij gaan nu over tot het construeren van de analoge formules in centrale differenties uitgedrukt. Naar aanleiding van een opmerking van Dr. Hoogschagen presenteren wij eerst een eenvoudige manier om reeksen in voorwaartse differenties uitgedrukt over te voeren in de corresponderende met centrale differenties. Stel de operator F is gedefinieerd door:

$$F = a_{-2} \Delta^{-2} + a_{-1} \Delta^{-1} + a_0 \Delta^0 + a_1 \Delta^1 + a_2 \Delta^2 + a_3 \Delta^3 + a_4 \Delta^4 + \\ + a_5 \Delta^5 + a_6 \Delta^6 + \dots,$$

waarin de a 's willekeurige coëfficiënten zijn, die i.h.a. functies van p zijn. Laten wij deze operator werken op f_0 , dan krijgen wij dus een reeks met voorwaartse differenties Δ_0^k . Deze willen wij omzetten in een reeks van het centrale type door eerst over te gaan in de Gauss-vorm, alleen gebruik makend van δ_0^{2k} en $\delta_{\frac{1}{2}}^{2k+1}$. Dit kan met operator-methodes, maar sneller gaat het op de directe weg. Daartoe merken wij op, dat:

$$\Delta_0^0 = \delta_0^0$$

$$\Delta_0^1 = \delta_{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_0^2 = \delta_0^2 + \delta_{\frac{1}{2}}^3$$

$$\Delta_0^3 = \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \delta_0^4 + \delta_{\frac{1}{2}}^5$$

$$\Delta_0^4 = \delta_0^4 + 2 \delta_{\frac{1}{2}}^5 + \delta_0^6 + \delta_{\frac{1}{2}}^7$$

$$\Delta_0^5 = \delta_{\frac{1}{2}}^5 + 2 \delta_0^6 + 3 \delta_{\frac{1}{2}}^7 + \delta_0^8 + \delta_{\frac{1}{2}}^9$$

$$\Delta_0^6 = \delta_0^6 + 3 \delta_{\frac{1}{2}}^7 + 3 \delta_0^8 + 4 \delta_{\frac{1}{2}}^9 + \delta_0^{10} + \delta_{\frac{1}{2}}^{11}$$

$$\Delta_0^7 = \delta_{\frac{1}{2}}^7 + 3 \delta_0^8 + 6 \delta_{\frac{1}{2}}^9 + 4 \delta_0^{10} + 5 \delta_{\frac{1}{2}}^{11} + \delta_0^{12} + \delta_{\frac{1}{2}}^{13}$$

.....

$$\Delta_0^{-1} = \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} - f_0$$

$$\Delta_0^{-2} = \delta_0^{-2} - \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} + f_0$$

.....

Nu kunnen wij hieruit de Stirling vorm resp. de Besselvorm verkrijgen door verdrijving van de indices $\frac{1}{2}$ met behulp van $\delta_{\frac{1}{2}}^{2k+1} = \delta_0^{2k+1} + \frac{1}{2} \delta_0^{2k+2}$ resp. door verdrijving van de indices 0 met behulp

van $\delta_0^{2k} = \delta_{\frac{1}{2}}^{2k} - \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^{2k+1}$. Dan vinden wij de Stirling vorm:

$$\Delta_0^0 = \delta_0^0$$

$$\Delta_0^1 = \delta_0^1 + \frac{1}{2} \delta_0^2$$

$$\Delta_0^2 = \delta_0^2 + \delta_0^3 + \frac{1}{2} \delta_0^4$$

$$\Delta_0^3 = \delta_0^3 + \frac{3}{2} \delta_0^4 + \delta_0^5 + \frac{1}{2} \delta_0^6$$

$$\Delta_0^4 = \delta_0^4 + 2 \delta_0^5 + \frac{3}{2} \delta_0^6 + \delta_0^7 + \frac{1}{2} \delta_0^8$$

$$\Delta_0^5 = \delta_0^5 + \frac{5}{2} \delta_0^6 + 3 \delta_0^7 + \frac{5}{2} \delta_0^8 + \delta_0^9 + \frac{1}{2} \delta_0^{10}$$

$$\Delta_0^6 = \delta_0^6 + 3 \delta_0^7 + \frac{9}{2} \delta_0^8 + 4 \delta_0^9 + 3 \delta_0^{10} + \delta_0^{11} + \frac{1}{2} \delta_0^{12}$$

$$\Delta_0^7 = \delta_0^7 + \frac{7}{2} \delta_0^8 + 6 \delta_0^9 + 7 \delta_0^{10} + 5 \delta_0^{11} + \frac{7}{2} \delta_0^{12} + \delta_0^{13} + \frac{1}{2} \delta_0^{14}$$

.....

$$\Delta_0^{-1} = \delta_0^{-1} - \frac{1}{2} f_0$$

$$\Delta_0^{-2} = \delta_0^{-2} - \delta_0^{-1} + \frac{1}{2} f_0$$

..... ,

resp. de Besselvorm:

$$\Delta_0^0 = \delta_{\frac{1}{2}}^0 - \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\Delta_0^1 = \delta_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\Delta_0^2 = \delta_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^3$$

$$\Delta_0^3 = \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \delta_{\frac{1}{2}}^4 + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^5$$

$$\Delta_0^4 = \delta_{\frac{1}{2}}^4 + \frac{3}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^5 + \delta_{\frac{1}{2}}^6 + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^7$$

$$\Delta_0^5 = \delta_{\frac{1}{2}}^5 + 2 \delta_{\frac{1}{2}}^6 + 2 \delta_{\frac{1}{2}}^7 + \delta_{\frac{1}{2}}^8 + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^9$$

$$\Delta_0^6 = \delta_{\frac{1}{2}}^6 + \frac{5}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^7 + 3 \delta_{\frac{1}{2}}^8 + \frac{5}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^9 + \delta_{\frac{1}{2}}^{10} + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^{11}$$

$$\Delta_0^7 = \delta_{\frac{1}{2}}^7 + 3 \delta_{\frac{1}{2}}^8 + \frac{9}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^9 + 4 \delta_{\frac{1}{2}}^{10} + 3 \delta_{\frac{1}{2}}^{11} + \delta_{\frac{1}{2}}^{12} + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^{13}$$

.....

$$\Delta_0^{-1} = \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} - \delta_{\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\Delta_0^{-2} = \delta_{\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{3}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} + \delta_{\frac{1}{2}}^0 - \frac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}^1$$

.....

En dus is:

$$\begin{aligned}
 & a_{-2} \Delta_0^{-2} + a_{-1} \Delta_0^{-1} + a_0 \Delta_0^0 + a_1 \Delta_0^1 + a_2 \Delta_0^2 + a_3 \Delta_0^3 + a_4 \Delta_0^4 + a_5 \Delta_0^5 + \\
 & \qquad \qquad \qquad + a_6 \Delta_0^6 + a_7 \Delta_0^7 + \dots \\
 & = a_{-2} \delta_0^{-2} + (a_{-1} - a_{-2}) \delta_0^{-1} + (a_0 - \frac{1}{2} a_{-1} + \frac{1}{2} a_{-2}) \delta_0^0 + a_1 \delta_0 + \\
 & + (a_2 + \frac{1}{2} a_1) \delta_0^2 + (a_3 + a_2) \delta_0^3 + (a_4 + \frac{3}{2} a_3 + \frac{1}{2} a_2) \delta_0^4 + (a_5 + 2 a_4 + a_3) \delta_0^5 + \\
 & + (a_6 + \frac{5}{2} a_5 + \frac{3}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_3) \delta_0^6 + (a_7 + 3 a_6 + 3 a_5 + a_4) \delta_0^7 + \dots \\
 & = a_{-2} \delta_{\frac{1}{2}}^{-2} + (a_{-1} - \frac{3}{2} a_{-2}) \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} + (a_0 - a_{-1} + a_{-2}) \delta_{\frac{1}{2}}^0 + \\
 & + (a_1 - \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} a_{-1} - \frac{1}{2} a_{-2}) \delta_{\frac{1}{2}}^1 + a_2 \delta_{\frac{1}{2}}^2 + (a_3 + \frac{1}{2} a_2) \delta_{\frac{1}{2}}^3 + \\
 & + (a_4 + a_3) \delta_{\frac{1}{2}}^4 + (a_5 + \frac{3}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_3) \delta_{\frac{1}{2}}^5 + (a_6 + 2 a_5 + a_4) \delta_{\frac{1}{2}}^6 + \\
 & + (a_7 + \frac{5}{2} a_6 + 2 a_5 + \frac{1}{2} a_4) \delta_{\frac{1}{2}}^7 + \dots \qquad (9.13)
 \end{aligned}$$

Deze formule leert ons dus reeksen in voorwaartse differenties uitgedrukt om te vormen in reeksen van het Stirlingtype resp. het Besseltype. De coëfficiënten lijken misschien wat ingewikkeld opgebouwd, maar het is niet moeilijk om de regelmaat te ontdekken (cur-sist !)

Wij behoeven (9.13) nu maar toe te passen op (9.3) en (9.4) en vinden dan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{w} \int^x_p f(t) dt &= \delta_0^{-1} + p f_0 + (\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{12}) \delta_0 + \frac{1}{6} p^3 \delta_0^2 + \\
 & + (\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{12} p^2 + \frac{11}{720}) \delta_0^3 + (\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{72} p^3) \delta_0^4 + \dots \\
 & = \delta_0^{-1} + s^{0,-1} f_0 + s^{1,-1} \delta_0 + s^{2,-1} \delta_0^2 + s^{3,-1} \delta_0^3 + s^{4,-1} \delta_0^4 + \dots
 \end{aligned} \qquad (9.14)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{w} \int^x_p f(t) dt &= \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} + (p - \frac{1}{2}) \delta_{\frac{1}{2}}^0 + (\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} p + \frac{1}{6}) \delta_{\frac{1}{2}}^1 + (\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{24}) \delta_{\frac{1}{2}}^2 + \\
 & + (\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{12} p^3 + \frac{1}{24} p^2 - \frac{1}{180}) \delta_{\frac{1}{2}}^3 + (\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{48} p^4 - \frac{1}{72} p^3 + \frac{1}{24} p^2 - \frac{11}{1440}) \delta_{\frac{1}{2}}^4 + \dots \\
 & = \delta_{\frac{1}{2}}^{-1} + B^{0,-1} \delta_{\frac{1}{2}}^0 + B^{1,-1} \delta_{\frac{1}{2}}^1 + B^{2,-1} \delta_{\frac{1}{2}}^2 + B^{3,-1} \delta_{\frac{1}{2}}^3 + B^{4,-1} \delta_{\frac{1}{2}}^4 + \dots
 \end{aligned} \qquad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \int_0^x p \, dt \int^t f(u) \, du &= \delta_0^{-2} + p \delta_0^{-1} + \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{12}\right) \delta_0^0 + \left(\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{12} p\right) \delta_0^1 \\ &+ \left(\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{240}\right) \delta_0^2 + \left(\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{36} p^3 + \frac{11}{720} p\right) \delta_0^3 + \\ &+ \left(\frac{1}{720} p^6 - \frac{1}{288} p^4 + \frac{31}{60480}\right) \delta_0^4 + \dots \\ &= \delta_0^{-2} + s^{-1,-2} \delta_0^{-1} + s^{0,-2} \delta_0^0 + s^{1,-2} \delta_0^1 + s^{2,-2} \delta_0^2 + s^{3,-2} \delta_0^3 + \\ &+ s^{4,-2} \delta_0^4 + \dots \quad (9.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \int_0^x p \, dt \int^t f(u) \, du &= \delta_{1/2}^{-2} + \left(p - \frac{1}{2}\right) \delta_{1/2}^{-1} + \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} p + \frac{1}{12}\right) \delta_{1/2}^0 + \\ &+ \left(\frac{1}{6} p^3 - \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{6} p - \frac{1}{24}\right) \delta_{1/2}^1 + \left(\frac{1}{24} p^4 - \frac{1}{12} p^3 + \frac{1}{24} p - \frac{1}{240}\right) \delta_{1/2}^2 \\ &+ \left(\frac{1}{120} p^5 - \frac{1}{48} p^4 + \frac{1}{72} p^3 - \frac{1}{150} p + \frac{1}{480}\right) \delta_{1/2}^3 + \\ &+ \left(\frac{1}{720} p^6 - \frac{1}{240} p^5 - \frac{1}{288} p^4 + \frac{1}{72} p^3 - \frac{11}{1440} p + \frac{31}{60480}\right) \delta_{1/2}^4 + \dots \\ &= \delta_{1/2}^{-2} + B^{-1,-2} \delta_{1/2}^{-1} + B^{1,-2} \delta_{1/2}^1 + B^{2,-2} \delta_{1/2}^2 + B^{3,-2} \delta_{1/2}^3 + \\ &+ B^{4,-2} \delta_{1/2}^4 + \dots \quad (9.17) \end{aligned}$$

Op de pag. 112, 113, 114 en 115 hebben wij de polynomen $s^{0,-1}$, $s^{1,-1}$, $s^{2,-1}$ en $s^{3,-1}$ en $B^{0,-1}$, $B^{1,-1}$, $B^{2,-1}$ en $B^{3,-1}$ getabelleerd.

Belangrijk speciale gevallen verkrijgt men door $p = 0$ te kiezen in (9.14) en (9.16) of door $p = 1/2$ te kiezen in (9.15) en (9.17). Dan vinden wij:

$$\frac{1}{w} \int_0^x f(t) \, dt = \delta_0^{-1} - \frac{1}{12} \delta_0^0 + \frac{11}{720} \delta_0^3 - \frac{191}{60480} \delta_0^5 + \frac{2497}{3628800} \delta_0^7 - \dots \quad (9.18)$$

$$\frac{1}{w} \int_0^{x/2} f(t) \, dt = \delta_{1/2}^{-1} + \frac{1}{24} \delta_{1/2}^1 - \frac{17}{5760} \delta_{1/2}^3 + \frac{367}{967680} \delta_{1/2}^5 - \frac{27859}{464486400} \delta_{1/2}^7 + \dots \quad (9.19)$$

$$\frac{1}{w^2} \int_0^x dt \int^t f(u) \, du = \delta_0^{-2} + \frac{1}{12} \delta_0^0 - \frac{1}{240} \delta_0^2 + \frac{31}{60480} \delta_0^4 - \frac{289}{3628800} \delta_0^6 + \dots \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \int_0^{x/2} dt \int^t f(u) \, du &= \delta_{1/2}^{-2} - \frac{1}{24} \delta_{1/2}^0 + \frac{17}{1920} \delta_{1/2}^2 - \frac{367}{193536} \delta_{1/2}^4 + \\ &+ \frac{27859}{66355200} \delta_{1/2}^6 - \dots \quad (9.21) \end{aligned}$$

p	$s^0, -1$	$s^1, -1$	$s^2, -1$	$s^3, -1$
-0,50	-0,50	+0,0416667	+0,0208333	-0,0029514
-0,49	-0,49	+0,0367167	+0,0196082	-0,0023286
-0,48	-0,48	+0,0318667	+0,0184320	-0,0017104
-0,47	-0,47	+0,0271167	+0,0173038	-0,0010974
-0,46	-0,46	+0,0224667	+0,0162227	-0,0004899
-0,45	-0,45	+0,0179167	+0,0151875	+0,0001114
-0,44	-0,44	+0,0134667	+0,0141973	+0,0007062
-0,43	-0,43	+0,0091167	+0,0132512	+0,0012939
-0,42	-0,42	+0,0048667	+0,0123480	+0,0018743
-0,41	-0,41	+0,0007167	+0,0114868	+0,0024468
-0,40	-0,40	-0,0033333	+0,0106667	+0,0030111
-0,39	-0,39	-0,0072833	+0,0098865	+0,0035667
-0,38	-0,38	-0,0111333	+0,0091453	+0,0041133
-0,37	-0,37	-0,0149833	+0,0084422	+0,0046503
-0,36	-0,36	-0,0185333	+0,0077760	+0,0051776
-0,35	-0,35	-0,0220833	+0,0071458	+0,0056947
-0,34	-0,34	-0,0255333	+0,0065507	+0,0062013
-0,33	-0,33	-0,0289833	+0,0059895	+0,0066969
-0,32	-0,32	-0,0321333	+0,0054613	+0,0071814
-0,31	-0,31	-0,0352833	+0,0049652	+0,0076542
-0,30	-0,30	-0,0383333	+0,0045000	+0,0081153
-0,29	-0,29	-0,0412833	+0,0040648	+0,0085641
-0,28	-0,28	-0,0441333	+0,0036587	+0,0090006
-0,27	-0,27	-0,0468833	+0,0032805	+0,0094242
-0,26	-0,26	-0,0495333	+0,0029293	+0,0098349
-0,25	-0,25	-0,0520833	+0,0026042	+0,0102322
-0,24	-0,24	-0,0545333	+0,0023040	+0,0106160
-0,23	-0,23	-0,0568823	+0,0020278	+0,0109860
-0,22	-0,22	-0,0591333	+0,0017747	+0,0113421
-0,21	-0,21	-0,0612833	+0,0015435	+0,0116838
-0,20	-0,20	-0,0633333	+0,0013333	+0,0120111
-0,19	-0,19	-0,0652833	+0,0011432	+0,0123237
-0,18	-0,18	-0,0671333	+0,0009720	+0,0126215
-0,17	-0,17	-0,0688833	+0,0008188	+0,0129042
-0,16	-0,16	-0,0705333	+0,0006827	+0,0131718
-0,15	-0,15	-0,0720833	+0,0005625	+0,0134239
-0,14	-0,14	-0,0735333	+0,0004573	+0,0136605
-0,13	-0,13	-0,0748833	+0,0003662	+0,0138813
-0,12	-0,12	-0,0761333	+0,0002880	+0,0140864
-0,11	-0,11	-0,0772833	+0,0002218	+0,0142755
-0,10	-0,10	-0,0783333	+0,0001667	+0,0144486
-0,09	-0,09	-0,0792833	+0,0001215	+0,0146055
-0,08	-0,08	-0,0801333	+0,0000853	+0,0147462
-0,07	-0,07	-0,0808833	+0,0000572	+0,0148704
-0,06	-0,06	-0,0815333	+0,0000360	+0,0149783
-0,05	-0,05	-0,0820833	+0,0000208	+0,0150697
-0,04	-0,04	-0,0825333	+0,0000107	+0,0151446
-0,03	-0,03	-0,0828833	-0,0000045	+0,0152028
-0,02	-0,02	-0,0831333	-0,0000013	+0,0152445
-0,01	-0,01	-0,0832833	-0,0000002	+0,0152694
0,00	0,00	-0,0833333	0,0000000	+0,0152778

p	$s^{0,-1}$	$s^{1,-1}$	$s^{2,-1}$	$s^{3,-1}$
0,00	+0,00	-0,0833333	0,0000000	+0,0152778
0,01	+0,01	-0,0832833	+0,0000002	+0,0152694
0,02	+0,02	-0,0831333	+0,0000013	+0,0152445
0,03	+0,03	-0,0828833	+0,0000045	+0,0152028
0,04	+0,04	-0,0825333	+0,0000107	+0,0151446
0,05	+0,05	-0,0820833	+0,0000208	+0,0150697
0,06	+0,06	-0,0815333	+0,0000360	+0,0149783
0,07	+0,07	-0,0808833	+0,0000572	+0,0148704
0,08	+0,08	-0,0801333	+0,0000853	+0,0147462
0,09	+0,09	-0,0792833	+0,0001215	+0,0146055
0,10	+0,10	-0,0783333	+0,0001667	+0,0144486
0,11	+0,11	-0,0772833	+0,0002218	+0,0142755
0,12	+0,12	-0,0761333	+0,0002880	+0,0140864
0,13	+0,13	-0,0748833	+0,0003662	+0,0138813
0,14	+0,14	-0,0735333	+0,0004573	+0,0136605
0,15	+0,15	-0,0720833	+0,0005625	+0,0134239
0,16	+0,16	-0,0705333	+0,0006827	+0,0131718
0,17	+0,17	-0,0688833	+0,0008188	+0,0129042
0,18	+0,18	-0,0671333	+0,0009720	+0,0126215
0,19	+0,19	-0,0652833	+0,0011432	+0,0123237
0,20	+0,20	-0,0633333	+0,0013333	+0,0120111
0,21	+0,21	-0,0612833	+0,0015435	+0,0116838
0,22	+0,22	-0,0591333	+0,0017747	+0,0113421
0,23	+0,23	-0,0568833	+0,0020278	+0,0109860
0,24	+0,24	-0,0545333	+0,0023040	+0,0106160
0,25	+0,25	-0,0520833	+0,0026042	+0,0102322
0,26	+0,26	-0,0495333	+0,0029293	+0,0098349
0,27	+0,27	-0,0468833	+0,0032805	+0,0094242
0,28	+0,28	-0,0441333	+0,0036587	+0,0090006
0,29	+0,29	-0,0412833	+0,0040648	+0,0085641
0,30	+0,30	-0,0383333	+0,0045000	+0,0081153
0,31	+0,31	-0,0352833	+0,0049652	+0,0076542
0,32	+0,32	-0,0321333	+0,0054613	+0,0071814
0,33	+0,33	-0,0288833	+0,0059895	+0,0066969
0,34	+0,34	-0,0255333	+0,0065507	+0,0062013
0,35	+0,35	-0,0220833	+0,0071458	+0,0056947
0,36	+0,36	-0,0185333	+0,0077760	+0,0051776
0,37	+0,37	-0,0148833	+0,0084422	+0,0046503
0,38	+0,38	-0,0111333	+0,0091453	+0,0041133
0,39	+0,39	-0,0072833	+0,0098865	+0,0035667
0,40	+0,40	-0,0033333	+0,0106667	+0,0030111
0,41	+0,41	+0,0007167	+0,0114868	+0,0024468
0,42	+0,42	+0,0048667	+0,0123480	+0,0018743
0,43	+0,43	+0,0091167	+0,0132512	+0,0012939
0,44	+0,44	+0,0134667	+0,0141973	+0,0007062
0,45	+0,45	+0,0179167	+0,0151875	+0,0001114
0,46	+0,46	+0,0224667	+0,0162227	-0,0004899
0,47	+0,47	+0,0271167	+0,0173038	-0,0010974
0,48	+0,48	+0,0318667	+0,0184320	-0,0017104
0,49	+0,49	+0,0367167	+0,0196082	-0,0023286
0,50	+0,50	+0,0416667	+0,0208333	-0,0029514

p	$B^{0,-1}$	$B^{1,-1}$	$B^{2,-1}$	$B^{3,-1}$
0,00	-0,50	+0,1666667	+0,0416667	-0,0055556
0,01	-0,49	+0,1617167	+0,0416418	-0,0055515
0,02	-0,48	+0,1568667	+0,0415680	-0,0055395
0,03	-0,47	+0,1521167	+0,0414462	-0,0055203
0,04	-0,46	+0,1474667	+0,0412773	-0,0054941
0,05	-0,45	+0,1429167	+0,0410625	-0,0054615
0,06	-0,44	+0,1384667	+0,0408027	-0,0054230
0,07	-0,43	+0,1341167	+0,0404938	-0,0053790
0,08	-0,42	+0,1298667	+0,0401520	-0,0053298
0,09	-0,41	+0,1257167	+0,0397632	-0,0052761
0,10	-0,40	+0,1216667	+0,0393333	-0,0052181
0,11	-0,39	+0,1177167	+0,0388635	-0,0051562
0,12	-0,38	+0,1138667	+0,0383547	-0,0050909
0,13	-0,37	+0,1101167	+0,0378078	-0,0050226
0,14	-0,36	+0,1064667	+0,0372240	-0,0049515
0,15	-0,35	+0,1029167	+0,0366042	-0,0048782
0,16	-0,34	+0,0994667	+0,0359493	-0,0048029
0,17	-0,33	+0,0961167	+0,0352605	-0,0047260
0,18	-0,32	+0,0928667	+0,0345397	-0,0046478
0,19	-0,31	+0,0897167	+0,0337848	-0,0045687
0,20	-0,30	+0,0866667	+0,0330000	-0,0044889
0,21	-0,29	+0,0837167	+0,0321852	-0,0044088
0,22	-0,28	+0,0808667	+0,0313413	-0,0043286
0,23	-0,27	+0,0781167	+0,0304695	-0,0042487
0,24	-0,26	+0,0754667	+0,0295707	-0,0041693
0,25	-0,25	+0,0729167	+0,0286458	-0,0040907
0,26	-0,24	+0,0704667	+0,0276960	-0,0040131
0,27	-0,23	+0,0681167	+0,0267222	-0,0039369
0,28	-0,22	+0,0658667	+0,0257253	-0,0038621
0,29	-0,21	+0,0637167	+0,0247065	-0,0037891
0,30	-0,20	+0,0616667	+0,0236667	-0,0037181
0,31	-0,19	+0,0597167	+0,0226068	-0,0036492
0,32	-0,18	+0,0578667	+0,0215280	-0,0035826
0,33	-0,17	+0,0561167	+0,0204312	-0,0035187
0,34	-0,16	+0,0544667	+0,0193173	-0,0034574
0,35	-0,15	+0,0529167	+0,0181875	-0,0033990
0,36	-0,14	+0,0514667	+0,0170427	-0,0033437
0,37	-0,13	+0,0501167	+0,0158838	-0,0032916
0,38	-0,12	+0,0488667	+0,0147120	-0,0032427
0,39	-0,11	+0,0477167	+0,0135282	-0,0031974
0,40	-0,10	+0,0466667	+0,0123333	-0,0031556
0,41	-0,09	+0,0457167	+0,0111285	-0,0031174
0,42	-0,08	+0,0448667	+0,0099147	-0,0030830
0,43	-0,07	+0,0441167	+0,0086928	-0,0030525
0,44	-0,06	+0,0434667	+0,0074640	-0,0030258
0,45	-0,05	+0,0429167	+0,0062292	-0,0030032
0,46	-0,04	+0,0424667	+0,0049893	-0,0029846
0,47	-0,03	+0,0421167	+0,0037455	-0,0029701
0,48	-0,02	+0,0418667	+0,0024987	-0,0029597
0,49	-0,01	+0,0417167	+0,0012498	-0,0029535
0,50	0,00	+0,0416667	0,0000000	-0,0029514

p	$B^0, -1$	$B^1, -1$	$B^2, -1$	$B^3, -1$
0,50	0,00	+0,0416667	0,0000000	-0,0029514
0,51	+0,01	+0,0417167	-0,0012498	-0,0029535
0,52	+0,02	+0,0418667	-0,0024987	-0,0029597
0,53	+0,03	+0,0421167	-0,0037455	-0,0029701
0,54	+0,04	+0,0424667	-0,0049893	-0,0029846
0,55	+0,05	+0,0429167	-0,0062292	-0,0030032
0,56	+0,06	+0,0434667	-0,0074640	-0,0030258
0,57	+0,07	+0,0441167	-0,0086928	-0,0030525
0,58	+0,08	+0,0448667	-0,0099147	-0,0030830
0,59	+0,09	+0,0457167	-0,0111285	-0,0031174
0,60	+0,10	+0,0466667	-0,0123333	-0,0031556
0,61	+0,11	+0,0477167	-0,0135282	-0,0031974
0,62	+0,12	+0,0488667	-0,0147120	-0,0032427
0,63	+0,13	+0,0501167	-0,0158838	-0,0032916
0,64	+0,14	+0,0514667	-0,0170427	-0,0033437
0,65	+0,15	+0,0529167	-0,0181875	-0,0033990
0,66	+0,16	+0,0544667	-0,0193173	-0,0034574
0,67	+0,17	+0,0561167	-0,0204312	-0,0035187
0,68	+0,18	+0,0578667	-0,0215280	-0,0035826
0,69	+0,19	+0,0597167	-0,0226068	-0,0036492
0,70	+0,20	+0,0616667	-0,0236667	-0,0037181
0,71	+0,21	+0,0637167	-0,0247065	-0,0037891
0,72	+0,22	+0,0658667	-0,0257253	-0,0038621
0,73	+0,23	+0,0681167	-0,0267222	-0,0039369
0,74	+0,24	+0,0704667	-0,0276960	-0,0040131
0,75	+0,25	+0,0729167	-0,0286458	-0,0040907
0,76	+0,26	+0,0754667	-0,0295707	-0,0041693
0,77	+0,27	+0,0781167	-0,0304695	-0,0042487
0,78	+0,28	+0,0808667	-0,0313413	-0,0043286
0,79	+0,29	+0,0837167	-0,0321852	-0,0044088
0,80	+0,30	+0,0866667	-0,0330000	-0,0044889
0,81	+0,31	+0,0897167	-0,0337848	-0,0045687
0,82	+0,32	+0,0928667	-0,0345387	-0,0046478
0,83	+0,33	+0,0961167	-0,0352605	-0,0047260
0,84	+0,34	+0,0994667	-0,0359493	-0,0048029
0,85	+0,35	+0,1029167	-0,0366042	-0,0048782
0,86	+0,36	+0,1064667	-0,0372240	-0,0049515
0,87	+0,37	+0,1101167	-0,0378078	-0,0050226
0,88	+0,38	+0,1138667	-0,0383547	-0,0050909
0,89	+0,39	+0,1177167	-0,0388635	-0,0051562
0,90	+0,40	+0,1216667	-0,0393333	-0,0052181
0,91	+0,41	+0,1257167	-0,0397632	-0,0052761
0,92	+0,42	+0,1298667	-0,0401520	-0,0053298
0,93	+0,43	+0,1341167	-0,0404988	-0,0053790
0,94	+0,44	+0,1384667	-0,0408027	-0,0054230
0,95	+0,45	+0,1429167	-0,0410625	-0,0054615
0,96	+0,46	+0,1474667	-0,0412773	-0,0054941
0,97	+0,47	+0,1521167	-0,0414462	-0,0055203
0,98	+0,48	+0,1568667	-0,0415680	-0,0055395
0,99	+0,49	+0,1617167	-0,0416418	-0,0055515
1,00	+0,50	+0,1666667	-0,0416667	-0,0055556

Wij zien, dat (9.19) belangrijk beter convergeert dan (9.18), doch dat (9.20) beter convergeert dan (9.21). Van dit feit kan men weer gebruik maken op dezelfde manier als besproken bij differentiatie.

Een andere belangrijke formule volgt uit (9.14) door te integreren van x_{-1} tot x_1 , dus over het dubbele interval. Dan volgt nl.:

$$\frac{1}{w} \int_{x_{-1}}^{x_1} f(t) dt = 2 \left\{ f_0 + \frac{1}{6} \delta_0^2 - \frac{1}{180} \delta_0^4 + \frac{1}{1512} \delta_0^6 - \frac{23}{226800} \delta_0^8 \dots \right\} \quad (9.22)$$

Door hierin δ_0^2 uit te drukken in functiewaarden volgt:

$$\frac{1}{w} \int_{x_{-1}}^{x_1} f(t) dt = \frac{1}{3} (f_{-1} + 4 f_0 + f_1) - \left(\frac{1}{90} \delta_0^4 - \frac{1}{756} \delta_0^6 + \frac{23}{113400} \delta_0^8 \dots \right) \quad (9.23)$$

In vele gevallen kan de tweede term rechts verwaarloosd worden. Moe nu geïntegreerd worden over een geheel aantal, zeg $2n$, intervallen, dan kan men, anders dan wij tot dusver hebben gedaan, telkens twee intervallen apart beschouwen en daarop de vereenvoudigde vorm van (9.23) toepassen. Dan volgt de formule van Simpson:

$$\int_0^{2nw} f(t) dt = \frac{2w}{3} \left(\frac{1}{2} f_0 + 2 f_1 + f_2 + 2 f_3 + f_4 + 2 f_5 + f_6 + \dots + f_{n-4} + 2 f_{n-3} + f_{n-2} + 2 f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) \quad (9.24)$$

Deze formule is tamelijk ruw, maar zeer eenvoudig om toe te passen en gemakkelijk te onthouden.

Als voorbeeld bepalen wij de volgende integraal: $\int_{1,50}^{1,90} e^x dx$ aan

de hand van de tabel op pag. 39. Daar is de eerste somfunctie niet meegetabelleerd, maar een eenvoudige optelling leert ons, dat, wanneer wij willekeurig $\delta_{1,495}^{-1} = \Delta_{1,50}^{-1} = 0$ stellen, geldt

$$\delta_{1,505}^{-1} = 4,4816890703 \quad ; \quad \delta_{1,895}^{-1} = \Delta_{1,90}^{-1} = 219,3202713425 \text{ en}$$

$$\delta_{1,905}^{-1} = \nabla_{1,90}^{-1} = 226,0061657848 \quad .$$

Formule (9.10) geeft dan:

$$\begin{aligned}
\int_{1,50}^{1,90} e^x dx &= 0,01 \left\{ (219,3202713425 - 0) + \frac{1}{2} (6,6858944423 - \right. \\
&\quad \left. - 4,4816890703) \right. \\
&\quad - \frac{1}{12} (0,0671943562 - 0,0450417240) \\
&\quad + \frac{1}{24} (0,0006753146 - 0,0004526768) \\
&\quad - \frac{19}{720} (0,0000067869 - 0,0000045496) \\
&\quad \left. + \frac{3}{160} (0,0000000683 - 0,0000000455) \right\} \\
&= 0,01 \left\{ 219,3202713425 + 1,1021026860 - 0,0018460527 \right. \\
&\quad \left. + 0,0000092766 - 0,0000000590 + 0,0000000004 \right\} \\
&= 2,204205371938.
\end{aligned}$$

Formule (9.11) geeft:

$$\begin{aligned}
\int_{1,50}^{1,90} e^x dx &= 0,01 \left\{ (226,0061657848 - 0) - \frac{1}{2} (6,6858944423 + \right. \\
&\quad \left. + 4,4816890703) \right. \\
&\quad - \frac{1}{12} (0,0665257613 - 0,0450417240) - \frac{1}{24} (0,0006619425 \\
&\quad \left. + 0,0004526768) \right. \\
&\quad - \frac{19}{720} (0,0000065866 - 0,0000045496) - \frac{3}{160} (0,0000000657 + \\
&\quad \left. + 0,0000000455) \right\} \\
&= 0,01 \left\{ 226,0061657848 - 5,5837917563 - 0,0017903364 \right. \\
&\quad \left. - 0,0000464425 - 0,0000000538 - 0,0000000021 \right\} \\
&= 2,204205371937
\end{aligned}$$

Formule (9.18) geeft:

$$\begin{aligned}
\int_{1,50}^{1,90} e^x dx &= \frac{0,01}{2} \left\{ (445,3264371273 - 4,4816890703) \right. \\
&\quad - \frac{1}{12} (0,1337201175 - 0,0896352753) \\
&\quad \left. + \frac{11}{720} (0,0000133721 - 0,0000089636) \right\} \\
&= \frac{0,01}{2} \left\{ 440,8447480570 - 0,0036737368 + 0,0000000674 \right\} \\
&= 2,204205371938
\end{aligned}$$

De formule van Simpson geeft tenslotte:

$$\int_{1,50}^{1,90} e^x dx = \frac{2 \cdot 0,01}{3} \cdot 330,6308058090 = 2,204205372060$$

De juiste waarde van de integraal is natuurlijk $e^{1,90} - e^{1,50} = 2,204205372941$. Wij zien dus, dat de formules (9.10), (9.11) en (9.18) op enkele eenheden tengevolge van afronding van functiewaarden na het juiste resultaat leveren, terwijl de formule van Simpson 119 eenheden van de 12e decimaal in defect is.

Voorts zien wij, dat integratie, in tegenstelling tot differentiatie een proces is, dat de nauwkeurigheid verhoogt. Immers was de functie in 11 cijfers gegeven, terwijl de integraal hier met een nauwkeurigheid van bijna 13 cijfers uit volgt.

Nu is het bovenstaande voorbeeld in zoverre weinig interessant, dat de beschouwde functie erg glad is. Is ze dat niet, dan moeten wij andere maatregelen treffen. Deze kunnen bijv. hierin bestaan, dat wij van de functie een hulpfunctie aftrekken, welke dezelfde singulariteiten heeft, maar met analytische methoden eenvoudig integreerbaar is. Als voorbeeld beschouwen wij:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} = 1,570796327$$

Stel eens, dat wij niet wisten hoe deze functie analytisch geïntegreerd moest worden. De functie $\sqrt{1-x^2}$ heeft een wortelsingulariteit bij $x = -1$ en $x = 1$.

Deze verwijderen wij, door te schrijven:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2+2x} - \sqrt{2-2x}$$

De functie $f(x)$ is nu veel gladder. Wij maken nu de volgende tabel:

x	$\sqrt{1-x^2}$	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	f(x)	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
-1,0	0						-2,00000					
		80000						11672				
-0,6	0,80000		-62020				-1,88328		-6775			
		17980		44040				4897		1878		
-0,2	0,97980		-17980		-44040		-1,83431		-4897		-1878	
		0		0	0			0		0	0	0
0,2	0,97980		-17980		-44040		-1,83431		-4897		-1878	
		-17980		-44040				-4897		-1878		
0,6	0,80000		-62020				-1,88328		-6775			
		-80000						-11672				
1,0	0						-2,00000					

Integreren wij direct $\sqrt{1-x^2}$ volgens (9.11) dan vinden wij:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 0,4 \left\{ 3,55960 + \frac{1}{6} \cdot 0,80000 + \frac{1}{12} \cdot 0,62020 + \frac{19}{360} \cdot 0,44040 + \frac{3}{80} \cdot 0,44040 \right\} = 0,4 \left\{ 3,55960 + 0,13333 + 0,05168 + 0,02324 + 0,01651 \right\} = 1,51374$$

Integreren wij eerst $f(x)$ volgens (9.11) dan volgt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 0,4 \left(-9,43518 + \frac{1}{6} \cdot 0,11672 + \frac{1}{12} \cdot 0,06775 + \frac{19}{360} \cdot 0,01878 + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{80} \cdot 0,01878 \right) \\ &= 0,4 \left(-9,43518 + 0,01945 + 0,00565 + 0,00099 + 0,00070 \right) = \\ &= -3,76336 \end{aligned}$$

Verder is:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2+2x} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{2-2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{8}{3} .$$

Dus volgt:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{16}{3} - 3,76336 = 1,56997 .$$

Terwijl wij dus bij direct integreren een fout vinden van 0,05706 is deze fout na afsplitsen van de singulariteiten nog slechts 0,00083. Dit is tóch nog niet die precisie, die wij gewoon zijn te behalen. Dit komt, omdat wij weliswaar de hoofdsingulariteiten hebben afgesplitst maar toch zwakkere singulariteiten hebben laten zitten. Immers is bijv. in de buurt van $x = -1$, dus voor $x = -1 + \epsilon$:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2} = \sqrt{2\epsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon} = \sqrt{2\epsilon} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon \dots \right)$$

$$\sqrt{2+2x} = \sqrt{2\epsilon}$$

$$\sqrt{2-2x} = \sqrt{4-2\epsilon} = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon} = 2 \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon \dots \right)$$

$$f(x) = -2 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon \sqrt{\epsilon} \dots$$

Dus is $f(x)$ inderdaad zwak singulier door de termen $\epsilon\sqrt{\epsilon}$, $\epsilon^2\sqrt{\epsilon}$, enz. Willen wij hoge precisie, dan moeten wij ook deze zwakkere singulariteiten afsplitsen.

10. De differentiaalvergelijking $y'' = f(x,y)$.

Wij gaan nu over tot het oplossen van differentiaalvergelijkingen en wel allereerst tot dat van gewone differentiaalvergelijkingen met alle beginvoorwaarden gegeven in een enkel punt. Het lijkt misschien merkwaardig, dat wij niet als eerste geval de vergelijking van de eerste orde $y' = f(x,y)$ bezien doch eerst de speciale vergelijking van de tweede orde $y'' = f(x,y)$, welke van analytisch standpunt bezien moeilijker is, maar het zal spoedig blijken, dat dit op goede gronden geschiedt, nl. omdat de numerieke behandeling juist bij de genoemde tweede orde vergelijking eenvoudiger is.

De genoemde vergelijking is niet de algemeenste vergelijking van de tweede orde, die immers luidt $y'' = f(x,y,y')$, maar het is wel een heel belangrijk geval. Zo is iedere lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$, zoals bekend, te herleiden tot $y'' + F(x)y = G(x)$. dus tot de vorm $y'' = f(x,y)$.

Het op te lossen vraagstuk is dus, y te bepalen als functie van x , indien gegeven is:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y), \\ y(a) &= A, \\ y'(a) &= B. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Wij stellen $Q = w^2 y''$, waarin een w een geschikt gekozen interval is. De differentiaalvergelijking luidt dus

$$Q = w^2 f(x,y). \tag{10.2}$$

Stel nu, dat wij al een oplossing verkregen hebben in de vorm van een tabel met interval w tot en met het argument x_0 voor y en Q .

x_{-3}	y_{-3}	δ_{-3}^{-2}		Q_{-3}	δ_{-3}^2	δ_{-3}^4
			δ_{-3}^{-1}				
x_{-2}	y_{-2}	δ_{-2}^{-2}	$\delta_{-2}^{-3/2}$	Q_{-2}	δ_{-2}^2	δ_{-2}^4
			δ_{-2}^{-1}				
x_{-1}	y_{-1}	δ_{-1}^{-2}	$\delta_{-1}^{-3/2}$	Q_{-1}	δ_{-1}^2		
			δ_{-1}^{-1}				
x_0	y_0	δ_0^{-2}	$\delta_0^{-1/2}$	Q_0	δ_0^2		
			δ_0^{-1}				
x_1		δ_1^{-2}	$\delta_1^{1/2}$				

De tweede somfunctie van Q is dan al verder bekend, nl. tot en met $\delta_1^{-2} Q$. Anders gezegd, bekend zijn $\nabla_0^{-2}, \nabla_0^{-1}, Q_0, \nabla_0, \nabla_0^2, \nabla_0^3, \nabla_0^4, \dots$. Met behulp hiervan zouden wij kunnen integreren tot y_1 , met de formule

$$y_1 = \nabla_0^{-2} + \frac{1}{12} Q_0 + \frac{1}{12} \nabla_0 + \frac{19}{240} \nabla_0^2 + \frac{3}{40} \nabla_0^3 + \frac{863}{12096} \nabla_0^4 + \dots, \tag{10.3}$$

welke wij indertijd niet expliciet hebben neergeschreven, maar die direct volgt met de methode van de vorige paragraaf. Erg aantrekkelijk is deze formule echter niet, want de convergentie van de coëfficiënten is bar slecht. Het zou veel prettiger zijn om met de centrale reeks

$$y_1 = \delta_1^{-2} + \frac{1}{12} Q_1 - \frac{1}{240} \delta_1^2 + \frac{31}{50480} \delta_1^4 - \dots \quad (10.4)$$

te integreren tot y_1 . De coëfficiënten convergeren hier snel tot nul en bovendien ontbreken alle differenties van oneven orde. Het bezwaar ervan is natuurlijk, dat Q_1 , δ_1^2 , δ_1^4 ... niet bekend zijn. Het voordeel van (10.4) is echter zo evident, dat wij een middel zullen aangeven om over dit bezwaar heen te stappen. Wij extrapoleren daartoe een hoge differentie, welke klein en ongeveer constant is - met potlood - uit het hoofd en bouwen van hieruit op tot Q_1 . Deze Q_1 is dan wel niet exact, maar haar coëfficiënt in (10.4) bedraagt slechts $1/12$, zodat een kleine afwijking niet erg stoort. Is δ_1^2 zo groot, dat zij ook nog meetelt in (10.4) dan schatten wij haar grootte uit het hoofd (op een aantal tientallen komt het niet aan!) of bouwen haar eventueel op uit een nog een stap verder geextrapoleerde hoge differentie. Dan passen wij (10.4) toe en vinden y_1 . Uit (10.2) vinden wij dan een betere waarde van Q_1 . De differenties worden gecorrigeerd - met inkt - en zo nodig berekenen wij y_1 nog eens. In de praktijk kiezen wij het interval zo klein, dat y_1 bij de eerste slag raak is. Merk daartoe op, dat een variatie 1 in Q_1 slechts een variatie van $1/12$ in y_1 tengevolge heeft, terwijl een variatie 1 in y_1 slechts een variatie $w^2 \partial f / \partial y$ in Q_1 veroorzaakt, zodat de terugwerking van een variatie 1 in Q_1 op Q_1 zelf slechts $(w^2/12) \partial f / \partial y$ bedraagt. Deze terugwerking is dus bij kleine w en normale $\partial f / \partial y$ zeer gering. Men doet verstandig w zo klein te kiezen, dat de term $\delta_1^2/240$ hoogstens enkele eenheden bedraagt. Het nadeel van meerdere stappen valt in het niet tegenover het bezwaar van vele iteraties.

De eerste afgeleide y' vinden wij direct uit de eerste somkolom; immers $y' = \int Q/w^2 dx$

Nu moet het proces nog gestart worden. Daartoe kan men twee methoden volgen. De eerste is om een reeksontwikkeling van y in de omgeving van a op te stellen. De daarvoor benodigde afgeleiden vinden wij door de differentiaalvergelijking een aantal malen te differentieren naar x . Is de ontwikkeling regulier, dan berekent men verstandig y voor $x = a \pm w$; $a \pm 2w$; enz., tot het differentieschema voldoende vastligt om door te integreren. Is de ontwikkeling niet regulier, bijv. door de aanwezigheid van $\log(x-a)$ in de ontwikkeling, dan berekenen wij y voor $x + a$; $x + 2a$; $x + 3a$; enz.

De tweede manier om te starten is die door iteratie. Men stelt als beginschatting $y = A + B(x-a)$, (vgl. 10.1), en berekent deze y voor een aantal basispunten in de omgeving van $x = a$. Met (10.2) berekenen wij Q en haar differenties. De constanten in de kolommen δ^{-1} en δ^{-2} worden zo gekozen, dat y' en y'' voor $x = a$ de voorgeschreven waarden hebben. Dan kunnen de somkolommen gecompleteerd worden. Vervolgens bepaalt men met (10.4) hieruit een betere benadering voor y en herhaalt het proces tot y niet meer verandert. Daarna kan de gewone integratie beginnen.

Wij zullen een en ander toelichten aan een eenvoudig voorbeeld. Gevraagd te integreren met een precisie van 4 decimalen

$$y'' = y, \text{ met de voorwaarden } y(0) = 1; y'(0) = -1.$$

Men ziet, dat de gezochte oplossing is $y = e^{-x}$, zodat wij achteraf gemakkelijk de numeriek gevonden waarden kunnen controleren. Wij doen echter eerst of wij van niets weten.

Eerst gaan wij starten met een reeksontwikkeling. Uit de differentiaalvergelijking volgt door herhaald differentieren:

$$\begin{array}{ll} y'' = y & y''(0) = 1 \\ y''' = y' & y'''(0) = -1 \\ y^{IV} = y'' & y^{IV}(0) = 1 \\ y^V = y''' & y^V(0) = -1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Hieruit volgt de reeksontwikkeling:

$$y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Een geschikt interval is $w = 0,1$. Wij nemen twee extra decimalen mee in y om het te hard oplopen van afrondingsfouten te vermijden. Dan vinden wij de volgende tabel:

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
-0,3	1,349859	1348735		13499			
			-128349		-1285		
-0,2	1,221403	1220386		12214		123	
			-116135		-1162		-13
-0,1	1,105171	1104250		11052		110	
			-105083*		-1052		-10
0	1,000000	999167		10000		100	
			-95083*		-952		-9
0,1	0,904837	904084		9048		91	
			-86035		-861		-9
0,2	0,818731	818049		8187		82	
			-77848.		-779		-8
	0,740818	740201		7408		74	
			-70439*		-705		

Hierin is Q berekend uit y . Vervolgens is δ^{-2} berekend uit (10.4) en δ^{-1} uit de corresponderende vergelijking:

$$y_{1/2} = \delta_{1/2}^{-1} + \frac{1}{24} \delta_{1/2} - \frac{17}{5760} \delta_{1/2}^3 + \dots \quad (10.5)$$

Wij hebben betrekkelijk veel waarden uitgerekend en wel hierom, omdat een op dergelijke wijze opgebouwd schema zelden geheel kloppend is. Men ziet nl. dat niet altijd δ^{-1} de differentie van δ^{-2} en Q niet altijd de differentie van δ^{-1} is. In het bovenstaande schema zijn twee afwijkingen aanwezig. Dit komt natuurlijk door afrondingsfouten. Het is van belang om een zo nauwkeurig mogelijke start te hebben, omdat elke fout, die in een δ^{-1} schuilt lineair groeit met het aantal gemaakte stappen. Dit is een moeilijkheid, welke vaak veel vaardigheid van de rekenaar vereist.

Als controle kunnen wij nog $y'(0)$ uit de tabel berekenen. Deze klopt, dus de start is in orde.

Nu bepalen wij de start door herhaalde iteratie. Wij nemen dus als beginschatting $y = 1 - x$, berekenen hieruit Q en vinden de constanten uit de semfuncties met behulp van de beginvoorwaarden, waarna ze opgebouwd kunnen worden. Na afloop van deze eerste stap hebben wij dan het volgende schema:

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
-0,3	1,300000	1348416		13000			
			-128083		-1000		
-0,2	1,200000	1220333		12000		0	
			-116083		-1000		0
-0,1	1,100000	1104250		11000		0	
			-105083		-1000		0
0	1,000000	999167		10000		0	
			-95083		-1000		0
0,1	0,900000	904084		9000		0	
			-86083		-1000		0
0,2	0,800000	818001		8000		0	
			-78083		-1000		0
0,3	0,700000	739918		7000		0	
			-71083		-1000		
0,4	0,600000	668835		6000			

Nu integreren wij hieruit betere waarden voor y en herhalen het proces. Dan volgt:

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
-0,3	1,349499	1348733		13495			
			-128348		-1282		
-0,2	1,221333	1220385		12213		121	
			-116135		-1161		-12
-0,1	1,105167	1104250		11052		109	
			-105083		-1052		- 9
0	1,000000	999167		10000		100	
			- 95083		- 952		- 9
0,1	0,904834	904084		9048		91	
			- 86035		- 861		-12
0,2	0,818668	818049		8187		79	
			- 77848		- 782		- 9
0,3	0,740501	740201		7405		70	
			- 70443		- 712		
0,4	0,669335	669758		6693			

Wij herhalen het proces nog eens en vinden dan:

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
-0,3	1,349857(8)	1348734		13499			
			-128349		-1285		
-0,2	1,221402	1220385		12214		123	
			-116135		-1162		-13
-0,1	1,105171	1104250		11052		110	
			-105083		-1052		-10
0	1,000000	999167		10000		100	
			- 95083		- 952		- 9
0,1	0,904838	904084		9048		91	
			- 86035		- 861		- 9
0,2	0,818731	818049		8187		82	
			- 77848		- 779		- 8
0,3	0,740818	740201		7408		74	
			- 70440		- 705		
0,4	0,670315 (9)	669761		6703			

Door weer y te berekenen wijzigen alleen de eerste en laatste y waarden. De nieuwe eindcijfers zijn tussen haakjes bijgeschreven. Verdere iteratie levert geen verschil meer op. Wij hebben nu bijna hetzelfde startschema verkregen als door de reeksontwikkeling. Maar toch is het kleine verschil funest voor de precisie, want de eerste somfunctie δ^{-1} is er door geïnfecteerd en deze drijft nu langzaam maar zeker de δ^{-2} van het goede spoor af. In de tabel op pag. 125 geven

Moderne Rekenmethoden.

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
0	1,000000	999167		10000		100	
0,1	0,904837	904084	-95083	9048	-952	91	-9
0,2	0,818731	818049	-86035	8187	-861	82	-9
0,3	0,740818	740201	-77848	7408	-779	74	-8
0,4	0,670320	669762	-70439	6703	-705	67	-7
0,5	0,606531(0)	606026	-63736	6065	-638	61	-6
0,6	0,548812(0)	548355	-57671	5488	-577	55	-6
0,7	0,496586(+1)	496172	-52183	4966	-522	49	-6
0,8	0,449329(0)	448955	-47217	4493	-473	46	-3
0,9	0,406570(0)	406231	-42724	4066	-427	40	-6
1,0	0,367879(0)	367573	-38658	3679	-387	37	-3
1,1	0,332871(0)	332594	-34979	3329	-350	33	-4
1,2	0,301195(+1)	300944	-31650	3012	-317	30	-3
1,3	0,272533(+1)	272306	-28638	2725	-287	28	-2
1,4	0,246598(+1)	246393	-25913	2466	-259	24	-4
1,5	0,223132(+2)	222946	-23447	2231	-235	23	-1
1,6	0,201898(+1)	201730	-21216	2019	-212	20	-3
1,7	0,182685(+1)	182533	-19197	1827	-192	18	-2
1,8	0,165301(+2)	165163	-17370	1653	-174	17	-1
1,9	0,149571(+2)	149446	-15717	1496	-157	14	-3
2,0	0,135338(+3)	135225	-14221	1353	-143	15	+1
2,1	0,122459(+3)	122357	-12868	1225	-128	11	-4
2,2	0,110806(+3)	110714	-11643	1108	-117	12	+1
2,3	0,100263(+4)	100179	-10535	1003	-105	9	-3
2,4	0,090723(+5)	90647	-9532	907	-96	10	+1
2,5	0,082090(+5)	82022	-8625	821	-86	8	-2
2,6	0,074280(+6)	74218	-7804	743	-78	7	-1
2,7	0,067213(+7)	67157	-7061	672	-71	7	0
2,8	0,060819(+9)	60768	-6389	608	-64		

wij het vervolg van het integratieproces.

Als wij een eindweegs geïntegreerd hebben is Q zo klein geworden, dat δ^2 volkomen verwaarloosbaar is geworden. Het heeft geen zin om dan verder te integreren met zo'n klein interval. Wij verdubbelen nu het interval. Wij nemen een paar functiewaarden over uit de tabel met een dubbel interval. Hieruit is een nieuwe Q te berekenen en somfuncties en differenties. Maar daar schuilt toch een gevaar in. Immers zo wordt δ^{-1} bepaald als differentie van δ^{-2} en er kan dus gemakkelijk een afrondingsfout in sluipen. En een fout in δ^{-1} is funest voor de precisie. Daarom moeten wij δ^{-2} wel uit de integratie bepalen, maar δ^{-1} uit de aansluiting van y' in de beide tabellen. Daartoe merken wij op, dat in de eerste tabel geldt:

$$y'_{2n+1} = \frac{1}{w^2} \int^{x_{2n+1}} w^2 y'' dx = \frac{1}{w^2} \int^{x_{2n+1}} Q dx = \frac{1}{w} \left\{ \delta_{2n+1}^{-1} - \frac{1}{12} \delta_{2n+1}^3 + \dots \right\}$$

$$\frac{11}{720} \delta_{2n+1}^3 \dots \left. \right\} = \frac{1}{2w} \left\{ (\delta_{2n-1/2}^{-1} + \delta_{2n+1/2}^{-1}) - \frac{1}{12} (\delta_{2n-1/2}^3 + \delta_{2n+1/2}^3) + \dots \right\}$$

$$\frac{11}{720} (\delta_{2n-1/2}^3 + \delta_{2n+1/2}^3) \dots \left. \right\}$$

In de tweede tabel is x_{2n+1} geen basispunt. Ter onderscheiding voorzien wij alle grootheden hier van een sterretje. Dan is:

$$y'_{2n+1} = \frac{1}{4w^2} \int^{x_{2n+1}} (2w)^2 y'' dx = \frac{1}{4w^2} \int^{x_{2n+1}} Q^* dx = \frac{1}{2w} \left\{ \delta_{2n+1}^{-1*} + \frac{1}{24} \delta_{2n+1}^{3*} - \frac{17}{5760} \delta_{2n+1}^{5*} + \dots \right\}$$

Dus is:

$$\delta_{2n+1}^{-1*} = \delta_{2n-1/2}^{-1} + \delta_{2n+1/2}^{-1} - \frac{1}{12} (\delta_{2n-1/2}^3 + \delta_{2n+1/2}^3) + \frac{11}{720} (\delta_{2n-1/2}^5 + \delta_{2n+1/2}^5) \dots - \frac{1}{24} \delta_{2n+1}^{3*} + \frac{17}{5760} \delta_{2n+1}^{5*} \dots \quad (10.6)$$

Merk op, dat de differenties met een sterretje met sneller convergerende coëfficiënten voorkomen dan die zonder sterretje. Dit is met opzet zo gedaan, want zij zijn zo veel groter. Ruwweg geldt immers: $\delta^{-1*} = 2 \delta^{-1}$; $\delta^{3*} = 8 \delta^3$; $\delta^{5*} = 32 \delta^5$. Uiteindelijk convergeren de termen met een sterretje dus toch nog minder dan die zonder, maar praktisch is de convergentie nog uitstekend.

Het kan ook voorkomen, dat wij gedwongen worden het interval te verkleinen omdat de functie snel gaat veranderen en de hogere differen-

ties te groot worden. Allereerst moeten wij dan nieuwe functiewaarden interpoleren volgens (8.16); dus:

$$y_{n+1/2} = \frac{1}{2} (y_n + y_{n+1}) - \frac{1}{16} (\delta^2 y_n + \delta^2 y_{n+1}) + \frac{3}{256} (\delta^4 y_n + \delta^4 y_{n+1}) - \frac{5}{2048} (\delta^6 y_n + \delta^6 y_{n+1}) \dots$$

Allicht zal men in de praktijk ook de differenties van y bepalen ter controle, hoewel ze niet gebruikt worden bij de integratie. Daarmee zou men dus kunnen interpoleren. Maar het is nauwkeuriger om de definitie van de integratie aan te houden en te werken met (9.21). Dan is dus:

$$y_{n+1/2} = \frac{1}{2} (\delta_n^{-2} + \delta_{n+1}^{-2}) - \frac{1}{48} (Q_n + Q_{n+1}) + \frac{17}{3840} (\delta_n^2 + \delta_{n+1}^2) - \frac{367}{387072} (\delta_n^4 + \delta_{n+1}^4) + \dots \quad (10.7)$$

Hierin zijn de differenties weer die van Q . Zoals men ziet is de convergentie beter en de differenties van y hoeven niet bekend te zijn.

Bij de aldus bepaalde y 's kan de bijbehorende Q weer bepaald worden en omdat daarvan dus ook de differenties bekend zijn, is ook δ^{-2} bepaald. De eerste somfunctie δ^{-1} moet bij voorkeur weer niet bepaald worden als differentie van δ^{-2} maar uit de voorwaarde van gelijke y 's. Wij merken daartoe op, dat:

$$y'_{n+1/4} = \frac{1}{w} (\delta_{n+1/2}^{-1} - \frac{1}{4} Q_n - \frac{5}{96} \delta_{n+1/2} + \frac{11}{384} \delta_n^2 + \frac{943}{92160} \delta_{n+1/2}^3 - \frac{1963}{368640} \delta_n^4 \dots)$$

hetgeen volgt uit (9.14) of (9.15) voor $p = 1/4$ na een kleine omvorming om de Gauss-vorm te verkrijgen. Bij de tabel met het interval $w/2$ geldt echter volgens (9.19)

$$y'_{n+1/4} = \frac{2}{w} (\delta_{n+1/4}^{-1*} + \frac{1}{24} \delta_{n+1/4}^* - \frac{17}{5760} \delta_{n+1/4}^{3*} \dots),$$

zodat wij de halveringsformule vinden:

$$\delta_{n+1/4}^{-1*} = \frac{1}{2} \delta_{n+1/2}^{-1} - \frac{1}{8} Q_n - \frac{5}{192} \delta_{n+1/2} + \frac{11}{768} \delta_n^2 + \frac{943}{184320} \delta_{n+1/2}^3 - \frac{1963}{737280} \delta_n^4 \dots - \frac{1}{24} \delta_{n+1/4}^* + \frac{17}{5760} \delta_{n+1/4}^{3*} \dots \quad (10.8)$$

Op gelijke wijze vinden wij:

$$\delta_{n-1/4}^{-1*} = \frac{1}{2} \delta_{n-1/2}^{-1} + \frac{1}{8} Q_n - \frac{5}{192} \delta_{n-1/2} - \frac{11}{768} \delta_n^2 + \frac{943}{184320} \delta_{n-1/2}^3 + \frac{1963}{737280} \delta_n^4 \dots - \frac{1}{24} \delta_{n-1/4}^* + \frac{17}{5760} \delta_{n-1/4}^{3*} \dots \quad (10.9)$$

Met behulp van (10.8) en (10.9) kan men dus de benodigde eerste somfuncties bij het gehalveerde interval berekenen.

Als voorbeeld verdubbelen wij het interval in het voorgaande voorbeeld en verkrijgen dan:

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
1,8	0,165301			6612			
2,0	0,135338	134888		5413	-1199	218	
2,2	0,110806	110437	-24449	4432	-981	178	-40
2,4	0,090723	90421	-20017	3629	-803	145	-33
2,6	0,074280	74033	-16388	2971	-658	120	-25
2,8	0,060819	60617	-13417	2433	-538	97	-23
3,0	0,049799(+12)	49633	-10984	1992	-441	80	-17
3,2	0,040777(+15)	40641	-8992	1631	-361	66	-14
3,4	0,033391(+18)	33280	-7361	1336	-295	53	-13
3,6	0,027346(+22)	27255	-6025	1094	-242		

Evenals in de vorige tabel hebben wij achter de functiewaarden tussen haakjes de fout (berekend met behulp van een tabel van e^{-x} en uitgedrukt in eenheden van de zesde decimaal) geplaatst. Wij zien, dat deze fout monotoon toeneemt, eerst langzaam en dan steeds sneller. Dit is typisch voor een vergelijking van dit karakter. Immers naast de "kleine" oplossing e^{-x} , die wij zochten, is er een "grote" oplossing e^{+x} . Kleine afrondingsfouten introduceren steeds een weinig van deze grote oplossing, welke in tegenstelling tot de gezochte kleine oplossing, snel aangroeit. Men moet hier dus verwachten, dat de fout zich gedraagt als e^x . Dit klopt, want van 3,0 tot 3,6 neemt de fout toe van 12 tot 22, dus is toegenomen in de verhouding 1,8 en $e^{0,6} = 1,8$.

Als men in een dergelijk geval door wiskundige overwegingen weet, wat de functiewaarde is voor een zekere grote waarde van x , dan kan men tot daar numeriek integreren en de gebleken fout corrigeren door van de gevonden oplossing zoveel maal de grote oplossing (die ook bepaald moet worden) af te trekken tot de fout in het controlepunt nul wordt. In ons geval zou men dan af moeten trekken $0,0000006 e^x$. Als men dit nagaat blijkt inderdaad, dat de fout grotendeels verdwenen is.

Wanneer men de grote oplossing van een dergelijke vergelijking bepaalt, heeft men natuurlijk geen last van de kleine oplossing. Deze wordt wel steeds door afrondingsfouten geïntroduceerd maar sterft

vanzelf steeds weer uit. De fout groeit daarom lang zo snel niet aan. Wij illustreren dit door weer $y'' = y$ op te lossen, maar nu met $y(0) = y'(0) = 1$, zodat de gezochte oplossing is $y = e^x$, d.w.z. de grote oplossing.

Wij starten weer met een reeksontwikkeling en integreren. Het is overigens in dit speciale geval natuurlijk slechts de voortzetting van de vorige oplossing voor negatieve x . Op pag. 130 vindt men de integratietabel. Men ziet, dat de fout aanzienlijk gunstiger is dan in het geval e^{-x} .

In de tabel ziet men tweemaal in de kolom van de eerste somfunctie een cijfer, dat niet schijnt te kloppen. Zo op regel 1,85, waar staat $635717 \neq 575220 + 60496$ en op regel 2,15, waar staat $858128 \neq 776467 + 81662$. De reden hiervan is de volgende. Bij de vorming van Q moeten wij natuurlijk op het laatst afronden. Zulk een afronding is dan klein, dan groot, dan positief, dan negatief. Gemiddeld heffen de invloeden ervan elkaar grotendeels op, maar het kan gebeuren, dat er vlak achter elkaar een paar grote afrondingen met hetzelfde teken optreden. In ons geval is dat gemakkelijk te zien, want wij behoeven slechts in de y -kolom te kijken. Dan zien wij, dat op regel 1,7 en op regel 1,8 tweemaal achter elkaar een afronding van $-0,47$ is opgetreden. Dit hebben wij gecorrigeerd door de eerste somfunctie een eenheid extra te geven. Even later treedt het tegengestelde effect op.

Natuurlijk kan men achteraf niet altijd zo eenvoudig als hier zien in welke richting de afrondingen gericht waren. Men werkt daarom wel met een * notatie. Een hoge punt achter een cijfer, dus * betekent, dat er ongeveer $\frac{1}{3}$ eenheid nog bij moet. Een lage punt achter een cijfer, dus . betekent, dat er ongeveer $\frac{1}{3}$ eenheid af moet. Geen punt betekent ten slotte, dat het cijfer ongeveer goed is. Aan de hand van de punten kan men zich dan een snel overzicht vormen van de balans van de afrondingen.

Moderne Rekenmethoden.

x	y	δ^{-2}	δ^{-1}	$10^6 \cdot Q$	δ	δ^2	δ^3
-0,2	0,818731	818049	.	8187			
-0,1	0,904837	904083	86035	9048	861		
0	1,000000	999167	95053	10000	952	91	9
0,1	1,105171	1104250	105083	11052	1052	100	10
0,2	1,221403	1220386	116135	12214	1162	110	13
0,3	1,349859	1348735	128349	13499	1285	123	13
0,4	1,491825	1490582	141848	14918	1419	136	14
0,5	1,648721(0)	1647348	156756	16487	1569	150	15
0,6	1,822119(0)	1820601	173253	18221	1734	165	18
0,7	2,013752(-1)	2012075	191474	20138	1917	183	17
0,8	2,225541(0)	2223687	211612	22255	2117	200	24
0,9	2,459603(0)	2457554	233867	24596	2341	224	22
1,0	2,718281(-1)	2716017	258463	27183	2587	246	26
1,1	3,004165(-1)	3001663	285646	30042	2859	272	28
1,2	3,320116(-1)	3317351	315688	33201	3159	300	33
1,3	3,669296(-1)	3666240	348889	36693	3492	333	34
1,4	4,055200(0)	4051822	385582	40552	3859	367	39
1,5	4,481689(0)	4477956	425134	44817	4265	406	42
1,6	4,953032(0)	4948907	470951	49530	4713	448	48
1,7	5,473947(0)	5469388	520481	54739	496	5209	52
1,8	6,049647(0)	6044608	575220	60496	548	5757	58
1,9	6,685894(0)	6680325	635717	66859	606	6363	63
2,0	7,389056(0)	7382901	702576	73891	669	7032	70
2,1	8,166170(0)	8159368	776467	81662	739	7771	78
2,2	9,025013(0)	9017496	858128	90250	817	8588	87
2,3	9,974182(0)	9965874	948378	99742	904	9492	94
2,4	11,023175(-1)	11013994	1048120	110232	998	10490	105
2,5	12,182493(-1)	12172346	1158352	121825	1103	11593	116
2,6	13,463737(-1)	13452523	1280177	134637	1219	12812	129
2,7	14,879731(-1)	14867337	1414814	148797	1348	14160	141
2,8	16,444645(-2)	16430948	1563611	164446	1489	15649	

11. Andere gewone differentiaalvergelijkingen.

De reden, waarom de numerieke integratie in de vorige paragraaf betrekkelijk eenvoudig en nauwkeurig geschiedde is gelegen in het feit dat in de vergelijking geen afgeleiden van oneven orde optreden. Zoals wij zullen zien geeft het optreden van een eerste afgeleiden al direct een complicatie van het integratieschema. Zoals al in de vorige paragraaf is opgemerkt, kan in een lineaire vergelijking van de tweede orde een eventuele eerste afgeleide altijd worden geelimineerd. Dit kan ook met een vergelijking van de eerste orde. Is nl. $y' = f(x,y)$, dan volgt door differentiatie naar x : $y'' = f_x + f_y \cdot y'$, waarin de subscripten x resp. y partiele differentiatie naar x resp. y aangeven. Door y' te elimineren volgt: $y'' = f_x + f \cdot f_y$, dus een vergelijking van de vorm, zoals deze behandeld is in de vorige paragraaf. Is bijv. de vergelijking $y' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$, dan volgt $y'' = x - yy'$ en dus $y'' = x - \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^3$. Er schuilt echter een gevaar in een dergelijke omvorming. Immers de tweede-orde vergelijking heeft meer oplossingen dan de oorspronkelijke van de eerste orde en er bestaat het gevaar, dat er onder de nieuwe oplossingen gevaarlijke "grote" zijn, nl. die welke veel sneller aangroeien dan de gewenste oplossing en die, zoals wij hebben gezien, de onaangename eigenschap hebben juist de afronding-fouten buiten verhouding te laten aangroeien. Ware bijv. de op te lossen vergelijking $y' = -y$ met $y(0) = 1$, dus de gezochte oplossing $y = e^{-x}$. Alle andere oplossingen zijn $y = Ae^{-x}$, dus ongevaarlijk. Door omzetting in een vergelijking van de tweede orde volgt $y'' = y$ met $y(0) = 1$ en $y'(0) = -1$. Maar nu zijn er naast de onschuldige nevenoplossingen $y = Ae^{-x}$ ook grote oplossingen $y = Be^x$. Het is dus veiliger bij de oorspronkelijke vergelijking te blijven, tenzij men door voorafgaande analyse kan aantonen (wat soms het geval is), dat het gevaar niet aanwezig is.

Wij gaan nu over tot het oplossen van de vergelijking $y' = f(x,y)$ met de beginvoorwaarde $y(a) = A$. Wij stellen

$$P = wf(x,y). \tag{11.1}$$

Wij onderstellen nu weer een aantal functiewaarden berekend en bereken het volgende schema:

x_{-3}	y_{-3}		P_{-3}	δ_{-3}^2	δ_{-3}^4
		$\delta_{-5/2}^{-1}$		$\delta_{-5/2}^{-1}$	$\delta_{-5/2}^3$
x_{-2}	y_{-2}		P_{-2}	δ_{-2}^2	δ_{-2}^4	
		$\delta_{-3/2}^{-1}$		$\delta_{-3/2}^{-1}$	$\delta_{-3/2}^3$	
x_{-1}	y_{-1}		P_{-1}	δ_{-1}^2		
		$\delta_{-1/2}^{-1}$		$\delta_{-1/2}^{-1}$		
x_0	y_0		P_0			
x_1		$\delta_{1/2}^{-1}$				

Natuurlijk zouden wij graag de snel convergente ontwikkeling (9.18) om de volgende functiewaarde y_1 te vinden, dus:

$$y_1 = \delta_0^{-1} - \frac{1}{12} \delta_0 + \frac{11}{720} \delta_0^3 - \dots \quad (11.2)$$

Maar dit is nu wel heel bezwaarlijk. Immers om de hoofdterm van deze ontwikkeling, nl. δ_0^{-1} te vinden, moeten wij al extrapoleren, in tegenstelling tot het geval van de vorige paragraaf. Wij kunnen dus nooit verwachten zo direct een redelijke waarde voor y_1 te vinden. Een methode om hieraan te ontkomen levert (9.22), dus:

$$y_1 = y_{-1} + 2 P_0 + \frac{1}{3} \delta_0^2 - \frac{1}{90} \delta_0^4 + \dots \quad (11.3)$$

Hierin is P_0 bekend en wij behoeven dus pas voor δ_0^2 te extrapoleren. De factor $\frac{1}{3}$ is alvast beter, maar allicht toch nog niet zeker genoeg. De gedachtengang is nu deze, dat men twee maal y berekent, nl. eerst voorlopig y_1 met (11.3), waardoor P_1 bij grote benadering bekend wordt, zodat ook $\delta_{1/2}$ bij grote benadering bekend is en daarna een definitieve waarde y_0 volgens (11.2), waarbij nu nog slechts voor $\delta_{-1/2}^3$ behoeft te worden geextrapoleerd, zodat de geextrapoleerde waarde slecht met de factor $\frac{11}{1440}$ in de uiteindelijke integratieformule voorkomt. Vervolgens berekenen wij weer een voorlopige y_2 en dan een definitieve y_1 , enz. Men kiese natuurlijk het interval zo klein, dat de voorlopige P -waarden niet meer gecorrigeerd behoeven te worden om onnodig itereren te ontgaan.

Dit proces lijkt misschien wat ingewikkeld, maar men is snel eraan gewend en het is zeer nauwkeurig. De convergentie van (11.2) is zodanig, dat het schommelen van de hoge differenties door de afrondingsfouten er volledig door onderdrukt wordt, zodat het antwoord niet afhangt van het aantal in rekening gebrachte differenties (boven een minimum aantal natuurlijk).

Is men bereid wat slordiger te werk te gaan, dan kan men snellere methodes gebruiken. De snelste en ruwste is die van Adams. In de oorspronkelijke versie werkt deze methode niet met een kolom van somfuncties, doch men berekent de eerste differentie van y en wel volgens (9.7) dus:

$$\delta_{1/2} y = P_0 + \frac{1}{2} \nabla_0 + \frac{5}{12} \nabla_0^2 + \frac{3}{8} \nabla_0^3 + \frac{251}{720} \nabla_0^4 + \frac{95}{288} \nabla_0^5 + \dots \quad (11.4)$$

De methode is zeer eenvoudig, want alle termen rechts zijn bekend, dus $\delta_{1/2} y$ volgt direct. Daaruit volgt y_1 en P_1 en hiermee ∇_1^k en de stap is klaar. Hierop zijn echter twee grote bezwaren. Allereerst convergeren de coëfficiënten van ∇_0^k uiterst langzaam (nl. als $1/\log k$). Deze convergentie is veel te zwak om het aangroeien van de hogere differenties door afrondingsfouten te niet te doen, zodat het antwoord van

(11.4) afhangt van het aantal in rekening gebrachte differenties. Men moet bij de toepassing ervan zichzelf een idee verschaffen van de orde van differenties, welke nog essentieel is met bewuste verwaarlozing van differenties welke waarde hoofdzakelijk bestaat uit afrondingsbijdragen. Het succes van deze eliminatie hangt in hoge mate af van de bekwaamheid van de rekenaar. Hoe slecht de coëfficiënten convergeren ziet men wellicht beter uit de decimale waarden ervan, welke luiden: 1 ; 0,5 ; 0,4167 ; 0,375 ; 0,3486 ; 0,3299 ;

Het tweede bezwaar is het gebruik van δy in plaats van $\delta^{-1} P$. Immers δy is tamelijk onzeker (in dit speciale geval al erg onzeker) en y wordt dus opgebouwd uit onzekere differenties, zodat tamelijk grote fouten na enige tijd in y op zullen treden. Daarentegen is P veel nauwkeuriger wegens de factor w in (11.1), zodat de fouten veel minder snel in $\delta^{-1} P$ opgebouwd worden.

Aan het laatste bezwaar is eenvoudig tegemoet te komen. Immers men gebruikte de $\delta^{-1} P$ wel en vinde y_1 uit

$$y_1 = \nabla_0^{-1} + \frac{1}{2} P_0 + \frac{5}{12} \nabla_0 + \frac{3}{8} \nabla_0^2 + \frac{251}{720} \nabla_0^3 + \frac{95}{288} \nabla_0^4 + \dots \quad (11.5)$$

Men ziet hier en passant nog een ander voordeel van deze methode. De coëfficiënten van de differenties zijn nu alle een plaats verschoven en dus kleiner. Dit voordeel weegt niet zo erg zwaar, omdat de coëfficiënten zo langzaam afnemen, maar men kan dezelfde beschouwingen ook bij de sneller convergente reeksen, als bijv. de centrale reeksen, toepassen en daar is het van groot belang.

Aanzienlijk verbeteren kan men (11.4) door niet ∇_0^k , maar ∇_1^k te gebruiken. Immers volgens (9.8) is:

$$\delta_{1/2} y = P_1 - \frac{1}{2} \nabla_1 - \frac{1}{12} \nabla_1^2 - \frac{1}{24} \nabla_1^3 - \frac{19}{720} \nabla_1^4 - \frac{3}{160} \nabla_1^5 - \dots \quad (11.6)$$

De coëfficiënten van ∇_1^k convergeren nu veel beter (nl. als $1/k$). De moeilijkheid is natuurlijk, dat wij ∇_1^k niet kennen, omdat P_1 nog niet bekend is. Men kan echter weer op twee wijzen tot een voorlopige waarde van P_1 komen. Ofwel, men past eerst (11.4) toe, vindt y_1 en hieruit P_1 , ofwel men extrapoleert een hoge differentie en vindt direct een voorlopige P_1 . Dit laatste is natuurlijk veel ruwer. Weliswaar is de convergentie van de coëfficiënten van (11.6) nog niet genoeg om uiteindelijk de afrondingsdifferenties de baas te worden, maar het is toch al veel beter.

Er zijn hier weer twee dingen op te merken. Allereerst onderstellen wij, dat na toepassing van (11.6) blijkt dat de voorlopige waarde van P_1 een aantal eenheden moet worden gecorrigeerd. Dan moeten alle ∇_1^k met dit zelfde aantal eenheden worden gecorrigeerd. Maar dan is direct

de correctie van $\delta_{1/2}y$ bekend. Voor iedere eenheid correctie in P_1 is nl. de correctie in $\delta_{1/2}y : 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{19}{720} - \frac{3}{160} \dots$, waarbij men zoveel termen nemen moet als men termen in (11.6) in rekening had gebracht. Dat is dus zeer eenvoudig, maar tegelijk blijkt weer, hoe slecht (11.6) toch nog is. Immers de correctiereeks convergeert niet, want de termen nemen asymptotisch af als $1/k$. Zo vindt men voor de correctie van $\delta_{1/2}y$ bij toenemende orde van in rekening gebrachte differenties achtereenvolgens : $1 ; \frac{1}{2} = 0,5 ; \frac{5}{12} = 0,4167 ; \frac{3}{8} = 0,375 ; \frac{251}{720} = 0,3486 ; \frac{95}{288} = 0,3299 ; \dots$. Maar dit bezwaar is meer van theoretische, dan van praktische aard, want deze getallen zijn toch bijna constant. Dit moeten wij nu zelfsvel zeggen willen wij consequent zijn! Immers deze correctiegrootheden zijn precies dezelfde getallen als de coëfficiënten in (11.4), waarvan wij zeiden, dat zij zo langzaam afnemen! Dit brengt ons dan vanzelf op de volgende opmerking. Het is nl. geen toeval, dat de coëfficiënten van (11.4) weer opdoken en wij kunnen hier handig van gebruik maken.

Zij nl. $f_{-k,0}^*(x)$ het interpolerende polynoom van $f(x)$ behorende bij de basispunten $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$. Evenzo zij $f_{-k+1,1}^*(x)$ dat, behorende bij $x_{-k+1}, x_{-k+2}, \dots, x_1$ en $f_{-k,1}^*(x)$ dat, behorende bij $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0, x_1$. Als $x = x_0 + pw$, is volgens de voorwaartse formule van Newton (2.13):

$$f_{-k,1}^*(x) - f_{-k,0}^*(x) = \binom{p+k}{k+1} \Delta_{-k}^{k+1} = \binom{p+k}{k+1} \nabla_1^{k+1}$$

Volgens de achterwaartse formule (2.14) is:

$$f_{-k,1}^*(x) - f_{-k+1,1}^*(x) = (-1)^{k+1} \binom{-p+1}{k+1} \nabla_1^{k+1}.$$

Dus is:

$$\begin{aligned} f_{-k+1,1}^*(x) - f_{-k,0}^*(x) &= \left\{ \binom{p+k}{k+1} - (-1)^{k+1} \binom{-p+1}{k+1} \right\} \nabla_1^{k+1} \\ &= \frac{(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)p - (p-1)p(p+1)\dots(p+k-1)}{(k+1)!} \nabla_1^{k+1} \\ &= \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \nabla_1^{k+1} = (-1)^k \binom{-p}{k} \nabla_1^{k+1}. \end{aligned}$$

Maar de coëfficiënt van ∇_1^{k+1} , nl. $(-1)^k \binom{-p}{k}$ is juist de laatste coëfficiënt in de achterwaartse ontwikkeling van $f_{-k,0}^*(x)$. Dit blijft natuurlijk ook na integratie. Dus men behoeft de uitdrukking (11.6) niet te berekenen. Men behoeft slechts één differentie meer te maken dan men bij de integratie gebruikt en de laatste coëfficiënt, die men in (11.4) gebruikt heeft, maal deze extra differentie is de correctie. Omdat deze correctie natuurlijk zeer klein is, kan men haar in het onderstaande

tabelletje aflezen:

∇_1^k	$\frac{5}{12} \nabla_1^3$	$\frac{3}{8} \nabla_1^4$	$\frac{251}{720} \nabla_1^5$	$\frac{95}{288} \nabla_1^6$
1	0,4	0,4	0,3	0,3
2	0,8	0,8	0,7	0,7
3	1,2	1,1	1,0	1,0
4	1,7	1,5	1,4	1,3
5	2,1	1,9	1,7	1,6
6	2,5	2,2	2,1	2,0
7	2,9	2,6	2,4	2,3
8	3,3	3,0	2,8	2,6
9	3,8	3,4	3,1	3,0
10	4,2	3,8	3,5	3,3

In dit tabelletje kan men blijkens het voorafgaande ook direct de correctie aflezen voor een verandering in P_1 ten gevolge van een volgende iteratie.

Recapitulerend werkt de methode dus als volgt: Bereken een voorlopige $\delta_{1/2}y$ met (11.4), daarbij termen tot en met ∇_0^k in rekening brengend. Hieruit volgt een voorlopige y_1 en een voorlopige P_1 . Maak differenties tot en met ∇_1^{k+1} en lees uit het tabelletje de correctie op $\delta_{1/2}y$ af in de kolom C ∇_1^{k+1} . Corrigeer y_1 en zo nodig P_1 . Is P_1 veranderd lees dan een nieuwe correctie op $\delta_{1/2}y$ af in het tabelletje in dezelfde kolom als zoeven, enz. Men doet verstandig met het oog op de afrondingsfouten de $\delta_{1/2}y$ in een decimaal meer te schrijven dan de y -kolom en bij voorkeur telle men de correcties niet bij elkaar op maar corrigeert steeds van voren af aan, d.w.z. men berekent wat de nieuwe ∇_1^{k+1} is en corrigeert op grond hiervan steeds op de oorspronkelijke $\delta_{1/2}y$.

Natuurlijk gaan deze beschouwingen practisch onveranderd door als wij i.p.v. (11.4) gebruik maken van (11.5) en de corresponderende gewijzigde formule voor (11.6), nl.

$$y_1 = \nabla_1^{-1} - \frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{12} \nabla_1 - \frac{1}{24} \nabla_1^2 - \frac{19}{720} \nabla_1^3 - \frac{3}{160} \nabla_1^4 - \dots \quad (11.7)$$

Slechts leze men de correcties nu een kolom meer naar rechts af. Als voorbeeld kiezen wij de differentiaalvergelijking $y' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$ met $y(0) = 0$. De oplossing is nu niet meer elementair, zoals in onze vroegere voorbeelden het geval was. Zij kan worden uitgedrukt in zg. Weberfuncties, welke evenwel niet getabelleerd zijn. Voor de start ontwikkelen wij y in een machtreeks:

$$y = \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{504} x^7 + \frac{1}{33264} x^{11} - \frac{1}{1905120} x^{15} + \dots,$$

waaruit wij y berekenen voor $x = 0; \pm 0,1; \pm 0,2$ en $\pm 0,3$. Hierbij kunnen wij P en haar differenties berekenen. Vervolgens berekenen wij uit de reeksontwikkeling y' voor $x = \pm 0,05; \pm 0,15; \pm 0,25$. Dan kunnen wij $\delta^{-1}P$ berekenen met behulp van (9.19) dus met:

$$\delta_{\frac{1}{2}}^{-1} = y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_{\frac{1}{2}} + \frac{17}{5760} \delta_{\frac{1}{2}}^3 - \dots \quad (11.1)$$

Wij hebben nu de integratie uitgevoerd volgens de hierboven genoemde methoden. Wij geven hier het resultaat volgens de oorspronkelijke Adams-methode en volgens de centrale methode. Wij hebben eerst differenties tot en met δ^3 in rekening gebracht en vervolgens ook δ^4 en tenslotte ook δ^5 . Dit maakt bij de centrale methode geen verschil, maar bij Adams methode wel. In extenso geven wij eerst Adams' methode tot en met δ^3 en de centrale methode:

Oorspronkelijke Adams-methode tot en met δ^3 :

x	y	δy	$10^6 \cdot P$	δ	δ^2	δ^3
0	0		0		1000	
		167		500		0
0,1	0,000167		500		1000	
		1166		1500		- 1
0,2	0,001333		2000		999	
		3167		2499		- 3
0,3	0,004500		4499		996	
		6164		3495		- 7
0,4	0,010664(1)		7994		989	
		10155		4484		-16
0,5	0,020819(1)		12478		973	
		15129		5457		-28
0,6	0,035948(4)		17935		945	
		21063		6402		-45
0,7	0,057011(7)		24337		900	
		27921		7302		-68
0,8	0,084932(12)		31639		832	
		35648		8134		
0,9	0,120580(20)		39773			
		44161				
1,0	0,164741(29)					

Centrale Methode:

x	y	$10^6 \cdot y_v$	δ^{-1}	$10^6 \cdot P$	δ	δ^2	δ^3	δ^4
0	0			0		1000		0
			0		500		0	
0,1	0,000167			500		1000		- 1
			500		1500		- 1	
0,2	0,001333			2000		999		- 2
			2500		2499		- 3	
0,3	0,004500			4499		996		- 4
			6999		3495		- 7	
0,4	0,010663(0)	10663		7994		989		- 9
			14993		4484		- 16	
0,5	0,020818(0)	20818		12478		973		-11
			27471		5457		- 27	
0,6	0,035944(0)	35944		17935		946		-21
			45406		6403		- 48	
0,7	0,057003(-1)	57002		24338		898		-17
			69744		7301		- 65	
0,8	0,084919(-1)	84921		31639		833		-32
			101383		8134		- 97	
0,9	0,120559(-1)	120555		39773		736		-29'
			141156		8870		-126'	
1,0	0,164711(-1)	164715		48643		610'		-40''
			189799		9480'		-166''	
1,1		218047		58123'				

Met een enkel accent zijn die waarden aangegeven, welke nog niet vastliggen maar , vrijwel zeker niet meer gewijzigd worden. Met een dubbel accent zijn aangegeven de waarden die door ruwe extrapolatie zijn verkregen.

Nu geven wij een overzicht van de fouten (in eenheden van de zesde decimaal van y) als functie van x voor de verschillende methoden:

x	Adams δ^3	Adams δ^4	Adams δ^5	Centraal
0,4	1	1	1	0
0,5	1	1	0	0
0,6	4	3	1	0
0,7	7	3	-1	-1
0,8	12	7	2	-1
0,9	20	5	-3	-1
1,0	29	10	3	-1

Het is duidelijk dat de centrale methode verre preferabel is. Adams'methode met δ^5 in rekening gebracht geeft hier weliswaar gemiddeld ongeveer een goed resultaat, maarde afrondingsdifferenties induceren een felle fluctuatie in de functiewaarden, welke door de centrale methode volkomen gesmoord worden zonder een stelselmatige afwijking te veroorzaken.

Na al deze voorbereidingen is het nu niet moeilijk meer om andere differentiaalvergelijkingen, zoals de algemene vergelijking van de tweede orde, vergelijkingen van hogere orde en simultane vergelijkingen te integreren. Voor de algemene vergelijking van de tweede graad, dus $y'' = f(x, y, y')$ gaat men als volgt te werk. Stel, dat y_{-1} en y_0 provisorisch bekend zijn. Dan zijn ook Q_{-1} en Q_0 provisorisch (maar veel beter) bekend. Extrapoler dan Q_1 uit een hoge differentie en eventueel ook δ_1^2 en bereken y_1 uit

$$y_1 = \delta_{-1}^{-2} + \frac{1}{12} Q_1 - \frac{1}{240} \delta_1^2 \dots$$

Vervolgens corrigeren wij P_{-1} door:

$$P_{-1} = \delta_{-1}^{-1} - \frac{1}{12} \delta_{-1} + \frac{11}{720} \delta_1^3 \dots$$

Extrapoler nu P_1 uit:

$$P_1 = P_{-1} + 2 Q_0 + \frac{1}{3} \delta_0^2 - \frac{1}{90} \delta_0^4 \dots$$

Nu kunnen wij Q_1 berekenen, uit de differentiaalvergelijking en differenties maken. Ten slotte verifiëren wij, dat de gecorrigeerde waarden van y_{-1} , P_{-1} , δ_{-1}^2 , etc. de waarde van Q_{-1} of de waarde van y_{-1} , die hieruit volgt, niet meer veranderen en corrigeren, indien noodzakelijk.

Simultane vergelijkingen en vergelijkingen van hogere orde vereisen nu geen verdere bespreking. Zij zijn zonder meer met de genoemde methoden te integreren.

Wij willen deze paragraaf besluiten met nog een gans andere methode, speciaal geschikt voor vergelijkingen van formeel eenvoudig karakter en voor hoge precisie. Zij berust op de aanschakeling van de Taylorontwikkelingen. Zij de vergelijking:

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

Voor de beginwaarde van het argument, zeg x_0 , zijn $x, y', \dots, y^{(k-1)}$ uit de beginvoorwaarden bekend. Door de vergelijking aan aantal malen te differentieren vinden wij dan ook $y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots$. Is $x_1 = x_0 + w$, dan volgen $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ voor x_1 uit de Taylorontwikkelingen:

$$y_1 = y_0 + w y_0' + \frac{w^2}{2!} y_0'' + \frac{w^3}{3!} y_0''' + \dots$$

$$y_1' = y_0' + w y_0'' + \frac{w^2}{2!} y_0''' + \frac{w^3}{3!} y_0^{(4)} + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_1^{(k-1)} = y_0^{(k-1)} + w y_0^{(k)} + \frac{w^2}{2!} y_0^{(k+1)} + \frac{w^3}{3!} y_0^{(k+2)} + \dots$$

Dus zijn voor x_1 weer $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ bekend en men kan het proces herhalen. Daarbij passen wij de volgende controle toe. Wij stappen nl. niet alleen een stap vooruit, maar ook telkens een stap achteruit, door in de vorige vergelijkingen w door $-w$ te vervangen. Dan moeten de reeds bekende waarden van het vorige basispunt weer opgeleverd worden, wat alle berekende afgeleiden met één slag controleert. Een uitstekende rekenmachine voor dit doel is de Madas 20 AT, waarop wij de twee stappen, vooruit en achteruit tegelijk kunnen uitvoeren en zodoende ook nog de zekerheid hebben, dat voor de voorwaartse stap de goede bedragen zijn genomen.

Deze methode is alleen geschikt als de hogere afgeleiden eenvoudig te berekenen zijn. Als voorbeeld kiezen wij weer de vergelijking:

$$y' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$$

Hieruit volgt: $y'' = x - y y'$

$$y''' = 1 - y'^2 - y y''$$

$$y^{(4)} = 3 y' y'' - y y'''$$

$$y^{(5)} = -3 y''^2 - 4 y' y^{(4)} - y y^{(5)}$$

$$y^{(6)} = -10 y'' y^{(4)} - 5 y' y^{(5)} - y y^{(6)}$$

.....

Men doet verstandig nu zg. gereduceerde afgeleiden in te voeren, door te stellen

$$z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{k!}$$

Dan gaan de bovenstaande vergelijkingen over in:

$$z' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} z^2$$

$$z'' = \frac{1}{2} (x - z z')$$

$$z''' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^2 - z z'' \right)$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{4} (-z' z'' - z z''')$$

$$z^{(5)} = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2} z''^2 - z' z^{(4)} - z z^{(5)} \right)$$

$$z^{(6)} = \frac{1}{6} (-z'' z^{(4)} - z' z^{(5)} - z z^{(6)})$$

.....

en de integratievergelijking in:

$$z_1 = y_1 = z_0 + w z'_0 + w^2 z''_0 + w^3 z'''_0 + w^4 z^{iv}_0 + \dots,$$

zodat het aantal constanten, waarmee rekening moet worden gehouden tot een minimum is beperkt. Wij voeren de integratie weer een eindweegs door, waarbij van ieder paar functiewaarden de bovenste steeds door de voorwaartse stap is berekend, terwijl de onderste de controlewaarde is, welke door een stap terug is gevonden. Wij hebben het interval nu groter gekozen, nl. $w = 0,2$. In het algemeen kan het interval vrij groot gekozen worden, maar het snelste werkt men wel met een matig groot interval.

x	$z = y$	$z' = y'$	$z'' = \frac{1}{2} y''$	$z''' = \frac{1}{3!} y'''$	$z^{iv} = \frac{1}{4!} y^{iv}$	$z^v = \frac{1}{5!} y^v$	$z^w = \frac{1}{6!} y^w$
0	0 0,000000	0	0	0,166667	0	0	0
0,2	0,001333(0) 0,001333	0,019999	0,099987	0,166556	-0,000555	-0,001666	-0,002773
0,4	0,010663(0) 0,010663	0,079943	0,199574	0,164892	-0,004428	-0,006610	-0,005414
0,6	0,035944(0) 0,035944	0,179354	0,296777	0,157750	-0,014725	-0,014360	-0,007277
0,8	0,084919(-1)	0,316394	0,386566	0,139040	-0,033529	-0,023172	-0,006862
1,0	0,164711(-1)						

Zoals men ziet is de precisie uitstekend, maar de methode vereist veel rekenwerk.

12. Relaxatie. Bekend is de wijze, waarop men in Kampen het vraagstuk oploste van het verwijderen van de berg aarde, welke gedolven was uit de bouwput van een nieuw stadhuis. Men groef nl. naast de berg een groot gat, waar de berg in geborgen kon worden. Weliswaar ontstond bij het graven van dit gat weer zo'n berg, maar hiervoor groef men weer een gat, enz., totdat eindelijk de berg buiten de gemeente lag, waar men ze rustig liet liggen. Wij willen nagaan, hoe deze bouwmeester een vlakke weg aan zou leggen in een heuvelachtig landschap. Hij zou een kuil laten graven in één van de heuveltoppen tot de gewenste diepte bereikt was. Stel nu, dat de opgeworpen aarde aan weerszijden (in de weg-richting) gelijkmatig neergeworpen werd. Vervolgens zou hij in een ander hoog punt een put laten graven enz., of in een ander laag punt een berg bouwen van aarde, die hij aan weerszijden ernaast weggroef. Gaande weg zou hij zijn doel bereiken. Weliswaar ~~goude~~ hij menige zojuist gegraven put weer half vol als hij er vlak naast een put groef, maar gaandeweg raakten de dalen van het terrein vol en dus werd de weg ge-effend. Na enige oefening zou hij zelfs een grote handigheid verkrijgen door de volgende overwegingen. Allereerst zou hij i.h.a. steeds op dat punt gaan graven waar de afwijking van het gewenste niveau het grootste was en voorts zou hij - en daar schuilt het hoofdelement - nie-steeds afgraven of opbouwen tot het gewenste eindniveau omdat hij toch zeker ervan was, dat dit weer direct teniet zou worden gedaan, maar veeleer zou hij in een hog gebied dieper graven en in een zeer hobbelig terrein minder diep graven.

Wij moeten voor het vervolg van onze stof nu een hulpmiddel bespreken, dat van andere aard is dan de meeste rekenprocedures, in zoverre dat het welslagen ervan zeer wordt bevorderd of zelfs pas mogelijk wordt gemaakt door de bijna artistieke vaardigheid van de rekenaar. Dit hulpmiddel is een reeds lang bekende, maar in de laatste tijd door Southwell en zijn leerlingen onder de naam "relaxatie" sterk gepopulariseerde methode om bepaalde stelsels van algebraïsche vergelijkingen op te lossen.

Zij op te lossen het stelsel vergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (12.1)$$

waarin de coëfficiënten a_{ii} van de hoofddiagonaal van de matrix tamelijk groot zijn t.o.v. de andere. Met opzet specificeren wij "tamelijk groot" niet nauwkeurig, omdat mathematische scherpe formuleringen alleen rekening houden met starre methodes en niet met artistieke bekwaamheid. De relaxatie-methode bestaat nu in het volgende. Wij definiëren een grootheid: "residu", R_k door:

$$R_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i - b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (12.2)$$

waarin de x_i zekere benaderingen zijn voor de werkelijke waarden van de onbekenden. Deze juiste waarden zijn dus gedefinieerd door de eis:

$$R_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Veranderen wij een der schattingen voor de onbekenden, zeg voor x_j met een bedrag Δx_j , dan veranderen de verschillende residuen en wel met een bedrag $\Delta R_k = a_{jk} \Delta x_j$. Krachtens onze veronderstelling is R_k het gevoeligst voor een variatie in x_k .

Het eerste recept (dat zo dadelijk soepeler gemaakt zal worden) luidt nu als volgt: Maak een beginschatting voor alle x_i , bijv. alle $x_i = 0$. Reken de residuen R_k uit volgens (12.2). Kies nu de in absolute waarde R_k , zeg R_j eruit en maak deze nul door x_j te vermeerderen met $\Delta x_j = -R_j/a_{jj}$. De andere residuen veranderen dan ook en wij brengen de correcties aan. Kies weer het grootste residu en herhaal het proces. Onder omstandigheden convergeert dit proces.

Wij verduidelijken het aan een eenvoudig voorbeeld:

		ΔR_1	ΔR_2	ΔR_3
$3x + y + z = 8$	$\Delta x_1 = 1:$	3	1	1
$x + 4y + z = 12$	$\Delta y_1 = 1:$	1	4	-2
$x - 2y + 5z = 12$	$\Delta z = 1:$	1	1	5

Beginschatting $x = y = z = 0$.

Δx	Δy	Δz	R_1	R_2	R_3
$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$	-8	-12	-12
	3		-5	0	-18
		4	-1	4	2
	-1		-2	0	4
		-1	-3	-1	-1
1			0	0	0

Oplossing: $x = 1; y = 2; z = 3$.

In dit geval convergeert het proces al heel snel, maar de hoofd-diagonaalelementen zijn ook wel heel groot.

Een nieuw element treedt op bij het volgende voorbeeld (zie volgende pagina).

Laten wij nu eens de twee laatste regels bezien. De residuen waren $-1, 0, 1$. De totale verandering van de onbekenden is daarna geweest $1/2, 0, -1/2$. Daarna zijn de residuen $-1/2, 0, 1/2$. Gingen wij op dezelfde wijze door, dan zouden wij veranderingen $\Delta x = 1/4, \Delta z = -1/4, \Delta x = 1/8, \Delta z = -1/8$, enz. aanbrengen. Maar wij kunnen met één oogopslag zien, dat de gecombineerde verandering $\Delta x = 1/2, \Delta z = -1/2$ een verandering van de residuen $1/2, 0, -1/2$ tengevolge heeft. De residuen welke nog te vernietigen zijn, zijn $-1/2, 0, 1/2$, dus nog eenmaal toepassen van de gecombi-

Natuurlijk is het niet de bedoeling eenvoudige vraagstukken als de bovengenoemde voorbeelden op te lossen. Wij behandelen ineens een voorbeeld uit onze praktijk (een statistisch onderzoek over de verdeling van grassoorten in een weide, van belang voor de hooitechniek). Wij willen berekenen $I_k(2,14081667)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ in 8 decimalen, waarin $I_k(x) = i^{-k} J_k(ix)$ en $J_k(x)$ de Besselfunctie van de eerste soort en orde k is.

Voor de berekening staan ons twee middelen ten dienste. Allereerst de reeksontwikkeling:

$$I_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+2k} \quad (12.3)$$

en vervolgens de recursiebetrekking:

$$I_{k-1}(x) - \frac{2k}{x} I_k(x) - I_{k+1}(x) = 0. \quad (12.4)$$

Bovendien zijn $I_0(x)$ en $I_1(x)$ in vele decimalen getabelleerd.

Een manier om de gevraagde functiewaarden te berekenen is toepassing van (12.3), waarbij wij I_0 en I_1 uit de tafels af kunnen lezen. Maar dit vereist heel wat rekenwerk voor de lage waarden van k . Voor hoge waarden van k hebben wij maar enkele termen van de reeks nodig en zo vinden wij $I_{10}(2,14081667) = 0,00000061$. Nu roepen wij (12.4) te hulp. Hieruit kunnen wij immers direct I_{k+1} berekenen zodra I_{k-1} en I_k bekend zijn. Uit de bekende I_0 en I_1 kunnen wij dus I_2 berekenen; vervolgens I_3 uit I_1 en I_2 enz. Als wij dit proces uitvoeren, vinden wij:

I_0	$(2,14081667)$	$= 2,51888969$
I_1	$(2,14081667)$	$= 1,81258063$
I_2	$(2,14081667)$	$= 0,82553532$
I_3	$(2,14081667)$	$= 0,27011260$
I_4	$(2,14081667)$	$= 0,06849917$
I_5	$(2,14081667)$	$= 0,01413862$
I_6	$(2,14081667)$	$= 0,00245606$
I_7	$(2,14081667)$	$= 0,00037157$
I_8	$(2,14081667)$	$= 0,00002616$
I_9	$(2,14081667)$	$= 0,00017606$
I_{10}	$(2,14081667)$	$= -0,00145415$

Wij zien, dat de hogere I_k volkomen mis zijn! Immers uit (12.3) volgt direct, dat $I_k(x)$ voor $x > 0$ een met toenemende k monotoon dalende positieve functie is. Hoe komt dit? Dat is direct te zien uit de gedaante van (12.4). Stel nl. dat de fout in I_{k-1} gelijk is aan E_{k-1} en die in I_k gelijk aan E_k . Dan ontstaat in I_{k+1} een fout

$E_{k+1} = E_{k-1} - \frac{2k}{x} E_k$. Nu is $\frac{2k}{x}$ al spoedig een groot getal $\gg 1$, zodat $E_{k+1} \approx -\frac{2k}{x} E_k$. De waarden, waarvan wij uitgingen, nl. die van I_0 en I_1 bezitten natuurlijk een fout, nl. de afrondingsfout, zodat de fout in de opvolgende waarden snel aangroeit, nl. van de orde $(-\frac{2}{x})^k k!$. Dit verklaart het mislukken van het proces.

Een bevredigende oplossing van de moeilijkheden is om het stelsel vergelijkingen (12.4) niet vast te haken aan I_0^* en I_1 , maar aan I_0 en I_{10} . Maar dan moeten wij essentieel 9 vergelijkingen met 9 onbekenden oplossen (nl. I_1, I_2, \dots, I_9). Dit kan nu snel geschieden door relaxatie. Immers wij zijn zeker van het welslagen, omdat de hoofddiagonaaltermen van de matrix groot zijn t.o.v. de andere termen.

Het k -de residu is $R_k = -I_{k-1} + \frac{2k}{x} I_k + I_{k+1}$. In deze betrekking komen alleen I_k en zijn onmiddellijke burens voor, een situatie, welke wij later ook nog vaak zullen tegenkomen. Wij voeren nu in plaats van het relaxatieschema een "relaxatiemolecuul" in. Hierin zijn de atomen de residuveranderingen tengevolge een éenheidsverandering van de k -de onbekende. Het molecuul ziet er dus als volgt uit:



De uitvoering van de relaxatie is gegeven op pag. 146. Boven elke kolom staat de waarde van $\frac{2k}{x}$ gegeven. De rest van het molecuul onthouden wij uit het hoofd. Alle functiewaarden en residuwaarden zijn uitgedrukt in eenheden van de 8e decimaal. Wij gaan uit van een of andere schatting van de I_k 's, welke voldoet aan $I_0 = 2,51888969$ en $I_{10} = 0,00000061$. Wij namen hiervoor nu maar de waarden uit het vorige tabelletje; dan zien wij tegelijk de fouten. Wij zien nu natuurlijk alleen bij I_9 een residu en wel een kolossaal groot, nl. 145476. Nu verwekt de correctie een groot negatief residu voor I_8 . De relaxatie hiervan verwekt weer een negatief residu voor I_9 . Deze terugwerking is weliswaar niet sterk door de hoge waarden van $\frac{2k}{x}$, maar wij doen verstandig met zulke effecten rekening te houden door onderrelaxatie toe te passen. Dit doen wij stelselmatig. Men ziet, dat het hele proces zeer eenvoudig is. Zodra de residuen zo klein geworden zijn, dat geen verbetering meer op kan treden tellen wij alle correcties op en berekenen ter controle nog eenmaal de residuen. Er kunnen kleine discrepanties zijn door opeenhoping van afrondingsfouten. Wij zien, dat het totale residu precies gelijk nul is. Dit betekent, dat er geen stelselmatige fout in het gehele stelsel meer aanwezig is.

Nu kunnen wij en passant de fouten in de voorlopige functiewaarden nagaan. Deze gehoorzamen praktisch aan de vergelijking: fout = $0,7 \cdot 10^{-8} \cdot (-\frac{2}{x})^k \cdot k!$, zodat inderdaad de verklaring van de fouten klopt. De factor $0,7 \cdot 10^{-8}$ is in overeenstemming met de precisie van de berekening.

13. Gewone differentiaalvergelijkingen met begin- en eindvoorwaarden.

In paragraaf 10 en 11 hebben wij differentiaalvergelijkingen numeriek leren oplossen, indien alle beginvoorwaarden in één punt gegeven zijn. Bij een vergelijking van de tweede of hogere orde kunnen deze voorwaarden echter ook in meer dan één punt gegeven zijn. Om de gedachten te bepalen beschouwen wij de vergelijking van de tweede orde:

$$y'' = f(x, y, y') , y(a) = A , y(b) = B. \quad (13.1)$$

Is de vergelijking lineair, dan kunnen wij, althans formeel, het vraagstuk nog oplossen met onze bekende methode. Indien wij nl. een oplossing y_i berekenen van de volledige vergelijking, waarvoor $y_i(a) = A$ en $y_i'(a)$ willekeurig is en voorts een oplossing y_h van de homogene vergelijking, waarvoor $y_h(a) = 0$ en $y_h'(a)$ weer willekeurig, dan is

$$y_i + \frac{B - y_i(b)}{y_h(b)} y_h \text{ de gezochte oplossing, zoals men gemakkelijk verifieert}$$

Maar het is lang niet zeker, dat dit practisch is. Immers de gezochte oplossing kan op deze wijze verschijnen als verschil van twee grote getallen en vaak bereikt men dus geen redelijke precisie. Bovendien moet men twee oplossingen berekenen, dus dubbel werk doen. Is de vergelijking niet lineair, dan gaat deze methode trouwens niet eens op.

Dit soort vraagstukken kan men vaak geschikt door relaxatie behandelen. Wij lichten de zaak eerst toe aan het geval van een lineaire vergelijking.

$$y'' + p(x) y = q(x), y(a) = A, y(b) = B. \quad (13.2)$$

Wij verdelen het segment (a, b) eerst in intervallen w . Nu definiëren wij als residu in het basispunt x_k :

$$R_k = \{y''(x_k) + p(x_k) y(x_k) - q(x_k)\} w^2$$

of:
$$R_k = (y_k'' + p_k y_k - q_k) w^2$$

Wij weten, dat

$$w^2 \cdot y_k'' = \delta_k^2 - \frac{1}{12} \delta_k^4 + \frac{1}{90} \delta_k^6 \dots$$

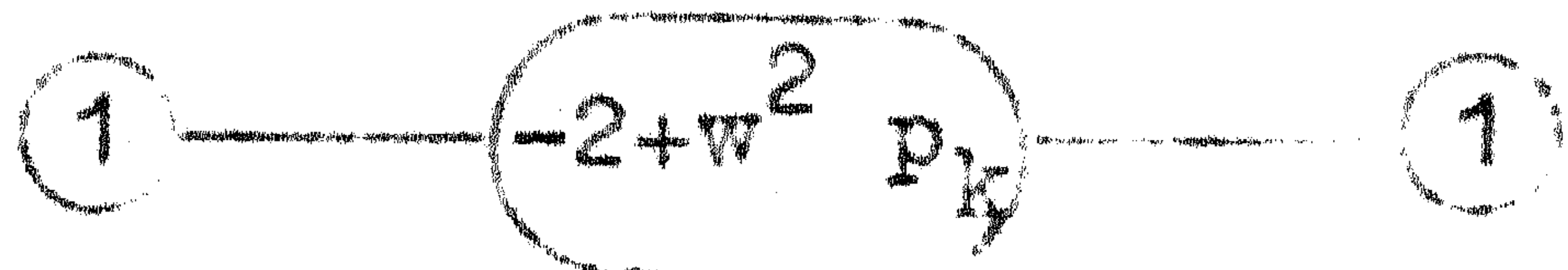
$$= y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} - \frac{1}{12} \delta_k^4 + \frac{1}{90} \delta_k^6 \dots$$

dus

$$R_k = y_{k-1} - (2 - w^2 p_k) y_k + y_{k+1} - w^2 q_k - \frac{1}{12} \delta_k^4 + \frac{1}{90} \delta_k^6 \dots$$

De gedachtengang is nu als volgt: Wij nemen een of andere schatting aan voor de waarden y_k op de basispunten. Wij berekenen hierbij de differenties en berekenen de residuen R_k . Nu vergeten wij even, dat $\delta_k^4, \delta_k^6 \dots$

afhangen van de functiewaarden en dan hebben wij klaarblijkelijk een relaxatievraagstuk voor ons ongeveer gelijk aan dat, wat wij in de vorige paragraaf behandeld hebben. Wij relaxeren nu het stelsel, maken dan opnieuw de differenties op en herhalen het procedé. Bij geschikt gekozen w convergeert dit proces zeer snel. In de praktijk combineren wij deze iteratie met de controles op de berekening. Wij rekenen bijv. eerst alles uit met twee cijfers, relaxeren, corrigeren de differenties en berekenen de residuen nu in vier cijfers, enz. Daarbij is weer allerlei gelegenheid om persoonlijk inzicht en bekwaamheid te laten meespelen. Zo kan men bijv. het relaxatiemolecuul



tijdens de relaxatie vaak door een vrij ruw benaderend molecuul voorstellen. Weliswaar, treden dan kleine afwijkingen op, maar die komen vanzelf terecht bij de controle- en revisieberekeningen. Waar het op-aankomt is, dat de residuen voor elke relaxatie nauwkeurig berekend worden. Na afloop van de relaxatie zien wij dan wel, wat er nog van over is.

Enige moeilijkheden treden op bij de uiteinden. Hier toch immers kunnen de hogere centrale differenties welke voor de residuberekening nodig zijn, niet gevonden worden, omdat geen functiewaarden buiten de eindpunten bekend zijn. Hier kan echter soms aan tegemoet worden gekomen. Immers uit de differentiaalvergelijking (13.2) zelf volgt al direct $y''(a)$, omdat $y(a)$ bekend is. Differentieren wij de vergelijking twee maal, dan treden $y'(a)$, $y'''(a)$ en $y^{IV}(a)$ ook op. Wij hebben nu drie vergelijkingen en kunnen soms $y'(a)$ en $y'''(a)$ elimineren zodat ook $y^{IV}(a)$ bekend is. Zo kunnen wij doorgaan en alle even afgeleiden zijn dus bekend. Maar dan zijn ook alle even differenties bekend. Immers volgens direct uit de reeksontwikkeling van Taylor af te leiden formules kunnen de differenties uitgedrukt worden in de afgeleiden:

$$\delta_0 = w f_0' + \frac{1}{6} w^3 f_0''' + \frac{1}{120} w^5 f_0^{V} + \dots \quad (13.3)$$

$$\delta_0^2 = w^2 f_0'' + \frac{1}{12} w^4 f_0^{IV} + \frac{1}{360} w^6 f_0^{VI} + \dots \quad (13.4)$$

$$\delta_0^3 = w^3 f_0''' + \frac{1}{4} w^5 f_0^{V} + \frac{1}{40} w^7 f_0^{VII} + \dots \quad (13.5)$$

$$\delta_0^4 = w^4 f_0^{IV} + \frac{1}{6} f_0^{VI} + \frac{1}{80} w^8 f_0^{VIII} + \dots \quad (13.6)$$

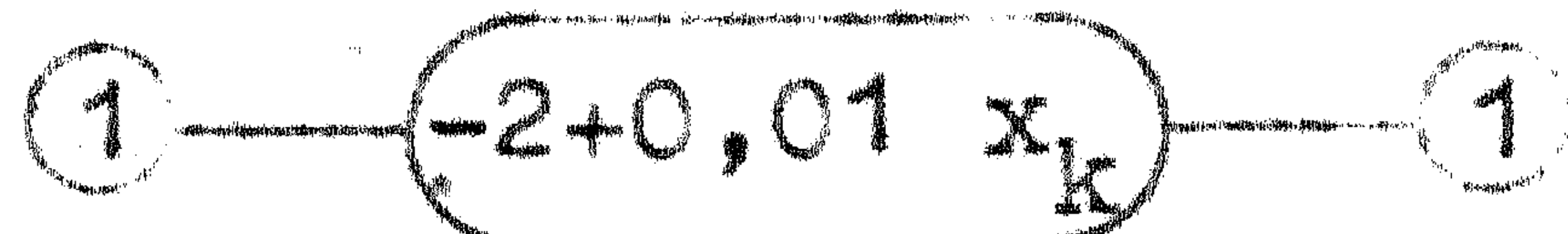
Nu zijn dus alle even differenties in de eindpunten bekend en men gaat gemakkelijk na, dat nu alle differenties binnen het segment berekend kunnen worden, zodra de functiewaarden binnen het segment gegeven zijn.

In het algemeen lukt het echter niet om aldus de even afgeleiden te vinden. Men kan zich dan op verschillende wijzen behelpen. Een eenvoudige manier is om een hoge differentie, welke nagenoeg constant is te extrapoleren naar de eindpunten. Ook kan men natuurlijk de afgeleiden berekenen met formules met voorwaartse of achterwaartse differenties in plaats van met centrale differenties. De extrapolatiemethode is echter in het algemeen te prefereren.

Als voorbeeld berekenen wij de oplossing van

$$y'' - xy = x^2 \text{ met } y(0) = 0 \text{ en } y(1) = 1.$$

Wij kiezen het interval $w = 0,1$. Het relaxatie-molecuul ziet er nu als volgt uit:



Merk op, dat het middelste atoom ongeveer -2 bedraagt. Dit betekent, dat bij een relaxatie het totale residu praktisch onveranderd blijft. Dit is onaangenaam. Immers blijft als enige mogelijkheid het residu "over de randen te schuiven". Bij een relaxatie van het eerste of laatste variabele punt verandert het totale residu, nl. wel, omdat residu buiten het veld geschoven wordt. Er zijn echter maar twee randpunten en dus wordt het een heel heen en weergeschuif van residuen. Ervaring is hier van grote waarde.

In dergelijke gevallen stellen wij echter een andere methode voor. Men zal immers in gevallen als dit, waarin het relaxatiemolecuul weinig afwijkt van $1, -2, 1$, in werkelijkheid allicht vlugheidshalve relaxeren met het molecuul $1, -2, 1$ totdat de residuen nagenoeg verdwenen zijn, dan de residuen opnieuw streng opmaken en het restant verder relaxeren. Maar als wij toch relaxeren met het molecuul $1, -2, 1$ kunnen wij het resultaat wel wat vlugger neerschrijven. Immers als de residuen R_k zijn en de aan te brengen (onbekende) veranderingen van de functiewaarden Δy_k , dan zijn eigenlijk op te lossen de vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 & 2\Delta y_1 - \Delta y_2 = R_1 \\
 - & \Delta y_1 + 2\Delta y_2 - \Delta y_3 = R_2 \\
 - & \Delta y_2 + 2\Delta y_3 - \Delta y_4 = R_3 \\
 & \dots\dots\dots \\
 - & \Delta y_{n-2} + 2\Delta y_{n-1} + \Delta y_n = R_{n-1} \\
 - & \Delta y_{n-1} + 2\Delta y_n = R_n
 \end{aligned}
 \tag{13.7}$$

Maar deze vergelijkingen zijn uiterst eenvoudig en sierlijk op te lossen voor willekeurige n . Eliminatie van Δy_1 uit de 1^e en 2^e vergelijking geeft nl.

$$3 \Delta y_2 - 2 \Delta y_3 = R_1 + 2R_2$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{-1} R, \\
\Delta y_2 &= \Delta y_1 + \Delta y_1 - \Delta_2^{-1} R, \\
\Delta y_3 &= \Delta y_2 + \Delta y_1 - \Delta_3^{-1} R, \\
\Delta y_4 &= \Delta y_3 + \Delta y_1 - \Delta_4^{-1} R, \\
&\dots\dots\dots \\
\Delta y_n &= \Delta y_{n-1} + \Delta y_1 - \Delta_n^{-1} R, \\
\Delta y_{n+1} &= \Delta y_n + \Delta y_1 - \Delta_{n+1}^{-1} R = 0.
\end{aligned}
\tag{13.10}$$

Hieruit zien wij, dat de successieve correcties alleen door optellen gevonden kunnen worden, terwijl de laatste vergelijking alle optellingen controleert. Δy_k behoeft niet te worden genoteerd. Zodra nl. Δy_1 in RR van de machine staat, tellen wij de oude y_1 er bij op, noteren de nieuwe y_1 en trekken de oude y_1 gelijk weer af. Daarna tellen wij Δy_1 erbij op, verminderen met $\Delta_2^{-1} R$ en Δy_2 staat in het RR, waarna het proces zich herhaalt. Alle nieuwe functiewaarden worden dus zonder enige onderbreking gevonden.

Deze methode passen wij toe op het genoemde voorbeeld. Als eerste schatting kozen wij een zeer ongunstige, nl. alle $y_k = 0$. Een antwoord in zes decimalen is het einddoel. Daarom gaan wij door tot 7 decimalen. De berekening is weergegeven in de tabel op pag. 152 en 153.

Moderne Rekenmethoden.

x	$10^2 y$	δ^2	δ^{-1}	$10^2 R$	$10^4 y$	δ^2	δ^{-1}	$10^4 R$	$10^5 y$	δ^2	δ^4	δ^{-1}	$10^5 R$
0	0				0				0				
0,1	0	0		0	970	0		-2	8371.	20	<u>40</u>		-1
			0					-2					-1
0,2	0	0		0	1940	0		-8	16762	80	40		3
			0					-10					2
0,3	0	0		0	2910	0		-18	25233	180	40		11
			0					-28					13
0,4	0	0		0	3880	0		-32	33884	320	30		22
			0					-60					35
0,5	0	0		0	4850	0		-49	42855	490	50		22
			0					-109					57
0,6	0	0		0	5820	0		-71	52316	710	30		34
			0					-180					91
0,7	0	0		0	6790	0		-96	62487	960	50		28
			0					-276					119
0,8	0	0		-1	7760	100		-26	73618	1260	40		28
			-1					-302					147
0,9	0	100		99	8830	100		-60	86009	1600	<u>40</u>		13
			<u>98</u>					<u>-362</u>					<u>160</u>
1,0	100	97		10000				-1329	100000				623

x	$10^6 y$	δ^2	δ^4	δ^{-1}	$10^6 R$	$10^7 y$	δ^2	δ^4	δ^{-1}	$10^7 R$
0	0					0				0
0,1	84333	210	<u>350</u>		-3	842910	2130	<u>3680</u>		-20
				-3						-20
0,2	168876	770	360		3	1687950	7670	3720		-16
				0						-36
0,3	254189	1690	370		-3	2540660	16930	3800		-19
				-3						-45
0,4	341192	2980	410		-19	3410300	29990	3830		30
				-22						-15
0,5	431175	4680	380		-8	4309930	46880	4180		-18
				-30						-33
0,6	525838	6760	480		-35	5256440	67950	4250		57
				-65						24
0,7	627261	9320	440		-7	6270900	93270	4910		-35
				-72						-11
8	738004	12320	550		-30	7378630	123500	5180		39
				-102						28
9	861067	15870	<u>500</u>		-21	8609860	158910	<u>5490</u>		-36
				<u>-123</u>						<u>-8</u>
1,0	1000000			-420		10000000				-116

Moderne kekenmethoden

x	$10^7 y$	δ^2	δ^4	$\delta^{-1} 10^7 R$	$10^7 y$	δ^2	δ^4	$\delta^{-1} 10^7 R$	$10^7 y$
0	0			0	0			0	0
0,1	842898	2151	<u>3671</u>	2	842895	2148	<u>3677</u>	-1	842893
0,2	1687947	7685	3721	-1	1687938	7687	3710	2	1687935
0,3	2540681	16940	3764	4	2540668	16936	3783	-1	2540662
0,4	3410355	29959	3920	-9	3410334	29968	3887	3	3410326
0,5	4309988	46898	4057	10	4309968	46887	4102	-5	4309956
0,6	5256519	67894	4414	-13	5256489	67908	4364	5	5256477
0,7	6270944	93304	4748	12	6270918	93293	4794	-3	6270901
0,8	7378673	123462	5325	-11	7378639	123472	5324	-1	7378620
0,9	8609864	158945	<u>5825</u>	-29	8609832	158975	<u>6024</u>	-21	8609812
1,0	10000000			<u>-35</u>	10000000			<u>-22</u>	10000000

x	δ^2	δ^4	δ^6	$\delta^{-1} 10^7 R$	$10^7 y$	δ^2	δ^4	δ^6	$\delta^{-1} 10^7 R$	$10^7 y$
0				0	0				0	0
0,1	2149	<u>3689</u>	10	-1	842895,5	2150	<u>3694</u>	30	0	842895 (0)
0,2	7685	3716	<u>34</u>	0	1687941	7685	3716	<u>40</u>	0	1687941 (1)
0,3	16937	3777	58	1	2540671,5	16936	3778	55	0	2540671 (1)
0,4	29966	3896	72	1	3410338	29965	3895	78	0	3410337 (1)
0,5	46891	4087	102	2	4309969,5	46889	4090	90	-1	4309970 (2)
0,6	67903	4380	113	0	5256490	67903	4376	127	1	5256490 (1)
0,7	93295	4786	153	2	6270913,5	93293	4789	140	-1	6270913 (1)
0,8	123473	5345	<u>177</u>	1	7378630	123472	5342	<u>160</u>	0	7378630 (1)
0,9	158996	<u>6081</u>	<u>201</u>	3	8609818,5	158993	<u>6055</u>	<u>180</u>	2	8609820 (1)
1,0				<u>25</u>	10000000				<u>-2</u>	10000000

Uit de tabellen op de voorgaande pagina's ziet men, dat al heel spoedig een precisie van bijv. 4 decimalen verkregen is. Het opvoeren van de precisie tot meer cijfers kost veel moeite. Er blijkt uit dit voorbeeld, dat het interval wel wat groot is gekozen voor de gewenste precisie. Verkleinen wij het interval, dan worden de invloeden van de onzekere hogere differenties in de nabijheid van de eindpunten geringer en het is deze onzekerheid, welke herhaalde iteraties veroorzaakt. Ook is het zo, dat bijv. de zesde differentie bij de eerste stappen niet in rekening kan worden gebracht, omdat haar waarde te onzeker is. Pas op het laatst is zij verdisconteerden men ziet dan ook, dat de residuen prompt een gerichte wijziging hebben ondergaan. Ook dit effect wordt dus met kleiner interval aanzienlijk geringer.

De einduitkomst van het onderhavige voorbeeld kan gemakkelijk worden gecontroleerd. Immers op de volgende wijze verkrijgen wij een exacte oplossing van het vraagstuk.

Door herhaald differentieren van $y'' = xy + x^2$ vinden wij nl.:

$$y'' = xy + x^2,$$

$$y''' = xy' + y + 2x,$$

$$y^{iv} = xy'' + 2y' + 2,$$

$$y^v = xy'''' + 3y'',$$

$$y^{vi} = xy^{v''} + 4y''',$$

$$y^{(k)} = xy^{(k-2)} + (k-2)y^{(k-3)}$$

Dus voor $x = 0$:

$$y''(0) = 0,$$

$$y'''(0) = y(0),$$

$$y^{iv}(0) = 2y'(0) + 2,$$

$$y^v(0) = 3y''(0),$$

$$y^{vi}(0) = 4y'''(0),$$

$$y^{(k)}(0) = (k-2) y^{(k-3)}(0).$$

Hieruit volgt, dat de algemene oplossing, welke voldoet aan $y(0) = 0$ is:

$$y = Cx + (1+C) \left\{ \frac{2}{4!} x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} x^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} x^{10} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{13!} x^{13} + \dots \right\}.$$

De constante C moet nu zo bepaald worden, dat $y(1) = 1$. Men vindt dan $C = 0,842741123$ en nu kan y berekend worden. De fout van de door relaxatie gevonden oplossing is aangegeven achter de laatste kolom voor y op pag. 153. Zoals te verwachten is, is deze fout in het midden het grootst. Wij zien, dat wij de gevraagde precisie van 6 decimalen praktisch hebben bereikt. Het is in het algemeen echter moeilijk om een precisie te garanderen, omdat het natuurlijk

denkbaar zou zijn, dat kleine residuen toch grote invloed op de functie zouden kunnen hebben.

Wij beschouwen nu het geval van een differentiaalvergelijking van de eerste orde. Hierbij treden twee merkwaardigheden op. Allereerst een van wiskundige aard, nl. dat de vergelijking geen twee randvoorwaarden toelaat. Immers door één beginvoorwaarde is de oplossing al volkomen vastgelegd. Toch kan het zijn, dat men met voordeel overgaat tot een vraagstuk met twee randvoorwaarden, als bijv. uit wiskundige overwegingen vaststaat, wat de functiewaarde van een grote waarde van x zal zijn (asymptotische ontwikkeling!). Er is dan zelfs een waardevolle controle aanwezig. Is nl. de berekende eindwaarde door een fout in de berekening niet verenigbaar met de gegeven beginvoorwaarde, dan wreekt zich dat automatisch door sterke slingeringen in de differenties, waardoor men gewaarschuwd wordt, dat er iets mis is.

De andere merkwaardigheid schuilt in de vorm van het relaxatiemolecuul. Immers geldt:

$$w f'_0 = \delta_0 - \frac{1}{6} \delta_0^3 + \frac{1}{30} \delta_0^5 - \dots = \frac{1}{2} (f_1 - f_{-1}) - \frac{1}{6} \delta_0^3 + \frac{1}{30} \delta_0^5 \dots \quad (13.11)$$

De bijdrage van de afgeleide tot het relaxatiemolecuul geeft dus geen atoom in het midden! Dit maakt relaxatie moeilijker, maar niet onmogelijk.

Een ander nieuw element treedt op bij niet lineaire vergelijkingen. Als voorbeeld kiezen wij:

$$y'' - y^2 = x^2 \quad \text{met } y(0) = 0 \text{ en } y(1) = 1.$$

Het residu is nu dus

$$R_k = w^2 y_k'' - w^2 y_k^2 - w^2 x_k^2 \\ = y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} - \frac{1}{12} \delta_k^4 + \frac{1}{90} \delta_k^6 - w^2 y_k^2 - w^2 x_k^2.$$

Veranderen wij y_k nu een weinig, nl. met Δy_k , dan verandert R_k met een bedrag $\Delta R_k = -2\Delta y_k - 2w^2 y_k \Delta y_k$.

Het relaxatiemolecuul ziet er dus als volgt uit:

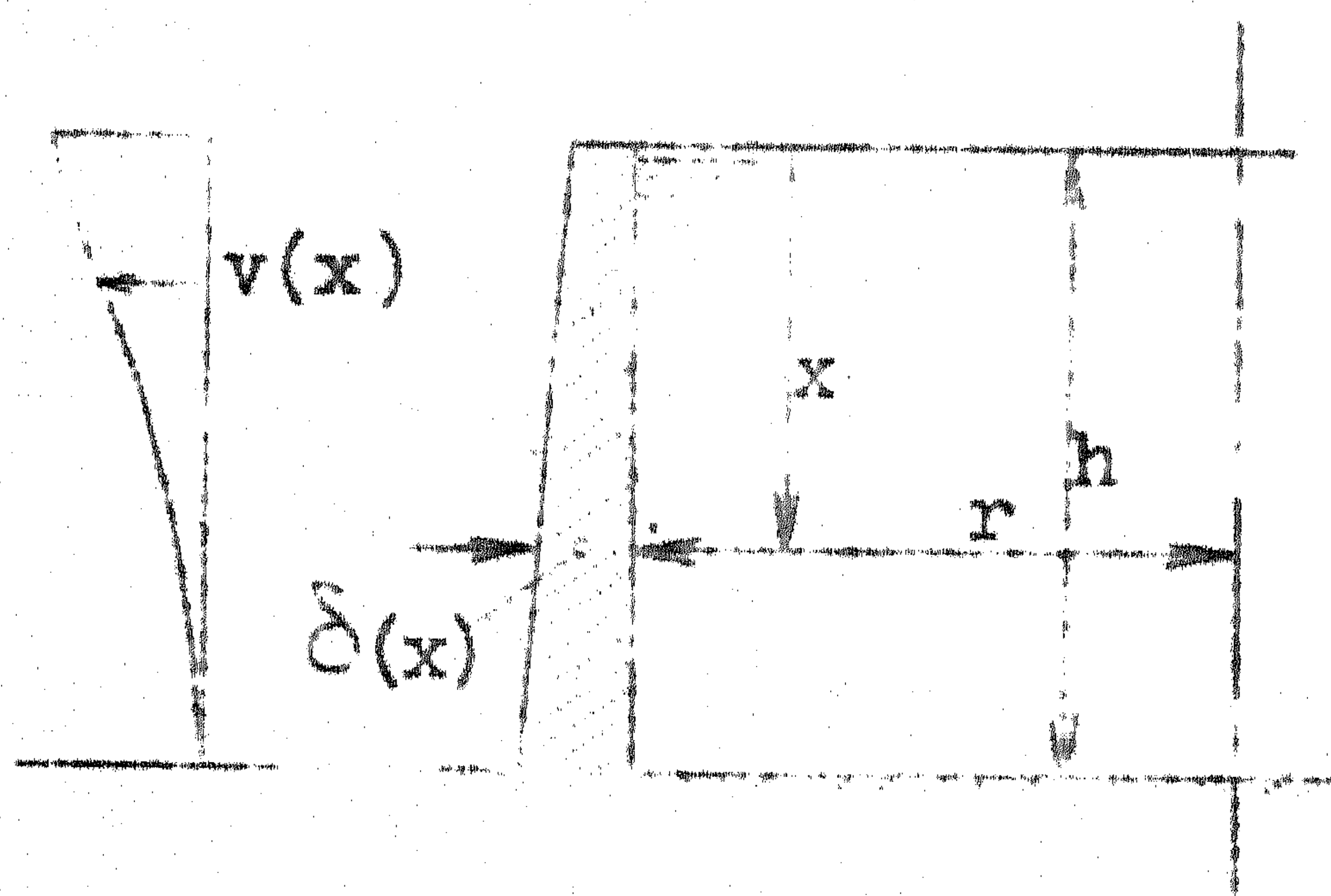
$$\textcircled{1} - \textcircled{-2-2w^2 y_k} - \textcircled{1} . .$$

Dit molecuul verandert nu tijdens het proces. Trouwens het is toch al niet helemaal exact, want Δy_k is eindig en wij hebben in de afleiding dus hogere machten van Δy_k verwaarloosd. Het eenvoudigste is dus een beetje te relaxeren, vervolgens de y_k en R_k opnieuw te bepalen enz. Een ervaren rekenaar is hier snel aan gewend. Is w klein, dan kan onze methode, waarbij wij telkens relaxeren met $\frac{1}{\text{het}}$, $-2,1$ molecuul goede diensten bewijzen

Wij behandelen nog een voorbeeld, waarbij enige nieuwe gezichtspunten optreden. Het vraagstuk betreft het bepalen van de radiale uitwijking v van een meridiaandoorsnede van een cilindrisch reservoir met veranderlijke wanddikte $\delta(x)$ als functie van de hoogte x , indien de belasting een hydrostatische is (vloeistofsniegel bij $x=0$). Is het s.g. van de vloeistof γ , de totale vloeistofhoogte h , de straal van het reservoir r en de elasticiteitsmodulus van het wandmateriaal E , dan geldt volgens de elasticiteitstheorie als

$\delta(x) \ll r$ bij benadering:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\delta^3 \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \frac{12\delta}{r^2} v - \frac{12\gamma}{E} x = 0.$$



Dit is een differentiaalvergelijking van de vierde orde, waaraan dus vier randvoorwaarden dienen te worden gesteld. In elastische vraagstukken als deze bestaan er

steeds twee voorwaarden aan beide einden, dus voor $x = 0$ en $x = h$. Wij zullen gemakshalve slechts het geval beschouwen, dat de cylinder aan beide einden "ingeklemd" is, d.w.z. dat zowel voor $x = 0$ als voor $x = h$, geldt $v = \frac{dv}{dx} = 0$.

Allereerst maken wij de grootheden in de vergelijking dimensieloos door te stellen:

$$w = 12 \frac{\gamma}{E} h^2 y ; \quad x = h z ; \quad \delta = h t ; \quad r = h s.$$

Dan luidt de vergelijking:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(t^3 \frac{d^2 y}{dz^2} \right) + \frac{12t}{s^2} y = z, \quad \text{met } y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Wanneer wij dit randwaardevraagstuk met relaxatie op willen lossen en t een willekeurige, zeg tabellarisch gegeven functie van z is kan men op de vroeger reeds aangegeven wijze het begrip residu invoeren en de enige moeilijkheid is om de eerste term van de vergelijking in onbekende functiewaarden uit te drukken. Nu is:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(t^3 \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = \left\{ 6 t \left(\frac{dt}{dz} \right)^2 + 3 t^2 \frac{d^2 t}{dz^2} \right\} \frac{d^2 y}{dz^2} + 6 t^2 \frac{dt}{dz} \frac{d^3 y}{dz^3} + t^3 \frac{d^4 y}{dz^4}.$$

Uit t kan $\frac{dt}{dz}$ en $\frac{d^2 t}{dz^2}$ numeriek bepaald worden en de uitdrukking is dus in de functiewaarden uit te drukken. Is bijv. de wanddikte lineair verlopend volgens $t = 0,1 (1+z)$ en $s = 1$, en kiezen wij $w = 0,1$, zodat $z_k = 0,1 k$, dan is:

$$R_k = \left\{ 1 + \frac{3}{10+k} - \frac{0,5}{(10+k)^2} \right\} y_{k-2} - \left\{ 4 + \frac{6}{10+k} - \frac{8}{(10+k)^2} \right\} y_{k-1} +$$

$$+ \left\{ 6 + \frac{6}{(10+k)^2} \right\} y_k - \left\{ 4 - \frac{6}{10+k} - \frac{8}{(10+k)^2} \right\} y_{k+1} + \left\{ 1 - \frac{3}{10+k} - \right.$$

$$\left. - \frac{0,5}{(10+k)^2} \right\} y_{k+2} - \frac{10k}{(10+k)^3} - \frac{1,5}{10+k} \delta_k^5 - \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{15(10+k)^2} \right\} \delta_k^6 \dots$$

Een nieuw element treedt nu op bij het in aanmerking nemen van de randvoorwaarden. Immers om het residu in $k = 1$ (dus $z = 0,1$) te berekenen hebben wij, afgezien nog van de hogere differentiecorrecties de functiewaarde voor $k = -1$ ($z = -0,1$) nodig. Hier komt nu de randvoorwaarde $y'(0) = 0$ te hulp. Immers deze leert, dat $\delta_0^3 - \frac{1}{6} \delta_0^3 = 0$. Nemen wij alleen de hoofdterm δ_0 in aanmerking, dan geldt dus $y_{-1} = y_1$ en de onbekende y_{-1} is dus geelimineerd. Maar er komt nog een complicatie bij. Was de vergelijking van de tweede orde en was een van de randvoorwaarden $y'(0) = 0$ geweest, dan zou de genoemde oplossing bevredigend zijn geweest. Immers het relaxatiemolecuul bestond dan uit 3 atomen en hogere differenties behoeften slechts als correcties beschouwd te worden. Maar in dit geval zijn de vierde differenties essentieel en het molecuul bestaat dan ook uit 5 atomen. Daarom is het ook geen extra complicatie bij de tweede afgeleide de vierde differentie term mee te nemen en dat hebben wij bij het bovenstaande residu dan ook gedaan. Het is dan echter consequent dit ook te doen bij de eerste afgeleide aan de rand. Wij nemen dus ook de term $-\frac{1}{6} \delta_0^3$ mee. Daarin treedt nu echter ook y_{-2} op. Om deze te elimineren, bedenken wij, dat ook voor y_0 het residu nul moet zijn. Dit levert dus een nieuwe relatie. Laten wij dit nog eens toelichten aan een eenvoudiger geval, nl. dat van de vergelijking: $y'' = F(x)$, met o.a. als randvoorwaarden $y(0) = a$; $y'(0) = 0$. Dan is dus:

$$R_0 = y_{-2} - 4 y_{-1} + 6 y_0 - 4 y_1 + y_2 - F_0 = 0$$

$$y_0 = a$$

$$wy'_0 = y_{-2} + 4 y_{-1} - 4 y_1 - y_2 = 0,$$

waaruit volgt:

$$y_{-1} = -\frac{1}{8} F_0 + \frac{3}{4} a + \frac{1}{4} y_2.$$

$$\text{Dan wordt } R_1 = 6 y_1 - 3,75 y_2 + y_3 - 3,25 a - \frac{1}{8} F_0 - F_1.$$

Hadden wij de ruwere uitdrukking $wy'_0 = \delta_0$ gebruikt, dan hadden wij gevonden:

$$R_1 = 7 y_1 - 4 y_2 + y_3 - 4a - F_1.$$

Wij laten het toepassen van deze beschouwingen op de onderhavige vergelijking aan de cursist over.

14. Elliptische partiële differentiaalvergelijkingen.

Wij gaan nu over tot differentiaalvergelijkingen in meer tv. twee dimensies en wel van het elliptische type, waaronder wij zullen verstaan die vergelijkingen, waarvan de gezochte oplossing vastgelegd kan worden door haar waarden of die van zekere afgeleiden te geven op een gesloten oppervlak, voorlopig dus kromme, in de ruimte gevormd door de coördinaten, welke in de vergelijking optreden.

Als een speciaal, maar zeer belangrijk voorbeeld bepalen wij ons eerst tot de vergelijking van Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y), \quad (14,1)$$

waarbij $F(x,y)$ een gegeven functie voorstelt en u gegeven is langs een gesloten kromme K , terwijl tevens aan u de eis opgelegd is van singulariteitenvrij te zijn binnen K . Men kan bewijzen, dat u eenduidig bepaald is mits zekere zeer zwakke beperkingen aan de gegeven randwaarden van u gesteld zijn. Bijv. mag u langs de rand zeer wel discontinu zijn, maar voorlopig onderstellen wij maar, dat de randwaarden van u netjes glad zijn.

Wij brengen in het x,y -vlak een rooster aan door lijnen evenwijdig aan de x -as en de y -as op afstand w . Daarmee verdelen wij het vlak dus in vierkanten. Ook algemenere verdelingen, bijv. rechthoeken, regelmatige driehoeken of zeshoeken, kunnen soms met voordeel gebruikt worden. De hoekpunten zijn weer onze basispunten en langs iedere lijn kunnen differenties worden gemaakt. De differenties in de x -richting resp. in de y -richting zullen wij onderscheiden door een index x resp. y .

In een bepaald basispunt (x_m, y_n) definiëren wij nu een residu $R_{m,n}$ als volgt:

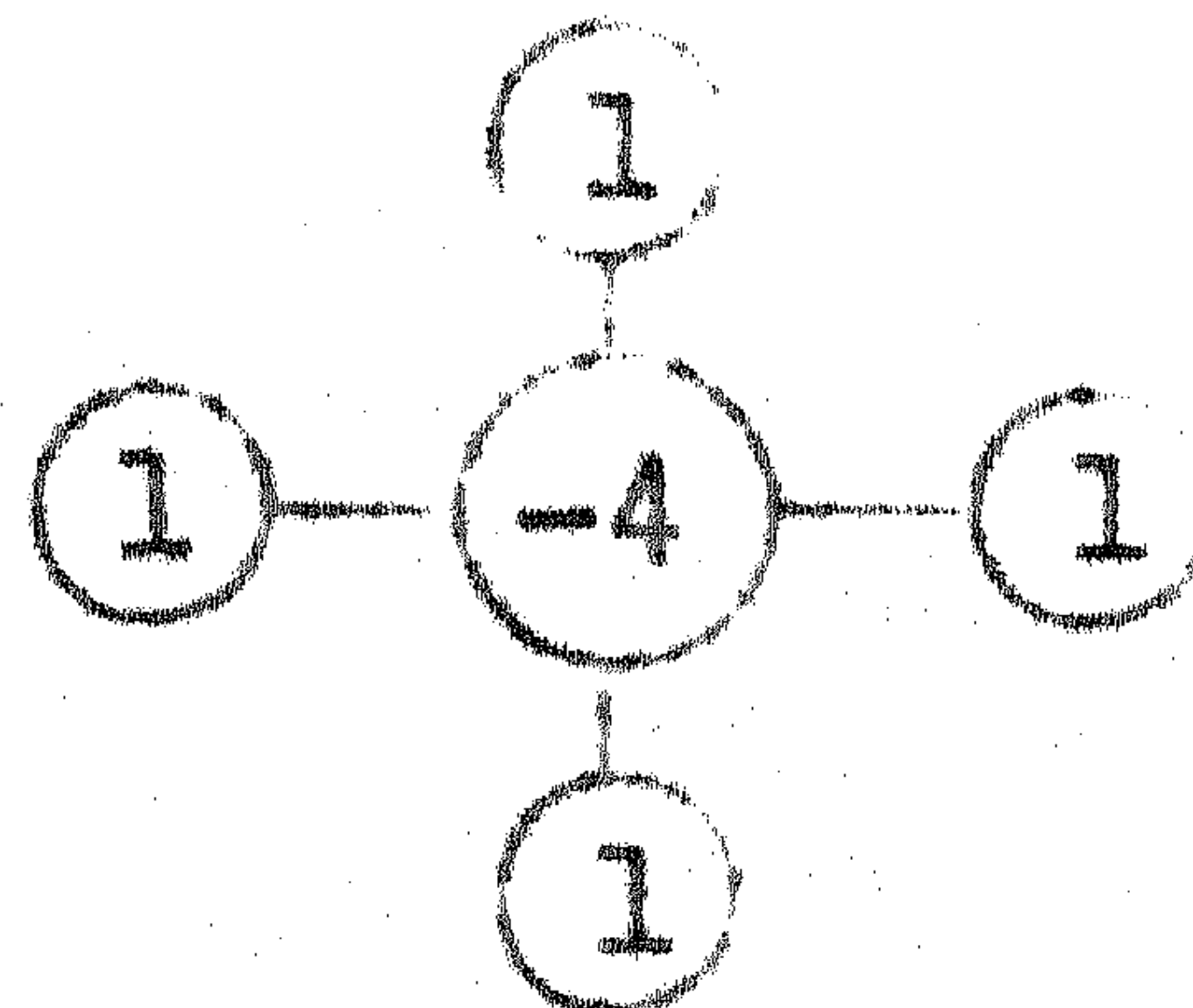
$$R_{m,n} = w^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{m,n} - w^2 F_{m,n}. \quad (14,2)$$

Door de differentiaalquotienten op de normale wijze te schrijven als differentiereeksen krijgen wij:

$$\begin{aligned} R_{m,n} = & u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1} - 4 u_{m,n} - w^2 F_{m,n} \\ & - \frac{1}{12} (\delta_{m,x}^4 + \delta_{n,y}^4) + \frac{1}{90} (\delta_{m,x}^6 + \delta_{n,y}^6) - \dots \end{aligned} \quad (14,3)$$

Zolang alle punten, welke in (14,3) voorkomen binnen of op de

rand liggen kan het residu dus berekend worden zodra waarden voor u op alle roosterpunten aangenomen zijn. Om een dergelijk residu te relaxeren vergeten wij weer, dat de hogere differenties $\delta^4, \delta^6 \dots$ veranderen met de functiewaarden en dan vinden wij weer een relaxatiemolecuul, dat aangeeft, wat de veranderingen in het residu van verschillende basispunten zijn tengevolge van een verandering van de functie $u_{m,n}$ met een eenheid. Dit molecuul ziet er nu dus als volgt uit:



Met dit molecuul relaxeren wij nu weer de residuen weg, berekenen dan opnieuw de hogere differenties, berekenen nieuwe residuen, enz.

Wij zien, en passant, dat het molecuul weer conservatief is door het ontbreken van de u -term in de vergelijking, zodat het totale residu niet verandert bij een relaxatie behalve als het gerelaxeerde punt vlak bij de rand K ligt. Alle residu moet dus weer over de rand geschoven worden.

Wij behandelen eerst maar eens een voorbeeld zonder complicaties. De op te lossen vergelijking zij:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \tag{14,4}$$

en de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{voor } |x| = 5, \quad |y| \leq 3 \\ \text{en } |y| = 3, \quad |x| \leq 5 \end{aligned} \tag{14,5}$$

d.w.z. dat $u = 0$ op de zijden van een rechthoek met zijden ter lengte 6 en 10. Wij kiezen $w = 1$. Allereerst merken wij op, dat de oplossing kennelijk symmetrisch is t.o.v. x en y en wij ons dus slechts behoeven te beperken tot een kwadrant, bijv. het eerste, nl. $x > 0$ en $y > 0$. Wij tekenen dit kwadrant ruwweg op.

	0	0	0	0	0	0
A	0 100	0 100	0 100	0 100	0 100	0
B	0 100	0 100	0 100	0 100	0 100	0
C	0 100	0 100	0 100	0 100	0 100	0
			C	B	A	

Hierin zetten wij bij de randpunten de voorgeschreven randwaarden, dus alle nul, en bij de overige basispunten de eerste schatting voor u, ook maar alle nul, bij gebrek aan beter. Daarbij zullen wij het volgende systeem volgen. In een basispunt zetten wij de functiewaarde links boven en het residu rechts boven, dus

	functie	residu
--	---------	--------

Bij het relaxeren plaatsen wij boven de functie steeds de correcties, daarentegen boven het residu steeds het nieuwe residu. Is een kolom vol, dan stuft men ze uit en zet onderaan weer de functie en het residu. Zo berekenen wij in het voorbeeld de residuen en schrijven ze neer op hun plaats. Omdat alle functiewaarden nul zijn zijn alle residuen gelijk 1. Stel, dat we voorlopig een nauwkeurigheid van twee decimalen nastreven. Dan vermenigvuldigen wij alle getallen met 100 om komma's te vermijden. Alle residuen zijn nu 100.

Alvorens nu punt voor punt te gaan relaxeren passen wij eerst een blokrelaxatie toe om ongeveer het gemiddelde residu nul te maken. Wat is het effect van een eenheidsvermeerdering van alle basispunten gelegen binnen een bepaald contour?

		1	1	1									
1	1	-2	1	-1	1	-2	2	1	1	1			
1	1	-1	1	0	1	0	1	-1	1	-2	1	-3	1
1	1	-1	1	0	1	0	1	0	1	-1	2	1	
1	1	-2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-2	1		
		1	1	1	1	1							

Daarvoor geldt blijkbaar de volgende eenvoudige regel: Het residu van een punt vermindert met evenveel eenheden als er "armpjes" van dat punt naar het buitengebied van het contour gaan. Het totale residuverlies is dus gelijk aan het totale armpjes dat door het contour naar buiten steekt.

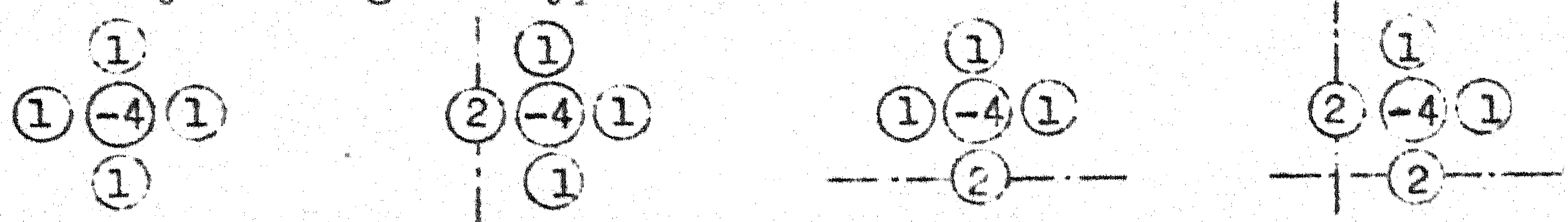
Dit passen wij toe op ons voorbeeld. Als eerste contour kiezen wij AA (doorgezet gedacht in alle kwadranten!). Het aantal armpjes is 28. Het totale residu er binnen bedraagt 4500. Dus verhogen wij alle functiewaarden met $4500/28$ zeg met 160. De residuen van de punten tussen AA en BB zijn nu alle negatief geworden, nl. i.h.a. - 60 en - 220 voor de vier hoekpunten. De punten binnen BB blijven onveranderd op een residu 100. Nu verhogen wij de punten binnen BB. Het aantal armpjes bedraagt nu 20 en het omsloten residu 2100. Wij voeren

dus de functie daar op met een bedrag $2100/20 = 105$ dus tot 265. De residuen van de punten buiten BB worden nu verzwakt tot 45 behalve de vier hoekpunten. De punten tussen AA en BB krijgen een residu van -5 behalve de hoekpunten, die op een residu - 110 komen. Binnen CC blijft alles weer ongewijzigd. Nu wijzigen wij binnen CC. Het aantal armpjes bedraagt 12 en het omsloten residu 500. Wij voeren dus de functie op met $500/12$ zeg met 40. Na afloop van deze stappen ziet het schema er uit als volgt:

0	0	0	0	0	0
160 45	160 45	160 45	160 45	160 -220	0
265 35	265 35	265 35	265 -110	160 45	0
305 20	305 20	305 -20	265 35	160 45	0

Het totale residu binnen AA is nu 20, binnen BB is het 0 en binnen CC 20. Ideaal is de verdeling van de residu's nog geenszins, want er is nog een scherp onderscheid tussen gebieden met positief en met negatief residu.

Als wij nu gaan relaxeren moeten wij bedenken, dat voor punten gelegen langs de symmetrielijnen een wat ander molecuul geldt. Immers als wij in zulk een punt de functiewaarde wijzigen moeten wij bedenken, dat ook de gespiegelde punten een wijziging ondergaan. Zo vinden wij de volgende types van molecuul:



Wij raden aan de cursist dringend aan om dit voorbeeld verder af te maken tot bijv. vier decimalen. Het vereist generlei bijzondere rekenhulpmiddelen. Als eindcontrole kan men de gevonden waarden vergelijken met de analytische oplossing van het vraagstuk. Als wij in het algemeen in plaats van 5 en 3 schrijven a en b luidt deze oplossing:

$$u = \frac{a^2 - x^2}{2} - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \frac{\cosh \frac{(2k+1)\pi y}{2a}}{\cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a}}$$

Het zal blijken zeer eenvoudig te zijn om een oplossing in een klein aantal decimalen te vinden, maar dat hoge precisie bij dit interval ($w=1$) niet te behalen is in de omgeving van de hoekpunten omdat daar de oplossing een singulariteit vertoont.

In het voorgaande hebben wij aangenomen, dat alle roosterlijnen de randkromme K sneden in basispunten. Dat is altijd realiseerbaar indien K bijv. een rechthoek is, eventueel door in x en y -richting een verschillende interval te kiezen. Het geval, dat x een rechthoek is, is inderdaad zeer belangrijk, bijv. voor de berekening van analytische functies van een complexe veranderlijke. Immers voldoen zowel het reële als imaginaire deel van een analytische functie van $(x+iy)$ aan de potentiaalvergelijking, dus aan (14.1) met $F(x,y) = 0$. Hebben wij dus de functie op een of andere wijze berekend langs een rechthoek in het complexe vlak, dan kunnen wij haar binnen die rechthoek met behulp van relaxatie bepalen.

Van belang is nog het berekenen van de hogere differenties in de buurt van de grenzen. Bij vergelijkingen als de potentiaalvergelijking is dit eenvoudig. Beschouw nl. een rand van het veld evenwijdig aan de x -as. Daar is u gegeven, dus kennen wij ook alle afgeleiden $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$.

Uit de vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (14.6)$$

volgt dus direct $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Differentiëren wij twee maal partieel naar x en vervolgens twee maal partieel naar y , dan vinden wij:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Aftrekken levert

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (14.7)$$

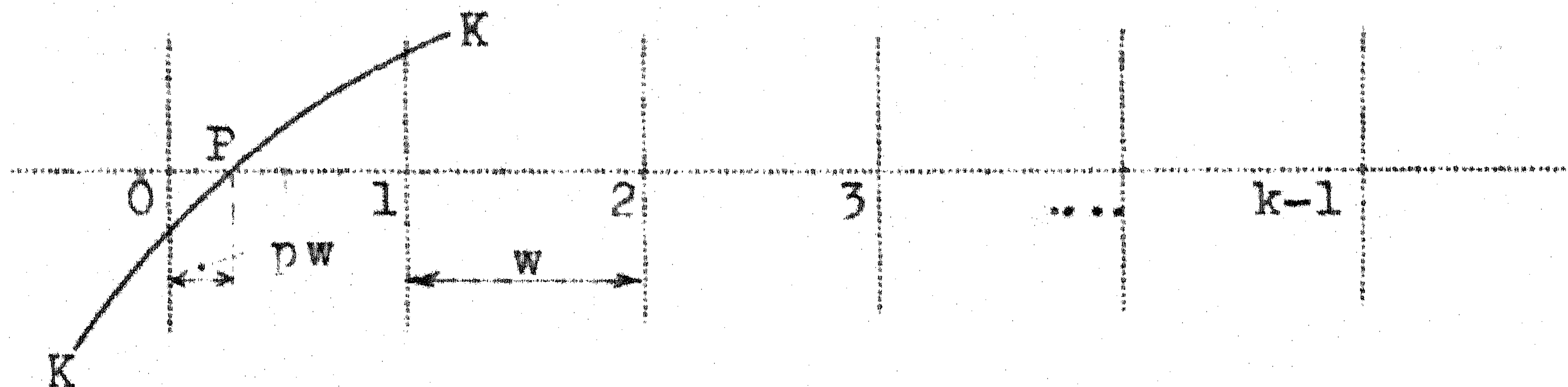
waaruit $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ volgt. Op deze wijze voortgaande kunnen wij alle even afgeleiden in de y -richting berekenen en dus ook alle even differenties in het randpunt. Daarmee kunnen wij het differentieschema geheel volrekenen en dus de hogere differentiecorrecties vinden.

Is u langs de rand niet analytisch, maar slechts tabellarisch gegeven, dan moeten de afgeleiden natuurlijk ook numeriek berekend worden.

Als oefenvoorbeeld voor de cursist te berekenen $e^x \cos y$ binnen het vierkant $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. De functie is het reële gedeelte van e^{x+iy} , dus voldoet aan (14.6). Kies $w = 0,2$ en bereken 4 of 6 decimalen. Controleer de gevonden uitkomsten. Nodig en voldoende zijn de gegevens:

x	cos x	e ^x
0	1,0000000	1,0000000
0,2	0,9800666	1,2214028
0,4	0,9210610	1,4918247
0,6	0,8253356	1,8221188
0,8	0,6967067	2,2255409
1,0	0,5403023	2,7182818

In het algemeen zal de kromme K niet zodanig zijn, dat alle roosterlijnen haar snijden in basispunten. Wij kunnen dan als volgt te werk gaan:



Zij P het randpunt gelegentussen een basispunt 0 buiten K en een basispunt 1 binnen K. Gegeven is dus u_P . Wij gaan dit punt P nu vervangen door het basispunt 0. Volgens de formule van Lagrange is:

$$u_P = L_0^k u_0 + L_1^k u_1 + \dots + L_{k-1}^k u_{k-1},$$

en hieruit volgt:

$$u_0 = \frac{1}{L_0^k} u_P - \frac{L_1^k}{L_0^k} u_1 - \dots - \frac{L_{k-1}^k}{L_0^k} u_{k-1}. \quad (14.8)$$

Wij weten, dat

$$L_j^k(p) = \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)(p-j-1)\dots(p-k+1)}{j(j-1)\dots 1 \cdot (-1)\dots(j-k+1)}$$

dus, dat

$$\frac{L_j^k(p)}{L_0^k(p)} = \frac{(k-1)!}{(-1)^j j! (k-j-1)!} \frac{p}{p-j} = (-1)^j \binom{k-1}{j} \frac{p}{p-j}$$

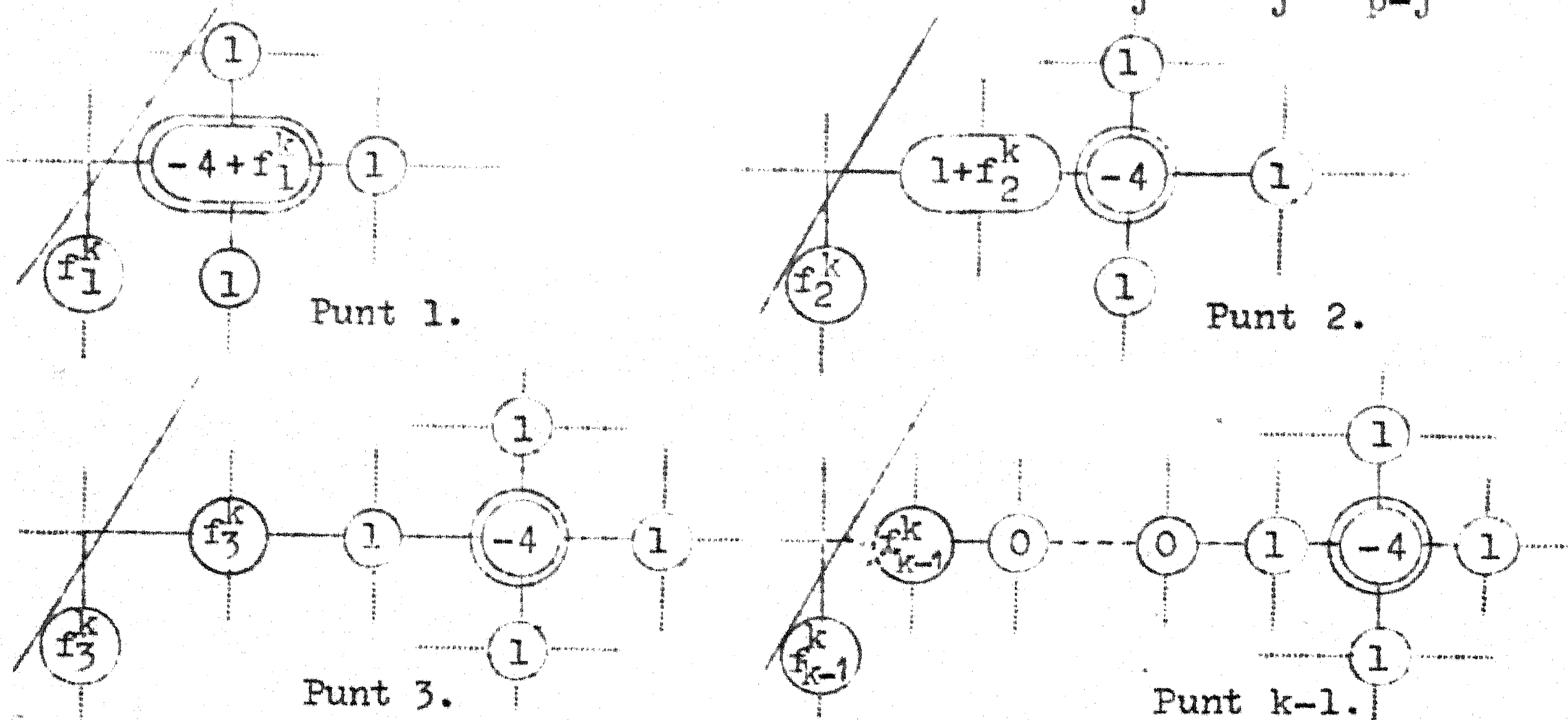
Dus is:

$$u_0 = \frac{1}{\binom{p-1}{k-1}} u_P - \binom{k-1}{1} \frac{p}{p-1} u_1 + \binom{k-1}{2} \frac{p}{p-2} u_2 \dots + (-1)^{k-1} \frac{p}{p-k+1} u_{k-1}. \quad (14.9)$$

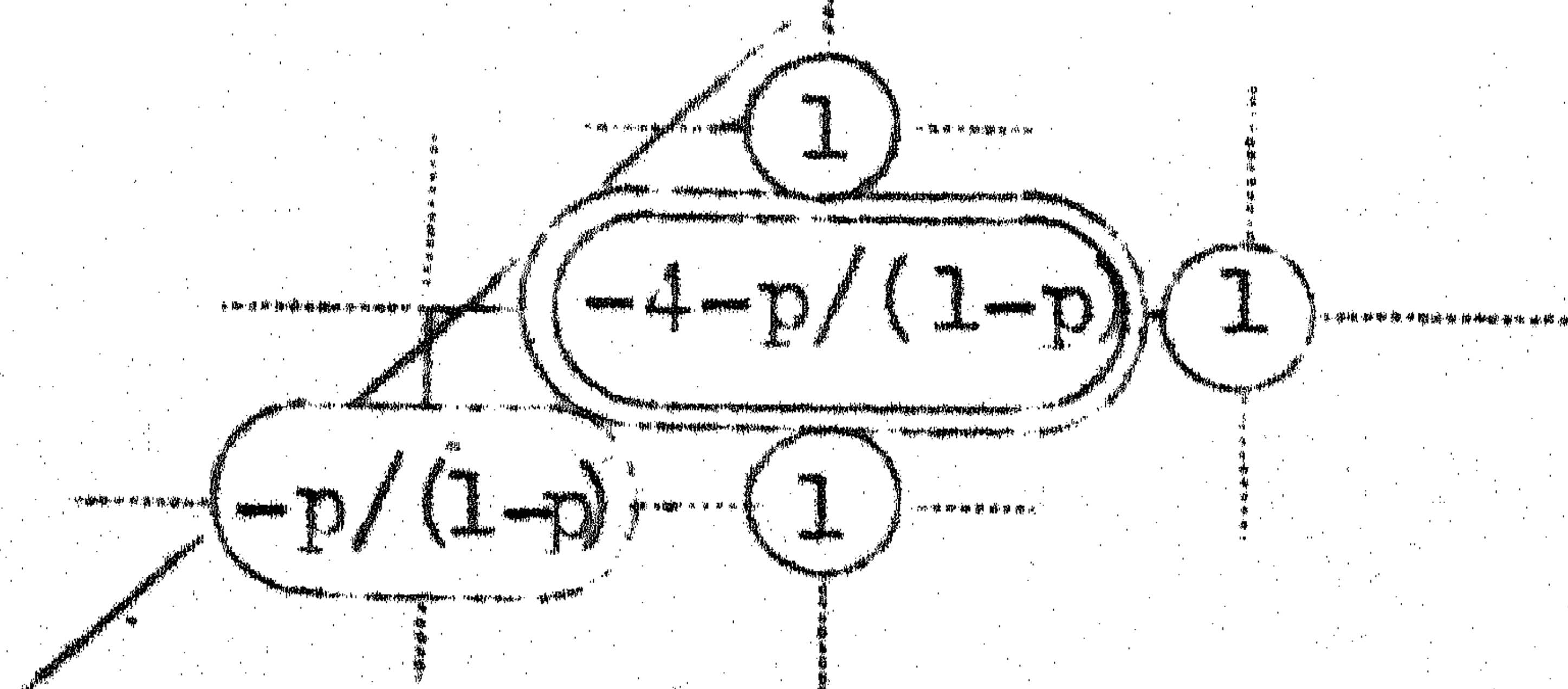
Men berekent uit (14.9) eerst uitwendige basispunten u_0 . Daarna relaxeert men, berekent hogere differenties, enz. Bij het relaxeren moet men echter bedenken, dat het eenvoudige molecuul gewijzigd wordt. Immers wijziging van een functiewaarde u_j verandert ook u_0 en dit

geeft een terugslag op R_1 .

De relaxatiemoleculen van de punten $1, 2, \dots, k-1$ zien er dus als volgt uit, als wij ter afkorting schrijven: $f_j^k = \binom{k-1}{j} \frac{p}{p-j}$:

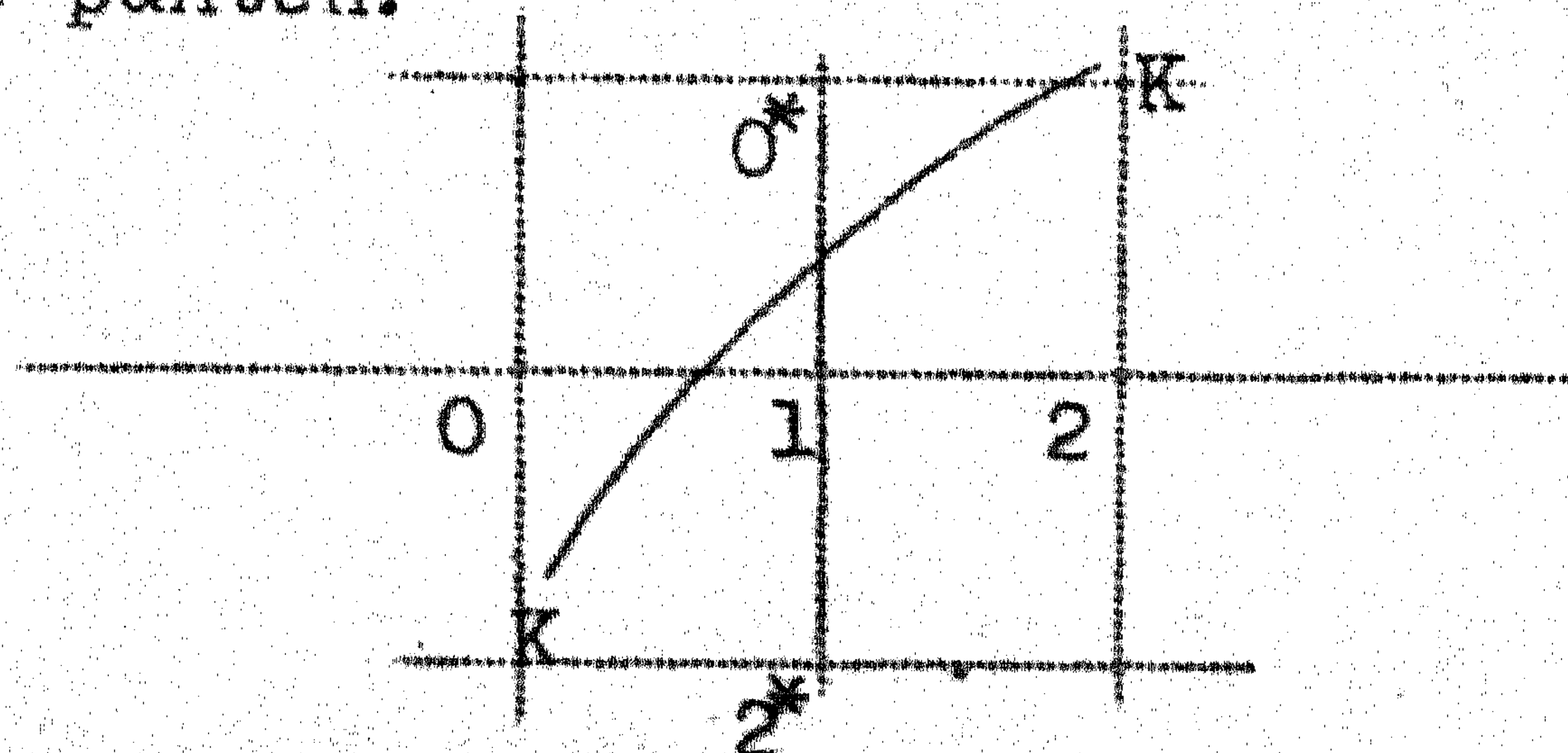


Het relaxeren wordt dus iets omslachtiger, omdat het molecuul wat groter wordt, de atomen niet meer zo eenvoudig zijn en voorts het molecuul van punt tot punt verschilt. Men kan ook zeer geschikt relaxeren met een vereenvoudigd molecuul, dat ontstaat door $k = 2$ te nemen, overeenkomend met lineaire interpolatie. Dan heeft alleen het punt 1 een afwijkend molecuul, nl.



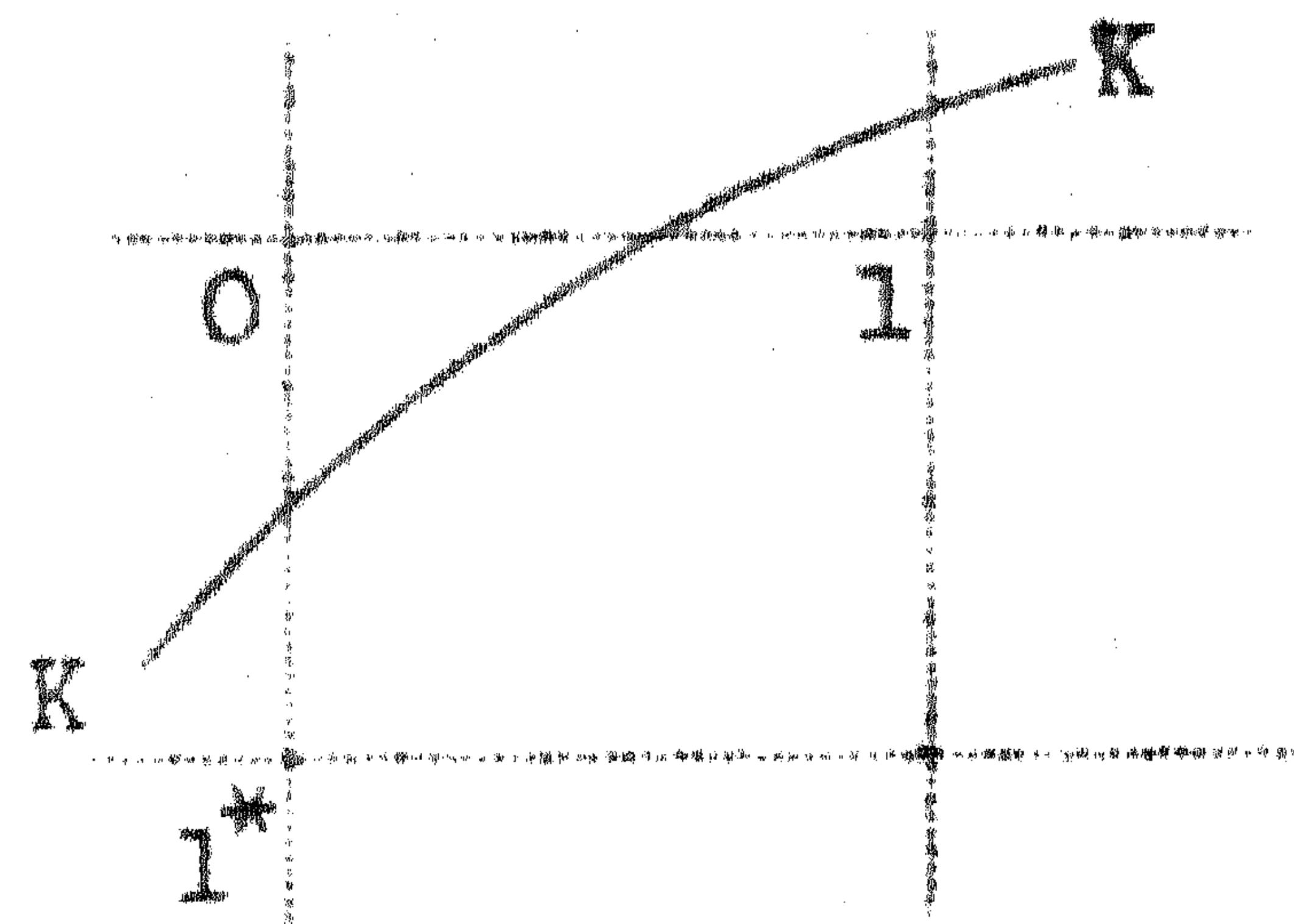
Bij de opeenvolgende iteraties verdwijnen de op deze wijze geïntroduceerde fouten. Het enige getal, dat onthouden moet worden is $-4 - p/(1-p)$ dat links onder bij de basispunten kan worden geschreven.

Heeft een basispunt bij de rand twee armen, die naar buiten reiken, bijv. bij de punten:



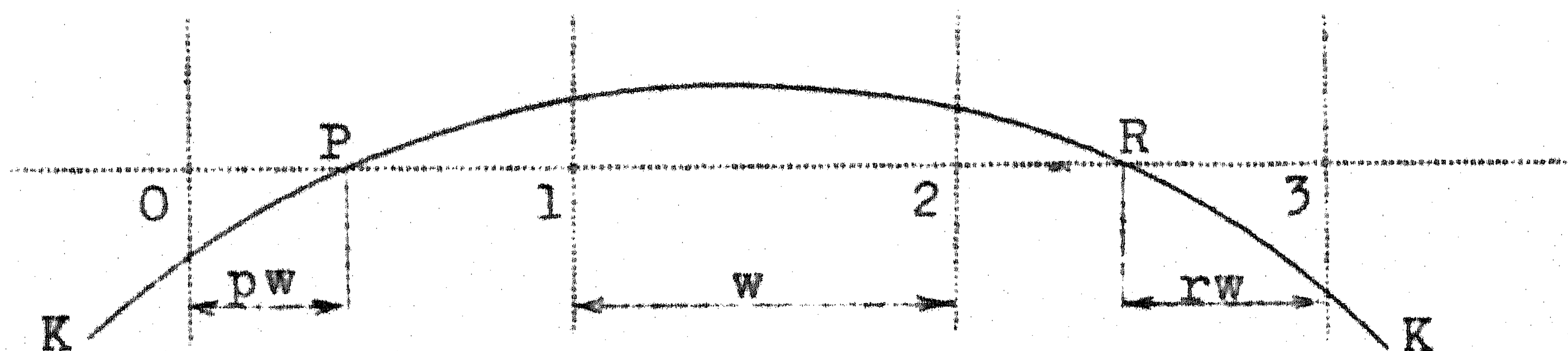
an moeten natuurlijk de correcties op het molecuul in twee richtingen angebracht worden.

Wordt een buitenpunt 0 bereikt via twee wegen, bijv.:



dan behoeft de waarde u_0 behorende bij de twee wegen geenszins dezelfde te zijn. Immers, de oplossing van het randwaardevraagstuk zal buiten K singulariteiten vertonen.

Een volgende complicatie treedt op, als wij niet genoeg basispunten op onze basislijn kunnen gebruiken, omdat de basislijn aan de andere zijde buiten het contour steekt, dus bijv.:



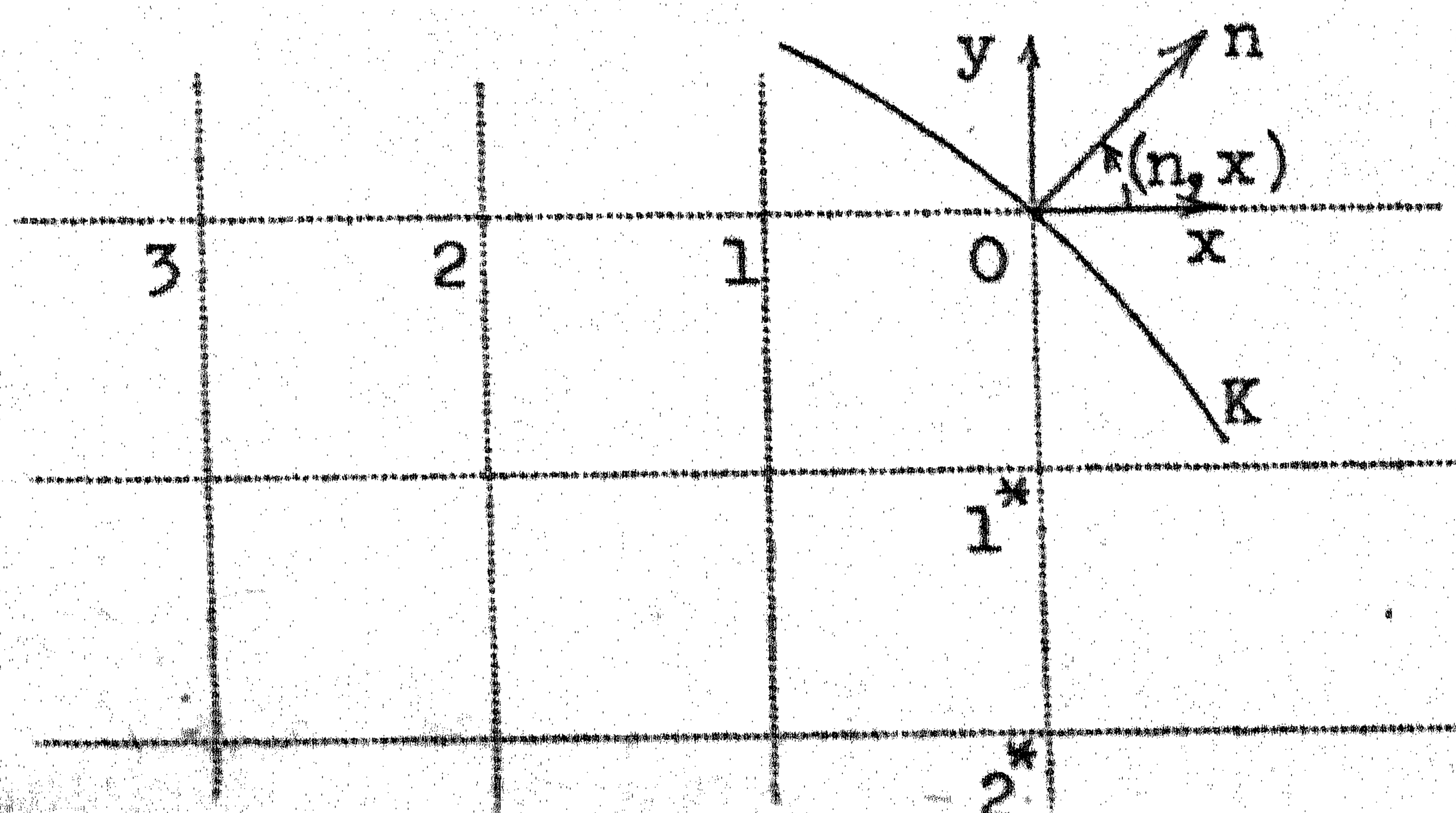
In het bovenstaande voorbeeld zouden wij het bovenstaande slechts kunnen toepassen met $k = 3$. Door een kleine extra rekening brengen wij nog een basispunt meer in rekening:

$$u_P = L_0^4(p) u_0 + L_1^4(p) u_1 + L_2^4(p) u_2 + L_3^4(p) u_3,$$

$$u_R = L_3^4(r) u_0 + L_2^4(r) u_1 + L_1^4(r) u_2 + L_0^4(r) u_3 .$$

Eliminatie van u_0 en u_3 levert de gezochte betrekkingen.

Vervolgens bezien wij het geval, dat op een deel van het contour of wel het hele contour niet de functiewaarde u , maar $\frac{\partial u}{\partial n}$, dat is de normale afgeleide, waarbij n de buitenwaarts gerichte normaal van het contour voorstelt. Eerst nemen wij het geval, dat de basislijnen de rand in basispunten snijden.



In de boven getekende situatie is 0 een basispunt op de rand, waar $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven is. Wij drukken eerst de afgeleide in de x-richting en

y-richting uit in $\frac{\partial u}{\partial n}$ door middel van de formules

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos(n, x) - \frac{\partial u}{\partial s} \sin(n, x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial n} \sin(n, x) + \frac{\partial u}{\partial s} \cos(n, x) .$$

(14.10)

De hoek (n, x) is bekend door de vorm van het contour en $\frac{\partial u}{\partial n}$ is gegeven. In het speciale geval, dat de rand rechtlijnig is en loodrecht op de mazen van het net, bijv. in de richting van de y-as, is de berekening nog niet bijzonder moeilijk. Immers, dan is $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}$ dus bekend, terwijl $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}$ dus onbekend, ons voorlopig niet interesseert. Wij kunnen de waarde van u in een randpunt met behulp van de vroeger behandelde formules betreffende numerieke differentiatie uitdrukken in haar burens op dezelfde horizontaal en dit geeft dan de gezochte relatie om het residu in naburige punten te kunnen bepalen op soortgelijke wijze als op de voorgaande pagina's is gebeurd.

Is de rand niet rechtlijnig of vallen de randpunten niet met basispunten samen, dan wordt de berekening op nauwkeurige wijze uiterst bezwaarlijk. Wij willen hier niet verder op ingaan, maar verwijzen de belangstellenden naar het artikel van L. Fox: "The numerical solution of elliptic differential equations when the boundary conditions involve a derivative", Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 242, 345-378, 1950. Hierin vindt men tevens literatuuropgaven van andere artikelen, welke van belang zijn, alsmede de behandeling van ingewikkelde vergelijkingen bijv. de voor de elasticiteitstheorie zeer belangrijke bi-potentiaalvergelijkingen.