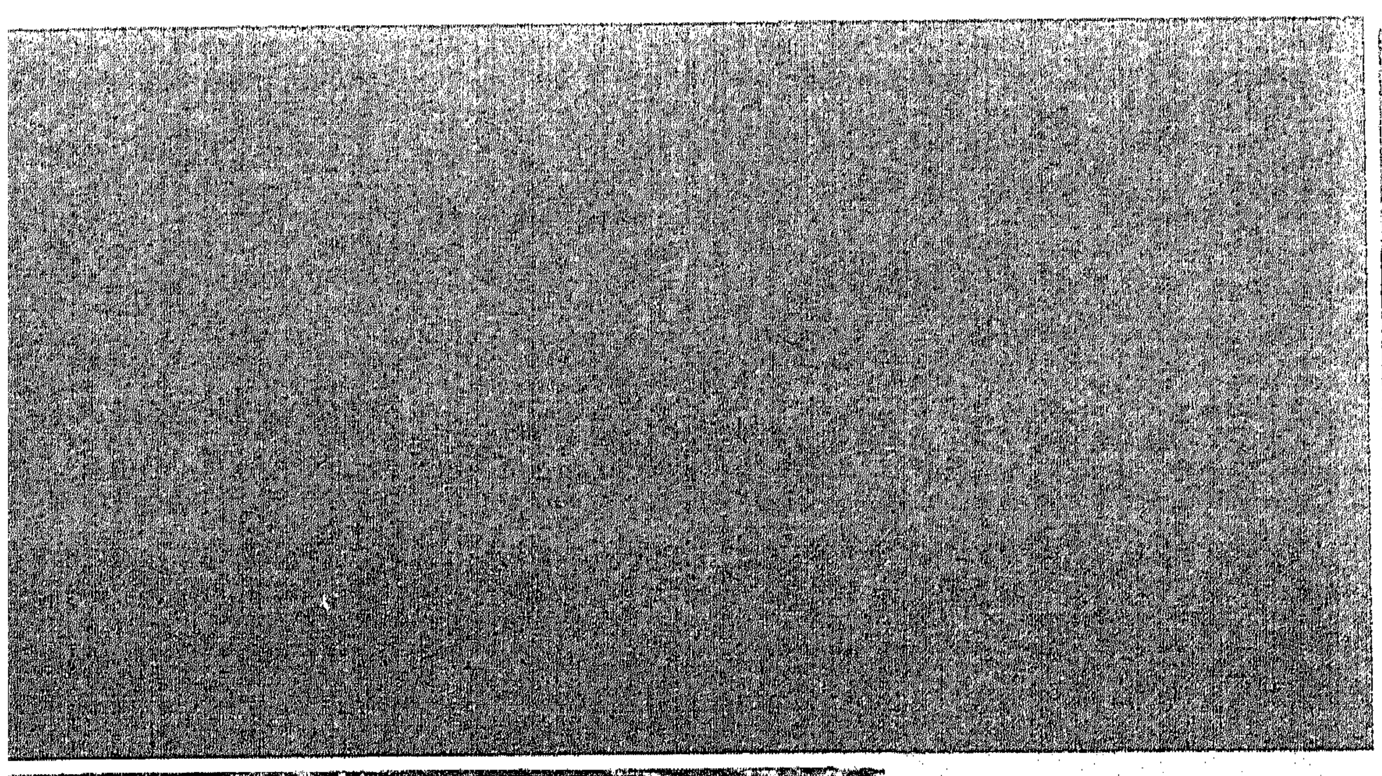
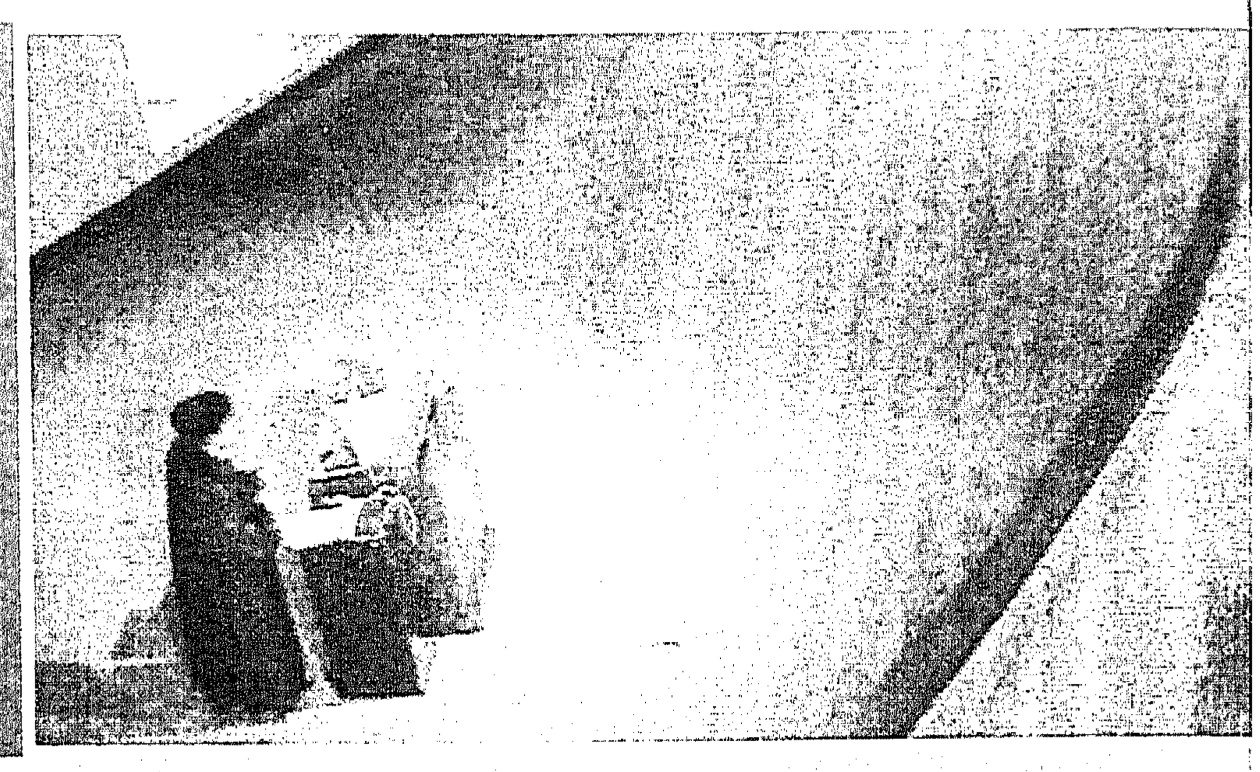
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Kans en ruimte

prof.dr. J. van den Berg

vrije Universiteit amsterdam





Kans en ruimte

prof.dr. J. van den Berg

Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar Ruimtelijke Stochastiek aan de faculteit der Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit Amsterdam op 15 juni 2005.

vrije Universiteit *amsterdam*

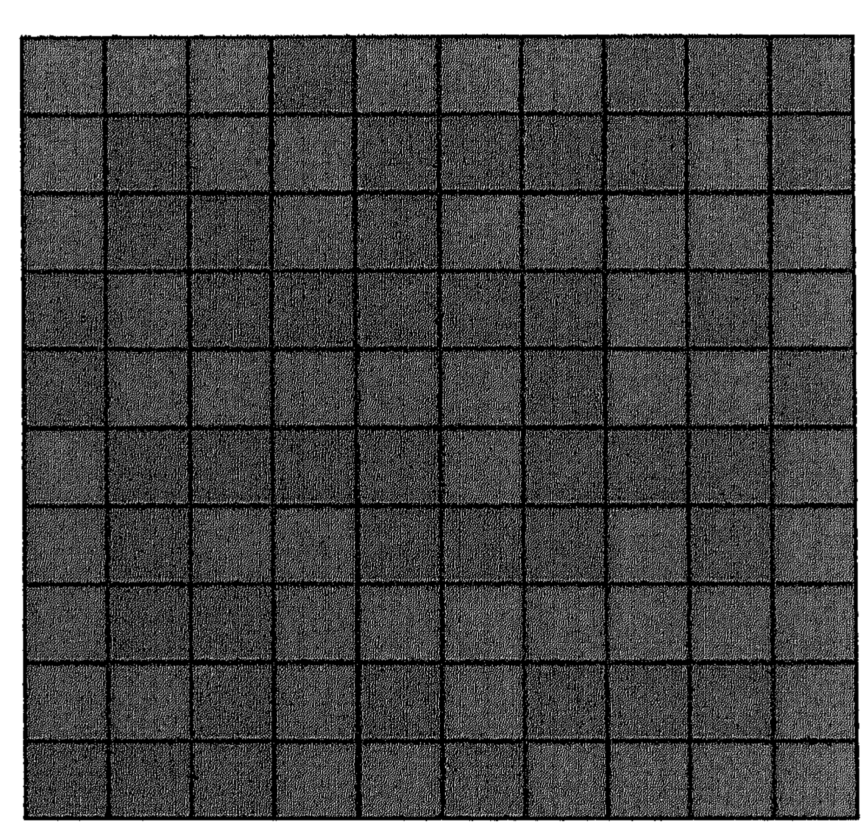
Mijnheer de rector, dames en heren,

De titel van deze oratie geeft *ruimte* voor verschillende interpretaties en daardoor misschien *kans* op misverstand. Het zal niet gaan over kanstheoretische aspecten van de ruimtelijke ordening of de ruimtevaart, maar een beetje astronomie of kosmologie zal wel aan de orde komen.

Ruimtelijke stochastiek houdt zich bezig met kans, toevalligheden, in een ruimtelijke context, en bestaat uit veel deelgebieden. Van enkele hiervan hoop ik een indruk te geven van wat zich daar afspeelt. De keuze van onderwerpen, en de visie daarop, is natuurlijk zeer persoonlijk.

Doolhoven

In de tweede helft van de jaren zeventig, toen ik wiskunde studeerde in Utrecht, had ik regelmatig interessante technische discussies met Fred Zijderhand, die in hetzelfde jaar zat als ik, maar natuurkunde studeerde (en later zou promoveren op een onderwerp in de kernfysica). Eén van die discussies had, voor zover ik mij kan herinneren, betrekking op een opdracht bij een college of programmeercursus. In elk geval kwam het onderwerp van discussie op het volgende neer: Beschouw een doolhof die bestaat uit groen of rood gekleurde vierkantjes (zie figuur 1).



Figuur 1.

Door die doolhof mag je je verplaatsen, maar dat mag alleen over de groene vakjes, en alleen in horizontale of verticale richting. Op die manier kun je spreken van *paden* door de doolhof. De opgave was een recept, of *algoritme* zoals dat heet, te geven om een pad tussen twee locaties in de doolhof te vinden, bijvoorbeeld tussen het vakje linksonder en dat rechtsboven. We verschilden van mening over welke van twee algoritmen het beste was, en besloten dit geschil op te lossen door op een groot aantal grote doolhoven beide algoritmen toe te passen. We genereerden deze doolhoven door voor ieder hokje door een muntworp (met een eventueel niet-zuivere munt) de kleur te bepalen. We speelden dit na op de computer waarbij door een random generator elk hokje met kans p groen en kans $1-p$ rood werd. Hier is p een getal tussen 0 en 1. We deden dus computersimulatie. Dat was toen nog niet zo gebruikelijk als tegenwoordig en we vonden het heel boeiend.

Al spoedig dwaalden we af van het oorspronkelijke probleem. We werden namelijk geconfronteerd met de volgende vraag: als we de doolhof zeer groot maken, is er dan nog wel een redelijke kans dat er überhaupt een pad tussen die twee punten is? Of convergeert die kans naar 0 als we de doolhof steeds groter maken? En welke rol speelt de parameter p daarbij? Dit probleem fascineerde me en ik deed navraag in mijn directe omgeving aan de universiteit, maar in eerste instantie leek dit probleem nieuw te zijn.

Dit speelde zich af in een tijdperk waarin studenten nog niet onder druk gezet werden zo snel mogelijk en zonder omwegen af te studeren, en ik stortte me op bovengenoemd probleem. Ik maakte enige vorderingen en werd steeds enthousiaster. Toen vertelde Onno Boxma, die destijds in Utrecht bij Cohen werkte, dat het hem herinnerde aan een onderwerp waarover hij eerder gelezen of gehoord had. Dat ging over percolatietheorie, een gebied dat midden jaren vijftig begonnen was met werk van de Britse wiskundige Hammersley[i].

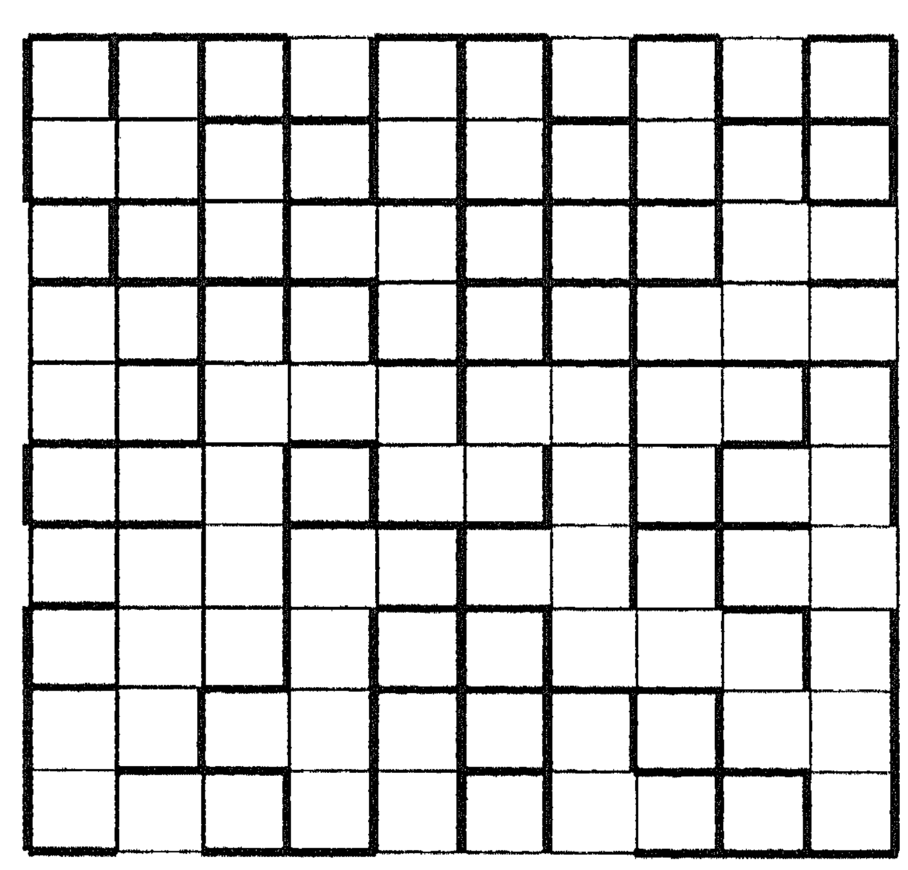
Figuur 2. J.M. Hammersley (1920 – 2004)

(Photograph and copyright Geoffrey Grimmett [ii])

Percolatie

Er was nog geen www, laat staan google, en ik begon een zoektocht door de wis- en natuurkunde tijdschriften in de bibliotheek. Voor de hand liggend zou zijn geweest te beginnen met de meest recente afleveringen en vandaar via verwijzingen terug te gaan in de tijd. In plaats daarvan begon ik met het lezen van de eerste percolatie-publicaties, die uit de jaren vijftig, en werkte moeizaam voorwaarts in de tijd. Dat was minder efficiënt maar wel veel spannender omdat ik niet wist hoe het zou aflopen; ik las als het ware een mooi verhaal dat nog alle kanten op kon gaan. In de eerste artikelen las ik hoe Hammersley in dit soort problemen geïnteresseerd was geraakt. Het was begonnen met een vraag van Broadbent, die werkte aan het ontwerpen van gasmaskers voor gebruik in steenkolenmijnen, bij een organisatie met een naam waarover je bijna je tong breekt: de British Coal Utilisation Research Association. De vraag van Broadbent en de discussies daarover met Hammersley hadden geleid tot een variant van het doolhofmodel dat ik eerder beschreef.

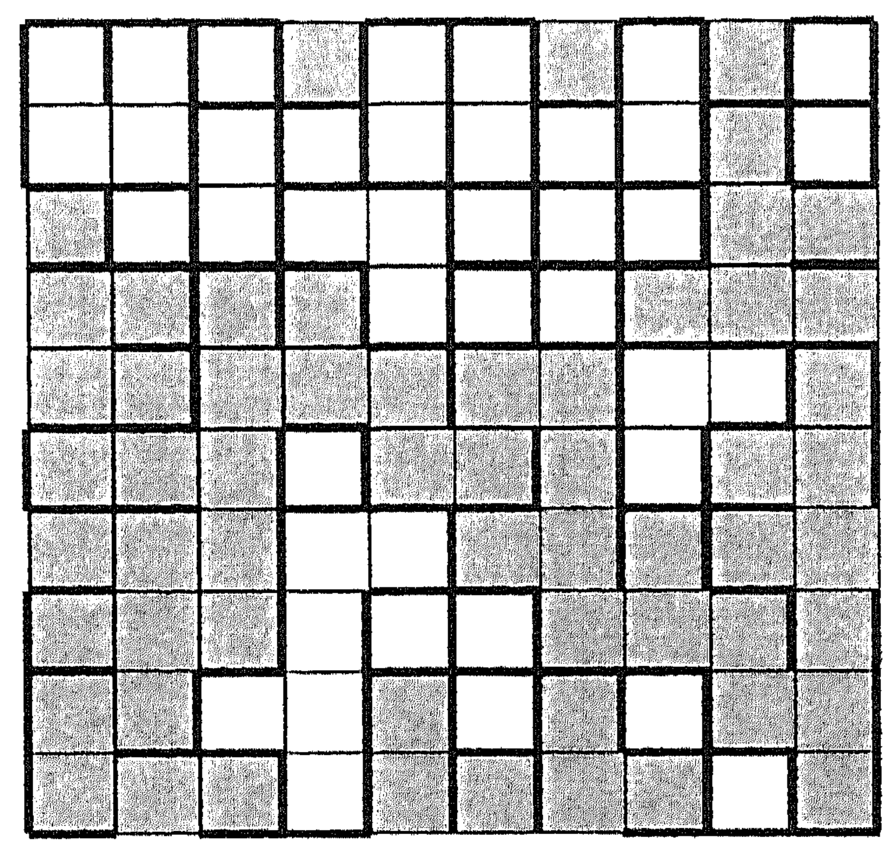
Bij deze variant hebben we opnieuw een structuur bestaande uit hokjes, maar nu gaat het niet om de toestand (rood of groen) van de hokjes zelf, maar van hun wanden (of zijden). Zie figuur 3.



Figuur 3.

Elke wand is met kans p doorlaatbaar (dun) en kans $1\text{-}p$ niet doorlaatbaar (dik). Deze variant van het percolatiemodel heet lijnpercolatie (Engels: bond percolation); de variant met de gekleurde hokjes heet puntpercolatie (Engels: site percolation). We zullen het soms ook gewoon het doorlaatbare-wanden model, respectievelijk gekleurde-hokjes model noemen.

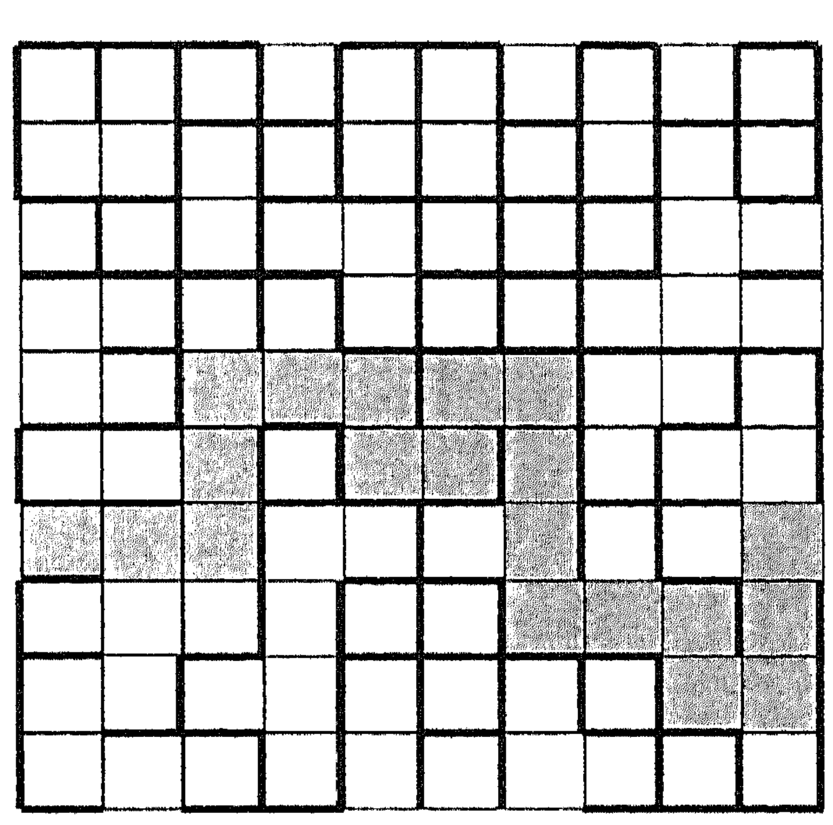
Wat heeft dit met gasmaskers te maken? De hokjes stellen kleine holten, of poriën, in het materiaal voor; de doorlaatbare wanden zijn verbindingen (voor te stellen als poortjes of tunneltjes) tussen naburige poriën. Hierdoor kan het gas van de ene holte naar de andere stromen en zich zo over een heel cluster van holten verspreiden. In figuur 4 is het gebied in de doolhof waar het gas op deze manier van buitenaf kan doordringen, met de kleur blauw aangegeven.



Figuur 4.

Bij echte gasmaskers gaat het natuurlijk om een 3-dimensionaal model, maar de essentie van veel problemen blijft gelijk. De uit de praktijk voortgekomen problemen van Broadbent leidden tot de volgende wiskundige vraag: als we een oneindig grote doolhof hebben, is dan elk van die clusters eindig, of zou er een oneindig groot cluster kunnen zijn? Dat laatste zou betekenen dat het gas zich globaal door het gehele materiaal kan verspreiden (percoleren).

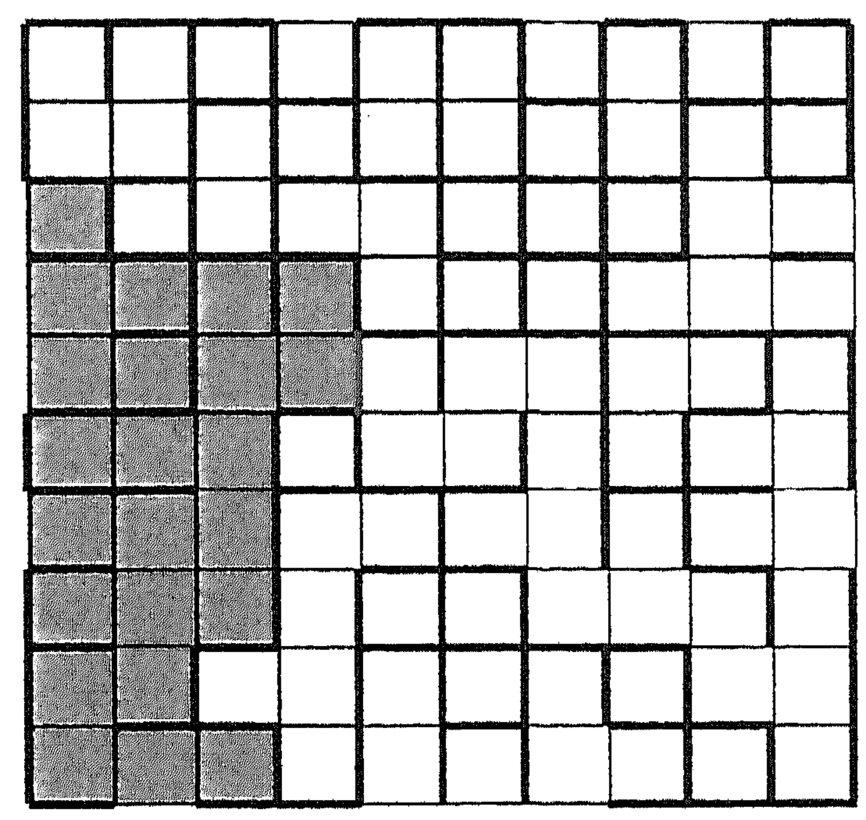
Eén van de eerste resultaten van Hammersley was dat er een niet-triviale kritieke waarde van p is. ('Niet-triviaal' betekent hier 'ongelijk aan 0 of 1'.) Als p kleiner dan deze kritieke waarde is zijn er alleen eindige clusters; boven de kritieke waarde is er, naast eindige clusters, ook een oneindig cluster.



Gedurende enkele tientallen jaren bleef één van de centrale vragen hoe groot die kritieke waarde is. Op grond van bepaalde eigenschappen van het model dacht men dat deze waarde best wel eens ½ zou kunnen zijn. Ik zal proberen dit iets duidelijker te maken. Onder een horizontale doortocht (of oversteek) verstaan we een pad dwars door de doolhof, zodat het gas van de linkerkant naar de rechterkant kan stromen. Dit begrip is belangrijk en we komen er diverse keren op terug.

Figuur 5. Voorbeeld van een horizontale oversteek

Als u naar enkele voorbeelden van doolhoven kijkt (zie fig. 5 en 6), dan ziet u dat steeds het volgende geldt: *of* er is zo'n horizontale oversteek, *of* er is een verticale barrière van ondoorlaatbare wanden.



Figuur 6. Door in figuur 5 de hier met rood aangegeven wand af te sluiten, kan van links binnendringend gas niet verder komen dan het hier blauw gekleurde gebied, dat wordt afgesloten door een barrière.

Maar zo'n barrière kun je ook als een soort pad beschouwen, met de rol van doorlaatbaar en ondoorlaatbaar verwisseld, en in een doolhof die een klein beetje verschoven is. Op deze manier blijkt dat als de doolhof ongeveer vierkant is, en p precies gelijk aan ½, er een eerlijke competitie is tussen de doorlaatbare en de ondoorlaatbare wanden. Vandaar de gissing dat dit wellicht de kritieke waarde zou zijn.

In 1960 bewees Harris met zeer elegante argumenten dat de kritieke waarde in elk geval niet kleiner dan ½ is. Ook onderzoekers uit de theoretische natuurkunde raakten geïnteresseerd en in 1964 werd door Sykes en Essam zeer aannemelijk gemaakt dat de kritieke waarde inderdaad ½ is. Ik zeg met opzet 'aannemelijk gemaakt' in plaats van 'bewezen'. In hun overigens zeer fraaie argumenten zat een veronderstelling die vanuit fysisch oogpunt heel redelijk was, maar die zij niet konden hardmaken. Door middel van soortgelijke en aanvullende argumenten bepaalden zij ook de kritieke waarden van enkele andere percolatiemodellen.

Dit was min of meer de situatie in de percolatieliteratuur toen ik als student de bibliotheek doorzocht. Wat ik toen niet wist was dat juist toen, in de VS, Italië en het Verenigd Koninkrijk een belangrijke nieuwe ontwikkeling op gang was gekomen die enkele jaren later als hoogtepunt zou hebben het beroemde bewijs van Kesten dat de kritieke waarde inderdaad ½ is. Gezien de eerdere voorspellingen was het resultaat op zich niet verbazend, maar des te interessanter waren de argumenten.

Wat Kesten deed was niet het invullen van de hiaten in de redenering van Sykes en Essam. In tegendeel: hij ging uit van een geheel andere, in zekere zin directere benadering van het probleem. Bij deze aanpak staan centraal de horizontale oversteken die ik al eerder noemde, en het begrip spil-element ('spil' in de zin van iets cruciaals, iets waarvan alles afhangt). In deze context noemen we de wand van een hokje een spil-element voor een configuratie als het al of niet doorlaatbaar zijn van die wand cruciaal is voor het bestaan van zo'n oversteek. (In de grafentheorie spreekt men van *cut edges*). Als er veel spilpunten zijn dan staat het systeem als het ware te springen een oversteek te creëren of juist op te heffen. Kesten liet op zeer vernuftige wijze zien dat als de kritieke waarde groter dan ½ zou zijn, er een heel interval van waarden van de parameter p is waar je, ongeacht de grootte van de doolhof, met behoorlijke kans zo'n situatie hebt. Maar dat bleek tot een tegenspraak te leiden, dus moest de kritieke waarde precies ½ zijn.

Kestens argumenten bleken in allerlei richtingen gegeneraliseerd en verfijnd te kunnen worden en tilden het gebied naar een hoger niveau. Zo konden al spoedig ook claims van Sykes en Essam betreffende andere kritieke waarden bewezen worden: Bijvoorbeeld, voor het rooster dat is opgebouwd uit regelmatige zeshoeken is de kritieke waarde voor het gekleurde-hokjes model ook ½, en die voor het doorlaatbare-wanden model gelijk aan (als u het nog niet wist, zou u het zeker niet raden!) $2\sin(\pi/18)$.

Kestens bewijs inspireert zelfs nu nog tot pogingen tot vereenvoudiging en generalisatie, en is een van de hoogtepunten in de ontwikkeling van de percolatietheorie. Nadien zijn er nog diverse andere hoogtepunten geweest[iii], waarvan ik er één zal bespreken aan het eind van deze rede.
Maar eerst ga ik iets zeggen over de rol van percolatie binnen de ruimtelijke stochastiek.

Magnetisatie, epidemieën, polymerisatie (en de oerknal)

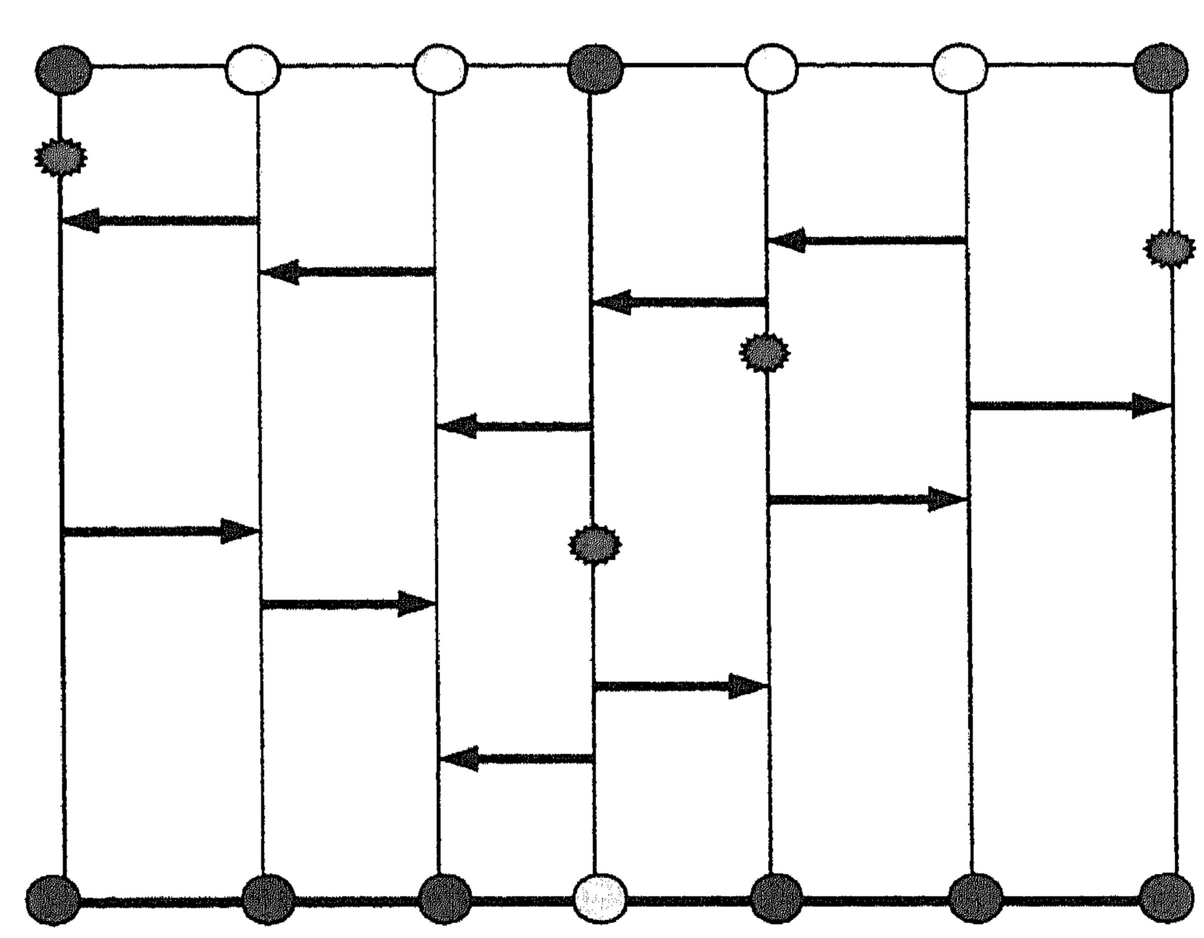
Op het eerste gezicht lijkt percolatie een zeer beperkt onderwerp en de doolhof-interpretatie wekt misschien de indruk van *spielerei*. Er zijn echter allerlei varianten van deze modellen (denk aan drie in plaats van twee dimensies; willekeurig verkregen punten in plaats van een deterministisch rooster, etc.) en het blijkt dat percolatie bij zeer veel verschijnselen een rol speelt.

Ik merkte al op dat theoretische fysici geïnteresseerd waren. Het percolatie-model was voor hen één van de eenvoudigst te beschrijven modellen met een *fase-overgang*. Dat is een drastische verandering van de globale eigenschappen van een systeem bij een kleine verandering van de systeemparameters. In het percolatiemodel gaat het hierbij om de overgang van de subkritische fase (alleen eindige clusters) naar de superkritische fase (aanwezigheid van een oneindig cluster). Men hoopte, en dit is gedeeltelijk uitgekomen, dat dit eenvoudige model goed te doorgronden zou zijn en inzicht zou geven in andere vormen van faseovergang zoals het stollen van vloeistoffen, magnetisatie, etc. Wat magnetisatie betreft, dat heeft, zoals Fortuin en Kasteleyn in het begin van de jaren zeventig lieten zien, een subtiel verband met percolatie, hoewel het daarbij om een wat ingewikkelder percolatiemodel gaat dan wat ik hier besproken heb.

Zelf heb ik mij onder andere beziggehouden met ruimtelijke afhankelijkheden voor Markovvelden, een uitgebreide klasse van kansprocessen op roosters. Het bleek dat deze afhankelijkheden afgeschat kunnen worden in termen van de kans op het bestaan van bepaalde paden, dwz. door percolatie-achtige grootheden. Het fraaist werkt dit bij een 2-dimensionaal model van antiferromagneten, en bij het zogenaamde *hard-core* model. Dat laatste beschrijft de evenwichtstoestand van een systeem waar deeltjes zich kunnen vasthechten aan, en weer loskomen van, de punten van een rooster, en waar het niet mogelijk is dat twee buurpunten beide bezet zijn.

Ook bepaalde modellen van bosbranden (en, meer algemeen, zogenaamde *excitable media*) hebben percolatieaspecten. Uit het promotieonderzoek van Rachel Brouwer blijkt dat de relatie met percolatie hier heel subtiel kan zijn.

Nog een voorbeeld waar percolatie een belangrijke rol speelt is het *contact process*. Dat is een ruimtelijk model voor de verspreiding van een infectie over een statische populatie. Met een grafische representatie (zie fig. 7) kan men de ontwikkeling van dit systeem in de tijd beschrijven.



Figuur 7.

In zo'n ruimte-tijd diagram zijn volkomen willekeurig (volgens zogenaamde Poisson processen) pijlen en rode sterren ingebracht. Een pijl geeft aan dat als het individu dat correspondeert met het begin van de pijl op het betreffende tijdstip ziek is, het andere zal infecteren. Een rode ster betekent dat als het betreffende individu op dat tijdstip ziek is, het zal genezen. Het ziek zijn van een individu op een bepaald tijdstip (hier aangegeven met de kleur geel) kan zo worden vertaald naar het bestaan van een pad, met bepaalde eigenschappen.

Iets dergelijks geldt ook voor andere zogenaamde *interactieve deeltjessystemen.*

Kortom: 'Overal percolatie' is overdreven, maar als je goed kijkt is er wel veel percolatie. In een artikel in 1976 in het tijdschrift 'La Recherche' noemde de fysicus (en latere Nobelprijswinnaar) de Gennes percolatie 'un concept unificateur'[iv]. In dat artikel geeft hij een groot aantal voorbeelden van processen waar percolatie een cruciale rol speelt, van polymerisatie tot communicatienetwerken (en, als frivool voorbeeld, door de wind in de war geraakte jaren-zeventig haardossen).

Een geheel ander voorbeeld is te vinden in het werk van de fysicus/kosmoloog Alan Guth. In zijn voor een breed publiek geschreven boek *The Inflationary Universe*[v] vertelt hij hoe zijn werk aan een variant van de oerknaltheorie tot een percolatieprobleem leidde. (Bij deze variant gaat het om een enorme expansie die een fractie van een seconde *na* de oerknal zou hebben plaatsgehad). Rond 1980 belandde hij via via met dat probleem bij Harry Kesten op de thee. Guth legde zijn probleem uit en, zo schrijft hij, "Harry's mind began clicking". Aan het eind van de middag begon duidelijk te worden dat het percolatiemodel zich niet gedroeg zoals Guth had gehoopt, zodat hij zijn ideeën moest heroverwegen.

Nu ik het over interpretaties en toepassingen van percolatie heb wil ook het volgende graag kwijt. In zijn artikel *Origins of percolation theory*[vi] uit 1983 vertelt Hammersley over de beginjaren van dit gebied. Zo beschrijft hij hoe men begin jaren zestig bij Bell Labs (in Murray Hill) computerprogramma's losliet op percolatieproblemen. Dit was gedeeltelijk om het gebied vooruit te helpen, maar (ik citeer nu uit Hammersley's artikel): "but more particularly because this programme was considerably more elaborate than any programme that had hitherto been undertaken at Murray Hill". Het werd dus reken- en computertechnisch als een uitdaging beschouwd en wie weet wat voor onvoorziene en onbekende bijdragen percolatie zo aan de maatschappij heeft geleverd.

Brownse beweging

Zoals ik al zei: er is heel veel percolatie, maar natuurlijk is niet alles percolatie. Het misschien wel bekendste voorbeeld van een heel ander ruimtelijk toevalsproces is de Brownse beweging[vii]. Dit is genoemd naar de plantkundige Brown die rond 1827 door een microscoop stuifmeelkorrels in water bestudeerde. Het viel hem op dat de beweging van de korrels grillig, willekeurig en onvoorspelbaar was. Een meer precieze, kwantitatieve beschrijving werd pas circa ¾ eeuw later gegeven, o.a. door Einstein[viii]. Het was één van Einsteins resultaten in het voor hem wetenschappelijk zeer vruchtbare jaar 1905, nu honderd jaar geleden. Overigens had enkele jaren eerder, in Frankrijk, Bachelier al berekeningen aan Brownse beweging gedaan (ik kom daar straks op terug), maar Einsteins werk was vanuit fysisch oogpunt belangrijker.

Einstein nam aan dat de thermische beweging van de watermoleculen tot botsingen met de stuifmeelkorrel leiden, en dat deze voortdurende, van alle kanten komende botsingen de grillige beweging van de korrel veroorzaken.
Op deze botsingen paste Einstein de bekende Newton vergelijkingen toe
(de $F = m{\cdot}a$ die we op de middelbare school leren) en daarmee leidde hij eigenschappen van de beweging van de korrels af. Zo liet hij zien dat de gemiddelde kwadratische verplaatsing evenredig is met de tijd en berekende hij de evenredigheidsconstante. Deze formule gaf een expliciet verband tussen macroscopische, en dus in principe met instrumenten te meten, grootheden enerzijds, en parameters die op de microscopische wereld van de moleculen betrekking hebben anderzijds. Zo kon door toepassing van Einsteins werk de beroemde Boltzmann constante geschat worden.

Hoewel Einsteins werk aan Brownse beweging voor de natuurkunde heel belangrijk was, was het voor wiskundigen onvolledig en niet helemaal bevredigend. Wiskundigen streefden naar een algemene, abstracte constructie en beschrijving van Brownse beweging, los van moleculen en fysische wetten. Dit lijkt misschien puur hobbyisme maar is juist belangrijk *omdat* Brownse beweging in zoveel toepassingsgebieden en verschillende gedaanten voorkomt, niet alleen in de natuurkunde. Zo'n meer abstracte, wiskundig aanvaardbare, fundering en analyse van Brownse beweging werd gegeven door Wiener in de jaren twintig en Lévy in de jaren dertig.

Een voorbeeld van een gebied buiten de natuurkunde waar Brownse beweging toegepast wordt is de economie. Daar wordt het o.a. gebruikt bij de analyse van prijzen van aandelen en aan aandelen gerelateerde producten zoals opties. Idee hierbij is dat, zoals de stuifmeelkorrel beweegt door de botsingen met de watermoleculen, de fluctuaties van de aandelenprijzen worden veroorzaakt door de talloze acties van de vele spelers op de aandelenmarkt. Onder bepaalde aannames kan dan een recept gegeven worden om de waarde van (bijvoorbeeld) opties te bepalen. Dat deze ideeën en berekeningen ook in de praktijk serieus genomen worden blijkt uit de toekenning van de Nobelprijs Economie in 1997 aan Scholes en Merton voor hun werk op dit gebied. Zelf ben ik geen expert, maar in het onderzoek en masteronderwijs aan onze afdeling krijgt deze financiële wiskunde veel aandacht.

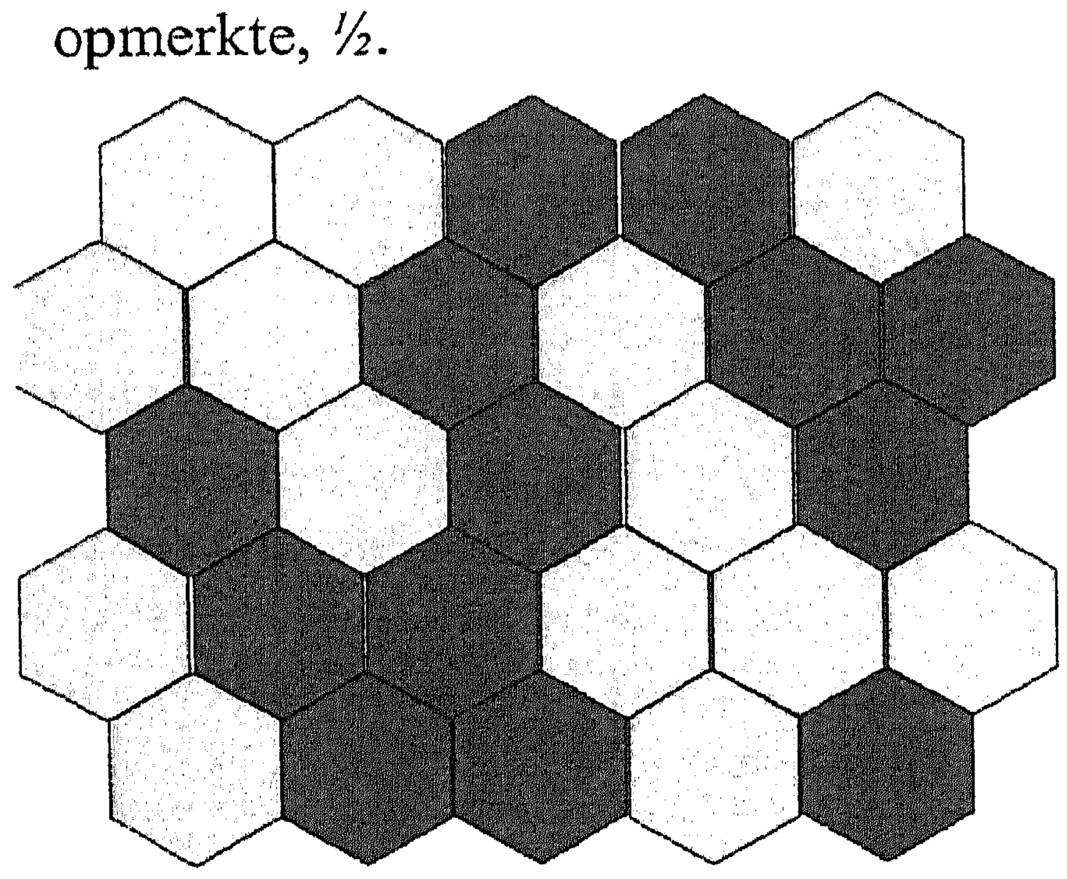
Overigens was het werk van Bachelier dat ik eerder even noemde, ook al gericht op toepassingen op de aandelemarkt, hetgeen ook blijkt uit de titel van zijn artikel *Théorie de la speculation*. In de Frankfurter Allgemeine Zeitung van 20 mei dit jaar staat een heel aardig artikel over de geschiedenis van de Brownse beweging en haar toepassingen. Aangezien het een Frankfurter krant is, zal het niet verbazen dat de nadruk op financieel-economische toepassingen ligt. Het artikel heet dan ook *Einstein's erben in den Banken.*

Er zijn nog talloze andere voorbeelden binnen en buiten de natuurkunde waar Brownse beweging belangrijk is, zoals in bepaalde limiet situaties in de wachtrijtheorie.

Een nieuwe fascinerende ontwikkeling

Brownse beweging en percolatie zijn heel verschillende gebieden. Brownse beweging heeft de zeer prettige eigenschap dat toekomstige verplaatsingen zich niets aantrekken van verplaatsingen in het verleden. Dankzij dit soort eigenschappen kon er volop aan gerekend worden en lag er direct al een arsenaal aan wiskundig gereedschap klaar om gebruikt te worden. Het gaat vooral om gereedschap van een analytisch karakter. Percolatie heeft bovengenoemde eigenschap niet. Als je stap voor stap de kleuren in een doolhof invult, moet je onthouden waar je al geweest bent; ik kom daar straks op terug. Tot voor kort werden bij percolatie vooral ad hoc constructies van combinatorisch getinte argumenten gebruikt. Er was, althans in mijn ogen, een zeker cultuurverschil tussen onderzoekers die aan Brownse beweging (en daaraan gerelateerde onderwerpen zoals stochastische differentiaalvergelijkingen) werken en percolatieonderzoekers. Een wat simplistische typering is misschien de volgende: In de percolatieliteratuur kom je vooral *ongelijkheden* en in de Brownse beweging literatuur vooral *gelijkheden* tegen.

Ruim vijf jaar geleden is echter een fascinerende ontwikkeling begonnen die een brug slaat tussen beide gebieden. Wat de percolatie betreft gaat het daarbij om 2-dimensionale kritieke percolatie (dus met p gelijk aan de kritieke waarde). Deze ontwikkeling is zeer technisch van aard, maar zo belangrijk dat ik graag een impressie wil geven van de belangrijkste ideeën. Ik beperk me hierbij tot het gekleurde-hokjes model voor het rooster dat opgebouwd is uit regelmatige zeshoeken. De kritieke waarde voor dit model is, zoals ik eerder opmerkte, ½.

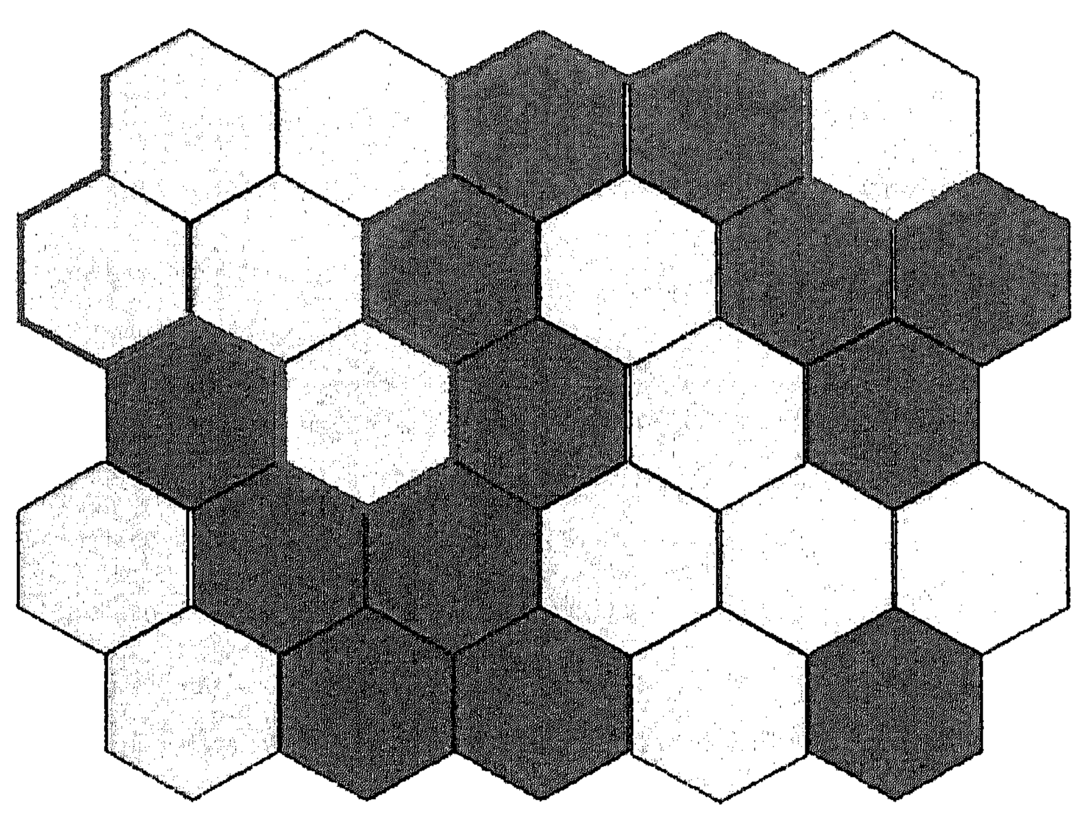


Figuur 8.

We hebben ons al eerder in deze rede, maar voor een iets ander model, beziggehouden met oversteekkansen. In de huidige context is dit de kans dat er een pad van een bepaalde kleur, zeg blauw, is dat de linkerzijde met de rechterzijde van de doos verbindt (zie fig. 8).

Blauw? We werkten toch met groen en rood? Ja, maar de laatste jaren is het mode geworden de kleuren geel en blauw te gebruiken: de kleuren van de vlag van Zweden, het land waar de wiskundige Stanislav Smirnov (die overigens Rus is) werkte toen hij zo'n vier jaar geleden baanbrekend werk op dit gebied deed.

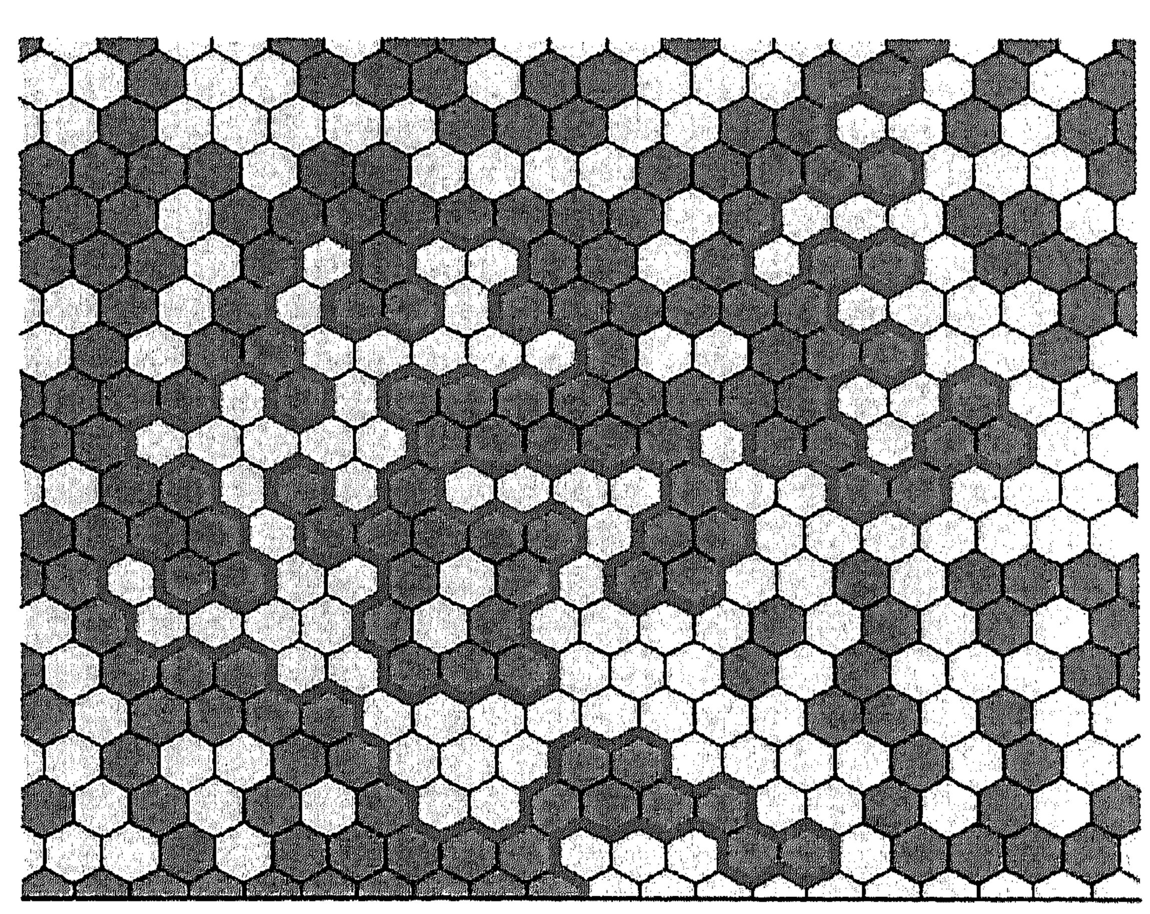
Om terug te komen op die oversteekkansen: het bestaan van zo'n oversteek kan zeer elegant worden uitgedrukt in termen van een ander pad: een zogenaamd *exploratiepad*. In deze situatie is dat het pad dat linksboven begint, over de zijden van de zeshoeken beweegt, en bij elke stap een gele zeshoek links en een blauwe zeshoek rechts van zich heeft. (Behalve voor een stap die langs de bovenkant of de linkerkant van de doos gaat: bij zo'n stap is er namelijk aan de linker- respectievelijk rechterkant niets.)



Figuur 9

Ruwweg kun je zeggen dat dit exploratiepad de grens is tussen het gele gebied dat met de bovenkant en het blauwe gebied dat met de linkerkant van de doos is verbonden (zoals de rode curve in fig. 9). Een interessante observatie is dan dat er een blauwe horizontale oversteek van de doos is, precies dan als het exploratiepad eerder de rechterkant dan de onderkant van de doos bereikt. Dit motiveert tot de studie van exploratiepaden.

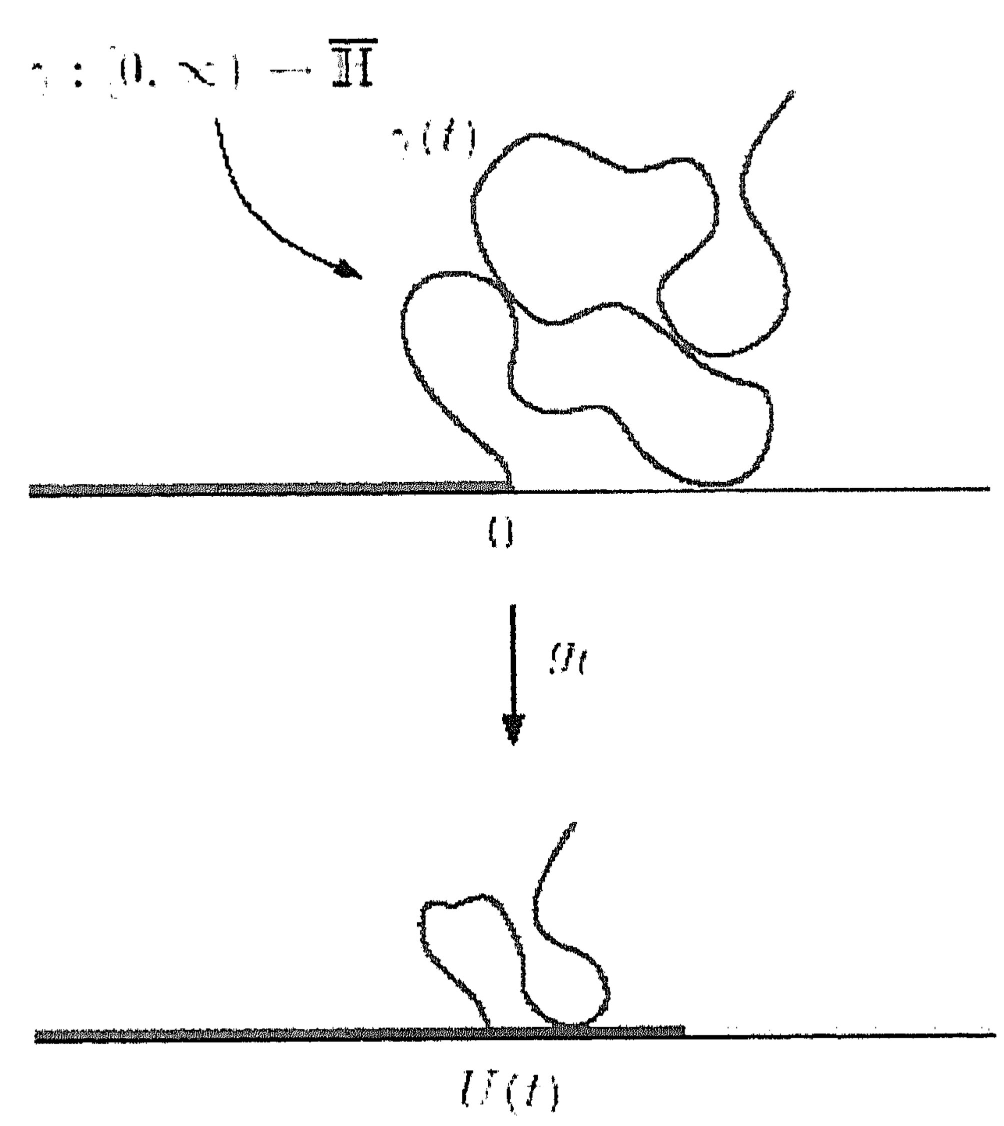
Om bepaalde redenen is het aantrekkelijk exploratiepaden in een iets andere situatie te bekijken, namelijk vanuit een punt op de rand van een halfvlak dat verder helemaal gevuld is met gele en blauwe zeshoeken (zie fig. 10).



Figuur 10 (W. Kager)

Dit pad ziet er, om redenen die ik eerder noemde, totaal anders uit dan het pad van een Browns deeltje. Immers, omdat de toekomstige verplaatsing van een Browns deeltje zich niets aantrekt van het verleden, kan en zal zijn pad zichzelf talloze malen snijden. Het exploratiepad echter kan zichzelf niet snijden.

Ruim vijf jaar geleden kwam Oded Schramm op het briljante idee technieken toe te passen die in het begin van de twintigste eeuw waren ontwikkeld door Loewner en die tot voor kort alleen in de zuivere wiskunde werden toegepast. Hierbij spelen conforme afbeeldingen een hoofdrol. Dat zijn afbeeldingen die, ruwweg gezegd, er lokaal uitzien als een combinatie van een draaiing en een inkrimping (of uitrekking). Met gebruik van Loewners ideeën kan een pad γ, dat op de rand van het halfvlak begint en zich zonder zelfdoorsnijdingen door het halfvlak kronkelt, door een dynamische familie conforme afbeeldingen als het ware gecodeerd worden als een beweging op een lijn. In figuur 11 is deze laatste beweging aangegeven met U(t).



Figuur 11 (W. Kager)

Deze resulterende 1-dimensionale beweging kan teruggecodeerd worden naar het oorspronkelijke pad door middel van de volgende differentiaalvergelijking van Loewner:

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U(t)}$$

Fysici hadden al lange tijd het vermoeden dat het kritieke percolatiemodel, op grote schaal gezien (in de zogenaamde schalingslimiet), in kanstheoretische zin niet verandert bij draaien of 'uitrekken' van het vlak. Het vermoeden was zelfs sterker, namelijk dat dit geldt bij alle conforme afbeeldingen (conforme invariantie). Dit leidde Schramm weer tot het vermoeden dat de 1-dimensionale beweging die op de bovenbeschreven manier correspondeert met het exploratiepad, een Brownse beweging is. (De tijd is te kort dit hier verder toe te lichten.)

Door Schramm en andere onderzoekers werden deze ideeën verder uitgewerkt en hardgemaakt. (In het bijzonder werd de conforme invariantie bewezen door eerder genoemde Smirnov.) Door de connectie met Brownse beweging konden nu allerlei expliciete berekeningen voor het percolatiemodel worden gedaan. Zo kon bijvoorbeeld eindelijk bewezen worden dat de kans op een blauw pad vanaf een punt naar de rand van de cirkel met straal n rond dat punt van de orde $n^{-5/48}$ is, hetgeen al lang geleden voorspeld werd door natuurkundigen.

Ook diverse niet eerder voorspelde resultaten werden verkregen. Wat deze ontwikkeling extra interessant maakt is dat deze stochastische Loewner aanpak ook lijkt te werken voor veel andere modellen[ix]. In de stochastische Loewner vergelijking zit een parameter. Percolatie correspondeert met de waarde *6* van deze parameter. Men vermoedt (en dit is gedeeltelijk bewezen) dat andere waarden corresponderen met zogenaamde *loop-erased random walks*, het Ising model, en andere modellen. Zowel wis- als natuurkundigen zijn enthousiast over de kracht en mogelijkheden van deze Stochastische Loewner Evolutie (SLE).

Veel problemen zijn nog steeds open. Zelf hoop ik dat SLE meer inzicht zal geven in, bijvoorbeeld, de bosbrandmodellen die ik eerder noemde. Naast pogingen deze nieuwe technieken in het eigen onderzoek te betrekken, is het een uitdaging de beginselen ervan te behandelen in het masteronderwijs. Met Federico Camia, die zelf fundamenteel onderzoek aan het grensvlak van SLE en percolatie doet, heb ik deze uitdaging aangegrepen. Volgend voorjaar gaan we van start; het is een avontuur maar we zien het met vertrouwen tegemoet.

Overigens wil ik benadrukken dat SLE geen algemeen wondermiddel is. Het is alleen van toepassing in twee dimensies. In drie dimensies zijn nog steeds zeer fundamentele problemen onopgelost. Combinatorisch getinte argumenten zullen een grote rol blijven spelen. Ik denk daarbij onder meer aan combinatorische renormalisatie.

Beschouwingen

Het is verheugend dat hier en aan diverse andere Nederlandse universiteiten actief en met succes wordt gewerkt aan de gebieden die ik in deze rede heb besproken. We moeten echter alert blijven op nieuwe ontwikkelingen en oppassen niet ernstig achter te raken bij, ik geef slechts een voorbeeld, Frankrijk. Een groot probleem in ons land is het gebrek aan animo bij middelbare scholieren om wiskunde (of andere bètavakken) te gaan studeren. De belangrijkste oorzaak is volgens mij dat er te weinig leraren zijn die zelf een universitaire opleiding gevolgd hebben. Ook worden leraren overbelast met taken die niet direct met onderwijs te maken hebben. Verder wordt de nieuwsgierigheid en het leervermogen van tieners schromelijk onderschat. Sommige wiskundeboeken op de middelbare school staan vol met niet-functionele plaatjes die haast beledigend voor de leerlingen moeten zijn. Moeten we dan terug naar de saaie leermethodes van heel lang geleden? Nee, natuurlijk niet; we moeten gebruik maken van nieuwe didactische inzichten en, niet te vergeten, de mogelijkheden die de moderne tekstverwerking bieden. We zijn echter wel erg ver doorgeschoten, ver van de gulden middenweg. Natuurlijk is dit al eerder gezegd maar het is goed dit te blijven doen tot er eindelijk iets verandert.

U merkt dat ik inmiddels het wetenschappelijk deel van mijn rede heb verlaten en op meer politiek en beschouwelijk terrein ben gekomen. Op dit terrein ga ik nog even verder. Tijdens mijn rede heb ik enkele keren laten merken dat wiskundigen en natuurkundigen niet altijd dezelfde doelen nastreven. Hopelijk is dit niet negatief overgekomen. Om elk misverstand hierover uit de weg te ruimen wil ik dit zeggen: als ik nu van het VWO zou komen, zou ik willen proberen een volledige wiskunde- en een volledige natuurkundestudie te doen.

Nu iets anders: Er is de laatste tijd, onder andere via de media, veel discussie over de verhouding tussen wetenschap en religie. Hierbij zijn, tot mijn verbazing (en afkeer), zeer kwetsende opmerkingen gemaakt. Het past niet zo bij mijn persoonlijkheid me in deze discussie te mengen. Ik wil echter dit zeggen tegen alle getalenteerde jonge mensen met een religieuze achtergrond, die erover denken een natuurwetenschappelijke richting te kiezen: laat je door dergelijke opmerkingen niet afschrikken!

Dankwoord

Ik dank het College van Bestuur en het bestuur van de Faculteit der Exacte Wetenschappen, met name decaan Wim Hogervorst, voor het in mij gestelde vertrouwen. Ronald Meester en Aad van der Vaart bedank ik voor hun persoonlijke initiatief en inzet bij het tot stand komen van mijn leerstoel en mijn aanstelling. Ronald ken ik al sinds eind jaren tachtig. We hebben door de jaren heen diverse keren samengewerkt en veel interessante discussies gehad. Ook daarvoor bedankt, Ronald.

Ik werk al heel lang bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), nu nog voor 80%. Mede door het goede werkklimaat en de uitstekende

voorzieningen op het CWI heb ik mij kunnen ontplooien. Daarvoor wil ik iedereen op het CWI bedanken.

Veel mensen hebben een cruciale, positieve invloed op mijn loopbaan gehad. Een aantal van hen wil ik hier noemen:

Als eerste wil ik Mike Keane bedanken, die mijn promotor aan de TU Delft was. Een betere promotor had ik niet kunnen treffen! Zijn enthousiasme, energie en vermogen problemen van de meest onverwachte kanten met succes op te lossen zijn enorm stimulerend geweest.

Ook Harry Kesten wil ik bedanken. Verschillende keren, voor het eerst tijdens mijn promotieonderzoek, heb ik het voorrecht gehad met hem te mogen samenwerken. Steeds weer was ik onder de indruk van zijn onvoorstelbare kennis, vindingrijkheid en doorzettingsvermogen, maar ook van zijn nuchtere levenshouding. Het jaar dat ik aan Cornell University doorbracht (1990/1991) is een van de prettigste en boeiendste in mijn loopbaan geweest.

Toen ik eind jaren tachtig in de industrie werkte en terugverlangde naar fundamenteel onderzoek, werd mij een positie op het CWI aangeboden, voor een deel bij Onno Boxma en voor een deel bij Henry Berbee. Ik heb dat aanbod, waar ik nog steeds dankbaar voor ben, van harte aangenomen en heb daar nooit spijt van gehad.

Ook mijn afstudeerhoogleraar in Utrecht, wijlen Professor Cohen, ben ik dank verschuldigd. Hij luisterde altijd met belangstelling naar mijn enthousiaste percolatie-verhalen maar zorgde er voor dat ik in mijn afstudeerperiode ook andere dingen leerde, zoals Brownse beweging. Ook Gerard Hooghiemstra, onder wiens directe begeleiding mijn afstudeerwerk plaatsvond wil ik hierbij bedanken.

Ook wijlen professor Kasteleyn ben ik zeer erkentelijk. Nog steeds denk ik met veel plezier, en ook een zekere nostalgie, terug aan de boeiende gesprekken die wij aan het eind van mijn studietijd hadden en die van grote invloed waren bij mijn beslissing op dit gebied verder te werken.

De nieuwe ontwikkelingen, zoals SLE, waarover ik sprak, heb ik vooral leren begrijpen in een studiegroep die twee jaar geleden regelmatig bijeenkwam. Ik wil alle deelnemers bedanken, in het bijzonder Antal Járai en Wouter Kager.

Wouter bedank ik bovendien voor het beschikbaar stellen van twee van de bij deze rede gebruikte illustraties. Ook mijn zoon Lars heeft veel geholpen bij het maken en ordenen van illustraties. Jan van Schuppen bedank ik voor een kopie van het artikel uit de Frankfurter Allgemeine Zeitung[x].

Mijn familieleden, vrienden en kennissen bedank ik voor hun steun, belangstelling en gezelligheid door de jaren heen. Mijn ouders hebben mij een opvoeding gegeven waarbij het vergaren van kennis en vergroten van inzicht op een prettige manier werd aangemoedigd. Mijn moeder zou zeker heel blij geweest zijn met mijn benoeming, maar zij heeft dat niet meer mee kunnen maken.

Als laatste bedank ik mijn vrouw Margriet en onze kinderen Lars en Suzanne. Jullie geven warmte, kleur en orde in mijn bestaan. Zonder jullie zou ik nergens zijn!

Ik heb gezegd.

Noten en referenties

[i] Hammersley overleed in 2004. Een *in memoriam,* door Geoffrey Grimmett, verscheen in *The Independent* van 14 mei 2004.
[ii] I thank Geoffrey Grimmett for his kind permission to reproduce Figure 2.
[iii] Voor een uitstekende behandeling van een belangrijk deel van de percolatietheorie, zie het boek *Percolation*, second edition, van G.R. Grimmett (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 321, Springer, 1999).
[iv] P.G. de Gennes, La percolation: un concept unificateur, *La Recherche* 7, 919-927 (1976).
[v] Alan Guth, *The Inflationary Universe* (Chapter 11), Random House (1997).
[vi] J.M. Hammersley, Origins of percolation theory, *Annals of the Israel physical Society* 5, 47-57 (1983).
[vii] Voor een uitgebreide behandeling en bibliografie, zie bijvoorbeeld het boek *Brownian Motion and Stochastic Calculus* van I. Karatzas en S.E. Shreve, Springer-Verlag (1988).
[viii] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Physik* 17, 549 (1905), 182-193.
[ix] Voor een inleiding tot de SLE, en literatuurverwijzingen, zie: W. Werner, Random Planar Curves and Schramm-Loewner Evolutions, *Springer Lecture Notes in Math.* 1840, 107-195 (2004).
[x] En Lieke Schultze bedank ik voor het controleren van de spelling in de bijna-definitieve versie van dit boekje.