

In de vorige twee afleveringen heb je al kennis kunnen maken met het begrip *graaf* en hoe grafen worden gebruikt door Google's zoekmachine en door de NS bij het maken van een optimale dienstregeling. De graafentheorie is een vrij jong vakgebied dat in 1936 op de kaart werd gezet door de Hongaar Dénes König. In dit artikel duiken we in de theorie van matchings, met als een hoogtepunt de stelling van Hall.

■ door Dion Gijswijt



Manifestatie van de Koreaanse Moon-sekte in februari 2000. Bij zulke gelegenheden treden honderden Moonies tegelijk met elkaar in het huwelijk.

We beginnen met een uitstapje naar een fictief dorpje waar zich elk jaar een spectaculair huwelijksfeest voltrekt. De traditie bepaalt namelijk dat ieder jaar de ongehuwde jonge vrouwen gekoppeld zullen worden aan beschikbare vrijgezelle mannen. Een groot feest, maar niet zonder de nodige kopzorgen, zoals gauw zal blijken. De jonge dames zijn nogal kieskeurig, ze willen natuurlijk niet aan de eerste de beste uitgehuwelijkt worden. Na veel wikken en wegen komt elke dame met een verlanglijstje bestaande uit een aantal van de vrijgezelle mannen die ze wel leuk vindt en waarmee ze wel in het huwelijksbootje zou willen stappen. De mannen zijn minder kieskeurig: een man is gelukkig met elke vrouw die hem hebben wil.

Nadat de vrouwen hun wensen kenbaar hebben gemaakt, trekt de Raad der Wijzen zich terug om te beraadslagen over de mogelijkheden om de dames elk met een man te *matchen*, zó dat de wensen van de vrouwen worden gerespecteerd. De hamvraag is: *kunnen alle vrouwen aan een partner van hun keuze worden gekoppeld?*

Dit jaar staat de raad voor een moeilijk raadsel. Er zijn precies zes huwbare dames en ook slechts zes vrijgezelle mannen. Hier zie je de exacte wensen van de dames. De dames zijn aangegeven met *a* tot en met *f* en de mannen met 1 tot en met 6.

Dame	Partnerkeuze
<i>a</i>	{2, 3}
<i>b</i>	{1, 2, 4, 5}
<i>c</i>	{2, 6}
<i>d</i>	{2, 6}
<i>e</i>	{3, 4, 5}
<i>f</i>	{3, 6}

In figuur 1 zie je hetzelfde lijstje weergegeven in een matrix. Om vier van de dames te koppelen is niet zo lastig: dat kan bijvoorbeeld zo: *a-2, b-1, e-3, f-6*. Voor *c* en *d* is nu geen vrijgezel meer over. Na veel beraadslagen lukte het de raad uiteindelijk ook om zelfs vijf van de dames aan een van hun gewilde vrijgezellen te koppelen.

Opgave 1. Kun jij vijf dames koppelen met een vrijgezel van hun keuze?

Als het inderdaad mogelijk is om alle zes de dames te koppelen, dan zal de raad in zijn wijsheid wel een oplossing vinden. Maar stel nu eens dat het *niet* mogelijk is om alle dames te koppelen. Na lang puzzelen bekruipt de wijzen het gevoel dat de puzzel onoplosbaar is, maar hoe kunnen ze daar zeker van zijn? Hoe kun je *bewijzen* dat er geen oplossing bestaat?

		mannen					
		1	2	3	4	5	6
vrouwen	<i>a</i>		♥	♥			
	<i>b</i>	♥	♥		♥	♥	
	<i>c</i>		♥				♥
	<i>d</i>		♥				♥
	<i>e</i>			♥	♥	♥	
	<i>f</i>			♥			♥

Figuur 1 Zes vrouwen vallen elk op een aantal van zes vrijgezelle mannen. Kunnen de zes vrouwen met de zes mannen worden gekoppeld, zó dat elke vrouw een man van haar keuze trouwt?

BEWIJS VAN ONMOGELIJKHEID In sommige gevallen is het eenvoudig te zien dat er geen oplossing is. Als er bijvoorbeeld een dame is die *niemand* leuk vindt gaat het feest niet door. Ook als er twee dames zijn die allebei enkel één en dezelfde man willen, gaat het mis. Voor het bestaan van een oplossing moeten eveneens iedere drie dames samen ten minste drie mannen op hun verlanglijstjes hebben staan. In het algemeen kan het huwelijksprobleem alleen een oplossing hebben als geldt:

Gezamenlijk willen iedere k dames ten minste k vrijgezellen trouwen, voor elke k .

Dit heet wel de *huwelijksvoorwaarde* en het is duidelijk dat de voorwaarde noodzakelijk is. Heel verrassend is echter, dat het omgekeerde ook geldt: als aan de voorwaarde is voldaan, is er ook echt altijd een oplossing voor het huwelijksprobleem!

Stelling (Huwelijksstelling van Hall). Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een oplossing van het huwelijksprobleem is, dat iedere k dames samen ten minste k verschillende mannen willen trouwen.

Deze stelling werd bewezen door de Engelse wiskundige Philip Hall. Hij was niet zozeer geïnteresseerd in vrouwen en huwelijksproblemen als wel in de *groepentheorie*. In abstracte termen zegt de stelling van Hall onder welke conditie een aantal gegeven verzamelingen (de lijstjes van partnerkeuzes) een *transversaal* hebben. Een transversaal is een keuze van één element uit elke verzameling, zó dat de gekozen elementen verschillend zijn.

Opgave 2. Vind een transversaal van de verzamelingen $\{1, 4, 5\}$, $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ en $\{2, 4\}$.

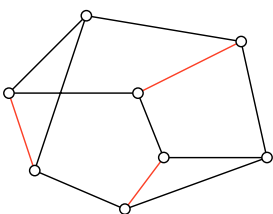
Terugkerend naar het gegeven huwelijksprobleem zien we dat dames a, c, d en f samen maar drie mannen willen huwen, namelijk nummers 2, 3 en 6. Er is dus geen mogelijkheid om alle zes dames uit te huwelijken!

Als het zo is dat we niet altijd *alle* dames kunnen uithuwelijken, dan rijst de vraag: Wat is het maximale aantal dames dat kan worden gekoppeld?

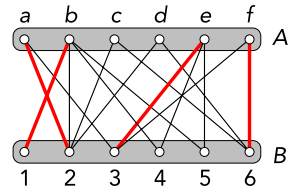
MATCHING IN GRAFEN Om dit huwelijksprobleem op te lossen, vertalen we het naar een probleem op grafen. Ter herinnering: een graaf bestaat uit een verzameling *punten* (of *knopen*) en een verzameling *lijnen* (of *takken*). Een lijn verbindt twee punten van de graaf. Twee punten die door een lijn verbonden zijn, heten *buren* van elkaar. Vaak wordt een lijn getekend als een lijnstuk of kromme tussen de twee eindpunten. Hoe de lijn precies getekend wordt, is onbelangrijk: welke twee punten verbonden worden, is het enige dat telt. Een graaf kan bijvoorbeeld als puntenverzameling alle Nederlanders hebben, waarbij twee personen verbonden worden door een lijn als ze bevriend zijn op Hyves.

Een deelverzameling M van de lijnen van een graaf heet een *matching* als de lijnen in M 'los van elkaar liggen', dat wil zeggen: geen twee lijnen in M hebben een gemeenschappelijk eindpunt. Het totaal aantal lijnen in een matching kan dus hoogstens gelijk zijn aan de helft van het aantal punten van de graaf. In figuur 2 zie je een voorbeeld van een graaf en een matching in die graaf.

Het huwelijksprobleem kan als volgt worden gemodelleerd. De verzameling punten van de graaf is opgedeeld in twee verzamelingen A en B . Voor iedere vrouw is er een bijbehorend punt in A en voor iedere man is er een punt in B . We trekken een lijn tussen een vrouw en een man, als zij met hem zou willen trouwen. De resulterende graaf heet *bipartiet* omdat de punten in twee verzamelingen zijn opgedeeld en lijnen altijd punten uit verschillende verzamelingen verbinden. Het voorbeeld uit de inleiding geeft op deze manier de graaf in figuur 3. In



Figuur 2 Een graaf met een matching



Figuur 3 In rood de koppeling van vier dames

rood is de koppeling van vier dames gegeven. De mogelijke uithuwelijkingen van de dames corresponderen precies met matchings in de bipartiete graaf. We zijn dus op zoek naar een matching die alle punten in A matcht (aan punten in B).

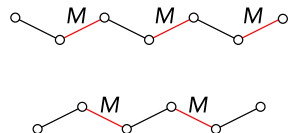
De stelling van Hall vertaalt zich als volgt.

Er bestaat een matching die heel A matcht, precies dan als iedere k punten uit A samen ten minste k buren in B hebben (voor iedere $k = 1, 2, \dots$).

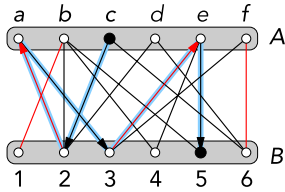
Opgave 3. Je kunt een schaakbord zien als een graaf met de velden als punten, waarbij twee velden een lijn vormen als ze een zijde gemeen hebben. Waarom is dit een bipartiete graaf? Een (gedeeltelijke) betegeling met dominostenen vertaalt zich als een matching. Wanneer twee velden op een diagonaal worden verwijderd, is het dan mogelijk de resterende 62 velden te betegelen met 31 dominostenen?

VERBETER DIE MATCHING! Stel dat je een graaf hebt met een matching M . Hoe kom je er achter of er een matching is met meer lijnen? Je zou gewoon vanaf nul kunnen beginnen en op goed geluk een nieuwe matching zoeken. Er blijkt echter een truc te zijn waarmee je de matching die je al hebt, kunt aanpassen tot een matching met meer lijnen (als die bestaat). We bekijken daarvoor paden in de graaf die afwisselend een lijn *buiten* de matching en een lijn *in* de matching doorlopen. Zo'n pad heet een *M -alternerend pad*. In figuur 4 zie je schematisch hoe zo'n pad eruit ziet.

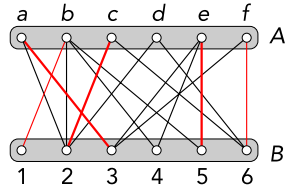
Als beide eindpunten van een M -alternerend pad *niet* door M worden gematcht, dan heet het pad *M -verbeterend*. De reden voor deze naam is dat een M -verbeterend pad een manier geeft om uit M



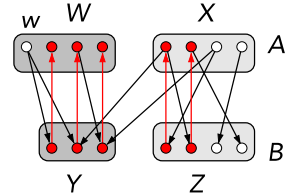
Figuur 4 Twee M -alternerende paden



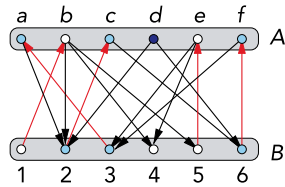
Figuur 5 Een verbeterend pad



Figuur 6 Een betere matching



Figuur 7 De punten in W en Y zijn bereikbaar vanuit punt w



Figuur 8 Alleen de blauwe punten zijn bereikbaar vanuit d

een grotere matching te maken. Eerst verwijderen we alle lijnen uit M die op het verbeterende pad liggen. Daarna voegen we de andere lijnen op het pad juist toe aan de matching M . Dit resulteert in een matching (ga na!) met één lijn meer: als extra zijn nu ook de eindpunten van het pad gematcht. Een voorbeeld van een verbeterend pad voor de gevonden matching met 4 koppels zie je in figuur 5. Door de matching langs dit verbeterende pad te wijzigen, vinden we een betere matching met 5 koppels, zie figuur 6.

Het idee van verbeterende paden gaat terug op de Deense wiskundige Julius Petersen. Hij merkte op dat als er een grotere matching dan de huidige matching M bestaat, er ook altijd een M -verbeterend pad is. Voor het vinden van een zo groot mo-

gelijke matching volstaat het dus om te beginnen met een enkele lijn en die matching stap voor stap te vergroten met verbeterende paden.

Opgave 4. Vind een verbeterend pad voor de matching in figuur 2.

BIPARTIETE GRAFEN Hoewel het in een willekeurige graaf moeilijk kan zijn om een verbeterend pad te vinden, gaat dat in bipartiete grafen heel eenvoudig. We zullen ons in de rest van dit artikel beperken tot bipartiete grafen. De twee puntverzamelingen heten steeds A en B . Een M -verbeterend pad heeft altijd een oneven aantal lijnen, zodat een eindpunt in A ligt en een eindpunt in B . We mogen daarom wel aannemen dat een verbeterend pad altijd in A begint. Omdat het pad afwisselend van A naar B en van B naar A loopt via afwisselend een niet-matching lijn en een matchinglijn, wordt een matchinglijn dus altijd doorlopen van B naar A en een niet-matchinglijn van A naar B . Daarom veranderen we elke matchinglijn in een pijl van B naar A en de overige lijnen in pijlen van A naar B . Nu zijn de M -verbeterende paden precies de gerichte paden van een ongematcht punt w in A naar een ongematcht punt in B . Zo'n gericht pad is makkelijk te vinden door vanuit w te kijken welke punten via één pijl bereikt kunnen worden, vervolgens te kijken welke punten vanuit die punten in één stap kunnen worden bereikt, etcetera.

BEWIJS VAN HALL Stel dat M een grootst mogelijke matching is en dat er toch nog een ongematcht punt w in A is. We willen dan bewijzen dat er een k -tal punten in A is met samen minder dan k burens. Bekijk eens welke punten te bereiken zijn vanuit w met een gericht pad. Laat W de verzameling bereikbare punten in A zijn en Y de bereikbare punten binnen B . De verzameling niet-bereikbare punten in A en B geven we aan met X en Z . Zie figuur 7.

Ieder punt y in Y moet gematcht zijn, want anders is er een verbeterend pad van w naar y en dat is onmogelijk omdat M al maximale grootte had. De partner van y is dan ook bereikbaar en ligt dus in W . Omdat alle matchingpartners van punten in Y in W liggen en W bovendien nog een ongematcht punt w heeft, geldt $|W| > |Y|$ (met $|W|$ wordt het aantal punten in W bedoeld). De punten in Z zijn niet bereikbaar vanuit w , dus er bestaat geen lijn tussen W en Z . De $k := |W|$ punten in W hebben dus gezamenlijk minder dan k burens, precies wat we wilden bewijzen.

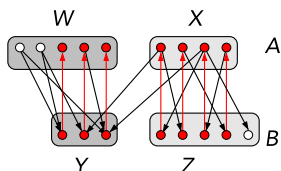
Opgave 5. Vind in figuur 8 vier punten in A met samen drie burens in B .

Een direct gevolg van de stelling van Hall is het volgende nuttige feit.

Stelling. Als ieder punt van een bipartiete graaf hetzelfde aantal burens heeft, dan heeft de graaf een matching die alle punten matcht.

Het bewijs gaat als volgt. Elk punt heeft d burens. Laat W een deelverzameling van A zijn en noem Y de verzameling burens van punten in W . Het aantal lijnen dat tussen W en Y loopt is dan $d \cdot |W|$, want vanuit elk punt in W vertrekken d lijnen. Maar het aantal lijnen is ook hoogstens $d \cdot |Y|$. Dus $|Y| \geq |W|$. Omdat dit voor iedere deelverzameling W geldt, volgt uit de stelling van Hall dat er een matching is die alle punten in A matcht. Deze matcht ook alle punten uit B , want $d \cdot |A| = d \cdot |B|$, dus $|A| = |B|$. (Einde bewijs.)

Uit het bewijs van de stelling van Hall kunnen we nog meer informatie verkrijgen. We bekijken weer alle punten die te bereiken zijn met een gericht pad, maar nu niet alleen vanuit één ongematcht punt w , maar tegelijk vanuit alle ongematchte punten in A . We noemen de verzameling bereikbare punten binnen A en B weer W en Y . De onbereikbare punten geven we weer aan met X en Z , zie figuur 9.



Figuur 9 De punten in W en Y zijn bereikbaar, de punten in X en Z onbereikbaar

Opnieuw kan er geen lijn zijn tussen W en Z . Met andere woorden: iedere lijn van de graaf heeft een eindpunt in X of in Y (of allebei). Elk punt in X is gematcht (de ongematchte punten zitten in W), maar niet met een punt uit Y , want de punten in Y waren al gematcht met punten in W . Het aantal matchinglijnen is dus precies gelijk aan het aantal punten in X en Y samen. We noemen een verzameling punten een *puntbedekking* als iedere lijn één of meer eindpunten in deze verzameling heeft. We hebben dus bewezen dat er een matching en een puntbedekking zijn met even veel elementen. Omdat een puntbedekking altijd minstens zoveel ele-

menten heeft als er lijnen zijn in een matching (iedere matchinglijn vereist een apart punt) hebben we de stelling van König bewezen.

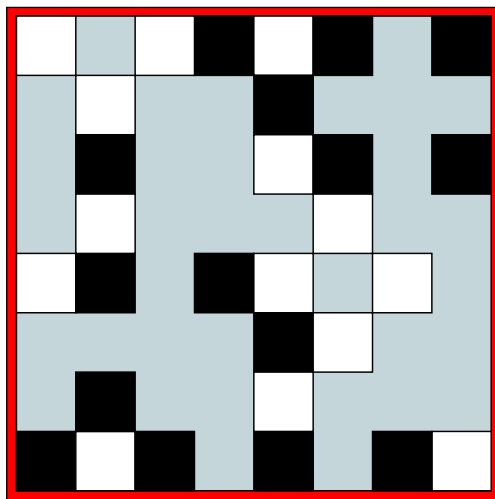
Stelling (König). In een bipartiete graaf is het maximale aantal lijnen in een matching gelijk aan het minimale aantal punten in een puntbedekking.

Opgave 6. Wijs in figuur 8 de verzamelingen W , X , Y en Z aan. Orden de rijen en kolommen van figuur 1, zó dat de kolommen in Z links staan en de rijen in W bovenaan. Wat valt je op?

PUZZELS

Opgave 7. Een geblinddoekte goochelaar heeft een glas met daarin een rode, groene, blauwe, gele en zwarte knikker. Zijn assistente laat een vrijwilliger twee knikkers uit het glas pakken. Daarna verwijderd de assistente zelf nog een knikker uit het glas. De goochelaar krijgt het glas met de twee overgebleven knikkers te zien en voorspelt correct welke twee knikkers de vrijwilliger heeft. Hoe werkt deze truc?

Opgave 8. Hoeveel torens kun je op de gegeven vakjes van een schaakbord zetten, zó dat geen twee torens elkaar aanvallen?



VERDER LEZEN Een goede internetpagina over de stelling van Hall is www.cut-the-knot.org/arithmetic/elegant.shtml.

Een online boek over grafentheorie kun je vinden op www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/books/gtwa/gtwa.html. ■