

RAPPORT DELTACOMMISSIE

---

BIJDRAGEN II

MATHEMATISCH CENTRUM

BESCHOUWINGEN OVER  
STORMVLOEDEN  
EN GETIJBEWEGING

## REPORT OF THE DELTA COMMITTEE

### CONTRIBUTIONS II

- II.1 – Extrapolation of the frequency curve of the levels of high tide at Hook of Holland by means of selected storms
- II.2 – The economic decision problem concerning the security of the Netherlands against storm surges
- II.3 – Testing the independence of the levels of storm surges at Hook of Holland on the one hand and the discharge of the Rhine at Lobith on the other
- II.4 – Mathematical study of the effect of wind upon the water levels of the North Sea
- II.5 – Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin

## RAPPORT DE LA COMMISSION DU DELTA

### CONTRIBUTIONS II

- II.1 – Extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland au moyen de tempêtes sélectionnées
- II.2 – Le problème des décisions au point de vue d'économie pour la protection des Pays-Bas contre les marées-tempête
- II.3 – Examen de l'indépendance des marées hautes à Hoek van Holland et les débits du Rhin à Lobith
- II.4 – L'étude mathématique de l'influence des champs de vent sur les niveaux d'eau dans la Mer du Nord
- II.5 – Oscillations libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire en rotation

# RAPPORT DELTACOMMISSIE

## BIJDRAGEN II

Dit deel van het Rapport Deltacommissie bevat de volgende bijdragen:

Bijdrage II.1 – <i>D. van Dantzig, J. Hemelrijk</i> . Extrapolatie van de overschrijdingslijn van de hoogwaterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen . . . . .	7
Bijdrage II.2 – <i>D. van Dantzig, J. Kriens</i> . Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden . . .	57
Bijdrage II.3 – <i>J. Hemelrijk</i> . Toetsing van de onafhankelijkheid van het hoogwater te Hoek van Holland en de waterafvoer van de Rijn te Lobith . . . . .	111
Bijdrage II.4 – <i>D. van Dantzig, H. A. Lauwerier</i> . <u>De</u> wiskundige behandeling van de invloed van windvelden op de waterstanden in de Noordzee . . . . .	119
Bijdrage II.5 – <i>D. van Dantzig</i> . Vrije slingeren van een vloeistof in een roterend rechthoekig bekken . . . . .	191

## VOORWOORD

Deze bijdragen maken deel uit van het Rapport Deltacommissie, dat is samengesteld uit het Eindverslag en de Interimadviezen van deze commissie en uit een aantal bijdragen.

De volledige uitgave bestaat uit de volgende zes delen:

- Deel 1. Eindverslag en Interimadviezen van de Deltacommissie.
- Deel 2. Bijdrage van het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut over stormvloeden - Bijdrage I.
- Deel 3. Bijdragen van het Mathematisch Centrum over stormvloeden - Bijdragen II.
- Deel 4. Bijdragen van de Rijkswaterstaat over stormvloeden en getijbeweging - Bijdragen III.
- Deel 5. Bijdragen van Prof. Ir. J. Th. Thijsse en de Rijkswaterstaat betreffende de opzet van het Deltaplan en de gevolgen van de deltawerken - Bijdragen IV.
- Deel 6. Bijdragen van de Rijkswaterstaat, het Waterloopkundig Laboratorium en de Werkgroep voor het onderzoek naar de spanningstoestand in zeedijken, bevattende onderzoekingen, van belang voor het ontwerpen van dijken en dammen - Bijdragen V.  
Bijdrage van Prof. Dr. J. Tinbergen over de economische balans van het Deltaplan - Bijdrage VI.

Een overzicht van de inhoud van elk van de zes delen is opgenomen achter in deel 1.

De Deltacommissie spreekt gaarne haar erkentelijkheid uit jegens het Mathematisch Centrum en de auteurs van de verschillende onderdelen van de in deel 3 opgenomen bijdragen voor hun bereidheid om de resultaten van hun werk in deze vorm ter beschikking te stellen.

De verantwoordelijkheid voor de inhoud van deze bijdragen berust geheel bij het Mathematisch Centrum.

's-Gravenhage, september 1960

DE DELTACOMMISSIE

## FOREWORD

These contributions form part of the Report of the Delta Committee, which is made up of the Final Report and the Interim Reports of this Committee and a number of contributions.

The complete edition consists of the following six volumes:

- Volume 1. Final Report and Interim Reports of the Delta Committee.
- Volume 2. Contribution of the Royal Netherlands Meteorological Institute on storm surges - Contribution I.
- Volume 3. Contributions of the Mathematical Centre on storm surges - Contributions II.
- Volume 4. Contributions of the Rijkswaterstaat (Governmental Service for Roads and Waterworks) on storm surges and tidal movements - Contributions III.
- Volume 5. Contributions of Prof. Ir. J. Th. Thijsse and the Rijkswaterstaat, regarding the conception of the Delta Plan and the consequences of the Delta Works - Contributions IV.
- Volume 6. Contributions of the Rijkswaterstaat, the Hydraulics Laboratory and the Working Group for Examining Stress-distributions in Sea Dikes, including investigations of importance for planning dikes and dams - Contributions V.  
Contribution of Prof. Dr. J. Tinbergen. Balance sheet of the Delta Plan - Contribution VI.

A summary of the contents of each of the six volumes is given at the back of volume 1.

The Delta Committee wishes to express its appreciation to the Mathematical Centre and to the authors of the various parts of the contributions contained in volume 3 for their willingness to place the results of their work at the Committee's disposal.

The Mathematical Centre is responsible for the entire contents of these contributions.

The Hague, September 1960

THE DELTA COMMITTEE



## TEN GELEIDE

In de zomer van 1953 verzocht de Deltacommissie het Mathematisch Centrum het statistisch waarnemingsmateriaal betreffende hoogwaterstanden, waarover men bij de Rijkswaterstaat beschikte, te analyseren, ten einde op grond van dit materiaal, voor zover mogelijk, een voorspelling te doen over de frequentie van zeer hoge waterstanden.

In de loop van het onderzoek werd deze taak uitgebreid, enerzijds met een econometrische studie betreffende de bescherming van de laaggelegen gebieden van ons land tegen overstromingen door de zee en anderzijds met een hydrodynamisch onderzoek naar de invloed van een storm op de waterbeweging van de Noordzee.

Het directorium van het Mathematisch Centrum vond wijlen Prof. Dr. D. van Dantzig, lid van genoemd directorium, bereid zich met al de genoemde onderzoeken te belasten. Hij voerde deze uit in samenwerking met twee groepen onderzoekers van het Mathematisch Centrum, nl. één van de Afdeling Mathematische Statistiek voor de statistische en econometrische problemen en één van de Afdeling Toegepaste Wiskunde voor de hydrodynamische problemen.

De onderzoeken namen verscheidene jaren in beslag.

Op 22 juli 1959 overleed Van Dantzig. Het verlies, dat zijn heengaan betekent, met name ook met het oog op de op stapel staande onderzoeken, is niet te schatten. Daarom te meer stemt het tot dankbaarheid, dat hij althans een groot deel van dit werk voltooid mocht zien.

De statistische en econometrische onderzoeken voerden tot afgeronde rapporten. Ten aanzien van de hydrodynamische problemen kan worden gezegd, dat de eerste fase van dit gecompliceerde onderzoek tot afsluiting kwam. Er kwamen echter bij de bestudering tal van desiderata naar voren, die nadere en diepergaande studie eisen.

De Raad van Beheer van het Mathematisch Centrum is de Deltacommissie buitengewoon erkentelijk, dat zij er in heeft willen toestemmen de op de genoemde drie gebieden tot dusver bereikte resultaten als één geheel te publiceren. Terwijl het aldus ontstane deel van het Rapport Deltacommissie een monumentale vorm verleent aan een gedeelte van al wat Van Dantzig ons naliet, strekt het tevens tot voldoening van zijn jongere medewerkers, wier naam en aandeel te bestemder plaatse staan vermeld.

DE DIRECTEUR VAN HET MATHEMATISCH CENTRUM

J. F. KOKSMA

## INTRODUCTION

In the summer of 1953 the Delta Committee requested the Mathematical Centre to analyse the statistical data on high-water levels which were at the disposal of the Governmental Service for Roads and Waterworks of the Netherlands (Rijkswaterstaat), in order to make, as far as possible, a forecast about the frequencies of extremely high-water levels.

In the course of the investigations this task was enlarged by adding, on the one hand, an econometrical study of the protection of the low areas of our country against inundations by the sea, and, on the other hand, a hydrodynamical study of the influence of a gale on the motion of the water of the North Sea.

The Board of the Mathematical Centre asked one of its members, Prof. Dr. D. van Dantzig, to conduct the research on all these subjects. He carried this out in collaboration with two groups of scientific workers of the Mathematical Centre, one from the Department of Mathematical Statistics, for the statistical and econometrical problems, and one from the Department of Applied Mathematics, for the hydrodynamical problems. This research took several years.

On July 22nd, 1959 Prof. Dr. Van Dantzig passed away. His death, particularly in view of the current investigations, means a loss that cannot be estimated. There is so much the more reason for thankfulness, that he was allowed to see at least a great part of this work accomplished.

The statistical and econometrical investigations led to wellrounded reports. As regards the hydrodynamical problems, one may say that the first phase of this complicated research is now completed. However, in studying these problems, there arose a number of desiderata which requires further and thorough study.

The Board of the Mathematical Centre is very grateful to the Delta Committee for the fact that it has kindly consented to publish as a whole the results so far obtained on the three subjects mentioned.

The volume of the Delta Report dealing with the above problems gives a monumental form to a part of Van Dantzig's heritage and will moreover satisfy his younger co-operators, whose names and share are mentioned in the place designed for this purpose.

THE DIRECTOR OF THE MATHEMATICAL CENTRE  
J. F. KOKSMA

BIJDRAGE II.1

EXTRAPOLATIE  
VAN DE OVERSCHRIJDINGSLIJN  
DER HOOGWATERSTANDEN  
TE HOEK VAN HOLLAND  
MET BEHULP VAN  
GESELECTEERDE STORMEN



## INHOUDSOVERZICHT

0.1	Inhoudsoverzicht . . . . .	9
0.2	Overzicht van de tabellen . . . . .	10
0.3	Overzicht van de figuren . . . . .	10
0.4	Overzicht van de gebruikte symbolen . . . . .	11
0.5	Literatuur . . . . .	11
0.6	Summary. . . . .	13
0.7	Résumé . . . . .	14
<b>1.0</b>	<b>Samenstelling van de bijdrage . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1	Inleiding . . . . .	17
1.2	Inhoud van de bijdrage . . . . .	17
1.3	Auteurs en medewerkers . . . . .	17
<b>2.0</b>	<b>Het waarnemingsmateriaal; de keuze van Hoek van Holland. . . . .</b>	<b>17</b>
<b>3.0</b>	<b>De frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>4.0</b>	<b>Methoden. . . . .</b>	<b>18</b>
<b>5.0</b>	<b>Hoogwaterstanden of opzetten? . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>6.0</b>	<b>Extrapolatie . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>7.0</b>	<b>Het homogeen maken van het waarnemingsmateriaal door splitsing in zomer en winter</b>	<b>21</b>
<b>8.0</b>	<b>Selectie van depressies op meteorologische gronden . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>9.0</b>	<b>Toetsing der aanpassing . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>10.0</b>	<b>Verschillende schattingen van de baanselectielijn. . . . .</b>	<b>22</b>
<b>11.0</b>	<b>Andere beschouwingen over de nauwkeurigheid der schattingen. . . . .</b>	<b>23</b>
<b>12.0</b>	<b>Interpretatie der uitkomsten . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>13.0</b>	<b>Conclusie . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>Appendix</b>		
<b>A 1.0</b>	<b>Notatie. . . . .</b>	<b>25</b>
<b>A 2.0</b>	<b>Aanpassing van een afgeknotte logaritmisch-normale verdeling . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>A 3.0</b>	<b>Aanpassing exponentiële verdeling. . . . .</b>	<b>29</b>
<b>A 4.0</b>	<b>Toetsing der aanpassing . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>A 5.0</b>	<b>De selectie volgens Van der Ham . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>A 6.0</b>	<b>Nadere beschouwing der geselecteerde waarnemingen. . . . .</b>	<b>32</b>

A 7.0	Betrouwbaarheidsintervallen . . . . .	34
A 8.0	De methode van Gumbel . . . . .	35
A 9.0	Tabellen der waarnemingen; toelichting op de figuren. . . . .	37

## 0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN

10.0.1	Helling van de baanselectielijn bij verschillende beginpunten (aannemelijkste schattingen) . . . . .	23
11.0.1	Bovengrenzen (in m) van halverings-, decimerings- en nepereringshoogte met onbetrouwbaarheid 0,05, resp. 0,01 bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m . . . . .	24
A 2.0.1	Gegevens, gebruikt voor het vergelijken van een exponentiële verdeling met een logaritmisch-normale verdeling. . . . .	29
A 3.0.1	Schattingen voor $n(b)$ en $a_e$ bij verschillende $b$ . . . . .	30
A 6.0.1	Uitkomsten van een toetsing der hoogste waarnemingen met de $B$ -verdeling . . . . .	32
A 8.0.1	Vergelijking van de functies $1 - e^{-y}$ en $e^{-e^{-y}}$ . . . . .	36
A 9.0.1	Aantal overschrijdingen van het aangegeven peil in de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) en de splitsing daarvan in overschrijdingen in de wintermaanden (januari, november en december) en de overige maanden van het jaar . . . . .	37
A 9.0.2	Jaarmaxima der hoogwaterstanden van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) . . . . .	38
A 9.0.3	Hoogwaterstanden hoger dan N.A.P. + 2,20 m van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar). . . . .	38
A 9.0.4	Hoogste hoogwaterstanden uit naar banen geselecteerde depressies uit de wintermaanden (januari, november en december) van de winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57 (63 jaar) . . . . .	39
A 9.0.5	Parameters van de baanselectielijnen, getekend in figuur 10.0.1 . . . . .	41

## 0.3 OVERZICHT VAN DE FIGUREN

3.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 . . . . .	43
4.0.1	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 . . . . .	44
7.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn . . . . .	45
7.0.2	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen. . . . .	46
7.0.3	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen. . . . .	47
8.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57. . . . .	48
8.0.2	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte . . . . .	49

9.0.1	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen . . . . .	50
10.0.1	De baanselectielijn bij verschillende beginpunten . . . . .	51
11.0.1	De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01 . . . . .	52
A 2.0.1	De vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmisch-normale verdeling . . . . .	53
A 6.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10%-bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m . . . . .	54
A 6.0.2	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen met een 10%-bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m . . . . .	55
A 6.0.3	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearsonkromme en buigpunt-raaklijn . . . . .	56

#### 0.4 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

$h$  = waterstand in meters t.o.v. N.A.P.

$n(h)$  = verwacht aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ .

$g(h)$  = kans op overschrijding van het peil  $h$  bij één waarneming.

$p(h)$  = kans op overschrijding van het peil  $h$  in een jaar.

$f(h)$  = gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van het peil  $h$ .

$\alpha_k$  = hoogteverschil, waardoor het gemiddeld aantal overschrijdingen  $k$  maal zo klein wordt, in meters.

$N$  = totaal aantal waargenomen hoogwaterstanden per jaar.

$h_k$  = hoogwaterstand, die gemiddeld  $N/k$  maal per jaar wordt overschreden, in meters.

$m$  = aantal jaren, waarover de beschouwde waarnemingsperiode zich uitstrekt.

$\alpha$  =  $a_e^{-1}$ .

$\hat{n}(h)$  = schatting van  $n(h)$ .

$\hat{a}_e$  = schatting van  $a_e$ .

$\hat{\alpha}$  = schatting van  $\alpha$ .

#### 0.5 LITERATUUR De verwijzingen in de tekst zijn aangegeven met [ ]

1. *A. Benard* en *E. C. Bos-Levenbach* Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier. *Statistica* 7, 163 – 173, 1953.
2. *W. L. Deemer Jr.* Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions, and *D. F. Votaw Jr.* *Annals of Math. Stat.*, 26,498 – 504, 1955.
3. *W. P. Elderton* Frequency curves and correlation, Harren Press, Washington D.C., fourth edition, 1953.
4. *R. A. Fisher* and *L. H. C. Tippett* Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 23,912, 1928.

5. *M. Frechet* Sur la probabilité de l'écart maximum, Ann. Soc. Polon. Math., 6,93 – 116, 1928.
6. *E. J. Gumbel* Les valeurs extremes des distributions statistiques, Ann. Inst. H. Poincaré, 4, 115 – 158, 1935.
7. *E. J. Gumbel* Simplified plotting of statistical observations, Transactions Amer. Geophys. Union 26<sup>I</sup>, 70 – 82, 1945.
8. *L. H. Miller* Table of percentage points of Kolmogorov statistics, J. Amer. Stat. Ass. 51, 111 – 121, 1956.
9. *P. J. Wemelsfelder* Wetmatigheden in het optreden van stormvloed. De Ingenieur, nr. 9, 1939.



## 0.6 SUMMARY

### Extrapolation of the frequency curve of the levels of high tide at Hook of Holland by means of selected storms

This contribution, due to Prof. Dr. D. van Dantzig, is concerned with the extrapolation of the frequency curve of the high tides at Hook of Holland. In the main text (which is kept free of formulae and mathematical elaboration) the problem of fitting a curve in the best possible way to the data, consisting of the high tides observed during 69 years (there are about two high tides a day) is discussed. The mathematical aspects of the problem are treated in an Appendix.

In 1939 WEMELSFELDER [9]<sup>1)</sup> drew attention to the fact that the logarithm of the mean number of high tides per annum exceeding a given level, if plotted against that level, leads to a curve which, in the middle of the range of observations, resembles a straight line very much, the curve becoming vaguer towards the higher high tides. In figure 3.0.1 all observations have been plotted in this way. From this diagram we can draw the following conclusions with regard to the theoretical frequency curve we want to estimate: the logarithmic frequency curve is almost linear in a large part of the range of observations. The plotted observations may well be described as observations drawn from a distribution, having in the logarithmic scale an asymptote towards the higher high tides, which from a point well inside the range of observations differs but little from this distributions. If we can estimate the asymptote, we can use this line to extrapolate the frequency curve towards the region we are interested in. This leads us at the same time to consider the conditional distribution of the high tides exceeding any given level, chosen in the region where the asymptote fits closely to the observations, as an exponential distribution.

At this point one has to consider whether other assumptions might not be compatible with the observations and especially whether these assumptions lead to appreciably different extrapolations of the frequency curve. Usually in analogous problems a logarithmically-normal curve is fitted to the observations. In the Appendix, in A 2.0 we first prove that it is possible to approximate an exponential distribution by means of a truncated logarithmically normal one given by formula (2), to any degree of precision (formulae (3), (4), (5)), as is illustrated by figure A 2.0.1

However, as the fit of the exponential curve (tested in the Appendix, A 4.0) is quite satisfactory and as in view of the fact mentioned above the logarithmically normal curve fits at least as well, it is impossible to distinguish statistically which of the hypotheses is the true one. The two curves will hardly differ, even if we extrapolate e.g. to N.A.P. + 6 m<sup>2)</sup>. As the exponential curve is far easier to handle mathematically and leads to much less arbitrariness in the extrapolation, because only one parameter has to be estimated from the observations, we preferred to use the exponential distribution.

Following GUMBEL [7] we can still make another approach. The yearly maxima of the high tides were plotted on his probability paper, the result of which can be found in figure 4.0.1. A straight line might be fitted to the observations. However, this method has certain disadvantages in comparison with the use of the exponential distribution. Because only 69 yearly maxima can be used a not unimportant part of the information contained in the observations is ignored. Also it is proved (Appendix A 8.0) that in the region which is of importance for our problem (from about N.A.P. + 2 to 6 m) GUMBEL's method and the use of the exponential distribution, if based on *the same observations* (e.g. the yearly maxima of the high tides) lead to the same result (see table A 8.0.1). The exponential method can be applied to much more observations and thus leads to more precise results. Therefore the subsequent argument is based on the use of the exponential distribution, i.e. on fitting an asymptote to the observations. GUMBEL's method is further used only incidentally to support some special points.

Instead of the actually measured high tides one can consider the differences between the measured high tides and the forecasted high tides (which need not fall at the same time). This might lead to more precise conclusions resulting from the statistical analysis, because now the forecasted high tides have been (partly) eliminated. However, if one plots the differences in the same way as the high tides in figure 3.0.1, one obtains a curve which is parallel to that of the high tides. Analysis of this curve would therefore lead to (almost) the same results as a direct analysis of the curve of high tides, is far more involved and has less directly to do with the practical consequences of the problem. We are thus justified in analysing the high tides themselves.

If we fit a straight line to the observations of figure 3.0.1 as has been done in figure 7.0.1, we can draw a corresponding straight line on GUMBEL's probability paper (by copying two points from the region of the higher high tides), which represents the *same* probability distribution for sufficiently high high tides. The result can be found in figure 7.0.2; the slope of the line differs very much from the slope indicated by the points. This was to be expected because the observations in figure 7.0.1 were drawn from a very inhomogeneous population. The lower high tides occurring in summer do not influence the yearly maxima, but change the slope of the curve in figure 7.0.1 and thus of the straight line in figure 7.0.2. Therefore the observations were split in two groups, called "winter" and "summer" observations. "Winter" observations are those obtained in November, December and January. The frequency curves for both groups are plotted in figure 7.0.3; the difference in slope is very marked.

If we want to select our observations in such a way, that the population is as homogeneous as possible, we must realize that the root of the danger to our dikes lies in the *depressions* which lead to dangerously high high tides. Because more than one high tide may occur during a single depression, so that such high tides are highly dependent, perhaps the best measures of the danger to the dikes, due to a depression, is the highest high tide occurring during that depression. Because the potential danger is not the same for all "winter" depressions, a further selection of the depressions is needed. This selection has been made on meteorological grounds by VAN DER HAM of the Royal Dutch Meteorological Institute (see Volume 2, Contribution I, paragraph 2.5). The observations we further consider are those tabulated in

<sup>1)</sup> A list of references can be found in 0.5.

<sup>2)</sup> N.A.P. = Ordnance datum of Amsterdam = mean sea-level.

table A 9.0.4. They will be described as the "selected observations"; they are the highest high tides from meteorologically potentially dangerous "winter" depressions.

In figure 8.0.1 the mean number of high tides per annum exceeding a given level is plotted against that level for the selected observations. To this figure a straight line has been added in figure 8.0.2. The slope of this line was obtained by means of the maximum likelihood method, applied to the observations  $\geq$  N.A.P. + 1.70 m, these being considered as independent observations, drawn from an exponential distribution starting at this point. To indicate the "startingpoint" N.A.P. + 1.70 m a vertical has been drawn through this point. The "startingpoint" on the vertical scale is the observed mean number of exceedances of N.A.P. + 1.70 m.

Figure 9.0.1 is the same as figure 4.0.1, except that the straight line corresponding to the line in figure 8.0.2 has been added now. The slope of this line agrees quite well with the slope as indicated by the points. The small difference in height may well be neglected.

All these considerations have led us from estimating the asymptote in figure 3.0.1 to the same problem for figure 8.0.2, because the original conclusions drawn from the first diagram still apply. Again we estimate the asymptote with the maximum likelihood method. In figure 10.0.1 estimates for the asymptote based on different startingpoints are plotted. This diagram clearly indicates the uncertainty of the extrapolation, which can also be estimated from figure 11.0.1. Here the straight line from figure 8.0.2 has been drawn, as an estimate for the frequency curve to the right of which two other straight lines denote an upper confidence limit for the frequency curve with confidence coefficient .95 (middle line) and an upper confidence limit with confidence coefficient .99 (right hand line).

The main text ends with a discussion of the practical aspects of the obtained results.

In the Appendix it is pointed out, that the expected number  $n(h)$  of exceedances of a high level in one year practically equals the probability  $p(h)$  of that level being exceeded in one year (formulae (12), (13), (14) of A 1.0). This explains why we use diagrams like figure 3.0.1.

A curve given by (1) of A 3.0 is fitted to the observed mean number of exceedances per annum of level  $h$  by choosing a level  $b$ , considering only the  $n$  observations  $h_1, \dots, h_n \geq h \geq b$  observed in  $m$  years, estimating  $n(b)$  with (2) of A 3.0 and estimating  $a_e$  with (3) of A 3.0. The results so obtained are tabulated in table 3.0.1, the values of  $\hat{a}_e^{(1)}$  being doubly underlined in cases where a  $\chi^2$ -goodness of fit test (discussed in A 4.0) indicated a very bad fit and singly underlined if the fit was just bad (level of significance .05).

In A 5.0 the method of selection, leading to the "selected" observations is described. The observations thus obtained are then considered further in A 6.0 and A 7.0.

If  $h_1, \dots, h_n$  are observations in order of magnitude, independently drawn from an exponential distribution, with  $b$  as the initial point, the quantity  $B$ , defined by (1) of A 6.0, can be computed for different values of  $k$ . With (2) of A 6.0 the probability of obtaining this value or a smaller one may be found. It is clear from table A 6.0.1, that the sum of the  $k$  highest observations is neither unduly large nor unduly small as compared to the sum of all  $n$  observations.

In figure A 6.0.1 the selected observations of figure 8.0.1 are plotted, together with a 10 % upper limit for the theoretical curve, computed with the help of MILLER's tables [8] for the KOLMOGOROV-SMIRNOV test. This upper limit is a stepfunction, which has no practical value for the extrapolation, but it gives another indication of the high uncertainty. The stepfunction has been drawn only for high tides exceeding N.A.P. + 2,00 m.

If we estimate the parameter of the exponential distribution of the high tides  $\geq$  N.A.P. + 2.45 m from the observations  $\geq$  N.A.P. + 1.70 m and  $<$  N.A.P. + 2.45 m, we can consider this parameter (and therefore the whole distribution) as known, and test whether the observations  $\geq$  N.A.P. + 2.45 m may have originated from the thus obtained "theoretical" distribution, again with the help of MILLER's tables. Figure A 6.0.2 shows, that the experimental stepfunction is well inside the indicated 10 % upperlimit.

If we fit a Pearson curve to the selected observations, the curve given by (10) of A 6.0 is found. Figure A 6.0.3 shows, that this curve fits the observations reasonably. The straight line in this figure is the tangent to the curve in its point of inflection. Either the curve or this tangent can be used for extrapolation.

In A 7.0 a method for the construction of a one sided confidence interval for  $\alpha = a_e^{-1}$  is given, (2) being the basic formula. The use of GUMBEL's probability paper is described in A 8.0. The Appendix ends with a summing up of the diagrams and the way in which they were constructed. For the diagrams in the figures 4.0.1, 7.0.2, 8.0.1, 8.0.2, 9.0.1, A 6.0.1 and A 6.0.3 the method of BENARD-BOS for plotting the observations, which is described in BENARD and BOS-LEVENBACH [1] was used.

## 0.7 RÉSUMÉ

### Extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland au moyen de tempêtes sélectionnées

La présente contribution, due à Prof. Dr. D. van Dantzig, traite de l'extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland. Le texte principal, exempt de formules et d'élaborations mathématiques, contient la discussion du problème d'ajuster une courbe aux données de la manière la plus efficace. Celles-ci se composent des niveaux de marée haute en nombre d'environ deux par jour, enregistrés pendant une période d'observation de 69 ans. Les aspects mathématiques du problème constituent le sujet d'un appendice.

En 1939 les recherches de WEMELSFELDER [9]<sup>2)</sup> ont révélé que le nombre moyen par an des pleines mers dépassant un niveau donné, lorsqu'on le représente (sur une échelle logarithmique) en fonction du niveau (celui-ci

<sup>1)</sup> An estimate of a parameter  $x$  is indicated by  $\hat{x}$ .

<sup>2)</sup> Une liste de renvois se trouve dans 0.5.

sur une échelle arithmétique), produit une courbe, qui au milieu du domaine des observations, ressemble beaucoup à une ligne droite, mais qui est plus difficile à reconnaître vers les niveaux plus élevés. Dans la figure 3.0.1 toutes les observations ont été représentées de cette façon. A partir de ce diagramme nous pouvons tirer les conclusions suivantes en ce qui concerne la courbe de fréquence théorique que nous voulons estimer. La courbe de fréquence logarithmique est à peu près linéaire sur l'échelle logarithmique dans une grande partie du domaine des observations. Les observations représentées peuvent être décrites comme des observations dérivées d'une distribution ayant dans l'échelle logarithmique un asymptote vers les niveaux plus élevés des pleines mers et qui, à partir d'un point situé tout à fait à l'intérieur du domaine des observations ne diffère que très peu de la distribution en question. Si nous pouvons estimer l'asymptote, nous pouvons utiliser cette ligne afin d'extrapoler la courbe de fréquence vers la région qui nous concerne plus spécialement. Ceci nous amènera en même temps à considérer la distribution conditionnelle des pleines mers, dépassant des niveaux donnés, choisi dans la région où l'asymptote s'ajuste étroitement aux observations, à titre de distribution exponentielle.

Quand nous en sommes arrivés là, il y a lieu de se demander si d'autres suppositions ne sont pas compatibles avec les observations et surtout si ces suppositions amèneront une extrapolation sensiblement différente de la courbe de fréquence. Lorsqu'on a affaire à des problèmes analogues, on ajuste d'ordinaire une courbe logaritmico-normale aux observations. Dans l'occurrence nous pouvons prouver (Appendice A 2.0, figure A 2.0.1) que quand même on ajusterait aux observations une courbe lognormale (tronquée à gauche), la courbe obtenue de cette façon est à peine différente de la ligne droite dont nous nous servons, même si nous extrapolons par exemple jusqu'à N.A.P. + 6 m<sup>1)</sup>.

C'est ainsi que l'ajustement d'une distribution exponentielle conduit à des résultats qui ne diffèrent que très peu de ceux obtenus par l'ajustement d'une distribution lognormale. Ce qui nous a amenés à préférer la distribution exponentielle, c'est encore la circonstance que celle-ci est plus facile à manier que la distribution lognormale et qu'elle aboutit à des résultats moins arbitraires dans l'extrapolation, puisqu'on n'a besoin d'estimer qu'un seul paramètre en partant des observations. L'ajustement (mis à l'épreuve dans A 4.0) a répondu entièrement à notre attente.

En suivant GUMBEL [7] nous pourrions encore aborder le problème d'une autre façon. Si l'on représente les maxima annuels de pleine mer sur le papier à échelle fonctionnelle des probabilités totales selon la loi de GUMBEL (voir figure 4.0.1), on pourrait ajuster une ligne droite aux observations. Cependant cette méthode présente quelques inconvénients quand on la compare à l'emploi de la distribution exponentielle. Une partie considérable de l'information contenue dans les observations, se soustraira notamment à notre attention, un nombre de 69 maxima annuels seulement étant à notre disposition. C'est ainsi qu'on peut prouver (v. A 8.0) que dans la zone qui intéresse notre problème (c.à.d. d'environ N.A.P. + 2 à 6 m) la méthode de GUMBEL et l'utilisation de la distribution exponentielle aboutiront à un même résultat, si elles partent des mêmes observations. La méthode exponentielle peut être appliquée à un nombre plus élevé d'observations amenant ainsi des résultats d'une plus grande précision. Aussi la dernière méthode, c.à.d. l'ajustement d'un asymptote aux observations, a-t-elle servi de base à l'argumentation qui suit. La méthode de GUMBEL par contre ne trouvera qu'une application incidentelle afin de servir d'appui à quelques questions spéciales.

Au lieu des marées hautes effectivement mesurées on pourrait partir des différences entre les marées hautes mesurées et celles qui ont été prédites (qui ne coïncident pourtant pas nécessairement). Cette méthode pourrait amener des conclusions d'une plus grande précision à cause de la nature de l'analyse statistique, les marées hautes étant ainsi partiellement éliminées. Cependant en représentant les différences ainsi obtenues de la même manière qu'on l'a fait des marées hautes dans la figure 3.0.1, on obtient une courbe qui est parallèle à celle obtenue par la représentation des marées hautes elles-mêmes. L'analyse de cette courbe aboutirait donc à des résultats à peu près identiques à ceux d'une analyse directe de la courbe des marées hautes. Ajouté à cela que cette analyse indirecte est beaucoup plus compliquée et qu'elle est moins intimement liée aux conséquences pratiques du problème en question. Les arguments précédents nous autorisent donc à analyser les marées hautes elles-mêmes.

En ajustant une ligne droite aux observations représentées par la figure 3.0.1, ainsi qu'il a été fait dans la figure 7.0.1, nous pouvons tracer une ligne droite correspondante sur le papier à échelle fonctionnelle selon GUMBEL qui représente la même distribution des probabilités pour des niveaux suffisamment élevés. Le résultat se trouve dans la figure 7.0.2; l'inclinaison est tout autre que celle indiquée par les points. C'était ce à quoi on pouvait s'attendre, étant donné que les observations représentées par la figure 7.0.1 proviennent d'une population très hétérogène. Les marées hautes plus faibles qui ont lieu en été n'influencent en rien les maxima annuels, mais changent pourtant l'inclinaison de la courbe dans la figure 7.0.1 et par conséquent celle de la ligne droite dans la figure 7.0.2. Pour cette raison les observations ont été divisées en deux groupes, appelés respectivement groupe d'hiver et groupe d'été; les observations du premier groupe sont celles obtenues pendant les mois de novembre, de décembre et de janvier. Les courbes de fréquence des deux groupes ont été tracées dans la figure 7.0.3; la différence entre les deux inclinaisons est très marquée.

Si nous voulons sélectionner nos observations de façon que la population soit aussi homogène que possible, nous devons d'abord bien nous rendre compte que le danger qui menace nos digues procède en grande partie des dépressions, qui peuvent amener des marées hautes dangereusement fortes. Comme pendant une seule dépression plusieurs marées hautes peuvent avoir lieu, de même que de telles marées hautes sont très dépendantes, peut-être le meilleur moyen de mesurer le danger dû à une dépression est de tenir compte de la marée haute la plus forte qui ait lieu pendant cette dépression. Une sélection complémentaire est pourtant nécessaire, vu que le danger potentiel n'est pas le même dans toutes les dépressions d'hiver. Cette sélection a été effectuée au point de vue météorologique par VAN DER HAM de l'Institut Royal Néerlandais de Météorologie (v. Volume 2, Contribution I, paragraphe 2.5). Les observations qui sont le résultat de cette sélection sont celles disposées dans la table A 9.0.4; elles seront intitulées „observations sélectionnées”, ce qui veut dire qu'elles sont les marées hautes les plus fortes qui aient eu lieu pendant des dépressions hivernales potentiellement dangereuses au point de vue météorologique.

<sup>1)</sup> N.A.P. = le zéro de nivellement d'Amsterdam = niveau moyen de la mer.

Dans la figure 8.0.1 le nombre moyen annuel des marées hautes dépassant un niveau donné provenant des observations sélectionnées a été représenté comme fonction de ce niveau. Une ligne droite a été ajoutée à ce diagramme dans la figure 8.0.2. On a obtenu l'inclinaison de cette ligne à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, appliquée aux observations  $\geq$  N.A.P. + 1 m.70; celles-ci sont considérées ici comme des observations indépendantes procédant d'une distribution exponentielle qui prend naissance à ce point. Afin de marquer le „point de départ” (le niveau N.A.P. + 1 m.70) on a tracé une demi-ligne à partir de ce niveau. Le „point de départ” sur l'échelle verticale est constitué par le nombre moyen observé des niveaux dépassant N.A.P. + 1 m.70.

La figure 9.0.1 est identique à la figure 4.0.1, à part qu'on a ajouté maintenant la ligne droite qui correspond à la ligne dans la figure 8.0.2. L'inclinaison de cette ligne concorde très bien avec celle marquée par les points. La différence légère d'hauteur est négligeable.

Toutes ces considérations nous ont fait passer à partir du problème de l'estimation de l'asymptote dans la figure 3.0.1 au problème analogue en ce qui concerne la figure 8.0.2, les conclusions tirées du premier diagramme étant toujours valables. Nous estimerons l'asymptote à l'aide de la méthode qui a servi à tracer la ligne dans la figure 8.0.2. Dans la figure 10.0.1 l'asymptote a été estimée de diverses manières, chacune fondée sur un autre point de départ. Ce diagramme montre clairement l'incertitude de l'extrapolation; pour estimer celle-ci nous avons encore à notre disposition la figure 11.0.1. Là on a tracé la ligne droite de la figure 8.0.2, qui sert ici à estimer la courbe de fréquence; à droite de la courbe deux autres lignes droites marquent respectivement une limite supérieure de confiance au coefficient de confiance 0,95 (ligne du milieu) et une limite supérieure de confiance au coefficient de confiance 0,99 (ligne de droite).

Le texte principal se termine par une discussion des aspects pratiques des résultats obtenus.

Dans l'Appendice nous signalons, après avoir introduit quelques notations que l'espérance mathématique du nombre  $n(h)$  de dépassements annuels d'un niveau élevé est à peu près égal à la probabilité  $p(h)$  que dans une année le niveau en question sera dépassé. Ceci explique pourquoi nous nous servons de diagrammes comme la figure 8.0.1.

On a ajusté une courbe donnée par (1) de A 3.0 au nombre moyen observé de dépassements annuels du niveau  $h$ , en choisissant un niveau  $b$  et en ne considérant que les  $n$  observations  $h_1 \geq \dots \geq h_n \geq b$  faites dans  $m$  ans; ensuite on a estimé  $n(b)$  à l'aide de (2) et  $a_e$  à l'aide de (3) de A 3.0. Les résultats que nous avons obtenus de cette façon ont été disposés dans la table A 3.0.1; là les valeurs de  $\hat{a}_e^{-1}$  ont reçu un double soulignement dans tous les cas où le test  $\chi^2$  de validité de l'ajustement (discutée dans A 4.0) démontrait un ajustement très imparfait et un soulignement simple lorsque l'imperfection de l'ajustement était moins prononcée (seuil de signification 0,05).

A 5.0 contient la description de la méthode de sélection dont les observations sélectionnées ont été le résultat. Celles-ci sont ensuite examinées dans A 6.0 et A 7.0.

Si  $h_1, \dots, h_n$  sont des observations numérotées par ordre de grandeur, tirées indépendamment d'une distribution exponentielle,  $b$  étant le point de départ, la quantité  $B$  définie par (1) de A 6.0 peut être calculée pour des valeurs différentes de  $k$ . A l'aide de (2) de A 6.0 on peut trouver la probabilité d'obtenir cette valeur ou une valeur inférieure. Il résulte clairement de la table A 6.0.1 que la somme des  $k$  observations les plus élevées n'est ni excessivement grande ni excessivement petite, si l'on la compare à celle de toutes les  $n$  observations.

Dans la figure A 6.0.1 nous avons représenté les observations sélectionnées de la figure 8.0.1, conjointement avec une limite supérieure de 10 % pour la courbe théorique, calculée à l'aide des tables de MILLER [8] destinée au test de KOLMOGOROV-SMIRNOV. Cette limite supérieure est une fonction en escalier qui tout en n'étant d'aucune valeur pratique pour l'extrapolation, fournit pourtant une indication supplémentaire de la haute incertitude. La fonction en escalier n'a été tracée qu'en vue des hautes marées dépassant N.A.P. + 2 m.

Si nous estimons le paramètre de la distribution exponentielle des observations  $\geq$  N.A.P. + 2 m.45 en partant des observations  $\geq$  N.A.P. + 1 m.70 et  $<$  N.A.P. + 2 m.45, nous pourrions supposer connu ce paramètre (et pour cette raison la distribution entière) et nous pourrions ensuite confronter les observations  $\geq$  N.A.P. + 2 m.45 et la distribution „théorique” ainsi obtenue, de nouveau à l'aide des tables de MILLER. La figure A 6.0.2 montre une limite supérieure de 10 % pour la fonction en escalier expérimentale.

En essayant maintenant d'ajuster aux observations sélectionnées une courbe de Pearson, on trouve la courbe telle que la donne (10) de A 6.0. Il résulte de la figure A 6.0.3 que cette courbe s'ajuste assez bien aux observations. La ligne droite qu'on voit dans cette figure est la tangente à la courbe en son point d'inflexion. Soit la courbe, soit la tangente peuvent servir à l'extrapolation.

Le A 7.0 contient une méthode de construction d'un intervalle de confiance unilatéral pour  $\alpha = a_e^{-1}$ , (2) étant la formule fondamentale. Le mode d'emploi du papier à échelle fonctionnelle des probabilités totales selon la loi de GUMBEL se trouve dans le A 8.0. L'appendice se termine par l'énumération des diagrammes et la manière dont ils ont été construits. Aux diagrammes 4.0.1, 7.0.2, 8.0.1, 8.0.2, 9.0.1, A 6.0.1 et A 6.0.3, a servi la méthode de représenter les observations de BENARD-BOS, dont la description se trouve dans BENARD et BOS-LEVENBACH [1].

---

<sup>1)</sup> Une estimation d'un paramètre  $x$  est indiquée par  $\hat{x}$ .

## 1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

### 1.1 Inleiding

In deze bijdrage is beschreven langs welke weg het statistisch onderzoek van de bij Hoek van Holland geregistreerde hoogwaterstanden (van 1888 tot en met 1956) geleid heeft tot een extrapolatie, waaruit schattingen van de frequenties van zeer hoge stormvloedstanden kunnen worden afgelezen.

Een samenvatting van de resultaten van dit onderzoek vindt men in figuur 11.0.1, waaruit bij voorbeeld valt af te lezen, dat bij een overschrijdingskans van  $10^{-4}$  een geschatte hoogwaterstand van N.A.P. + 5,13 m behoort.

### 1.2 Inhoud van de bijdrage

In het eerste deel van de bijdrage worden de gevolgde methode, alsmede de overwegingen, die tot de keuze daarvan hebben geleid, en de resultaten van de analyse globaal en zoveel mogelijk op algemeen begrijpelijke wijze uiteengezet. De wiskundige precisering vindt men in een Appendix.

### 1.3 Auteurs en medewerkers

Dit deel van het onderzoek vond plaats onder leiding van D. van Dantzig en J. Hemelrijk en in samenwerking met verschillende medewerkers van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, in het bijzonder H. Kesten en J. Th. Runnenburg; de laatstgenoemde verzorgde o.a. de redactie van de Appendix van dit hoofdstuk. Tevens vermelden wij gaarne de hulp, geboden door het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut, in het bijzonder door C. J. van der Ham<sup>1)</sup>, die de „gevaarlijke depressies” selecteerde, met behulp waarvan de uiteindelijke extrapolatie werd uitgevoerd.

## 2.0 HET WAARNEMINGSMATERIAAL; DE KEUZE VAN HOEK VAN HOLLAND

Het beschikbare waarnemingsmateriaal bestaat uit waargenomen *hoogwaterstanden* (te vinden in de Jaarboeken der Waterhoogten van de directie Waterhuishouding en Waterbeweging van de Rijkswaterstaat) voor verschillende plaatsen langs de kust en in de zeearmen<sup>2)</sup>. Van deze plaatsen is Hoek van Holland – althans voor Centraal-Holland en Zeeland – het geschiktste punt om de invloed van de Noordzee op de kust te onderzoeken. Het is centraal gelegen en de peilschaal bevindt zich dicht bij de kust, waardoor de storende invloeden, die zich verderop in rivieren en zeearmen voordoen, daar niet of althans het minst aanwezig zijn. Het onderzoek werd daarom voor Hoek van Holland uitgevoerd.

De beschikbare waarnemingen strekten zich uit over de jaren 1888 tot en met 1956 (deze waarnemingen zijn verwerkt in tabel A 9.0.1). De in deze bijdrage gegeven resultaten berusten op ongeveer 49 000 hoogwaterstanden. Van het aanbrengen van een bodemdalingscorrectie op de waarnemingen werd afgezien, omdat: 1. deze correctie zeer onzeker zou zijn, en 2. haar invloed op de voor dit onderzoek belangrijkste hoge H.W.'s relatief zeer gering is. Dit geldt uiteraard niet meer, indien men bij extrapolatie rekening wenst te houden met de bodemdaling in toekomstige perioden. Het is echter beter dit probleem afzonderlijk te beschouwen en het niet onder één hoofd te brengen met de onderzoekingen naar de hoogwateroverschrijdingslijn, die hier worden behandeld. De bodemdaling wordt wel in rekening gebracht bij de in Bijdrage II.2 beschreven economische beschouwingen.

Naast de hoogwaterstanden zijn de astronomische standen (voorspelde standen volgens de getijtafels) beschikbaar. Het verschil tussen de waargenomen en de voorspelde hoogwaterstand (die dus niet precies op hetzelfde moment behoeven te vallen) wordt de *opzet* genoemd.

## 3.0 DE FREQUENTIEVERDELING VAN ALLE HOOGWATERSTANDEN

De empirische frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden is in figuur 3.0.1 aangegeven. Op de horizontale as is daarbij de hoogte aangegeven in m boven N.A.P. en op de verticale as – op loga-

<sup>1)</sup> Zie Bijdrage I, paragraaf 2.5.

<sup>2)</sup> Een hoogwaterstand (afkorting: H.W.) is de hoogste stand, die gedurende een periode van hoogwater wordt bereikt.

ritmische schaal – het gemiddeld aantal overschrijdingen van de beschouwde hoogte per jaar. De hoogst waargenomen waterstand is N.A.P. + 3,85 m (1 februari 1953); het bijbehorende aantal overschrijdingen per jaar is  $1/69 = 0,0145$ . De daarop volgende is N.A.P. + 3,28 m (22 december 1894) met een gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van  $2/69 = 0,0290$ .

In 1939 introduceerde WEMELSFELDER [9] deze statistische behandeling van hoogwaterstanden. Waar in het verleden veelal de hoogte van een te bouwen of te verhogen dijk werd gebaseerd op de hoogste *tot dan* waargenomen waterstand, betoogde WEMELSFELDER terecht, dat men ook met hogere dan de waargenomen waterstanden rekening dient te houden en dat deze op de lange duur elk met een bepaalde frequentie voorkomen. Bij uitzetten van de toen beschikbare gegevens voor Hoek van Holland op de bovenbeschreven wijze, verkreeg hij een rij punten, die voor niet te geringe hoogte bij goede benadering op een rechte lijn lagen. Uit figuur 3.0.1 blijkt, dat dit ook voor de momenteel beschikbare waarnemingen boven N.A.P. + 1,50 m het geval is. De hoogste waterstanden wijken echter merkbaar van de rechte lijn af, en wel naar boven. Hoewel dit mogelijkwijze aan hun geringe aantal te wijten is, zullen wij later zien, dat ook het niet-homogene karakter van dit waarnemingsmateriaal er de oorzaak van kan zijn.

Vervangt men de waargenomen punten door een zo goed mogelijk daarbij aansluitende rechte lijn als (voorlopige) „theoretische verdeling”, dan blijkt, dat bij een hoogteverschil van 0,55 m een kansverhouding 1 : 10 behoort; dit hoogteverschil wordt daarom de „(kans)decimeringshoogte” genoemd. De overeenkomstige „(kans)halveringshoogte” is  $^{10}\log 2 = 0,301$  maal zo groot, dus 0,166 m, de „(kans)nepereringshoogte” is  $^{10}\log e = 0,434$  maal zo groot als de decimeringshoogte, dus 0,239 m.

#### 4.0 METHODEN

De waarnemingen van figuur 3.0.1 en daaraan analoge figuren moeten wij, speciaal met het oog op extrapolatie naar hoge hoogwaterstanden, aanzienlijk buiten het gebied der tot nu toe waargenomen standen vervangen door een bij die waarnemingen aanpassende continue kromme, ondanks alle bekende, tegen extrapolatie in te brengen bezwaren (vgl. 6.0).

Indien wij (dit wordt besproken in 9.0 en A 6.0) de hoogwaterstanden als onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling mogen beschouwen, dan geeft deze kromme (op een bekende constante factor na, namelijk het totale aantal optredende hoogwaterstanden per jaar) de kans op overschrijding van een waterpeil  $h$  bij één bepaalde hoogwaterstand. Bij de bepaling van de kromme dienen we daarom het volgende in aanmerking te nemen. Voor lage hoogwaterstanden wordt de kromme vrij nauwkeurig door de waarnemingen vastgelegd, daar hierbij voldoende waarnemingen beschikbaar zijn. Bij de hogere hoogwaterstanden daarentegen moet het juiste verloop van de kromme uit een gering aantal waarnemingen geschat worden, die door onregelmatige, zogenaamde „stochastische” fluctuaties aanzienlijk van de kromme kunnen afwijken en bovendien door de gevolgde methode van uitzetten ver uiteenliggen. Desondanks lijkt het niet onredelijk betreffende die onbekende kromme uit de waarnemingen de volgende conclusies te trekken.

De kromme, die wij zoeken, bevat een bij benadering rechtlijnig gedeelte. De figuur doet denken aan een kromme, die een asymptoot heeft, die in een aanzienlijk deel van het waarnemingsgebied weinig van de kromme afwijkt. In werkelijkheid mag men niet onderstellen, dat de kromme inderdaad deze lijn als asymptoot in wiskundige zin bezit, d.w.z., dat zij zich bij willekeurig hoge peilen met onbeperkt toenemende nauwkeurigheid bij deze rechte zou gaan aansluiten. Integendeel, er zijn bepaalde argumenten, die er op kunnen wijzen, dat de hoogwateroverschrijdingslijn voor nog veel hogere peilen dan voor extrapolatie in aanmerking komen, naar beneden moet afbuigen. Wij zien echter hiervan af, daar dit uit de thans beschikbare waarnemingen niet blijkt (vgl. 12.0); eerder wordt een afwijking naar boven gesuggereerd, weshalve voor het bij de extrapolatie in aanmerking komende interval rechtlijnige voortzetting in de rede ligt. Wanneer wij dus hier van „asymptoot” spreken, bedoelen we daarmee alleen dat gedeelte van de kromme, waarvan men redelijkerwijs mag aannemen, dat het ook binnen het extrapolatiegebied nog bij vrij goede benadering met een rechte overeenstemt. Het is bij de extrapolatie niet nodig de overschrijdingslijn tot zéér grote hoogte voort te zetten. Voor het gestelde doel is extrapolatie tot een niveau van ongeveer N.A.P. + 6 m voldoende. Daarbij is van belang, dat er op grond van algemene ervaring bij dergelijke problemen geen reden is aan te nemen, dat de over-

schrijdingslijn nabij een bepaalde hoogte *plotseling* zal gaan afbuigen, maar dat een eventuele kromming in een gebied, dat zich niet zeer ver van een vrijwel rechtlijnig stuk uitstrekt, in ieder geval klein zal blijven. Dit heeft ten gevolge, dat de afwijking van de ware overschrijdingslijn en de rechtlijnig geëxtrapoleerde bij hoogten tot N.A.P. + 6 à 7 m of minder vermoedelijk minder zal zijn dan enkele decimeters.

Dit alles betekent, dat wij voor ons doel kunnen volstaan met het schatten van de juiste ligging van de asymptoot. Wij zoeken dus naar een rechte lijn, die we ook wel met overschrijdingslijn kunnen aanduiden, die goed bij het rechtlijnige gedeelte der figuren past, maar bij de lagere hoogwaterstanden aanzienlijk mag en zal afwijken. Ook de hoogst waargenomen hoogwaterstanden zullen niet op een dergelijke lijn liggen, doch dit is, gezien de grote stochastische fluctuaties in die standen te verwachten.

Bij de definitieve schatting van de asymptoot (zie 8.0 en volgende en A 3.0) zullen wij, overwegende dat uit de figuren met voldoende nauwkeurigheid blijkt, vanaf welk niveau de „asymptoot” redelijk bij de waarnemingen past, de waarnemingen beneden dat niveau buiten beschouwing laten en met de waarnemingen boven dat niveau de „asymptoot” bepalen. Wanneer wij later spreken over het „beginpunt” van die rechte bij dat niveau, dan is dat alleen bedoeld in die zin, dat deze rechte met behulp van de waarnemingen boven dat niveau geschat is. Beschouwen wij na de schatting van de asymptoot alleen de waarnemingen, die boven een gegeven peil liggen, in het gebied waarin de rechte goed bij de waarnemingen past, dan kunnen wij de benadering, die nu voor de verdelingsfunctie met die rechte gevonden is, interpreteren als een benadering van de verdelingsfunctie der hoogwaterstanden vanaf dat beginpunt met een zogenaamde *exponentiële* verdeling. Aan deze interpretatie zullen wij verdere statistische beschouwingen verbinden. Alvorens hiertoe over te gaan, zullen wij nog enige andere methoden bespreken.

Hoewel de waarnemingen de toepassing van de zojuist besproken methode suggereren, dient men toch te overwegen, of ook andere veronderstellingen met deze waarnemingen te rijmen vallen en in het bijzonder of deze andere veronderstellingen bij extrapolatie naar hogere waarden van H.W. (een punt, dat later ter sprake komt) tot andere resultaten zouden leiden. Daarvoor komt dan in de eerste plaats de zogenaamde *logaritmisch-normale verdeling* in aanmerking, die in de literatuur herhaaldelijk vermeld wordt als een geschikte verdeling bij problemen van analoge aard als het onderhavige. In ons geval echter valt aan te tonen (zie A 2.0), dat weliswaar ook deze verdeling goed aan de waarnemingen aangepast kan worden, doch dat de verkregen lijn dan niet of nauwelijks van de door ons gebruikte rechte lijn is te onderscheiden, ook niet bij extrapolatie tot bijv. een hoogte van N.A.P. + 6 m<sup>1)</sup>. De exponentiële verdeling geeft dus resultaten, die in het door de waarnemingen bestreken interval ook bij benadering in overeenstemming zijn met de veronderstelling van een logaritmisch-normale verdeling. De eerstgenoemde verdeling is echter wiskundig veel beter hanteerbaar en wezenlijk bevredigender, daar zij tot minder willekeur bij de aanpassing en de extrapolatie aanleiding geeft, omdat zij van slechts één aan de waarnemingen aan te passen parameter afhangt. Daarom werd aan de exponentiële verdeling de voorkeur gegeven. De mate van aanpassing werd bovendien in een later stadium nog onderzocht met behulp van een daarvoor gangbare statistische methode. Het resultaat (zie A 4.0) is zeer bevredigend.

Voorts komt de door FRÉCHET [5], FISHER en TIPPETT [4] afgeleide verdeling der uiterste waarden in aanmerking, die door GUMBEL ([6] en latere publikaties) belangrijk is uitgebreid en op velerlei problemen, waaronder ook hydrologische, is toegepast. In het onderhavige geval bestaat de toepassing hiervan daarin, dat men de jaarmaxima bepaalt en deze op zg. „Gumbelpapier” uitzet. Dit papier heeft op de verticale as een lineaire en op de horizontale as een dubbel-logaritmische schaal en als de jaarmaxima beschouwd zouden kunnen worden als de grootste waarnemingen uit onderling onafhankelijke waarnemingsreeksen, die alle dezelfde verdeling bezitten, dan zouden deze jaarmaxima op dit papier bij benadering een rechte lijn moeten volgen. Dit geldt ook, als de uitgangsverdeling der hoogwaters niet een exponentiële is, doch één van het zogenaamde „exponentiële type” waaronder behalve de exponentiële onder andere ook de normale (de verdeling van Laplace-Gauss) en de logaritmisch-normale vallen.

Inderdaad liggen de jaarmaxima, op Gumbelpapier (zie GUMBEL [7]) uitgezet, zodanig, dat een

<sup>1)</sup> Ditzelfde geldt voor vrijwel iedere verdeling, waarin een voldoende groot aantal parameters voorkomt, die aangepast kunnen worden.



rechte lijn aangepast zou kunnen worden (zie figuur 4.0.1). Deze methode heeft echter, in vergelijking met het gebruik van de exponentiële verdeling, het nadeel, dat slechts van 69 jaarmaxima gebruik wordt gemaakt, waardoor een niet onbelangrijk deel der in de waarnemingen vervatte informatie ongebruikt blijft. Bovendien kan worden bewezen (A 8.0), dat in het gebied, dat voor ons probleem van belang is, ongeveer van N.A.P. + 2 m tot N.A.P. + 6 m, de methode van GUMBEL en het gebruik van de exponentiële verdeling, indien gebaseerd op dezelfde waarnemingspunten (bijv. de jaarmaxima alleen), tot hetzelfde resultaat leiden. Voor de exponentiële methode zijn echter meer waarnemingen bruikbaar dan de jaarmaxima alleen, zodat deze methode tot nauwkeuriger uitkomsten zal leiden.

Daarom is het verdere betoog gebaseerd op de veronderstelling van een exponentiële verdeling der hoogwaterstanden, terwijl de methode van GUMBEL alleen incidenteel nog te pas komt om een bepaald punt van het betoog te ondersteunen (vgl. 8.0, laatste alinea, en A 8.0).

## 5.0 HOOGWATERSTANDEN OF OPZETTEN?

Bij de statistische verwerking moest verder beslist worden of de hoogwaterstanden zelf beschouwd zouden worden, dan wel de daarbij behorende opzetten. Beschouwt men de opzetten, dan wordt de invloed van het astronomisch getij – althans ten dele – bij de statistische analyse geëlimineerd, hetgeen wellicht tot nauwkeuriger uitkomsten zou kunnen leiden. Nu blijkt echter, indien men de opzetten op dezelfde wijze uitzet als in figuur 3.0.1 met de hoogwaterstanden is gedaan, dat een lijn wordt verkregen, die evenwijdig aan die van de hoogwaterstanden verloopt. Analyse van deze lijn zou dus tot (nagenoeg) dezelfde resultaten leiden als die van de lijn der hoogwaterstanden. Het eerstgenoemde houdt meer werk in dan het laatstgenoemde en heeft minder rechtstreeks betrekking op de praktische consequenties van het vraagstuk. Om die redenen is het verantwoord, niet met de opzetten, maar met de hoogwaterstanden te werken.

Beter dan de hoogwaterstanden of opzetten zou wellicht het grootste verschil tussen de werkelijke waterhoogte en de voor *hetzelfde* moment voorspelde waterhoogte, die uit de getijkromme volgt, gebruikt kunnen worden. Deze grootte is echter slechts voor enkele stormen bekend, doch niet voor een voldoende aantal perioden van hoogwater, om daarop een statistische analyse te kunnen toepassen.

## 6.0 EXTRAPOLATIE

Het behoeft geen betoog, dat extrapolatie van een zuiver empirisch verkregen lijn steeds in hoge mate onzeker is. In het hier beschouwde geval moeten veiligheidsmaatregelen genomen worden tegen eventualiteiten, die mogelijk zijn, zonder dat het zeker is, dat – en, zo ja, wanneer – zij zullen optreden. Dit leidt tot een mathematisch-statistische behandeling van het probleem: men zal een schatting moeten maken van de kans, dat bepaalde mogelijke waterstanden zullen worden overtroffen, en op grond daarvan de maatregelen moeten treffen, beseffende dat er steeds een – zij het zeer kleine – kans overblijft, dat zij toch zullen blijken onvoldoende te zijn geweest.

Men zal dus uit de waarnemingen een kansverdeling moeten afleiden, die zich ook verder uitstrekt dan de hoogst waargenomen stand. Dit betekent eigenlijk, dat men zich voorstelt, dat over lange tijd, bijv. na enkele honderden jaren, met de dan beschikbare waarnemingen opnieuw een empirische overschrijdingslijn zal worden afgeleid en dat men nu reeds tracht te raden, hoe deze er zal uitzien. Dit is een gissing, dus onzeker. Door echter de thans bekende feiten zo goed mogelijk in aanmerking te nemen, kan men bereiken, dat redelijkerwijs te verwachten is, dat de toekomstige overschrijdingslijn niet al te veel van de thans gegiste af zal wijken.

Extrapolatie is dus, ook al blijft onzekerheid bestaan, noodzakelijk. Om de onzekerheid zo veel mogelijk te beperken, dient men echter voorzorgen te nemen. De belangrijkste van deze voorzorgen is, dat men er tegen waakt, de extrapolatie te baseren op „niet-homogeen” waarnemingsmateriaal. Verder is het van belang de onzekerheid der extrapolatie, voor zoverre deze op grond van bepaalde veronderstellingen (hier de in 3.0 en 4.0 besproken veronderstelling van een exponentiële verdeling) valt te berekenen, vast te stellen en bij het nemen van een beslissing in de overwegingen te betrekken. Deze beide punten komen in het volgende ter sprake, te beginnen met het eerstgenoemde.



## 7.0 HET HOMOGEEN MAKEN VAN HET WAARNEMINGSMATERIAAL DOOR SPLITSING IN ZOMER EN WINTER

De eenvoudigste extrapolatieprocedure ware, in figuur 3.0.1 een rechte lijn door de waarnemingspunten te trekken en deze eenvoudig te verlengen, dus rechtlijnig te extrapoleren. Dit is in figuur 7.0.1 uitgevoerd. Op verschillende wijzen valt in te zien, dat deze procedure onjuist is.

In 4.0 is reeds opgemerkt, dat de Gumbellijn der jaarmaxima tot hetzelfde resultaat moet leiden als de extrapolatie van een rechte lijn als die van figuur 7.0.1. Brengen wij echter deze lijn van figuur 7.0.1 over op Gumbelpapier, waarop de jaarmaxima zijn uitgezet, dan wordt figuur 7.0.2 verkregen (voor de methode van overbrenging zie A 8.0). Uit deze figuur is duidelijk te zien, dat de jaarmaxima systematisch van deze lijn afwijken. De lagere jaarmaxima liggen er alle onder en de hogere liggen er boven, d.w.z. de helling van de lijn is onjuist.

Dit verschijnsel is gemakkelijk te verklaren en in overeenstemming met de boven gemaakte opmerking, dat het onjuist is niet-homogeen materiaal te extrapoleren. Immers de jaarmaxima vallen steeds (of vrijwel steeds) in de winter; in de zomer zijn de hoogwaterstanden lager. Deze lagere hoogwaterstanden hebben *geen* invloed op de jaarmaxima, maar zij hebben *wel* invloed op de helling van de lijn in figuur 7.0.1 en 7.0.2. Deze helling wordt er door vergroot, waardoor bij extrapolatie een te lage schatting der kansen op overschrijding verkregen wordt. Het zou dus zeer onvoorzichtig zijn, beslissingen op deze extrapolatie te baseren.

Dat zomer en winter verschillen wat de hoogwaterstanden betreft, is natuurlijk ook direct in te zien. De hoogwaterstanden van de maanden november tot en met januari (met de stand van 1 februari 1953 er bij, omdat deze de aanleiding tot het onderzoek was) geven, uitgezet op dezelfde wijze als in figuur 3.0.1 gedaan is, een lijn te zien met een helling, die duidelijk van die van de overige maanden te zamen verschilt (zie figuur 7.0.3). De keuze van de drie maanden november, december en januari als wintermaanden is uiteraard enigszins arbitrair; daarom is onderzocht of verkleining of vergroting (op beperkte schaal) van deze periode de resultaten nog aanzienlijk beïnvloedt. Dit bleek niet het geval te zijn, hetgeen de keuze van deze periode, waarin ook de meeste jaarmaxima vallen, rechtvaardigt.

Ook de hoogwaterstanden van deze drie maanden zijn echter nog verre van homogeen, omdat zij veroorzaakt worden door depressies, die van verschillende typen zijn. Op dit punt gekomen, ligt het voor de hand meteorologische hulpmiddelen te gebruiken, om een grotere mate van homogeniteit te bereiken en daarmee de betrouwbaarheid van de extrapolatie verder te vergroten.

## 8.0 SELECTIE VAN DEPRESSIES OP METEOROLOGISCHE GRONDEN

Een gevaarlijk hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus depressies in plaats van afzonderlijke hoogwaters, dan komen wij dicht bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één hoogwater en daardoor ontstaat afhankelijkheid van op elkaar volgende hoogwaters, hetgeen de statistische analyse belemmert. Dit wordt vermeden, indien depressies in plaats van hoogwaters worden beschouwd. Daar het gevaar, dat een depressie voor de dijken geeft, sterk samenhangt met de hoogste tijdens die depressie bereikte waterstand, ligt het voor de hand de verdere analyse te baseren op hoogste standen per depressie.

Lang niet alle depressies zijn echter potentieel gevaarlijk. De verzameling van deze hoogste standen is, meteorologisch beschouwd, nog steeds niet homogeen. In verband daarmee werden door VAN DER HAM van het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut<sup>1)</sup> die depressies geselecteerd, die op grond van het feit, dat zij bepaalde eigenschappen bezitten, als de *potentieel gevaarlijke depressies* beschouwd moeten worden. De criteria voor deze selectie zijn in A 5.0 beschreven. Het belangrijkste criterium was daarbij, dat deze depressies een binnen een bepaald vak gelegen baan volgden.

Het totale waarnemingsmateriaal, dat nu overblijft, bestaat uit 332 hoogwaterstanden van een gelijk aantal potentieel gevaarlijke depressies. Deze waarnemingen zijn in figuur 8.0.1 op soortgelijke wijze uitgezet als in figuur 3.0.1 voor alle hoogwaters is gedaan. In verband met het feit, dat de verdere

<sup>1)</sup> Zie Bijdrage I, paragraaf 2.5.

analyse op deze waarnemingen is gebaseerd, is bij het uitzetten van deze punten een door BENARD en BOS-LEVENBACH [1] uitgewerkte verfijning van de in figuur 3.0.1 gevolgde techniek toegepast, die in A 8.0 is beschreven. De invloed hiervan is gering, behalve voor de hoogste 20 à 30 waargenomen standen, die nu bij een wat kleiner gemiddeld aantal overschrijdingen worden uitgezet. Deze methode is ook in de figuren 4.0.1 en 7.0.2 reeds zonder expliciete vermelding gebruikt.

In figuur 8.0.2 zijn dezelfde punten uitgezet met de meest aannemelijke rechte lijn, aangepast aan de punten boven N.A.P. + 1,70 m. De aanpassing van deze punten aan de rechte is niet overal even fraai, doch dit is, gezien het betrekkelijk geringe aantal punten, niet verwonderlijk. Wel valt op, dat de hogere waarnemingen nu veel minder van de aangepaste lijn afwijken dan in figuur 7.0.1 het geval is; dit verleent steun aan de in 3.0 vermelde veronderstelling, dat de afwijking in figuur 7.0.1 door de inhomogeniteit van het waarnemingsmateriaal veroorzaakt wordt. Vergelijken wij de overschrijdingskans van de hoogte N.A.P. + 5 m, die door deze lijn wordt aangewezen, met de uit figuur 7.0.1 af te leiden waarde voor dezelfde kans, dan zien wij, dat nu de waarde  $1,5 \cdot 10^{-4}$  verkregen wordt, terwijl figuur 7.0.1 de waarde  $7,1 \cdot 10^{-6}$  geeft. Het verschil is vrij aanzienlijk en geeft een indruk van het belang van de toepassing van de boven beschreven selectie.

## 9.0 TOETSING DER AANPASSING

Alvorens een verdere statistische analyse te baseren op de veronderstelling, dat de waarnemingen in figuur 8.0.1 vanaf een voldoende hoog peil beschouwd kunnen worden als onafhankelijke waarnemingen uit een exponentiële verdeling, is het nu van belang deze onderstelling te toetsen.

In de eerste plaats is het duidelijk, dat het begin van de door de punten gevormde kromme (tot ongeveer N.A.P. + 1,70 m toe) aanmerkelijk afwijkt van een rechte lijn door de hogere waarnemingen. Dit zelfde verschijnsel doet zich voor bij de lijnen (zie figuur 3.0.1 en 7.0.3), die op alle hoogwaters betrekking hebben. Deze lage standen zijn echter voor het doel van het onderzoek niet belangrijk en kunnen dus gevoeglijk buiten beschouwing blijven.

Voor de hoger gelegen waarnemingen zijn nu verschillende statistische toetsingen uitgevoerd om de gemaakte veronderstelling te toetsen. Deze zijn in A 4.0 beschreven. Zij leidden tot een alleszins bevredigend resultaat.

Wij gaan hier alleen na, of de in figuur 8.0.2 getrokken lijn nu wel in overeenstemming is met de jaarmaxima, uitgezet volgens GUMBEL. In figuur 9.0.1 is de lijn van figuur 8.0.2 overgebracht. De helling van de lijn komt nu zeer goed met de uitgezette punten overeen. Er is echter een systematisch hoogteverschil van ongeveer 10 cm. Daar de puntenreeks de *cumulatieve* verdelingsfunctie bij benadering weergeeft, wordt zulk een systematisch verschil vrijwel uitsluitend veroorzaakt door afwijkingen bij kleine waarden van  $h$ , die echter voor ons probleem van weinig belang zijn. Zij zouden er hoogstens toe kunnen leiden, dat men moest aannemen, dat de selectie nog niet homogeen genoeg is en er nog een aantal minder gevaarlijke depressies in voorkomt. Een verschil van 10 cm is bovendien klein en blijft bij extrapolatie onveranderd, zodat het verschil van geen belang is.

Pogingen om het materiaal zo mogelijk nog beter homogeen te maken, werden langs twee andere wegen verricht, nl. door te onderzoeken of er een verband tussen de H.W.'s en de zonnevlekken-intensiteit te vinden was en of aan te tonen viel, dat de jaren verdeeld konden worden in „gevaarlijke” en „minder gevaarlijke” jaren. Beide onderzoeken hadden een negatief resultaat: er waren in het ter beschikking staande materiaal geen aanwijzingen voor een merkbare invloed van de zonnevlekken-intensiteit op de H.W.'s en een splitsing, zoals die van de maanden en die van de depressies, in gevaarlijke en minder gevaarlijke, kan bij de jaren niet worden verkregen. Een meteorologische basis ontbrak trouwens bij deze beide onderzoeken.

## 10.0 VERSCHILLENDE SCHATTINGEN VAN DE BAANSELECTIELIJN

De gezochte overschrijdingslijn, die past bij de punten in figuur 8.0.1, waarvan dus de lijn in figuur 8.0.2 een schatting is, noemen wij de *baanselectielijn*.

Deze lijn begint in figuur 8.0.2 bij N.A.P. + 1,70 m, waarbij de punten beneden deze hoogte buiten beschouwing zijn gelaten. De keuze van het „beginpunt”, N.A.P. + 1,70 m, is echter betrekkelijk

arbitrair. Men kan ook een ander beginpunt nemen, bijv. N.A.P. + 1,80 of 2,00 m, en dan wordt een andere schattingslijn verkregen. Beneden N.A.P. + 1,70 m buigen de punten in figuur 8.0.1 duidelijk af, dus is het niet wenselijk het beginpunt lager te nemen. Het is echter zeer wel mogelijk het hoger te kiezen.

Bij ieder beginpunt kan nu, op grond van de boven dit beginpunt gelegen waarnemingen, een zg. aannemelijkste schatting van de halverings- en decimeringshoogte (vgl. 3.0) berekend worden. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in A 3.0 beschreven. De resultaten zijn in tabel 10.0.1 samengevat <sup>1)</sup>. Daar de derde decimaal slechts betekenis heeft voor de figuren, kan voor de halverings-, resp. decimeringshoogte bij N.A.P. + 1,70 m de waarde 0,23 m, resp. 0,78 m genomen worden.

Tabel 10.0.1  
Helling van de baanselectielijn bij verschillende beginpunten (aannemelijkste schattingen)

Beginpunt in m boven N.A.P.	Aantal overschrijdingen	Decimeringshoogte in m	Halveringshoogte in m	Nepereringshoogte in m
1,50	257	0,881	0,265	0,383
1,60	212	0,814	0,245	0,354
1,70	166	0,776	0,234	0,337
1,80	129	0,739	0,223	0,321
1,90	94	0,749	0,226	0,325
2,00	71	0,725	0,218	0,315
2,10	53	0,700	0,211	0,304
2,20	33	0,838	0,252	0,364
2,30	24	0,891	0,268	0,387
2,40	18	0,908	0,273	0,394
2,50	17	0,725	0,218	0,315
2,60	13	0,699	0,210	0,304

In figuur 10.0.1 zijn de overeenkomstige lijnen getekend. Bij iedere lijn is het beginpunt verduidelijkt aangegeven. Deze figuur geeft een inzicht enerzijds in de grootten der te verwachten overschrijdingsfrequenties van verschillende hoogten, anderzijds in de onzekerheid, waarmee deze getallen behept zijn.

Zo blijkt bijv., dat voor een hoogte van N.A.P. + 5 m de overschrijdingskans, bij extrapolatie verkregen, nog sterk van de keuze van het beginpunt afhangt. De laagste gevonden waarde is  $7,59 \cdot 10^{-5}$ , de hoogste  $4,36 \cdot 10^{-4}$ . Voor N.A.P. + 6 m bedragen deze waarden  $2,25 \cdot 10^{-6}$  en  $3,20 \cdot 10^{-5}$ . Beschouwt men anderzijds de horizontale lijn, die bij een overschrijdingskans  $10^{-4}$  behoort, dan lopen de schattingen van de daarbij behorende hoogten uiteen van N.A.P. + 4,85 m tot N.A.P. + 5,56 m. De overschrijdingskans van het peil N.A.P. + 3,85 m varieert van  $2,66 \cdot 10^{-3}$  tot  $8,85 \cdot 10^{-3}$ .

## 11.0 ANDERE BESCHOUWINGEN OVER DE NAUWKEURIGHEID DER SCHATTINGEN

Een tweede methode, dienende om een indruk van de onzekerheid van de extrapolatie te verkrijgen – steeds uitgaande van de veronderstelling van een exponentiële verdeling, dus van lineaire extrapolatie –, is het bepalen van *betrouwbaarheids grenzen* voor de decimerings-, halverings- en nepereringshoogte.

Daar wij slechts over een vrij gering aantal waarnemingspunten beschikken (nl. 166 waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m in 63 jaar), zal zelfs de best mogelijke schatting van de decimerings- en halveringshoogte nog vrij veel van de „werkelijke” waarde kunnen verschillen.

Een *betrouwbaarheidsbovengrens* (speciaal een bovengrens is hier van belang) is nu een uit deze waarnemingen berekend getal, dat, behoudens een van tevoren bepaalde *onbetrouwbaarheid* (waarvoor de waarden 0,05 en 0,01 zijn genomen), groter is dan de onbekende werkelijke waarde. „Onbetrouw-

<sup>1)</sup> De halveringshoogte (resp. nepereringshoogte) is 0,301 (resp. 0,434) maal de decimeringshoogte.

baarheid 0,05 (resp. 0,01)" betekent daarbij, dat bij toepassing van deze methode slechts een kans 0,05 (resp. 0,01) bestaat, dat de gevonden betrouwbaarheids grens toch kleiner is dan de werkelijke waarde.

Een dergelijke bovengrens is groter dan de aannemelijkste schatting zelf, daar deze laatste een kans van ongeveer  $\frac{1}{2}$  bezit om kleiner dan de gezochte werkelijke waarde te zijn. Het verschil tussen deze beide getallen – en ook dat tussen de bovengrens en de werkelijke waarde – wordt kleiner, naarmate het aantal waarnemingen toeneemt. Het is daarom van belang zoveel mogelijk der waarnemingen in de berekening van de bovengrens te betrekken, daar anders een te pessimistisch beeld verkregen wordt. Daarom zijn de berekeningen gebaseerd op alle waarnemingen boven N.A.P. + 1,70 m, het laagste beginpunt, waarbij de hier gevolgde methode nog redelijk wel bruikbaar is. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in A 7.0 opgenomen. De resultaten zijn opgenomen in tabel 11.0.1.

Tabel 11.0.1

Bovengrenzen (in m) van halverings-, decimerings- en nepereringshoogte met onbetrouwbaarheid 0,05 resp. 0,01 bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m

	Aannemelijkste schatting in m	Bovengrens met onbetrouwbaarheid van	
		0,05	0,01
Halveringshoogte . . . . .	0,234	0,267	0,282
Decimeringshoogte . . . . .	0,776	0,886	0,936
Nepereringshoogte . . . . .	0,337	0,385	0,407

Dit resultaat is verder in figuur 11.0.1 in beeld gebracht, waarbij de (geringe) onzekerheid in de hoogte van het bij N.A.P. + 1,70 m liggende beginpunt buiten beschouwing gelaten is, daar een geringe *evenwijdige* verplaatsing van de lijn geen invloed van betekenis heeft.

Uit figuur 11.0.1 valt af te lezen, dat bij een overschrijdingskans van  $10^{-4}$  een geschatte hoogte van N.A.P. + 5,13 m behoort (hetgeen tot N.A.P. + 5,1 m afgerond kan worden), terwijl de twee bovengrenzen N.A.P. + 5,62 m (met onbetrouwbaarheid 0,05) en N.A.P. + 5,83 m (met onbetrouwbaarheid 0,01) bedragen. Anderzijds is de geschatte overschrijdingskans van de hoogte N.A.P. + 5 m gelijk aan  $1,5 \cdot 10^{-4}$ , maar de bovengrenzen bedragen  $5 \cdot 10^{-4}$  (onbetrouwbaarheid 0,05), resp.  $7,8 \cdot 10^{-4}$  (onbetrouwbaarheid 0,01). De verschillen tussen schatting en bovengrens zijn aanzienlijk, hetgeen het gevolg is van de extrapolatie.

## 12.0 INTERPRETATIE DER UITKOMSTEN

Bij de interpretatie van deze uitkomsten is de *praktische betekenis van een overschrijdingskans* van een bepaalde hoogte van het grootste belang.

Indien men, om de gedachten te bepalen, er van uit zou gaan, dat men de dijken bij Hoek van Holland voor 100 jaar veilig wil maken, dan dient men het begrip „veilig” nader te omschrijven. Immers, absolute veiligheid is niet mogelijk. Men zou nu bijv. kunnen zeggen, dat men een kans van ongeveer 1% op overstroming van de dijk gedurende die 100 jaar nog acceptabel vindt. In dat geval zal men de dijk zo hoog moeten maken, dat (afgezien van extra-verhogingen voor golfslag, bodemdaling, enz.) de overschrijdingskans van de gekozen hoogte  $10^{-4}$  is of althans dicht daarbij ligt.

In het licht van deze interpretatie is een overschrijdingskans  $10^{-4}$  zeker niet extreem laag. De indruk, dat dit wel zo is, wordt ten onrechte gewekt, indien men deze overschrijdingskans interpreteert als: „gemiddeld ééns in de 10 000 jaar”, daar men dan de neiging heeft, hiervoor te lezen: „voor het eerst over 10 000 jaar”. Men realiseert zich echter, dat de kans op een volgende overstroming binnen 100 jaar reeds 1% bedraagt, dus, zeker bij een zo belangrijke veiligheidsmaatregel, geenszins te verwaarlozen is.

Dit klemt te meer, indien men voor de bepaling van de dijkhoogte, die de gewenste overschrijdingskans dient te bezitten, gebruik maakt van een *schatting* in plaats van een *bovengrens* of althans een

waarschijnlijk hoge schatting. Neemt men bijv. bij N.A.P. + 5 m als schatting voor de overschrijdingskans  $1,5 \cdot 10^{-4}$ , dan heeft men, blijkens de figuren 10.0.1 en 11.0.1 geen enkele garantie, dat deze schatting niet aan de lage kant is; is dit echter het geval, dan is, bij aanhouden van N.A.P. + 5 m als richtpunt voor de hoogte bij Hoek van Holland, de kans op overstroming in de eerstvolgende 100 jaar wellicht nog vrij veel hoger dan 1%. Waarden als 5% zijn volgens onze uitkomsten nog mogelijk, zij het minder aannemelijk dan 1%.

Bij deze overwegingen is steeds van lineaire extrapolatie gebruik gemaakt, dus van een voortzetting van het exponentiële karakter der verdeling bij grotere hoogten. Er zijn (niet-statistische) argumenten aangevoerd, op grond waarvan de lijn bij extrapolatie naar lagere overschrijdingskansen zou moeten afbuigen. De beoordeling van deze argumenten valt buiten de competentie van de statisticus. Wel dient er echter op gewezen te worden, dat de thans beschikbare waarnemingspunten (zie bijv. figuur 8.0.1) geen enkele steun aan deze theorie verlenen. De allerhoogste vertonen eerder de neiging naar de andere kant af te buigen, ook al zijn de afwijkingen van rechtlijnigheid niet statistisch aantoonbaar<sup>1)</sup>. Trouwens, ook als de lijn inderdaad bij grotere hoogte naar kleinere overschrijdingskansen gaat afbuigen, dan is er nog geen reden om aan te nemen, dat dit reeds bij N.A.P. + 5 of 6 m merkbaar het geval zou moeten zijn. Dit alles te zamen wijst er op, dat grote voorzichtigheid gewenst is.

Een punt, dat eveneens in deze richting wijst, is, dat de stormvloed van 1953 zoveel hoger was dan de op één na hoogste. Het verschil bedroeg 0,57 m. Dergelijke grote verschillen bij overschrijding van de hoogst waargenomen waarde zijn in overeenstemming met het karakter van de exponentiële verdeling. Deze heeft nl. de eigenschap, dat het genoemde verschil steeds dezelfde kansverdeling bezit, hoe hoog ook de hoogst waargenomen stand moge zijn. Het zou daarom onjuist zijn, te verwachten, dat een stormvloed, die hogere standen geeft dan die van 1953 „wel niet zo veel hoger zal komen dan deze laatste, omdat die al zo hoog was”. Indien de stand van 1953 overschreden wordt, is een overschrijding van opnieuw ongeveer  $\frac{1}{2}$  m of meer geenszins onwaarschijnlijk; de (voorwaardelijke) waarschijnlijkheid dat zulks weer zal geschieden is ongeveer 0,23.

Een uiteindelijke keuze van een bepaalde hoogte als richtpunt kan op grond van de hier gegeven analyse alleen niet tot stand komen. Daarvoor is het nodig, ook economische, technische en wellicht nog andere aspecten in de beschouwingen op te nemen. Econometrische beschouwingen en berekeningen zijn in een afzonderlijke bijdrage vervat (zie Bijdrage II.2).

### 13.0 CONCLUSIE

De baanselectie-waterstanden  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m kunnen beschouwd worden als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met  $\alpha = 2,97 \text{ m}^{-1}$ . De hierbij behorende kanshalverings-, decimerings- en nepereringshoogten zijn resp. 0,234, 0,776 en 0,337 m.

## APPENDIX

### A 1.0 NOTATIE

In Hoek van Holland blijken de hogere H.W.-standen, cumulatief uitgezet op half-logaritmisch papier, voor lange perioden ongeveer op een rechte lijn te liggen [9]. Stelt  $n(h)$  het aantal verwachte overschrijdingen van de hoogte  $h$  per jaar voor, dan wordt dus door de waarnemingen gesuggereerd, dat voor voldoende grote  $h$ :

$$n(h) = ck^{-c'h}, \quad (k > 0) \quad (1)$$

waarin één der parameters  $k$  of  $c'$  nog willekeurig gekozen kan worden.

Daar het nuttig is, de parameters in deze en andere vergelijkingen een aanschouwelijke betekenis te geven, worden de volgende *parameters* ingevoerd<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Indien men bij de aanpassing van een hoogwateroverschrijdingslijn aan de waarnemingen een grotere klasse van verdelingen (nl. de zg. Pearson-verdelingen) als basis neemt, wordt een kromme lijn verkregen, die aanzienlijk naar boven afwijkt (A 6.0).

<sup>2)</sup> Indertijd voorgesteld door VAN DANTZIG.

1.  $a_k$  = het hoogteverschil, waardoor het gemiddelde aantal overschrijdingen  $k$  maal zo klein wordt. Deze grootte wordt dus gedefinieerd door:

$$n(h + a_k) = \frac{1}{k} n(h), \quad (2)$$

voor iedere  $h$  en  $h + a_k$ . In het lineaire gebied van de lijn is  $a_k$  een constante.

Uit (1) en (2), dus bij veronderstelling van rechtlijnigheid, volgt:

$$c' = \frac{1}{a_k}, \quad (3)$$

dus:

$$n(h) = ck - \frac{h}{a_k} \quad (4)$$

2.  $h_k$  = hoogte, die gemiddeld  $\frac{N}{k}$  maal per jaar wordt overschreden, waarbij  $N$  het aantal H.W.'s per jaar voorstelt. Deze grootte wordt dus gedefinieerd door:

$$n(h_k) = \frac{N}{k} \quad (5)$$

en uit (4) en (5) volgt:

$$c = N \cdot k^{\frac{h_k - 1}{a_k}} \quad (6)$$

Vullen wij (6) in (4) in, dan verkrijgen wij:

$$n(h) = Nk - \frac{h - h_k}{a_k} - 1 \quad (k > 0). \quad (7)$$

In deze formule, waarin  $k$  dus nog willekeurig gekozen kan worden, hebben nu alle parameters een aanschouwelijke betekenis en bij iedere gewenste waarde van  $k$  kunnen zij gemakkelijk uit de grafiek van de lijn bepaald worden.

Werkt men niet met het gemiddeld aantal overschrijdingen van  $h$  per jaar, maar met de *kans* op overschrijding bij één waarneming, dan vervalt de factor  $N$  in het rechterlid.

Het grondtal  $k$  kan nu in (7) nog willekeurig gekozen worden. Voor twee verschillende grondtallen  $k$  en  $g$  geldt volgens (7):

$$k - \frac{h - h_k}{a_k} - 1 = g - \frac{h - h_g}{a_g} - 1 \quad (8)$$

voor iedere  $h$  in het lineairiteitsgebied.

Vullen wij hierin  $h = h_k - a_k$  in, dan volgt gemakkelijk:

$$h_k - h_g = a_k - a_g. \quad (9)$$

Invullen van  $h = h_k$  resp.  $h = h_g$  in (8) geeft na enige herleiding de beide ook direct uit elkaar volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= a_g^g \log k \\ a_g &= a_k^k \log g. \end{aligned} \right\} (10)$$

Drie in het bijzonder voor de hand liggende waarden voor het grondtal  $k$  zijn:  $e$  (het grondtal der Napierse logaritmen), 2 en 10. Voor deze drie grondtallen kunnen wij de parameter  $a_k$  de namen „*nepereringshoogte*”, „*halveringshoogte*” resp. „*decimeringshoogte*” geven, waarbij „*hoogte*” in de zin van „*hoogteverschil*” bedoeld is.

Daar veelvuldig slechts een deel van de in een jaar voorkomende waarnemingen wordt beschouwd (bijv. de winterwaarnemingen of de naar bepaalde depressies geselecteerde waarnemingen), gaan we er van uit, dat het aantal waarnemingen in een jaar stochastisch is, d.w.z. dat er een kans  $p_n$  op  $n$  waar-

nemingen in een bepaald jaar bestaat en dat de aantallen voor verschillende jaren onafhankelijk zijn. Als <sup>1)</sup>

$$g(h) = P \{h \geq h\} \quad (11)$$

de kans op overschrijding van het peil  $h$  bij één waarneming voorstelt, dan vinden wij voor  $p(h)$ , de kans op overschrijding van het peil  $h$  in een jaar

$$p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \{1 - g(h)\}^n] p_n, \quad (12)$$

hetgeen voor grote  $h$  benaderd kan worden met

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n \cdot g(h), \quad (13)$$

daar  $\{1 - g(h)\}^n$  in dat geval door  $1 - n g(h)$  vervangen mag worden <sup>2)</sup>. Het verwachte aantal overschrijdingen van het peil  $h$  in een jaar is:

$$n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n g(h) \cdot p_n, \quad (14)$$

zodat we kunnen concluderen:

Het verwachte aantal overschrijdingen van een hoog peil  $h$  in één jaar is gelijk aan de kans op overschrijding van dat peil  $h$  in één jaar.

Het *verwachte* aantal overschrijdingen  $n(h)$  van een peil  $h$  in één jaar kunnen we schatten uit de beschikbare gegevens van 60 à 70 jaar met het *gemiddeld per jaar* opgetreden aantal overschrijdingen van het peil  $h$ , dat we  $f(h)$  zullen noemen.

In de figuren 3.0.1, 7.0.3, 8.0.1 is  $f(h)$  voor verschillende gevallen getekend, met dien verstande, dat bij de *opgetreden* hoogwaterstanden het gemiddeld aantal overschrijdingen is weergegeven. Zo is bijv. in figuur 3.0.1 de stand N.A.P. + 3,28 m *éénmaal* voorgekomen in 69 jaar en *tweemaal* overschreden, daar de standen N.A.P. + 3,28 m en N.A.P. + 3,85 m elk een keer opgetreden zijn. Het gemiddeld aantal overschrijdingen van het peil N.A.P. + 3,28 m per jaar is dus  $2/69 = 0,0290$ . Bij de lagere hoogwaterstanden komen de uitgezette punten zo dicht bijeen te liggen, dat ze door streepjes vervangen zijn.

Alvorens de consequenties van de aanpassing van een rechte lijn aan  $\log f(h)$  te onderzoeken, zullen wij het verband met de logaritisch-normale verdeling bespreken.

## A 2.0 AANPASSING VAN EEN AFGEKNOTTE LOGARITMISCH-NORMALE VERDELING

In de literatuur wordt vaak in problemen als het onze een logaritisch-normale verdeling aan de waarnemingen aangepast. Omdat we ons hier niet interesseren voor de lage hoogwaterstanden, kunnen we de waarnemingen het beste vergelijken met een aan de linkerkant afgeknotte logaritisch-normale verdeling. Aan het einde van dit hoofdstuk zullen wij aantonen, dat een exponentiële verdeling willekeurig dicht benaderd kan worden met een afgeknotte logaritisch-normale verdeling, waaruit we de volgende conclusies kunnen trekken:

Waarnemingen, die verkregen zijn door trekking uit een exponentiële verdeling, kunnen ook afkomstig zijn uit een afgeknotte logaritisch-normale verdeling. Met een eindig aantal waarnemingen kan men nooit de conclusie trekken: „deze waarnemingen zijn wel uit een exponentiële, maar niet uit een afgeknotte logaritisch-normale verdeling afkomstig”. De afgeknotte logaritisch-normale verdeling is *algemener* dan de exponentiële, omdat zij meer parameters bevat, zodat zij altijd *minstens zo goed* aan waarnemingen aangepast kan worden als de exponentiële verdeling. In gevallen, waarin de exponentiële verdeling een *bevredegende* aanpassing geeft, verdient de laatstgenoemde de voorkeur boven de afgeknotte logaritisch-normale verdeling, daar zij veel eenvoudiger te hanteren is.

<sup>1)</sup> Stochastische grootheden worden onderscheiden van waarden, die zij in een steekproef kunnen aannemen, door ze vet te drukken.

Met  $P \{A\}$  geven we de kans op gebeurtenis  $A$  aan.

<sup>2)</sup> De grootste waarde, die  $n$  kan aannemen, is ongeveer 706.

We bewijzen nu de in de eerste alinea gemaakte bewering, die we als volgt preciseren.  
De exponentiële verdeling

$$F(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha h} & \text{voor } h \geq 0 \\ 0 & \text{voor } h < 0 \end{cases} \quad (1)$$

met  $\alpha > 0$ , kan op het interval  $0 \leq h \leq 1$  willekeurig dicht benaderd worden met een afgeknotte logaritmisch-normale verdeling, gegeven door

$$G(h) = \begin{cases} \int_{l(0)}^{l(h)} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left( \int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} & \text{als } h \geq 0, \\ 0 & \text{als } h < 0, \end{cases} \quad (2)$$

waarin  $l(h) = \frac{\log \mu (h + a)}{\sigma}$ , en  $a$ ,  $\mu$  en  $\sigma$  positieve constanten zijn.

Hiermede wordt bedoeld, dat bij een gekozen  $\varepsilon > 0$  de parameters  $a$ ,  $\mu$  en  $\sigma$  zo gekozen kunnen worden, dat

$$|F(h) - G(h)| < \varepsilon$$

is voor  $0 \leq h \leq 1$ .

Als we bij gegeven  $a$  en  $\alpha > 0$  met  $G_a(h)$  die functie  $G(h)$  aangeven, waarvoor  $a\sigma^2 = 1$  en  $\mu a = e^\alpha$  is, dan is het voldoende te bewijzen, dat

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \log \{1 - G_a(h)\} = -\alpha h \quad \text{voor } 0 \leq h \leq 1. \quad (3)$$

Nu is voor  $x > 0$ :

$$xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv$$

en

$$xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{1}{x^2},$$

zodat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1. \quad (4)$$

Passen wij dit toe op  $G_a(h)$ , dan blijkt inderdaad, dat voor alle  $h$ , die voldoen aan  $0 \leq h \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \log \{1 - G_a(h)\} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left\{ \int_{l(h)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left( \int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{\log \mu a}{\log(\mu a + \mu h)} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (\log(\mu a + \mu h))^2 - (\log \mu a)^2 \right\} \right] \right\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\log \mu a + \log \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{\sigma} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\log \mu a}{\sigma} \right\}^2 \right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{h \log \mu a}{a\sigma^2} = -\alpha h. \end{aligned} \quad (5)$$



Ter illustratie is figuur A 2.0.1 toegevoegd. Hierin is uitgezet op half-logaritmisch papier:

$$(a = \infty) \quad 1 - F(h) = e^{-\alpha h}, \text{ voor } h \geq 0,$$

met  $\alpha = 3$  en de benaderingen

$$(a = 1) \quad 1 - G_1(h),$$

$$(a = 10) \quad 1 - G_{10}(h),$$

$$(a = 100) \quad 1 - G_{100}(h).$$

Voor het tekenen van de figuur werd van tabel A 2.0.1 gebruik gemaakt.

Tabel A 2.0.1

Gegevens, gebruikt voor het vergelijken van een exponentiële verdeling met een logaritmisch-normale verdeling

$h$	$a = \infty$	$a = 1$	$a = 10$	$a = 100$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,2231	0,2447	0,2250	0,2238
1,0	0,04979	0,0820	0,0531	0,0501
1,5	0,01111	0,0333	0,0131	0,01130
2,0	0,002479	0,0154	0,00336	0,00256
2,5	0,0005531	0,00782	0,000899	0,000584
3,0	0,0001234	0,00427	0,000249	0,000133
3,5	0,00002754	0,00247	0,000071	0,000031

### A 3.0 AANPASSING EXPONENTIËLE VERDELING

Indien we een kromme

$$n(h) = Ne^{-\frac{h-h_e}{a_e}} - 1 \quad (1)$$

aan het in Hoek van Holland gevonden gemiddelde aantal overschrijdingen van het peil  $h$  per jaar  $f(h)$  willen aanpassen, kunnen we dit als volgt doen. We beperken ons tot de waarnemingen, die het peil  $b$  overschrijden, waarbij we  $b$  kiezen in het gebied, waarin we volgens figuur 3.0.1 met een rechte lijn te doen hebben;  $f(h)$  wordt dus alleen voor  $h \geq b$  aan de waarnemingen aangepast. Als  $n$  het aantal waarnemingen  $\geq b$  in  $m$  jaar is, dan schatten we  $n(b)$  met <sup>1)</sup>

$$\hat{n}(b) = \frac{n}{m} \quad (2)$$

en als de gevonden waarnemingen  $h_1, \dots, h_n$  zijn (met  $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n \geq b$ ), dan wordt  $a_e$  geschat door

$$\hat{a}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - b). \quad (3)$$

Daar de invloed van de keuze van  $\hat{n}(b)$  gering is, hebben we deze zo eenvoudig mogelijk gehouden. Voor  $\hat{a}_e$  is de aannemelijkste schatting van de parameter van een exponentiële verdeling met gegeven beginpunt genomen.

Tabel A 3.0.1 bevat de schattingen, die op de zojuist voor figuur 3.0.1 besproken wijze werden verkregen <sup>2)</sup>. De in drie decimalen opgegeven waarde voor  $\hat{a}_e$  behoren bij de in de grafieken getekende lijnen. De onzekerheid in deze schattingen die ten eerste blijkt uit de verschillen, die bij verschillende waarden van  $b$  verkregen worden, en ten tweede uit de wijde betrouwbaarheidsintervallen van tabel 11.0.1 ontnemt echter aan de derde decimaal iedere praktische betekenis, behalve voor de figuren.

<sup>1)</sup> Schattingen van parameters geven we met  $\hat{n}$  aan.

<sup>2)</sup> Er werd nog een continuïteitscorrectie toegepast.

Tabel A 3.0.1  
Schattingen voor  $n(b)$  en  $a_e$  bij verschillende  $b$

	$b$ (in m)	$\hat{n}(b)$	$\hat{a}_e$ (in m)
figuur 3.0.1	1,10	126	<b>1,212</b>
figuur 7.0.1	1,30	47,2	0,231
	1,50	19,7	0,236
	1,70	8,41	0,243
	1,90	3,62	0,255
	2,10	1,65	0,255
figuur 7.0.3 (links)	0,70	130	<b>0,362</b>
	0,90	86,2	<b>0,296</b>
	1,10	46,6	0,270
	1,30	22,3	0,269
	1,50	10,9	0,260
	1,70	4,93	0,269
	1,90	2,29	0,280
figuur 7.0.3 (rechts)	1,10	79,4	<b>0,178</b>
	1,30	24,8	0,197
	1,50	8,86	0,208
	1,70	3,48	0,207
figuur 8.0.1 figuur 8.0.2	1,90	1,33	0,211
	1,30	4,97	<b>0,500</b>
	1,40	4,65	0,430
	1,50	4,08	0,383
	1,60	3,37	0,354
	1,70	2,64	0,337
	1,80	2,05	0,321
	1,90	1,49	0,325
	2,00	1,13	0,315
	2,10	0,841	0,304
	2,20	0,524	0,364
	2,30	0,381	0,387
	2,40	0,286	0,394
2,50	0,270	0,315	
2,60	0,206	0,304	

#### A 4.0 TOETSING DER AANPASSING

Een gangbare toets voor het beoordelen van de aanpassing van een theoretische verdeling aan een steekproefverdeling is de  $\chi^2$ -toets. Bij toepassing op een voldoende groot aantal waarnemingen geeft deze betrouwbare resultaten. In tabel A 3.0.1 zijn de nepereringshoogten, die behoren bij aangepaste krommen, welke bij toepassing van deze toets met een onbetrouwbaarheid van 5% verworpen moeten worden, d.w.z. waarbij de aanpassing slecht is, door cursivering aangegeven. Vet gedrukt zijn die gevallen, waarbij de aanpassing zéér slecht is. Uit de gevonden waarden blijkt, dat de aanpassing zéér slecht is voor lage beginpeilen, hetgeen te verwachten was, daar in deze gevallen de *lage* hoogwaterstanden in onze figuren ten duidelijkste niet op een rechte lijn liggen. Daarentegen kunnen de gevonden waarnemingen (althans volgens de nu toegepaste toets) vanaf voldoende hoge peilen zeer wel uit exponentiële verdelingen afkomstig zijn.

Echter is bekend, dat de waarnemingen, in de figuren 3.0.1 en 7.0.3 uitgezet, géén homogeen materiaal vormen en bovendien sterk afhankelijk zijn (hoogwaterstanden, die direct na elkaar bereikt worden, hebben een gemeenschappelijke oorzaak). Dit is in veel mindere mate het geval met de waarnemingen, die in figuur 8.0.1 en de daarop volgende figuren gebruikt zijn.

## A 5.0 DE SELECTIE VOLGENS VAN DER HAM

Een gevaarlijk hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus de depressies in plaats van de afzonderlijke H.W.'s, dan komen wij dichter bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één H.W. en het is juist daardoor, dat er afhankelijkheden tussen op elkaar volgende H.W.'s kunnen ontstaan. Deze zullen dus grotendeels geëlimineerd worden, indien wij met één waarneming per depressie volstaan, en daar het gevaar, dat een depressie voor onze dijken geeft, vrij nauwkeurig weergegeven kan worden door de hoogste waterstand, die tijdens die depressie bereikt wordt, ligt het voor de hand ook de hoogwateroverschrijdingslijn te beschouwen, die verkregen wordt uit deze *hoogste standen per depressie*.

Zelfs nu is het waarnemingsmateriaal nog inhomogeen.

Daarom werden in Bijdrage I van het K.N.M.I. door VAN DER HAM tevens met het oog op onderzoekingen van het K.N.M.I. over de stormramp, uit de lijst van depressies die depressies geselecteerd, die een baan volgden, gelegen in een bepaalde strook boven de Noordzee, en die daarom op meteorologische gronden als bijzonder gevaarlijk voor ons land beschouwd kunnen worden. Een uitvoerige beschrijving van deze groep van depressies van de hand van VAN DER HAM vindt men hieronder. Wij volstaan hier met de opmerking, dat hij zich beperkte tot depressies, waarbij een opzet van minstens 50 cm geconstateerd werd, enerzijds omdat lichte depressies moeilijk te herkennen en van elkaar te onderscheiden zijn en anderzijds omdat op deze wijze een aanzienlijke werkbesparing verkregen werd, terwijl bovendien de depressies met een lage opzet ook lage H.W.'s geven, die voor de extrapolatie van hoogwateroverschrijdingslijnen niet van belang zijn. Voortbouwend op deze meteorologische gedachtengang van het K.N.M.I. ligt het voor de hand, die *hoogwateroverschrijdingslijn* te beschouwen, die verkregen wordt uit de *hoogste standen per depressie* voor deze groep van *gevaarlijke depressies*. Immers op die wijze wordt dan gebruik gemaakt van meteorologische ervaring omtrent het ontstaan van hoge waterstanden. Het resultaat van deze selectie is in figuur 8.0.1 getekend voor de wintermaanden, d.w.z. november, december en januari.

Hieronder volgt een korte beschrijving van de hand van VAN DER HAM van de op de waterstanden te Hoek van Holland toegepaste baansselectiemethode.

Ten einde de waterstandgegevens meer homogeen te maken, werd door het K.N.M.I. de volgende selectiemethode toegepast.

Nagegaan werd langs welke banen de depressies zich bewogen hadden, die in de periode van 1898 tot 1953 een hoog- of laagwateropzet van meer dan 160 cm te Hellevoetsluis veroorzaakt hadden. Onder de baan van een depressie wordt hier verstaan de baan van het centrum van het lagedrukgebied.

Deze depressiebanen (47 in getal) bleken, op één uitzondering na, alle te gaan door het vak, dat als volgt begrensd is:

op 10° W.L. tussen 51° N.B. en 62° N.B.;

op 0° tussen 52° N.B. en 61° N.B.;

op 7° E.L. tussen 52° N.B. en 61° N.B.

De waterstandgegevens van Hoek van Holland werden nu eerst gecombineerd tot opwaai-perioden, waarbij als één opwaaiperiode werd beschouwd de periode, waarin de opwaaiing aan één en dezelfde depressie te danken was. Alleen de opwaaiperioden, waarin de maximale opzet te Hoek van Holland meer dan 50 cm bedroeg, werden daarbij beschouwd.

De selectie bestond nu uiteindelijk hierin, dat voor elke opwaaiperiode werd nagegaan of de bijbehorende depressie een baan gevolgd had, die al of niet binnen het vak gelegen was, dat door de eerdergenoemde „hoofddepressies” was bepaald.

De opwaaiperioden met een depressiebaan, die geheel of gedeeltelijk buiten het genoemde vak viel, werden van de lijst geschrapt.

## A 6.0 NADERE BESCHOUWING DER GESELECTEERDE WAARNEMINGEN

Nu we een zo homogeen mogelijk materiaal verkregen hebben, willen we nogmaals onderzoeken, of onze waarnemingen als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling beschouwd kunnen worden.

We hebben al gezien (A 4.0), dat volgens de  $\chi^2$ -toets de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,50 m als zodanig beschouwd mogen worden, maar daar we ons voor extrapolatie interesseren, zegt het resultaat van de  $\chi^2$ -toets niet veel: alleen zeer grote afwijkingen van de exponentialiteit komen bij deze toets te voorschijn. We kunnen echter, aannemend, dat de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling zijn, onderzoeken of deze onderstelling tot onwaarschijnlijke afwijkingen van de hoge waarnemingen t.o.v. de lagere aanleiding geeft.

a) Als  $h_1, \dots, h_n$  (geordende) onderling onafhankelijke waarnemingen zijn uit de exponentiële verdeling:

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b, \end{cases}$$

met  $b \leq h_n \leq h_{n-1} \leq \dots \leq h_1$ , dan vormen  $x_1, \dots, x_n$ , waarbij  $x_i = (h_i - h_{i+1})$ , eveneens een steekproef van onderling onafhankelijke waarnemingen uit  $F_b(h)$ .

Men kan nu, bij gegeven  $k$ , toetsen of het quotiënt

$$B = \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_{k+1} + \dots + x_n} = \frac{h_1 + \dots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \dots + h_n - nb} \quad (1)$$

ongewoon groot of klein is, d.w.z. of de som van de verschillen van de  $k$  hoogste waarnemingen te sterk afwijkt van wat op grond van alle  $n$  waarnemingen een redelijke waarde genoemd kan worden.

De stochastische grootheid

$$B = \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_n}$$

heeft een  $B_{k, n-k}$ -verdeling d.w.z.:

$$P\{B \leq B\} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^B x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} dx. \quad (2)$$

Toepassing op de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m brengt geen bijzondere kenmerken van de hoogste standen aan het licht, zoals uit tabel A 6.0.1 blijkt.

b) Indien we alleen veronderstellen, dat de waarnemingen uit figuur 8.0.1 onderling onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling vormen, kunnen we met behulp van formule (11) van MILLER [8] een bovengrens aangeven voor de onbekende verdelingsfunctie.

In figuur A 6.0.1 zijn opnieuw de waarnemingen van figuur 8.0.1 uitgezet. Het theoretisch verwachte aantal overschrijdingen per jaar komt, behoudens een kans van 10%, niet boven de getekende trapfunctie uit, die gegeven wordt door

$$5,27 \left( \frac{i}{n} + 0,0584 \right) \text{ voor } h_{i+1} < h \leq h_i \quad (3)$$

(waarin  $h_n \leq \dots \leq h_1$  de gevonden  $n = 332$  waarnemingen voorstellen) en alleen voor  $h \geq$  N.A.P. + 2,00 m is ingetekend.

Uit de figuur blijkt duidelijk, dat deze begrenzing vrijwel waardeloos is voor de extrapolatie (dit wijst er opnieuw op, dat extrapolatie slechts onder zeer veel voorbehoud mogelijk is).

Tabel A 6.0.1

Uitkomsten van een toetsing der hoogste waarnemingen met de  $B$ -verdeling

$n = 166$	$k$	$B$	$P\{B \leq B\}$
	4	0,0231	0,53
	8	0,0542	0,68
	16	0,0942	0,49
	32	0,2117	0,75

c) We kunnen onderstellen, dat de waarnemingen uit een interval, bijv. de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m en  $<$  N.A.P. + 2,45 m, de parameter  $\alpha$  van de exponentiële verdeling nauwkeurig bepalen en toetsen of de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 2,45 m uit deze exponentiële verdeling afkomstig kunnen zijn met de toets van Kolmogorov-Smirnov met behulp van de tabellen van MILLER [8].

De parameter  $\alpha$  van de exponentiële verdeling

$$F_{b_1}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_1)} & h \geq b_1 \\ 0 & h < b_1 \end{cases}$$

kan geschat worden uit de  $n-l$  waarnemingen  $h_n, \dots, h_{l+1}$ , waarvoor geldt  $b_1 \leq h_n \leq \dots \leq h_{l+1} < b_2$  met behulp van de aannemelijkste schatting (zie [2]):

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{indien } \sum_{i=1}^{n-l} \frac{h_i - b_1}{n-l} \geq \frac{b_2 - b_1}{2} \\ \left( \sum_{i=1}^{n-l} \left( \frac{h_i - b_1}{n-l} + \frac{(b_2 - b_1) e^{-\hat{\alpha}(b_2 - b_1)}}{1 - e^{-\hat{\alpha}(b_2 - b_1)}} \right)^{-1} \right)^{-1} & \text{indien } 0 < \sum_{i=1}^{n-l} \frac{h_i - b_1}{n-l} < \frac{b_2 - b_1}{2} \end{cases} \quad (4)$$

(Hier wordt  $\alpha$  dus geschat onder de voorwaarde, dat er  $n-l$  waarnemingen  $< b_2$  zijn).

De waarnemingen  $h_1, \dots, h_l$  ( $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_l \geq b_2$ ) vormen een geordende steekproef van onafhankelijke waarnemingen uit:

$$\begin{aligned} F_{b_2}(h) &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_2)} & h \geq b_2, \\ 0 & h < b_2. \end{cases} \\ \text{Zij: } s_i(h) &= \begin{cases} 0 & b_2 \leq h_i \\ 1 - \frac{i-1}{l} & h_l < h \leq h_{i-1} \\ 1 & h > h_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

dan kan uit de tabel van MILLER bij gegeven  $\theta$  en  $l$  een  $\varepsilon$  bepaald worden, zo dat:

$$P \{ \max [F_{b_2}(h) - s_i(h)] \geq \varepsilon \} = \theta. \quad (6)$$

Nu is voor  $h \geq b_2$ :

$$f(h) = \frac{l}{m} \{1 - s_i(h)\}, \quad (7)$$

waarin  $m$  het beschouwde aantal jaren aangeeft, zodat met

$$z(h) = \frac{l}{m} \{1 - F_{b_2}(h) + \varepsilon\} \quad (8)$$

een functie gevonden is, waarvoor:

$$P \{ \max_{h \geq b_2} [f(h) - z(h)] \geq 0 \} = \theta. \quad (9)$$

We vinden dus een grens  $z(h)$ , die behoudens een kans  $\theta$  niet door  $f(h)$  wordt overschreden.

Hiervoor moeten we echter  $F_{b_2}(h)$  kennen; daar we de juiste waarde van  $\alpha$  niet kennen, nemen we in plaats daarvan  $\hat{\alpha}$ , daar we mogen verwachten, dat dit weinig invloed zal hebben.

Op grond van de in 63 jaar gevonden 166 waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,70 m, waarvan er 17  $\geq$  N.A.P. + 2,45 m zijn, vinden we  $\hat{\alpha} = 2,92 \text{ m}^{-1}$  en bij  $\theta = 10\%$  een  $\varepsilon = 0,25039$ .

Voor dit geval is  $z(h)$  getekend in figuur A 6.0.2. Voor  $b_1 = \text{N.A.P.} + 1,80 \text{ m}$  en  $b_2 = \text{N.A.P.} + 2,55 \text{ m}$  resp.  $b_1 = \text{N.A.P.} + 1,70 \text{ m}$  en  $b_2 = \text{N.A.P.} + 2,35 \text{ m}$  werden soortgelijke figuren gevonden, die niet in deze bijdrage zijn opgenomen. Tevens werden in figuur A 6.0.2 de punten van de baanselectielijn (van figuur 8.0.1 dus) en de schattingen van  $n(h)$  (met  $\hat{\alpha} = 2,92 \text{ m}^{-1}$ ) bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m resp. beginpunt N.A.P. + 2,45 m getekend. Uit deze figuren blijkt, dat de hoge waterstanden slechts weinig van de „theoretische” verdeling afwijken.

We kunnen nog opmerken, dat met de gevonden schatting  $\hat{a} = 2,92 \text{ m}^{-1}$ , indien er (zoals hier) 13 waarnemingen  $\geq \text{N.A.P.} + 2,55 \text{ m}$  zijn, de kans, dat de grootste van die waarnemingen  $\geq \text{N.A.P.} + 3,85 \text{ m}$  is 0,16 bedraagt en dat deze hoogste waarneming behoudens een kans  $0,05 \leq \text{N.A.P.} + 4,22 \text{ m}$  is.

d) In figuur A 6.0.3 is aan alle geselecteerde waarnemingen een Pearsonkromme aangepast. De methode van aanpassen wordt door ELDERTON [3] uitvoerig beschreven. Voor het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar werd gevonden:

$$\hat{n}(h) = \begin{cases} 5,27 & \text{voor } h < 0,523 \\ 5,27 \int_0^g \frac{e^{-z} \cdot z^\delta}{\delta!} dz & \text{voor } h \geq 0,523, \end{cases} \quad (10)$$

met  $g = \frac{14,5}{h - 0,523}$  en  $\delta = 11,74$ .

Hoewel de methode is verouderd, is het toch interessant haar met de andere aanpassingen te vergelijken. Bij het aanpassen van een Pearsonverdeling wordt namelijk géén rekening gehouden met de extrapolatie, die uitgevoerd moet worden, doch alleen die kromme uit een gegeven klasse gezocht, die in zekere zin het beste bij de waarnemingen past. Bij het niveau van  $\text{N.A.P.} + 5,00 \text{ m}$  wordt nu een kans  $2,70 \cdot 10^{-4}$  gevonden en bij een kans  $10^{-4}$  behoort het peil  $\text{N.A.P.} + 5,47 \text{ m}$ . Wenst men niet met een kromme, die naar boven afbuigt, te extrapoleren, dan kan aan de getekende kromme de raaklijn in het buigpunt (dat bij  $(\text{N.A.P.} + 2,41 \text{ m}; 3,06 \cdot 10^{-1})$  valt) getrokken worden. Behalve het raakpunt ligt het punt, dat bepaald wordt door het peil  $\text{N.A.P.} + 4,52 \text{ m}$  en  $3,56 \cdot 10^{-4}$  op deze raaklijn. Nu behoort bij het niveau van  $\text{N.A.P.} + 5,00 \text{ m}$  een kans  $7,79 \cdot 10^{-5}$  en bij een kans  $10^{-4}$  het peil  $\text{N.A.P.} + 4,92 \text{ m}$ .

Al deze beschouwingen voeren ons tot de conclusie:

De baanselectie-waterstanden  $\geq \text{N.A.P.} + 1,70 \text{ m}$  kunnen beschouwd worden als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met  $\alpha = 2,92 \text{ m}^{-1}$ . De hierbij behorende halverings-, decimerings- en nepereringshoogten zijn resp. 0,234, 0,776 en 0,337 m.

## A 7.0 BETROUWBAARHEIDSINTERVALLEN

Als wij onderstellen, dat de baanselectiewaterstanden,  $h_1, \dots, h_n$  (alle  $\geq b$ ) uit een exponentiële verdeling

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b \end{cases}$$

afkomstig zijn, dan kunnen we een getal  $\tau_\theta$  berekenen, waarvoor geldt:

$$P \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\theta \right\} = \theta, \quad (1)$$

op grond van

$$P \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\theta \right\} = \int_0^{\tau_\theta} \frac{n^n t^{n-1} e^{-nt}}{(n-1)!} dt = \theta, \quad (2)$$

of

$$\tau_\theta = \frac{\chi_{2n}^2(1-\theta)}{2n}, \quad (3)$$

waar  $\chi_{2n}^2(1-\theta)$  die waarde voorstelt, die bij een  $\chi^2$ -verdeling met  $2n$  vrijheidsgraden een overschrijdingskans  $1-\theta$  heeft.

Nu geldt tevens  $P \left\{ \alpha \leq \frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} \right\} = \theta$ , zodat dus  $\alpha > \frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)}$  is, behoudens een kans  $\theta$ , waarmee een betrouwbaarheidsondergrens voor  $\alpha$  is gevonden.

Bovendien is bij  $h > b$ :

$$P \left\{ \exp [-\alpha (h - b)] \geq \exp \left[ -\frac{n\tau\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} \right] \right\} = \theta,$$

zodat, met  $\exp [-\alpha (h - b)] < \exp \left[ -\frac{n\tau\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} (h - b) \right]$ ,

behoudens een kans  $\theta$ , een betrouwbaarheidsbovengrens gevonden is voor de overschrijdingskans van het niveau  $h$  bij een individuele waarneming.

Nu is dus ( $m$  is het beschouwde aantal jaren):

$$\frac{n}{m} \cdot \exp \left[ -\frac{n\tau\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} (h - b) \right], \quad (4)$$

behoudens een kans  $\theta$ , een bovengrens voor het verwachte aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$  of – wat immers voor voldoende grote  $h$  hetzelfde is – voor de kans op overschrijding van het peil  $h$  in één jaar.

Beschouwen we een vaste kans op overschrijding van het peil  $h$  bij één waarneming, dus bijv.

$$e^{-\alpha(h-b)} = p, \text{ dan vinden we hieruit } h = b - \frac{\log p}{\alpha}.$$

Nu is:

$$P \left\{ b - \frac{\log p}{\alpha} \geq b - \frac{\sum_{i=1}^n (h_i - b)}{n\tau\theta} \cdot \log p \right\} = \theta,$$

zodat:

$$b - \frac{\sum_{i=1}^n (h_i - b)}{n\tau\theta} \cdot \log p,$$

behoudens een kans  $\theta$ , een bovengrens is voor het peil  $h$ , dat bij een waarneming met kans  $p$  overschreden wordt.

Evenzo is

$$b - \frac{n\tau\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} \cdot \log \left( \frac{m}{n} p \right), \quad (5)$$

behoudens een kans  $\theta$ , een bovengrens van het peil, dat door het jaarmaximum der hoogwaterstanden met kans  $p$  overschreden wordt.

De krommen in figuur 11.0.1 geven in verticale richting gelezen de betrouwbaarheidsbovengrenzen van  $\theta = 5\%$  en  $\theta = 1\%$  van de kans op overschrijding van het peil  $h$  in één jaar en, in horizontale richting gelezen, bij een kans  $p$  de betrouwbaarheidsbovengrenzen (met  $\theta = 5\%$  en  $\theta = 1\%$ ) voor het peil, dat door het jaarmaximum met kans  $p$  overschreden wordt.

## A 8.0 DE METHODE VAN GUMBEL

De verdelingsfunctie van de grootste van  $N$  onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele kan onder bepaalde voorwaarden goed met een dubbel-exponentiële verdelingsfunctie benaderd worden.

Bij het onderzoek van de jaarmaxima der afvoeren van rivieren is gebleken, dat, hoewel we hier met maxima van afhankelijke grootheden te doen hebben, deze maxima toch vaak ondersteld kunnen

worden onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling te zijn en dat dus de verdelingsfunctie

$$H(h) = e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \quad (1)$$

een goede benadering voor de werkelijke verdelingsfunctie is.

We kunnen nu  $H(h)$  gebruiken voor het doen van de voorspellingen, nadat we  $\beta$  en  $\gamma$  hebben geschat uit de beschikbare gegevens. Met behulp van het door GUMBEL ontworpen waarschijnlijkheidspapier (Gumbelpapier) kunnen we onderzoeken of de jaarmaxima der hoogwaterstanden, die in Hoek van Holland gevonden zijn, ook beschouwd kunnen worden als onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling.

De waargenomen standen zijn als volgt uitgezet:

Zijn  $h_1, \dots, h_m$  ( $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_m$ ) de waargenomen standen, dan wordt eerst  $(i-0,3)/(m+0,4)$  berekend (voor  $i = 1, 2, \dots, m$ ) en vervolgens worden de punten  $((i-0,3)/(m+0,4); h_{m-i+1})$  op het Gumbelpapier uitgezet,  $(i-0,3)/(m+0,4)$  op de horizontale (niet lineaire) schaal en  $h_{m-i+1}$  op de verticale schaal. In plaats van  $(i-0,3)/(m+0,4)$  kan ook  $i/(m+1)$  gebruikt worden of men kan de methode van GUMBEL zelf volgen.

Wij geven aan  $(i-0,3)/(m+0,4)$  de voorkeur, daar hierdoor, in geval van werkelijke onafhankelijke waarnemingen uit een dubbel-exponentiële verdeling ieder uitgezet punt een kans  $\frac{1}{2}$  heeft om boven of onder de theoretische kromme te liggen.

Deze methode van uitzetten wordt uitvoerig beschreven in [1] en werd ook toegepast in de figuren 8.0.1, 8.0.2 en 10.0.1.

De jaarmaxima liggen, zoals uit figuur 4.0.1 blijkt, inderdaad bij goede benadering op een rechte lijn.

Daar recht boven ieder punt  $y$  van de *lineaire* horizontale schaal het punt  $e^{-e^{-y}}$  op de *niet-lineaire* horizontale schaal staat, wordt het lineaire verband der uitgezette punten gegeven door:

$$y = \beta(h-\gamma).$$

Voor grote  $y$  (d.w.z. voor grote  $h$ , daar  $\beta > 0$ ) bestaat er vrijwel geen verschil tussen

$$e^{-e^{-y}} = 1 - e^{-y} + \frac{e^{-2y}}{2!} - \dots \quad \text{en} \quad 1 - e^{-y}$$

zoals uit tabel A 8.0.1 blijkt.

Tabel A 8.0.1  
Vergelijking van de functies  $1 - e^{-y}$  en  $e^{-e^{-y}}$

$y$	$1 - e^{-y}$	$e^{-e^{-y}}$
0	0,000000	0,367879
1	0,632121	0,692201
2	0,864665	0,873423
3	0,950213	0,951432
4	0,981684	0,981851
5	0,993262	0,993285
6	0,997521	0,997524
7	0,999088	0,999089

Dit betekent, dat voor grote  $h$  de kans op overschrijding van het peil  $h$  in één jaar door  $1 - e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \approx e^{-\beta(h-\gamma)}$  gegeven wordt, zodat de op het Gumbelpapier gevonden helling  $\beta$  moet overeenstemmen met de helling  $\alpha$  van  $n(h)$  op half-logaritmisch papier (d.i. voor grote  $h$  eveneens de kans op overschrijding van het peil  $h$  in één jaar).

Uit het bovenstaande staatje blijkt, dat we voor  $y \geq 4$  het Gumpelpapier als half-logaritmisch papier kunnen beschouwen. De in de figuren 7.0.1 en 8.0.2 getrokken lijnen kunnen voor  $y \geq 4$  dus zonder meer overgenomen worden op het Gumbelpapier, door twee punten over te nemen en hun hellingen vergeleken worden met de helling van de Gumbellijn. Hierbij blijkt duidelijk (zie de figuren 7.0.2 en 9.0.1), dat de helling van de lijn uit figuur 7.0.1 slecht en die van de lijn uit figuur 8.0.2 goed bij die van de op het Gumbelpapier getekende punten past.



## A 9.0 TABELLEN DER WAARNEMINGEN; TOELICHTING OP DE FIGUREN

In dit hoofdstuk wordt nogmaals van alle figuren van deze bijdrage een opsomming gegeven en aangegeven, hoe zij verkregen zijn. Zij zijn gebaseerd op de volgende vier tabellen.

Tabel A 9.0.1

Aantal overschrijdingen van het aangegeven peil in de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) en de splitsing daarvan in overschrijdingen in de wintermaanden (januari, november en december) en de overige maanden van het jaar

Aantal overschrijdingen				Aantal overschrijdingen			
H.W. in m + N.A.P.	Jaar	Wintermaanden	Overige maanden	H.W. in m + N.A.P.	Jaar	Wintermaanden	Overige maanden
3,84	1	1	0	1,98	181	119	62
3,28	2	2	0	1,96	196	130	66
3,00	4	4	0	1,94	215	141	74
2,96	7	6	1	1,92	226	147	79
2,76	8	6	2	1,90	250	158	92
2,74	9	7	2	1,88	272	171	101
2,70	11	8	3	1,86	287	179	108
2,68	14	10	4	1,84	316	198	118
2,66	16	12	4	1,82	343	214	129
2,64	18	13	5	1,80	377	234	143
2,62	21	16	5	1,78	406	247	159
2,56	22	16	6	1,76	442	268	174
2,54	23	17	6	1,74	483	288	195
2,52	27	20	7	1,72	525	306	219
2,50	28	21	7	1,70	580	340	240
2,48	28	21	7	1,68	630	371	259
2,46	29	22	7	1,66	676	401	275
2,44	30	23	7	1,64	737	428	309
2,42	31	23	8	1,62	803	459	344
2,40	34	24	10	1,60	877	507	370
2,38	37	26	11	1,58	952	552	400
2,36	40	28	12	1,56	1034	594	440
2,34	40	28	12	1,54	1129	635	494
2,32	46	32	14	1,52	1233	690	543
2,30	49	33	16	1,50	1362	751	611
2,28	53	34	19	1,48	1487	802	685
2,26	54	35	19	1,46	1600	857	743
2,24	59	40	19	1,44	1749	926	823
2,22	64	44	20	1,42	1894	997	897
2,20	70	48	22	1,40	2109	1088	1021
2,18	76	54	22	1,38	2281	1156	1125
2,16	82	57	25	1,36	2449	1232	1217
2,14	92	64	28	1,34	2706	1338	1368
2,12	103	74	29	1,32	2936	1424	1512
2,10	114	82	32	1,30	3255	1541	1714
2,08	126	89	37	1,28	3550	1659	1891
2,06	132	92	40	1,26	3854	1766	2088
2,04	146	97	49	1,24	4295	1932	2363
2,02	155	103	52	1,22	4715	2069	2646
2,00	169	114	55	1,20	5267	2239	3028

De aangegeven waterpeilen klimmen met 0,02 m; van N.A.P. + 1,20 m tot N.A.P. + 2,56 m zijn zij alle aangegeven, daarboven alleen de hoogste peilen, die een bepaald aantal keren werden overschreden. Het jaarpeil blijkt hier N.A.P. + 2,20 m te zijn en het grenspeil N.A.P. + 2,40 m. Uit de nauwkeuriger tabel A 9.0.4 blijkt dit laatste N.A.P. + 2,39 m te zijn.

Tabel A 9.0.2  
Jaarmaxima der hoogwaterstanden van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar)

Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.
21-11-1888	1,84	30- 9-1911	2,41	15-10-1934	1,87
9- 2-1889	2,76	11-11-1912	2,62	25- 1-1935	2,12
2-10-1890	2,12	4-12-1913	1,91	1-12-1936	2,74
10-12-1891	1,90	11-11-1914	2,14	15- 3-1937	1,79
3- 1-1892	1,96	16- 1-1915	2,12	29- 1-1938	2,36
23-11-1893	1,98	13- 1-1916	3,00	27-11-1939	2,08
22-12-1894	3,28	2-12-1917	2,54	6-12-1940	2,65
7-12-1895	2,68	23-12-1918	2,02	7-12-1941	2,10
16- 1-1896	2,12	19-12-1919	2,39	29-12-1942	2,20
29-11-1897	2,68	4-12-1920	2,20	7- 4-1943	2,68
3- 2-1898	2,28	6-11-1921	2,63	26- 1-1944	2,67
13- 1-1899	2,26	6-12-1922	2,25	19- 1-1945	2,46
22-12-1900	1,85	19-12-1923	2,10	23- 2-1946	2,56
28- 1-1901	2,21	6- 2-1924	1,95	26-11-1947	2,18
26- 1-1902	2,38	28-11-1925	2,09	23-10-1948	2,10
22-11-1903	2,37	10-10-1926	2,40	1- 3-1949	2,70
30-12-1904	2,96	12- 9-1927	1,69	13-11-1950	2,12
7- 1-1905	2,50	26-11-1928	2,96	29-11-1951	2,28
12- 3-1906	2,97	12-12-1929	2,22	7-11-1952	2,12
21- 2-1907	2,28	23-11-1930	2,53	1- 2-1953	3,85
23-11-1908	2,66	17- 1-1931	2,33	23-12-1954	3,00
5- 2-1909	2,10	28-11-1932	2,33	13- 1-1955	2,10
1-11-1910	1,94	26-10-1933	1,98	18- 1-1956	2,15

Tabel A 9.0.3  
Hoogwaterstanden hoger dan N.A.P. + 2,20 m van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar)

Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.
1888	geen	13- 1-1916	3,00	4-12-1936	2,24
9- 2-1889	2,76	25-11-1917	2,32 <sup>1)</sup>	29- 1-1938	2,36
22-12-1894	3,28	26-11-1917	2,44	3- 4-1938	2,21
23- 1-1895	2,62	2-12-1917	2,24 <sup>1)</sup>	6-12-1940	2,65
6-12-1895	2,30 <sup>1)</sup>	2-12-1917	2,54	29-12-1942	2,20
6-12-1895	2,40 <sup>1)</sup>	19-12-1919	2,39	7- 4-1943	2,68
7-12-1895	2,68	4-12-1920	2,20	8- 4-1943	2,20 <sup>1)</sup>
19- 6-1897	2,52	18- 1-1921	2,25	26- 1-1944	2,67
29-11-1897	2,68	1-11-1921	2,22	4- 2-1944	2,38
3- 2-1898	2,28	6-11-1921	2,63	13- 3-1944	2,30
13- 1-1899	2,26	31-12-1921	2,22	19- 1-1945	2,46
28- 1-1901	2,21	3- 1-1922	2,20	20- 2-1946	2,32
26- 1-1902	2,24 <sup>1)</sup>	6-12-1922	2,25	23- 2-1946	2,56
26- 1-1902	2,38	10-10-1926	2,40	1- 3-1949	2,70
10-10-1903	2,28	26-11-1928	2,96	26-10-1949	2,23 <sup>2)</sup>
22-11-1903	2,37	12-12-1929	2,22	29-11-1951	2,28 <sup>2)</sup>
30-12-1904	2,96	23-11-1930	2,53	1- 2-1953	3,85
7- 1-1905	2,50	23-11-1930	2,32 <sup>1)</sup>	1- 2-1953	2,65
12- 3-1906	2,97	17- 1-1931	2,33	22-12-1954	2,52
13- 3-1906	2,30 <sup>1)</sup>	18-10-1932	2,23	23-12-1954	3,00
21- 2-1907	2,28	28-11-1932	2,33	24-12-1954	2,70 <sup>1)</sup> of <sup>2)</sup>
23-11-1908	2,66	18-10-1936	2,42	1955	geen
30- 9-1911	2,41	28-10-1936	2,37	1956	geen
9- 4-1912	2,32	1-12-1936	2,53 <sup>1)</sup>		
11-11-1912	2,62	1-12-1936	2,74		

<sup>1)</sup> De waterstand is niet de hoogste uit de bijbehorende depressie.

<sup>2)</sup> De depressiebaan ligt niet in VAN DER HAM's vak, zie A 5.0.

Tabel A 9.0.4

Hoogste hoogwaterstanden uit naar banen geselecteerde depressies uit de wintermaanden (januari, november en december) van de winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57 (63 jaar)

H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen	H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen	H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen
3,85	1	1,99	73	1,58	222
3,28	2	1,98	74	1,57	223
3,00	4	1,97	76	1,56	230
2,96	6	1,96	78	1,55	233
2,74	7	1,95	85	1,54	238
2,68	9	1,94	86	1,53	244
2,66	10	1,93	88	1,52	248
2,63	11	1,92	89	1,51	251
2,62	13	1,91	91	1,50	257
2,54	14	1,90	94	1,49	259
2,53	15	1,89	96	1,48	265
2,52	16	1,88	100	1,47	268
2,50	17	1,87	101	1,46	271
2,44	18	1,86	104	1,45	274
2,39	19	1,85	108	1,44	277
2,38	20	1,84	111	1,43	287
2,37	21	1,83	113	1,42	289
2,36	22	1,82	117	1,41	291
2,33	24	1,81	121	1,40	293
2,26	25	1,80	129	1,39	297
2,25	27	1,79	130	1,38	298
2,24	28	1,78	136	1,37	302
2,22	31	1,77	137	1,36	303
2,21	32	1,76	144	1,35	306
2,20	33	1,75	145	1,34	307
2,18	36	1,74	148	1,33	309
2,16	38	1,73	151	1,32	312
2,15	40	1,72	156	1,30	313
2,14	41	1,71	157	1,28	314
2,13	42	1,70	166	1,27	315
2,12	50	1,69	172	1,24	319
2,11	51	1,68	180	1,23	320
2,10	53	1,67	182	1,22	321
2,09	56	1,66	185	1,21	322
2,08	59	1,65	189	1,20	323
2,07	61	1,64	196	1,18	324
2,05	62	1,63	200	1,12	327
2,04	64	1,62	204	1,09	328
2,02	66	1,61	209	1,06	330
2,01	70	1,60	212	1,03	331
2,00	71	1,59	216	0,97	332

De standen zijn opgegeven in 0,01 m nauwkeurig. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters van 1939/'40 tot en met 1944/'45 toe te passen.

*Figuur 3.0.1.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956.

Uitgezet zijn de punten  $(h_i; i/m)$ , waarbij  $i$  het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen  $h_i$  voorstelt en  $m$  het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus  $m = 69$ . De waarnemingen  $h_i$  zijn naar beneden in even aantallen cm afgerond. De horizontale schaal der  $h_i$  is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisch. Voor lage waarden van  $h$  kunnen de punten niet afzonderlijk getekend worden, zij zijn daarom tot streepjes samengevoegd. Tabel A 9.0.1 bevat de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,20 m. De data, die bij de standen  $\geq$  N.A.P. + 2,20 m behoren, zijn opgenomen in tabel A 9.0.3.

*Figuur 4.0.1.* De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956.

Uitgezet zijn de punten  $((i - 0,3) / (m + 0,4); h_{m-i+1})$ , waarin  $i$  het rangnummer van de naar afdalende grootte gerangschikte jaarmaxima  $h_i$  voorstelt en  $m$  het aantal jaren. Hier is dus  $m = 69$ . De (bovenste) horizontale schaal der  $(i - 0,3) / (m + 0,4)$  is dubbel-logaritmisch verdeeld, de verticale schaal aritmetisch. Tabel A 9.0.2 geeft de jaarmaxima met data.

*Figuur 7.0.1.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn.

Deze figuur is gelijk aan figuur 3.0.1, behoudens dat de lijn

$$19,7 e^{-\frac{h - 1,50}{0,236}} \quad \text{voor } h \geq 1,50$$

is toegevoegd.

*Figuur 7.0.2.* De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen.

Deze figuur is gelijk aan figuur 4.0.1, behoudens dat de lijn uit figuur 7.0.1, op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

*Figuur 7.0.3.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen.

Uitgezet zijn de punten  $(h_i; i/m)$ , zoals in figuur 3.0.1, waarbij de onderste (linker) figuur de waarnemingen uit de maanden januari, november en december bevat en de bovenste (rechter) figuur de overige waarnemingen. Het aantal jaren is ook nu  $m = 69$ . De hoogste stand (N.A.P. + 3,84 m) is bij de winterwaarnemingen uitgezet. Tabel A 9.0.1 bevat de waarnemingen  $\geq$  N.A.P. + 1,20 m. De data, die bij de standen  $\geq$  N.A.P. + 2,20 m behoren, zijn opgenomen in tabel A 9.0.3.

*Figuur 8.0.1.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57.

Uitgezet zijn de punten  $(h_i; (i - 0,3)/(m))$ , waarbij  $i$  het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen  $h_i$  voorstelt en  $m$  het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus  $m = 63$ . De  $h_i$  zijn de hoogste hoogwaterstanden van naar hun baan geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december van de aangegeven 63 winters. De horizontale schaal der  $h_i$  is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisch. De waarnemingen zijn in cm nauwkeurig gebruikt en in tabel A 9.0.4 vermeld. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters 1939/'40 tot en met 1944/'45 toe te passen. De stand N.A.P. + 3,85 m van 1 februari 1953 is gerekend als in de beschouwde perioden vallend.

*Figuur 8.0.2.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1 behoudens dat de lijn

$$2,63 e^{-\frac{h - 1,70}{0,337}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

is toegevoegd.

*Figuur 9.0.1.* De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen.

Deze figuur is gelijk aan figuur 4.0.1, behoudens dat de lijn uit figuur 8.0.2, op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

*Figuur 10.0.1.* De baanselectielijn bij verschillende beginpunten.

Getekend zijn de lijnen:

$$\hat{n}(b) e^{-\frac{h-b}{\hat{a}_e}} \quad \text{voor } h \geq b,$$

voor de waarden van tabel A 9.0.5.

Tabel A 9.0.5  
Parameters van de baanselectielijn,  
getekend in figuur 10.0.1

$b$ (in m)	$\hat{a}_e$ (in m)	$\hat{n}(b)$
1,5	0,383	4,08
1,6	0,354	3,37
1,7	0,337	2,63
1,8	0,321	2,05
1,9	0,325	1,49
2,0	0,315	1,13
2,1	0,304	0,841
2,2	0,364	0,524
2,3	0,387	0,381
2,4	0,394	0,286
2,5	0,315	0,270
2,6	0,304	0,206

Vergelijk ook tabel 10.0.1.

*Figuur 11.0.1.* De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01.

Getekend zijn de baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,337}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en de bovengrenzen met onbetrouwbaarheid 0,05:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,385}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en met onbetrouwbaarheid 0,01:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,407}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

*Figuur A 2.0.1.* Vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmischnormale verdeling.

Getekend zijn de rechte lijn:

$$e^{-3h} \quad \text{voor } h \geq 0,$$

(aangegeven met  $a = \infty$ ) en de drie krommen (aangegeven met  $a = 1$ ,  $a = 10$  en  $a = 100$ ):

$$\int_{l(h)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left( \int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} \quad \text{voor } h \geq 0,$$

waarin  $l(h) = \frac{\log \mu (h+a)}{\sigma}$ ,  $\mu = e^3 a^{-1}$  en  $\sigma = a^{-\frac{1}{2}}$  voor resp.  $a = 1$ , 10 en 100. De horizontale schaal is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisch.

*Figuur A 6.0.1.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat vanaf N.A.P. + 2,00 m de trapfunctie, gegeven door

$$5,27 \left( \frac{i}{n} + 0,0584 \right) \quad \text{voor } h_{i+1} < h \leq h_i,$$

is toegevoegd.

*Figuur A 6.0.2.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat nu de waarnemingen bij  $(h_i; i/m)$  uitgezet zijn, en toegevoegd zijn de lijnen:

$$2,63 e^{-2,92-(h-1,70)} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en

$$0,270 e^{-2,92(h-2,45)} \quad \text{voor } h \geq 2,45,$$

die schattingen voor de theoretische baanselectiekromme vanaf N.A.P. + 1,70 m (resp. N.A.P. + 2,45 m) vormen en een 10%-bovengrens voor de trapfunctie rechts van N.A.P. + 2,45 m, die door

$$z(h) = 0,270 (e^{-2,92(h-2,45)} + 0,250) \quad \text{voor } h \geq 2,45$$

gegeven wordt.

*Figuur A 6.0.3.* Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearsonkromme en buigpuntraaklijn.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat de Pearsonkromme

$$5,27 \int_0^g \frac{z^{11,74} \cdot e^{-z}}{(11,74)!} dz \quad \text{voor } h \geq 0,523,$$

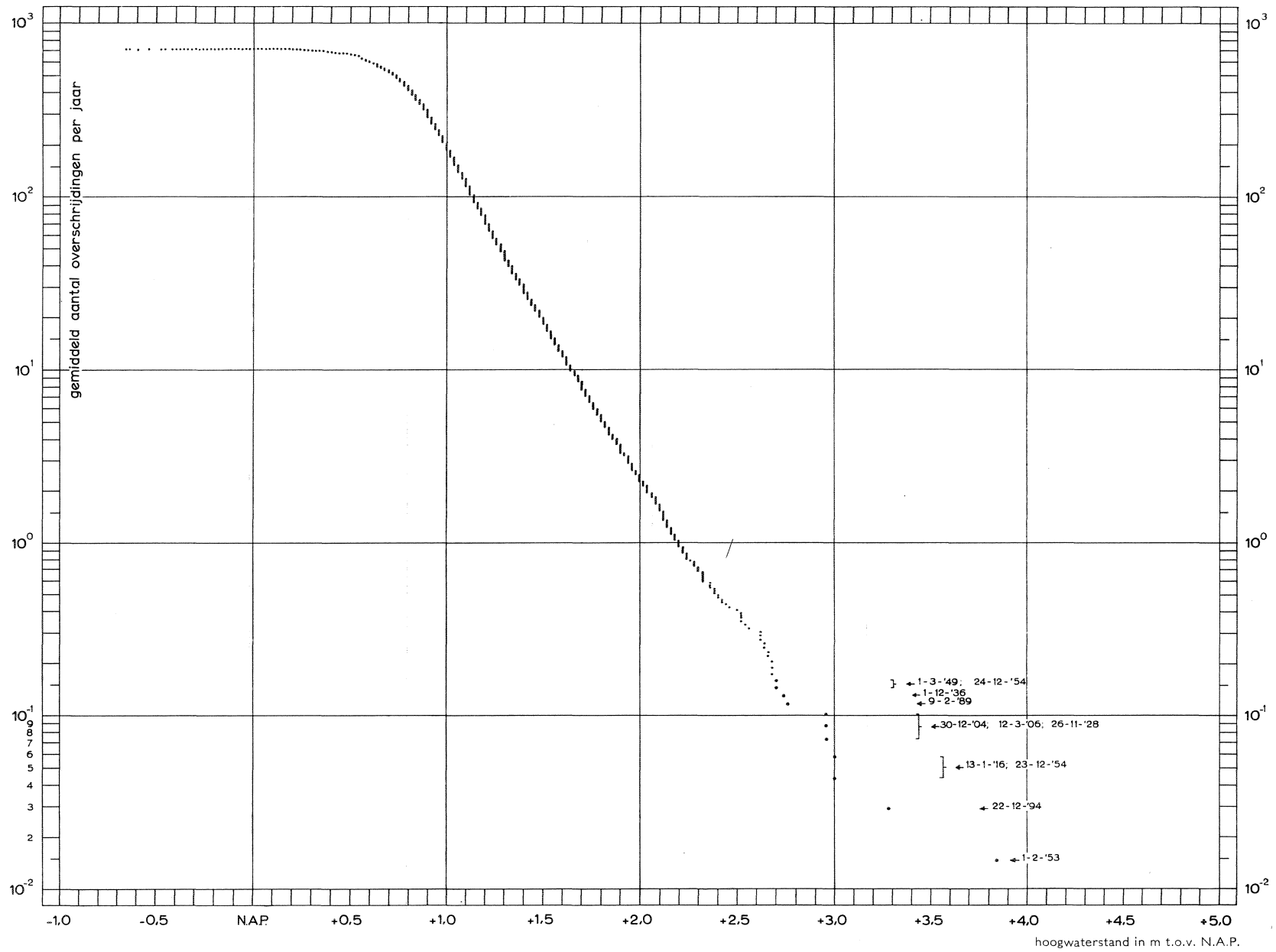
met

$$g = \frac{14,5}{h - 0,523},$$

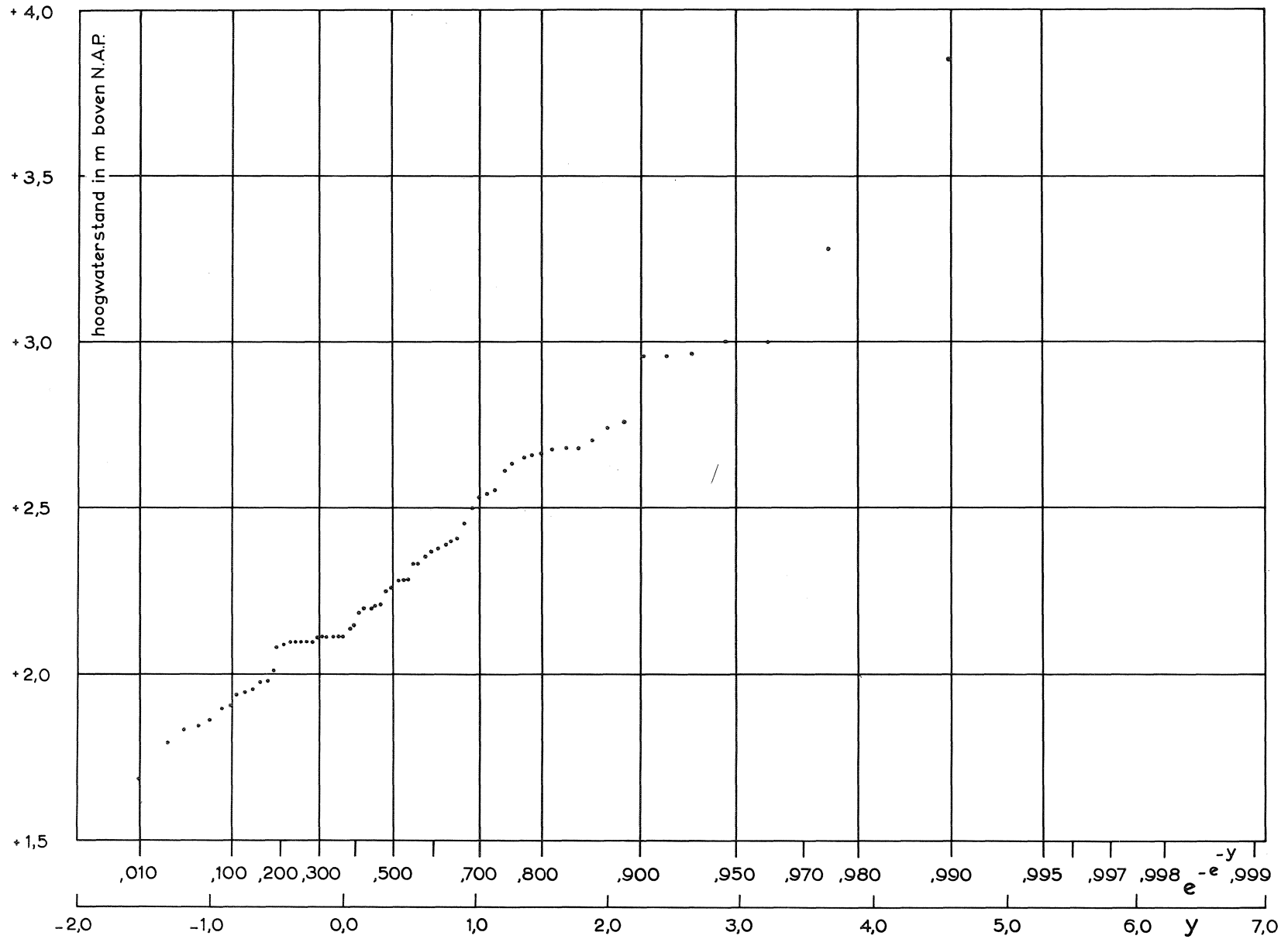
en de lijn (buigpuntraaklijn aan de Pearsonkromme)

$$5,27 e^{-3,20 h + 4,87} \quad \text{voor } h \geq 1,3$$

toegevoegd zijn.



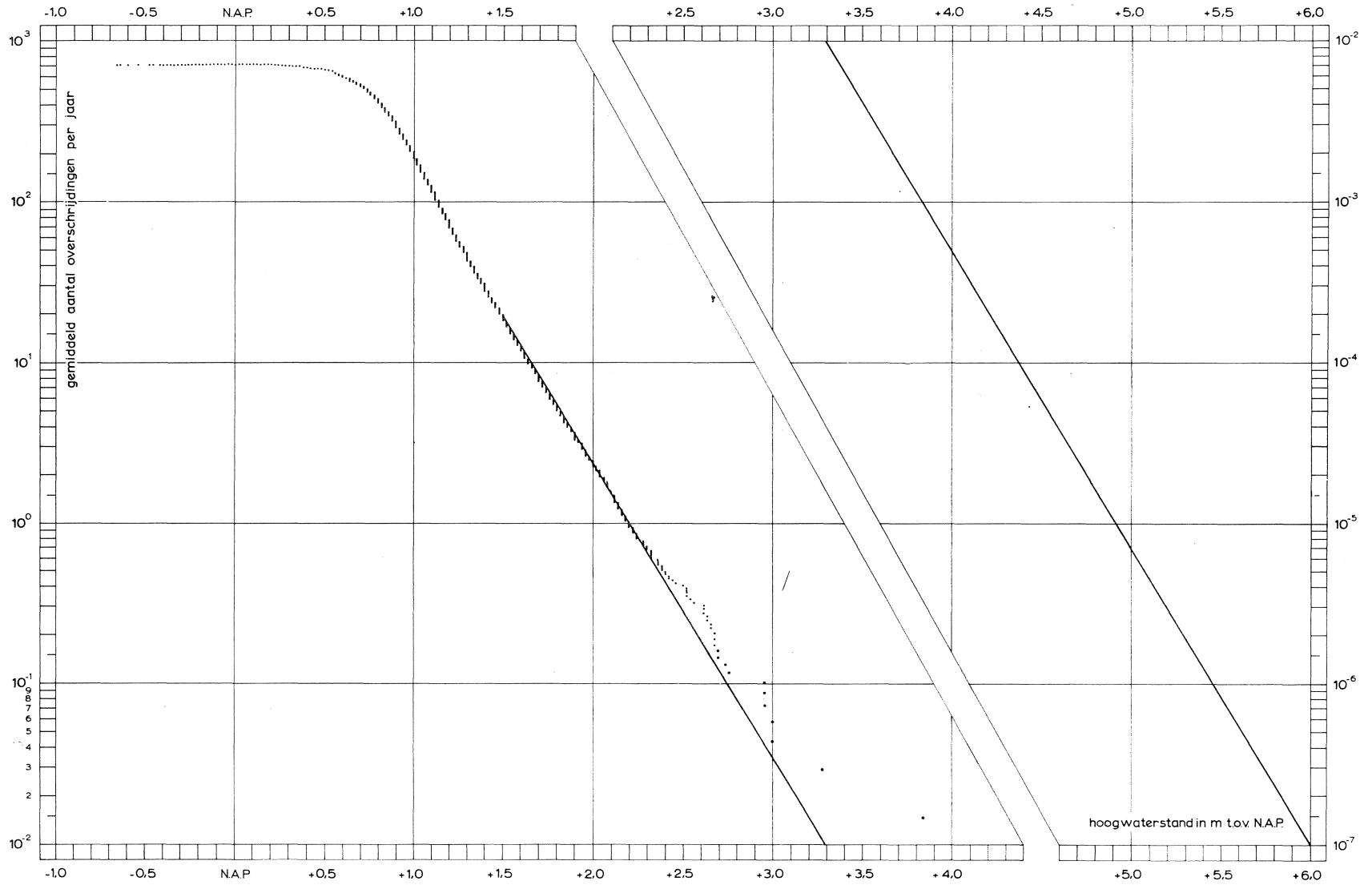
Figuur 3.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956



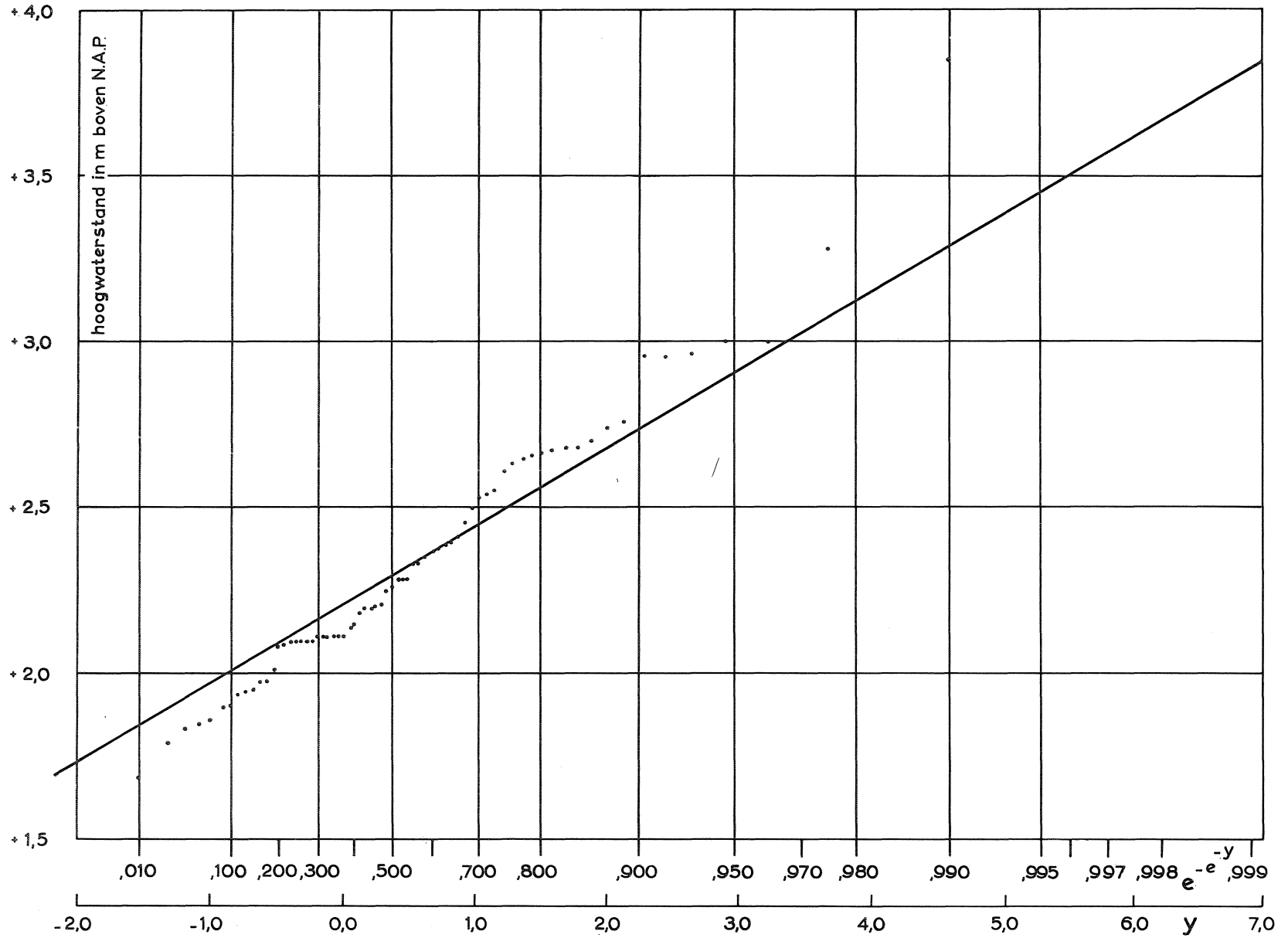
Figuur 4.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956

Courtesy of E. J. GUMBEL



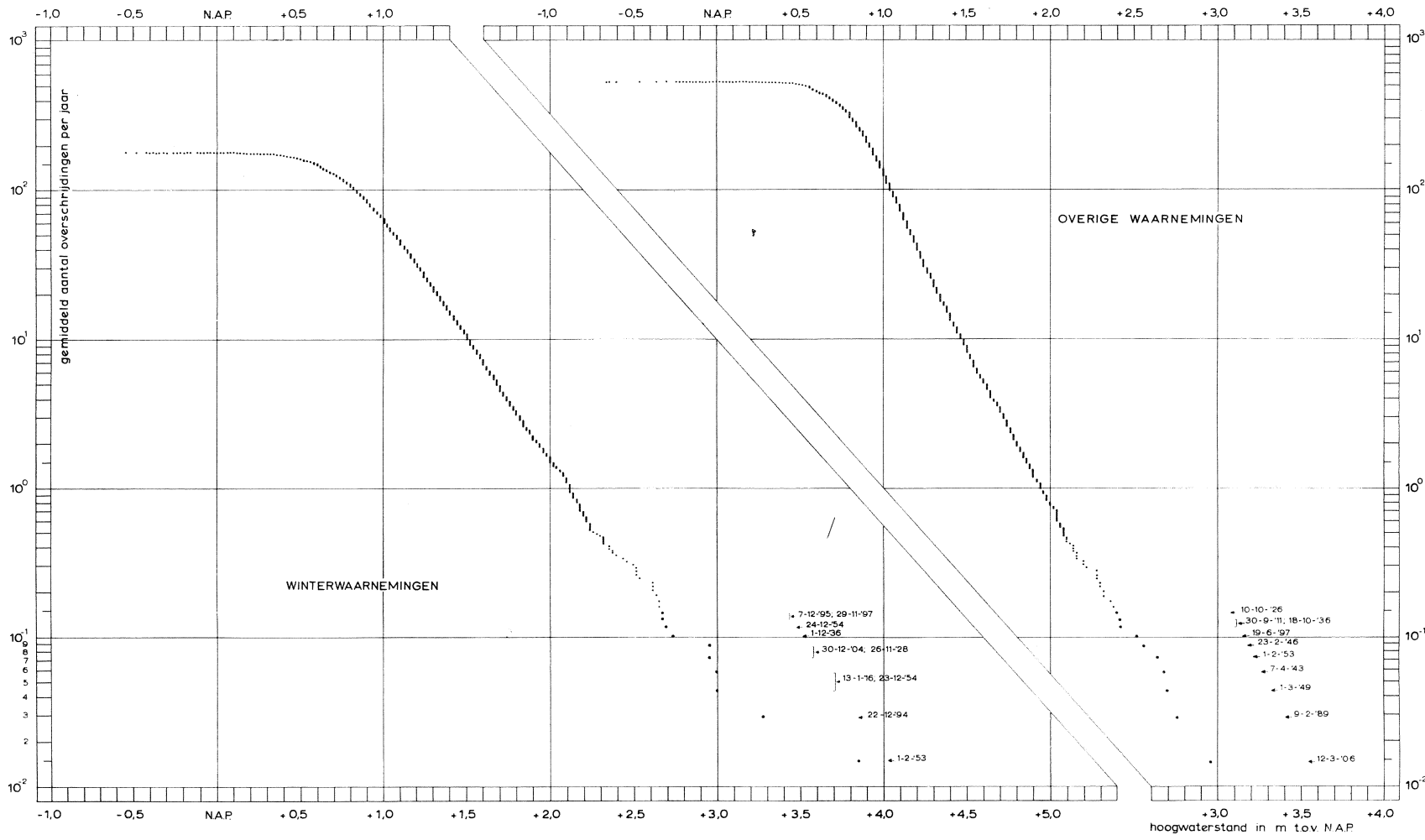


Figuur 7.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn

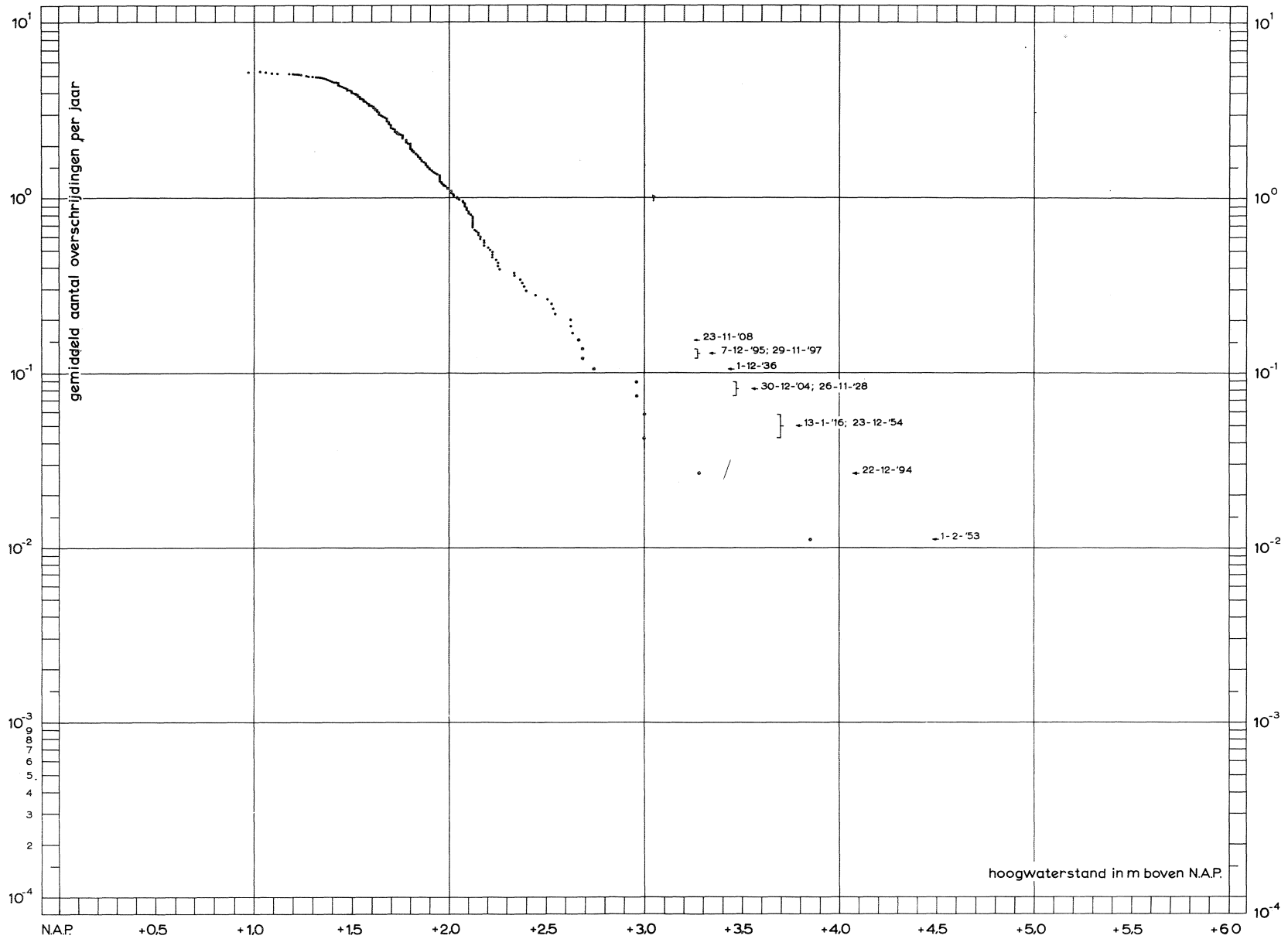


Figuur 7.0.2. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen

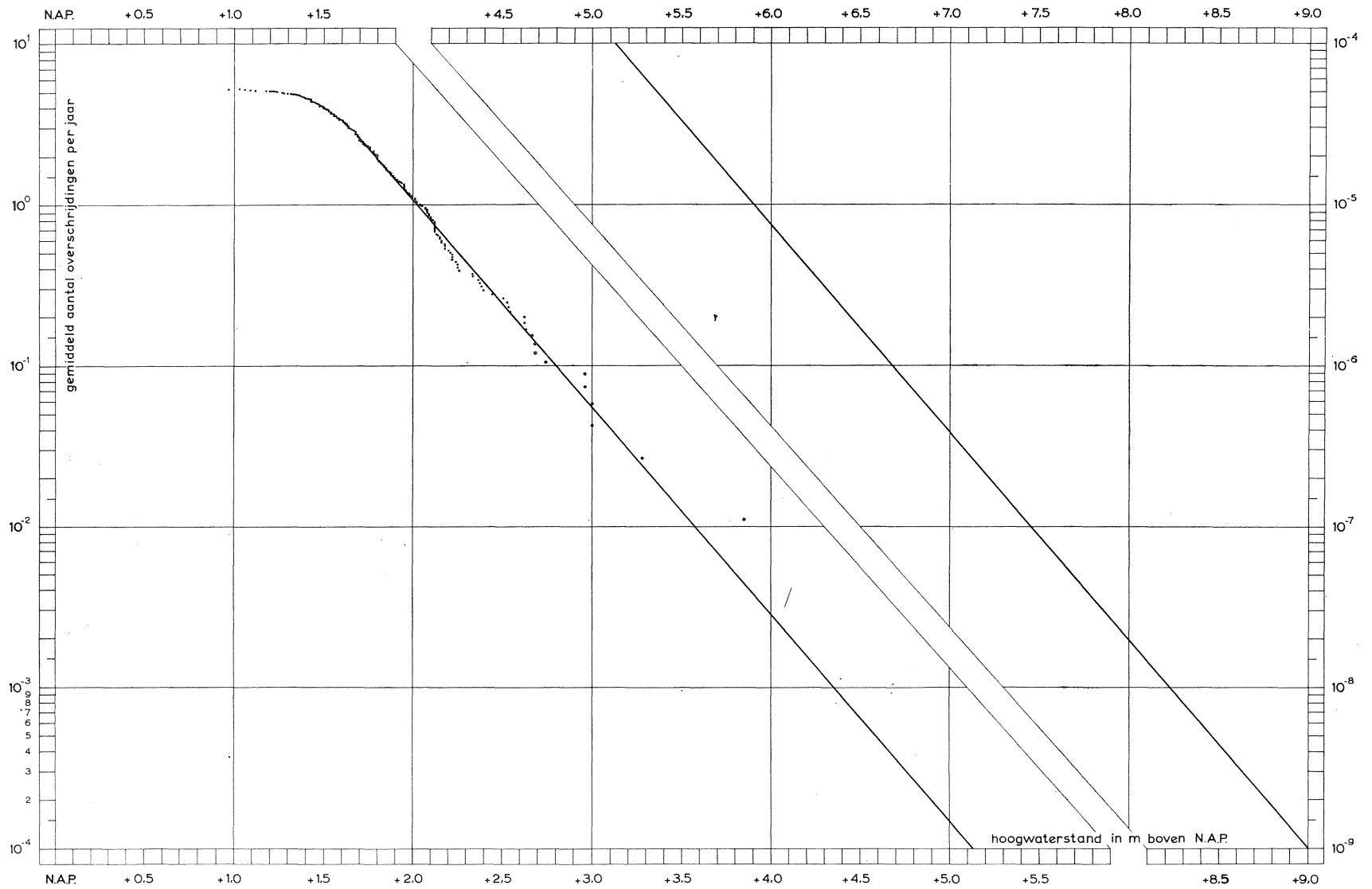
Courtesy of E. J. GUMBEL



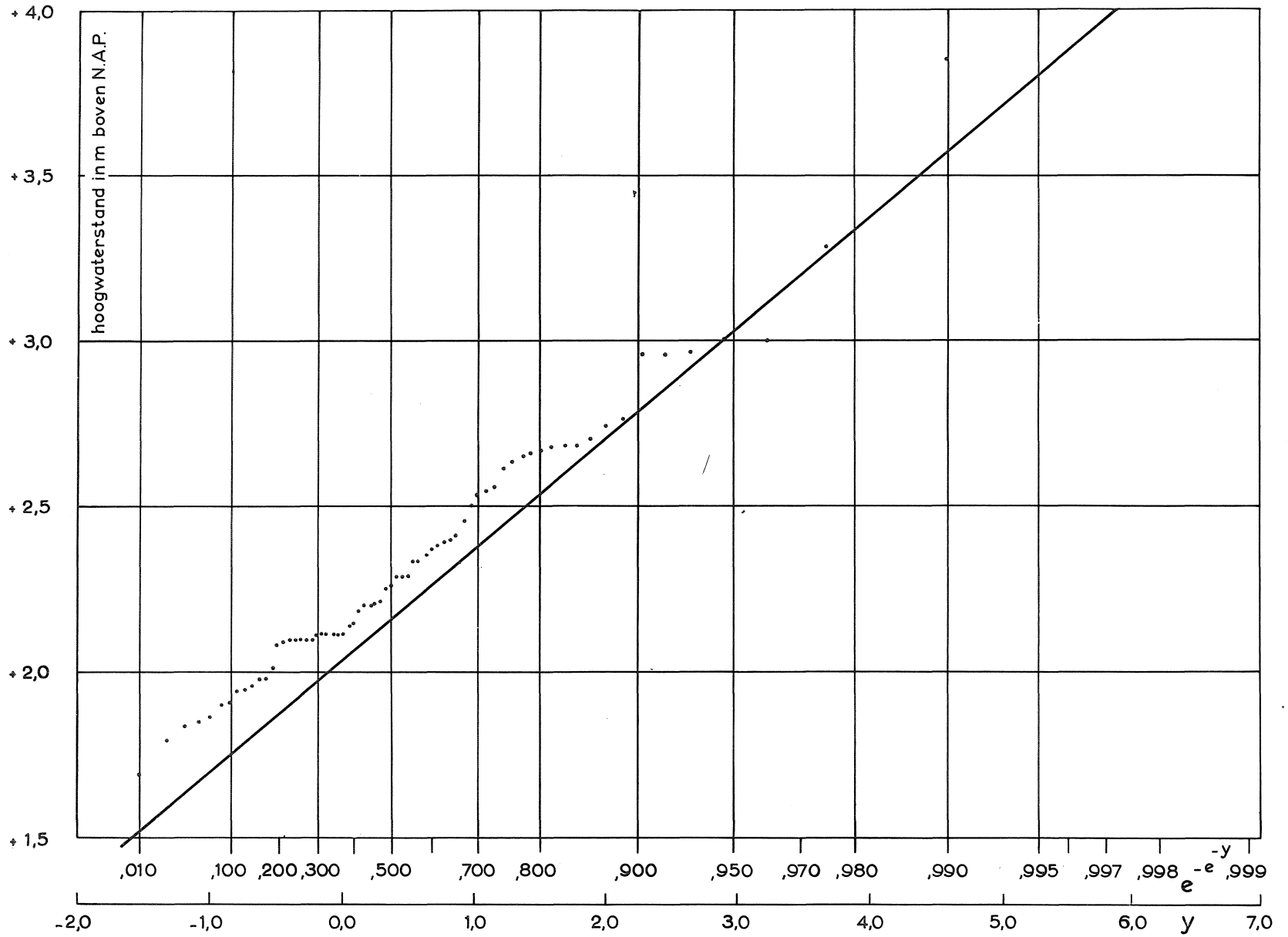
Figuur 7.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen



Figuur 8.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57

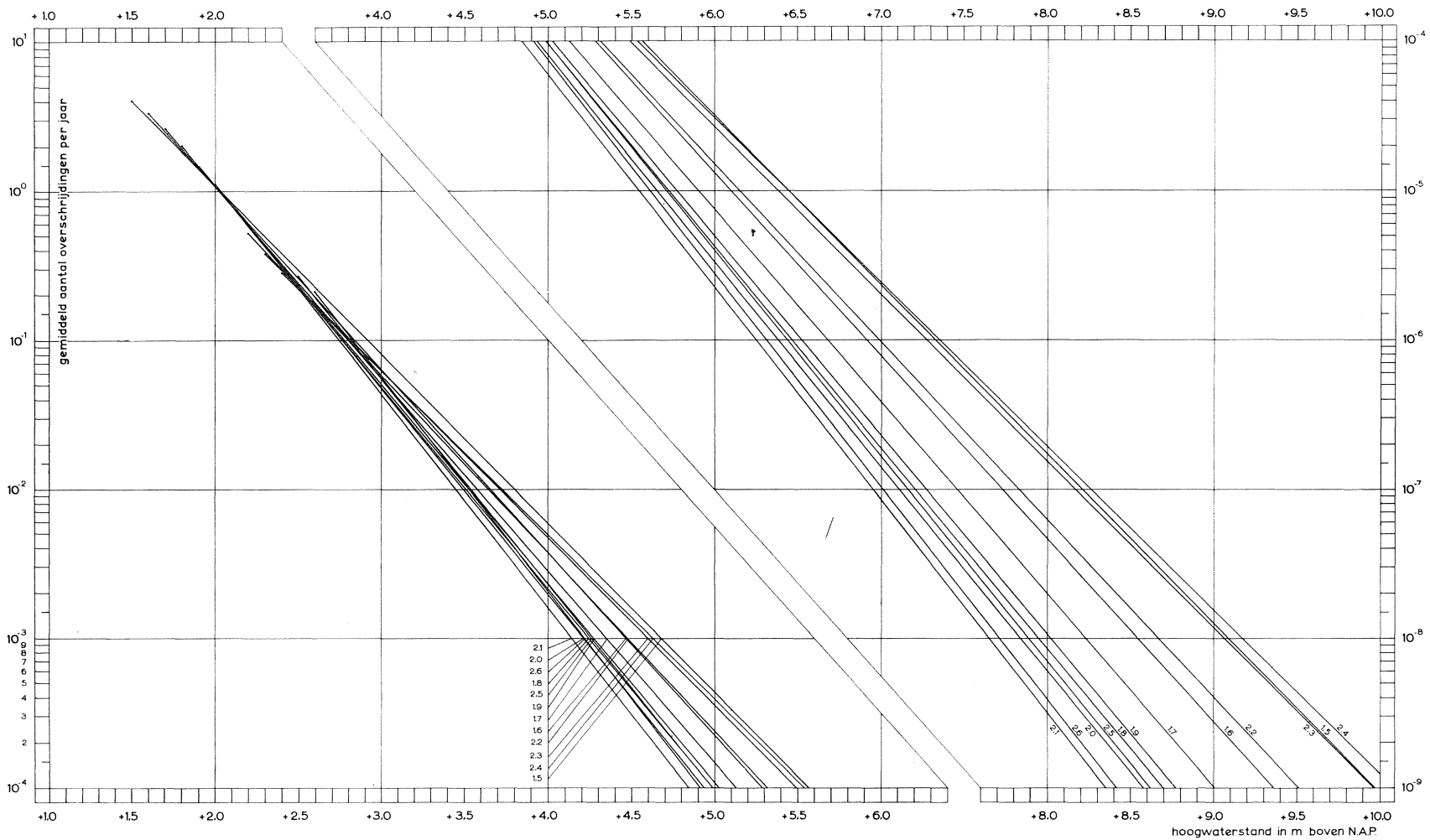


Figuur 8.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte

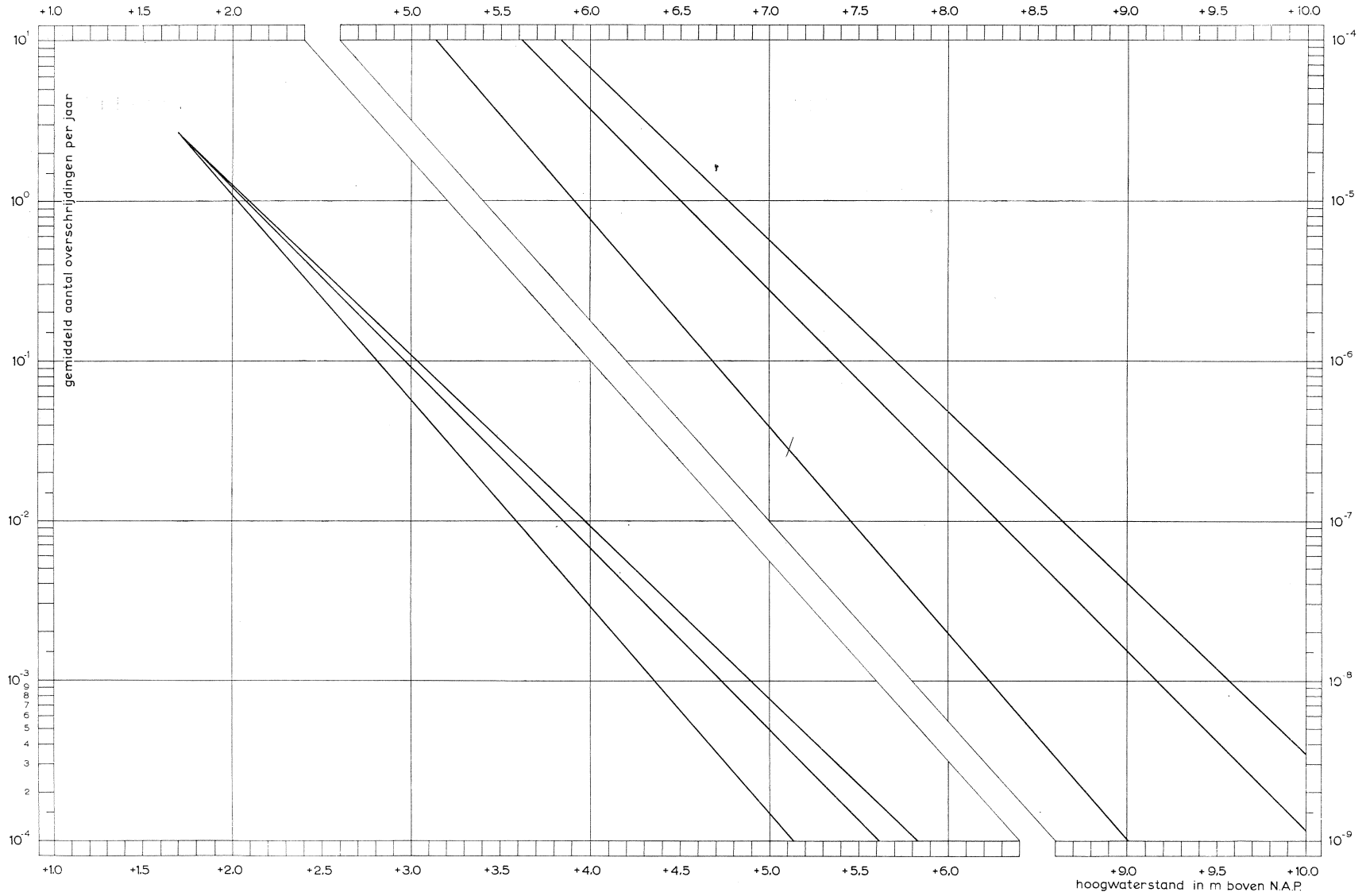


Figuur 9.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen

Courtesy of E.J. GUMBEL



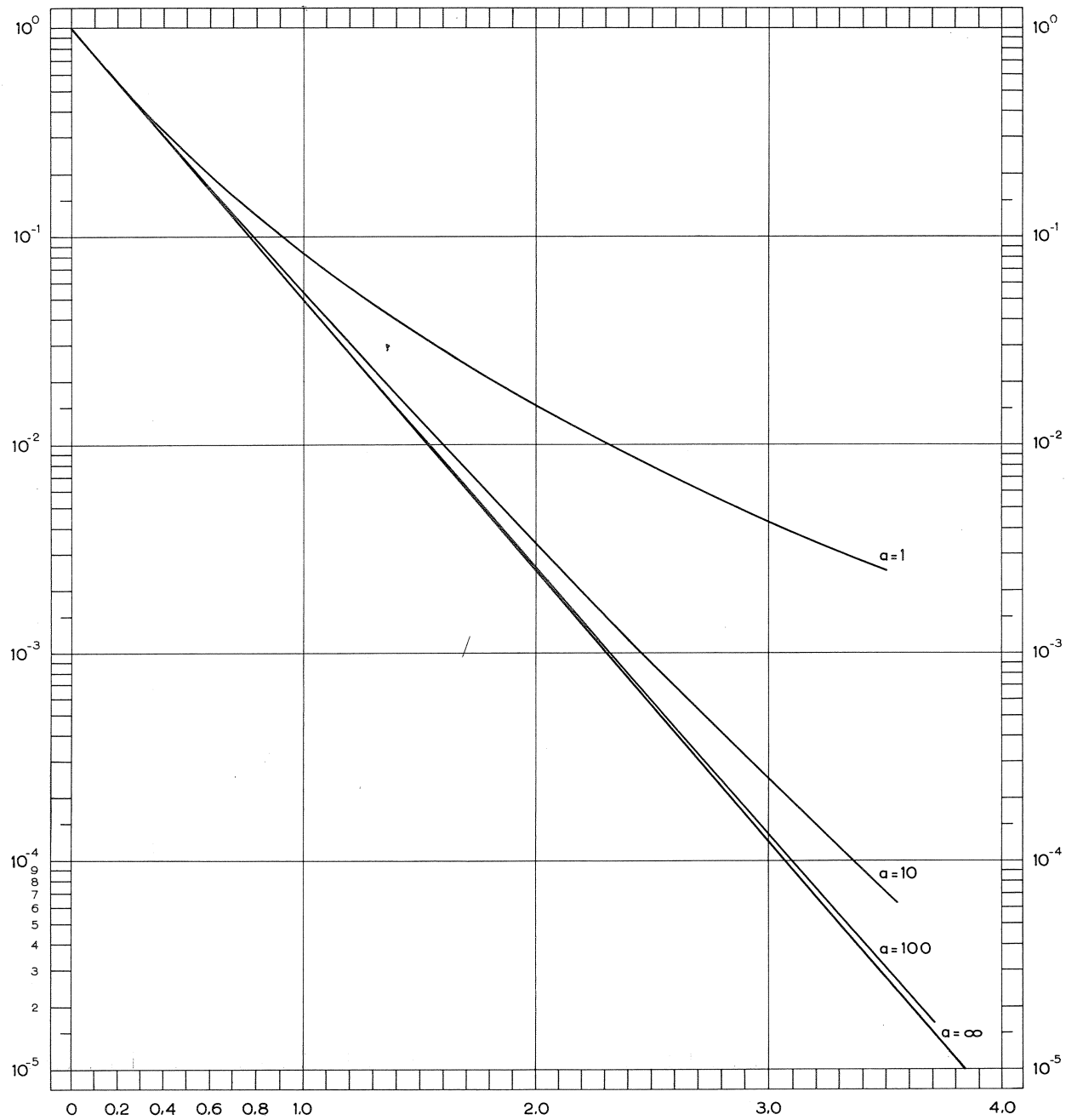
Figuur 10.0.1. De baanselectielijn bij verschillende beginpunten

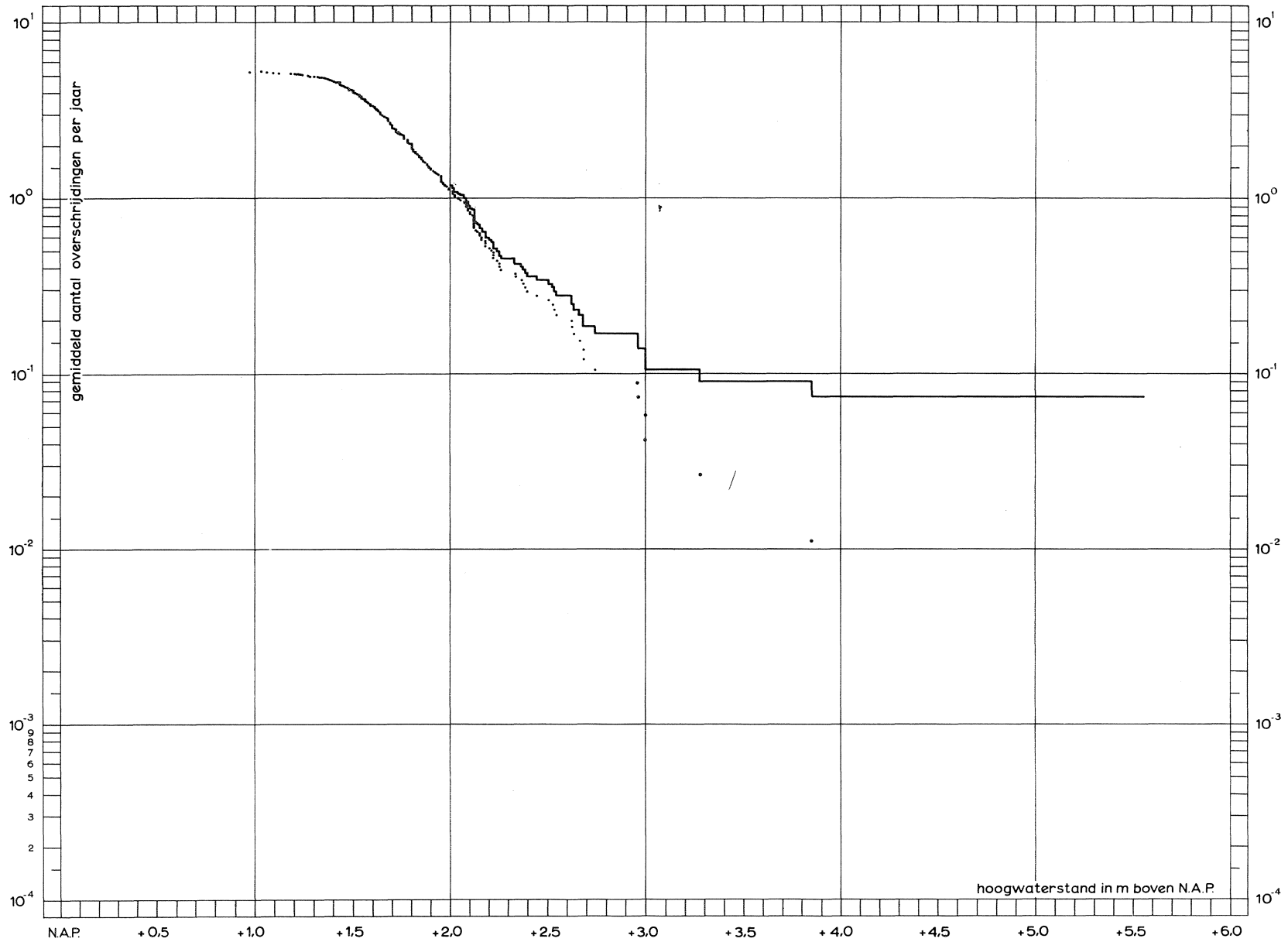


Figuur 11.0.1. De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01

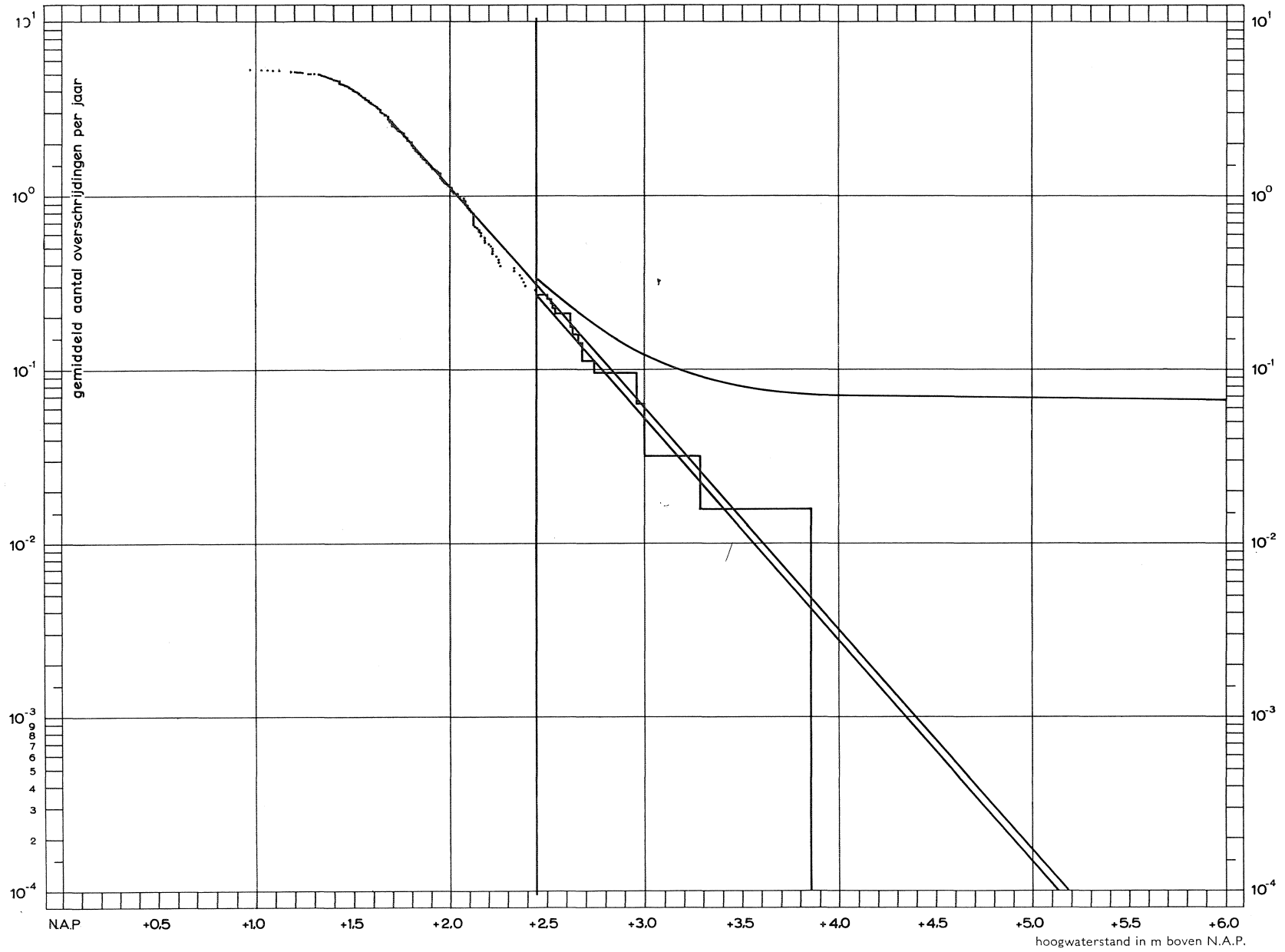


Figuur A 2.0.1.  
 De vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmischnormale verdeling

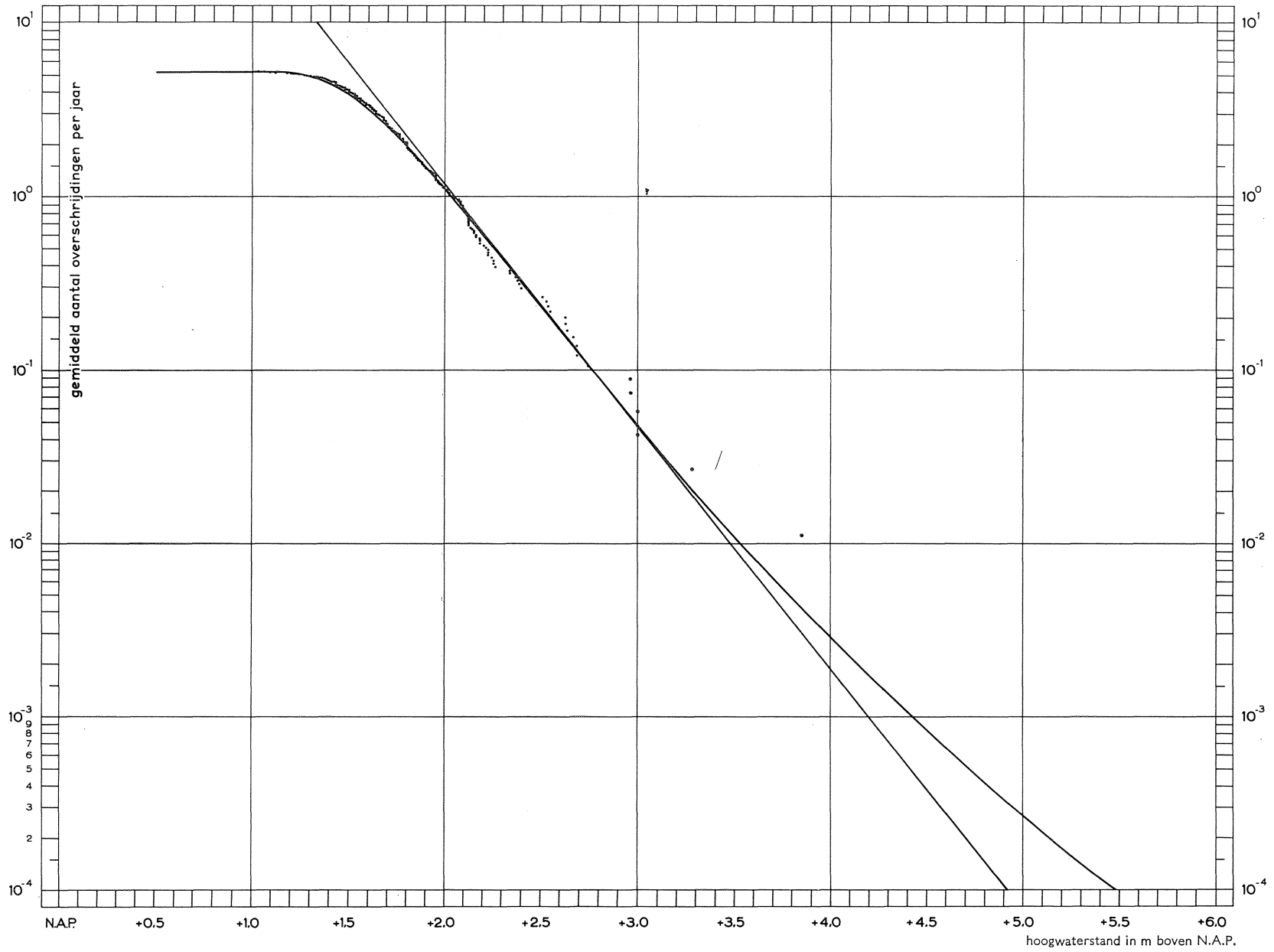




Figuur A 6.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10%-bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m



Figuur A 6.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanslectiewaarnemingen, met een 10 %-bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m



Figuur A 6.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste

BIJDRAGE II.2

HET ECONOMISCH  
BESLISSINGSPROBLEEM INZAKE  
DE BEVEILIGING VAN NEDERLAND  
TEGEN STORMVLOEDEN



## INHOUDSOVERZICHT

0.1	Inhoudsoverzicht . . . . .	59
0.2	Overzicht van de tabellen . . . . .	60
0.3	Overzicht van de figuren . . . . .	60
0.4	Overzicht van de gebruikte symbolen . . . . .	60
0.5	Literatuur . . . . .	61
0.6	Summary. . . . .	63
0.7	Résumé . . . . .	64
<b>1.0</b>	<b>Samenstelling van de bijdrage.</b> . . . . .	<b>66</b>
1.1	Inleiding . . . . .	66
1.2	Inhoud van de bijdrage. . . . .	67
1.3	De draagwijdte van het onderzoek en haar beperkingen . . . . .	68
1.4	Auteur en medewerkers . . . . .	69
1.5	Samenvatting en conclusies van 1.0. . . . .	70
<b>2.0</b>	<b>Uitkomsten van statistisch onderzoek</b> . . . . .	<b>70</b>
2.1	De grondgegevens . . . . .	70
2.2	Het door de Deltacommissie ingevoerde basispeil . . . . .	72
2.3	Samenvatting en conclusies van 2.0. . . . .	73
<b>3.0</b>	<b>Optimale dijkverhoging in het eenvoudigste geval.</b> . . . . .	<b>73</b>
3.1	Algemeen gedeelte . . . . .	73
3.2	Wiskundig gedeelte . . . . .	78
3.3	Samenvatting van 3.0. . . . .	83
3.4	Conclusies van 3.0 . . . . .	84
<b>4.0</b>	<b>Economische expansie, bodemdaling, zeespiegelrijzing</b> . . . . .	<b>84</b>
4.1	Algemeen gedeelte . . . . .	84
4.2	Wiskundig gedeelte . . . . .	87
4.3	Invloed van de gemaakte onderstellingen en de onnauwkeurigheden in de schattingen der constanten . . . . .	91
4.4	Samenvatting en conclusies van 4.0 . . . . .	93
<b>5.0</b>	<b>Compartimentenmethode</b> . . . . .	<b>93</b>
5.1	De verdeling van het land in compartimenten . . . . .	93
5.2	Samenvatting en conclusies van 5.0 . . . . .	95
<b>6.0</b>	<b>De invloed van imponderabilia</b> . . . . .	<b>95</b>
6.1	De waarde van mensenlevens en ideële goederen en de beheersing van de situatie . . . . .	95
6.2	Samenvatting en conclusies van 6.0 . . . . .	96

<b>7.0</b>	<b>De veiligheid van Centraal-Holland</b>	97
7.1	Toepassing van de in 4.0 afgeleide formules op Centraal-Holland	97
7.2	Samenvatting en conclusies van 7.0.	101
<b>8.0</b>	<b>De economische achtergrond van het Deltaplan</b>	102
8.1	Algemeen gedeelte	102
8.2	Wiskundig gedeelte	106
8.3	Samenvatting en conclusies van 8.0.	109
<b>9.0</b>	<b>Overzicht van de in deze bijdrage gebruikte numerieke waarden en uitkomsten</b>	110

## 0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN

2.1.1	Aantallen overschrijdingen en overschrijdingsfrequenties van enige peilen gedurende de jaren 1888 tot en met 1956	71
3.1.1	„Spijt” bij niet-optimale verhoging	77
3.2.1	Lonende dijkverhogingen	82

## 0.3 OVERZICHT VAN DE FIGUREN

3.1.1	Kosten $I$ bij dijkverhoging met $X$ meter	74
3.1.2	Rampschadeverwachting $R$ bij dijkverhoging met $X$ meter	75
3.1.3	Totale kosten $K$ bij dijkverhoging met $X$ meter	75
3.1.4	Vergelijking van de kosten bij optimale dijkverhoging en een verhoging, die 0,34 m groter is	76
3.1.5	Vergelijking van de totale kosten bij kleinere en grotere dijkverhogingen dan de optimale	76
3.2.1	Economische en oneconomische optimale dijkverhogingen	82
4.3.1	Kosten $K$ bij dijkverhoging met $X$ meter.	91
8.2.1	Globale vorm van de functie $r(h)$	106
8.2.2	De schade fractie als functie van de waterhoogte	107

## 0.4 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

$e$	= grondtal natuurlijke logaritmen
$\ln$	= natuurlijke logaritme
$\alpha$	= parameter exponentiële verdeling
$a_2$	= (kans)halveringshoogte in meters = $\frac{1}{\alpha} \ln 2$
$a_{10}$	= (kans)decimeringshoogte in meters = $\frac{1}{\alpha} \ln 10$
$a_e$	= (kans)nepereringshoogte in meters = $\frac{1}{\alpha}$
$h$	= peil in meters boven N.A.P.
$p(h)$	= overschrijdingskans per jaar van het peil $h$
$H_0$	= huidig kritiek peil



$p_0$	=	overschrijdingskans per jaar van het huidig kritiek peil = $p(H_0)$
$P_0$	=	100 $p_0$
$X$	=	dijkverhoging in meters
$H$	=	kritiek peil na dijkverhoging = $H_0 + X$
$t$	=	tijd in jaren
$\tau$	=	tijd in eeuwen
$p(H, \tau)$	=	overschrijdingskans per jaar over $\tau$ eeuwen, indien het kritieke peil na dijkverhoging $H$ meter bedraagt
$\eta$	=	bodemdaling in meters per eeuw
$\beta$	=	$\alpha\eta$
$\delta$	=	continue rentevoet in % per jaar of in per unum per eeuw
$\gamma$	=	expansiecoëfficiënt in % per jaar of in per unum per eeuw
$\delta'$	=	gereduceerde continue rentevoet in % per jaar of in per unum per eeuw = $\delta - \gamma$
$kf = k$	=	duizend gulden = 1 kilogulden
$Mf = M$	=	miljoen gulden = 1 megagulden
$Gf = G$	=	miljard gulden = 1 gigagulden
$I_0$	=	initiële dijkverhogingskosten
$I'$	=	dijkverhogingskosten per meter
$I(X)$	=	totale kosten bij dijkverhoging met $X$ meter = $I_0 + I'X$
$I_e$	=	dijkverhogingskosten van $a_e$ meter
$r_e$	=	nepereringsrente = rente per jaar van het bedrag $I_e = \frac{I'\delta}{100\alpha}$
$W$	=	totale te beschermen waarde
$R_0$	=	huidige totale verdisconteerde rampschadeverwachting
$R(X)$	=	totale verdisconteerde rampschadeverwachting na dijkverhoging met $X$ meter
$K_0$	=	huidige totale kosten ter bescherming van de waarde $W$
$K(X)$	=	totale kosten ter bescherming van de waarde $W$ na dijkverhoging met $X$ meter
$\hat{X}$	=	optimale dijkverhoging in meters
$\hat{H}$	=	optimale dijkhoogte in meters = $H_0 + \hat{X}$
$\hat{I}$	=	dijkbouwkosten bij optimale verhoging
$\hat{R}$	=	totale verdisconteerde rampschadeverwachting na optimale dijkverhoging
$\hat{K}$	=	totale kosten ter bescherming van de waarde $W$ bij optimale verhoging
$v$	=	veiligheidsfactor = $e^{\alpha X}$
$\hat{v}$	=	veiligheidsfactor bij optimale dijkverhoging = $e^{\alpha \hat{X}}$
$T$	=	tijd in eeuwen waarna regeneratie van de dijk plaatsvindt
$J$	=	contante waarde van alle toekomstige regeneratiekosten = $\frac{I' \eta T}{e^{\delta' T} - 1}$
$y$	=	$\alpha(X - \hat{X})$
$C$	=	$e^{-\frac{1}{2}\beta T} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{\delta'}{1 - e^{-\delta' T}}$
$r(h)$	=	voorwaardelijke verwachting van de schadefractie per jaar in het deltagebied bij het peil $h$
$Q_0$	=	verwachting van de schadefractie per jaar in het deltagebied

## 0.5 LITERATUUR De verwijzing in de tekst is aangegeven door [ ]

1. *H. W. Ahlmann* Glacier Variations and Climatic Fluctuations, Bowman Memorial Lecture, Series Three. American Geophysical Society, New York, 1953.

2. *W. C. Bischoff van Heemskerck* Enige beschouwingen over het berekenen van de economische dijkverhoging, waarin opgenomen een berekening voor het gebied van Centraal-Holland. Nota secretariaat Deltacommissie, 's-Gravenhage, 1955.
3. *H. Cramér* Collective Risk Theory, Skandia Insurance Company. Stockholm, 1955.
4. *D. van Dantzig* Economic Decision Problems for Flood Prevention, *Econometrica* 24, 276–287, New Haven, 1956.
5. *D. van Dantzig en J. Hemelrijk* Over de mogelijkheid van statistische voorspelling van extreem hoge waterstanden en haar grenzen. Rapport S 114 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1953.
6. *D. van Dantzig en J. Hemelrijk* Extrapolatie van de frequentielijn der hoge waterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen. Rapport S 226 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1958.
7. *T. Edelman* Tectonic movements as resulting from the comparison of two precision levellings, *Geologie en Mijnbouw*, 's-Gravenhage, 1954.
8. *G. Gamow* Biography of the Earth, A Mentor Book. New York, 1941.
9. *Ch. H. Hull* The Economic Writings of Sir William Petty, Volume I, 108. Cambridge University Press, 1899.
10. *Ph. H. Kuenen* Eustatic changes of sea-level, *Geologie en Mijnbouw* 16, 148–155, 's-Gravenhage, 1954.
11. *M. Milankovitch* Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate. Handbuch der Geophysik II 2, Berlin, 1938.
12. *J. von Neumann* Uber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 8, 73–83, Leipzig und Berlin 1937.
13. *D. J. Reynolds* The cost of road accidents, *J. R. S. S. Series A*, 393–408, London, 1956.
14. Symposium quaternary changes in level especially in the Netherlands. Utrecht, 1954.
15. *Harlow Shapley* a.o. Climatic Change, Harvard University Press, 1953.
16. *J. van Veen* Tide gauges, subsidence gauges and flood stones in the Netherlands. *Geologie en Mijnbouw* 16, 214–222, 's-Gravenhage, 1954.
17. *J. van Veen* Necessity of Subsidence-Gauges. Report presented at the 11th general assembly of the International Association of Geodesy at Toronto, 1957.
18. *F. A. Vening Meinez* Earth-crust Movement in the Netherlands, Resulting from Fenno-Scandian Post-glacial Isostatic Readjustment and Alpine Foreland Rising, *Proc. Kon. Ned. Ak. van Wetenschappen B* 57, 142–155, Amsterdam, 1954.
19. *F. J. de Vos* Bepaling economische dijkverhoging Terschelling. Nota secretariaat Deltacommissie, 's-Gravenhage, 1954.
20. *P. J. Wemelsfelder* Wetmatigheden in het optreden van stormvloed. *De Ingenieur*, 's-Gravenhage, 1939, nr. 9.
21. *P. J. Wemelsfelder* Frequentielijnen van hoogwater in het Nederlandse kustgebied, Rijkswaterstaat, directie Algemene Dienst, Hydrometrische Afdeling, 's-Gravenhage, 1954.

## 0.6 SUMMARY

### The economic decision problems concerning the security of the Netherlands against storm surges

In this contribution, due to Prof. Dr. D. van Dantzig the economic background is investigated of securing our country against stormfloods. As it is impossible to attain complete security we have to deal with optimization problems of the following type: taking account of the cost of dikebuilding as a function of height, of the losses suffered when dikebreaks occur, and of the frequency distribution of the heights of (high) sealevels, to determine the optimal height of the dikes and the amount of money to be invested in dikebuilding.

Chapter 1.0 contains an introduction to the problem and a summary of the contents of the report. In chapter 2.0 a survey is given of the statistical aspects of the problem, discussed in Contribution II.1. The main conclusions are: 1. the halving height  $a_2$  of the exceedance probability is about .23 meter and the decimating height  $a_{10}$  about .78 meter; 2. the basic-level defined by having an exceedance probability of  $10^{-4}$  in Hook of Holland is about N.A.P. + 5.1 meter<sup>1)</sup>; 3. the exceedance probability of the height of the high tide on february 1st 1953, viz. N.A.P. + 3.85 meter, is .0045. In order to give a clear idea of the methods used, in chapter 3.0 the problem is solved under the following rather simplifying assumptions. We consider a definite part of the country (a polder, say), situated below sea level and protected against the sea by surrounding dikes. We assume the existence of a level  $H_0$  critical for the present state, so that a high tide in Hook of Holland below this level does not cause any damage at all, and that a high tide above this level destroys all goods in the polder. In other words, the probability of a loss equals the exceedance probability  $p(H_0)$  of the critical level  $H_0$ . Only total losses are considered, the probability of partial losses being neglected. The value  $V$  to be protected by the dikes includes besides the goods in the polder, all the consequential losses, suffered when the goods in the polder are lost. Both  $p(H_0)$  and  $V$  are assumed to be constant in time. Now we have to answer two questions:

1. Considering the situation from the economic point of view, have we to raise the critical height, or is it better to leave the situation as it is?

2. If we decide to raise the critical level, what will be the optimal height of the dikes?

The cost of heightening the dikes with  $X$  meter is assumed to be a linear function  $I(X)$  of  $X$ . After the heightening a certain probability of new disasters will remain. The corresponding risks, depending on  $X$ , are calculated by taking the sum  $R(X)$  of all present values of expected future losses. If we heighten the dikes, the optimal amount  $\hat{X}$  will be determined by the minimum of  $K(\hat{X}) = I(\hat{X}) + R(\hat{X})$ . The first question can be answered now by comparing the values of  $K(X)$  for  $X = 0$  and for  $X = \hat{X}$ . By heightening in a non-optimal way we suffer avoidable losses, which are much higher by heightening a certain amount *below* the optimal level than by heightening the same amount *above* the optimal level. The difference between the expected losses and the losses in the optimal case is called the regret. If we construct the dikes .46 meter too high this regret equals the cost of .21 meter dikeheightening, but if we construct the dikes .46 meter too low the regret equals the cost of .53 meter dikeheightening. After optimal dikeheightening the expected value of all future losses  $R(\hat{X})$  equals the costs  $I_e$  of "napierating" the exceedance probability, i.e. of dividing the exceedance probability by  $e$ , the base of the natural logarithms. The exceedance probability  $p(H)$  after optimal heightening equals the quotient of the interest  $r_e$  if  $I_e$  per annum and the value  $V$ . The optimal heightening, measured in the "napierating height" as a unit, equals the natural logarithm of the present expected value of losses per annum, divided by  $r_e$ .

Chapter 4.0 deals with a more realistic model of the situation, among others accounting for a constant increase of  $\gamma$  percent per annum of the value  $V$  ("expanding economy") and a slowly sinking away of the dikes into the sea at a constant rate. Because of the last fact the dikes have to be regenerated after some time. Accounting for a constantly expanding economy implies substituting the normal interestrate  $\delta$  by the "reduced" interestrate  $\delta' = \delta - \gamma$ . The consequences of non-linearity of the function  $I(X)$  and the inaccuracies and uncertainties of the constants used are discussed.

This chapter is followed by two non-mathematical chapters, (5.0 and 6.0). in the first of which the possibility is mentioned of improving the security by dividing the endangered parts of the country into "watertight compartments". The second one deals with "goods" having not only a purely economical value, such as human lives, cultural goods and the value of keeping control of the situation. Presumably the best way of accounting for these values is to multiply the value  $V$  of the material goods by a certain factor, e.g. a factor 2.

All these theoretical considerations are used in chapter 7.0 for determining the optimal height of the southern dikes of Central Holland. Some of the relevant constants are rather badly known, especially  $V$ . Using a rather low estimate for  $V$  the optimal height is found to be around N.A.P. + 6 meter. After optimal dikeheightening the present value of all future losses amounts to 13.500 millions = 13.5 M (1 M = 1 "megaguilder" =  $f 10^6$ ) = .0135 G (1 G = 1 "gigaguilder" =  $f 10^9$ ); the exceedance probability is  $8.10^{-6}$  per annum, or .0008 per century. Besides, attention is paid (albeit on a non-quantitative level) to the desirability and possibility of improving the defence against the sea on the sea front itself, in particular with regard to the "breaches" at Scheveningen, Katwijk and IJmuiden. The very high optimal level for the southern dikes as well as the discussion on the sea front both suggest the desirability of dividing Central Holland into a number of watertight compartments.

With regard to the Delta-area the situation is different. In this case our problem is not an economic decision problem anymore, since the Delta Plan has already been accepted by Government and Parliament. Nevertheless it is

<sup>1)</sup> N.A.P. = Ordnance datum of Amsterdam = mean sea level.

of some interest to examine the economic background of this acceptance. The economic balance sheet of the Delta Plan drawn up by J. TINBERGEN <sup>1)</sup> has a closing entry for security and other imponderable values. According to the tentative estimates available at present, accepting the project implies a value of at least 6500 millions = 6.5 G to be protected in the Delta-area. If the estimates used do not differ too much from the real values of the constants, the decision taken can already be defended on purely economical grounds alone. Because of the rather crude estimates of the constants, it is possible that the decision taken leans, besides the economical grounds on the "imponderable values" also. The chapter closes with a discussion of that case and more particularly of the problem, how the value we attribute to the preservation of a part of our country is to be determined.

Each chapter concludes with a summary of the results. The mathematical derivations are inserted in separate sections.

## 0.7 RÉSUMÉ

### Le problème des décisions au point de vue d'économie pour la protection des Pays-Bas contre les marées-tempête

Le côté économique du problème de la protection de notre pays contre les marées-tempête constitue le sujet du présent compte-rendu du à Prof. Dr. D. van Dantzig qui se compose de plusieurs chapitres. Une sécurité complète étant impossible à réaliser, nous avons à envisager des problèmes de l'optimum du type suivant: nous aurons à déterminer la hauteur optimum des digues et la somme optimum d'argent à investir dans la construction des digues, en tenant compte des frais de construction comme fonction du niveau, des pertes subies lorsque des ruptures de digue se produisent et de la repartition de fréquence des hauteurs des niveaux de mer.

Le chapitre 1.0 contient une introduction au problème et un résumé du contenu du rapport. Dans le chapitre 2.0 se trouve un aperçu des aspects statistiques du problème qui sont discutés dans la Contribution II.1.

Les conclusions principales sont les suivantes:

1. La différence d'hauteur  $a_2$  qui réduit à moitié la probabilité de dépassement est environ de 0 m.23, la différence d'hauteur  $a_{10}$  qui réduit cette probabilité à un dixième est environ de 0 m.78 et la différence d'hauteur  $a_e$  qui la réduit à  $1/e$  environ de 0 m .34.
2. Le niveau qui sert de base est environ à N.A.P. + 5 m .10 <sup>2)</sup>. Il a une probabilité de dépassement de  $10^{-4}$  à Hoek van Holland.
3. La probabilité de dépassement du niveau de la marée haute qui a eu lieu le premier février 1953 et qui se trouve à N.A.P. + 3 m .85, est de 0,0045.

Afin de donner une idée nette des méthodes utilisées, on a résolu le problème dans le chapitre 3.0 en partant des suppositions, assez simplificatrices, qui suivent. Nous considérons une partie déterminée du pays, par exemple un polder situé au-dessous du niveau de la mer et entouré de tous côtés de digues protectrices. Nous admettons l'existence d'un niveau critique  $H_0$ , caractéristique de la situation actuelle, choisi de telle sorte qu'une marée haute qui à Hoek van Holland reste au-dessous du niveau en question, ne cause nullement de dégâts, tandis qu'une marée haute qui le dépasse détruit tout dans le polder. Autrement dit, la probabilité d'une perte équivaut la probabilité de dépassement  $p(H_0)$  du niveau critique  $H_0$ . (Il faut noter qu'on ne tient compte que de pertes totales). La valeur  $V$  qui doit être protégée par les digues comprend en dehors de tout ce qui se trouve actuellement dans le polder, tous les dommages qui résultent de la perte initiale. Tant  $p(H_0)$  que  $V$  sont supposés d'être constants dans le temps. Maintenant deux questions s'imposent auxquelles il faudra chercher une réponse: 1) En envisageant le problème d'un point de vue d'économie, devons nous augmenter la hauteur critique ou bien vaut-il mieux la laisser telle quelle? 2) Si nous nous décidons à relever le niveau critique, quelle sera la hauteur optimum des digues? Le coût de la surélévation des digues de  $X$  mètres est supposé d'être une fonction linéaire  $I(X)$  de  $X$ . Après la surélévation une certaine probabilité subsiste que de nouveaux désastres se produisent. On calcule les risques correspondants, qui dépendent évidemment de  $X$ , en faisant la somme  $R(X)$  de toutes les valeurs actuelles des pertes éventuelles à venir. La quantité optimum  $\hat{X}$  sera déterminée alors par le minimum de  $K(X) = I(X) + R(X)$ . On peut répondre maintenant à la première question, en comparant les deux valeurs de  $K(X)$ ,  $X$  ayant la valeur 0 et la valeur  $\hat{X}$ . Si nous surélevons les digues d'une quantité différente de l'optimum, nous subirons des pertes qui pourront être évitées et qui seront beaucoup plus grandes lorsque nous surélevons les digues d'une certaine quantité *au-dessous* du niveau optimum, que lorsque nous les surélevons de la même quantité *au-dessus* du niveau optimum. La différence entre les pertes attendues et celles dans le cas optimum s'appelle „le regret”. Si nous surélevons les digues de 0 m .46 de trop, le regret équivaut le coût d'une surélévation de 0 m .21, mais si par contre nous les surélevons de 0 m .46 de trop peu, le regret équivaut le coût d'une surélévation de 0 m .53. Après une surélévation optimum l'espérance mathématique du montant de toutes les pertes futures  $R(\hat{X})$  est égale aux frais  $I_e$ , nécessaires à surélever la digue de  $a_e$  m. La probabilité de dépassement  $p(\hat{H})$  après la surélévation optimum est égale au quotient de l'intérêt annuel  $r_e$  de  $I_e$  et de la valeur  $V$ . La surélévation optimum, exprimée dans l'unité  $a_e$ , est égale au logarithme naturel de l'espérance mathématique actuelle des pertes annuelles, divisée par  $r_e$ .

<sup>1)</sup> See Contribution VI.

<sup>2)</sup> N.A.P. = le zéro de nivellement d'Amsterdam = niveau moyen de la mer.

Le chapitre 4.0 traite d'un modèle de la situation qui est plus conforme à la réalité et qui nous tient e.a. compte de l'augmentation constante de la valeur  $V$  de  $\gamma$  pourcents annuels („expanding economy”) et de l'enfoncement lent et constant des digues dans la mer. Pour cette dernière raison les digues ont besoin d'être renouvelées au bout de quelque temps. Si nous voulons tenir compte d'une économie qui se développe continuellement, nous devons remplacer le taux d'intérêt normal par le taux réduit  $\delta' = \delta - \gamma$ . Ensuite sont discutées ici les conséquences que peut avoir le caractère non-linéaire de la fonction  $I(X)$  et les imprécisions et incertitudes des constantes utilisées.

Ce chapitre est suivi par deux chapitres non-mathématiques (5.0 et 6.0). Dans le premier la question est soulevée s'il ne serait pas possible d'augmenter la sécurité en divisant les régions qui sont exposées au danger en compartiments „étanches”. Dans le deuxième il s'agit des biens n'ayant pas une valeur purement économique, tels que les vies humaines, les biens culturels et la valeur qui consiste à avoir la situation en main. Probablement le meilleur moyen de faire entrer ces valeurs en ligne compte est de multiplier la valeur  $V$  des biens matériels par un certain facteur, par exemple le facteur 2. Toutes ces considérations théoriques servent dans le chapitre 7.0 à fixer la hauteur optimum des digues méridionales de la Hollande Centrale. Quelques unes des constantes qui ont rapport à ce problème sont cependant assez mal connues, en particulier  $V$ . Si nous évaluons  $V$  à une valeur plutôt basse, la hauteur optimum est environ de N.A.P. + 6 mètres. Après une surélévation optimum la valeur actuelle de toutes les pertes futures s'élève à 13 500 millions de florins = 13.5 M (M = 1 „megagulden” =  $10^6$  florins) = 0.0135 G (G = 1 „gigagulden” =  $10^9$  florins). La probabilité de dépassement est de  $8 \cdot 10^{-6}$  par an, ou bien de 0.0008 dans un siècle. Ensuite, on s'arrête à l'intérêt qu'il y aurait à perfectionner la protection contre la mer sur la côte elle-même, en particulier à cause de la présence des brèches de Scheveningue, Katwijk et IJmuiden. Le niveau optimum très élevé que devront avoir les digues méridionales nous fait comprendre l'opportunité d'une division de la Hollande Centrale en un nombre de compartiments étanches. C'est-ce qui résulte également de la discussion du problème de la côte.

En ce qui concerne la région du Delta la situation se présente tout autrement. Là le problème n'est pas un problème de décision économique, le Plan du Delta étant d'ores et déjà adopté par le Gouvernement et voté par le Parlement. Néanmoins nous avons intérêt à examiner les conséquences économiques que peuvent bien avoir l'adoption du projet en question. Le bilan économique du Plan du Delta, dressé par J. TINBERGEN<sup>1)</sup> contient un poste final de sécurité et d'autres valeurs difficiles à préciser. D'après les évaluations provisoires dont nous disposons à présent, l'adoption du projet signifie qu'il y aura à moins une valeur de 6500 millions de florins à protéger dans toute la région du Delta. Si les évaluations ne diffèrent pas trop de la valeur réelle des constantes, la décision qu'on a prise peut dès maintenant être défendue rien que pour des raisons économiques. Les évaluations des constantes étant faites par approximation, il se peut que la décision prise se fonde en outre sur les valeurs impondérables susdites. Ce dernier chapitre se termine par une discussion du problème cité ci-dessus et en particulier du problème comment il faut spécifier la valeur que nous attachons à la préservation d'une partie de notre pays.

A la fin de chaque chapitre se trouve un résumé des résultats obtenus. Les dérivations mathématiques ont été insérées dans des subdivisions spéciales du texte.

---

<sup>1)</sup> Voir Contribution VI.

## 1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

### 1.1 Inleiding

Bij een beslissing van wijde strekking, als de aanvaarding van het Deltaplan is, wordt naast de primaire doelstelling, in casu beveiliging van volk, land en goederen tegen stormrampen, ook de economie van het project in aanmerking genomen. Zoals zo vaak, is ook hier een absoluut afdoende verwezenlijking van het doel niet bereikbaar en is de mate, waarin men de gewenste toestand kan benaderen, afhankelijk van de hoeveelheid arbeid en kapitaal, die men er aan wil besteden, dat is van het bedrag, dat men er in wil investeren.

Nu is het duidelijk, dat men een duurzaam aanvaardbare graad van veiligheid niet zal kunnen bereiken, als men slechts tot een zeer kleine investering bereid is. Anderzijds zou een àl te grote investering in het plan ten koste gaan van andere projecten, die eveneens vitale nationale belangen, zij het van andere aard, dienen. Met andere woorden: nòch de „minimale” (dat is de kleinst mogelijke), nòch de „maximale” (dat is de grootst mogelijke) investering geeft de „optimale” (dat is de economisch gunstigste) oplossing; deze ligt ergens daartussen in. Het probleem is: waar?

De hier volgende beschouwingen hebben ten doel, methoden aan te geven, met behulp waarvan zulk een „beste oplossing” (in nog nader te preciseren zin) bij benadering kan worden bepaald, telkens wanneer de beveiliging van een deel van ons land tegen stormvloed aan de orde komt, althans indien bepaalde concrete feitelijke gegevens met voldoende nauwkeurigheid ter beschikking staan.

Deze methoden vormen een toepassing van een wiskundig-economische theorie, die in de laatste jaren, vooral in de Verenigde Staten, ontwikkeld is. Zij wordt „decision theory” genoemd, waarvoor wij de benaming „besliskunde” gebruiken. Deze methoden worden tot dusverre nog hoofdzakelijk bij militaire en bij industriële beslissingen toegepast<sup>1)</sup>.

De grondgedachte van de besliskunde is uiterst eenvoudig en vanzelfsprekend. Wanneer men voor de keuze staat, een bepaalde beslissing al dan niet te treffen, bijvoorbeeld een bepaald project (in casu het Deltaplan) al dan niet uit te voeren, tracht men zo goed mogelijk de schade te ramen, die uit niet-uitvoering zou voortvloeien, en men vergelijkt deze met de kosten<sup>2)</sup> van het plan. Indien de schade bij niet-uitvoering groter is dan de kosten bedragen, zal uitvoering van het plan dus in ieder geval economisch voordelig zijn. Zijn daarentegen de kosten groter dan de schade bij niet-uitvoering, dan zal uitvoering van het plan op andere dan economische gronden verantwoord moeten worden. Het verschil tussen kosten en schaden hangt dan samen met de waarde, die men aan de niet-economische aspecten toekent.

Algemeener: indien de beslissing een keuze inhoudt uit verschillende, binnen het bereik liggende handelwijzen, zal men zo goed mogelijk de grootte der voordelen en der nadelen trachten te ramen, die uit elk dezer handelwijzen zou voortvloeien. Men bepaalt dan die handelwijze, de „optimale” genaamd, waarbij het overwicht van de voordelen boven de nadelen zo groot mogelijk is<sup>3)</sup>.

Kenmerkend voor de besliskunde is het vooruitzien: gouverner, c'est prévoir. Vrijwel altijd geldt, dat maatregelen, die men moet improviseren als men zich door een voorzienbare noodtoestand laat overvallen, enorm veel kostbaarder zijn dan de voorzieningen, die men vooraf had kunnen treffen. Daarbij dient men rekening te houden met het feit, dat over de gevolgen, die uit de beslissing tot een bepaalde handelwijze zouden voortvloeien, nooit volledige zekerheid bestaat. Dit geldt bij ons probleem bij voorbeeld ten aanzien van de vraag, of zich in een bepaalde toekomstige periode een stormvloed zal voordoen van een zodanige omvang, dat daardoor ondanks bepaalde veiligheidsmaatregelen toch nog een ernstige ramp veroorzaakt zou kunnen worden. Het enige dat men hier kan bereiken, is op grond van beschikbare statistische gegevens over hoogwaterstanden, zo goed mogelijk de *kansen* te schatten, dat zulks onder verschillende omstandigheden zal gebeuren (vgl. 2.0).

Het beginsel der besliskunde is dus geenszins nieuw: een ieder, die een weloverwogen beslissing neemt, tracht op deze wijze te werk te gaan. Het betrekkelijk nieuwe is in de methode gelegen, en wel in het feit, dat bij het onderzoek, welke der mogelijke handelwijzen de optimale is, *wiskundige* redene-

<sup>1)</sup> Doorgaans duidt men deze toepassingen aan met de Amerikaanse term „Operations Research” of kortweg: „O.R.”.

<sup>2)</sup> Precieser: het saldo op de balans van kosten en andere nadelen tegenover voordelen.

<sup>3)</sup> Of: het overwicht van de nadelen boven de voordelen zo klein mogelijk.

ringen worden ingeschakeld, dat in het bijzonder voor het beoordelen van onzekere gevolgen de *kansrekening* wordt gebruikt en dat aanvankelijk onbekende kansen met behulp van *statistische* methoden uit waarnemingen worden afgeleid.

Voor toepassing van de methode is, strikt genomen, nodig, dat de voor- en nadelen alle met een zelfde maat kunnen worden gemeten. Meestal drukt men deze alle in *geldwaarde* uit („winsten” tegenover „verliezen” of „schaden”), maar men zou daarvoor soms ook andere maten kunnen gebruiken.

In het hier ter discussie staande probleem van de beveiliging tegen stormvloeden leidt deze beperking in de toepasbaarheid tot moeilijkheden, daar bij een stormramp naast economische goederen ook niet-economische waarden, in het bijzonder mensenlevens, verloren kunnen gaan. We zullen deze moeilijkheid in 6.0 nader onder ogen zien en *voorlopig* (met name in 3.0 en 4.0) alleen de in geld waardeerbare economische schaden in aanmerking nemen.

Sommigen stuit een overwegend economische beschouwing tegen de borst; zij vinden, dat daardoor menselijke en ethische gevoelens onvoldoende tot hun recht komen. Hoewel de realiseerbaarheid van ethische en humanitaire overwegingen bij al te grote kosten toch te loor gaat, zullen wij ons anderzijds in 6.0 en elders van de grenzen, aan de zuiver economische behandelingswijze gesteld, volledige rekenschap geven.

Ten einde deze bijdrage voor een zo groot mogelijke lezerskring begrijpelijk te houden, hebben wij de resultaten zoveel doenlijk op algemeen verstaanbare wijze weergegeven. De wiskundig ongeschoolde lezer kan de naar het einde van de paragrafen verschoven wiskundige beschouwingen (3.2, 4.2, 8.2) overslaan, mits hij zich realiseert, dat deze de eigenlijke basis vormen, waarop de als popularisering in verbale vorm gegeven uitkomsten berusten. Ook de gebruikte wiskunde hebben wij uiterst elementair gehouden, daar wezenlijk dieper gaande wiskundige methoden (welker toepassing zeer wel mogelijk geweest ware) ten gevolge van de onzekerheden in de waarnemingsuitkomsten toch niet veel vrucht zouden afwerpen.

## 1.2 Inhoud van de bijdrage

In 2.0 wordt een korte samenvatting gegeven van de voor het vervolg benodigde resultaten van een afzonderlijk statistisch onderzoek, dat eveneens door het Mathematisch Centrum te Amsterdam is verricht. Een uitvoeriger beschrijving is opgenomen in Bijdrage II.1.

In 3.0 en 4.0 wordt vervolgens de methode ter behandeling van het veiligheidsprobleem zelf uiteengezet. En wel hebben wij, ten einde haar belangrijkste aspecten zo duidelijk mogelijk te doen uitkomen, eerst een aantal complicerende bij-omstandigheden weggelaten en in 3.0 een zo eenvoudig mogelijk geval behandeld, waarin ondersteld is, dat deze complicaties nog niet optreden, en dat dus een sterke vereenvoudiging van de werkelijkheid inhoudt. Dit hoofdstuk is gesplitst in een „algemeen gedeelte”, voor de lezing waarvan geen kennis van wiskunde is vereist (3.1) en waarin de grondgedachten der methode en een deel der conclusies in woorden zijn omschreven, en een „wiskundig gedeelte” (3.2), dat door lezers, die weinig wiskundig ontwikkeld zijn, kan worden overgeslagen, hoewel de daarin geformuleerde conclusies I t/m V voor de toepassing der theorie van fundamentele betekenis zijn. Ook hier hebben wij de voor het lezen benodigde wiskundige kennis zoveel doenlijk beperkt.

In 4.0 worden de belangrijkste der in 3.0 uit didactische overwegingen toegepaste, maar zakelijk niet gerechtvaardigde vereenvoudigingen opgeheven. Deze hebben betrekking op de noodzaak, rekening te houden met de seculaire toeneming van de waarde der goederen, die zich in een polder bevinden, en op de relatieve bodemdaling van ons land ten opzichte van de zeespiegel. Daar het niet mogelijk was, de grootte van deze bodemdaling met voldoende betrouwbaarheid en voldoende nauwkeurigheid te leren kennen, hebben wij getracht, een zodanige oplossing van het probleem te geven, dat de onbekendheid van deze grootte niet stoort. Dit hoofdstuk is op overeenkomstige wijze als 3.0 gesplitst in een algemeen en een wiskundig gedeelte. In dit laatste hebben we nog nagegaan, welke wijzigingen optreden als ook andere tot dusverre gemaakte onderstellingen niet meer gerechtvaardigd zijn, terwijl we voorts de invloed van de onzekerheden in de feitelijke gegevens op de optimale dijkverhoging geschat hebben.

Alvorens deze algemeen theoretische overwegingen toe te passen op de concrete beslissingsproblemen, hebben wij een tweetal hoofdstukken (5.0 en 6.0) van niet-wiskundige aard ingelast, die echter voor het vervolg nodig zijn. In 5.0 hebben wij de mogelijkheid besproken, de veiligheid in een gebied te verhogen door het te verdelen in „waterdichte compartimenten”, hetgeen vooral voor 7.0 van belang is,

terwijl wij in 6.0 de niet-economische, ook wel als „ideeël” of „imponderabel” aangeduide waarden in de beschouwing hebben opgenomen. Het blijkt, dat de wiskundig-economische en statistische methoden ons hier inderdaad in de steek laten en dat subjectieve overwegingen niet geheel vermeden kunnen worden. Wel echter kunnen de genoemde methoden er toe bijdragen, de subjectieve keuzen op een meer overwogen en zich zelf gelijkblijvende wijze te doen geschieden dan zonder deze mogelijk is.

In 7.0 is vervolgens het fundamentele probleem van de beveiliging van Centraal-Holland behandeld. Voor zover het de bescherming aan de zuidzijde betreft, is dit een directe toepassing van de in 3.0 en 4.0 gegeven theorie, hoewel zich nog een fundamentele moeilijkheid voordoet. Deze heeft betrekking op de vraag, hoe de „waarde” van een deel van ons land moet worden beoordeeld. Doordat bovendien een aantal benodigde feitelijke gegevens niet met voldoende nauwkeurigheid bekend is, kan de optimale dijkhoogte niet met die graad van nauwkeurigheid en van zekerheid worden bepaald, die eigenlijk gewenst – en theoretisch mogelijk – ware. Met betrekking tot de versterking van de zwakke plekken in de kustlijn zelve, alsmede tot de „waterdichte compartimenten” hebben wij gemeend, ons tot algemene opmerkingen te moeten beperken. Kwantitatieve resultaten dienaangaande kunnen worden verkregen, indien verschillende nog ontbrekende gegevens ter beschikking zullen staan. Splitsing van 7.0 in een algemeen en een wiskundig gedeelte bleek niet wel mogelijk en ook niet strikt noodzakelijk te zijn. Slechts in een klein gedeelte van dit hoofdstuk worden namelijk de wiskundige delen van 3.0 en 4.0 rechtstreeks toegepast.

In 8.0 is vervolgens de economische achtergrond van het Deltaplan onderzocht. Aangezien dit plan reeds door regering en parlement is aanvaard, ligt hier geen besliskundig probleem meer. Ten einde een dieper inzicht te verwerven in de vraagstukken, welke samenhangen met problemen van de omvang van het Deltaplan, is onderzocht, welke conclusies uit het aanvaarden van dit plan getrokken kunnen worden. Ook de in dit hoofdstuk gegeven-getallenwaarden kunnen alleen als globale schattingen worden beschouwd.

Aan het einde van ieder hoofdstuk zijn de resultaten en conclusies kort samengevat, terwijl aan het einde van de bijdrage nog een tabel van de gebruikte numerieke waarden en de uitkomsten is toegevoegd.

### 1.3 De draagwijdte van het onderzoek en haar beperkingen

Alvorens dit programma uit te voeren, willen wij echter nog enige opmerkingen maken, die merendeels op de draagwijdte van ons onderzoek en haar beperkingen betrekking hebben.

De bij sommigen voorkomende mening, dat wiskundige behandeling van een probleem volmaakte zekerheid schept, houdt een grove overschatting van de toepasbaarheid der wiskunde in. Bij toepassing van onze methoden op de concrete werkelijkheid kunnen wij de theoretisch mogelijke graad van nauwkeurigheid en zekerheid niet bereiken. Dit ligt evenwel niet aan de wiskunde, maar – voor zoverre niet-economische overwegingen nog niet in aanmerking genomen behoeven te worden – wel aan onze ontoereikende kennis van deze concrete werkelijkheid zelve. De beschikbare wiskundige methoden – waarvan wij hier slechts een zeer klein deel hebben benut – zouden vrijwel toereikend zijn voor veel nauwkeuriger en zekerder bepaling van het economische optimum, indien wij omvangrijker, gedetailleerder en precieser kennis zouden bezitten over een aantal waarneembare verschijnselen van economische, geofysische en waterstaatkundige aard dan thans het geval is.

Deze onzekerheid kan ten gevolge hebben, dat de mate van veiligheid, die verkregen wordt, kleiner is dan de berekende, hetgeen tot meerdere stormvloedschade kan leiden. Ook echter kan zij er toe leiden, dat men dijken zwaarder bouwt dan eigenlijk nodig ware, er dus onnodig veel geld in investeert. In beide gevallen vloeit dus uit onvoldoende wetenschappelijke kennis een economisch verlies voort, dat zeer veel groter kan zijn dan de bedragen, die moeten worden besteed om kennis als de thans benodigde te verwerven. Economische verliezen van deze aard vormen dus de prijs, die we voor onze betrekkelijke „onkunde” moeten betalen, en tonen aan, dat geld, aan wetenschappelijk onderzoek besteed, soms geheel onverwacht in een latere periode tot zeer grote besparingen kan leiden en dan een uitzonderlijk hoog rendement heeft.

De bedoelde onzekerheden, die we in 4.0, 7.0 en 8.0 nader zullen bespreken, zouden anderzijds tot de mening kunnen leiden, dat een wiskundige behandeling van het gestelde probleem in het geheel geen zin heeft en dat men aan de uitkomsten daarvan slechts geringe betekenis kan toeschrijven. Dit



is in overeenstemming met de mening van sommigen, dat wiskundige behandeling van vragen, waarbij menselijke activiteit betrokken is, onmogelijk is. Toch is dit geenszins het geval. Want door het zo zorgvuldig mogelijk in acht nemen van alle factoren, verkrijgen we weliswaar geen volkomen nauwkeurig en volkomen betrouwbaar, maar wel een redelijk nauwkeurig en redelijk betrouwbaar en in ieder geval een zo nauwkeurig en betrouwbaar mogelijk resultaat. Het feit, dat we ons van de onzekerheden zo goed mogelijk rekenschap geven, kan ons er voor behoeden, aan deze resultaten een à te absolute betekenis toe te kennen. In geen geval echter kan men zonder een exacte behandeling een even grote nauwkeurigheid en betrouwbaarheid bereiken, daar iedere voldoende gefundeerde wetenschappelijke redenering ook in de wiskundige analyse kan worden opgenomen. De niet-wetenschappelijke en de subjectieve overwegingen kunnen ook door wiskundige behandeling niet ondervangen worden, weshalve een beslissing, waarop zulke overwegingen een grote invloed hebben, wiskundig ook niet volledig kan worden bepaald. Wel echter kan men, gegeven de beslissing, met onze methoden nagaan, welke economische waarde met de niet-economische waarden overeenkomt. De waarde van de wiskundige behandelingswijze is vooral daarin gelegen, dat zij tot schattingen leidt, die voor praktische doeleinden meestal wel voldoende zijn, en dat zij ons in staat stelt, ons over de *mate* van betrouwbaarheid daarvan, ook kwantitatief, een beeld te vormen: wiskundige *methoden* zijn dienstig om de grenzen der geldigheid van bepaalde wiskundige *formules* te leren kennen.

Een belangrijke beperking, die wij ons hebben moeten opleggen, is de volgende.

Overstroming door de zee is niet het enige gevaar, dat ons land bedreigt. Op zichzelf minstens even belangrijk is het behoud van onze beschaving, in de wijdeste zin van het woord, het behoud en de verhoging van ons welvaartspeil en het behoud van onze „vrijheid”, welk begrip wij in deze context menen te mogen interpreteren als onze beschikkingsmacht over de wijze, waarop beschaving en welvaart gehandhaafd moeten worden, en over de wijze, waarop deze begrippen geïnterpreteerd moeten worden.

Het is duidelijk, dat een afwegen van deze belangen tegen het overstromingsgevaar onze opdracht en onze competentie te buiten gaat en een zaak van algemeen regeringsbeleid, alsmede van budgetair karakter is <sup>1)</sup>. Hoewel ook hier toepassing van beslistkundige methoden ongetwijfeld groot nut zou afwerpen, zou dit een geheel anders gericht onderzoek vergen. Om deze reden hebben wij de budgetaire beperkingen, waardoor somtijds een overigens optimale handelwijze niet kan worden uitgevoerd, hier volledig buiten beschouwing gelaten, al zouden de beschikbare wiskundige methoden het bij voldoende feitelijke gegevens wel mogelijk maken, deze mede in aanmerking te nemen.

Deze bijdrage heeft natuurlijk allerminst de pretentie, een volledige behandeling van het economische probleem der beveiliging tegen stormvloed te geven, noch ook de pretentie tot *definitieve* numerieke resultaten te leiden. Dit zou o.a. een technische kennis, veelal ook van plaatselijke omstandigheden, vereisen, waarover wij als wiskundigen niet beschikken. Onze bedoeling is dan ook wezenlijk bescheidener, te weten het aangeven van een eenvoudige *methode*, met behulp waarvan de ter zake deskundigen de definitieve resultaten kunnen verkrijgen. De in 4.0, 7.0 en 8.0 gegeven getallenwaarden dienen dan ook allereerst als een *illustratie* van de methode te worden beschouwd. Al menen wij, de uiteindelijke bepaling der getallenwaarden aan de vakkundigen te moeten en te mogen overlaten, zo hebben wij toch getracht, door het raadplegen van enkele deskundigen op de gebieden waar wij zelf geen competentie bezitten, de gegeven cijfers zo realistisch mogelijk te doen zijn. Men mag aannemen, dat de thans aanwezige hiaten in feitelijke kennis, die in de concrete toepassingen in 7.0 en 8.0 ernstige onzekerheden ten gevolge hebben, bij toepassing op analoge problemen in de toekomst ten dele zullen zijn aangevuld, waardoor methoden, als door ons geschetst, met groter nuttig effect zullen kunnen worden toegepast.

#### 1.4 Auteur en medewerkers

Het onderzoek, waarvan in dit rapport de resultaten worden medegedeeld, is op verzoek van de Deltacommissie verricht door D. van Dantzig. Voorts heeft J. Kriens er een zeer belangrijk aandeel in gehad, terwijl J. Hemelrijk ook waardevolle hulp heeft geboden. Met name is de uiteindelijke formulering van vele gedeelten en in het bijzonder van 8.0 slechts dank zij de medewerking en de kritische en constructieve zin van Kriens tot stand gekomen.

---

<sup>1)</sup> Om analoge redenen zijn alle financieringsvragen buiten beschouwing gebleven.

Voorts zijn wij aan Ir. W. C. Bischoff van Heemskerck, Prof. Dr. G. Th. J. Delfgaauw, Prof. Dr. J. B. D. Derksen, Dr. R. J. P. van Glinstra Bleeker, Prof. Dr. J. F. Koksmas, Prof. Mr. J. G. Koopmans, Dr. A. W. G. Koppejan, Prof. Dr. G. L. Smit Sibinga, Prof. Dr. H. Theil, Prof. Ir. J. Th. Thijssse, Prof. Dr. J. Tinbergen, Dr. Ir. J. van Veen, Ir. F. J. de Vos en Prof. P. de Wolff grote dank verschuldigd voor de verstrekte gegevens en belangrijke opmerkingen, in soms langdurige en steeds interessante discussies gemaakt, die in de tekst zijn verwerkt.

Ten slotte danken wij het Centraal Bureau voor de Statistiek en het Centraal Planbureau voor het maken van schattingen van verschillende, in dit onderzoek gebruikte grootheden.

### 1.5 Samenvatting en conclusies van 1.0

1. In deze bijdrage worden methoden ontwikkeld, met behulp waarvan men de economisch gunstigste („optimale”) hoogte van dijken, die een gedeelte van ons land tegen overstroming door de zee beschermen, approximatief kan bepalen, indien bepaalde feitelijke gegevens met voldoende betrouwbaarheid en nauwkeurigheid bekend zijn.

2. Deze methoden behoren tot het gebied der „besliskunde” („decision theory”) en berusten op wiskundige en statistische methoden.

3. Overwegingen van budgetaire aard en financieringsvragen vallen buiten het bestek van deze bijdrage.

4. Bij de toepassingen op de concrete problemen van Centraal-Holland en het deltagebied zijn niet alle benodigde gegevens met voldoende nauwkeurigheid bekend, zodat de daarop betrekking hebbende conclusies een geringere graad van zekerheid en nauwkeurigheid bezitten dan wenselijk en theoretisch mogelijk ware.

5. Deze bijdrage heeft daarom vooral een methodologisch karakter. De in 4.0, 7.0 en 8.0 te geven getallenwaarden zijn dan ook allereerst van belang als illustratie der methoden. Toch zijn deze zo realistisch mogelijk gekozen.

## 2.0 UITKOMSTEN VAN STATISTISCH ONDERZOEK

### 2.1 De grondgegevens

Ter voorbereiding van de besliskundige beschouwingen in 3.0 moeten wij enkele resultaten samenvatten, die betrekking hebben op de waterstanden aan onze kust.

Er is voor iedere plaats een bepaald peil, dat in een lange periode *gemiddeld éénmaal* per jaar door het zeeniveau overschreden<sup>1)</sup> wordt en dat we het „jaarpeil” zullen noemen. Voor Hoek van Holland, de peilschaal, waarover we de beste gegevens bezitten en de enige, die we zullen beschouwen, berekend over de jaren 1888 t/m 1956, bedroeg dit jaarpeil N.A.P. + 2,20 m; gedurende die 69 jaren werd dit peil 70 maal overschreden<sup>2)</sup>. We zeggen „gemiddeld”, want in sommige jaren wordt dit peil niet, in andere tweemaal of vaker overschreden. Ook het gemiddelde van het aantal overschrijdingen van het jaarpeil gedurende een korte reeks van jaren kan aanzienlijk van 1 verschillen.

Bekender is een hoger peil, *grenspeil* genaamd, dat gemiddeld éénmaal per *twee* jaar wordt overschreden. Vloedstanden, die dit peil overschrijden, worden *stormvloeden* genoemd. Voor Hoek van Holland wordt voor dit peil wel N.A.P. + 2,42 m opgegeven; voor de jaren 1888 t/m 1956 bedroeg deze stand N.A.P. + 2,39 m. Het verschil tussen grenspeil en jaarpeil is dus ongeveer 0,19 m. Evenzo zijn er bepaalde peilen, die achtereenvolgens gemiddeld éénmaal per 3 jaar, per 4 jaar, per 5 jaar, enz. overschreden worden.

In plaats van met het aantal jaren, waarin een bepaald peil gemiddeld éénmaal overschreden wordt, is het gemakkelijker, met het omgekeerde van dit getal te werken. Dit wordt de *overschrijdingsfrequentie* genoemd. Met andere woorden: het peil, dat gemiddeld eenmaal in 1, resp. 2, resp. 3, enz.

<sup>1)</sup> We zeggen kort: „overschreden” voor de langere uitdrukking: „bereikt of overschreden”.

<sup>2)</sup> Door de beperkte nauwkeurigheid, waarmee peilschalen kunnen worden afgelezen, kan natuurlijk geen exacte gelijkheid van het aantal overschrijdingen en het aantal jaren verlangd worden.

jaren overschreden wordt, heeft een overschrijdingsfrequentie van 1, resp.  $\frac{1}{2}$ , resp.  $\frac{1}{3}$  enz. We vinden dan voor de jaren 1888 t/m 1956 de volgende tabel van overschrijdingsaantallen en overschrijdingsfrequenties. Deze laatste zijn verkregen door de aantallen overschrijdingen alle door het aantal jaren, dus 69, te delen.

De rij van waargenomen overschrijdingsfrequenties verloopt zeer onregelmatig. Bij het bestuderen van de (hier niet weergegeven) gedetailleerde lijst van waterstanden, die in de genoemde periode bereikt zijn, blijkt dit nog duidelijker. Volgens de Jaarboeken der Waterhoogten van de directie Waterhuishouding en Waterbeweging van de Rijkswaterstaat bij voorbeeld is in deze periode geen enkel niveau tussen N.A.P. + 2,76 m en 3,00 m voorgekomen, met uitzondering van N.A.P. + 2,96 m à 2,97 m, welk peil driemaal bereikt werd, hoewel men veeleer zou verwachten, dat als drie waterstanden tussen die twee niveaus optreden, deze gelijkmatiger over het interval er tussen verspreid zouden zijn. Dergelijke bijzonderheden worden als „toevallig” beschouwd, dat wil zeggen, dat het niet aannemelijk is, dat zij zich in andere lange reeksen van jaren (bijv. in de eerstvolgende 70 jaar) evenzo zullen voordoen.

Men vervangt daarom de rij van overschrijdingsfrequenties door een regelmatigere verloopende rij van getallen, die men de *overschrijdingskansen* der bijbehorende niveaus noemt. De in een bepaalde periode werkelijk waargenomen overschrijdingsfrequenties worden dan beschouwd als uit deze kansen te zijn ontstaan door „toevallige afwijkingen” in de bovenbedoelde zin. Deze kansen kunnen op grond van de waarnemingen niet exact *berekend*, maar slechts *geschat* worden. Naast de onvermijdelijke onzekerheden, veroorzaakt door het kleine aantal zeer hoge waterstanden, is bij ons probleem een belangrijke bron van onzekerheid gelegen in het bepalen der afzonderlijke waterstanden zelf, welke laatste op zijn minst wel meerdere centimeters bedraagt.

Uit de tabel, waarvan tabel 2.1.1 een uittreksel is, kan worden afgelezen, dat, uitgaande van een of ander peil, bij een ongeveer 0,20 m hoger gelegen peil een *ongeveer* half zo grote overschrijdingsfrequentie behoort. De niveaus N.A.P. + 2,80 m, 3,00 m en 3,20 m zijn bijv. in de genoemde periode respectievelijk 7, 4 en 2 maal overschreden; hun overschrijdingsfrequenties zijn dus respectievelijk  $\frac{7}{69}$ ,  $\frac{4}{69}$  en  $\frac{2}{69}$ . Er treden echter allerlei onregelmatigheden op. Zo zijn er bij voorbeeld bij de zeer lage waterstanden systematische afwijkingen en bij de zeer hoge „toevallige” afwijkingen (hetgeen, als gezegd, ten gevolge van de kleine aantallen onvermijdelijk is).

De in Bijdrage II.1 besproken statistische analyse leert, dat men voor de *kansen* het volgende mag aannemen (althans voor die niveaus, die voor het beslissingsprobleem van belang zijn). *Uitgaande van enig niveau wordt de overschrijdingskans gehalveerd door over te gaan tot het 0,23 m hoger gelegen niveau.* We zeggen daarom, dat 0,23 m de *halveringshoogte* (van de kansen) is. Afrondend kunnen we ook zeggen, dat de halveringshoogte (bijna)  $\frac{1}{4}$  meter bedraagt. Het getal van 0,23 m is een *schatting* van de halveringshoogte. Men moet rekening houden met de mogelijkheid, dat deze in werkelijkheid wat groter of wat kleiner zal zijn, en ook dat deze niet helemaal onafhankelijk is van het uitgangsniveau. Het is echter weinig aannemelijk, dat bij uitgebreider en betrouwbaarder statistisch materiaal waarden, kleiner dan 0,21 m of groter dan 0,26 m zouden worden verkregen, dat wil zeggen, dat de fout meer dan ongeveer 10 % zou bedragen.

Opgemerkt moet worden, dat ondanks de in de schatting van de halveringshoogte gelegen onzekerheid, deze statistisch bepaalde grootte wezenlijk beter bekend is dan de andere benodigde grootte. Een fout van minder dan 10 % heeft op de verdere conclusies geen invloed van betekenis. We kunnen dus de statistisch bepaalde halveringshoogte van circa 0,23 m als vaststaand beschouwen.

Tabel 2.1.1  
Aantallen overschrijdingen en overschrijdingsfrequenties van enige peilen gedurende de jaren 1888 tot en met 1956

H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen	Overschrijdings- frequentie
2,20	70	1,0145
2,30	49	0,7101
2,40	34	0,4928
2,50	28	0,4058
2,60	21	0,3043
2,70	11	0,1594
2,80	7	0,1014
2,90	7	0,1014
3,00	4	0,0580
3,10	2	0,0290
3,20	2	0,0290
3,30	1	0,0145
:	:	:
3,80	1	0,0145
3,90	0	0,0000

Evenzo werd voor de *decimeringshoogte* 0,78 m of (ruim)  $\frac{3}{4}$  meter gevonden <sup>1)</sup>. Dit wil zeggen, dat, uitgaande van een bepaald niveau, het 0,78 m hoger gelegen niveau een tienmaal zo kleine kans heeft overschreden te worden. Een hoogteverschil van ruim 1 m (de preciesere schatting bedraagt 1,02 m) behoort dus bij een verhouding 1 : 20 van de overschrijdingskansen. Ook bij deze hoogteverschillen moet met de mogelijkheid van een procentuele fout van ongeveer 10 % rekening worden gehouden.

In bovengenoemde bijdrage is tevens de vraag onder ogen gezien, in hoeverre deze resultaten ook op de hoogst waargenomen waterstanden toepasbaar zijn, alsmede op nog hogere, nog niet waargenomen, mogelijke toekomstige waterstanden. Daarbij is gebleken, dat er voor de hoogteverschillen, die bij het beslissingsprobleem voorkomen, inderdaad geen reden is om aan te nemen, dat in de halveringshoogte veranderingen optreden, voldoende groot om in aanmerking genomen te worden en de resultaten van het onderzoek belangrijk te beïnvloeden <sup>2)</sup>.

Volgens genoemde bijdrage is de overschrijdingskans van het op 1 februari 1953 in Hoek van Holland waargenomen peil van N.A.P. + 3,85 m: 0,0045.

## 2.2 Het door de Deltacommissie ingevoerde basispeil <sup>3)</sup>

Door de Deltacommissie is in haar Vijfde Interimadvies als „basispeil” het niveau ingevoerd, dat een overschrijdingskans van  $10^{-4}$  per jaar, dat is 1 % per eeuw bezit. Volgens onze schattingen bedraagt dit basispeil ongeveer N.A.P. + 5,1 m. Ook hierin ligt enige onzekerheid. Het statistisch materiaal toont, dat het weinig aannemelijk is, dat het basispeil lager dan N.A.P. + 4,90 m of hoger dan N.A.P. + 5,50 m ligt.

Het moge lijken, alsof de kans, t.w. 1 % per eeuw, dat dit basispeil ooit overschreden zal worden, zó klein is, dat men met deze mogelijkheid geen rekening behoeft te houden. Deze conclusie ware evenwel om verschillende redenen onjuist.

a. Een overschrijdingskans van 0,0001 per jaar betekent allerm minst, dat overschrijding niet eerder zal plaatsvinden dan over 10 000 jaar; men kan geenszins de mogelijkheid buitensluiten, dat deze reeds binnen enkele decennia, ja zelfs dat zij reeds het volgend jaar zou plaatsvinden. De gemiddelde leeftijd, die pasgeborenen bereiken, bedraagt thans ruim 71 jaar, maar een pasgeborene kan in het eerste jaar, de eerste week, of zelfs op de eerste dag sterven.

b. Bij een overschrijdingskans van 0,01 per eeuw is de kans, dat overschrijding binnen 50 jaar, dus nog tijdens het leven van de huidige jongere generaties zal plaatsvinden, 0,005 of  $\frac{1}{200}$  %. Een kans van  $\frac{1}{200}$  % op een grote catastrofe is echter geenszins verwaarloosbaar klein. De kans, dat een kind beneden 9 jaar binnen een jaar kinderverlamming zal krijgen, bedraagt ongeveer 0,0008; iedereen, die zijn kind laat inenten of enigerlei andere maatregel neemt om dit risico te verminderen, houdt daarmee rekening. De kans dat iemand, die een vliegreis van 6000 km onderneemt, daarbij zal verongelukken, bedraagt ongeveer 0,00002 <sup>4)</sup>; iemand die daarvoor terugschrikt, houdt daarmee rekening. Het is duidelijk, dat men aan de genoemde nog vele voorbeelden zou kunnen toevoegen <sup>5)</sup>.

c. Geen rekening is nog gehouden met de daling van de bodem van ons land ten opzichte van de zeespiegel. Het is niet nauwkeurig bekend, hoe groot deze is. Vaak wordt aangenomen, dat zij omstreeks 0,20 m per eeuw bedraagt <sup>6)</sup>, maar ook sterk afwijkende schattingen komen voor. Deze waarde

<sup>1)</sup> De decimeringshoogte wordt verkregen door de halveringshoogte door  $^{10} \log 2 = 0,301$  te delen.

<sup>2)</sup> Er is theoretisch wel enige reden om aan te nemen, dat bij nog veel hogere niveaus de halveringshoogte afneemt, dat dus de overschrijdingskansen bij toenemende hoogte wezenlijk sneller tot nul naderen dan met constante halveringshoogte overeenkomt. In het heden ten dage beschikbare statistische materiaal is evenwel nog geen spoor van zulk een vermindering van de halveringshoogte met de hoogte te bekennen. Eerder zijn er lichte, zij het niet doorslaggevende aanwijzingen voor het tegendeel, voor de mogelijkheid dus, dat de toestand nog iets gevaarlijker zou zijn dan met de berekeningen overeenstemt.

<sup>3)</sup> Zie ook deel 1.

<sup>4)</sup> Het gemiddeld aantal slachtoffers van vliegtuigrampen voor de internationale verbindingen bij Amerikaanse maatschappijen over de jaren 1951 t/m 1956 bedraagt 0,5 per 160 000 000 passagierkilometers; voor de binnenlandse verbindingen in de V.S. is dit 0,65.

<sup>5)</sup> Anderzijds zijn vele voorbeelden aan te geven, waaruit blijkt, dat men vaak met veel grotere kansen geen rekening houdt.

<sup>6)</sup> De Memorie van Toelichting bij het wetsontwerp voor de Deltawet vermeldt in Hoofdstuk II de waarden 0,15 à 0,30 m per eeuw.

zou betekenen, dat de overschrijdingskans na een eeuw verdubbeld zou zijn en *gemiddeld* over een eeuw circa 1,5 % in plaats van 1 % zou bedragen. Bovendien is de *kruindaling* van een dijk nog veel groter dan de relatieve bodemdaling <sup>1)</sup>).

De bovenstaande overwegingen samenvattende, kan men met de Deltacommissie instemmen, wanneer zij in haar Vijfde Interimadvies zegt, dat bij aanvaarding van een basispeil van N.A.P. + 5,00 m (volgens onze schattingen 5,10 m) te Hoek van Holland, overeenkomende met een overschrijdingskans van 1 % per eeuw, „de kans op rampschade tot een aanvaardbare waarde teruggebracht wordt”. *Verwaarloosbaar* is deze kans echter nog geenszins.

### 2.3 Samenvatting en conclusies van 2.0

Als samenvatting van dit hoofdstuk kunnen we dus het volgende vaststellen met betrekking tot de overschrijdingskansen te Hoek van Holland voor hoogwaterstanden, die bij het beslissingsprobleem van belang zijn.

1. De halveringshoogte en decimeringshoogte van de overschrijdingskans bedragen binnen een foutengrens van 10 % of minder: 0,23 m resp. 0,78 m. Behoudens eventuele, voor het vervolg onbelangrijke correcties zijn deze getallen niet aan redelijke twijfel onderhevig.

2. Het basispeil, dat een overschrijdingskans van  $10^{-4}$  per jaar bezit, bevindt zich op ongeveer N.A.P. + 5,1 m.

3. De overschrijdingskans van het op 1 februari 1953 bereikte niveau van N.A.P. + 3,85 m is ongeveer 0,0045.

4. Kansen van vergelijkbare kleinheid als de overschrijdingskans van het basispeil zijn met het oog op de mogelijke catastrofale gevolgen niet verwaarloosbaar.

5. Ten gevolge van bodemdaling, inklinking en zeespiegelrijzing nemen de overschrijdingskansen in de loop van de tijd toe. Afgezien nog van inklinking van de dijken is verdubbeling in een eeuw ongeveer het minste, waarmede rekening gehouden moet worden.

6. De onzekerheden in de bovengenoemde statistische grootheden zijn verwaarloosbaar in vergelijking met de overige.

7. Met in acht nemen van alle onzekerheden blijkt in ieder geval, dat de overschrijdingskansen, dus de gevaren voor overstroming door de zee, groter zijn dan ten tijde van het begin van dit onderzoek werd gedacht.

## 3.0 OPTIMALE DIJKVERHOOGING IN HET EENVOUDIGSTE GEVAL

### 3.1 Algemeen gedeelte

Ten einde de gedachtengang duidelijk te doen uitkomen, behandelen we vooreerst een ten opzichte van de werkelijkheid sterk vereenvoudigd geval. In 4.0 zal evenwel blijken, dat de vereenvoudiging geen ernstige gevolgen heeft, daar zij met behulp van enkele eenvoudige correcties opgeheven kan worden.

We beschouwen een polder of poldergebied, geheel of gedeeltelijk door dijken tegen de zee beschermd. We onderstellen, dat er bij de huidige hoogte der dijken een *bepaald* peil is, zodanig, dat een vloedstand te Hoek van Holland, die beneden dit peil blijft, *geen* schade berokkent en *iedere* vloedstand te Hoek van Holland, die het peil te boven gaat, de dijk ergens doet breken en alle goederen, die zich in de polder bevinden, *volledig* verloren doet gaan. Dit peil worde het *kritieke* peil genoemd. In ons vereenvoudigd geval is dus de kans op rampschade dezelfde als de overschrijdingskans van het kritieke peil. Zoals in de schadeverzekering ook vaak gedaan wordt, rekenen we alleen met een „total loss” – van de goederen in de polder, niet van de polder zelf –, partiële schaden als totale in rekening brengend.

We overwegen nu, de dijken over de gehele lengte zodanig te verhogen, dat *het kritieke peil* met

<sup>1)</sup> Zie ook Bijdrage V.3.

$X$  meter wordt verhoogd, ten gevolge waarvan de kans op rampschade tot een kleinere waarde wordt teruggebracht. En wel wordt deze kans, ingevolge onze onderstellingen, overeenkomstig 2.0 gehalveerd bij iedere 0,23 m  $\approx \frac{1}{4}$  meter verhoging van het kritieke peil.

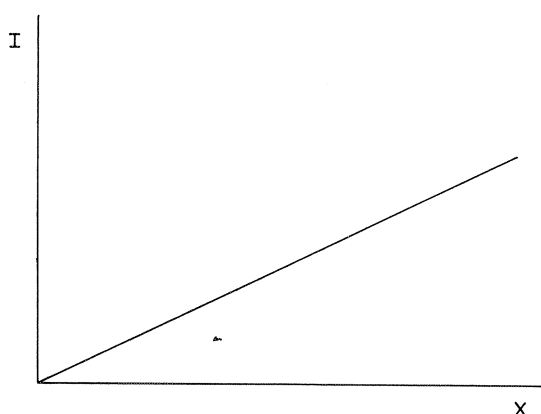
Er moeten nu twee vragen worden beantwoord, en wel:

a. Is het economisch gezien beter om de toestand te laten zoals deze is of moet men de dijken inderdaad gaan verhogen?

b. Wanneer men tot verhoging besluit, hoe groot moet men deze dan kiezen?

Wij onderzoeken nu eerst vraag *b*, waarbij de volgende punten tegen elkaar moeten worden afgewogen.

Enerzijds: de verhoging met  $X$  brengt bepaalde *kosten* met zich mee. We onderstellen voorlopig, dat de kosten  $I$  van de dijkverhoging <sup>1)</sup> *evenredig met  $X$*  zijn <sup>2)</sup>, hetgeen bij voorbeeld het geval is, als daartoe de dijk over zijn gehele lengte met  $X$  meter moet worden verhoogd <sup>3)</sup>. Zetten we de mogelijke grootten van de dijkverhoging af op een horizontale  $X$ -as en de kosten daarvan op een verticale  $I$ -as,



Figuur 3.1.1. Kosten  $I$  bij dijkverhoging met  $X$  meter

dan is dus de grafische voorstelling een rechte lijn, als in figuur 3.1.1, met behulp waarvan zich bij iedere  $X$  de kosten  $I$  laten aflezen.

Anderzijds: de verhoging met  $X$  verkleint de kans op rampschade. Evenwel, hoe groot we  $X$  ook kiezen, we beschikken over geen enkele mogelijkheid, die kans *volledig* te doen verdwijnen. Voor welk bedrag moeten we de overblijvende kans op rampschade in rekening brengen? Om dit bedrag te vinden, stellen we ons voor, dat een schadeverzekeringsmaatschappij bereid – en in staat! – ware, de overblijvende rampschade volledig te verzekeren. Het verzekerde bedrag zou dan moeten zijn: de waarde van alles, wat zich op de laaggelegen gronden in de polder bevindt, de kosten van dijkherstel en herbemaling en de indirecte schade (zo gezegde „consequential loss”), omvattende bijv. productiederving,

waardevermindering van de grond, migratiekosten der overlevenden, productiederving in andere delen van het land ten gevolge van de ontbrekende productie van de polder, alle kostenvermeerderingen, voortvloeiende uit het wegvallen van productie, verkeersmiddelen e.d., enzovoorts. Dit totale bedrag geven wij aan met  $W$ ; we zullen het de *te beschermen* (economische) *waarde* of kortweg „waarde” van het beschouwde gebied noemen en onderstellen, dat deze in een waarde vaste geldeenheid is uitgedrukt en in de loop van de tijd niet verandert. Verder nemen wij aan, dat dijkherstel tot het vóór de doorbraak bestaande peil binnen een jaar kan geschieden.

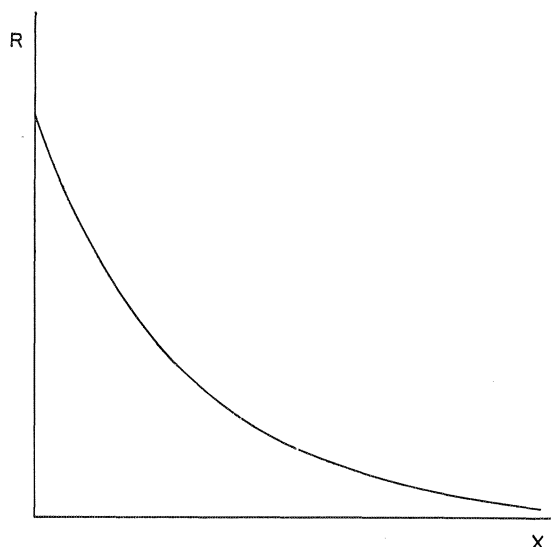
De verzekeringsmaatschappij zou nu een jaarpremie heffen, die theoretisch gelijk zou zijn aan de na dijkverhoging overblijvende „rampschadeverwachting” per jaar, dat is het product van het verzekerde bedrag  $W$  en de overblijvende kans op rampschade in dat jaar.

De gekapitaliseerde waarde van de som der jaarpremies is gelijk aan de som der contante waarden van de jaarpremies of ook de koopsom van een onmiddellijk ingaande eeuwigdurende lijfrente ten bedrage van de jaarpremie. Deze wordt de *totale (verdisconteerde) rampschadeverwachting* genoemd en hangt natuurlijk nog van  $X$  af: iedere kwart meter, die de dijk verder wordt verhoogd, halveert ongeveer de overschrijdingskans, dus ook de jaarpremie, dus ook de totale rampschadeverwachting. Deze laatste wordt grafisch voorgesteld door de kromme lijn van figuur 3.1.2.

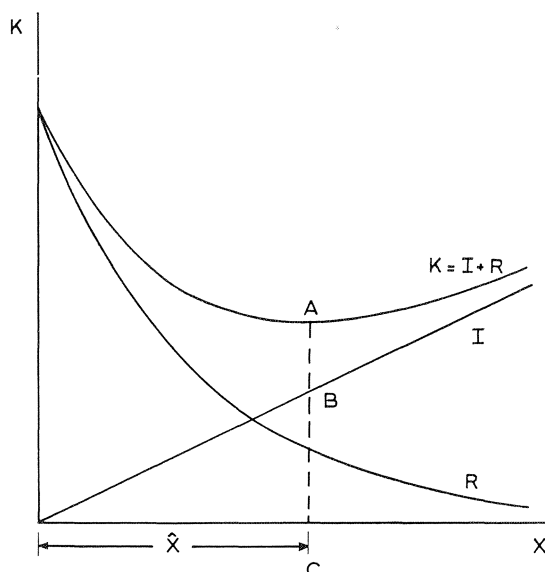
<sup>1)</sup> Eigenlijk zou men niet van „dijkverhoging” maar van (kritieke) „peilverhoging” moeten spreken, want dáárom gaat het eigenlijk. Eenvoudigheidshalve zullen we evenwel de gebruikelijker uitdrukking blijven gebruiken.

<sup>2)</sup> Onze beschouwingen in deze paragraaf blijven geldig, indien bovendien nog een vast bedrag aan initiële kosten moet worden uitgegeven, dat niet van de grootte der verhoging afhangt.

<sup>3)</sup> Dit is bij voorbeeld *niet* het geval, als verschillende delen van de dijk zeer ongelijkmatige veiligheid bieden, zodat aanvankelijk sommige delen niet, andere wel verhoogd moeten worden. Bovendien geldt de evenredigheid in het in de tekst genoemde geval slechts in eerste benadering en met uitsluiting van kleine waarden van  $X$ . Vergelijk ook 4.2.



Figuur 3.1.2. Rampschadeverwachting  $R$  bij dijkverhoging met  $X$  meter



Figuur 3.1.3. Totale kosten  $K$  bij dijkverhoging met  $X$  meter

De totale kosten  $K$  van het rijk ter bescherming van de waarde van de polder zouden dus bestaan uit:

1. de investeringskosten  $I$  in dijkverhoging;
2. de gekapitaliseerde waarde  $R$  van de gezamenlijke jaarpremies.

Daarbij kan men de grootte  $X$  der dijkverhoging nog naar willekeur kiezen.

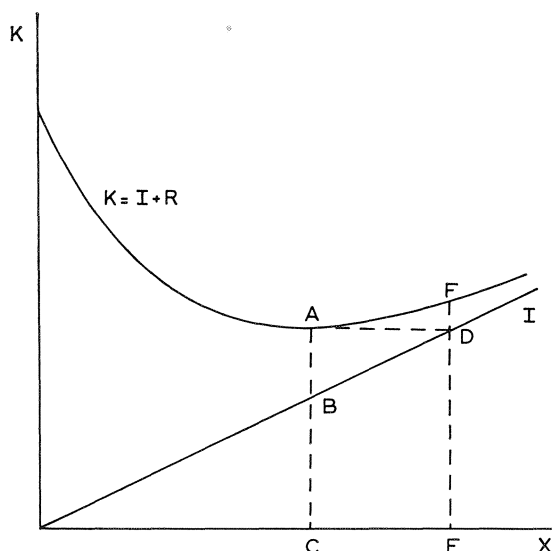
De (economisch) „optimale”, dat is de (onder de genoemde onderstellingen) ceteris paribus economisch gunstigste keuze van  $X$  die men kan doen, is nu klaarblijkelijk degene, die de som  $K = I + R$  „minimaal” (dat is: zo klein mogelijk) maakt. Deze som is in figuur 3.1.3 grafisch voorgesteld door de kromme  $K$ , uiteraard verkregen door bij ieder punt van de  $X$ -as de door de krommen  $I$  en  $R$  afgesneden verticale stukken op te tellen. De afstand  $OC$  van het laagste punt  $A$  van deze kromme tot de verticale as stelt dan de optimale dijkverhoging voor, die we door het symbool  $\hat{X}$  weergeven;  $BC$  stelt de kosten  $\hat{I}$  der optimale dijkverhoging voor en  $AB$  de overblijvende (totale verdisconteerde) schadeverwachting  $\hat{R}$ .

In 3.2 wordt aangetoond, dat deze optimale dijkverhoging, uitgedrukt in de decimeringshoogte als eenheid, gelijk is aan de (tientallige) logaritme van de verhouding van de kosten van een jaarpremie tot de rente, die opgebracht zou worden door de kosten, benodigd om de dijk 0,34 m te verhogen (altijd in die gevallen, waarin de gegevens voor Hoek van Holland kunnen worden toegepast). De bij optimale dijkverhoging overblijvende totale (verdisconteerde) rampschadeverwachting  $\hat{R}$  blijkt gelijk te zijn aan de kosten van dijkverhoging met 0,34 m (vgl. 3.4, conclusie II).

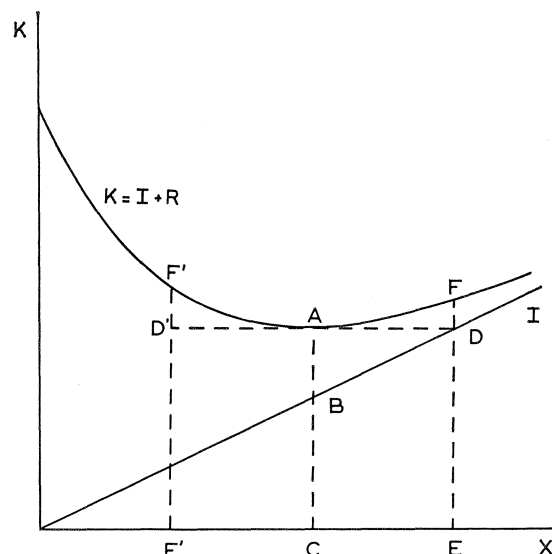
Hiermede is vraag  $b$  dus beantwoord. Het antwoord op vraag  $a$  kan nu kort zijn. Men dient na te gaan of dijkverhoging, mits deze optimaal geschiedt, voordeliger is dan handhaving van de bestaande toestand of niet (vgl. 3.4, conclusie I).

Het theoretische probleem is dus onder de vereenvoudigende onderstellingen opgelost. Alvorens verder te gaan, willen we aan het resultaat over de optimale dijkverhoging nog enige opmerkingen verbinden.

Daar de overblijvende rampschadeverwachting even groot is als de kosten van 0,34 m dijkverhoging, zou men wellicht geneigd zijn, de dijk tot 0,34 m boven het optimum te verhogen, ten einde daardoor de overblijvende rampschadeverwachting weg te krijgen. Dit is evenwel niet juist, zoals uit figuur 3.1.4 blijkt. De totale kosten  $\hat{K} = \hat{I} + \hat{R}$  bij optimale dijkverhoging worden weer voorgesteld door het lijnstuk  $CA$ . Daarvan stelt  $BC$  de dijkverhogingskosten  $\hat{I}$ ,  $AB$  de overblijvende rampschadeverwachting  $\hat{R}$  voor. Wil men dit laatste bedrag eveneens in dijkverhoging investeren, dan kan men de alsdan verkregen verhoging als volgt vinden. Men trekt de horizontale lijn  $AD$ , vervolgens de verticale



Figuur 3.1.4. Vergelijking van de kosten bij optimale dijkverhoging en een verhoging die 0,34 meter groter is



Figuur 3.1.5. Vergelijking van de totale kosten bij kleinere en grotere dijkverhogingen dan de optimale

lijn DE en verhoogt de dijk zoveel als met OE in plaats van met OC overeenkomt. Als men echter de kromme  $\hat{K} = \hat{I} + \hat{R}$  ook doortrekt, ziet men, dat bij dijkverhoging OE de overblijvende schadeverwachting wel verminderd, maar niet nul geworden is, zij wordt door DF voorgesteld. Berekening toont, dat zij tot 37% van de optimale waarde BA is teruggebracht, maar de *totale* kosten bij dijkverhoging OE, t.w. EF, zijn groter dan bij de optimale, t.w. CA.

Een opvallend kenmerk van de bovenstaande figuren is het volgende. De kromme  $\hat{R}$  in figuur 3.1.2 daalt (van links naar rechts gaande) in het begin zeer snel;  $\hat{I}$  daarentegen stijgt langzaam. Dienengevolge stijgt  $\hat{I} + \hat{R}$  in figuur 3.1.3 van A naar rechts gaande langzaam en van A naar links gaande snel, en wel is het verschil des te pregnanter, naar mate men zich verder van A verwijderd. Ook indien men de hier verwaarloosde factoren in aanmerking neemt, blijft dit verschijnsel bestaan. De betekenis er van is de volgende (figuur 3.1.5).

Het kan zijn, dat men de dijkverhoging om de een of andere reden niet optimaal kiest, dus niet gelijk aan OC, maar hetzij te groot, bijv. OE, of te klein, bijv. OE'. In beide gevallen zijn de totale kosten EF, resp. E'F' groter dan de optimale CA. Het verschil, dus de hoogte DF resp. D'F' van F resp. F' boven A zou men de „spijt” kunnen noemen, dus het bedrag, dat verloren gaat doordat men de optimale keuze gemist heeft. We zien nu uit figuur 3.1.5, dat de „spijt” bij een te *grote* dijkverhoging véél kleiner is dan bij een evenveel te *kleine* verhoging<sup>1)</sup>. Men kan zich de mate, waarin dit het geval is, aanschouwelijk maken, door het bedrag van de „spijt” uit te drukken in de grootte ener extra-dijkverhoging, die men er voor zou kunnen betalen. Enige getallen dienaangaande zijn in tabel 3.1.1 aangegeven, waarbij telkens gehele veelvoud van de halveringshoogte gebruikt zijn.

De „spijt” als men de dijk 0,46 m, dus bijna een halve meter *te hoog* maakt, komt bijvoorbeeld overeen met een verhoging van 1/5 meter; het verschil, dus 1/4 meter is winst aan veiligheid (d.i. vermindering van de overblijvende rampschadeverwachting). Maakt men echter de dijk evenveel (iets minder dan 1/2 meter) *te laag*, dan wint men enerzijds 0,46 m dijkverhogingskosten als directe besparing. Deze wordt echter verre overgecompenseerd door vermeerderde rampschadeverwachting, die met bijna één meter dijkverhoging overeenkomt. Het verschil van 0,53 m is een overbodige uitgave, de „spijt”, die ongeveer 2 1/2 maal zo groot is als bij een evenveel te *grote* dijkverhoging het geval zou zijn. Is de afwijking van de optimale keuze nog groter, dan geldt dit alles in zeer versterkte mate. Als men

<sup>1)</sup> De benaming „spijt” is overigens voor een te *grote* dijkverhoging aanvechtbaar. In alle gevallen immers, waarin een waterstand optreedt, hoger dan het kritieke peil, behorend bij de optimale dijkhoogte, maar lager dan dat, behorend bij de werkelijk tot stand gebrachte dijkhoogte, zal de „spijt” in voldoening verkeren.



Tabel 3.1.1  
„Spijt” bij niet-optimale verhoging

Afwijking van optimale dijkverhoging in m	Overblijvende schadeverwachting	„Spijt”	Overeenkomstige dijkverhoging in m
0,23 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,51 $\hat{R}$ 1,98 $\hat{R}$	0,19 $\hat{R}$ 0,30 $\hat{R}$	0,06 0,10
0,46 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,26 $\hat{R}$ 3,92 $\hat{R}$	0,62 $\hat{R}$ 1,55 $\hat{R}$	0,21 0,53
0,69 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,13 $\hat{R}$ 7,75 $\hat{R}$	1,18 $\hat{R}$ 4,70 $\hat{R}$	0,40 1,60
0,92 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,07 $\hat{R}$ 15,33 $\hat{R}$	1,80 $\hat{R}$ 11,60 $\hat{R}$	0,61 3,94
1,38 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,017 $\hat{R}$ 60,04 $\hat{R}$	3,11 $\hat{R}$ 54,94 $\hat{R}$	1,06 18,68
1,84 te hoog . . . . . te laag . . . . .	0,0043 $\hat{R}$ 235,07 $\hat{R}$	4,46 $\hat{R}$ 228,61 $\hat{R}$	1,52 77,73

bijv. de dijk 0,69 m te laag maakt, komt de overblijvende rampschadeverwachting met niet minder dan 2,61 m, de „spijt” met 1,60 m dijkverhoging, d.i. ongeveer  $2\frac{1}{4}$  maal 0,69 m, overeen.

Deze getallen zijn gebaseerd op een halveringshoogte van 0,23 m. Als deze enkele cm groter of kleiner mocht zijn (meer is het verschil zeker niet), veranderen zij een weinig, maar niet veel. Van andere, niet volledig bekende grootheden, zoals de rentefactor, de dijkbouwkosten per meter verhoging, e.d. hangen zij *niet* af.

Hier geldt dus wel in bijzonder sterke mate, dat „zuinigheid de wijsheid bedriegt”: een aanvankelijke besparing op dijkbouwkosten heeft een zéér veel grotere uiteindelijke *vermeerdering* van de totale kosten ten gevolge. Dus bijv.  $\frac{3}{4}$  meter te hoog is uiteindelijk goedkoper dan  $\frac{1}{2}$  meter te laag.

We besluiten dit gedeelte met een tweetal mogelijke tegenwerpingen.

Voor eerst zou men bezwaar kunnen maken tegen het gebruik van de rampschadeverwachting alsof deze een werkelijk verlies is. Dit is echter op de volgende gronden gerechtvaardigd. In de dagelijkse industriële praktijk worden thans reeds zeer vele beslissingen op kleine schaal op de basis van de wiskundige verwachting van winst of verlies genomen en het ligt in de rede, dat dit in de toekomst meer en meer, óók met beslissingen van grote draagwijdte, het geval zal zijn.

Onder voorbehoud, dat bij alle beslissingen de kansen correct geschat zijn, geldt nu volgens de „wet der grote aantallen”, dat *voor alle beslissingen te zamen* de winst- of verliesverwachtingen in goede benadering met de werkelijke winsten of verliezen zullen overeenstemmen, en wel des te beter naarmate er meer onderling onafhankelijke beslissingen getroffen worden. Als dus de staat jaarlijks een groot aantal beslissingen, onafhankelijk van elkaar, alle op de basis der verwachtingswaarde zal treffen, kan bij elk dezer beslissingen *afzonderlijk* de uitkomst aanzienlijk van de verwachting afwijken, maar de verschillen zullen elkaar vrijwel compenseren en voor alle *te zamen* zal de uitkomst telkenjare slechts weinig van de verwachting verschillen. Deze beslissingen behoeven niet van dezelfde soort te zijn (bijv. niet alle op waterstaatkundig gebied te liggen). Wel moeten er voldoende vele van vergelijkbare grootte zijn.

Ook zou men bezwaren kunnen hebben tegen het optellen bij elkaar van werkelijke uitgaven voor dijkbouw en fictieve afkoopsommen voor fictieve verzekeringspremies. Dát deze fictief zijn, is onbestrijdbaar en onvermijdelijk, want er bestaat geen schadeverzekeringsmaatschappij, die in staat zou zijn risico's, zo groot als de in 7.0 en 8.0 genoemde, te dekken. Wanneer men zou trachten dit toch te doen, dan zou men het gereserveerde bedrag moeten beleggen op een wijze, die het vrijwaart tegen de seculaire waardedaling van het geld en die de rente verzekert. Zou men daarvoor bijv. industrieën kiezen, dan mogen deze *niet* in het lage gedeelte van ons land worden gevestigd, omdat anders met het verzekerde

object ook de schadedekkingsmiddelen verloren zouden kunnen gaan. Het is dus wel duidelijk, dat bedragen als de onderhavige niet in Nederland verzekerd kunnen worden. Doch ook internationaal is verzekering niet realiseerbaar, o.a. omdat het ook voor een internationale maatschappij wel nauwelijks mogelijk ware, op een vooraf onbekend tijdstip, waarop een ramp zou plaatsvinden, in korte tijd voldoende middelen liquide te maken om de schade te dekken. Bovendien zou de kans veel te groot zijn, dat zulk een maatschappij ten gevolge van economische of politieke omstandigheden een schadeclaim niet zou kunnen of willen of mogen voldoen. De onrealiseerbaarheid evenwel van een werkelijke verzekering doet aan de resultaten geen afbreuk. De „verzekering” is alleen als een „model” gebruikt om het betoog aanschouwelijk te maken. Dit model kan op verschillende wijzen door een ander vervangen worden of de redenering kan geheel abstract gevoerd worden. *De resultaten blijven dezelfde.*

### 3.2 Wiskundig gedeelte

Evenals in 3.1 zullen wij eerst nagaan met hoeveel meter de dijken verhoogd moeten worden, als men tot verhoging overgaat.

In Bijdrage II.1 is aangetoond, dat de thans met voldoende nauwkeurigheid bekende hoogwaterstanden te Hoek van Holland een exponentiële verdeling <sup>1)</sup> bezitten, d.w.z. dat de kans  $p(h)$ , dat deze in een jaar een niveau  $h$  zullen overschrijden voor niet te kleine  $h$  in goede benadering gegeven is door

$$p(h) = e^{-\alpha(h-H_1)}, \quad (1)$$

waarin  $\alpha$  en  $H_1$  constanten zijn.

Hierin ligt opgesloten, dat de overschrijdingskansen in de tijd constant zijn. Onze eerste vereenvoudigende onderstelling luidt dus:

a. De overschrijdingskansen bezitten een in de tijd constante exponentiële verdeling.

Voor (1) kan ook geschreven worden

$$p(h) = 2^{-(h-H_1)/a_2} = 10^{-(h-H_1)/a_{10}},$$

waarin

$$a_2 = \frac{1}{\alpha} \ln 2 = 0,693/\alpha, \quad a_{10} = \frac{1}{\alpha} \ln 10 = 2,303/\alpha$$

de halveringshoogte, resp. de decimeringshoogte in meters is. Voor Hoek van Holland is gevonden:

$$\alpha = 2,97, \quad a_2 = 0,23 \text{ m}, \quad a_{10} = 0,78 \text{ m}.$$

Alle numerieke beschouwingen zijn op deze waarden gebaseerd en moeten natuurlijk overal, waar andere getallenwaarden voorkomen, dienovereenkomstig worden gewijzigd <sup>2)</sup>. In de verbale beschrijving zijn vaak afgeronde waarden gebruikt – die evenwel niet precies met elkaar overeenstemmen – t.w.

$$\alpha = 3, \quad a_2 = \frac{1}{4} \text{ meter en } a_{10} = \frac{4}{5} \text{ meter}.$$

Over het optreden van schaden en de omvang hiervan maken wij de volgende onderstellingen:

b. Er bestaat bij de huidige toestand een bepaald zeeniveau  $H_0$ , zodanig, dat geen stormvloed-schade optreedt zolang  $h \leq H_0$  is en iedere stand  $h > H_0$  schade veroorzaakt <sup>3)</sup>. We noemen  $H_0$  het huidige *kritieke peil*. De werkelijke *kruinhoogte* van de dijk zal dus, naar gelang van golfploop en andere plaatselijke omstandigheden, zoveel groter dan  $H_0$  moeten zijn, als nodig is om de nodige „waakhogte” over te houden.

<sup>1)</sup> Bedoeld is steeds: niet exact, maar bij benadering, met voldoende graad van nauwkeurigheid. Toekomstige waarnemingen kunnen tot wijziging hiervan leiden, maar voor het betrekkelijk kleine interval van waarden van  $h$ , die werkelijk in de beschouwing optreden, is niet aannemelijk, dat eventuele wijzigingen veel invloed zullen hebben (behalve dan die, in 4.0 te bespreken).

<sup>2)</sup> Hogerop in de estuariën geldt ook (1) niet meer. Vergelijk WEMELSFELDER [21]. Op de wijzigingen, die daar nodig zijn, gaan we hier niet in.

<sup>3)</sup> In werkelijkheid is dit natuurlijk niet een vraag van  $h \leq H_0$  of  $h > H_0$  alleen. Vergelijk ook 8.2.

c. Als het kritieke peil overschreden wordt, gaat de laaggelegen inhoud van de polder *volledig* verloren; we laten dus de mogelijkheid van partiële schaden buiten beschouwing (vergelijk echter 8.0).

d. De door de dijken „te beschermen waarde”  $W$  omvat niet alleen de totale reële waarde van alle laaggelegen goederen in de polder, maar ook de kosten van dijkherstel en wederdrooglegging na dijkdoorbraak en alle indirecte schaden.

e. Deze te beschermen waarde, uitgedrukt in een waarde vaste geldeenheid en de interestvoet, is in de tijd constant.

f. Na een dijkdoorbraak kan dijkherstel tot de vóór de doorbraak bestaande toestand binnen een jaar geschieden.

Bij de bestaande toestand is de kans op overschrijding van het kritieke peil, steeds per jaar,  $p(H_0)$ , waarvoor we ter afkorting ook wel  $p_0$  schrijven. Het honderdvoud daarvan zullen we door  $P_0$  voorstellen. Bij zéér kleine  $p_0$  is  $P_0$  in voldoende nauwkeurige benadering de overschrijdingskans per eeuw.

We onderstellen nu, dat de dijken over de gehele lengte met  $X$  meter verhoogd worden en dat dientengevolge het kritieke peil eveneens met  $X$  meter tot  $H$  meter verhoogd wordt; dus

$$X = H - H_0 \quad (2)$$

Dan volgt uit (1):

$$p(H) = p_0 e^{-\alpha X}. \quad (3)$$

Na de verhoging is volgens de onderstellingen b tot en met f de wiskundige verwachting van de schade in ieder jaar gelijk  $p(H) \cdot W$ . Is  $\delta$  de continue rentevoet in procenten per jaar, of ook in per unum per eeuw, dan wordt de constante waarde van een na  $t$  jaren optredende schade verkregen door deze met  $e^{-t\delta/100}$  te vermenigvuldigen. De totale verdisconteerde schadeverwachting is dus <sup>1)</sup>:

$$R = \int_0^{\infty} e^{-t\delta/100} dt \cdot p_0 W e^{-\alpha X} = \frac{P_0 W e^{-\alpha X}}{\delta}. \quad (4)$$

De laatste onderstelling betreft de kosten, benodigd om het kritieke peil van de dijk van  $H_0$  meter met  $X$  meter tot  $H$  meter te verhogen. Hierbij laten wij zeer kleine en zeer grote waarden van  $X$ , die bij de beslissing toch niet in aanmerking komen, buiten beschouwing. Wij nemen nu aan:

g. De kosten van dijkverbetering vormen een lineaire functie van de verhoging van het kritieke peil, en wel:

$$I = I_0 + I'X. \quad (5)$$

Hierin kan  $I_0$  als het bedrag der „initiële” kosten worden beschouwd, welke optreden als de dijk verhoogd wordt, ongeacht hoeveel, terwijl  $I'$  het bedrag der kosten per meter verhoging van de gehele dijk is.

De totale kosten, die we door  $K$  voorstellen, zijn dus:

$$K = I + R = I_0 + I'X + \frac{P_0 W e^{-\alpha X}}{\delta}. \quad (6)$$

$K$  is dus nog een functie van  $X$ . Wij kiezen  $X$  nu zodanig, dat  $K$  minimaal is. Hiertoe differentiëren wij  $K$  naar  $X$ , waardoor we krijgen:

$$\frac{dK}{dX} = I' - \frac{P_0 W \alpha}{\delta} e^{-\alpha X}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Werkt men met jaarlijkse in plaats van continue rentetoevoeging, dan is bij een interest van  $\delta$  % per jaar

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta/100)^n} p_0 W e^{-\alpha X},$$

dus eveneens de in (4) aangegeven uitdrukking. De beide waarden van  $\delta$  verschillen iets, maar het verschil is van geen betekenis.

Dit is nul voor  $X = \hat{X}$ , als  $\hat{X}$  voldoet aan

$$e^{a\hat{X}} = \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta}, \quad (8)$$

of

$$\hat{X} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta}; \quad (9)$$

hierin is  $\ln$  het symbool voor de natuurlijke logaritme, d.i. de logaritme met grondtal  $e$ . Daar uit (7) volgt, dat voor grotere, resp. kleinere  $X$  dan  $\hat{X}$  de afgeleide  $\frac{dK}{dX} > 0$  resp.  $< 0$  is, maakt  $\hat{X}$  de totale kosten  $K$  inderdaad tot een *minimum*. De bij de door (9) gegeven „optimale” waarde  $\hat{X}$  van  $X$  behorende waarden van  $I$ ,  $R$ ,  $K$  en  $H$  zullen we met  $\hat{I}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{K}$  resp.  $\hat{H}$  aangeven. Voor (8) kan men ook met gebruikmaking van tientallige logaritmen schrijven:

$$\frac{\hat{X}}{a_{10}} = {}^{10}\log \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta}.$$

Uit (4) volgt met behulp van (8):

$$\hat{R} = \frac{I'}{\alpha}, \quad (10)$$

en van (6):

$$\hat{K} = \hat{I} + \hat{R} = I_0 + I' \hat{X} + \frac{I'}{\alpha}, \quad (11)$$

waarin voor  $\hat{X}$  nog de waarde (9) gesubstitueerd moet worden.

Men kan de gevonden betrekkingen een eenvoudiger vorm geven door over te gaan tot „natuurlijke eenheden”. Hiertoe voeren wij de grootheid  $a_e$  in, de „nepereringshoogte”<sup>1)</sup>, welke is gedefinieerd door

$$a_e = \frac{1}{\alpha}. \quad (12)$$

Terwijl een verhoging met  $a_2$  meter de overschrijdingskans halveert en met  $a_{10}$  meter deze decimeert, wordt ze door een verhoging met  $a_e$  meter in de verhouding  $1 : e$  teruggebracht. Ook heeft  $a_e$  de volgende betekenis:  $a_e = \frac{1}{\alpha}$  is de gemiddelde hoogte (in de zin der kansrekening) boven een gegeven peil van alle vloedstanden, die dit peil overschrijden. Dit volgt uit de volgende identiteit:

$$\int_{H_0}^{\infty} (h - H_0) e^{-\alpha(h-H_0)} \alpha dh = \frac{1}{\alpha}.$$

Voor Hoek van Holland is  $a_e = 0,34$  m; of  $1 \text{ m} \approx 3$  nepereringshoogten.

De dijkverhogingskosten bedragen  $I'$  per meter, dus

$$I_e = \frac{I'}{\alpha} \quad (13)$$

per nepereringshoogte. Dit bedrag worde als eenheid van dijkverhogingskosten beschouwd en nepereringskosten genoemd. De interest, die dit bedrag per jaar zou opbrengen, wordt door  $r_e$  voorgesteld en nepereringsrente genoemd. Dan is:

$$r_e = \frac{I'}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{100}. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Of Napiereringshoogte. Naar JOHN NAPIER of NEPER, die in 1614 de natuurlijke logaritmen invoerde.

Voorts is  $\alpha\hat{X}$  de optimale dijkverhoging, gemeten in nepereringshoogte als eenheid.

Door dijkverhoging met  $X$  meter wordt de overschrijdingskans  $e^{+\alpha X}$  maal zo klein, d.i.  $e^{-\alpha X}$  maal zo groot. We zullen deze grootheid  $e^{\alpha X}$  de *veiligheidsfactor* noemen en met de letter  $v$  aanduiden:

$$v = e^{\alpha X}. \quad (15)$$

In het bijzonder is dus

$$\hat{v} = e^{\alpha\hat{X}} \quad (16)$$

de veiligheidsfactor der optimale dijkverhoging. Verder kan nu voor (10) geschreven worden

$$\hat{R} = I_e \quad (17)$$

en voor (8) in combinatie met (3) en (14)

$$e^{-\alpha\hat{H}} = p_0 e^{-\alpha\hat{X}} = \frac{I'\delta}{100W\alpha} = \frac{r_e}{W}. \quad (18)$$

Opmerkenswaard is nog, dat  $I_e$ , dus  $\hat{R}$ , alleen van de helling der logaritmisch weergegeven overschrijdingslijn en van die der dijkverhogingskostenlijn afhangt; niet van de „beginpunten”  $H_0$  (of ook  $p_0$ ) en  $I_0$  en evenmin van de „economische” grootheden  $W$  en  $\delta$ . Daarentegen hangt  $\hat{X}$ , en dus ook  $\hat{I}$ ,  $\hat{v}$  en  $\hat{K}$  wél van deze grootheden af.

Wij gaan nu over tot de behandeling van de vraag, in welk geval men de dijken moet verhogen (en dan uiteraard met de optimale verhoging) en in welk geval men dit niet zal moeten doen. In het laatste geval stelt  $\hat{X}$  dus in werkelijkheid niet de optimale dijkverhoging voor; deze is dan nul.

Om deze vraag te beantwoorden, moeten we de totale kosten  $K$  bij optimale dijkverhoging vergelijken met dezelfde grootheid zonder dijkverhoging, dus bij de huidige toestand. We duiden deze laatste met  $K_0$  aan. Dan is eenvoudig:

$$K_0 = R_0 = \frac{P_0 W}{\delta}. \quad (19)$$

Dijkverhoging is dus voordeliger, als  $\hat{K} < K_0$  is, en de winst der dijkverhoging is dan:

$$K_0 - \hat{K} = \frac{P_0 W}{\delta} - \hat{I} - \frac{I'}{\alpha} = \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta} \cdot I_e - \hat{I} - I_e = (\hat{v} - 1) I_e - \hat{I}. \quad (20)$$

Dit is positief, indien

$$\hat{I} < (\hat{v} - 1) I_e \quad (21)$$

is, en slechts dan. Het verschil (20) zou men de „voldoening”<sup>1)</sup> kunnen noemen, die men van een (optimale) dijkverhoging geniet. Als bijv. de optimale dijkverhoging ruim  $1\frac{1}{2}$  meter, dat is ongeveer  $4\frac{1}{2}$  nepereringshoogten bedraagt, zodat de veiligheidsfactor  $\hat{v} = 100$  is, dan mogen de *totale* dijkverhogingskosten hoogstens 99 nepereringskosten bedragen, d.i. de initiële kosten  $I_0$  mogen hoogstens  $94\frac{1}{2}$  nepereringskosten, d.i.  $94\frac{1}{2}$  maal de kosten van  $\frac{1}{2}$  meter extra-dijkverhoging bedragen. Het is duidelijk, dat de initiële kosten wel zelden zo uitzonderlijk hoog zullen zijn.

Voor (21) kan men ook schrijven:

$$I_0 < (e^{\alpha\hat{X}} - 1 - \alpha\hat{X}) I_e$$

of

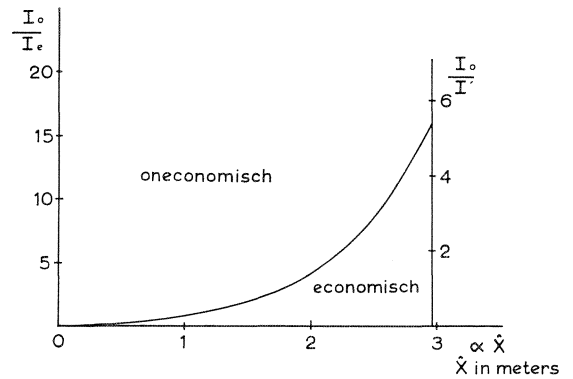
$$\frac{I_0}{I_e} < e^{\alpha\hat{X}} - 1 - \alpha\hat{X}. \quad (22)$$

Met behulp hiervan kan men berekenen, hoe groot de *optimale* dijkverhoging *minstens* moet zijn, opdat zij bij gegeven initiële kosten economisch verantwoord zal zijn. Zie hiertoe tabel 3.2.1 en figuur 3.2.1.

<sup>1)</sup> Eigenlijk: de wiskundige verwachting daarvan.

Tabel 3.2.1  
Lonende dijkverhogingen

$\frac{I_0}{I_e} = \alpha \frac{I_0}{I'}$	Minimaal lonende $\alpha \hat{X}$
0,25	0,64
0,50	0,86
1	1,15
1,5	1,35
2	1,51
3	1,75
4	1,94
10	2,61
25	3,38



Figuur 3.2.1 Economische en oneconomische optimale dijkverhogingen

Het verband tussen maximaal toelaatbare  $\frac{I_0}{I_e}$  bij gegeven  $\alpha \hat{X}$  of ook tussen minimaal toelaatbare  $\alpha \hat{X}$  bij gegeven  $\frac{I_0}{I_e}$  kan ook uit de figuur afgelezen worden.

De tot dusverre gevonden resultaten kunnen door de volgende regels tot uitdrukking worden gebracht.

De beslissing „dijkverhoging”, mits deze optimaal geschiedt, is voordeliger dan de beslissing „geen dijkverhoging”, indien geldt:

$$I \quad \frac{\text{Totale dijkverhogingskosten}}{\text{nepereringskosten}} < \text{veiligheidsfactor} - 1 \text{ } ^1)$$

Wanneer men nu inderdaad tot verhoging overgaat, dan luidt de interpretatie van de formules (17), (18), (8) en (9) respectievelijk <sup>2)</sup>:

$$II \quad \text{Rampschadeverwachting na optimale dijkverhoging} = \text{nepereringskosten}$$

$$III \quad \text{Overschrijdingskans per jaar na optimale dijkverhoging} = \frac{\text{nepereringsrente per jaar}}{\text{te beschermen waarde}}$$

$$IV \quad \text{Veiligheidsfactor der optimale dijkverhoging} = \frac{\text{huidige rampschadeverwachting per jaar}}{\text{nepereringsrente per jaar}}$$

en

$$V \quad \text{Optimale dijkverhoging, uitgedrukt in nepereringshoogten} = \text{de natuurlijke logaritme van} \frac{\text{huidige rampschadeverwachting per jaar}}{\text{nepereringsrente per jaar}}$$

Ten overvloede zij er nogmaals op gewezen, dat deze eenvoudige betrekkingen slechts gelden onder de vereenvoudigende onderstellingen, die aan deze paragraaf ten grondslag gelegd zijn. In werkelijkheid zijn zij ten gevolge van aan te brengen correcties iets gecompliceerder (vgl. 4.2).

<sup>1)</sup> Ten gevolge van de verschillende onvermijdelijke benaderingen en vereenvoudigingen zal men natuurlijk niet slechts eisen, dat het rechterlid van (19) groter is dan het linker, maar dat het *aanmerkelijk* groter is. Veelal zal de veiligheidsfactor zo groot zijn, dat de term  $-1$  verwaarloosd kan worden.

<sup>2)</sup> In plaats van een jaar kan ook een andere korte tijdsduur gekozen worden, mits natuurlijk dezelfde in teller en noemer.

Tot slot van deze paragraaf gaan we nog na wat er gebeurt, als de dijkverhoging *niet* optimaal, maar  $X \neq \hat{X}$  wordt gekozen. Er treedt dan een „spijt”  $K - \hat{K}$  op. Stellen we ter afkorting

$$y = \alpha (X - \hat{X}), \quad (23)$$

zodat  $y$  positief of negatief kan zijn, te weten het aantal dijkverhogingseenheden, dat de dijkverhoging te groot of te klein is, dan volgt uit (4):

$$R = \hat{R}e^{-y} \quad (24)$$

en uit (10):

$$K - \hat{K} = \frac{I'}{\alpha} y + \hat{R}e^{-y} - \hat{R} = (e^{-y} - 1 + y) I_e. \quad (25)$$

De „spijt” bedraagt dus

$$e^{-y} - 1 + y$$

maal de nepereringskosten. Bijv. voor  $y = 2$  (dus ongeveer  $\frac{2}{3}$  meter te hoog) is  $e^{-2} - 1 + 2 = 0,14 - 1 + 2 = 1,14$ ; de spijt bedraagt dus 1,14 maal de nepereringskosten, d.i. de kosten van 0,39 m dijkverhoging. Is daarentegen  $y = -2$  (dus ongeveer  $\frac{2}{3}$  meter te laag), dan is de spijt  $e^2 - 1 - 2 = 4,39$  maal de nepereringskosten, overeenkomende met 1,49 m.

### 3.3 Samenvatting van 3.0

3.3.1 De hierna vermelde conclusies hebben betrekking op de oplossing van het decisieprobleem onder de volgende vereenvoudigende onderstellingen.

- De overschrijdingskansen bezitten een in de tijd constante exponentiële verdeling.
- Er is, zowel vóór als na dijkverhoging, een ondubbelzinnig bepaald „kritiek peil”, dat is een peil zodanig, dat waterstanden te Hoek van Holland, die er beneden blijven, geen stormvloedschade in het beschouwde poldergebied veroorzaken, en waterstanden, die het te boven gaan, wel.
- Indien het kritieke peil overschreden wordt, gaat de laaggelegen inhoud van de polder volledig verloren.
- De „te beschermen waarde” omvat de totale reële waarde van alle laaggelegen, in de polder aanwezige goederen, de kosten van dijkherstel en wederdrooglegging na dijkdoorbraak en alle indirecte schade, waaronder productiederving.
- De te beschermen waarde, uitgedrukt in een waarde vaste geldeenheid, en de interestvoet zijn in de tijd constant.
- Alle door een overstroming veroorzaakte schade kan binnen een jaar hersteld zijn.
- De kosten van dijkverbetering vormen een lineaire functie van de verhoging van het kritieke peil.

3.3.2 Daarbij wordt gebruik gemaakt van de volgende definities.

- De *rampschadeverwachting per jaar* is het produkt van de te beschermen waarde en de kans op overschrijding van het kritieke peil in dat jaar.
- De *totale verdisconteerde rampschadeverwachting*, kortweg *rampschadeverwachting*, is de som van alle naar het heden verdisconteerde toekomstige rampschadeverwachtingen per jaar.
- De *dijkverhogingskosten* omvatten de som van de bij iedere verhoging noodzakelijke initiële kosten en van de kosten der verhoging zelf.
- De *totale kosten* zijn de som van de (totale verdisconteerde) rampschadeverwachting en de dijkverhogingskosten.
- De dijkverhoging is *optimaal*, wanneer de totale kosten minimaal zijn.
- De *veiligheidsfactor* is de verhouding van de overschrijdingskans van het kritieke peil vóór dijkverhoging tot die na dijkverhoging.
- De *nepereringshoogte* is de dijkverhoging, die de kans op overschrijding in de verhouding  $1 : e$ , dat is  $1 : 2,718 \dots$  terugbrengt.
- De *nepereringskosten* zijn de kosten van dijkverhoging met één nepereringshoogte.
- De *nepereringsrente* is de rente per jaar van de nepereringskosten.

3.3.3 De huidige (totale verdisconteerde) rampschadeverwachting is gelijk aan het quotiënt van de huidige rampschadeverwachting per jaar en de interestvoet in per unum per jaar.

### 3.4 Conclusies van 3.0

*Conclusie I.* Met in aanmerking nemen van de initiële kosten is dijkverhoging, mits optimaal, voordeliger dan handhaving van de oude toestand, als de verhouding van de *totale* dijkverhogingskosten tot de nepereringsrente kleiner is dan de met 1 verminderde veiligheidsfactor.

*Conclusie II.* Na optimale dijkverhoging blijft een rampschadeverwachting over, gelijk aan de nepereringskosten.

*Conclusie III.* Na optimale dijkverhoging blijft een overschrijdingskans over, die per jaar gelijk is aan de verhouding der jaarlijkse nepereringsrente tot de te beschermen waarde.

*Conclusie IV.* De veiligheidsfactor bij optimale dijkverhoging is gelijk aan de verhouding der vóór deze verhoging aanwezige rampschadeverwachting per jaar tot de jaarlijkse nepereringsrente.

*Conclusie V.* Bij niet-optimale dijkverhoging treedt een onnodig verlies op, de „spijt”, dat bij te kleine dijkverhoging groter – en, als de afwijking van de optimaliteit groot is, zéér veel groter – is dan bij een evenveel te grote dijkverhoging. Te kleine dijkverhoging is daarom, ondanks directe besparing van dijkbouwkosten, uiteindelijk hoogst oneconomisch.

## 4.0 ECONOMISCHE EXPANSIE, BODEMDALING, ZEESPIEGELRIJZING

### 4.1 Algemeen gedeelte

In 3.0 is reeds gezegd, dat de daar gegeven berekeningen van de optimale dijkverhoging gebaseerd waren op vereenvoudigende onderstellingen, die in werkelijkheid niet vervuld zijn. Deze berekeningen behoeven derhalve verschillende correcties, die we thans achtereenvolgens zullen bespreken.

#### 4.1.1 Economische expansie en gereduceerde rentevoet

In 3.0 is ondersteld, dat de te beschermen waarde, uitgedrukt in een waarde vaste geldeenheid, in de loop der tijden niet verandert. Er vindt echter, niet slechts in onze tijd, maar ook gemiddeld over zeer lange perioden, bijv. van vele eeuwen, een geleidelijke reële waardevermeerdering plaats ten gevolge van voortdurende vermeerdering der zich in het gebied bevindende kapitaalgoederen door toenemende investeringen, dus door voortgaande economische expansie. Dit is een seculair verschijnsel en het feit, dat er ook perioden van stilstand en zelfs van teruggang voorkomen, doet aan dit gemiddelde verloop geen afbreuk. Er bestaat natuurlijk volstrekt geen zekerheid, dat dit ook in de toekomst steeds het geval zal zijn. Desondanks moeten we daarmede rekening houden en dit kan alleen worden gedaan door naar de beste stand van onze *huidige* kennis een schatting te maken van de gemiddelde reële interestvoet en de „gemiddelde *expansiecoëfficiënt*”, dat is het *gemiddelde* percentage, waarmede de reële beschermde waarde jaarlijks toeneemt.

In het wiskundige gedeelte van dit hoofdstuk zal blijken, dat de in 3.0 gebruikte rentevoet dientengevolge vervangen dient te worden door de „*gereduceerde rentevoet*”, d.i. het verschil van de rentevoet (interest in % per jaar) en deze *expansiecoëfficiënt* (uitbreiding van de reële waarde der bedoelde goederen in % per jaar). Voor *beide* grootheden zullen we de gemiddelde waarde over een lange periode hebben te nemen.

Door de onlangs overleden VON NEUMANN, een der grootste wiskundigen van onze tijd, is in 1937 een artikel gepubliceerd [12] waarin hij onder bepaalde vereenvoudigende veronderstellingen aantoonde, dat een gelijkmatig expanderende economie alleen dan kan bestaan, als de rentevoet gelijk is aan de *expansiecoëfficiënt*, d.w.z. dat de *gereduceerde rentevoet* exact *nul* is. Zijn veronderstellingen zijn echter te zeer vereenvoudigd om rechtstreeks op de werkelijkheid toepasbaar te zijn. Tot VON NEUMANN's onderstellingen behoort o.a. „dass die natürlichen Produktionsfaktoren, einschliesslich der der Arbeit, unbeschränkt zur Verfügung stehen”, en „dass jedes über das Lebensminimum hinausgehende Einkommen vollkommen reinvestiert wird”.

Deze beide veronderstellingen verwijderen zich verre van wat in een westers land aanvaardbaar wordt geacht. Dit heeft ten gevolge, dat de rentevoet door de *expansiecoëfficiënt* niet geheel, maar slechts gedeeltelijk wordt gecompenseerd, zodat er een *gereduceerde rentevoet* overblijft.



Het beantwoorden van de vraag hoeveel deze gereduceerde rentevoet, gemiddeld over een zo lang mogelijke, maar nog overzienbare periode, bedraagt, valt buiten onze competentie. De vraag is ook geenszins gemakkelijk te beantwoorden. Vooreerst de expansiecoëfficiënt. Om te weten of de waarde bijv. van de in een gebied gevestigde industrieën *werkelijk* is toegenomen in een bepaalde periode, moeten we een stabiele eenheid hebben, waarin de waarden op beide tijdstippen kunnen worden uitgedrukt. Het is duidelijk, dat monetaire eenheden ten gevolge van fluctuaties en van de seculaire waardevermindering van het geld niet aan deze voorwaarden voldoen. De vraag berust dus op een indexcijferprobleem en het is geenszins zeker, dat een indexcijfer met zó grote nauwkeurigheid kan worden gedefinieerd, dat kwantitatieve vergelijking van waarden op twee tijdstippen, die bijv. een eeuw verschillen, zinvol is. Voor kortere perioden is de moeilijkheid niet zó ernstig, daar dan een materiële index, gebaseerd op realia, kan worden gebruikt. Maar bij veranderingen in de technologie wordt het moeilijk, het verloop van zulk een index over lange perioden te extrapoleren.

Met betrekking tot de ongereduceerde rentevoet is de situatie nauwelijks minder gecompliceerd. Er schijnt geen marktwaarde van kapitaal te bestaan, die we als uitgangspunt zouden kunnen nemen voor het waarden van investeringsprojecten op zó lange termijn als het onderhavige. De nominale rentevoet is sinds het begin van dit onderzoek (1953) van circa  $3\frac{1}{4}$  tot circa 6 % toegenomen en daarna weer tot circa  $4\frac{1}{2}$  % gedaald, zodat deze voor ons doel niet bruikbaar is. Het is namelijk bezwaarlijk in te zien, waarom de graad van veiligheid, die de dijken ons nageslacht zullen verschaffen, zó sterk afhankelijk zou moeten zijn van de waarde, die de zo sterk schommelende kapitaal-interest op een betrekkelijk willekeurig gekozen ogenblik bezit, temeer daar de kosten van uitvoering van het project over een lange reeks van jaren zullen worden verdeeld.

Voor de gereduceerde rentevoet zal dus het verschil van een gemiddelde expansiecoëfficiënt en een gemiddelde reële interestvoet genomen moeten worden.

De directeur van het Centraal Planbureau, PROF. P. DE WOLFF heeft voor de gemiddelde ongereduceerde reële rentevoet een bedrag van  $3\frac{1}{2}$  à  $4\frac{1}{2}$  % per jaar opgegeven, voor de expansiecoëfficiënt voor Centraal-Holland 2 à 3 % en voor het deltagebied 1 à  $1\frac{1}{2}$  %. In een brief van 23 september 1957 gaf hij de volgende toelichting daarop, die met zijn toestemming hieronder wordt afgedrukt.

„Volgens de publikatie<sup>1)</sup> met betrekking tot de vermoedelijke ontwikkeling van de Nederlandse economie tot 1970 zou het reële nationale inkomen in de periode 1950–1970 toenemen met 2,3 à 2,9 % per jaar. De stijging van de kapitaalgoederenvoorraad van bedrijven zou weinig minder zijn (zie blz. 31 van genoemde publikatie). Gezien de sterkere expansie, welke in de afgelopen jaren van hoogconjunctuur is opgetreden, bestaat de indruk, dat, over de gehele periode genomen, wellicht het hoogste alternatief zal worden gerealiseerd. Bij wijze van vergelijking vermeld ik, dat blijkens een recente berekening op basis van materiaal van het Centraal Bureau voor de Statistiek het reële nationale inkomen in de jaren 1923 t/m 1938 is gestegen met gemiddeld 1,86 % en in deze periode te zamen met 1949 t/m 1954 met 2,49 %. In het licht hiervan lijkt mij voor de expansie van het reële nationale inkomen en de kapitaalgoederenvoorraad een percentage van 2 à 3 aanvaardbaar. Volledigheidshalve merk ik hierbij op, dat het roerende vermogen bij particulieren in de vorm van meubilair en ander huisraad van betrekkelijk geringe betekenis is in vergelijking met het totale nationale vermogen.

De hiervoor genoemde percentages van 2 à 3 voor de expansie hebben betrekking op de gehele Nederlandse economie. Blijkens Bijlage A van de publikatie inzake 1970 zal de beroepsbevolking en de werkgelegenheid in Noord- en Zuid-Holland zich ongeveer in hetzelfde tempo ontwikkelen als voor het gehele land is aangenomen. In het licht hiervan zou het percentage van 2 à 3 ook voor deze provincies kunnen worden toegepast. Daarentegen zou voor het deltagebied, waar de economische groei bij niet-uitvoering van het Deltaplan zeer waarschijnlijk bij de landelijke ontwikkeling ten achter zal blijven, een percentage van 1 à  $1\frac{1}{2}$  kunnen worden aangehouden.

Het rendement van staatsleningen op lange termijn van  $2\frac{1}{2}$  en  $3\frac{1}{2}$  % blijkt gedurende de jaren 1923 t/m 1938 en in deze periode te zamen met 1949 t/m 1954 gemiddeld respectievelijk 3,8 % en 3,7 % te zijn geweest (met als uitersten 4,7 en 3,0 %). Gezien de onzekerheid met betrekking tot de toekomstige ontwikkeling van de kapitaalmarkt lijkt het hanteren van een rentevoet van  $3\frac{1}{2}$  à  $4\frac{1}{2}$  % aanvaardbaar en, gezien de cijfers over het verleden, eventueel ook wel van  $3\frac{1}{2}$  à 4 %.”

Op grond hiervan zullen we in onze numerieke voorbeelden voor Centraal-Holland een gereduceerde rentevoet van  $1\frac{1}{2}$  % gebruiken<sup>2)</sup> en voor het deltagebied één van  $2\frac{1}{2}$  %.

<sup>1)</sup> Een verkenning der economische toekomstmogelijkheden van Nederland van 1950 tot 1970. Centraal Planbureau, 's-Gravenhage, 1955.

<sup>2)</sup> Vervanging hiervan door 2 % zou slechts een geringe invloed op de optimale uitkomst hebben (vgl. 4.3.2).

#### 4.1.2 Zeespiegelrijzing en bodemdaling

Een tweede, aan 3.0 ten grondslag liggende onderstelling, die niet houdbaar is, houdt in, dat de overschrijdingskans van een bepaald peil in de loop der tijden constant blijft. Dit is niet het geval, doordat ons land langzaam daalt in vergelijking met het gemiddeld zeeniveau. Over de vraag evenwel, hoe groot deze daling is, bestaat geen eenstemmig oordeel. Wel schijnt vast te staan, dat het verschijnsel zéér gecompliceerd is en dat er niet onaanzienlijke lokale verschillen zijn. Omtrent de belangrijkste componenten hebben wij het volgende kunnen vinden.

- A. *Zeespiegelrijzing*. Het staat wel vast, dat de poolkap geleidelijk afsmelt, waardoor het niveau van de oceanen stijgt [1, 15], d.w.z. dat de aarde zich van een ijstijd („glaciaal”) naar een „interglaciaal” beweegt. Er is een wiskundig uitgewerkte theorie van de Servische astronoom MILANKOVITCH [11], die een verband legt tussen de ijstijden en de posities van de aardas ten opzichte van de zon. Deze is door GAMOV [8] tot de toekomst uitgebreid. Volgens GAMOV zouden we over ongeveer 20 000 jaar een nieuw interglaciaal bereiken <sup>1)</sup>. Indien de polaire ijskappen geheel zouden afsmelten, zou dit een verhoging van de zeespiegel van ongeveer 50 meter veroorzaken [1, 10] <sup>2)</sup>. Aangezien GAMOV zelf erkent, dat zijn extrapolatie slechts zeer ruw is en er ook tegen de theorie van MILANKOVITCH ernstige bezwaren zijn ingebracht, schijnt het op het ogenblik niet mogelijk te zijn betrouwbare schattingen te geven van de zeespiegelrijzing in de toekomst <sup>3)</sup>.
- B. *Bodemdaling*. Ook hieromtrent bestaat een wiskundig uitgewerkte theorie. Volgens VENINGH MEINESZ [18] daalt de vaste aardkorst onder ons land ten gevolge van een zich herstellend evenwicht, dat circa 10 000 jaar geleden door het afsmelten van de ijskap boven de omgeving van de Botnische Golf is verbroken. Op het ogenblik is de snelheid van daling (die aanvankelijk wel 2 meter per jaar zou hebben bedragen) ongeveer 20 cm per eeuw. Deze daling wordt volgens dezelfde geleerde gedeeltelijk gecompenseerd door een stijging van het zuidelijk gedeelte van ons land (ongeveer tot aan de grote rivieren) ten gevolge van een noordwaartse stroming onder de vaste korst, afkomstig van een afsmelten van het ijs aan de wortel der Alpen. De grootte van deze compensatie is evenwel niet bekend. Wel schijnt op grond van geodetische metingen vast te staan [7], dat inderdaad het zuiden van ons land ten opzichte van het noorden stijgt, en wel in 50 jaar met 8 à 10 cm, d.i. ongeveer 20 cm per eeuw.

Over de absolute daling, of ook de daling van het centrum, ten opzichte van de zee, geven deze metingen echter geen informatie. Deze theorie geeft een bijzonder interessante verklaring van het onderzochte verschijnsel en is wel de enige, die voldoende ver wiskundig is uitgewerkt om, althans gedeeltelijk, tot kwantitatieve resultaten te leiden, maar òók haar grondslag is hypothetisch.

Tot de bodemdaling draagt ook de inklinking van de jongere geologische lagen bij. Verschillende auteurs hebben getracht, met geologische, palaeontologische en archaeologische methoden het totale effect, dus de *relatieve* bodemdaling, dat is de som van bodemdaling en zeespiegelrijzing te schatten [14]. De uitkomsten lopen echter zéér uiteen. Er is vrijwel eenstemmigheid over het feit, dat de huidige methoden nog weinig betrouwbaar zijn. Daar de dijken zelf ook, en zelfs vrij veel inklinken, zal de kruindaling wezenlijk meer moeten bedragen. Volgens VAN VEEN [16, 17] komt  $\frac{1}{2}$  meter per eeuw herhaaldelijk voor, maar treden ook aanzienlijk grotere waarden op. Ook moet opgemerkt worden, dat KUENEN [10], die overigens tot zeer gematigde schattingen neigt, er tot tweemaal toe op wijst, dat de *relatieve bodemdaling* (dus zonder inklinken der dijken) althans in sommige perioden een meter of meer per eeuw moet hebben bedragen <sup>4)</sup>.

Resumerende kunnen we vaststellen, zonder ons nochtans een oordeel te willen aanmatigen over onderzoeken op een buiten onze competentie vallend gebied, dat het hoogst onzeker is, met welke snelheid de dijk kruin ten opzichte van het zeeniveau daalt.

<sup>1)</sup> Op blz. 185 schrijft GAMOV: Further inspection of the curves indicating the climates of the future also shows us that before the next advance of ice the climate of the Earth is bound to become much warmer than it is at present and that the maximum will be reached about the year A.D. 20 000.

<sup>2)</sup> Schattingen lopen uiteen van circa 20 tot circa 90 meter, maar waarden van 40 tot 60 meter worden het meest algemeen aanvaard.

<sup>3)</sup> Theoretisch kan men natuurlijk de mogelijkheid niet met zekerheid uitsluiten, dat de langzame klimaatverandering (die wel schijnt vast te staan, vergelijk [1, 15]) nog op andere wijze dan door de zeespiegelrijzing de overschrijdingskansen geleidelijk zou doen veranderen, bijv. door statistische veranderingen in de meteorologische toestand. Daar er, voor zover ons bekend, geen aanwijzingen bestaan, dat zulks het geval zou zijn, noch in welke richting zulke veranderingen eventueel zouden werken, hebben wij aangenomen, dat de overschrijdingskansen, afgezien van de relatieve bodemdaling, in de tijd constant zijn.

<sup>4)</sup> “On an average sea-level has risen 36 cm since [25 000 years]. However, there have been several periods of standstill or even readvance of the icefront [– – –]. The average during the active periods of melting must have been 50 cm per century [– – –]. Recession was far above the average for some periods. It can therefore be confidently assumed that these times were marked by a secular rise of sea-level amounting to 100 cm” ([10], blz. 151). “The sword of Damocles hanging over the Low Countries is formed by the waters put up in the ice sheets of Greenland and Antarctica. An adverse shift in the water budgets of these countries could easily render the situation critical if not hopeless in less than a century’s time. There have been times [– – –] in which a secular rise of 1 meter was attained and a third of the ice still remains, plenty to repeat this experience” ([10], blz. 153).

### 4.1.3 Wijziging in het in 3.0 gebruikte model

Uit het over de economische expansie gezegde volgt, dat we niet met de momentele rentevoet, maar met de *gereduceerde* rentevoet moeten rekenen en dat deze voor Centraal-Holland ongeveer  $1\frac{1}{2}\%$  en voor het deltagebied ongeveer  $2\frac{1}{2}\%$  per jaar bedraagt.

Voorts moet met de daling van de kritieke hoogte rekening worden gehouden, en wel niet alleen bij de berekening, maar ook bij de dijkbouw zelf. Immers al maken we de dijk, binnen redelijke grenzen, nòg zo hoog, als hij aan zichzelf overgelaten wordt zal hij op de lange duur in zee verzinken. Het is dus nodig, de dijk periodiek te regenereren. Als men de periode, waarna telkens de dijk weer op peil gebracht wordt, kent, kan de optimale dijkverhoging worden berekend, behoudens de onzekerheid van de grootte der kruindaling.

Nu het toch noodzakelijk is, de dijken regelmatig te regenereren, zou men kunnen overwegen, analoog met een in de verzekeringsleer veel gebruikte methode, vergelijk bijv. [3], bij iedere periodieke verhoging de dijk steeds wat méér te verhogen dan de peildaling heeft bedragen. Men zou daardoor een steeds grotere veiligheid verkrijgen en op de duur een verwaarloosbaar kleine overschrijdingskans. Men zou bij voorbeeld kunnen overwegen steeds een verhoging van  $\frac{1}{2}$  meter aan te brengen, zodra het kritieke peil  $\frac{1}{4}$  meter is gedaald. De optimale *eerste* verhoging ondergaat hierdoor geen wijziging.

In het wiskundige gedeelte zal blijken, dat men, door de regeneratieperiode betrekkelijk klein te kiezen, de zowel feitelijk als wiskundig storende onbekendheid der relatieve bodemdaling belangrijk minder hinderlijk kan maken. Verkorting der regeneratieperiode kan wellicht bereikt worden door niet telkens na een periode de dijk in zijn geheel te verhogen, maar dit na een aanvangstermijn met betrekkelijk korte tussenpozen, als het ware in continubedrijf, te doen, telkens met een *gedeelte* van de dijk of van een dijkcomplex.

Adaequate dijkregeneratie zal echter in ieder geval vereisen, dat door bevordering van daartoe strekkend wetenschappelijk onderzoek, grondige kennis omtrent de relatieve bodem- en kruindaling verkregen wordt, zodat men door meting zal kunnen ervaren, hoeveel deze in een bepaalde periode hebben bedragen.

## 4.2 Wiskundig gedeelte

### 4.2.1 Afeiding van de nieuwe formules

We onderstellen, dat de overschrijdingskans dezelfde wet volgt, als in 3.2 aangegeven, en dat een relatieve daling van het *kritieke peil* ten opzichte van de zeespiegel plaatsvindt ten bedrage van  $\eta$  meter per eeuw. De tijd, uitgedrukt in jaren, zal worden aangeduid met de letter  $t$ , uitgedrukt in eeuwen met de letter  $\tau$ , zodat  $\tau = 100 t$ . Natuurlijk kan  $\tau$  ook een breuk  $< 1$  zijn. Indien de dijk tot een *huidig* kritiek niveau  $H$  wordt verhoogd, zal dit na  $\tau$  eeuwen tot  $H - \eta\tau$ , dus  $H - \eta\tau - H_0$  boven het huidige niveau vóór dijkverhoging zijn verminderd. De overschrijdingskans, voor te stellen door  $p(H, \tau)$ , zal dan zijn:

$$p(H, \tau) = p_0 e^{-\alpha(H - \eta\tau - H_0)} = p_0 e^{-\alpha X + \beta\tau}, \quad (1)$$

wanneer we

$$\beta = \alpha\eta \quad (2)$$

en, evenals te voren

$$X = H - H_0$$

stellen. De uitdrukking (1) kan echter niet voor alle  $\tau$  de overschrijdingskans voorstellen. Immers bij toenemende  $\tau$  neemt ook het laatste lid van (1) onbeperkt toe, terwijl een kans altijd  $\leq 1$  blijft. Dit heeft ten gevolge, dat bij toenemende  $\tau$  vooreerst  $p(H, \tau)$  overeenkomstig (1) toeneemt, totdat de waarde 1 bereikt zal zijn. De dijk is dan vrijwel geheel in de zee verzonken, zodat overschrijding vrijwel telkenjare plaatsvindt, en dit blijft ook bij verdere daling het geval.

We moeten dus niet alleen de formule voor de overschrijdingskans, maar ook de dijk zèlf aan de relatieve bodemdaling aanpassen. We onderstellen daartoe, dat telkenmale na een bepaalde periode van  $T$  eeuwen regeneratie van de dijk plaatsvindt. Over de grootte van  $T$ , die naar willekeur gekozen kan worden, zal later iets gezegd worden. De mogelijkheid, dat na één of meer regeneratieperiodes nieuwe technologische procédés beschikbaar zullen zijn, die de dijkregeneratie kunnen vervangen – zoals

thans het Deltaplan althans ten dele de verhoging der dijken in het deltagebied vervangt -, moet buiten beschouwing blijven, daar de consequenties daarvan thans niet te overzien zijn. Men mag wel aannemen, dat deze, wat hun kosten betreft, niet al te veel van de huidige zullen verschillen, terwijl bovendien hun invloed op de uitkomst ten gevolge van de discontering steeds kleiner wordt.

Gedurende de eerste periode  $0 < \tau < T$  zal in het  $(100 \tau)^{\text{de}}$  jaar <sup>1)</sup> de overschrijdingskans

$$p(H, \tau) = p_0 e^{-\alpha x + \beta \tau} \quad (3)$$

bedragen.

Voorts onderstellen we, dat de totale waarde van het beschermde gebied thans  $W$  bedraagt en per jaar met  $\gamma$  % toeneemt. Daar  $\gamma$  toch slechts ruw geschat kan worden, kunnen we evengoed met een continue toeneming rekenen, die dan  $\gamma$  „per unum” per eeuw bedraagt of  $0,01 \gamma$  per jaar, waarin we  $\gamma$ , evenals  $\delta$ , constant onderstellen <sup>2)</sup>. De waarde na  $100 \tau$  jaar is dan  $W e^{\gamma \tau}$  geworden en de schadeverwachting is het produkt daarvan met (3). De contante waarde verkrijgen we door deze uitdrukking met  $e^{-\delta \tau}$  te vermenigvuldigen. Nu is  $e^{\gamma \tau} e^{-\delta \tau} = e^{-\delta' \tau}$  als

$$\delta' = \delta - \gamma \quad (4)$$

is. Dus is  $\delta'$  de *gereduceerde* rentevoet. De totale verdisconteerde schadeverwachting gedurende de eerste periode verkrijgen we nu door het produkt der gevonden uitdrukkingen over  $\tau$  tussen 0 en  $T$  te integreren. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} \int_0^T p_0 W e^{-\alpha x + \beta \tau} e^{-\delta' \tau} 100 \, d\tau &= P_0 W e^{-\alpha x} \int_0^T e^{-(\delta' - \beta)\tau} \, d\tau = \\ &= P_0 W e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta}. \end{aligned}$$

We merken op, dat teller en noemer van de breuk in het laatste lid voor  $\delta' > \beta$  beide positief en voor  $\delta' < \beta$  beide negatief zijn, zodat in het laatste geval de breuk beter in de aequivalente vorm

$$\frac{e^{(\beta - \delta')T} - 1}{\beta - \delta'}$$

geschreven kan worden. Indien  $\delta' = \beta$  is, neemt de breuk eenvoudig de waarde  $T$  aan.

In de daaropvolgende periode hebben we opnieuw een totale verdisconteerde schadeverwachting, die, doordat deze  $T$  eeuwen later plaatsvindt,  $e^{-\delta' T}$  maal zo groot is ( $\delta'$ ; niet  $\delta$ , doordat ook  $W$  weer toegenomen is). Zo voortgaande verkrijgen we voor de totale verdisconteerde schadeverwachting, daar  $\delta'$  een positief getal is <sup>3)</sup>, ten gevolge waarvan de reeks in het tweede lid convergeert:

$$\begin{aligned} R &= 100 p_0 W e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} (1 + e^{-\delta' T} + e^{-2\delta' T} + \dots) = \\ &= P_0 W e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\delta' T}} = \frac{P_0 W e^{-\alpha x + \frac{1}{2} \beta T}}{\delta'}. C. \end{aligned} \quad (5)$$

Hierin hebben we

$$\begin{aligned} C &= e^{-\frac{1}{2} \beta T} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{\delta'}{1 - e^{-\delta' T}} = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\delta' - \beta)T} - e^{-\frac{1}{2}(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{\delta'}{e^{\frac{1}{2} \delta' T} - e^{-\frac{1}{2} \delta' T}} = \frac{\text{sh } \frac{1}{2}(\delta' - \beta)T}{\frac{1}{2}(\delta' - \beta)T} \cdot \frac{\frac{1}{2} \delta' T}{\text{sh } \frac{1}{2} \delta' T} \end{aligned} \quad (6)$$

gesteld, waarin  $\text{sh } x$  de hyperbolische sinus van  $x$  voorstelt.

<sup>1)</sup> Hierin zal  $\tau$  een klein getal zijn, dus bijv. voor  $\tau = 0,10$  is dit het 10de jaar.

<sup>2)</sup> Abstract beschouwd is deze onderstelling niet bijzonder aannemelijk. Het is echter moeilijk te zien, dat een functie van de tijd bij de huidige geringe kennis beter gefundeerd zou kunnen worden dan de constante.

<sup>3)</sup> Indien, overeenkomstig VON NEUMANN's theorie [12],  $\delta'$  nul zou zijn, zou de reeks divergeren en  $R$  zowel als de optimale dijkhoogte zou oneindig groot zijn. Dat wil zeggen: elke, nog zo grote dijkverhoging ware economisch verantwoord. Ditzelfde zou a fortiori het geval zijn als  $\delta'$  negatief zou zijn. Op zichzelf beschouwd is een zo snelle economische expansie, zeker gedurende betrekkelijk korte tijd, niet geheel ondenkbaar.

De kosten der dijkverhoging bij het begin der eerste periode stellen wij evenals in 3.2 voor door  $I$ ; zij bedragen evenals daar:

$$I_0 + I'X.$$

Aan het einde der eerste periode vindt opnieuw een dijkverhoging plaats ter hoogte van  $\eta T$ , die dus, als de initiële kosten, die dan zouden optreden, reeds in  $I_0$  opgenomen zijn en  $I'$  in de loop der jaren gelijk blijft,  $I'\eta T$  kost. In werkelijkheid lijkt het niet onaannemelijk, dat ook  $I'$  zal stijgen ten gevolge van de economische expansie, zij het vermoedelijk niet met de volledige  $\gamma$  % per jaar. Aangezien het bij de dijkbouwkosten, in tegenstelling tot bij de te beschermen waarde, voor het uiteindelijke resultaat vrijwel geen verschil maakt of wij tegen  $\delta$  of tegen  $\delta'$  % verdisconteren, zullen wij eenvoudigheidshalve de gereduceerde rentevoet  $\delta'$  gebruiken.

De som van de verdisconteerde kosten van alle dijkverhogingen is dan:

$$I = I_0 + I'X + J, \quad (7)$$

waarin

$$J = I'\eta T e^{-\delta T} + I'\eta T e^{-2\delta T} + \dots = \frac{I'\eta T}{e^{\delta T} - 1} \quad (8)$$

is, en evenals  $I_0$  niet van  $X$  afhangt.

De totale kosten bedragen nu  $K = I + R$  of:

$$K = J + I_0 + I'X + \frac{P_0 W \alpha}{\delta'} e^{-\alpha X + \frac{1}{2}\beta T} \cdot C. \quad (9)$$

Het enige verschil in vergelijking met (6) in 3.2 is dus gelegen in de toevoeging van de factor  $e^{\frac{1}{2}\beta T}$ .  $C$  in de laatste term, benevens de toevoeging van de term  $J$  en de vervanging van  $\delta$  door  $\delta'$ .

Voor de optimale dijkverhoging vinden we dus, analoog met (8) van 3.2:

$$e^{\alpha \hat{X}} = \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta'} e^{\frac{1}{2}\beta T} \cdot C, \quad (10)$$

dus:

$$\hat{X} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta'} + \frac{1}{2}\eta T + \frac{1}{\alpha} \ln C. \quad (11)$$

Om de optimale waarde van  $T$  te bepalen moet  $\hat{K} = \hat{I} + \hat{R}$ , waarin (7) en (11) gesubstitueerd zijn, als functie van  $T$  beschouwd worden. Reeksontwikkeling leert, dat voor kleine waarden van  $T$  in tweede benadering

$$\hat{K} = \left( I_0 + \frac{I'\eta}{\delta'} + \frac{I'}{\alpha} \ln \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta'} + \frac{I'}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{24} I' \eta^2 T^2 \quad (12)$$

is, en dus een minimum heeft voor  $T = 0$ , dat door de term tussen haken wordt voorgesteld <sup>1)</sup>.

Voor kleine waarden van  $T$  (bijv.  $T = 1/10$  of  $T = 1/5$ , d.i. 10 resp. 20 jaar) blijkt de laatste term in (11), t.w.  $\frac{1}{\alpha} \ln C$ , slechts enkele centimeters te bedragen en negatief te zijn. Daar een kleine *overschatting* van het optimum geen noemenswaardige invloed heeft, kan deze term weggelaten worden, zodat we in plaats van (11) krijgen:

$$\hat{X} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta'} + \frac{1}{2}\eta T. \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Wanneer het niet mogelijk is alle initiële kosten van de periodieke verhogingen in  $I_0$  op te nemen en er dus een klein bedrag  $I'_0$  aan initiële kosten bij iedere periodieke verhoging overblijft, dan volgt de optimale waarde van  $T$  in goede benadering uit:

$$T^3 = \frac{12 I'_0}{\alpha \delta' I' \eta^2}$$

De optimale waarde is dan een klein getal, maar bij onbekende  $\eta$  niet berekenbaar. Het kiezen van een kleine waarde voor  $T$  is dus ook in dit geval aanvaardbaar.

Deze uitdrukking onderscheidt zich in tweeërlei opzicht van (9) van 3.0. Vooreerst is de nominale rentevoet  $\delta$  door de gereduceerde rentevoet  $\delta'$  vervangen, waardoor de invloed van de economische expansie tot uitdrukking is gebracht. Voorts is er de term  $\frac{1}{2} \eta T$  bijgekomen, die aangeeft, dat bij het bepalen van de optimale dijkverhoging niet de toestand bij het begin of het einde, maar die in het *midden* van een periode in rekening moet worden gebracht.

Voor de overblijvende rampschadeverwachting  $\hat{R}$  vinden we uit (5) voor iedere positieve waarde van  $T$  en dus ook in de limiet voor  $T = 0$ , precies als te voren (vergelijk (17) van 3.0):

$$\hat{R} = \frac{I'}{\alpha} = I_e. \quad (14)$$

In plaats van de initiële kosten  $I_0$  komt nu, onder verwaarlozing van termen van de tweede of hogere orde in  $T$ :

$$I_0 + J = I_0 + \frac{I'\eta}{\delta'} - \frac{1}{2} I' \eta T, \quad (15)$$

waarbij we nogmaals vermelden, dat  $I_0$  groter is geworden, doordat er de toekomstige *initiële* kosten in opgenomen zijn. De tweede en derde term in het rechterlid van (15) stellen de som der verdisconterde *toekomstige* dijkverhogingskosten voor, die dienen om de dijk telkens weer op peil te brengen. In de totale kosten  $\hat{K}$  ten slotte kan de laatste term van (12) weer weggelaten worden, daar deze bijv. voor  $T = 1/5$  (20 jaren) en  $\eta = 1$  m per eeuw slechts  $\frac{1}{2}$  cm dijkverhogingskosten bedraagt. We krijgen dus:

$$\hat{K} = I_0 + \frac{I'\eta}{\delta'} + \frac{I'}{\alpha} \ln \frac{P_0 W \alpha}{I' \delta'}. \quad (16)$$

#### 4.2.2 De gewijzigde regels

We gaan nu na, in hoeverre de samenvattende regels I – V van 3.2 wijziging behoeven. Hierbij onderstellen we, dat bij niet-uitvoeren van de overwogen optimale dijkverhoging in ieder geval wel de periodieke regeneratie, dan tot het *huidige* peil, plaatsvindt; verder nemen wij aan, dat de contante waarde van de hiertoe vereiste initiële kosten te verwaarlozen is <sup>1)</sup>. We vinden dan, dat de regels bijna onveranderd geldig blijven. Precieser gezegd:

- I blijft exact en ongewijzigd geldig;
- II evenzo;
- III blijft bij de in formule (13) aangegeven benadering geldig, wanneer in het linkerlid de optimale overschrijdingskans na een halve periode en in het rechterlid de gereduceerde nepereringsrente genomen wordt;
- IV blijft bij de in formule (13) aangegeven benadering geldig, wanneer in het linkerlid de veiligheidsfactor een halve periode na de optimale verhoging en in het rechterlid de gereduceerde nepereringsrente genomen wordt;
- V gaat bij de in formule (13) aangegeven benadering over in:  
 optimale dijkverhoging, uitgedrukt in nepereringshoogten = de natuurlijke logaritme van  $\frac{\text{huidige rampschadeverwachting per jaar}}{\text{gereduceerde nepereringsrente per jaar}}$ , vermeerderd met bodemdaling gedurende een halve periode, uitgedrukt in nepereringshoogten.

Wij merken op, dat in Regel I de veiligheidsfactor op het ogenblik van de verhoging voorkomt en in Regel IV de veiligheidsfactor, behorende bij de situatie, een halve periode na de verhoging.

<sup>1)</sup> In gevallen waarin deze laatste onderstelling niet aanvaardbaar is, zal alleen regel I een kleine wijziging ondergaan, welke ten gevolge heeft, dat het linkerlid wat kleiner wordt. Daar men echter toch zal eisen, dat het rechterlid in regel I veel groter is dan het linker, zal de genoemde wijziging geen invloed hebben op de te nemen beslissing.

Samenvattende zien we dus, dat we al in 3.0, ondanks de toen aangenomen vèrgaande vereenvoudigingen, de wezenlijke kenmerken van de oplossing gevonden hadden. Behalve de vervanging van nominale door gereduceerde rente blijven slechts kleine en in ieder geval eenvoudige correcties over. Ook de beschouwingen aan het einde van 3.1 over het fundamentele verschil tussen (ongevaarlijke) overschatting en (zeer kostbare) onderschatting van het optimum blijven onveranderd geldig.

Wij willen nu overgaan tot de behandeling van een tweetal punten, die zich voor bespreking in het algemene gedeelte minder goed lenen.

### 4.3 Invloed van de gemaakte onderstellingen en de onnauwkeurigheden in de schattingen der constanten

#### 4.3.1 Opheffing van de lineariteitsonderstellingen

De voorafgaande berekeningen zijn gebaseerd op de onderstellingen:

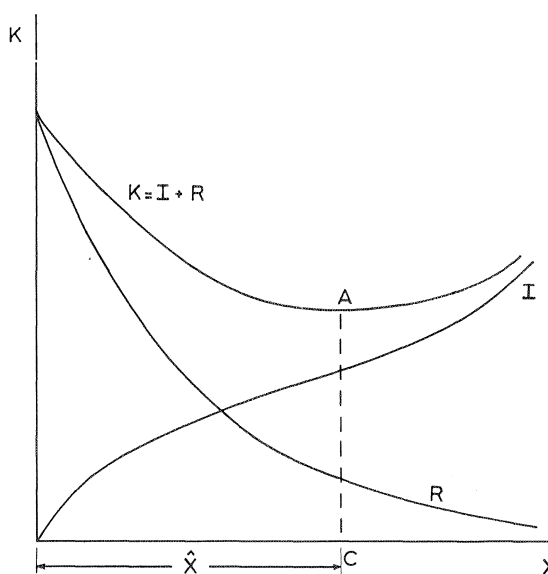
1. dat  $\log p(h)$  een lineaire functie van  $h$  is;
2. dat  $I = I(X)$  een lineaire functie van  $X$  is.

Beide onderstellingen zijn niet wezenlijk voor de gebruikte methode. Als toekomstige waarnemingen leren, dat een andere dan de exponentiële verdeling der hoogwaterstanden een betere aanpassing veroorlooft – hetgeen bij de *thans* ter beschikking staande gegevens nog niet het geval is –, dan substitueert men eenvoudig de verbeterde uitdrukking voor de overschrijdingskans. De algebraïsche bewerkingen en de differentiaties kunnen iets gecompliceerder worden en de numerieke uitkomsten kunnen enige wijziging ondergaan, maar overigens blijft de methode dezelfde. Voorwaarde is natuurlijk, dat de in de verdelingsfunctie optredende constanten met voldoende nauwkeurigheid bepaald kunnen worden. Hetzelfde geldt, *mutatis mutandis*, voor de dijkverhogingskosten, waarvan we al wel weten, dat ze slechts bij vrij ruwe benadering door een lineaire functie kunnen worden voorgesteld.

Indien afwijkingen van de lineariteit van belang worden, zal het veelal nuttig zijn, in stede van naar een gecompliceerde analytische uitdrukking te zoeken, een grafische methode toe te passen, zoals bij voorbeeld door BISCHOFF VAN HEEMSKERCK [2] gedaan is. Het globale verloop van de krommen wordt dan ongeveer zoals in figuur 4.3.1 weergegeven, die dan in de plaats treedt van figuur 3.1.3. Voor grote  $X$  zal  $I + R$ , evenals voorheen, niet van  $I$  onderscheidbaar zijn.

In de meeste gevallen zal men echter de gedeelten van de krommen, die  $\log p(h)$  en  $I(X)$  voorstellen, die op de omgeving van het vooraf reeds globaal geschatte optimum betrekking hebben, met voldoende nauwkeurigheid door lineaire functies kunnen voorstellen. De boven gegeven formules blijven dan toepasbaar, mits men voor  $p_0$  (of  $H_0$ ) en  $\alpha$  resp.  $I_0$  en  $I'$  de bij de *approximerende rechten* behorende waarden substitueert.

Van belang is nog op te merken, dat de stijging der kostenkromme geleidelijk afneemt, althans zo lang men geen excessief hoge niveaus beschouwt. In dat geval geldt de beschouwing behorende bij figuur 3.1.5 met versterkte kracht: de „spijt” bij een hoger dan optimaal kritiek peil wordt nóg kleiner dan zij bij een lineaire kostenkromme zou zijn; tegen relatief zeer geringe extra-kosten wordt een zeer grote verhoging van de veiligheid verkregen. Alleen *onderschrijding* van het optimum moet vermeden worden; *overschrijding* – mits niet excessief hoog – brengt geen verlies van enige betekenis met zich en kan de veiligheid welhaast onbeperkt doen stijgen.



Figuur 4.3.1. Kosten  $K$  bij dijkverhoging met  $X$  meter

#### 4.3.2 Invloed van de schattingen der constanten

Alle in de formules optredende constanten  $p_0, \alpha, \delta, I_0, I', \delta', W$  en  $\eta$  moeten op grond van min of meer onzekere gegevens worden geschat, met uitzondering van  $T$ , die naar willekeur kan worden vastgesteld (mits, indien onze benaderingen worden gebruikt, voldoende klein). De vraag is dus, welke invloed onnauwkeurigheden in de schattingen kunnen hebben.

De constanten zijn van zéér verschillende aard. Vooreerst zijn  $p_0$  en  $\alpha$  aan *statistisch* materiaal ontleend en met veel grotere nauwkeurigheid bekend dan de andere constanten.

De invloed op  $\hat{X}$  van een kleine verandering  $\partial\alpha$  in de waarde van  $\alpha$  wordt gevonden uit (11) van 4.2:

$$\frac{\partial\hat{X}}{\partial\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\hat{X}}{\alpha}$$

dus:

$$\partial\hat{X} \approx \left(\frac{1}{\alpha} - \hat{X}\right) \frac{\partial\alpha}{\alpha} \quad (1)$$

De tweede-ordetermen geven  $\frac{1}{2} \left(\hat{X} - \frac{3}{2}\alpha\right) \left(\frac{\partial\alpha}{\alpha}\right)^2$  en zijn voor  $\frac{\partial\alpha}{\alpha} \leq \pm 0,1$  evenals de vormen van hogere orde verwaarloosbaar. Bovendien zijn de gegeven betrekkingen alleen dan juist, wanneer termen van de tweede en hogere orde in  $T$  verwaarloosd worden. In het volgende beperken wij ons tot (1). Steeds ons bepalende tot Hoek van Holland, kan wel gezegd worden, dat een afwijking  $\partial\alpha = \pm 0,5$  van de hier aangenomen waarde ons reeds vrij groot voorkomt. Daarmede wordt (1):

$$\partial\hat{X} \approx \pm \frac{0,5}{3} (0,34 - \hat{X}).$$

De eerste term is in ieder geval verwaarloosbaar (5 à 6 cm), dus  $\partial X \approx \mp 0,17 \hat{X}$ , dat wil zeggen: de onzekerheid van  $\hat{X}$  ten gevolge van die van  $\alpha$  wordt met 20 % hóóg geschat.

Het tweede paar constanten,  $I_0$  en  $I'$  is uit de marktsituatie te bepalen; deze kunnen als voldoende bekend worden beschouwd.

Het derde paar, t.w.  $\delta'$  en  $W$ , geeft de grootste moeilijkheden, daar deze aan nationaal-economische beschouwingen ontleend moeten worden. De laatste constante ten slotte,  $\eta$ , is van geofysische, klimatologische, geologische en waterstaatkundige aard en hoogst onzeker. De hierdoor veroorzaakte onzekerheid kan men verminderen door de regeneratieperiode  $T$  niet al te groot te kiezen. Door voortgezet wetenschappelijk onderzoek zal  $\eta$  op de duur ongetwijfeld beter bekend worden.

Ter discussie blijven dus de eigenlijk economische constanten  $\delta'$  en  $W$ . De constanten  $p_0, W, \delta'$  en  $I'$  komen in (11) van 4.2 uitsluitend onder het logaritmeteken voor. Een factor 2 in één dezer constanten of in hun combinatie  $p_0 W/I' \delta'$  heeft één halveringshoogte, dus ongeveer  $\frac{1}{4}$  m verschil in de dijkhoogte ten gevolge. Een fout van enkele tientallen procenten wordt door de factor  $\frac{1}{\alpha}$  vóór de logaritme ongeveer getiërceerd en heeft dus geen gevolgen van betekenis. Een factor 2 of groter daarentegen is niet te verwaarlozen en we moeten, zoals gezegd, vooral op onze hoede zijn voor *onderschatting* van het optimum. Indien voor Centraal-Holland in plaats van de gereduceerde rente de marktrente gebruikt zou worden, zou een fout met een factor  $2\frac{1}{2}$  à 3 gemaakt worden. De dijk zou 31 à 37 cm te laag gebouwd worden, hetgeen schijnbaar een winst, maar in werkelijkheid een verlies van omstreeks 15 cm dijkverhoging met zich zou brengen.

De vraag, of de gereduceerde rentevoet voor Centraal-Holland  $1\frac{1}{2}$  %, dan wel 2 % genomen wordt, betekent slechts ongeveer een factor  $\frac{1}{3}$  in de veiligheidsfactor (het rechterlid van (10) van 4.2) of ook een verschil van minder dan 10 cm in de optimale dijkverhoging. Voor het deltagebied heeft een verhoging van  $\delta'$  met  $\frac{1}{2}$  % nog minder invloed op het eindresultaat. De uit 3.0 voortvloeiende wenselijkheid, onderschatting steeds te vermijden, noopt ons dus voor  $\delta'$  de waarden  $1\frac{1}{2}$  %, resp.  $2\frac{1}{2}$  % te aanvaarden, een aanname waarheen ook DE WOLFF's slotopmerking (zie 4.1.1) wijst.

Over de waarde van  $W$  ten slotte, die zo onzeker is, dat ze een niet verwaarloosbare invloed kan hebben, zullen we in 7.0 en 8.0 spreken.



#### 4.4 Samenvatting en conclusies van 4.0

1. De hieronder aangegeven conclusies hebben betrekking op de oplossing van het beslissingsprobleem bij de volgende onderstellingen:

De onderstellingen  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $f$  en  $g$  van 3.2.

Onderstelling  $a$  van 3.2, mits de overschrijdingskansen worden beschouwd van een peil, dat een onveranderlijke hoogte boven het zeeniveau bezit. Het kritieke peil evenwel wordt ondersteld, gelijkmatig ten opzichte van het gemiddeld zeeniveau te dalen.

$f$ . De te beschermen waarde, uitgedrukt in een waarde vaste geldeenheid, neemt jaarlijks met een bepaald percentage toe. De gereduceerde rentevoet, dat is het verschil van de reële interestvoet en dit percentage, wordt als constant beschouwd.

$h$ . Telkenmale na een bepaalde periode van  $T$  eeuwen (waarin  $T$  een gebroken getal zal zijn) wordt de dijk evenveel verhoogd als de daling van het kritieke peil gedurende die periode heeft bedragen.

2. De conclusies I en II van 3.2 blijven exact en ongewijzigd geldig. De conclusies III en IV blijven in goede benadering gelden, indien:

1. de reële interestvoet door de gereduceerde wordt vervangen;

2. de overschrijdingskans, respectievelijk de veiligheidsfactor wordt genomen na een halve periode in plaats van onmiddellijk na de verhoging.

Conclusie V gaat over in: de optimale dijkverhoging, uitgedrukt in nepereringshoogten, is gelijk aan de natuurlijke logaritme van het quotiënt van de huidige rampschadeverwachting per jaar en de gereduceerde nepereringsrente per jaar, vermeerderd met de bodemdaling gedurende een halve periode, uitgedrukt in nepereringshoogten.

3. Conclusie V van 3.4 blijft ongewijzigd geldig.
4. Het verdient overweging, analoog met een in de verzekeringswetenschap soms gevolgde methode, bij de periodieke regeneraties de dijken telkenmale wat meer te verhogen dan de peildaling heeft bedragen. Men verkrijgt hierdoor een steeds grotere veiligheid en op de duur een verwaarloosbare overschrijdingskans.
5. De onnauwkeurigheden in de schattingen van de statistische constanten ( $p_0$  en  $\alpha$ ) zijn klein ten opzichte van de onnauwkeurigheden in de schattingen van de bodemdaling ( $\eta$ ) en de zuiver economische constanten ( $W$  en  $\delta'$ ). Hoewel vooral de onzekerheid in de schatting van de te beschermen waarde ( $W$ ) groot is, mag wel worden aangenomen, dat deze niet wezenlijk groter is dan de onnauwkeurigheden, welke in vele andere, met het onderhavige vergelijkbare projecten voorkomen.

## 5.0 COMPARTIMENTENMETHODE

### 5.1 De verdeling van het land in compartimenten

Bij de modellen, gebruikt in 3.0 en 4.0, is ondersteld, dat er een precies en ondubbelzinnig bepaald kritiek peil is. Als dus een dijk overal hetzelfde kritieke peil zou bezitten, zou deze, bij overschrijding daarvan door het zeewater, het over de gehele lengte tegelijk begeven. In werkelijkheid is zulks niet het geval. Iedere storm heeft zijn individuele kenmerken, waarbij vooral windrichting en duur van de storm belangrijk zijn. Daardoor worden sommige delen van de dijk meer, andere minder bedreigd, afhankelijk van allerlei, door plaatselijke omstandigheden bepaalde factoren. Er is dus bij een bepaald zeeniveau, ook bij een dijk van zoveel mogelijk gelijkmatige veiligheid, nog altijd een van plaats tot plaats wisselende kans op doorbraak.

Desondanks is bij een gebied, dat als een enkelvoudige polder moet worden beschouwd omdat het in zijn geheel door één enkele dijkkring wordt beschermd, ieder dijkgedeelte volledig „verantwoordelijk” voor de gehele polder. Vooral bij uitgebreide poldergebieden wordt daarmee een enorme verantwoordelijkheid op de hoofdwatkeringen gelegd. De situatie vertoont enige gelijkenis met die van een schip, waarvan ieder gedeelte van de romp in eerste aanleg verantwoordelijk is voor het gehele schip.

Dáár lost men de moeilijkheid op door, ondanks zware eisen, aan de sterkte van de romp gesteld, en ondanks de zéér geringe frequentie <sup>1)</sup> – althans in vreedetijd – van ernstige beschadigingen daarvan, het schip door waterdichte schotten in compartimenten te verdelen. Aan de grootte dezer compartimenten zijn zelfs bij internationale conventie grenzen gesteld.

Daar het beneden de zeespiegel gelegen deel van ons land enige overeenkomst met een schip vertoont, waarbij de hoofdwatkeringen, te zamen met de natuurlijke bescherming, door duinen en hooggelegen gedeelten geboden, met de scheepswand overeenkomen, kan men trachten, ook de methode der indeling in compartimenten, door „waterdichte schotten” gescheiden, daarop toe te passen (vergelijk [5], blz. 19–20).

In eerste instantie ligt het voor de hand, voor zulke „waterdichte schotten” bestaande binnendijken te bestemmen. Immers, in geval van nood ten gevolge van een doorbraak zal men altijd trachten, zulk een binnendijk te behouden en als nood-waterkering te gebruiken door hem in allerijl te versterken en te verhogen. Het beginsel nu, voor zoverre mogelijk, alle eventualiteiten, die zich wellicht kunnen voordoen, in aanmerking te nemen en er binnen het bereik der mogelijkheden bij de te treffen beslissing rekening mede te houden, leidt er toe, dat men de verhoging liever vooraf zal uitvoeren, daar dit dan met minder kosten en met meer kans op succes zal kunnen geschieden. Daarbij is het natuurlijk vóór alles van belang, dat de binnendijken inderdaad, althans behoudens een verwaarloosbaar kleine kans en behoudens de mogelijkheid een beheersbare hoeveelheid water te spuien, „waterdicht”, dus over hun gehele lengte voldoende hoog en sterk zijn en volledig op elkaar of op de hoofdwatkeringen aansluiten. Bij de stormramp van 1953 evenwel hebben vele bestaande binnendijken onvoldoende bescherming geboden.

Het is dan ook in overeenstemming met wat wij kortweg het „beginsel der waterdichte compartimenten” <sup>2)</sup> zullen noemen – een beginsel, dat geenszins nieuw is –, dat de Deltacommissie in haar Eerste Interimadvies van 1954 heeft aanbevolen, de Schouwense Dijk te verhogen en te versterken.

Strikt economisch bezien zou men op grond van zulk een „waterdicht schot” de hoofdwatkering iets minder kunnen verhogen. Beperken we ons tot het eenvoudigst denkbare geval, waarin een polder door een binnendijk in twee delen van gelijke waarde en gelijke dijkomvang wordt verdeeld. Elk deel van de buitendijk <sup>3)</sup> heeft dan nog slechts de helft van de oorspronkelijke verantwoordelijkheid te dragen; men zou dus de verhoging met één halveringshoogte, dus ongeveer  $\frac{1}{4}$  meter, kunnen verminderen. In werkelijkheid echter kan de door de buitendijk in zijn geheel gedragen verantwoordelijkheid groter blijven dan de helft van de oorspronkelijke. Immers zodra het zeeniveau zó hoog wordt, dat doorbraak niet meer het gevolg is van plaatselijk wisselende kansen, zal doorbraak van beide buitendijkhelften kunnen optreden <sup>4)</sup>. De binnendijk heeft dan als „waterdicht schot” geen functie meer, maar zal, zelfs nog in versterkte mate, waarde bezitten als vluchtplaats voor mensen en vee. Bovendien vergemakkelijkt hij in hoge mate het herstel van de hoofdwatkering. Indien men daarom zou overwegen, de versterking van de binnendijk als een extra-beveiliging te beschouwen, zónder de primaire beveiliging daarom te verminderen, dan zou men zich met betrekking tot de hoofdwatkering niet meer in de economisch optimale toestand bevinden, maar minder dan  $\frac{1}{4}$  meter daarboven. Volgens tabel 3.1.1 komt dan de „spijt” overeen met ongeveer 6 cm dijkverhoging, een zeer klein bedrag.

Tot slot willen wij nog de ongetwijfeld bij sommigen opkomende vraag bespreken, of de gevaren waartegen maatregelen als de genoemde een beveiliging zouden moeten zijn, niet volkomen denkbeeldig zijn, gezien de uiterst kleine overschrijdingskansen, die na de uitvoering van het Deltaplan en de voorgenomen versterkingen van de hoofdwatkeringen elders in het land zullen overblijven. Wij vrezen, dat dit niet het geval is, want niet alleen bevinden wij ons met onze kansberekeningen aan de grenzen van wat de statistische methoden vermogen, maar bovendien hebben deze alleen betrekking op de gevaren van meteorologische en oceanografische oorsprong. In het Voorlopig Verslag, behorende bij de behandeling van het Ontwerp-Deltawet in de Tweede Kamer evenwel, is reeds de mogelijkheid van accidentele of opzettelijke beschadiging van onze waterkeringen in geval van oorlog ter sprake ge-

<sup>1)</sup> Volgens Lloyd ging in 1951 t/m 1955 van de wereldtonnage 0,27 % door scheepsrampen verloren; voor de Nederlandse vloot bedroeg dit percentage 0,15 % of  $3 \cdot 10^{-4}$  per jaar.

<sup>2)</sup> Als afkorting voor „door waterdichte schotten gescheiden compartimenten”.

<sup>3)</sup> Behalve de aansluitingspunten aan de binnendijk.

<sup>4)</sup> Overigens is het niet uitgesloten, dat doorbraak van één der dijkhelften de kans op doorbraak van de andere dijkhelft vermindert.

bracht. Het heeft geen zin, aan de kansen op dergelijke eventualiteiten getallenwaarden toe te kennen, maar wel niemand is zo optimistisch om ze zo klein als de berekende kansen van  $10^{-2}$  of  $10^{-3}$  per eeuw te achten. En als zich deze mogelijkheid zou voordoen, zou ons land niet slechts alle gevaren delen, waaraan ook onze buurlanden blootstaan, maar daarenboven bestaat nog exclusief voor ons het gevaar, dat het schip, dat de Lage Landen vormen, „getorpedeerd” kan worden. Vandaar dat een weldoordacht systeem van primaire en secundaire keringen voor relatief lage kosten een beveiliging biedt tegen catastrofes, die wél een kleine waarschijnlijkheid bezitten, maar geenszins hersenschimmig zijn.

## 5.2 Samenvatting en conclusies van 5.0

1. Ieder dijkgedeelte is verantwoordelijk voor het *gehele* gebied, dat bij doorbraak overstromd zou worden.
2. In gevallen, waarin door de uitgebreidheid van de polder deze verantwoordelijkheid zeer groot wordt, kan men deze verminderen bijv. door bestaande binnendijken te versterken tot „waterdichte schotten”, waardoor het poldergebied in afzonderlijke compartimenten verdeeld wordt.
3. Hoewel hierdoor, zuiver economisch bezien, de optimale hoogte van de hoofdwatkeringen een iets lagere waarde krijgt, zou men in sommige gevallen toch kunnen overwegen, het aanleggen van deze „schotten” als een extra-versterking te beschouwen, daar deze tevens verschillende andere functies vervullen, bijv. een vluchtplaats te bieden voor mensen en vee, verbindingen te handhaven, die anders verloren zouden gaan, en het herstel der hoofdwatkeringen te vergemakkelijken, terwijl het verschil met de economisch-optimale toestand betrekkelijk gering is.

## 6.0 DE INVLOED VAN IMPONDERABILIA

### 6.1 De waarde van mensenlevens en ideële goederen en de beheersing van de situatie

Toen SIR WILLIAM PETTY [9] in 1669 de omvang van het bezit van zijn koning trachtte te berekenen, bracht hij daarbij voor diens onderdanen £ 69 per hoofd in rekening. De meesten onzer evenwel stuit het tegen het gemoed de waarde van een mensenleven als equivalent met een bepaald bedrag in geld te beschouwen. Indien men, zoals in een recente studie van REYNOLDS [13] in verband met de schaden, veroorzaakt door verkeersongelukken, is geschied, de *economische gevolgen* van het verlies van mensenlevens in geld tracht te waarderen, door deze bijv. te vereenzelvigen met de wiskundige verwachting van de contante waarde van de economische goederen, die zij bij voortleven nog zouden voortbrengen, verminderd met wat zij zouden verbruiken, dan vindt men dat dit bedrag bijv. voor pasgeboren meisjes, voor zeer bejaarden en voor vrouwen van bijna alle leeftijden negatief is. Het hoogste in genoemde studie gevonden bedrag, t.w. voor mannen tussen 15 en 20 jaar is £ 15 700 per hoofd. Voor vrouwen is dit voor dezelfde leeftijdsgroep £ 1288 <sup>1)</sup>. Het behoeft wel geen betoog, dat een dergelijke berekening voor het huidige probleem, waar het beschermen van de bevolking en haar levensbehoeften tegen overstromingen hoofddoel is, geen aanvaardbare grondslag zou bieden.

In plaats van te trachten mensenlevens op zichzelf in geld te waarderen, zou men kunnen onderzoeken hoeveel de staat per hoofd van de bevolking uitgeeft om de bevolking te beschermen tegen andere gevaren, zoals verkeersongevallen, bedrijfsongevallen en dood door verdrinking. Het is wel zeker, dat deze bedragen in hoge mate uiteenlopen. In enkele gevallen, die sterk tot de publieke verbeelding spreken (een tragische en sterke emoties wekkende mijnramp, een kapitein, die zijn ondergaand schip niet wil verlaten, enkele onvoorzichtige, door een sneeuwstorm overvallen alpinisten, e.d.), worden grote bedragen aan reddingspogingen besteed. In verreweg de meeste gevallen evenwel, waarbij de openbare mening niet of nauwelijks in het geding komt, wordt verzuimd, soms zelfs geweigerd, betrekkelijk kleine bedragen uit te geven, waarmee verlies van mensenlevens zou kunnen worden voorkomen. Ook als men het bedrag tot uitgangspunt neemt, waarvoor het leven van hogere rijksambtenaren,

<sup>1)</sup> REYNOLDS' studie bevat geen gemiddelde voor de gehele bevolking. Wel kan op grond van zijn gegevens worden berekend, dat voor degenen, die aan verkeersongevallen zijn blootgesteld, dit bedrag bij een verdisconteringsfactor van 4 % per hoofd £ 3000 bedraagt.

die in dienst van het rijk per vliegtuig reizen, door het rijk verzekerd wordt, dan komt men nog tot weinig bruikbare resultaten. In de eerste plaats is dit bedrag niet een maat voor de waarde, die de staat aan het behoud van de levens van zijn ambtenaren hecht, maar een dekking tegen de aanspraken van nabestaanden. Bovendien echter is dit bedrag geen gemiddelde voor alle ambtenaren en nog minder voor alle burgers. Ook zullen slechts zeer enkelen zich kunnen veroorloven, hun *eigen* leven onder alle omstandigheden zo hoog te waarderen, door een levensverzekering af te sluiten met een gekapitaliseerde waarde van bijv. f 100 000,—. Anderzijds evenwel zou zelfs een *gemiddelde* van f 100 000,— per hoofd nauwelijks enig effect hebben. Immers bij de stormramp 1953 zijn 1800 mensenlevens en een economische waarde van de orde van 1,5 miljard gulden verloren gegaan. Deze 1800 mensenlevens zouden tegen f 100 000,— per hoofd een bedrag van 180 miljoen vertegenwoordigen, dus de economische schade slechts met ruim 10% verhogen. Dit zou leiden tot een *extra*-dijkverhoging van nog  $1,1 = 0,04$  decimeringshoogten of ongeveer 3 cm. Als men de door REYNOLDS aangegeven bedragen neemt, wordt dit zelfs nog minder. Nu is een extra-dijkverhoging van enkele centimeters ter bescherming van mensenlevens technisch zinledig, maar ook psychologisch onaanvaardbaar. Om al deze redenen is het ongewenst, in een geval als het huidige, waar een bewuste beslissing dienaangaande genomen moet worden, deze te baseren op een aan de huidige praktijk ontleend statistisch gemiddelde. Het is beter van een economische waardering van mensenlevens geheel af te zien en te trachten deze te zamen met andere, niet-economische waarden in aanmerking te nemen.

Voor culturele goederen immers geldt een gelijksoortige beschouwing.

Verder kan men er bezwaar tegen maken, dat schadeverwachting en investering in dijkbouw zonder meer zijn opgeteld. Indien men immers de keuze heeft een zelfde bedrag uit te geven, hetzij voor dijkbouw, hetzij voor vergoeding en herstel van rampschade, dan zal men ongetwijfeld aan het eerstgenoemde de voorkeur geven. Zelfs zal men bereid zijn *een veelvoud* van het bedrag uit te geven, dat door stormvloed verloren zou gaan, als men deze daarmee kan vermijden. Het verschil dient om een nauwelijks te overzien soort van „consequential loss” te voorkomen, welke bestaat uit de door een overstroming veroorzaakte desorganisatie van het maatschappelijk leven, de verhoogde kans op besmettelijke ziekten en de psychologische, sociale en economische „shock”. Verder wordt door dit verschil rekening gehouden met de mogelijkheid, dat de ramp zou kunnen gebeuren juist op een ogenblik, waarop deze, politiek en economisch gezien, het meest ongelegen zou komen, en met de psychologische waarde van een gerechtvaardigde verhoging van het gevoel van veiligheid der bevolking. In het algemeen kan men zeggen, dat men bereid is dit extra-bedrag uit te geven omdat men de voorkeur geeft aan een beheerste toestand boven een niet beheerste, die bij een eventuele ramp zou ontstaan.

We zullen alle genoemde (en ook de hier niet besproken) niet-economische waarden samenvatten in een factor, waarmee de zuiver economisch te „beschermen waarde” moet worden vermenigvuldigd. Het bepalen van deze factor, die uiteraard groter dan één zal zijn, kan niet geschieden op mathematisch-statistische, technische of economische gronden, doch moet, mede vanwege het subjectieve element, dat hierin gelegen is, veeleer worden beschouwd als een handeling van beleid. Keuze van een enigszins grote waarde van deze factor kan ook gezien worden als een middel om te voorkomen, dat de economische overwegingen bij een beslissing van zo grote draagwijdte als de onderhavige een al te sterke nadruk krijgen. Zo wil het ons voorkomen, dat een factor 2 zeker niet te hoog zou zijn.

Om ten slotte nogmaals op het verlies van mensenlevens bij stormrampen terug te komen: de kans daarop is sinds 1953 reeds aanzienlijk verminderd, mede ten gevolge van een wezenlijk verbeterd waar- schuwingsstelsel. Het lijkt mogelijk, niet alleen te trachten dit stelsel nog verder te verbeteren, doch eveneens *vooraf* te zorgen voor reddingsmiddelen <sup>1)</sup>.

## 6.2 Samenvatting en conclusies van 6.0

1. Ten einde te vermijden, dat men de waarde van mensenlevens in geld zou moeten waarderen, is het beter, deze waarde niet afzonderlijk in aanmerking te nemen, doch te zamen met andere niet-economische waarden, zoals culturele goederen benevens de voordelen, gelegen in het beheersen van een

---

<sup>1)</sup> Ook hier dringt zich de analogie met een schip op: daàr is, ondanks de geringe frequentie van scheepsrampen, de aanwezigheid en onmiddellijke beschikbaarheid van een reddingsboei en een plaats in een reddingsboot voor iedere passagier een wettelijke verplichting.

situatie boven de niet te beheersen situatie, die bij een ramp zou kunnen ontstaan. Men kan dit doen door de te beschermen zuiver economische waarde met een factor te vermenigvuldigen.

2. De grootte van deze factor kan niet op mathematisch-statistische, economische of technische gronden geschieden, doch moet veeleer als een handeling van beleid worden beschouwd.

## 7.0 DE VEILIGHEID VAN CENTRAAL-HOLLAND

### 7.1 Toepassing van de in 4.0 afgeleide formules op Centraal-Holland

We passen nu de voorafgaande beschouwingen toe op Centraal-Holland. Daaronder verstaan we het gebied, begrensd door de Noordzee, de Rotterdamse Waterweg, de Nieuwe Maas, de Lek, het Amsterdam-Rijnkanaal, het IJ en het Noordzeekanaal. Hoewel het uit vele afzonderlijke polders bestaat, is het in wezen één enkel bekken. Aan de westzijde is het beschermd door de duinenreeks, een „Meginotlinie”, die door de zee, behalve op enkele punten, nauwelijks doorbroken, maar wel omtrokken kan worden.

De *statistische constanten* zijn vrij goed bekend; de waarden voor Hoek van Holland kunnen voor de gehele zeekust gebruikt worden en de waarden verder landinwaarts kunnen daaruit worden afgeleid. We kunnen aannemen, dat deze reductie tot de hoogte van de zeespiegel te Hoek van Holland heeft plaats gehad en uitsluitend deze laatste in onze berekeningen opnemen. Het *kritieke peil* kon vóór de voltooiing van de stormvloedstuw in de Hollandse IJssel worden gelijkgesteld aan het peil van de februari-stormvloed, t.w. N.A.P. + 3,85 m; de overschrijdingskans daarvan is 0,45 (of 45%) per eeuw. De vraag hoe hoog het tegenwoordige kritieke peil is, na de afsluiting dus van de Hollandse IJssel, is niet gemakkelijk te beantwoorden. Men kan deze vraag echter vermijden door er van uit te gaan, dat de dijk in ieder geval verhoogd zal worden tot het door de Deltacommissie aangegeven „basispeil”, hetwelk volgens de oorspronkelijke schattingen N.A.P. + 5,00 m bedroeg. De kosten van de verhoging tot dit peil worden nu beschouwd als de „initiële kosten”. Deze methode is gerechtvaardigd, aangezien zal blijken dat de optimale hoogte van de dijken boven N.A.P. + 5,00 m komt te liggen.

Voor de zuidelijke verdedigingslinie Kijkduin-Rotterdamse Waterweg-Krimpen aan de IJssel bedragen *de kosten van verhoging* tot het peil van N.A.P. + 5,00 m volgens een mededeling van VAN VEEN van de Rijkswaterstaat en volgens een rapport van BISCHOFF VAN HEEMSKERCK [2] ongeveer 110 miljoen gulden. Bij verhoging boven N.A.P. + 5,00 m is de kostenkromme ongeveer rechtlijnig, d.w.z. de extra-kosten van verhoging boven basispeil zijn met de extra-verhoging evenredig en bedragen 40 miljoen gulden voor één meter. (Beneden het peil van N.A.P. + 5,00 m is de kostenkromme niet de rechtlijnige voortzetting van het stuk boven N.A.P. + 5,00 m).

De geringe nauwkeurigheid, waarmee de *geologische* constante, de relatieve bodemdaling bekend is, stoort de berekeningen niet, indien op de in 4.0 beschreven wijze de dijkregeneratie met korte perioden roulerend wordt uitgevoerd.

De *nationaal-economische* constanten zijn de gereduceerde rentevoet en het „verzekerde bedrag” is de schade, die bij doorbraak zou worden geleden. Overeenkomstig 4.1.1 zullen we voor de gereduceerde rentevoet  $1\frac{1}{2}\%$  per jaar kiezen.

Ten aanzien van de grootte van het „te verzekeren” bedrag zijn verschillende opvattingen mogelijk. Zoals in de schadeverzekering veel gedaan wordt en in overeenstemming met 3.0 en 4.0 zullen we alleen met een „total loss” van de op laaggelegen gronden aanwezige goederen rekenen. De wijzigingen, die voortvloeien uit de zeer moeilijk te schatten kansen, dat bij dijkdoorbraak een deel van de „inboedel” behouden blijft of niet geheel zijn waarde verliest, laten wij buiten beschouwing.

In verband met de grote bedragen die ter discussie staan, is het nuttig de op vele andere gebieden internationaal genormaliseerde benamingen voor decimale eenheden ook in de economie te gebruiken.

Overeenkomstig bijv.  $1\text{ cm} = 1\text{ centimeter} = \frac{1}{100}\text{ meter}$  en  $1\text{ kg} = 1\text{ kilogram} = 1000\text{ gram}$  stellen wij dus voor, ook te zeggen:  $1\text{ cf} = 1\text{ centigulden} = 1\text{ cent}$  en  $1\text{ kf} = 1\text{ kilogulden} = f1000$ . In het bijzonder zullen we gebruiken:  $1\text{ Mf} = 1\text{ megagulden}^1) = \text{een miljoen gulden}$ , en  $1\text{ Gf} = 1\text{ gigagulden}^1) = \text{een miljard gulden}$ , waarbij we ter verdere afkorting het symbool  $f$  weglaten.

<sup>1)</sup> Grieks: megas = groot; gigas = reus, gigant.

Dus bijv.  $1,42 \text{ M} = 1,42 \text{ Mf} = f 1\,420\,000$ ,  
 $2,13 \text{ G} = 2130 \text{ M} = 2,13 \text{ Gf} = f 2\,130\,000\,000$ .

Het ligt voor de hand, bij de bepaling van de te beschermen waarde uit te gaan van de in Centraal-Holland geïnvesteerde kapitaalgoederenvoorraad, vermeerderd met de bij particulieren aanwezige duurzame consumptiegoederen. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (C.B.S.) heeft hiervan een schatting gemaakt, speciaal voor de studies in het kader van de werkzaamheden der Deltacommissie. Volgens globale ramingen was het genoemde bedrag voor Centraal-Holland eind 1952 ongeveer 24,2 miljard gulden. Hierin zijn dus het door de overheid in dit gebied belegde kapitaal en de duurzame consumptiegoederen wel begrepen, doch de waarde van spoor- en tramwegen, lucht- en scheepvaart nog niet, aangezien deze om technische redenen niet voor een bepaald gebied afzonderlijk berekend konden worden. Een deel van deze investeringen bevindt zich op hooggelegen gronden en wordt dus door een overstroming niet rechtstreeks getroffen. Hoe groot dit gedeelte is, kan zonder diepgaand onderzoek moeilijk worden geschat, maar het is in ieder geval vrij klein.

Anderzijds moet het bedrag van 24,2 G nog worden vermeerderd met de schaden ten gevolge van produktiederving om de te beschermen zuiver economische waarde te vinden.

Na de stormramp van 1953 gelukte het door een uiterste krachtsinspanning, gesteund door een ongewoon gunstige economische en politieke situatie en belangeloze buitenlandse hulp, de dijken nog in hetzelfde jaar te dichten. De produktie kon echter eerst veel langzamer weer op gang komen. Indien een soortgelijke ramp zich in Centraal-Holland zou voordoen, ware het wel zeer optimistisch, te verwachten, dat de produktie na bijv. 3 jaren weer geheel of grotendeels hersteld zou zijn, daar de produktiemiddelen, die in 1953 het snelle herstel mogelijk maakten, voor een aanzienlijk deel juist in Centraal-Holland zijn gelegen en dus mede verloren zouden gaan.

Het uit Centraal-Holland afkomstige deel van het nationaal inkomen is door het C.B.S. voor 1952 op ongeveer 6,8 G geraamd. Dit bedrag kan echter niet volledig in rekening worden gebracht, zelfs niet voor het eerste jaar na de ramp, omdat een deel van de bevolking elders in het land werk zou kunnen vinden en zodoende daar tot de produktie zou bijdragen. Vermoedelijk zou de uit deze overweging vereiste correctie echter verre worden overgecompenseerd door derving van produktie buiten Centraal-Holland, die afhankelijk is van wegvallende produktie in Centraal-Holland.

De op de aangegeven wijze af te leiden te beschermen economische waarde moet nog worden vmenigvuldigd met de in 6.0 besproken factor voor de niet-economische waarden. Daar het nauwelijks mogelijk is, de waarde van de verhogende factoren (produktiederving in en buiten Centraal-Holland, niet-economische waarden) en de waarde van de verlagende factoren (gedeeltelijk behoud van goederen in hooggelegen delen en gedeeltelijk behoud van de produktiviteit van de bevolking) tegen elkaar af te wegen, zullen wij eenvoudigheidshalve de berekeningen geven, zoals deze zouden moeten zijn, indien de genoemde factoren elkaar juist zouden opheffen. Men moet vermoedelijk wel aannemen, dat dit een lage, dus optimistische schatting van de mogelijke rampschade inhoudt.

Samenvattende hebben wij dus:

Statistisch:	kritiek peil vóór afsluiting Hollandse IJssel N.A.P. + 3,85 m <sup>1</sup> ); overschrijdingskans per eeuw: $P_0 = 0,45$ ; overschrijdingskans per eeuw van het peil van N.A.P. + 5,00 m: $P_0 = 0,015$ ; $\alpha = 2,97$ ; halveringshoogte $a_2 = 0,23$ m.
Dijkbouwkosten:	verhoging tot het peil van N.A.P. + 5,00 m: $I_0 = 110 \text{ M} = 0,11 \text{ G}$ ; kosten per meter vanaf het peil van N.A.P. + 5,00 m: $I' = 40 \text{ M} = 0,04 \text{ G}$ .
Nationaal-economisch:	$\delta' = 1,5 \%$ per jaar; $W = 24,2 \text{ G}$ .
Geologisch:	$\eta$ wordt verwaarloosd wegens periodieke regeneratie.

<sup>1</sup>) Wanneer men, zoals in het rapport van BISCHOFF VAN HEEMSKERCK [2] gebeurt, er van uitgaat dat het kritieke peil N.A.P. + 4,25 m bedraagt, dan beïnvloedt dit het optimale kritieke peil niet, aangezien bij de berekeningen van een initiële verhoging tot N.A.P. + 5,00 m wordt uitgegaan.

Wanneer men uitgaat van een initiële verhoging van het kritieke peil tot N.A.P. + 5,00 m, dan is na die verhoging de schadeverwachting per jaar  $p(5,00) \cdot W = 0,00015 \cdot 24,2 \text{ G} = 0,00363 \text{ G} = 3,63 \text{ M}$  en de totale verdisconteerde schadeverwachting  $\frac{0,015 \cdot 24,2}{1,5} \text{ G} = 0,242 \text{ G}$ . De nepereringskosten, dat zijn de kosten van dijkverhoging met ongeveer  $\frac{1}{3}$  meter, bedragen  $0,0135 \text{ G} = 13,5 \text{ M}$  en de gereduceerde rente daarvan is  $0,015 \cdot 13,5 \text{ M} = 0,20 \text{ M}$  per jaar of  $20 \text{ M} = 0,020 \text{ G}$  per eeuw.

We passen nu de Regels II t/m V uit 4.2 toe, waarbij we uitgaan van een kritieke dijkhoogte van N.A.P. + 5,00 m en de bodemdaling  $\eta$  verwaarlozen. We vinden dan:

Regel II Rampschadeverwachting na optimale dijkverhoging = nepereringskosten = 13,5 M.

Regel III Overschrijdingskans per jaar na optimale dijkverhoging =  $\frac{\text{nepereringsrente per jaar}}{\text{te beschermen waarde}} = \frac{0,20 \text{ M}}{24,2 \text{ G}} \cdot 8 \cdot 10^{-6}$ , of 0,0008 per eeuw.

Regel IV Veiligheidsfactor der optimale verhoging boven N.A.P. + 5,00 m =  $\frac{\text{rampschadeverwachting per jaar bij N.A.P. + 5,00 m}}{\text{nepereringsrente per jaar}} = 18$ .

Regel V Optimale verhoging, uitgedrukt in nepereringshoogten = de natuurlijke logaritme van  $\frac{\text{rampschadeverwachting per jaar bij N.A.P. + 5,00 m}}{\text{nepereringsrente per jaar}} = 2,9$ .

De optimale verhoging boven N.A.P. + 5,00 m bedraagt dus omstreeks één meter.

Wij moeten nog controleren of ook aan Regel I van 4.2 is voldaan. Wederom kosten van verhoging van het kritieke peil tot N.A.P. + 5,00 m „initieel” noemende, vinden wij, dat

$$\frac{\text{totale dijkverhogingskosten}}{\text{nepereringskosten}} = \frac{110 + 40}{13,5} = 11,1$$

kleiner moet zijn dan de met één verminderde veiligheidsfactor. Helaas kan deze veiligheidsfactor niet exact berekend worden, aangezien de overschrijdingskans na de afsluiting van de Hollandse IJssel niet bekend is. Het is echter wel zeker, dat deze veiligheidsfactor vele malen groter is dan  $11,1^1$ ), zodat aan de gestelde eis ruimschoots is voldaan.

Resumerende dus: Indien de te beschermen waarde 24,2 G bedraagt, is het optimale kritieke peil N.A.P. + 6 m; de overschrijdingskans daarvan per jaar is  $8 \cdot 10^{-6}$  of 0,0008 per eeuw. De overblijvende verdisconteerde schadeverwachting is 13,5 M en de totale dijkbouwkosten bedragen 150 M.

De boven gevonden optimale hoogte van N.A.P. + 6 m is wel zeer hoog, te meer daar deze niet de kruinhoogte, maar het kritieke peil te Hoek van Holland voorstelt, waaruit de kruinhoogte, na omrekening op het plaatselijke kritieke peil wordt verkregen door er nog de waakhogte bij op te tellen.

Deze optimale hoogte zou zelfs nog groter worden, zo de te beschermen waarde hoger, dus de rampschadeverwachting minder optimistisch zou moeten worden geschat. Algemeen geformuleerd kan men stellen, dat iedere factor 2 waarmee de te beschermen waarde wordt vermenigvuldigd, een verhoging van het optimale kritieke peil met één halveringshoogte, dus 0,23 m ten gevolge heeft.

Evenwel hangt de hoogte, welke men uiteindelijk aan de zuidelijke hoofdwaterkering zal geven, niet alleen af van de schatting van de te beschermen economische waarde en de grootte, die men aan de factor voor niet-economische waarden toekent. Immers, zeer grote verhogingen worden veeleer bepaald door technische mogelijkheden dan op grond van economische overwegingen.

Wij wenden ons thans tot de discussie van het probleem, verbonden aan de plaatsen, waar mogelijk „bressen” in de „Meginotlinie” zelf zouden kunnen ontstaan, dus aan de kustverdediging tegen de zee. Dergelijke plaatsen zouden bijvoorbeeld Scheveningen, Katwijk en IJmuiden kunnen zijn. Een doorbraak aldaar heeft weliswaar reeds thans een kleine kans, maar deze is met het oog op het belang

<sup>1)</sup> Dit volgt reeds uit het feit dat zelfs de met één verminderde veiligheidsfactor boven N.A.P. + 5,00 m, dat is 19, groter is dan 11,1. Wanneer men er van uitgaat, dat na de afsluiting het kritieke peil N.A.P. + 4,25 m (de door BISCHOFF VAN HEEMSKERCK gebruikte waarde voor het tegenwoordige kritieke peil) bedraagt, dan zou men voor de veiligheidsfactor vinden  $e^{2,97(6-4,25)}$ , 180.

van het daarachter gelegen gebied niet te verwaarlozen. Immers *ieder* van deze punten is, evenals de zuidelijke hoofdwaterkering „verantwoordelijk” voor *geheel* Centraal-Holland.

Natuurlijk is het niet mogelijk, met enige zekerheid te voorspellen, welke gevolgen een doorbraak, bijv. bij Katwijk, zou hebben, maar men kan wel trachten zich de mogelijke economische gevolgen van een dergelijke catastrofe voor te stellen. Daartoe nemen wij aan, dat aldaar tijdens een extreem hoge waterstand een doorbraak zou ontstaan, die niet onmiddellijk gedicht zou kunnen worden.

Het mag bekend worden ondersteld, dat Centraal-Holland, met uitzondering van de kuststreek, een bekken is, naar grootte en diepte vergelijkbaar met de voormalige Zuiderzee. Het is niet in waterdichte compartimenten verdeeld; behoudens een enkele uitzondering ligt geen der binnendijken tussen de kust en het Amsterdam-Rijnkanaal hoger dan enkele decimeters boven N.A.P. Hun niveau zou dus meermalen per week worden overschreden. Om ze zelfs maar tot jaarpeil te brengen, zou een verhoging van omstreeks twee meter nodig zijn. Indien dus bij Katwijk een doorbraak zou ontstaan, die niet binnen zeer korte tijd gedicht zou kunnen worden, zou men er niet op mogen rekenen enig beneden N.A.P. gelegen deel van Centraal-Holland duurzaam te kunnen behouden.

Bij een eventuele overstroming zou dus een binnenmeer ontstaan waartoe de getijdestromingen, zij het aanvankelijk over een front van beperkte breedte, vrije toegang zouden hebben, op de duur vernielende wat aan technische werken oorspronkelijk nog overgebleven zou zijn. Alle hoofdverkeerswegen en grote delen der spoorwegen liggen laag en zouden na korte tijd onbruikbaar zijn. Alleen de boven N.A.P. liggende binnendijken zouden althans gedeeltelijk overblijven.

Er zou dus een waterstaatkundig probleem ontstaan, dat naar omvang en moeilijkheid dat van de drooglegging der Zuiderzee nabijkwam, terwijl de produktiemiddelen voor de uitvoering er van grotendeels verstoord waren, zodat buitenlandse hulp onontbeerlijk zou zijn. Of andere landen bereid en in staat zouden zijn, deze hulp te bieden, zou van de internationale economische en politieke toestand afhangen.

Bij het overwegen van de gevolgen, die een nieuwe stormramp zou kunnen hebben, moet ook worden bedacht, dat reeds na het bombardement van Walcheren in 1944 en vervolgens nogmaals na de stormramp van 1953 sommige buitenlandse economen de vraag hebben opgeworpen of het economisch wel verantwoord was, de verdronken grond terug te winnen. Bij een nieuwe stormramp zou deze vraag ongetwijfeld met meer klem worden gesteld en als wij voor het terugwinnen van het land op buitenlandse hulp zouden zijn aangewezen, zou vermoedelijk van sommige zijden worden betoogd, dat het duizend jaar oude experiment van een aan zee grenzend land beneden zeeniveau dan wel als definitief mislukt zou moeten worden beschouwd. Wij zouden dan een zeer krachtige en overtuigende argumentatie moeten bezitten, om deze opvatting te weerleggen. Met andere woorden: indien een nieuwe ernstige stormramp zou optreden, zou de mogelijkheid niet buiten beschouwing kunnen blijven, dat wij genoodzaakt zouden zijn, het verdronken land volledig te abandonneren, hetgeen een directe bedreiging van ons volksbestaan zou inhouden. Daarbij zou de vraag primair zijn, welke waarde wij zelf blijkens onze daden aan het behoud daarvan toekennen.

Met het oog op het feit, dat de onderbrekingen in de duinenreeks bij Scheveningen, Katwijk en IJmuiden elk voor zich verantwoordelijk zijn voor gehéél Centraal-Holland, zal men dus de kwetsbaarheid dezer plaatsen wenselijk op te heffen.

De vraag, welke de optimale kritieke hoogte voor deze plekken is, kunnen wij thans niet beantwoorden, daar wij niet over de daartoe benodigde gegevens beschikken. Echter is door vergelijking met de voor de zuidelijke waterkering gevonden waarde ook zonder preciese berekening wel duidelijk, dat deze optimale hoogte zéér hoog zal zijn. Immers de investeringskosten zullen, waar het hier slechts korte afstanden betreft, uiterst laag zijn <sup>1)</sup> in vergelijking met de te beschermen waarde.

Zowel de bij onze bespreking over de beveiliging van Centraal-Holland aan de zuidzijde gevonden zeer grote optimale dijkverhoging als de gevolgen van een mogelijke bres in de „Maginotlinie” leiden er toe, te overwegen of de in 5.0 genoemde „compartimentenmethode” op Centraal-Holland zou kunnen worden toegepast.

In de eerste plaats kan men zich afvragen, of het niet mogelijk ware de Hoge Rijndijk van Katwijk naar Utrecht tot een „waterdicht schot” te bewerken en of het daartoe benodigde bedrag niet klein

---

<sup>1)</sup> Volgens voorlopige schattingen van de Rijkswaterstaat zouden de totale kosten van dijkverhoging voor alle drie bressen te zamen zeker aanzienlijk minder dan 0,1 G bedragen.



zou zijn in verhouding tot de schadevermindering, die daaruit in geval van een ramp zou voortvloeien.

Zonder ons in de waterstaatkundige mogelijkheden te begeven, welke beoordeling buiten onze competentie ligt, kunnen wij in ieder geval opmerken, dat door zulk een bewerking, zo deze mogelijk mocht blijken te zijn, in geval van een doorbraak hetzij in het zuidelijk deel (Rotterdamse Waterweg, Scheveningen), hetzij in het noordelijk deel (IJmuiden) het getroffen gebied ongeveer gehalveerd zou worden. Hierdoor zou dus de verantwoordelijkheid van de zuidelijke verdedigingslinie tot omstreeks de helft verminderd worden, waardoor de optimale kritieke hoogte circa  $\frac{1}{2}$  m lager, dus circa N.A.P. + 5,75 m zou worden. De kosten van het „waterdicht” maken van de Hoge Rijndijk zijn hierbij niet in aanmerking genomen, omdat deze dijk naast zijn functie als „waterdicht schot” nog andere, nauwelijks minder belangrijke functies zou vervullen. In de eerste plaats immers zou deze dijk bij een eventuele ramp als vluchtplaats van groot belang zijn en in de tweede plaats zou een goede weg op deze dijk, die bij een ramp zou blijven bestaan, onschatbare waarde bezitten als hoog gelegen verbindingsweg met de kuststrook. Zou men de dijk zowel op de duinen ten noorden als op die ten zuiden van Katwijk „waterdicht” aansluiten, dan zou bovendien een bres bij Katwijk afgegendeld worden.

Aangezien ook na het waterdicht maken van de Hoge Rijndijk de zuidelijke verdedigingslinie nog een zeer grote verantwoordelijkheid behoudt, zou men kunnen overwegen of Centraal-Holland niet nog verder in kleinere compartimenten verdeeld zou kunnen worden. Hierdoor zou de verantwoordelijkheid van de zuidelijke dijken opnieuw aanzienlijk verminderd worden, waardoor de optimale kritieke hoogte beneden N.A.P. + 5,75 m zou komen te liggen. Een optimale kritieke hoogte van circa N.A.P. + 5,25 m zou men bereiken, indien men het aan de Rotterdamse Waterweg grenzende „compartiment” tot circa 1/10 van geheel Centraal-Holland zou kunnen beperken.

## 7.2 Samenvatting en conclusies van 7.0

1. Onder Centraal-Holland verstaan we het gebied, begrensd door de Noordzee, de Rotterdamse Waterweg, de Nieuwe Maas, de Lek, het Amsterdam-Rijnkanaal, het IJ en het Noordzeekanaal.
2. Dit gebied wordt beschermd door een duinenreeks met slechts enkele enigszins kwetsbare plaatsen in het westen, benevens de Hoge Maasdijk in het zuiden.
3. Bij het bepalen van de optimale kritieke hoogte van de zuidelijke verdedigingslinie is van de volgende gegevens uitgegaan :
  - a. Verhoging van het kritieke peil tot N.A.P. + 5,00 m kost 110 M.
  - b. De kosten van verhoging boven N.A.P. + 5,00 m bedragen 40 M per m.
  - c. De gereduceerde rentevoet bedraagt 1,5 %.
  - d. Het in dit gebied geïnvesteerde nationale vermogen à 24,2 G is eenvoudigheidshalve als te beschermen waarde beschouwd. Dit is juist, indien de dit bedrag verhogende factoren (productiederving in en buiten Centraal-Holland, niet-economische waarden) tegen de dit bedrag verlagende factoren (gedeeltelijk behoud van goederen in hoog gelegen delen en gedeeltelijk behoud van de produktiviteit van de bevolking) wegvallen.
4. Na optimale dijkverhoging bedraagt de (totale verdisconteerde) rampschadeverwachting  $13,5 \text{ M} = 0,0135 \text{ G}$ .
5. Na optimale dijkverhoging bedraagt de overschrijdingskans per jaar  $8 \cdot 10^{-6}$  of 0,0008 per eeuw.
6. De optimale dijkverhoging boven N.A.P. + 5 m bedraagt 2,9 nepereringshoogten, dat is ongeveer één meter, waardoor het optimale kritieke peil N.A.P. + 6 m bedraagt.
7. De totale dijkbouwkosten zijn  $110 + 40 = 150 \text{ M}$ .
8. De keuze tussen geen dijkverhoging en optimale verhoging valt ruimschoots ten gunste van de laatste uit.
9. De zeer grote verantwoordelijkheid van de zuidelijke verdedigingslinie kan belangrijk worden verminderd door Centraal-Holland door middel van „waterdichte schotten” te verdelen in een aantal compartimenten. Hierdoor zou de optimale kritieke hoogte een wezenlijk lagere waarde aannemen.

10. In vergelijking met de catastrofale gevolgen, die een mogelijke doorbraak van een der enigszins kwetsbare plekken in de duinenreeks zou hebben, en de daarin gelegen bedreiging van ons volksbestaan is het bedrag, benodigd om deze kwetsbaarheid op te heffen, welhaast verwaarloosbaar klein.

## 8.0 DE ECONOMISCHE ACHTERGROND VAN HET DELTAPLAN

### 8.1 Algemeen gedeelte

Het kan niet onze taak worden geacht, op de basis van de vorenstaande beschouwingen de economie van het Deltaplan te onderzoeken.

Immers TINBERGEN heeft reeds zulk een onderzoek verricht en zijn „Economische balans van het Deltaplan” was in het Ontwerp-Deltawet opgenomen <sup>1)</sup>. Voorts hebben eerst de Deltacommissie in haar Derde en Vijfde Interimadvies <sup>2)</sup>, vervolgens de regering in haar Ontwerp-Deltawet en ten slotte de Staten-Generaal zich ten gunste van het Deltaplan uitgesproken. Ook de Deltacommissie, de regering en de volksvertegenwoordiging hebben aan de economische aspecten van het Deltaplan alle aandacht besteed, zonder deze echter primair te stellen. In alle instanties is de opvatting gehuldigd, dat men niet naar een goedkoopste, dat is economisch optimale oplossing moest streven, maar dat de mogelijkheid, een bijkans volmaakte graad van veiligheid voor het deltagebied te bereiken, een economisch offer waard is.

Daar dus het Nederlandse volk bij monde van regering en parlement zijn beslissing heeft genomen, bestaat er in deze geen besliskundig probleem meer. Wij kunnen ons dus van de taak, onze in de voorafgaande hoofdstukken ontwikkelde theoretische beschouwingen en methoden op het Deltaplan zelve toe te passen, ontheven achten.

Desondanks komt het ons zinvol voor, ook op grond van de in deze bijdrage gevolgde methoden, de economische aspecten van het Deltaplan nader te beschouwen.

In de eerste plaats moet dan opgemerkt worden, dat de problemen, verband houdende met de beveiliging van het deltagebied, waaronder wij verstaan het gebied, begrensd door de Westerschelde in het zuiden, de Rotterdamse Waterweg, de Nieuwe Maas en de Lek in het noorden, de Noordzee in het westen en de hoger gelegen delen van Noord-Brabant in het oosten, ons aan de grenzen van de toepasbaarheid en de bruikbaarheid der wiskundig-economische beslissingsmethoden brengen. De moeilijkheden zijn niet zo zeer van wiskundige aard. Hoewel het deltagebied zeer sterk afwijkt van het in 3.0 en 4.0 behandelde model van een enkelvoudige polder, laat de wiskundige theorie daarvan zich zonder grote moeilijkheden tot een gecompliceerd polderstelsel, zoals het deltagebied, uitbreiden. Voor de toepassing van deze uitgebreide theorie op het bepalen van de optimale oplossing voor de beveiliging van het deltagebied zou het evenwel nodig zijn, een groot aantal gegevens aanzienlijk nauwkeuriger te kennen dan op het ogenblik het geval is. Wij willen er daarom nogmaals op wijzen, dat de hieronder vermelde waarden slechts dienen om althans enig globaal inzicht te krijgen in de bedragen, die mogelijk in aanmerking komen.

In TINBERGEN's economische balans komt een „sluitpost ten laste van de veiligheid en (andere) imponderabele voordelen” voor, welke aldaar op 1,1 miljard gulden wordt gesteld. In deze balans wordt hetzelfde gebied beschouwd als hierboven omschreven is. Alleen is bij de batenzijde nog een voordeel voor het gebied ten noorden van de Rotterdamse Waterweg opgenomen, namelijk de verzoeting van het Westland, welke een gevolg is van de werken ten zuiden van de Rotterdamse Waterweg. De kosten van verhoging van de dijken langs de noordelijke oever van de Westerschelde zijn reeds in de balans opgenomen, terwijl de kosten van verhoging van de dijken langs de noordelijke oever van de Rotterdamse Waterweg niet zijn berekend. Als sluitpost ten laste van de beveiliging van het deltagebied kan dus inderdaad het bedrag van 1,1 G gebruikt worden.

In 8.2 wordt met behulp van de uitgebreidere theorie afgeleid onder welke voorwaarden de baten van het Deltaplan de lasten te boven gaan. Indien men behalve van de sluitpost à 1,1 G uitgaat van een gereduceerde rentevoet van 2,5 % en voor de andere constanten waarden invult, die volgens de nu

<sup>1)</sup> Zie o.a. Bijdrage VI.

<sup>2)</sup> Zie ook deel I.

beschikbare kennis redelijke schattingen vormen, dan blijkt de aanvaarding van het Deltaplan te impliceren, dat de in het deltagebied te beschermen waarde 6,5 G of meer bedraagt.

Ook voor dit gebied heeft het C.B.S. ten behoeve van de werkzaamheden in het kader van het Rapport Deltacommissie een globale schatting gemaakt van de aldaar aanwezige kapitaalgoederen-voorraad, vermeerderd met de duurzame consumptiegoederen; dit totale bedrag zullen wij kortweg het regionaal vermogen noemen. Met inbegrip van overheidsbezit en duurzame consumptiegoederen, doch zonder de waarde van spoor- en tramwegen, lucht- en scheepvaart raamde men dit regionaal vermogen voor eind 1952 op 4,3 miljard gulden of 4,3 G. Het „regionaal inkomen”, dus het uit het beschouwde gebied afkomstige deel van het nationaal inkomen bedroeg volgens dezelfde bron in 1952 ongeveer 0,7 G.

Indien men dus zou moeten aannemen, dat bij een stormramp het regionaal vermogen benevens het regionaal inkomen gedurende één of twee jaar *volledig* verloren zou gaan, zou de schade 5,0 G, resp. 5,7 G bedragen. Met in acht nemen van een factor 2 voor niet-materiële waarden als in 6.0 zou dan de totale verdisconteerde schadeverwachting aanzienlijk groter zijn dan 6,5 G.

In tegenstelling tot Centraal-Holland evenwel is voor het deltagebied de onderstelling van een volledig verlies moeilijk te handhaven. Men moet hier rekening houden met een grotere kans, dat een vrij aanzienlijk deel van het regionaal vermogen niet verloren zou gaan, terwijl, mede ten gevolge van de zoveel geringere repercussies op de produktie in de rest van het land ten gevolge van tewerkstelling elders van de bevolking, ook een vrij groot deel van het regionaal inkomen na een betrekkelijk korte overgangperiode behouden zou kunnen blijven. Voor de te beschermen zuiver economische waarde in het deltagebied moet daardoor een wezenlijk lager bedrag dan 5,0 G, resp. 5,7 G aanvaard worden.

Anderzijds moet opgemerkt worden, dat de beveiligende werking van het Deltaplan zich niet beperkt tot het deltagebied, doch dat ook delen van Centraal-Holland na de uitvoering van dit plan een wezenlijk kleinere kans op rampschade krijgen. Het zou derhalve zeker gerechtvaardigd zijn, zowel het regionaal vermogen als het regionaal inkomen van het deltagebied te vermeerderen met een deel van het regionaal vermogen, respectievelijk het regionaal inkomen van Centraal-Holland. De te beschermen waarde zou hierdoor met een aanzienlijk bedrag worden vermeerderd. Indien bij voorbeeld (zonder de minste pretentie, dat deze de juiste getallen zijn) voor het deltagebied  $\frac{2}{3}$  van het bedrag van  $(4,3 + 0,7)$  G in rekening moet worden gebracht en voor Centraal-Holland 10 % van  $(24,2 + 6,8)$  G, dan zou de te beschermen zuiver economische waarde reeds ongeveer 6,5 G bedragen.

Zou men behalve  $\frac{2}{3}$  van de in het deltagebied te beschermen waarde 20 % van de in Centraal-Holland te beschermen waarde in rekening brengen, dan zou in ieder geval de vereiste waarde van 6,5 G verre worden overtroffen.

Bovendien zijn de bijkomende voordelen, zoals TINBERGEN zelf eveneens vermeldt, met de in zijn balans opgenomen posten niet volledig uitgeput. De belangrijkste niet opgenomen post is de volgende.

De in het deltagebied te beschermen waarde is berekend op grond van een belangrijk hogere gereduceerde rentevoet dan de voor Centraal-Holland gebruikte. Dit was noodzakelijk wegens de kleinere expansie-coëfficiënt (vergelijk het citaat uit de brief van DE WOLFF in 4.1). Evenwel is de „waarde” van het betrokken gebied en met name de waardevermeerdering niet een eens en voor al gegeven grootheid. Deze hangt zelf namelijk weer af van de beslissing over de beveiligingsgraad. Zonder dit kwantitatief te preciseren, kunnen wij immers toch wel inzien, dat een relatief weinig beveiligd gebied op de duur in vergelijking met de rest van het land in waarde moet achterblijven, terwijl een voortreffelijk beveiligd en bij het moderne verkeersnet aangesloten gebied aantrekkelijk voor nieuwe investeringen is en dus sneller in waarde toeneemt.

Uit deze overweging volgt, indien de gegeven schattingen tenminste juist zijn, dat het deel van de kosten, dat ten laste van de veiligheid zelve komt, met 1,1 G vermoedelijk hoog geschat is.

*Indien de door ons bij wijze van voorbeeld gegeven getallen voor de te beschermen waarde en de sluitpost ten laste van de veiligheid niet al te veel mochten afwijken van de werkelijke waarden, dan zou de uitvoering van het Deltaplan reeds op zuiver economische gronden alleen, zonder een beroep op imponderabilia en gevoelsoverwegingen, gerechtvaardigd zijn.*

Indien daarentegen mocht blijken, dat de aanvaarding van het Deltaplan impliceert, dat de in het deltagebied te beschermen waarde aanmerkelijk hoger zou zijn dan de genoemde 6,5 G, en wel zoveel, dat de in 6.0 genoemde factor voor niet-economische waarden onredelijk groot gekozen zou moeten worden, dan zou dit betekenen, dat de aan het deltagebied toegekende waarde op de basis van regionaal

vermogen en regionaal inkomen alléén niet kan worden afgeleid. Mocht dit inderdaad het geval zijn, dan rijst een probleem van geheel andere aard.

De vraag, waarop wij doelen, luidt: welke waarde kennen wij toe aan het bezit of het behoud van een bepaald gedeelte van ons land?

Indien men de te beschermen waarde van een bepaalde landstreek, materiële zowel als immateriële, kent, dan kan men nagaan of het, zuiver economisch bezien, aanvaardbaar is, deze streek tegen bepaalde rampen te beschermen. Wanneer men tot bescherming besluit, dan kan met behulp van de in de voorafgaande hoofdstukken ontwikkelde methoden berekend worden, welke investering voor bescherming tegen bepaalde rampschadekansen de optimale is. Dat daarbij in het geval van het delta-gebied naast de vroeger reeds genoemde onzekerheden nog een aantal andere optreden, moge voor een concrete numerieke berekening zeer hinderlijk zijn, maar aan de principiële aspecten van het vraagstuk doet dit weinig afbreuk. Omgekeerd echter kunnen wij ook uit het feit, dat de beslissing, een bepaald bedrag voor deze bescherming te investeren, genomen is, een raming afleiden van de waarde, die wij *ten minste* aan het betrokken gebied toekennen. Zoals gezegd, behoort deze afleiding strikt genomen niet meer tot de besliskunde. Het probleem zou veeleer enigszins analoog zijn aan de wijze, waarop in de theoretische economie de leer van het consumentengedrag wordt geformuleerd. In casu is het dan het gedrag van het Nederlandse volk als „consument van beveiligingsplannen”, dat wordt onderzocht. Dat wij dit onderzoek op de genomen beslissing baseren, is geheel in overeenstemming met de opvatting, die door de meeste economen wordt aanvaard, inhoudende dat de „waarde” die een goed voor iemand heeft, wordt afgelezen uit zijn handelingen, met name uit de bedragen, die hij bereid is voor het verwerven of behouden er van uit te geven.

Indien dus uit latere schattingen mocht blijken, dat het hier gebruikte bedrag van 6,5 G aanzienlijk verhoogd moet worden, dan zou dus het besluit, het Deltaplan uit te voeren, betekenen, dat wij aan het deltagebied een wezenlijk grotere waarde toekennen dan op grond van regionaal vermogen en regionaal inkomen valt af te leiden. En het lijdt wel geen twijfel, dat als dit het geval is, het niet uitsluitend voor het deltagebied zou gelden, maar dat voor andere delen van het land, als daarover een analoge beslissing getroffen zou moeten worden, hetzelfde zou gelden. Ook de inpoldering van de IJsselmeerpolders schijnt in deze richting te wijzen. Men zou in het geval van het deltagebied wellicht nog kunnen stellen, dat hier op emotionele gronden in herinnering aan de rampdagen een overwaardering zou hebben plaatsgevonden, maar het feit, dat de beslissing in rustige en zuiver zakelijke sfeer, meer dan 4½ jaar na de stormramp en na grondige discussie, zowel in het openbaar, als in kleinere en grotere groepen van deskundigen en, afgezien van een voor ons probleem niet essentieel detail, met eenstemmigheid is genomen, is daarmee moeilijk in overeenstemming te brengen. Veeleer doet de genoemde mogelijkheid de vraag rijzen, of niet zulk een hoge waardering toch nog een zeer rationele achtergrond zou kunnen hebben, dus van de in 6.0 genoemde voorbeelden van sentimentshandelingen wezenlijk in aard zou verschillen. Dit zou wellicht kunnen inhouden, dat er nog belangrijke factoren met een volkomen rationele achtergrond zijn, waarmee echter tot nu toe geen rekening is gehouden.

Ten einde dit te onderzoeken, stellen wij ons de vraag, welke betekenis de uitspraak zou hebben, dat de economische waarde, die wij aan een gedeelte van het land toekennen, overeenkomt met het regionale vermogen, vermeerderd met (bij voorbeeld) één jaar regionaal inkomen. Dat zou dus voor het deltagebied circa 5,0 G, voor Centraal-Holland circa 31 G zijn, of ook, gemiddeld per hoofd der bevolking 10, respectievelijk 8,9 kilogulden.

Daar de fundamentele achtergrond van een probleem dikwijls het duidelijkst tot uitdrukking komt als men een extreem geval beschouwt en de onderstaande beschouwingen toch van geheel theoretische aard zijn, hebben wij in het volgende aangenomen, dat de te beschermen waarde op de onderstelling gebaseerd zou moeten zijn, dat het te beschermen gebied in geval van een ramp volledig zou moeten worden geabandonneerd. Waar deze mogelijkheid voor het deltagebied weinig reëel is, terwijl zij voor Centraal-Holland, naar wij zagen, niet geheel buiten beschouwing kan worden gelaten, kan men dit opvatten als een „transplantatie” van de beschouwingen over Centraal-Holland naar het deltagebied.

Stellen wij ons nu eens bij wijze van „gedachte-experiment” voor, dat een ander land zou aanbieden het deltagebied, ontruimd, voor zulk een bedrag van ons te kopen. Hoe zou onze reactie op zulk een aanbod zijn?

Het lijdt voor ons welhaast geen twijfel, dat geen rechtgeaard Nederlander en zeker geen verantwoordelijkheid dragende instantie zulk een aanbod serieus in overweging zou willen nemen.

Ten dele moge dit verklaard worden uit overwegingen van nationaal prestige. Dit heeft echter ten gevolge, dat wij in ieder gedeelte van ons land ook een zeker bedrag aan „waarde van nationaal prestige” geïnvesteerd moeten achten, dat bij de bovengenoemde economische waarde zou moeten worden opgeteld en dat deel uitmaakt van de te beschermen waarde. Hetzelfde geldt voor andere emotionele overwegingen, als gehechtheid aan omgeving, werkkring, traditie, historie, e.d.

Daarnaast echter rijst de vraag of, ook zuiver economisch beschouwd en afgezien van alle gevoels-overwegingen, zulk een aanbod aanvaardbaar ware. De vraag dus, of een bedrag van bijvoorbeeld 5 G voldoende zou zijn om de bevolking van het deltagebied een onderkomen en bestaansmogelijkheid te verschaffen, gelijkwaardig aan de thans bestaande. Dit hangt af van de aanwezige alternatieve mogelijkheden en men zou dus na moeten gaan, of de gunstigste van deze alternatieven voor een bedrag van 5 G gerealiseerd kan worden.

Aangezien in een dichtbevolkt land als het onze migratie binnen het land vermoedelijk uitgesloten moet worden geacht, zou de bevolking moeten emigreren, hetzij met behoud van groepsverband, hetzij zonder behoud hiervan.

In beide gevallen zou in de eerste plaats onderzocht moeten worden, welke de economische gevolgen voor het in Nederland achterblijvende deel van de bevolking zouden zijn. Men kan deze bij emigratie van een zo groot deel van de bevolking niet zonder meer verwaarlozen. De omvang van het probleem is namelijk zodanig, dat het niet langer geoorloofd is, de consequenties uit die van de reeds plaatsvindende emigratie af te leiden door evenredige vermenigvuldiging. In de terminologie van de wiskunde betekent dit, dat er niet-lineaire effecten optreden, over de aard waarvan geen nauwkeurige uitspraken kunnen worden gedaan, aangezien wij slechts beschikken over gegevens bij problemen op een veel kleinere schaal dan het onderhavige. Geheel analoge moeilijkheden hebben wij reeds eerder in deze bijdrage ontmoet, onder andere bij het opstellen van het verzekeringsmodel in 3.1. Zij doen zich eveneens voor bij het bepalen van de waarde van een groot gebied; ook hier is de waarde van het geheel groter dan de som van de waarden van de afzonderlijke delen.

Bij het alternatief: emigratie zonder behoud van groepsverband, dat is dus de gebruikelijke vorm van emigratie, maar dan op sterk vergrote schaal, zou men verder dienen na te gaan, hoeveel de totale emigratiekosten zouden bedragen <sup>1)</sup>.

Bij het alternatief: emigratie met behoud van groepsverband, zou men moeten nagaan, of men elders ter wereld, zeggen wij in de Franse Alpen of de Australische woestijn, een stuk land zou kunnen kopen, dit door bevoeiing en/of drainage voor bewoning geschikt zou kunnen maken, er industrieën, spoorwegen, verkeerswegen, woningen, hygiënische voorzieningen, scholen, kerken, cultuurcentra, bestuurslichamen, recreatiegelegenheden, enz., enz. zou kunnen vestigen, ten einde de bevolking van het „verkochte” gebied een inderdaad adequate existentie en niet slechts een bestaan als ontheemden te verschaffen. Dit alles zou dan moeten geschieden voor de „koopsom”, vermeerderd met een bedrag, dat het verschil tussen de waarde van „nieuw” en die van „oud” weergeeft.

Ons ontbreekt de competentie om de vraag te beantwoorden, welk een bedrag daartoe nodig ware. Wel menen wij onze indruk niet te moeten verhelen, dat dit veel hoger zou zijn, dan de bovengenoemde fictieve „koopsommen”, afgezien nog van het feit, dat het, ongeacht voor welk bedrag, vrijwel onmogelijk zou zijn ergens ter wereld een bewoonbaar gebied te verwerven, groot genoeg om een bevolking van ettelijke honderdduizenden, of zelfs miljoenen, te herbergen.

Het is ons derhalve niet mogelijk, na te gaan welke van de genoemde alternatieven tegen de geringste prijs gerealiseerd kan worden. Zoals reeds gezegd, heeft ons „gedachte-experiment” echter geen andere strekking dan de tot oordelen bevoegde economen de vraag voor te leggen, op welke wijze de *economische* <sup>2)</sup> waarde van een landstreek beoordeeld moet worden, alsmede ons vermoeden uit te spreken, dat deze door het regionale vermogen, vermeerderd met een klein aantal jaren regionaal

<sup>1)</sup> Deze kosten bedroegen volgens een schriftelijke mededeling d.d. 24 juli 1957 van het Centraal Planbureau in 1955 per gesubsidieerde emigrant f 760, of f 657 per emigrant, dat is dus rond 0,7 kilogulden per hoofd. Ook hier is het echter zeer de vraag, of de totale emigratiekosten van de bevolking van het deltagebied gevonden worden door het bedrag van 0,7 kilogulden te vermenigvuldigen met 500 000.

<sup>2)</sup> Een vermenigvuldigingsfactor van de in 6.0 besproken aard komt hier niet in aanmerking, daar wij mogen aannemen, dat de fictieve overdracht na grondige voorbereiding en in goede orde geschiedt en dat daarbij geen mensenlevens verloren gaan. Wel echter een factor voor de in de tekst genoemde imponderabele waarden. Deze kan echter ook economisch geïnterpreteerd worden als een schadeloosstelling voor het *verlies* van deze waarden.

inkomen, slechts zeer ten dele wordt weergegeven. Daarbij zou tevens de vraag onder ogen kunnen worden gezien of er, behalve de emotionele overwegingen, ook zuiver economische oorzaken zijn voor het feit, dat er geen „marktwaaarde” voor landstreken bestaat <sup>1)</sup>.

Met betrekking tot de ten aanzien van het Deltaplan getroffen beslissing zou juistheid van ons vermoeden inhouden, dat, óók indien mocht blijken, dat het plan eerst dan op economische gronden kan worden verantwoord, wanneer de te beschermen waarde aanzienlijk meer bedraagt dan 6,5 G, voor de verantwoording geen beroep op emotionele overwegingen zou behoeven te worden gedaan, maar dat daarvoor zuiver economische en rationele overwegingen reeds voldoende zouden zijn.

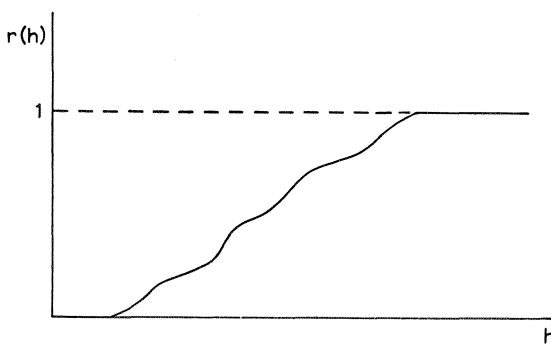
Hoewel wij, zoals gezegd, de oplossing van het gestelde probleem niet vermogen te geven, komt het ons voor, dat dit in theoretisch nationaal-economisch en filosofisch opzicht voldoende interessant is om hier gesteld en onder de aandacht der deskundigen gebracht te worden.

## 8.2 Wiskundig gedeelte

Ten gevolge van de gecompliceerdheid van het te beschermen polderstelsel is de in 3.0 en 4.0 gemaakte onderstelling, dat – bij de thans bestaande toestand – een zeeniveau beneden het kritieke peil geen, een er boven wèl tot onderlopen van de polder leidt, niet te handhaven.

In werkelijkheid is, zoals reeds in 3.2 en 5.0 is opgemerkt, het kritieke peil niet de enige bepalende factor. Er is daardoor bij een gegeven peil een bepaalde kans, dat de polder zal verdrinken. Voor waterstanden ver beneden het kritieke peil is de kans praktisch nul, voor standen ver er boven is deze praktisch 1 en in de buurt van het kritieke peil neemt de kans bij stijgend niveau sterk toe <sup>2)</sup>. Bovendien zijn de dijkeringen van de afzonderlijke polders van zeer ongelijke kwaliteit. Bij zeer lage waterstanden zal er niets gebeuren. Neemt het niveau toe, dan zullen bepaalde polders met relatief zwakke bescherming waarschijnlijk het eerst vollopen, dan andere met iets sterkere bescherming, enz. Bij extreem hoge waterstanden zal vrijwel niets behouden kunnen worden.

Wij zullen daarom thans aannemen, dat er voor iedere waterstand  $h$  bij Hoek van Holland een bepaalde kansverdeling bestaat voor de bij deze stand optredende schade in het Deltagebied.



Figuur 8.2.1. Globale vorm van de functie  $r(h)$

Deze schade drukken wij uit door haar verhouding tot de totale waarde van het gebied, de *schadefractie*. De voorwaardelijke wiskundige verwachting van deze schadefractie bij gegeven peil  $h$  bij de huidige toestand zal door  $r(h)$  worden voorgesteld. Voor zeer kleine  $h$  zal  $r(h)$  nul zijn; we zullen aannemen, dat dit bij het peil  $H_1$  nog het geval is. Voor zeer grote  $h$  zal  $r(h) = 1$  (of bijna 1) zijn. Verder is  $r(h)$  een monotoon stijgende functie van  $h$ , die we ook continu kunnen onderstellen. Haar grafische voorstelling zal dus, globaal gezegd, van het type zijn, zoals in figuur 8.2.1 is aangegeven.

De kans op een waterstand  $\leq h$  bedraagt  $q(h) = 1 - p(h)$ ; bij toeneming van  $h$  met een klein bedrag  $dh$  zal deze kans dus met  $dq(h) = 1 - dp(h)$  toenemen. Bij de exponentiële verdeling is  $p(h) = e^{-ah}$ , dus  $dq(h) = -\alpha dp(h) = \alpha e^{-ah} dh$ .

De totale schadefractieverwachting in een willekeurig jaar, die we door  $\frac{Q_0}{100}$  zullen voorstellen, is dus:

$$\frac{Q_0}{100} = \int_{H_1}^{\infty} r(h) dq(h). \quad (1)$$

De totale verdisconteerde rampschadeverwachting bij de huidige toestand is dus (vergelijk (4) van 3.0):

$$R_0 = \int_0^{\infty} \frac{Q_0 W}{100} e^{-\delta\tau} 100 d\tau,$$

<sup>1)</sup> Wèl heeft verkoop van *koloniën* in het verleden enkele malen plaatsgevonden.

<sup>2)</sup> Het begrip „kritiek” peil is daardoor niet exact, maar slechts bij benadering bepaald.

of:

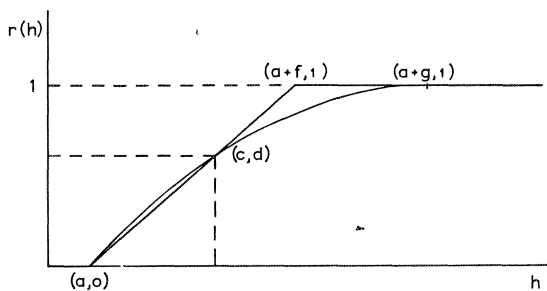
$$R_0 = \frac{Q_0 W}{\delta'} \quad (2)$$

Deze onderscheidt zich van de vroeger gevonden uitdrukking

$$K_0 = R_0 = \frac{P_0 W}{\delta}$$

slechts daardoor, dat  $P_0$  door  $Q_0$  (en  $\delta$  door  $\delta'$ ) vervangen is.

De juiste waarde van  $R_0$  is niet nauwkeurig op te geven omdat over de schadefractie  $r(h)$  zeer weinig bekend is. Het ligt voor de hand, voor  $h = 3,85$  m, het op 1 februari 1953 bereikte niveau  $r(h)$  zo te kiezen, dat dit overeenkomt met de toen geleden schade. Deze schade moet worden vergeleken met de schade, die zou optreden, zo het gehele deltagebied zou worden overstroomd <sup>1)</sup>. Dit is het enige punt van de kromme, dat enigszins nauwkeurig is te bepalen. Verder zal men grenzen kunnen aangeven, tussen welke zich het punt bevindt, waar de kromme zich van de  $h$ -as begint te verheffen, en verder voor het punt, waar de waarde één wordt bereikt. De coördinaten van deze twee punten zullen wij aangeven met  $(a, 0)$ , resp.  $(b, 1)$  en van het met de stormvloed van 1 februari 1953 corresponderende punt met  $(c, d)$ , dus  $r(c) = d$ . Over andere dan deze punten zijn op het ogenblik in het geheel geen gegevens beschikbaar en men kan zich dus afvragen, op welke wijze met deze gegevens een indruk kan



Figuur 8.2.2. De schadefractie als functie van de waterhoogte

worden verkregen omtrent de waarde van  $Q_0$ , respectievelijk  $R_0$ . Daartoe zullen wij de onbekende monotone stijgende functie  $r(h)$  vervangen door:

1. een rechte lijn;
2. een parabool, die de lijn  $r(h) = 1$  raakt (vgl. figuur 8.2.2),

beide zodanig gekozen, dat de punten  $(a, 0)$  en  $(c, d)$  er op gelegen zijn. De gegevens omtrent het punt  $(b, 1)$  kunnen dan worden gebruikt om na te gaan of de bij de aangepaste functies behorende waarden hiermee in redelijke mate overeenstemmen.

We kiezen dus:

$$r(h) = \begin{cases} 0 & \text{voor } h < a \\ \frac{h-a}{f} & \text{voor } a \leq h < a+f \\ 1 & \text{voor } h \geq a+f, \end{cases} \quad (3a)$$

waarin  $f$  volgt uit

$$r(c) = \frac{c-a}{f} = d, \quad (4a)$$

respectievelijk

$$r(h) = \begin{cases} 0 & \text{voor } h < a \\ \frac{1}{g^2} (h-a)(2g-h+a) & \text{voor } a \leq h < a+g \\ 1 & \text{voor } h \geq a+g, \end{cases} \quad (3b)$$

waarin  $g$  volgt uit

$$r(c) = \frac{1}{g^2} (c-a)(2g-c+a) = d \quad (4b)$$

of

$$\frac{1}{g} = \frac{1 - \sqrt{1-d}}{c-a}.$$

<sup>1)</sup> Hierbij moet dan niet de huidige situatie, maar de toestand der dijken voor de stormramp, dus bijv. in 1952, tot uitgangspunt worden genomen, daar inmiddels door partiële verbeteringen (waarvan de kosten dan ook in de berekening moeten worden opgenomen) reeds een hogere graad van veiligheid is bereikt dan vóór 1953 bestond.

De lijn  $r(h) = 1$  wordt bereikt voor  $h = a + f$ , respectievelijk  $h = a + g$ , en dit zijn dus de waarden, die moeten worden vergeleken met de gegevens omtrent het punt  $(b, 1)$ .

We substitueren nu (3a) resp. (3b) in (1) en kiezen als voorheen

$$p(h) = e^{-\alpha(h-H_1)} = p(a)e^{-\alpha(h-a)}, \quad (5)$$

waarin  $\alpha = 3$  en  $p(a)$  bij bekende waarde van  $a$  uit de in 3.2 vermelde gegevens is af te leiden. De lineaire, resp. kwadratische functie  $\frac{h-a}{f}$  resp.  $\frac{(h-a)(2g-h+a)}{g^2}$  moet van  $a$  tot  $a+f$ , resp.  $a+g$  geïntegreerd worden en bij de uitkomst moet de integraal van 1 over  $a+f < h < \infty$ , resp.  $a+g < h < \infty$ , dat is  $p(a+f)$ , resp.  $p(a+g)$  worden opgeteld. Deze laatste term is evenwel verwaarloosbaar in vergelijking met de eerste, evenals de integraal van de eerstgenoemde uitdrukkingen over  $a+f < h < \infty$ , resp.  $a+g < h < \infty$ , m.a.w. we kunnen deze uitdrukkingen direct van  $h$  tot  $\infty$  integreren. We krijgen dan

$$0,01 Q_0 = p(a) \int_a^{a+f} \frac{h-a}{f} e^{-\alpha(h-a)} \alpha dh \approx \frac{p(a)}{\alpha f} \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{p(a)}{\alpha f}, \quad (6a)$$

dus

$$Q_0 = \frac{100 p(a)}{\alpha f} = \frac{100 p(a)}{\alpha} \cdot \frac{d}{c-a}, \quad (7a)$$

respectievelijk

$$\begin{aligned} 0,01 Q_0 &= p(a) \int_a^{a+g} \frac{(h-a)(2g-h+a)}{g^2} e^{-\alpha(h-a)} \alpha dh \approx \\ &\approx \frac{p(a)}{\alpha^2 g^2} \int_0^\infty x(2\alpha g - x) e^{-x} dx = \frac{p(a)}{\alpha^2 g^2} (2\alpha g - 2), \end{aligned} \quad (6b)$$

dus:

$$Q_0 = \frac{200 p(a) (\alpha g - 1)}{\alpha^2 g^2} = \frac{100 p(a)}{\alpha} \cdot \frac{2 - 2\sqrt{1-d}}{c-a} \left(1 - \frac{1}{\alpha g}\right) \quad (7b)$$

We merken op, dat de factor  $\frac{100 p(a)}{\alpha}$  in (7a) zowel als in (7b) voorkomt, dat  $d$  tamelijk klein is, ten gevolge waarvan  $\sqrt{1-d} = 1 - \frac{1}{2}d - \frac{1}{8}d^2 \dots$  is, zodat de tweede breuk in (7b) van die in (7a) slechts in de orde  $d^2$  verschilt, en dat  $\alpha g$  tamelijk groot is, zodat de laatste factor in (7b) slechts weinig van 1 afwijkt. Daar bovendien  $2 - 2\sqrt{1-d} \approx d + \frac{1}{4}d^2$ , dus groter dan  $d$  is, zullen de beide afwijkingen van (7b) ten opzichte van (7a) elkaar nog gedeeltelijk compenseren. Ook andere krommen, die de schadefractie kunnen voorstellen, zullen ten naaste bij dezelfde waarde voor  $Q_0$  geven, mits zij

1. door het punt  $(a, 0)$  en door het punt  $(c, d)$  gaan,
2. voor de kleinere waarden van  $h$  geen bijzonder sterke stijgingen vertonen.

Bovendien varieert  $Q_0$  voor de relevante waarden van de verschillende constanten slechts weinig, wanneer men het beginpunt  $a$  varieert <sup>1)</sup>. Op zichzelf is het merkwaardig, dat  $Q_0$  dus redelijk goed bepaald is door de gegevens over één punt, namelijk het punt  $(c, d)$ . Hiervan is de  $c$ -coördinaat goed bekend, zodat de onnauwkeurigheid in de schatting van  $Q_0$  hoofdzakelijk wordt veroorzaakt door de onnauwkeurigheid in  $d$ .

Ten einde enig idee te krijgen van de waarden, die mogelijk in aanmerking komen, zullen wij ten slotte een getallenvoorbeeld uitwerken.

Hiertoe nemen wij aan, dat de bij de ramp op 1 februari 1953 geleden schade 1,2 G heeft bedragen en dat hierin nog geen post is opgenomen:  $a$ . voor indirecte schade;  $b$ . voor produktiederving;  $c$ . voor

<sup>1)</sup> Dit komt doordat  $Q_0$  in de omgeving van de betreffende waarden juist een minimum heeft als functie van  $a$ .



dijkverbetering, behalve dijkherstel;  $d$ . voor „imponderabele schaden”. We hebben dit bedrag dan te vergelijken met de schade, eveneens zonder de overeenkomstige posten, die zou optreden, zo het gehele deltagebied overstroomd zou worden. We zullen hiervoor het in het deltagebied geïnvesteerde nationale vermogen nemen, dat volgens een globale raming van het C.B.S. 4,3 G bedraagt. We hebben dan

$r(3,85) = \frac{1,2}{4,3} 0,279$ , dus  $c = 3,85$  en  $d = 0,279$ . Als „beginpunt” voor het optreden van schaden kiezen wij  $h = 3,25$ , dus  $a = 3,25$ ; met  $\alpha = 2,97$  vinden we  $p(a) = 0,0266$  per jaar.

Passen wij door deze punten een rechte lijn aan, dan vinden wij met (4a)  $f = 2,15$  en met (6a)  $Q_0 = 0,42$ . Aanpassen van een aan  $r(h) = 1$  rakende parabool levert voor  $g$  de waarde  $g = 3,98$  en met (6b) voor  $Q_0 = 0,41$ . De twee waarden van  $Q_0$  stemmen dus inderdaad overeen. Zouden wij voor  $a$  hebben gekozen de waarden  $a = 3,00$ , resp.  $a = 3,50$ , resp.  $a = 3,75$ , dan zouden wij voor  $Q_0$  hebben gevonden 0,62, resp. 0,34, resp. 0,56; de variabiliteit van  $Q_0$  als functie van  $a$  is dus inderdaad betrekkelijk gering, vooral als men bedenkt, dat de waarde  $a = 3,00$  als te laag en de waarde  $a = 3,75$  als te hoog moet worden beschouwd.

De gegevens omtrent de waarde van  $b$  dienen nu vergeleken te worden met  $a + f = 5,40$ , resp.  $a + g = 7,25$ . De eerste waarde is niet onredelijk, de tweede echter te hoog, daar reeds voor aanzienlijk lagere waterstanden aangenomen moet worden dat alles of vrijwel alles zou overstromen.

Indien nu – wederom slechts ten einde een globale indruk te krijgen, daar de onderstelling in werkelijkheid niet vervuld behoeft te zijn – de werkelijke schaden, met inbegrip dus van indirecte en imponderabele schaden, zich verhouden als de zuiver economische schaden, exclusief deze grootheden, dan vindt men met de hier gevonden waarde van  $Q_0$  en de waarde 2,5 voor  $\delta'$ :

$$R_0 = 0,17 W. \quad (8)$$

Indien de hier gebruikte constanten aanvaardbaar zouden zijn, zou de totale verdisconteerde rampschadeverwachting voor de februariramp dus  $\frac{17}{100}$  deel zijn geweest van de te beschermen waarde.

Mocht nu bovendien de in 8.1 gegeven schatting aanvaardbaar blijken, dan zou bij de uitvoering van het Deltaplan een sluitpost van 1,1 G <sup>1)</sup> ten laste van de veiligheid komen. Bij deze onderstellingen zou het Deltaplan dus op zuiver economische gronden alleen al aanvaardbaar zijn, als de te beschermen zuiver economische waarde groter zou zijn dan  $\frac{100}{17} \cdot 1,1 G = 6,5 G$ . Hierbij willen wij er nogmaals de nadruk op leggen, dat dit bedrag niet anders dan een globale schatting kan zijn.

Het gevonden bedrag van 6,5 G zal vooral dan aanzienlijk van de werkelijke waarde afwijken, indien toekomstige onderzoeken er toe zouden leiden, dat of wel het bedrag van 1,1 G voor de „sluitpost” of wel de verhouding 0,279 van de in 1953 geleden schade tot de in het deltagebied te beschermen waarde gewijzigd zou moeten worden.

### 8.3 Samenvatting en conclusies van 8.0

1. Aangezien het Deltaplan als zodanig reeds is aanvaard, bestaat er in dezen geen besliskundig probleem meer.
2. Desondanks is, ten einde het inzicht in problemen van een omvang als het Deltaplan te verdiepen, de economische achtergrond van dit plan nader onderzocht.
3. Uitgaande van de in de economische balans van TINBERGEN <sup>2)</sup> als voorlopige schattingen vermelde gegevens, is voorlopig ondersteld, dat de sluitpost ten laste van de beveiliging van het deltagebied 1,1 G (= 1,1 miljard gulden) bedraagt.
4. Indien voor de overige constanten redelijke schattingen worden gebruikt, zou de sluitpost van 1,1 G impliceren, dat de in het deltagebied te beschermen waarde 6,5 G of meer bedraagt.

<sup>1)</sup> Hierbij zouden eigenlijk nog de kosten van de sinds 1953 reeds uitgevoerde werken voor dijkverbetering (niet dijkherstel) moeten worden opgeteld, benevens de schadeverwachting gedurende de overgangstijd, gedurende welke het Deltaplan nog niet of niet geheel gerealiseerd zal zijn.

<sup>2)</sup> Zie Bijdrage VI.

5. Indien men kan aannemen, dat de te beschermen waarde bestaat uit een groot deel van het regionale vermogen, vermeerderd met een à twee jaar regionaal inkomen van het deltagebied en een klein deel van het regionaal vermogen, vermeerderd met een à twee jaar regionaal inkomen van Centraal-Holland, dan bedraagt de te beschermen zuiver economische waarde vermoedelijk al meer dan 6,5 G, zodat het Deltaplan dan reeds op zuiver economische gronden alléén, zonder een beroep op imponderabilia en gevoelsoverwegingen gerechtvaardigd zou zijn.
6. Ten gevolge van de onzekerheden in de schattingen van sommige constanten kan de mogelijkheid niet geheel worden uitgesloten, dat het in het vorige punt genoemde geval zich niet voordoet.
7. Mocht het bedrag inderdaad aanzienlijk hoger zijn dan 6,5 G, en wel in zodanige mate, dat de in 6.0 genoemde factor voor niet-economische waarden onredelijk groot gekozen zou moeten worden, dan zou men uit het aanvaarden van het Deltaplan kunnen afleiden, dat wij aan het deltagebied een wezenlijk grotere waarde toekennen dan op de basis van regionaal vermogen en regionaal inkomen alléén valt te berekenen, zodat het interessant ware de vraag te onderzoeken, op welke wijze in het algemeen de waarde bepaald zou moeten worden, die wij aan een gedeelte van ons land hechten.

## 9.0 OVERZICHT VAN DE IN DEZE BIJDRAGE GEBRUIKTE NUMERIEKE WAARDEN EN UITKOMSTEN

Parameter van de verdeling der overschrijdingskansen te Hoek van Holland:  $\alpha = 2,97$  (per meter), afgerond  $\alpha = 3$ .

Halveringshoogte te Hoek van Holland:  $a_2 \cong 0,23$  m, afgerond  $a_2 = 0,25$  m.

Decimeringshoogte te Hoek van Holland:  $a_{10} = 0,78$  m, afgerond  $a_{10} = 0,80$  m.

Nepereringshoogte te Hoek van Holland:  $a_e = 0,337$  m, afgerond  $a_e = 0,34$  m of  $\frac{1}{3}$  m.

Jaarpeil te Hoek van Holland: N.A.P. + 2,20 m.

Grenspeil te Hoek van Holland: N.A.P. + 2,39 m.

Huidig kritiek peil der dijken te Hoek van Holland = stormvloedhoogte 1953:  $H_0 =$  N.A.P. + 3,85 m.

Overschrijdingskans per jaar van het huidige kritieke peil te Hoek van Holland:  $p_0 = 0,0045$ .

Overschrijdingskans per jaar van het peil N.A.P. + 5,00 m te Hoek van Holland:  $p(5,00) = 0,00015$ .

Basispeil (overschrijdingskans per jaar  $10^{-4}$ ) te Hoek van Holland: N.A.P. + 5,10 m.

Gemiddelde gereduceerde rentevoet voor Nederland:  $\delta' = 1,5$  % per jaar.

Gemiddelde gereduceerde rentevoet voor Centraal-Holland:  $\delta' = 1,5$  % per jaar.

Gemiddelde gereduceerde rentevoet voor het deltagebied:  $\delta' = 2,5$  % per jaar.

Nationaal vermogen van Centraal-Holland: 24,2 miljard gulden.

Nationaal vermogen van het deltagebied: 4,3 miljard gulden.

Nationaal inkomen van Centraal-Holland: 6,8 miljard gulden per jaar.

Nationaal inkomen van het deltagebied: 0,7 miljard gulden per jaar.

Voor de zuidelijke verdedigingslinie van Centraal-Holland:

kosten dijkverhoging tot N.A.P. + 5,00 m: 110 miljoen gulden;

kosten dijkverhoging per meter boven N.A.P. + 5,00 m: 40 miljoen gulden;

optimaal kritiek peil: circa N.A.P. + 6,00 m;

overschrijdingskans optimaal kritiek peil:  $8 \cdot 10^{-6}$  per jaar of  $8 \cdot 10^{-4}$  per eeuw;

totale verdisconteerde schadeverwachting na optimale verhoging: 13,5 miljoen gulden;

totale kosten optimale dijkverhoging: 150 miljoen gulden.

BIJDRAGE II.3

TOETSING VAN DE ONAFHANKELIJKHEID  
VAN HET HOOGWATER  
TE HOEK VAN HOLLAND EN DE  
WATERAFVOER VAN DE RIJN BIJ LOBITH



## INHOUDSOVERZICHT

0.1 Inhoudsoverzicht . . . . .	113
0.2 Overzicht van de tabellen . . . . .	113
0.3 Opgenomen figuur . . . . .	113
0.4 Summary . . . . .	114
0.5 Résumé . . . . .	114
<b>1.0 Samenstelling van de bijdrage . . . . .</b>	<b>115</b>
1.1 Inleiding. . . . .	115
1.2 Auteur en medewerker. . . . .	115
<b>2.0 Wiskundige formulering van het probleem . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>3.0 Gebruikte methoden . . . . .</b>	<b>115</b>
3.1 De periode 1900 t/m 1952 als geheel . . . . .	115
3.2 De keuze van A en B . . . . .	116
3.3 Combinaties van de resultaten van de jaren afzonderlijk . . . . .	117
<b>4.0 Resultaten van het onderzoek . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>5.0 Interpretatie der resultaten . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN</b>	
3.1.1 Waarnemingen ingedeeld naar twee kenmerken . . . . .	116
4.0.1 Periode 1900 t/m 1952 als geheel beschouwd . . . . .	117
4.0.2 Jaren afzonderlijk en dan gecombineerd . . . . .	118
<b>0.3 OPGENOMEN FIGUUR</b>	
3.1.1 Waarnemingen grafisch uitgezet (voorbeeld) . . . . .	116

#### 0.4 SUMMARY

##### **Testing the independance of the levels of storm surges at Hook of Holland on the one hand and the discharge of the Rhine at Lobith on the other**

As the water level of a lower river is determined by the sea level at the rivermouth and the discharge of the upper river, it is of importance to know whether any relation exists between these two quantities.

In this contribution due to J. Hemelrijk the independance is tested of the levels of storm surges at Hook of Holland on the one hand and the discharge of the Rhine at Lobith on the other.

The test is based on observations covering the period 1900–1952<sup>1)</sup>, each observation consisting of one observed high tide and one discharge observed at the same time.

As we are especially interested in the occurrence of high water levels we only consider the “dangerous months” i.e. the periods: November–January, November–February and October–March and apply the test successively to each of these periods.

The observations are divided into four groups by dividing the high tides in “high” and “low” high tides, i.e. those higher respectively lower than the level that was exceeded on the average once in two years, and the discharges in “large” and “small” discharges, i.e. those larger respectively smaller than the average discharge of the period considered.

As the occurrence of combinations of high high tides and large discharges is of special interest, the exceedance probability of the observed number of those combinations is computed under the hypothesis that the high tides and discharges are independent. For the period 1900–1952 as a whole this is done by means of a binomial approximation of the method of the double dichotomy ( $2 \times 2$ -table), for the separate years by combining the double dichotomies of each year (using a normal approximation) into one test.

The results of the tests show that there is no indication of dependance of the high tides at Hook of Holland and the discharge of the Rhine at Lobith, neither for the period 1900–1952 as a whole nor for the separate years.

#### 0.5 RÉSUMÉ

##### **Examen de l'indépendance des marées hautes à Hoek van Holland et les débits du Rhin à Lobith**

Le niveau de l'eau du cours inférieur d'un fleuve étant déterminé par le niveau de la mer à l'embouchure de ce fleuve et par le débit de son cours supérieur, il importe de savoir s'il y a un rapport entre ces deux quantités.

La présente contribution, due à J. Hemelrijk, traite du test de l'indépendance des marées hautes à Hoek van Holland et les débits du Rhin à Lobith.

Des observations embrassant une période allant de 1900–1952<sup>2)</sup> nous ont fourni le matériel pour le test, chaque observation se constituant d'une marée haute et d'un débit observés au même instant.

Comme nous avons intérêt plus particulièrement à étudier les niveaux élevés, nous n'avons pris en considération que les „mois dangereux” c.à.d. les périodes de novembre–janvier, de novembre–février et d'octobre–mars et nous avons successivement appliqué le test à chacune de ces périodes.

On a obtenu quatre groupes d'observations en séparant les marées hautes en marées „fortes” et „faibles”, selon qu'elles sont respectivement supérieures ou inférieures au niveau dépassé en moyenne une fois tous les deux ans, et en séparant les débits en „grands” et „petits” débits selon qu'ils sont respectivement plus grands ou plus petits que le débit moyen ayant eu lieu dans la période en question.

Comme les combinaisons de marées hautes fortes et de grands débits présentent un intérêt particulier, on a calculé la probabilité de dépassement du nombre observé de ces combinaisons, en supposant que les marées hautes et les débits sont indépendants. Quant à la période de 1900–1952 prise dans son ensemble, le calcul s'est fait à l'aide d'une approximation binomiale de la méthode de la double dichotomie (la table  $2 \times 2$ ), en ce qui concerne les années prises séparément, on l'a fait en réunissant les doubles dichotomies de chaque année en un seul test (en se servant d'une approximation normale).

Les résultats du test démontrent qu'il n'y a aucun indice de l'existence d'une interdépendance des marées hautes à Hoek van Holland et le débit du Rhin à Lobith, ni pour la période de 1900–1952 prise dans son ensemble, ni pour les années prises séparément.

---

<sup>1)</sup> The symbol – is meant as “upto and including”.

<sup>2)</sup> Par le signe – on entend „jusqu'à . . . inclus”.

## 1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

### 1.1 Inleiding

Daar de waterstanden in plaatsen aan de benedenrivieren bepaald worden door zowel de waterstanden aan de kust als de waterafvoeren van de bovenrivieren, is het van belang, na te gaan of er tussen deze beide factoren enig verband bestaat. In het bijzonder interesseert ons het voorkomen van combinaties van hoge hoogwaterstanden aan de kust en grote rivierafvoeren. In deze bijdrage wordt de onafhankelijkheid nagegaan van de H.W.'s (hoogwaterstanden) te Hoek van Holland en de afvoeren van de Rijn bij Lobith.

### 1.2 Auteur en medewerker

Het onderzoek werd verricht en beschreven door J. Hemelrijk. De berekeningen, in deze bijdrage vermeld, zijn gebaseerd op gegevens van de Rijkswaterstaat en uitgevoerd door F. W. Steutel, assistent van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, die ook bij de opstelling van deze bijdrage zijn assistentie heeft verleend.

## 2.0 WISKUNDIGE FORMULERING VAN HET PROBLEEM

H.W. te Hoek van Holland noemen we  $x^1$ ), de afvoer van de Rijn bij Lobith  $y$ .

Deze grootheden bezitten kansverdelingen, die geschat kunnen worden op grond van waarnemingen en als  $x$  en  $y$  *onafhankelijk* zijn, d.w.z. als de kans op het optreden van een waarde van  $x$  niet wordt beïnvloed door de waarden, die  $y$  aanneemt, kan de *simultane verdeling* van  $x$  en  $y$ , d.i. de kansverdeling van paren  $(x, y)$  berekend worden uit de verdelingen van  $x$  en  $y$  <sup>2)</sup>.

Op grond van de simultane verdeling kunnen dan uitspraken worden gedaan over de kansen op optreden van bepaalde combinaties van  $x$  en  $y$ .

Getoetst wordt in deze bijdrage de hypothese, dat  $x$  en  $y$  onafhankelijk zijn zowel in ieder jaar afzonderlijk als over een hele beschouwde periode van jaren.

We beschouwen hier alleen de „gevaarlijke” maanden, dat zijn die, waarin de hoge H.W.'s voornamelijk optreden, daar we ons speciaal voor de hoge waterstanden interesseren, t.w. de volgende perioden:

november t/m januari	}	over de jaren 1900 t/m 1952.
november t/m februari		
oktober t/m maart		

Beperking van het onderzoek tot deze gedeelten van het jaar geeft een beter inzicht in de situatie en betekent bovendien een aanzienlijke werkbesparing.

## 3.0 GEBRUIKTE METHODEN

### 3.1 De periode 1900 t/m 1952 als geheel

Laat het waarnemingsmateriaal over een periode bestaan uit  $N$  paren  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

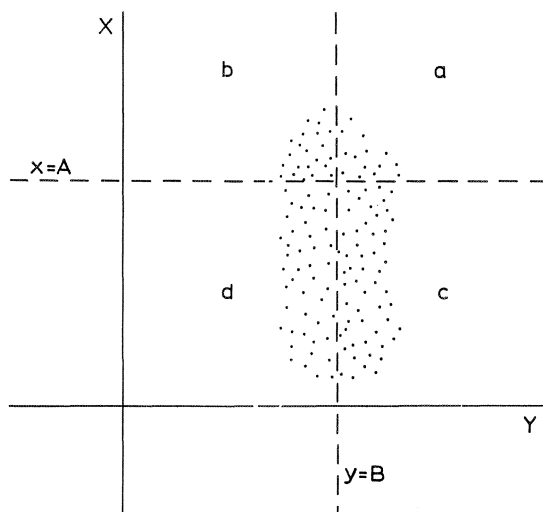
We kunnen deze waarnemingen als een „puntenwolk” uitzetten als in figuur 3.1.1.

<sup>1)</sup> Stochastische grootheden, d.w.z. grootheden, die een kansverdeling bezitten, worden onderscheiden van de waarden, die zij bij een experiment aannemen, door vet drukken van hun symbolen.

<sup>2)</sup> In geval van afhankelijkheid van  $x$  en  $y$  is de simultane verdeling niet zonder meer uit de verdelingen van  $x$  en  $y$  af te leiden.

We verdelen nu deze puntenwolk door een horizontale lijn  $x = A$  en een verticale lijn  $y = B$  in vier delen:

$(x > A, y > B)$ ,  $(x > A, y < B)$ ,  $(x < A, y > B)$  en  $(x < A, y < B)$ , bestaande uit resp.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  punten, zoals in tabel 3.1.1 aangegeven.



Figuur 3.1.1. Waarnemingen grafisch uitgezet (voorbeeld)

Zijn er  $m$  waarnemingen met  $x > A$  en  $r$  met  $y > B$ , dan is onder de hypothese  $H_0$ : „ $x$  en  $y$  zijn onafhankelijk”,  $a$  een stochastische grootte met een bekende (hypergeometrische) verdeling, nl.:

$$P \{ a \leq a \mid H_0 \} = \sum_{i=0}^a \frac{\binom{r}{i} \binom{N-r}{m-i}}{\binom{N}{m}}. \quad (1)$$

Tabel 3.1.1

Waarnemingen ingedeeld naar twee kenmerken

	$y < B$	$y > B$		$a + b + c + d = N$
$x > A$	$b$	$a$	$m$	$a + b = m$
$x < A$	$d$	$c$	$N - m$	$a + c = r$
	$N - r$	$r$	$N$	

### 3.2 Keuze van $A$ en $B$

In het onderhavige geval is de lijn  $x = A$  gekozen met voor  $A$  het *grenspeil*, d.i. het peil, dat gemiddeld éénmaal in twee jaar wordt overschreden, hetgeen bij ca. 730 waarnemingen per jaar impliceert, dat  $m \ll N$  is. Voor  $B$  is ongeveer het *gemiddelde* gekozen van de waterafvoeren in de beschouwde winterperioden, zodat  $r \approx N - r \approx \frac{1}{2} N$  is en dus ook geldt:  $m \ll r$  en  $m \ll N - r$ .

Voor grote  $N$ ,  $m \ll N$  en  $m \ll N - r$  kan men (1) van 3.1 benaderen door de *binomiale verdeling*:

$$P \{ a \leq a \mid H_0 \} = \sum_{i=0}^a \binom{m}{i} \left( \frac{r}{N} \right)^i \left( \frac{N-r}{N} \right)^{m-i}, \quad (1)$$

met gemiddelde  $\mathcal{E}(a \mid H_0) = \frac{mr}{N}$  en variantie  $\sigma^2(a \mid H_0) = \frac{mr(N-r)}{N^2}$ .



Op grond van deze verdeling kunnen we de *rechteroverschrijdingskans*,  $k_r(a)$ , behorende bij de gevonden waarde  $a$  van  $\mathbf{a}$ , berekenen. Deze is per definitie:

$$k_r(a) = P\{\mathbf{a} \geq a \mid H_0\} = 1 - P\{\mathbf{a} < a \mid H_0\}, \quad (2)$$

dus hier:

$$k_r(a) = 1 - \sum_{i=0}^{a-1} \binom{m}{i} \left(\frac{r}{N}\right)^i \left(\frac{N-r}{N}\right)^{m-i}, \quad (2')$$

welke kansen men kan vinden in een tabel van de binomiale verdeling.<sup>1)</sup>

Is de zo gevonden overschrijdingskans kleiner dan een van tevoren gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$  (dikwijls wordt gebruikt  $\alpha = 0,05$ ), dan verwerpt men de hypothese  $H_0$  en concludeert: combinaties van grote  $\mathbf{x}$  en grote  $\mathbf{y}$  komen vaker voor dan met de onafhankelijkheid van deze grootheden te rijmen is, m.a.w.  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{y}$  zijn niet onafhankelijk.

### 3.3 Combinaties van de resultaten der jaren afzonderlijk

Op de bovenbeschreven wijze wordt gezocht naar afhankelijkheid over de gehele periode van 52 jaar, doch de eventuele verschillen, tussen de jaren bijv. in aantal stormen, worden daarbij niet in de beschouwingen betrokken. Wenst men te onderzoeken of *binnen* de jaren, als afzonderlijke perioden beschouwd, onafhankelijkheid bestaat, dan dient men op andere wijze te werk te gaan. Men stelt dan tabel 3.1.1 op voor ieder der jaren afzonderlijk en uit de 52 op deze wijze verkregen tabelletjes – die ieder apart te weinig hoge H.W.'s bevatten om toetsing mogelijk te maken – wordt op hieronder te beschrijven wijze een gecombineerde toetsingsgrootheid berekend.

De waarnemingen leveren van ieder der  $k$  jaren afzonderlijk:

een waarde  $a_i$  van  $\mathbf{a}_i$ ,

een waarde  $\frac{m_i r_i}{N_i}$  van  $\mathcal{E}(\mathbf{a}_i \mid H_0)$ ,

een waarde  $\frac{m_i r_i (N_i - r_i)}{N_i^2}$  van  $\sigma^2(\mathbf{a}_i \mid H_0)$ .

Onder de hypothese  $H_0'$ , dat  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbf{y}_i$  onafhankelijk zijn voor *alle*  $i$ , dus in ieder der jaren afzonderlijk, is de grootheid

$$z = \frac{\sum_{i=1}^k \left( a_i - \frac{m_i r_i}{N_i} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{m_i r_i (N_i - r_i)}{N_i^2}}}$$

bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 0 en spreiding 1.

Men berekent dus

$$z = \frac{\sum_{i=1}^k \left( a_i - \frac{m_i r_i}{N_i} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{m_i r_i (N_i - r_i)}{N_i^2}}}$$

zoekt  $k_r(z)$  op in een tabel van de normale verdeling en verwerpt  $H_0'$ , indien  $k_r(z) < \alpha$  is.

*Opmerking.* Daar  $r \approx N - r \approx \frac{1}{2} N$  is, door de keuze van het deelpunt  $B$ , is de verdeling der  $\mathbf{a}_i$  ongeveer symmetrisch, zodat ook voor vrij kleine  $m = \sum m_i$  de normale benadering bruikbaar is.

<sup>1)</sup> Bijv. Tables of the binomial probability distribution, National bureau of Standards, Appl. Math. Series 6, Washington, 1950.

#### 4.0 RESULTATEN VAN HET ONDERZOEK

De resultaten van het onderzoek volgens 3.1, 3.2 en 3.3 zijn samengevat in de tabellen 4.0.1 en 4.0.2.

Tabel 4.0.1  
Periode 1900 t/m 1952 als geheel beschouwd

	november t/m januari	november t/m februari	oktober t/m maart
$N$	9248	12085	18313
$r$	3348	4701	6567
$m$	15	16	20
$r/n$	0,3620	0,3890	0,3568
$a$	5	6	7
$k_r(a)$	0,68	0,64	0,62

Tabel 4.0.2  
Jaren afzonderlijk en dan gecombineerd

	november t/m januari	november t/m februari	oktober t/m maart
$\Sigma a_i$	5	6	7
$\Sigma \frac{m_i r_i}{N_i}$	6,2018	6,7614	7,9391
$\Sigma \frac{m_i r_i (N_i - r_i)}{N_i^2}$	2,4449	2,7153	3,5793
$z$	-0,77	-0,46	-0,50
$k_r(z)$	0,78	0,68	0,69

#### 5.0 INTERPRETATIE DER RESULTATEN

Uit de gevonden overschrijdingskansen blijkt, dat er geen enkele aanleiding is om  $H_0$  of  $H_0'$  te verwerpen, zodat we mogen concluderen, dat noch over de perioden als geheel, noch in de jaren afzonderlijk enige afhankelijkheid van grote  $x$ -waarden en grote  $y$ -waarden blijkt.

Men kan dus voor eventuele verdere berekeningen de H.W.'s te Hoek van Holland en de rivierafvoeren bij Lobith als onafhankelijk beschouwen.

BIJDRAGE II.4

DE WISKUNDIGE BEHANDELING  
VAN DE INVLOED VAN WINDVELDEN  
OP DE WATERSTANDEN  
IN DE NOORDZEE



## INHOUDSOVERZICHT

0.1	Inhoudsoverzicht . . . . .	121
0.2	Overzicht van de tabellen . . . . .	122
0.3	Overzicht van de figuren . . . . .	122
0.4	Overzicht van de gebruikte symbolen . . . . .	123
0.5	Literatuur . . . . .	124
0.6	Summary . . . . .	126
0.7	Résumé . . . . .	128
<b>1.0</b>	<b>Samenstelling van de bijdrage . . . . .</b>	<b>131</b>
1.1	Inleidende fysisch-mathematische beschouwingen . . . . .	131
1.2	Inhoud van de bijdrage . . . . .	134
1.3	Auteurs en medewerkers . . . . .	135
<b>2.0</b>	<b>Algemene beschouwingen over het hydrodynamische probleem van de waterbeweging van de Noordzee . . . . .</b>	<b>136</b>
2.1	Inleiding . . . . .	136
2.2	Het mathematische probleem . . . . .	136
2.3	Reductie tot een probleem van Green . . . . .	138
2.4	Bepaling van de functie van Green voor gebieden, die door ten hoogste twee rechten worden begrensd . . . . .	140
2.5	Het stationaire geval . . . . .	145
2.6	Het niet-stationaire geval . . . . .	147
<b>3.0</b>	<b>De invloed van enkele stationaire, niet-uniforme windvelden op een Noordzeemodel . . . . .</b>	<b>149</b>
3.1	Inleiding . . . . .	149
3.2	Het mathematische probleem . . . . .	152
3.3	Een bijzonder geval . . . . .	152
3.4	Het model met uniforme diepte . . . . .	153
3.5	Het model met exponentiële diepte . . . . .	155
3.6	De oceaانvoorwaarde . . . . .	157
3.7	Het probleem zonder aardrotatie . . . . .	160
3.8	Numerieke toepassingen . . . . .	162
<b>4.0</b>	<b>Niet-stationaire windeffecten in een rechthoekige baai . . . . .</b>	<b>166</b>
4.1	Inleiding . . . . .	166
4.2	Probleemstelling . . . . .	168
4.3	Probleem van Green . . . . .	171
4.4	Oplossing voor een uniform windveld . . . . .	173
4.5	Kustvoorwaarde . . . . .	174

4.6	Oceanvoorwaarde . . . . .	175
4.7	Het bijzondere geval $\Omega = 0$ . . . . .	178
4.8	Benadering voor kleine $\Omega$ . . . . .	178
4.9	Benadering voor grote $\Omega$ en kleine $p$ . . . . .	179
4.10	Numerieke toepassingen. . . . .	182

## 0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN

3.8.1	De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met uniforme diepte . . . . .	162
3.8.2	Enkele ontwikkelingscoëfficiënten . . . . .	163
3.8.3	De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte. . . . .	163
3.8.4	De coëfficiënten van de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) bij het model met exponentiële diepte . . . . .	164
3.8.5	De coëfficiënten van de absolute verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte . . . . .	164
3.8.6	De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model zonder aardrotatie . . . . .	166
4.10.1	Exponentieel windveld . . . . .	183
4.10.2	Conversiefactoren . . . . .	183
4.10.3	Het gedrag van $\zeta$ voor $y = 0$ . . . . .	184
4.10.4	De verhoging in het midden van de zuidkust. . . . .	184
4.10.5	Verloop van de maximale verhoging langs de zuidkust . . . . .	185
4.10.6	De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie . . . . .	185
4.10.7	Vergelijking van exacte en benaderde waarden voor enkele coëfficiënten . . . . .	187
4.10.8	De bij $\bar{Z}(p)$ behorende polen . . . . .	187
4.10.9	De verhoging in het midden van de zuidkust. . . . .	188
4.10.10	De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie . . . . .	189

## 0.3 OVERZICHT VAN DE FIGUREN

1.1.1	De Noordzee en het Kanaal. . . . .	133
2.4.1	Twee tegengesteld gerichte, evenwijdige dipolen . . . . .	141
2.4.2	Pool en dipoolstaart . . . . .	141
2.4.3	Pool en ontbonden dipoolstaart . . . . .	141
2.4.4	Dipoolspiegeling bij twee evenwijdige kusten . . . . .	142
2.4.5	Dipoolspiegeling bij kust en daaraan evenwijdige oceaandr . . . . .	143
2.5.1	Lineair windveld boven een rechthoekige zee . . . . .	146
3.1.1	Bodemprofiel van de Noordzee . . . . .	151
3.8.1	De absolute verhoging aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld bij het model met exponentiële diepte. . . . .	165

4.10.1	De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een exponentieel windveld . . . . .	182
4.10.2	Niveaulijnen in een rechthoekige baai ten gevolge van een exponentieel windveld . .	186
4.10.3	De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sprong-windveld .	188
4.10.4	De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sinusoïdaal windveld	190

#### 0.4 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

$A$	$A = \alpha\Omega/\lambda$ (wordt slechts in de hoofdstukken 2.0 en 3.0 gebruikt);
$c$	$c = \sqrt{gh}$ ;
$g$	de versnelling van de zwaartekracht;
$h$	de diepte;
$h_0$	de diepte aan de zuidkust;
$h_m$	het harmonisch gemiddelde van de diepte;
$p$	de variabele van de Laplacetransformatie;
$p_a$	de atmosferische druk;
$q$	$q = (p^2 + \lambda p)^{\frac{1}{2}}$ ;
$R$	de rotatie van het windveld;
$s$	$s = \Omega p^{\frac{1}{2}}(p + \lambda)^{-\frac{1}{2}}$ ;
$t$	de tijd;
$u, v$	de componenten van de totale stroom, $u = \int_0^h u_z dz$ , $v = \int_0^h v_z dz$ ;
$u_z, v_z$	de componenten van de horizontaal gerichte stroom op de diepte $z$ ;
$U, V$	de componenten van de schuifspanning, die ontstaat ten gevolge van de door de wind op het wateroppervlak uitgeoefende kracht;
$U_0, U_1, U_2$	de coëfficiënten van een lineair windveld, behorende bij $U$ ;
$V_0, V_1, V_2$	de coëfficiënten van een lineair windveld, behorende bij $V$ ;
$U_z, V_z$	de componenten van de schuifspanning, welke het water boven de diepte $z$ uitoefent op het water beneden die diepte;
$U_s, V_s$	de componenten van de schuifspanning, welke door de wind op het wateroppervlak wordt uitgeoefend;
$U_b, V_b$	de componenten van de schuifspanning, welke het water op de bodem uitoefent;
$v_s$	de grootte van de windsnelheid aan het wateroppervlak;
$x, y, z$	cartesische coördinaten, waarbij het model bepaald is door $0 < x < a$ , $0 < y < b$ en waarbij $z = 0$ het zee-oppervlak in de rusttoestand aangeeft, $z = h$ de bodem;
$\alpha$	een coëfficiënt, welke de verandering van de diepte bepaalt (wordt in deze betekenis alleen in de hoofdstukken 2.0 en 3.0 gebruikt);
$\alpha$	$\alpha = 1 - 2\gamma/\pi$ (wordt in deze betekenis alleen in hoofdstuk 4.0 gebruikt);
$\beta$	$\beta = \frac{1}{2}s\pi + qb$ ;
$\gamma$	$\text{tg } \gamma = \Omega(p + \lambda)^{-1}$ ;
$\zeta$	de verhoging van het water, gerekend vanaf de rusttoestand;
$\bar{\zeta}$	de Laplace-getransformeerde van $\zeta$ ;
$\varkappa$	$\varkappa = (q^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ ;

$\lambda$	een wrijvingscoëfficiënt;
$\mu$	$\mu = \pi^{-1} \arctg (\Omega/\lambda)$ ;
$\varrho$	de dichtheid van het zeewater, welke uniform wordt verondersteld ( $\varrho = 1,027 \text{ g/cm}^3$ );
$\varrho_a$	de dichtheid van de lucht ( $\varrho_a = 0,00125 \text{ g/cm}^3$ );
$\Phi(x, y)$	een stroomfunctie;
$\Omega$	de coëfficiënt van Coriolis, $\Omega = 2 \omega_a \sin \varphi$ , waarbij $\omega_a$ de rotatiesnelheid van de aarde en $\varphi$ de geografische breedte is.

#### 0.5 LITERATUUR De verwijzing in de tekst is aangegeven door [ ]

1. *S. Bergmann and M. Schiffer* Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. New York, 1953.
2. *R. H. Corkan* The levels in the North Sea. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A 242, 1950, 493–525.
3. *D. van Dantzig* Mathematical problems raised by the flood disaster 1953. Proc. Int. Congr. of Math. Amsterdam, 1954.
4. *D. van Dantzig* Enkele voorbeelden van berekening van waterbeweging onder invloed van wind. Versl. Kon. Ak. v. Wet. 65, 1956, nr. 3.
5. *D. van Dantzig* Solutions of the equation of Helmholtz in an angle with vanishing directional derivatives along each side. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 61, 1958, 384–398. Ook Ind. Math. 20, 1958, 384–398.
6. *D. van Dantzig* Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. ZAMM 39, 1959, 169–179.
7. *Erdélyi et al.* Tables of Integral Transforms I. New York, 1954.
8. *D. J. Hofsommer* Free oscillations in a rotating semicircular bay. Rapport TW 47 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
9. *H. Lamb* Hydrodynamics, Cambridge, 1932.
10. *H. A. Lauwerier* The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary windfield. Rapport TW 31 Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
11. *H. A. Lauwerier* The motion of a half-plane sea under influence of a non-stationary wind. Rapport TW 32 Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
12. *H. A. Lauwerier* The influence of a disturbance upon an infinitely large shallow sea of constant depth. Rapport TW 35 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
13. *H. A. Lauwerier* The windeffect in the Southern part of the North Sea du to a single storm and the influence of the Channel. Rapport TW 36 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
14. *H. A. Lauwerier* The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea. Rapport TW 41 Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
15. *H. A. Lauwerier* Free motions in a rotating sea which has the form of a semi-infinite strip Rapport TW 46. Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
16. *H. A. Lauwerier* A Note on the problem of the sloping beach. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 62, 1959, 229–240. (Ook Ind. Math. 21, 229–240).
17. *H. A. Lauwerier* Solutions of the equation of Helmholtz in an angle I. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 62, 475–488, 1959, (Ook Ind. Math. 21, 475–488).



18. *H. A. Lauwerier* On certain trigonometrical expansions. *J. of Math. and Mech.* Vol. 8, 419–432.
19. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a sea having the form of a semi-infinite strip. Rapport TW 52 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
20. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a rectangular bay with a uniform depth. Rapport TW 57 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.
21. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a rectangular bay with an exponential depth. Rapport TW 58 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.
22. *H. A. Lauwerier* Non-stationary wind-effects in a rectangular bay. Rapport TW 55 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.
23. *M. J. Lighthill* Fourier analysis and generalised functions. Cambridge, 1958.
24. *P. M. Morse and H. Feshbach* Methods of theoretical physics, I, II. New York, 1953.
25. *N. I. Muskhelishvili* Singular integral equations. Groningen, 1953.
26. *J. Proudman* Dynamical oceanography. London, 1953.
27. *J. Proudman* Note on the dynamics of storm-surges. *Month. Not. Royal Astr. Soc., Geoph. suppl.* 7 nr. 1, 44–48, 1954.
28. *J. Proudman* Note on the dynamical theory of storm-surges. *Arch. Met. Geoph. Biokl.* 7, 344–351, 1954.
29. *J. R. Rossiter* The North Sea storm surge of 1 febr. 1953. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London,* A 246, 371–400, 1954.
30. *W. F. Schalkwijk* A contribution to the study of storm surges on the Dutch coast. *Meded. en Verh. K.N.M.I., 's-Gravenhage,* 1947.
31. *J. C. Schönfeld* Vergelijkingen van een lange golfbeweging in twee dimensies. Intern Rapport Rijkswaterstaat, 's-Gravenhage, 1954.
32. *Staatscommissie-Zuiderzee* Verslag 1918–1926. 's-Gravenhage, 1926.
33. *G. W. Veltkamp* Een probleem in conforme afbeelding. Rapport TW 22 Math. Centrum Amsterdam, 1953.
34. *G. W. Veltkamp* De invloed van stationnaire windvelden op een zee van op delen constante diepte. Rapport TW 24 Math. Centrum, Amsterdam, 1953.
35. *G. W. Veltkamp* On Kelvin and Poincaré-waves in a strip. Rapport TW 37 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
36. *G. W. Veltkamp* The behaviour of a solution of Helmholtz' equation near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives. Rapport TW 40 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
37. *M. P. H. Weenink* Bijdrage tot de theorie der opwaaiing in een baai of randzee bij een inhomogeen windveld. Meteorologisch Rapport Stormvloed 1 Februari 1953, K.N.M.I., 1e vervolg, 40–45, 's-Gravenhage, 1954.
38. *M. P. H. Weenink* A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly-enclosed sea, with special application to the southern coast of the North Sea. Diss., Utrecht, 1958.

## 0.6 SUMMARY

### Mathematical study of the effect of wind upon the waterlevels of the North Sea

Chapter 2.0 deals with general considerations on the hydrodynamical problem of the motion of the North Sea.

The problem of determining the water level of the North Sea due to an atmospheric disturbance in the region of the North Sea has a meteorological and a hydrodynamical aspect. The meteorological side<sup>1)</sup> concerns the origin of a storm, its structure and the forces which it exerts on the surface of the sea. The hydrodynamical side concerns the motion of the water under influence of given tractive forces on the surface of the sea. The hydrodynamical problem has been extensively studied by the Department of Applied Mathematics of the Amsterdam Mathematical Centre and the following is an account of the work done by that department. In the present chapter the problem is considered from a general point of view. The results which are of special importance for the North Sea are discussed in the chapters 3.0 and 4.0 of the present contribution and in Contribution II.5.

An adequate mathematical treatment is only possible at the cost of a number of simplifications the majority of which hardly affect the final result. In the first place the hydrodynamical equations are simplified. The vertical component of the velocity of the stream is neglected, the equations are linearized, and the coefficient of Coriolis is assumed being constant. For the North Sea basin these simplifications are quite acceptable. In the second place the form of the basin is replaced by a simple mathematical model. This means that the influence of irregularities of the coast and of variations of the depth are neglected. The North Sea can be conveniently represented by a rectangle which is bounded on three sides by coasts and which borders on an infinitely deep ocean on the remaining side. This means that the influence of e.g. the Channel is neglected. The grand total of all simplifications cannot be neglected if it is required to know the exact elevation at a given time at a given spot. But by ignoring local circumstances they permit us to obtain a clear picture of the overall motion and elevation of the surface.

The rectangular model of the North Sea mentioned above suffers from two disadvantages. In the first place the leak of the Channel is neglected. However, a special study on this subject has been carried out by LAUWERIER [11]. In a later phase his results may be combined with those obtained for the rectangle. In the second place the assumption of a uniform depth is rather drastic. In reality the depth increases gradually in the direction of the ocean. However, as a first step toward the determination of the influence of a non-uniform depth, in 3.0 the stationary state of a sea with an exponentially increasing depth under a non-uniform windfield will be discussed.

The mathematical difficulties would be considerably reduced if the rotation of the earth also were negligible. However, it has been found time and again that the rotation is an essential feature of the problem which cannot be ignored.

With the simplifications discussed above the problem can be described by an elliptic partial differential equation with oblique boundary conditions. This type of problem has not yet been solved entirely. A number of partial results which were obtained at the Mathematical Centre are reported in this chapter, the division of which is as follows.

In 2.2 the basic equations are given, (6) and (7). By means of the Laplace transformation (8) they are converted to the form (9) and (10). Then for  $\xi$ , the Laplace transform of the elevation  $\zeta$ , an inhomogeneous equation of Helmholtz (11) is obtained. The condition of the ocean boundary is of the simple form (13) which is a Dirichlet condition. The condition of the coast boundary (14) is of the oblique type, i.e. a linear relation between the normal derivative and the tangential derivative of  $\xi$  at the coast. Only a few investigations of this kind of boundary problem exist. Hence it was necessary to carry out some fundamental research on this subject. Results of this research are given in 2.3 and 2.4. In 2.3 a few conclusions are drawn from Green's theorem. In 2.4 Green's function is obtained for some simple domains. Until now it has only been possible to find Green's function for domains which are bounded by at most two straight lines.

In 2.5 the stationary state is discussed. The mathematics are simple and solutions can be obtained without taking recourse to Green's function. An application to the rectangular model of the North Sea is added. For other investigations of the stationary state we refer to 3.0.

In 2.6 some reflections are given on the instationary case. Even in absence of a windfield, the water may be in motion. This leads to the problem of determining the eigenvalues of a sea basin which is solved for a strip-shaped (littoral) sea in this section. For the corresponding problem in the case of a rectangular sea we refer to Contribution II.5. Subsequently the influence of a windfield is considered. It has already been shown in 2.3 that knowledge of Green's function in principle allows the evaluation by quadratures of the Laplace transform  $\xi$  of the elevation  $\zeta$ . The undoing of this Laplace transformation, however, gives rise to considerable difficulties. This is illustrated by the simple case of an unbounded sea. The transformed elevation  $\xi$  is readily obtained, but the inverse Laplace transformation gives intricate expressions for the elevation  $\zeta$  even if the windfield is simple. For more details concerning the inverse Laplace transformation we refer to 4.0 in which the influence of an instationary windfield on the rectangular model of the North Sea is discussed.

In chapter 3.0 we shall study the influence of a non-uniform stationary windfield upon a rectangular model of the North Sea. In this model, which is described in Cartesian coordinates  $(x, y)$  by  $0 < x < a$  and  $0 < y < b$ , the sides  $x = 0$ ,  $x = a$  and  $y = 0$  represent coasts and  $y = b$  represents the open end at the ocean. The depth  $h$  of the sea is assumed to be an exponential function of  $y$ , viz.  $h = h_0 \exp(2\alpha y)$ .

The numerical constants are chosen in accordance with the physical situation of the North Sea. We take

$$\begin{array}{ll} a = 400 \text{ km} & b = 800 \text{ km} \\ \Omega/\lambda = 5 & \\ h_0 = 33 \text{ m} & \alpha = \pi/(4b). \end{array}$$

<sup>1)</sup> See Contribution I.

In this model the depth varies from 33 m at the coast  $y = 0$  to 158 m at the ocean boundary (see figure 3.1.1). The harmonic mean  $h_m$  of the depth is 65 m. For the sake of simplicity the direction of the positive  $y$ -axis will be called the northern direction.

The longitudinal axis of the North Sea makes the slight deviation of some  $24^\circ$  with the geographic North. In the mathematical model the side  $y = 0$  corresponds roughly to the Dutch coast and the middle  $(\frac{1}{2}a, 0)$  roughly to the position of den Helder.

Therefore we have restricted ourselves mainly to the determination of the elevation at the south coast and in particular to that at the middle  $(\frac{1}{2}a, 0)$ .

In 3.1 we consider a non-uniform windfield, the surface stress of which is a linear function of  $x$  and  $y$ . This type of windfield is given by (2).

The elevation at the south coast due to this windfield is given in table 3.8.5 and is illustrated for each component separately in fig. 3.8.1.

The elevation at the middle  $\zeta(\frac{1}{2}a, 0)$  in particular is given by (3). The same calculation is carried through for the simpler model with the uniform depth  $h = h_m$ . In this case the result (4) is obtained. In order to judge the influence of the rotation of the earth in both models the elevation is calculated with  $\Omega = 0$ . The results are given in (5) and (6).

From the results a number of conclusions can be drawn concerning the influence of the exponential depth ( $\alpha$ ) and the rotation of the earth ( $\Omega$ ).

1. For a uniform N-S wind the elevation at the south coast does not depend on the bottom profile nor on the rotation of the earth.
2. For a uniform W-E wind the influence of  $\alpha$  and  $\Omega$  upon the elevation at the south coast is rather large.
3. In this model the most unfavourable direction for a uniform wind as regards the elevation at the south coast is about  $15^\circ$  NNW.
4. The influence of  $\alpha$  and  $\Omega$  upon the contributions of the divergence terms  $U_1$  and  $V_2$  to the elevation at the south coast is rather small.
5. The influence of  $\alpha$  and  $\Omega$  upon the contributions of the rotation terms  $U_2$  and  $V_1$  to the elevation at the south coast is very marked.

In 3.2 the mathematical treatment starts from the differential equations of the stationary state, see formulae (1), (2) and (3), and the boundary conditions (5), (6), (7).

The discussion of the influence of the components  $V_0$  and  $V_2$  is very simple and is given in 3.3.

The general case is studied in 3.5. It appears that the stream and the elevation can be derived from a potential function  $\Phi(x, y)$ . This function satisfies the differential equation (2) of 3.5 and the boundary conditions (5) and (6) of 3.4. The solution (12) of 3.5 of this problem involves the determination of a set of coefficients  $c_n$  and a set  $d_n$ . The determination of the coefficients  $c_n$  is relatively easy whereas the determination of the  $d_n$  leads to considerable difficulties. 3.6 is entirely devoted to the latter problem. Once the coefficients  $c_n$  and  $d_n$  have been determined the elevation at the south coast follows easily from (23) and (24) in 3.5. The discussion of the simpler model with uniform depth  $h = h_m$  is given in 3.4.

In chapter 4.0 we consider a mathematical model for the behaviour of the North Sea under a storm. The North Sea is represented by a rectangular bay of uniform depth which is bounded on three sides by coasts and which borders on an ocean on the fourth side. For the sake of simplicity the longest axis is assumed to coincide with the North-South direction. The southern border then corresponds with i.a. the Dutch coast and its middle roughly represents Den Helder. The influence of a storm is expressed through the stress it exerts on the surface of the sea. This stress ( $U, V$ ) may be dependent on both the coordinates ( $x, y$ ) and the time ( $t$ ).

In the first instance this general case will be dealt with, but in the sequel the mathematical treatment will be elaborated for a uniform wind in North-South direction viz.

$$U = 0 \qquad V = V(t).$$

In the numerical applications we have chosen the data in such a way that they agree fairly well with the physical data of the North Sea. The applications are given more by way of illustration and do not constitute the goal of the investigation. Explicit results have been obtained for the following simple cases:

- Exponential windfield;
- Step-function windfield;
- Sinusoidal windfield.

In all of these cases we have calculated in particular the elevation at the middle of the southern coast and its dependence on the rotation of the earth ( $\Omega$ ) and the bottom-friction ( $\lambda$ ). Results are represented in the figures 4.10.1, 4.10.2, 4.10.3 and 4.10.4. For the exponential windfield lines of constant elevation in the bay for different times have been drawn in fig. 4.10.2. It is seen that this simple model of a windfield already is in good qualitative agreement with the lines obtained experimentally in a particular case. In these figures and in the accompanying tables we have used dimensionless quantities, in which the unit of time is about 1.4 h and the unit of length about 127 km. The above-mentioned windfields have been normalized in such a way, that the maximum of the windvelocity  $v_s$  is the same in all cases. The given values of the elevation can be reduced to meters by multiplication by a factor which varies quadratically with  $v_s$ . For a few cases this factor is given in table 4.10.2.

In this contribution we have indicated the means for extending the numerical applications at will. Obviously we should be cautious in drawing conclusions from the few numerical applications dealt with in this chapter. It has

already been set forth in chapter 1.0 that the obtained results only give a general insight in the motion of the water of the North Sea. This research gives rise to the following conclusions.

1. The rotation of the earth chiefly causes an East-West skewness of the sea surface. This skewness is slight at the southern coast, but increases in northern direction right up to the ocean. Moreover,  $\Omega$  brings about a reduction of the maximum elevation.
2. For a suddenly rising storm (stepfunction windfield) the elevation at the southern coast rapidly increases and after some 12 hours has already attained about 90 % of its stationary value.
3. For a sinusoidal storm the elevation at the southern coast approximately equals the stationary elevation due to a stationary wind with an intensity corresponding to that of the wind occurring a certain constant time earlier.
4. The elevation at the southern coast due to a sinusoidal storm, can be considered as the sum of the quasi-stationary elevation (forced oscillation) and a damping term which is due to the lowest negative real eigenvalue.

## 0.7 RÉSUMÉ

### L'étude mathématique de l'influence des champs de vent sur les niveaux d'eau dans la Mer du Nord

Le chapitre 2.0 traite de considérations générales sur le problème hydrodynamique du mouvement de la Mer du Nord.

Le problème de la détermination du niveau de la Mer du Nord dû à une perturbation atmosphérique dans la région de la Mer du Nord a des aspects météorologiques et hydrodynamiques. L'aspect météorologique<sup>1)</sup> concerne l'origine d'une tempête, sa structure, et les forces qui sont exercées de ce fait à la surface de la mer. L'aspect hydrodynamique concerne les mouvements de l'eau sous l'influence de forces tractives données le long de la surface de la mer. Le problème hydrodynamique est étudié en détail par la Section de Mathématiques Appliquées du Centre Mathématique d'Amsterdam, et cette partie du rapport donne un aperçu des résultats obtenus par la section. Dans le présent chapitre, le problème est considéré d'un point de vue général. Les résultats présentant un intérêt particulier pour la Mer du Nord sont commentés aux chapitres 3.0 et 4.0 de la contribution présente et à la Contribution II.5.

Un traitement mathématique adéquat n'est possible que par l'introduction d'un certain nombre de simplifications dont la plupart n'ont que peu d'influence sur le résultat final. En premier lieu, les équations hydrodynamiques sont simplifiées. La composante verticale de la vitesse est négligée; les équations sont rendues linéaires, et le coefficient Coriolis est supposé constant. Ces simplifications sont acceptables pour le bassin de la Mer du Nord. En second lieu, la forme du bassin est remplacée par un modèle mathématique simple. Ceci implique que les influences dues aux irrégularités de la côte et aux variations de profondeur sont négligées. La Mer du Nord peut être représentée par un rectangle bordé de côtes sur trois côtés, et dont le quatrième côté est limité par un océan de profondeur infinie. Cela signifie, par exemple, que l'on néglige l'influence de la Manche. Le total de toutes les simplifications ne peut être négligé, si l'on désire connaître exactement l'élévation à un temps donné et en un lieu donné. Mais en ne tenant pas compte de circonstances locales, les simplifications nous permettent d'obtenir une vision nette du mouvement de l'eau et de l'élévation de sa surface.

Le modèle rectangulaire ci-dessus choisi pour la Mer du Nord a deux inconvénients. Premièrement on néglige la fuite par la Manche. Cependant une recherche a été faite à cet égard par LAUWERIER [11]. A un stade ultérieur, ses résultats peuvent être combinés avec ceux obtenus pour le rectangle. Deuxièmement, il est assez radical de prendre une profondeur uniforme. En réalité la profondeur augmente continuellement en direction de l'océan. Au chapitre 3.0, cependant, on entend l'étude de l'influence d'une profondeur variable; on y discute l'état stationnaire d'une mer ayant une profondeur croissant exponentielle, sous l'influence d'une zone de vent non uniforme.

Les difficultés mathématiques seraient considérablement réduites, si la rotation de la terre pouvait être également négligée. Mais on a trouvé à plusieurs reprises que la rotation constitue un élément caractéristique du problème, que l'on ne peut manquer de prendre en considération.

Après avoir effectué les simplifications exprimées ci-dessus, le problème peut être défini par une équation différentielle partielle elliptique, avec des conditions de limite obliques. Ce type de problèmes n'est pas encore complètement résolu. Un certain nombre de résultats partiels obtenus au Centre Mathématique sont mentionnés dans ce chapitre, dont la division est la suivante:

En 2.2, on donne les équations de base (6) et (7). Au moyen de la transformation de Laplace (8), on leur donne la forme (9) et (10). Alors, on dérive pour  $\zeta$ , la transformée de Laplace de l'élévation  $\zeta$ , une équation inhomogène de Helmholtz (11). La condition le long de la limite de l'océan a la forme simple (13), c'est-à-dire que c'est une condition Dirichlet. La condition le long de la côte, (14), est du type oblique, c'est à dire qu'il y a une relation linéaire entre la dérivée normale et la dérivée tangentielle de  $\zeta$  à la côte. Il n'y a que peu de recherches faites sur ce type de problèmes-limites. Il était donc nécessaire de procéder à un examen fondamental de ce sujet. Les résultats en sont donnés aux paragraphes 2.3 et 2.4. Au 2.3, on tire quelques conclusions du théorème de Green. En 2.4 on obtient une fonction de Green pour quelques domaines simples. Jusqu'alors il n'est apparu possible de trouver des fonctions de Green que pour des régions limitées par deux lignes droites au plus. Au paragraphe 2.5 on traite de l'état stationnaire. Les mathématiques en sont simples, et l'on peut trouver des solutions sans se servir des fonctions de Green. En 2.5, on donne encore une application au modèle rectangulaire de la Mer du Nord. Pour d'autres recherches sur l'état stationnaire, se reporter au chapitre 3.0.

En 2.6, quelques réflexions sur le cas non-stationnaire. Même en l'absence de zone de vent, l'eau peut être en mouvement. Ceci mène au problème de la détermination des valeurs propres d'un bassin maritime, problème résolu

<sup>1)</sup> Voir Contribution I.

dans ce paragraphe pour une mer (littorale) en forme de bande. Pour le problème correspondant, dans le cas d'une mer rectangulaire, se reporter à la Contribution II.5. On considère ensuite l'influence d'une zone de vent. On a déjà montré en 2.3 que lorsque la fonction de Green est connue, la transformée de Laplace  $\zeta$  de l'élévation  $\zeta$  peut être déterminée en principe à l'aide de quadratures. Cependant, l'annulation de cette transformée de Laplace donne des difficultés considérables. Ceci est illustré par le cas simple d'une mer non limitée. L'élévation transformée  $\zeta$  est aisément trouvée, mais la transformation inverse, même si la zone de vent est simple, donne des expressions complexes pour l'élévation  $\zeta$ . Pour plus de détails sur la transformation inverse, se reporter au chapitre 4.0, où l'on commente l'influence d'une zone de vent non stationnaire sur le modèle rectangulaire de la Mer du Nord.

Dans le chapitre 3.0 on étudiera l'influence d'une zone de vent stationnaire non-uniforme sur un modèle rectangulaire de la mer du Nord. Dans ce modèle, défini dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par  $0 < x < a$  et  $0 < y < b$ , les côtés  $x = 0$ ,  $x = a$  et  $y = 0$  représentent les côtes, et  $y = b$  représente le côté donnant sur l'océan. Pour la profondeur  $h$ , on prend une fonction exponentielle de  $y$ :  $h = h_0 \exp(2\alpha y)$ .

Les constantes numériques sont choisies conformément à la situation physique de la Mer du Nord. Nous prenons:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ km} & b &= 800 \text{ km} \\ \Omega/\lambda &= 5 & & \\ h_0 &= 33 \text{ m} & \alpha &= \pi/(4b) \end{aligned}$$

Dans ce modèle, la profondeur varie de 33 m à la côte  $y = 0$ , à 158 m en bordure de l'océan (voir figure 3.1.1). La moyenne harmonique  $h_m$  de la profondeur est de 65 m. Pour simplifier, la direction de l'axe positif  $y$  sera désigné comme direction du nord. En réalité, l'axe longitudinal de la Mer du Nord fait un faible angle d'environ  $24^\circ$  avec le nord géographique. Dans le modèle mathématique, le côté  $y = 0$  correspond à grands traits à la côte des Pays-Bas, et le milieu  $(\frac{1}{2}a, 0)$  à l'emplacement de Den Helder.

C'est pourquoi nous nous sommes bornés dans ce chapitre à la détermination de l'élévation sur la côte méridionale, et en particulier au point médian  $(\frac{1}{2}a, 0)$ . Nous considérons au 3.1 une zone de vent non-uniforme exerçant une tension glissante à la surface, qui est une fonction linéaire de  $x$  et de  $y$ . Ce type de zone de vent est donné par (2). L'élévation sur la côte méridionale par suite de cette zone de vent est donnée dans le tableau 3.8.5 et se trouve illustrée à la fig. 3.8.1 pour chacun des composants.

L'élévation au milieu  $\zeta(\frac{1}{2}a, 0)$  en particulier est donnée par (3). Le même calcul est effectué pour le modèle plus simple ayant une profondeur uniforme  $h = h_m$ . Pour ce cas on obtient pour résultat (4). Pour pouvoir se rendre compte de l'influence exercée par la rotation de la terre, l'élévation est également calculée pour  $\Omega = 0$  dans les deux modèles. Les résultats en sont exprimés dans (5) et (6). Ces résultats permettent de tirer quelques conclusions au sujet de l'influence de la profondeur exponentielle ( $\alpha$ ) et de la rotation de la terre ( $\Omega$ ).

1. Pour un vent uniforme N-S, l'élévation sur la côte méridionale ne dépend ni du profil du fond ni de la rotation de la terre.
2. Pour un vent uniforme O-E, l'influence, sur l'élévation, de  $\alpha$  et de  $\Omega$  est assez importante.
3. La direction du vent la plus défavorable, pour un vent uniforme, en ce qui concerne l'élévation sur la côte méridionale est dans ce modèle d'environ  $15^\circ$  NNO.
4. L'influence de  $\alpha$  et de  $\Omega$  sur les contributions des termes de divergence  $U_1$  et  $V_2$  à l'élévation sur la côte méridionale est assez faible.
5. L'influence de  $\alpha$  et de  $\Omega$  sur les contributions des termes de rotation  $U_2$  et  $V_1$  à l'élévation sur la côte méridionale est très grande.

Au 3.2 le traitement mathématique part des équations différentielles de l'état stationnaire (1), (2) et (3), et des conditions-limites (5), (6) et (7).

La discussion de l'influence des composantes  $V_0$  et  $V_2$  est simple; elle est donnée au paragraphe 3.3.

Le cas général est examiné au paragraphe 3.5. Il apparaît que le courant et l'élévation peuvent être dérivés d'une fonction potentielle  $\Phi(x, y)$ . Cette fonction satisfait à l'équation différentielle (2) du 3.5 et aux conditions-limites (5) et (6) du 3.4. La solution (12) du 3.5 de ce problème exige la détermination d'un système de coefficients  $c_n$  et d'un système  $d_n$ . La détermination des coefficients  $c_n$  est relativement facile, alors que la détermination de  $d_n$  conduit à de notables difficultés.

Le paragraphe 3.6 est entièrement consacré à ce problème. Une fois déterminés les coefficients  $c_n$  et  $d_n$ , l'élévation sur la côte méridionale se déduit facilement de (23) et de (24) du 3.5. Le modèle plus simple, avec une profondeur uniforme  $h = h_m$  est examiné au paragraphe 3.4.

Dans le chapitre 4.0 on considère un modèle mathématique pour le comportement de la Mer du Nord lors d'une tempête. La Mer du Nord est représentée par une baie rectangulaire ayant une profondeur uniforme et limitée sur trois côtés par des côtes, sur le quatrième coté par un océan. Pour simplifier, on admet que l'axe longitudinal coïncide avec la direction Nord-Sud. La limite méridionale correspond donc notamment à la côte des Pays-Bas, et le milieu de cette limite représente approximativement Den Helder. L'influence d'une tempête est introduite par la force glissante qui s'exerce à la surface de la mer. Cette force  $(U, V)$  peut dépendre autant des coordonnées  $(x, y)$  que du temps  $(t)$ .

On traite en premier lieu le cas général, puis on traite mathématiquement le cas d'un vent uniforme de direction Nord-Sud, ou

$$U = 0, V = V(t).$$

Dans les applications numériques, les données ont été choisies de telle sorte qu'elles correspondent raisonnablement aux données physiques de la Mer du Nord. Ces applications sont surtout données comme illustrations et ne constituent pas le but de cette recherche. Des résultats explicites sont obtenus pour les cas simples suivants :

- Zone de vent exponentielle;
- Zone de vent fonction brusque unité;
- Zone de vent sinusoïdale.

Dans tous ces cas, on a calculé en particulier l'élévation pour le milieu de la côte méridionale, et sa dépendance de la rotation de la terre ( $\Omega$ ) et de la friction sur le fond ( $\lambda$ ). Les résultats en sont donnés dans les figures 4.10.1, 4.10.2, 4.10.3 et 4.10.4. Pour la zone de vent exponentielle, on a tracé dans la fig. 4.10.2 des lignes d'égale élévation dans la baie pour divers temps. On voit que ce modèle simple de zone de vent a déjà une bonne concordance qualitative avec les lignes obtenues dans un cas expérimental particulier. Dans ces figures et dans les tableaux correspondants on a utilisé des grandeurs sans dimension déterminée, où l'unité de temps est environ 1.4 h, et l'unité de longueur environ 127 km. Les zones de vent ci-dessus sont normalisées de telle façon que le maximum de la vitesse du vent  $v_s$  est le même dans tous les cas. Les valeurs données pour l'élévation peuvent être réduites en mètres par multiplication par un facteur variant quadratiquement avec  $v_s$ . Pour quelques cas ce facteur est donné au tableau 4.10.2.

Dans cette contribution on donne la méthode permettant d'étendre à volonté les applications numériques. Il est évident que l'on doit être prudent en tirant des conclusions du peu d'applications numériques traitées dans ce chapitre. On a déjà posé en principe au chapitre 1.0 que les résultats obtenus ne donnent qu'une vision globale du mouvement de l'eau dans la Mer du Nord. Cette étude conduit aux conclusions suivantes :

1. La rotation de la terre cause principalement une déviation Est-Ouest de la surface de la mer. Cette déviation est faible sur la côte méridionale, et croît vers le Nord jusqu'à l'océan. De plus,  $\Omega$  entraîne une réduction de l'élévation maxima.
2. Lors d'une tempête surgissant brusquement (zone de vent brusque unité), l'élévation s'accroît rapidement sur la côte méridionale, et atteint déjà après environ 12 heures à peu près 90 % de sa valeur stationnaire.
3. Pour une tempête sinusoïdale, l'élévation sur la côte méridionale est approximativement égale à l'élévation stationnaire qui résulterait d'un vent stationnaire ayant une intensité correspondant à celle du vent pendant un certain temps constant antérieur.
4. L'élévation sur la côte méridionale par suite d'une tempête sinusoïdale peut être considérée comme la somme de l'élévation quasi-stationnaire (oscillation forcée) et d'un terme d'amortissement résultant de la plus basse valeur propre négative.

## 1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

### 1.1 Inleidende fysisch-mathematische beschouwingen

Om de samenhang te begrijpen tussen een atmosferische storing in het Noordzeegebied en de veranderingen van de waterhoogten aan de Nederlandse kust, moeten een meteorologisch en een hydrodynamisch probleem worden opgelost.

Het meteorologische probleem <sup>1)</sup> betreft het ontstaan van een storm, zijn structuur en de krachten, welke op het wateroppervlak worden uitgeoefend. Het hydrodynamische probleem betreft de waterbeweging in een horizontaal tweedimensionaal gebied onder invloed van een storm, waarbij de op het wateroppervlak door een windveld uitgeoefende krachten als bekend worden aangenomen.

Wij zullen ons hier slechts bezighouden met dit laatste probleem, dat door de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum is onderzocht. In deze inleiding worden van dit werk enkele aspecten besproken.

De gemiddelde snelheid van het water en de verhoging van de waterspiegel, die op iedere plaats van een zee met beperkte diepte (als de Noordzee) voorkomen, voldoen aan een stelsel van drie partiële differentiaalvergelijkingen, nl. twee bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking.

De bewegingsvergelijkingen leggen een verband tussen de krachten, die van de snelheid van het water afhankelijk zijn, nl. de traagheidskracht, de kracht van Coriolis en de weerstandskracht enerzijds en de uitwendige krachten, welke de invloed van de zwaartekracht en van het windveld op de waterbeweging aangeven, anderzijds (zie o.a. [32], § 121—§ 128). Voor de volledigheid zij hier nog vermeld, dat de traagheidskracht ontstaat bij toename of afname van de stroomsnelheid van het water; de kracht van Coriolis wordt teweeggebracht door de draaiing van de aarde, terwijl de weerstandskracht wordt veroorzaakt door de weerstand, die het water ondervindt van de bodem. De weerstandskracht en de kracht, die het windveld op het wateroppervlak uitoefent, worden in de vergelijkingen vervangen door krachten, die op de geheel verticale waterkolom werken (zie o.a. [32], § 31, § 54, § 149 en § 150). In verband met de beperkte diepte van de Noordzee is dit geoorloofd.

Ten slotte brengt de continuïteitsvergelijking tot uitdrukking, dat op ieder moment de totale hoeveelheid water, die in een bepaald volume binnenstroomt, gelijk is aan de hoeveelheid, die er uitstroomt.

Om oplossingen te verkrijgen van deze differentiaalvergelijkingen, is een aantal vereenvoudigingen noodzakelijk betreffende de waterbeweging en de vorm van het te beschouwen gebied, waarvan enkele een geringe invloed op de resultaten hebben.

Bij de opstelling van de differentiaalvergelijkingen kon de verticale component van de versnelling van het water verwaarloosd worden in vergelijking met de versnelling van de zwaartekracht omdat de veranderingen, die de waterspiegel in verticale zin als gevolg van de meteorologische effecten ondergaat, langzaam plaatsvinden. Als gevolg hiervan zijn de verticale snelheden klein ten opzichte van de horizontale snelheden.

Verder werd ook de viscositeit van het zeewater buiten beschouwing gelaten. Voorts zien we nog af van de veranderingen in de dichtheid van het zeewater en veronderstellen we, dat de bij de bodemwrijving behorende wrijvingscoëfficiënt  $\lambda$  en de Corioliscoëfficiënt  $\Omega$  constant zijn. Bij de Noordzee zijn deze vereenvoudigingen zeker toelaatbaar, in aanmerking genomen de verlangde graad van nauwkeurigheid.

De volgende vereenvoudigingen zijn van ingrijpender aard:

1. De niet-lineaire weerstandstermen in de bewegingsvergelijkingen worden vervangen door lineaire termen. Deze weerstandskracht, die volgens de ervaring evenredig is met het kwadraat van de gemiddelde snelheid in een punt en omgekeerd evenredig is met de diepte, wordt dus vervangen door een term, die evenredig is met de snelheid, terwijl in het algemeen de diepte constant wordt verondersteld. Dan wordt verder de getallencoëfficiënt in deze term zo geschikt mogelijk gekozen.

Dank zij deze linearisatie geldt het superpositiebeginsel, hetgeen inhoudt, dat uit twee oplossingen van de differentiaalvergelijkingen door lineaire combinatie, som of verschil bij voorbeeld, nieuwe oplossingen afgeleid kunnen worden. We mogen dan de door storm en getij veroorzaakte verhoging opvatten als de som van het astronomische getij en het stormeffect (dit is de verhoging, welke zou optreden

<sup>1)</sup> Zie Bijdrage I.

bij afwezigheid van getij). Aangezien het astronomische getij een bekend verschijnsel is, kunnen we ons voor de berekening beperken tot een bestudering van alleen het stormeffect. In werkelijkheid treedt er ten gevolge van de niet-lineariteit van de bewegingsvergelijkingen een zekere wisselwerking tussen storm en getij op, zodat men bij het optellen van getijstand en stormeffect nog een zekere correctie zou moeten aanbrengen. Daar het verloop van de hoogwaterstanden van het astronomische getij langs de kust ook bekend is uit de getijtafels, vinden we dus met verwaarlozing van niet-lineaire effecten de totale verhoging, als de met behulp van de lineaire vergelijkingen berekende verhoging wordt opgeteld bij de voorspelde hoogwaterstand op de bepaalde dag.

De vereenvoudigde vergelijkingen zijn weergegeven in de formules (6) en (7) van 2.2. In plaats van de gemiddelde snelheidscomponenten zijn daar de componenten  $u, v$  van de totale stroom van bodem tot oppervlak in een punt ingevoerd.

De linearisatie biedt tevens de mogelijkheid om de invloed van de windkracht op het water componentsgewijze te berekenen. Voor iedere component moet dan de verhoging van het zee-oppervlak berekend worden, waarna deze verhogingen bij elkaar opgeteld moeten worden.

De vereenvoudigingen, welke de vorm van het zeebekken betreffen, zijn van nog ingrijpender aard.

2. Geen rekening wordt gehouden met onregelmatigheden van de kusten; deze worden vervangen door rechte lijnen. Voor de Noordzee betekent dit, dat o.a. afgezien wordt van de invloed van bijvoorbeeld het Kanaal, het Kattegat en de riviermondingen.

3. Zoals reeds gezegd, worden ook diepteveranderingen in het algemeen verwaarloosd. De geleidelijke overgang van zee naar oceaan wordt hierbij vervangen door een abrupte overgang, waarbij de oceaan oneindig diep wordt aangenomen, zodat het oceaanniveau onveranderlijk is.

Om een indruk te geven van deze diepteveranderingen wordt opgemerkt, dat de gemiddelde diepte van het zuidelijke deel van de Noordzee tussen de Nederlandse en de Engelse kust ruim 35 m bedraagt, terwijl in een strook van 50 km breedte langs de Nederlandse kust deze diepte 20 à 25 m is, als de zeer ondiepe kuststrook van 5 km breedte buiten beschouwing wordt gelaten.

Deze relatief geringe diepte heeft tot gevolg, dat de wrijvingskrachten van dezelfde orde van grootte zijn als de traagheidskracht en de kracht van Coriolis. Hierdoor is de vervanging van de niet-lineaire weerstandsterm door een lineaire term, zonder verder rekening te houden met de verschillen tussen de hierop berustende oplossing en de exacte oplossing, in dit gebied minder toelaatbaar.

Het aansluitende noordelijk gelegen deel van de Noordzee heeft grotere diepten en hier zullen de weerstandskrachten van aanmerkelijk geringere betekenis zijn.

De genoemde vereenvoudigingen kunnen niet worden toegepast als men het zeeniveau op een gegeven ogenblik en op een gegeven plaats nauwkeurig wil kennen. Maar door af te zien van lokale gebeurtenissen, veroorloven zij ons desondanks een voldoende duidelijk beeld te verkrijgen van de globale waterbeweging en van de verandering in waterhoogte.

De Noordzee wordt derhalve vaak voorgesteld als een rechthoek met een constante diepte, aan drie zijden omgeven door ondoordringbare kusten en langs de vierde zijde grenzend aan een oneindig diepe oceaan. Een dergelijk „mathematisch model” van de realiteit wordt algemeen door hydrodynamici en oceanografen als zeer bruikbaar beschouwd.

In figuur 1.1.1 zijn de grenzen van het model aangegeven in de bestaande Noordzee. De afmetingen zijn globaal 800 km voor de lengte en ongeveer 400 km voor de breedte. Er werd dus een belangrijk groter gebied beschouwd dan het gebied tussen de Nederlandse en de Engelse kust, waarvan hierboven sprake was. De gemiddelde diepte (harmonisch gemiddelde) werd op 65 m gesteld.

De grenzen van het model bepalen de randvoorwaarden, waardoor de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen nader bepaald worden. Langs de kusten moet de component van de snelheid loodrecht op de kust gelijk aan nul zijn, terwijl bij de overgang naar de oceaan de waterhoogte gelijk is aan die in de oceaan, die als bekend moet worden aangenomen.

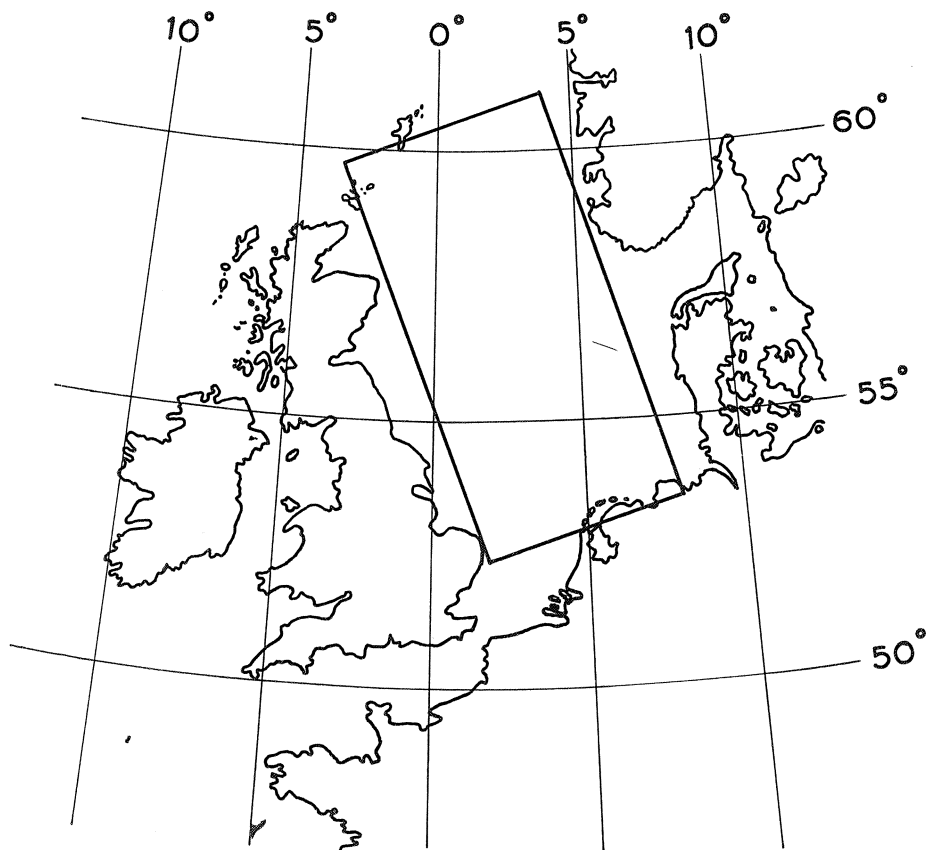
Over dit model moeten nog drie opmerkingen worden gemaakt.

Voor de stormvloedstanden langs de kust is de invloed van het Kanaal, dat als een soort lek werkt, niet onbelangrijk. Over dit onderwerp is o.a. door het Mathematisch Centrum een onderzoek verricht, waarop we hier niet nader ingaan, maar waarvan verwacht mag worden, dat de resultaten in een later stadium gecombineerd zullen worden met het onderzoek over de afgesloten rechthoekige zee.



Aan de gerechtvaardigheid van de veronderstelling van een constante diepte is een onderzoek gewijd, dat in 3.0 is weergegeven. Hoewel dit onderzoek slechts betrekking heeft op de stationaire toestand, welke op de duur bereikt wordt bij een wind, waarvan richting en intensiteit niet met de tijd veranderen, krijgt men hieruit toch wel een goede indruk van de verschillen tussen een zee met constante diepte en een zee, waarvan de diepte bij voorbeeld volgens een exponentiële wet in de richting van de oceaan toeneemt, terwijl ze constant is over de breedte van de strook.

Men zou kunnen overwegen ook de invloed van de aardrotatie te verwaarlozen. Bij herhaling is echter gevonden, dat deze rotatie, welke tot uitdrukking komt in de kracht van Coriolis, in ons probleem niet buiten beschouwing mag worden gelaten. Verwaarlozing is slechts mogelijk in omstandigheden, waarin de kracht van Coriolis zeer gering is, zoals in de tropische gebieden.



Figuur 1.1.1. De Noordzee en het Kanaal

In het algemeen is het fysische beeld van de invloed van de kracht van Coriolis en van de wrijving, die de waterbeweging ondervindt, als volgt. Bij een plotseling opstekende storm zal aanvankelijk de primaire werking van de wind daarin bestaan, dat de beweging van het water in de windrichting versneld wordt. Naarmate de snelheid toeneemt, wordt de invloed van de kracht van Coriolis en van de wrijvingskracht groter. Door de wrijving neemt echter de versnelling af, totdat bij aanhoudende storm een permanente stroom gaat optreden, waarbij de kracht, door de wind uitgeoefend, de weerstandskracht en de kracht van Coriolis met elkaar in evenwicht zijn. Als gevolg van de kracht van Coriolis gaat bovendien op het noordelijke halfrond de stroom naar rechts afwijken. Als de storm gaat liggen, zal na enige tijd de evenwichtstoestand van het begin weer optreden.

Volgens ervaring en in overeenstemming met de resultaten van de berekeningen is nu het verloop van de waterbeweging en de verhoging langs de kusten voor het geval van een storm in de lengterichting van het model van de Noordzee (dus een noordwesterstorm) als volgt.

Bij het begin van de storm zal het water, dat vanuit de oceaan in de Noordzee wordt gestuwd, als gevolg van de afwijking naar rechts aan de Engelse kust de grootste verhoging geven. De verhoging neemt naar het zuiden gaande toe, ze bereikt bij de Nederlandse kust haar grootste waarde in verband met het feit, dat deze kust een deel vormt van de zuidelijke afsluitingslijn van de rechthoek, die loodrecht staat op de windrichting. Na het zwakker worden van de storm stroomt het water als gevolg van de afwijking naar rechts voornamelijk langs de oostelijke zijde van de Noordzee weer terug. De verhoging langs de kusten van de Noordzee verplaatst zich dus achtereenvolgens langs de Engelse, Nederlandse, Duitse en Deense kust, dus tegen de wijzers van een uurwerk in, zoals ook met de stroming het geval is.

Als de storm lang genoeg aanhoudt, zal er een evenwichtstoestand kunnen ontstaan, waarna de waterstanden niet hoger worden. Bij stormen van korte duur wordt uiteraard de evenwichtstoestand niet bereikt. Dan zullen de hoogste waterstanden optreden in de afnemende periode van de storm, dus na het tijdstip van maximale windkrachten.

Vanuit wiskundig gezichtspunt is zelfs met de hiervoren vermelde vereenvoudigingen de behandeling van het probleem van de stormvloed bijzonder moeilijk ten gevolge van de kracht van Coriolis. Het verdere uitgangspunt van de wiskundige behandeling zijn de vergelijkingen, die ontstaan, nadat de bekende Laplace-transformatie op de oorspronkelijke vergelijkingen is toegepast. In de nieuwe vergelijkingen komen geen partiële afgeleiden naar de tijd meer voor, maar wel naar de coördinaten van de plaats; de tijd is geëlimineerd. Na eliminatie van de snelheidscomponenten wordt hieruit voor de verhoging van de waterspiegel een niet-homogene, elliptische partiële differentiaalvergelijking van Helmholtz verkregen. De bekende term, die in deze vergelijking dan voorkomt, wordt bepaald door het windveld. De bij deze vergelijking behorende randvoorwaarden langs de kusten zijn echter van een weinig bekend type, namelijk zg. scheve randvoorwaarden. De randvoorwaarde aan de oceaanzijde is de beter bekende Dirichletvoorwaarde. Het eerstgenoemde type randvoorwaardeprobleem is nog niet in alle volledigheid opgelost. Desalniettemin zijn verscheidene partiële resultaten gevonden, waarvan in hoofdstuk 2.0 een overzicht wordt gegeven. De resultaten, die het belangrijkste zijn voor het Noordzeeprobleem, worden in 3.0 en 4.0 behandeld.

## 1.2 Inhoud van de bijdrage

Aan ieder van de hoofdstukken gaat een inleiding vooraf, waarin een meer gedetailleerde samenvatting van de inhoud en de resultaten van de berekeningen wordt gegeven. Voor nadere informatie wordt hiernaar verwezen.

In 2.0 worden algemene beschouwingen gegeven over het hydrodynamische probleem van de waterbeweging van de Noordzee. Eerst wordt dit probleem met de in 1.1 aangegeven vereenvoudigingen wiskundig geformuleerd. Ook ondanks deze vereenvoudigingen is het vraagstuk niet algemeen oplosbaar voor een willekeurig windveld. Dit kan alleen geschieden voor door één of twee rechten begrensde gebieden, bij voorbeeld het gebied binnen een rechte hoek, dat zich tot in het oneindige uitstrekt. Bij niet van de tijd afhankelijke windvelden (stationaire windvelden) treden zodanige wiskundige vereenvoudigingen op, dat het probleem kan worden opgelost (zie ook 3.0). Tevens wordt in dit hoofdstuk reeds het probleem van de bepaling van de vrije slingeringen van het water in een afgesloten gebied aan de hand van een eenvoudig model aan de orde gesteld. In Bijdrage II.5 wordt hierop uitvoeriger teruggekomen.

De wiskundige behandeling, die in dit hoofdstuk voor het algemene geval wordt aangegeven ter bepaling van de oplossingen van de niet-homogene vergelijking van Helmholtz, berust op de reductie tot het bekende probleem van Green en de nadere bepaling van de functie van Green, die aan de homogene vergelijking van Helmholtz moet voldoen met bepaalde randvoorwaarden. Bij deze methode moeten onder andere singuliere integraalvergelijkingen worden beschouwd. Ten slotte moet de in het begin toegepaste transformatie van Laplace weer ongedaan gemaakt worden.

De oplossing in het geval van het stationaire windveld verloopt op eenvoudiger wijze. Dan behoeft de transformatie van Laplace niet toegepast te worden, terwijl de verhoging moet voldoen aan de bekende niet-homogene differentiaalvergelijking van Laplace met bijbehorende randvoorwaarden. De volledige oplossing bestaat uit de som van een particuliere oplossing van de niet-homogene diffe-

rentiaalvergelijking en de oplossing van de homogene vergelijking, welke beide aan de randvoorwaarden moeten voldoen (zie nader 3.0).

In 3.0 wordt de invloed van een stationair, maar van plaats tot plaats veranderlijk, dus niet-uniform windveld, op het in figuur 1.1.1 aangegeven rechthoekige model van de Noordzee besproken. Voorts wordt verondersteld, dat de diepte in de richting van de oceaan volgens een exponentiële functie toeneemt, maar constant is over de breedte van de strook. Bij de wiskundige behandeling wordt het speciale geval van een lineair windveld beschouwd, waarbij dus de windkrachten in iedere richting van plaats tot plaats lineair veranderen.

Ter vergelijking zijn de berekeningen nog uitgevoerd voor een analoog model en een analoog windveld bij constante diepte van de zee, terwijl ook is nagegaan welke veranderingen in de resultaten optreden als de invloed van de aardrotatie wordt weggelaten.

Als bijzonder windveld wordt nog genoemd het geval, dat een stationaire wind alleen waait in de lengterichting van de rechthoek. Dit windveld is weer niet-uniform en kan dan zelfs een geheel willekeurige functie zijn van de coördinaat in de lengterichting. Dan is bij de stationaire toestand de gemiddelde stroomsnelheid in ieder punt van het gebied gelijk aan nul, zodat de stationaire opwaaiing onafhankelijk is van de weerstand en de aardrotatie. Deze opwaaiing kan met behulp van een eenvoudige formule bepaald worden.

Voor de volledigheid wordt nog opgemerkt, dat het water aan de oppervlakte in voortdurende beweging is, terwijl het aan de bodem in tegengestelde richting beweegt. De totale stroom over de gehele waterkolom is echter gelijk aan nul. In de berekeningen wordt steeds de totale stroom beschouwd.

In 4.0 worden voor het rechthoekige model van de Noordzee windvelden beschouwd, die niet stationair en dus met de tijd veranderlijk zijn. Aanvankelijk geschiedt de wiskundige behandeling voor het algemene windveld (zie ook 2.0), maar later wordt overgegaan op het speciale geval van een wind, die nu uniform en dus op een zelfde tijdstip voor het gehele gebied constant is. Bovendien waait hij in de lengterichting van het Noordzeemodel. De wiskundige behandeling van al deze gevallen berust uiteraard weer op de bepaling van oplossingen van de niet-homogene vergelijking van Helmholtz met randvoorwaarden.

Bij de numerieke toepassing is ter illustratie van de wiskundige methode getracht om voor dit geval zo goed mogelijk aan de fysische gegevens van de Noordzee aan te sluiten. Achtereenvolgens werden beschouwd windvelden, die respectievelijk op exponentiële en sinusoidale wijze van de tijd afhangen.

Behalve het in 2.0 behandelde geval van een voortdurend constante wind in de lengterichting van het model wordt nog beschouwd het zg. sprong-windveld, waarbij vanaf een gegeven tijdstip een constante wind gaat waaien.

Bij al deze gevallen wordt in het bijzonder het verloop van de verhoging in het midden van de zuidkust van de rechthoek beschouwd. Deze zuidkust kan dan worden beschouwd samen te vallen met de Nederlandse kust; het midden ligt ongeveer bij Den Helder.

De praktische resultaten van deze berekeningen bevestigen het verloop van de waterstanden en stromen lang de kusten van de Noordzee, waarvan in 1.1 een fysisch inzicht is gegeven. Uiteraard verschaffen de gevonden resultaten bij dergelijke stormen alleen een globaal inzicht in de waterbeweging van de Noordzee, terwijl de invloed van het getij buiten beschouwing is gelaten.

### 1.3 Auteurs en medewerkers

Hoofdstuk 2.0, waarvan de grote lijnen door D. van Dantzig zijn aangegeven, is voltooid en aangevuld door H. A. Lauwerier met gebruikmaking van twee voordrachten welke D. van Dantzig resp. te Amsterdam [3] en te Saarbrücken [6] over het Noordzeeprobleem heeft gehouden.

Hoofdstuk 3.0 is geschreven door H. A. Lauwerier. Het is een samenvatting van de rapporten TW 57 en TW 58 van het Mathematisch Centrum [20, 21]. De berekeningen zijn uitgevoerd door de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

Hoofdstuk 4.0 is van de hand van H. A. Lauwerier en is een bewerking van een in het Engels geschreven rapport [19]. Bij de numerieke berekeningen en de technische verzorging werd veel hulp ondervonden van de medewerkers van de Rekenafdeling en van de Afdeling voor Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

## 2.0 ALGEMENE BESCHOUWINGEN OVER HET HYDRODYNAMISCHE PROBLEEM VAN DE WATERBEWEGING VAN DE NOORDZEE

### 2.1 Inleiding

In 2.2 wordt het probleem met de bovenbeschreven vereenvoudigingen mathematisch geformuleerd. De snelheid ( $u, v$ ) en de verhoging  $\zeta$  voldoen als functie van de drie variabelen  $x, y$  en  $t$  aan een stelsel van drie lineaire partiële differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2. Met behulp van een Laplace-transformatie (8) van 2.2 kan de tijd geëlimineerd worden. Voor de Laplace-getransformeerde  $\tilde{\zeta}$  van de verhoging  $\zeta$  kan dan een elliptische partiële differentiaalvergelijking van het Helmholtztype worden afgeleid, waarbij het rechterlid van het windveld afhangt. Zie (11) van 2.2. De randvoorwaarde aan de kust, (14) van 2.2, is een lineaire betrekking tussen de tangentiële en de normale afgeleide van  $\tilde{\zeta}$  en wordt wel aangeduid met de benaming van scheve randvoorwaarde. Bij afwezigheid van de aardrotatie is deze randvoorwaarde van het Neumanntype, d.w.z. dat de normale afgeleide wordt voorgeschreven. Het probleem van een elliptische partiële differentiaalvergelijking met een scheve randvoorwaarde is tot dusverre nog maar weinig onderzocht, zodat het nodig was op dit gebied ook enige onderzoekingen van meer fundamenteel wiskundige aard te verrichten.

In 2.3 worden als voorbeeld van een dergelijk onderzoek de verschillende consequenties van de toepassing van de bekende stelling van Green beschouwd. Met behulp hiervan kan de oplossing van het probleem voor een *willekeurig* windveld afgeleid worden uit die voor een zogenaamd *punt-windveld*, dat wil zeggen een functie van Green.

In 2.4 worden voor enkele eenvoudige gebieden de bijbehorende functies van Green bepaald. Dit probleem is in alle wiskundige strengheid slechts oplosbaar gebleken voor door hoogstens twee rechten begrensde gebieden, bij voorbeeld een rechte hoek. Ook in deze paragraaf zijn enkele beschouwingen van meer fundamentele aard opgenomen.

In 2.5 wordt het stationaire geval besproken. Hierbij treden dusdanige wiskundige vereenvoudigingen op, dat het probleem rechtstreeks zonder tussenkomst van een functie van Green kan worden opgelost. In het bijzonder wordt in deze paragraaf een toepassing op het rechthoekige Noordzeemodel gegeven. Verder gaande beschouwingen betreffende dit stationaire probleem vindt men in 3.0.

Ook bij het onderzoek van de vrije bewegingen of gedwongen slingeren treden vereenvoudigingen op. Vooruitlopend op de algemene beschouwingen van de desbetreffende bijdrage<sup>1)</sup> wordt in het begin van 2.6 het probleem van de bepaling van de vrije slingeren en in het bijzonder die van de eigenwaarden aan de hand van een eenvoudig model toegelicht. We keren nu weer terug tot het in de aanvang gestelde probleem. In het algemeen verloopt dus de behandeling hiervan in de volgende fasen. Met een Laplace-transformatie wordt de tijd geëlimineerd. Vervolgens wordt het probleem van Green opgelost. Hieruit kan dus voor een willekeurig windveld met behulp van integraties de Laplace-getransformeerde van de verhoging worden afgeleid.

De laatste fase bestaat uit het ongedaan maken van de Laplace-transformatie. Deze fase geeft doorgaans aanzienlijke moeilijkheden. In de tweede helft van genoemde bijdrage<sup>1)</sup> wordt dit aan de hand van een eenvoudig model nader toegelicht.

Voor verdere details betreffende de inverse Laplace-transformatie zij verwezen naar 4.0, waar in het bijzonder de invloed van een niet-stationair windveld op het rechthoekige Noordzeemodel wordt besproken.

### 2.2 Het mathematische probleem

De gelineariseerde bewegingsvergelijkingen zijn (zie bij voorbeeld [27]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} - \Omega v_z &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega u_z &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1)$$

<sup>1)</sup> Zie Bijdrage II.5.

Integratie van deze vergelijkingen met betrekking tot  $z$  levert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (U_s - U_b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (V_s - V_b), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

waarbij  $u$ ,  $v$  de componenten van de totale stroom zijn, d.w.z. de integraal van de stroom van bodem tot oppervlak<sup>1)</sup>. De grootte van de door de wind op het zee-oppervlak uitgeoefende kracht hangt met de windsnelheid samen volgens de semi-empirische wet (zie bij voorbeeld [26], blz. 135)

$$\sqrt{U_s^2 + V_s^2} = k \rho_a v_s^2, \quad (3)$$

waarbij  $k$  een dimensieloze constante is, waarvoor doorgaans de waarde  $k = 0,0025$  wordt aangenomen. We nemen aan, dat de door de zeebodem uitgeoefende kracht evenredig is met de totale stroom [28, 30]

$$\frac{1}{\rho} U_b = \lambda u, \quad \frac{1}{\rho} V_b = \lambda v, \quad (4)$$

waarbij  $\lambda$  uniform en constant verondersteld wordt.

Stellen we ook nog

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{\rho} U_s - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} \\ V &= \frac{1}{\rho} V_s - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dan gaan de bewegingsvergelijkingen (2) met behulp van (4) en (5) over in de vorm (zie ook [31]):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hieraan kunnen we de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

toevoegen (zie [26], Ch. 2).

Het stelsel (6) en (7) vormt het uitgangspunt voor de verdere onderzoeken. Zoals in 2.1 reeds is besproken, nemen we aan, dat de grootheden  $\lambda$ ,  $\Omega$  en  $gh$  uniform en constant zijn, d.w.z. niet van de plaats en niet van de tijd afhangen.

Een kleine vereenvoudiging kan men nog aanbrengen door de eenheden zodanig te kiezen, dat  $gh = 1$  is. In 4.2 wordt een voorbeeld gegeven van het gebruik van dimensieloze grootheden, waarbij o.a. dezelfde vereenvoudiging wordt bereikt.

We stellen het zeegebied voor door  $D$ , de rand door  $C$ , het kustgedeelte hiervan door  $C_k$ , het oceaangedeelte door  $C_o$ . De randvoorwaarden drukken uit, dat de normale component van de totale stroom langs  $C_k$  nul is en dat de verhoging  $\zeta$  langs  $C_o$  continu is. Zoals in 2.1 besproken, nemen we aan dat het niveau van de oceaan onveranderlijk is, zodat we mogen veronderstellen dat  $\zeta = 0$  is langs  $C_o$ .

We stellen ons voor, dat op een zeker tijdstip  $t = 0$  de zee in rust is. We kunnen dan een Laplace-transformatie uitvoeren volgens:

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \zeta(x, y, t) dt, \quad (8)$$

en analoog voor  $u$ ,  $v$  en  $U$ ,  $V$ .

<sup>1)</sup> Engelse auteurs gebruiken doorgaans de gemiddelde stroom ( $\bar{u}, \bar{v}$ ). Men heeft derhalve  $u = h\bar{u}$  en  $v = h\bar{v}$ .

Het stelsel (6) en (7) gaat daarmee over in

$$\left. \begin{aligned} (p + \lambda) \bar{u} - \Omega \bar{v} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} &= \bar{U} \\ (p + \lambda) \bar{v} + \Omega \bar{u} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} &= \bar{V} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

en

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + p \bar{\xi} = 0. \quad (10)$$

Tot dit stelsel geraakt men ook indien voor (6) en (7) een oplossing gezocht wordt, waarbij de afhankelijk variabelen de tijd slechts in de factor  $e^{pt}$  bevatten. Dit is bij voorbeeld van belang bij het onderzoek naar de invloed van een exponentieel windveld (zie 4.0) of bij het onderzoek van de vrije en gedwongen slingeren <sup>1)</sup>.

Uit (9) en (10) volgt door eliminatie van  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  een inhomogene vergelijking van Helmholtz voor  $\bar{\xi}$

$$(\Delta - \kappa^2) \bar{\xi} = \bar{F}, \quad (11)$$

met

$$\bar{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) + \text{tg } \gamma \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Vaak noemt men  $U_x + V_y$  de divergentie en  $V_x - U_y$  de rotatie van het windveld.

De randvoorwaarden luiden in  $\bar{\xi}$  uitgedrukt

$$\bar{\xi} = 0 \quad \text{langs } C_o, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial n} + \text{tg } \gamma \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s} = \bar{f} \quad \text{langs } C_k, \quad (14)$$

met

$$\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{W}_n + \text{tg } \gamma \bar{W}_s,$$

waarbij  $W_n$  en  $W_s$  respectievelijk de normale component en de tangentiële component van de vector  $(U, V)$  voorstellen. Bij het doorlopen van  $C$  in positieve zin is  $n$  naar buiten gericht.

Voor  $\bar{u}$  en voor  $\bar{v}$  kan men een analoge vergelijking van Helmholtz afleiden. Deze onderscheiden zich van (11) alleen in het rechterlid.

De grootste moeilijkheden worden veroorzaakt door de „scheve” randvoorwaarde (14), dus door de Corioliskracht. Verder vloeien moeilijkheden voort uit de ingewikkelde vorm van  $\kappa$ , die voor  $\Omega = \lambda = 0$  eenvoudig  $p$  zou zijn. Men zou daarom willen proberen een storingsberekening uit te voeren met betrekking tot  $\Omega$ . Dit kan echter alleen voor gebieden, die veel kleiner zijn dan de Noordzee. Ook maakt de Corioliskracht het onmogelijk de beweging van het water ééndimensionaal te maken, zelfs als men de Noordzee beschouwt als een oneindig lang kanaal. Daarvoor is de invloed van de dwarsbeweging te groot.

### 2.3 Reductie tot een probleem van Green

Voor de oplossing van de differentiaalvergelijking (11) van 2.2 met de randvoorwaarden (13) van 2.2 kunnen we in het algemeen gebruik maken van de stelling van Green.

Eenvoudigheidshalve nemen we aan, dat het gebied  $D$  enkelvoudig samenhangend is. We veronderstellen, dat de rand  $C$  stuksgewijs glad is en uit twee delen bestaat,  $C_o$  (oceanbegrenzing) en  $C_k$  (kust), die ieder uit een eindig aantal stukken bestaan. Voor het volgende is noch het constant zijn van  $\kappa$  nodig, noch het stuksgewijs op  $C_k$  constant zijn van  $\tau(s) = \text{tg } \gamma$  van (14) van 2.2. De punten  $(x, y)$ ,  $(x_0, y_0)$  enz. worden kortweg aangeduid met  $P, P_0$ , enz. De afstand  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  tussen twee punten  $P_1, P_2$  wordt aangegeven met  $\rho(P_1, P_2)$ .

<sup>1)</sup> Zie Bijdrage II.5.

We beschouwen nu twee functies  $\varphi$  en  $\psi$ , welke met uitzondering van hoogstens één punt in  $D$  tweemaal continu differentieerbaar en aan de rand stuksgewijze glad zijn. Heeft bijvoorbeeld  $\varphi$  in  $A$  en  $\psi$  in  $B$  een logaritmische singulariteit van het type  $-(2\pi)^{-1} \ln \varrho(P, P_0)$ , dan geldt (zie [1], part B, Ch I):

$$\iint_D \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \kappa^2 \varphi \psi \right) dx dy = \\ - \iint_D \varphi (\Delta - \kappa^2) \psi dx dy - \int_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \varphi(B) \quad (1)$$

Omdat het linkerlid klaarblijkelijk symmetrisch is, vinden we na enige herleiding:

$$\psi(A) = \varphi(B) + \iint_D \psi (\Delta - \kappa^2) \varphi dx dy - \iint_D \varphi (\Delta - \kappa^2) \psi dx dy + \\ + \int_{C_0} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{C_0} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_{C_k} \psi \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} (\tau(s)\varphi) \right\} ds + \\ - \int_{C_k} \varphi \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} ds + \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial s} (\varphi \tau(s)\psi) ds. \quad (2)$$

Is nu  $\psi(P) = \bar{\xi}(P)$  een oplossing van (11), (13) en (14) van 2.2 en  $\varphi(P) = G(P, P_0)$  een willekeurige functie, waarbij dus  $A \equiv P_0$ , en is  $B$  afwezig, dan volgt uit (2), mits  $\varphi\tau\psi$  op  $C$  stuksgewijze glad is:

$$\bar{\xi}(P_0) = - \iint_D G \bar{F} dx dy - \int_{C_k} G \bar{f} ds + \iint_D \bar{\xi} (\Delta - \kappa^2) G dx dy + \\ - \int_{C_0} G \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial n} ds + \int_{C_k} \bar{\xi} \left\{ \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} (\tau(s)G) \right\} ds. \quad (3)$$

We kunnen nu een aantal gevallen onderscheiden.

A. Indien  $G$  een gegeneraliseerde functie van Green is, die dus voldoet aan

a. de homogene differentiaalvergelijking

$$(\Delta - \kappa^2) G = 0 \text{ in } D \quad (4a)$$

b. de oceaanvoorwaarde

$$G = 0 \text{ langs } C_0 \quad (4b)$$

c. de homogene *geadjungeerde* kustvoorwaarde

$$\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} (\tau(s)G) = 0 \text{ langs } C_k \quad (4c)$$

dan volgt uit (3) een expliciete voorstelling van  $\bar{\xi}(P_0)$  door middel van kwadraturen.

B. In het geval echter, dat een functie  $G$  bekend is, die wel voldoet aan de differentiaalvergelijking (4a) en de oceaanvoorwaarde (4b), maar niet aan de kustvoorwaarde (4c), stelt (3) een voor  $P \in C_k$  singuliere integraalvergelijking voor  $\bar{\xi}(P)$  langs de kust  $C_k$  voor.

C. In het geval, dat  $G$  bovendien op een deel van  $C_k$  aan de kustvoorwaarde voldoet, blijft een dergelijke vergelijking over voor de rest van  $C_k$ .

Deze singuliere integraalvergelijkingen kunnen met behulp van bekende methoden [25] door toepassing van de *geadjungeerde* integraaloperator veranderd worden in reguliere, waarna ze volgens klassieke methodes kunnen worden opgelost.

Men kan echter ook direct een reguliere integraalvergelijking krijgen, zij het een tweedimensionale, in het geval dat men een functie  $G = G_0$  kan bepalen, die voldoet aan de beide randvoorwaarden (4b) en (4c) en aan de vergelijking van Laplace  $\Delta G_0 = 0$  in plaats van aan (4a).

Voor het geval dat  $C_0$  (dus ook  $C_k$ ) een samenhangende boog is, heeft LAUWERIER [10] een dergelijke functie  $G_0$  geconstrueerd door middel van een conforme afbeelding van  $D$  op een halfvlak, waarbij  $C_0$  op de negatieve reële as wordt afgebeeld.

Gezien de bij de integraalvergelijkingen optredende complicaties is het van belang die gevallen te beschouwen, waarbij de functie van Green expliciet kan worden bepaald en hetzij met behulp van reeksontwikkelingen, hetzij door integraties kan worden gevonden. Dit nu is gelukt voor een aantal eenvoudige gebieden, welke door rechten en cirkelbogen worden begrensd.

De te bepalen functie van Green zal worden aangegeven met  $G(P, P_0)$ , waarbij de punten  $P$  en  $P_0$  zijn verwisseld. Zowel ten opzichte van  $P$  als ten opzichte van  $P_0$  voldoet zij dan aan de differentiaalvergelijking (4a) en aan de oceaanvoorwaarde (4b). Aan de kustvoorwaarde (4c) voldoet zij slechts wat betreft  $P_0$ , terwijl voor  $P$  de homogene gemaakte voorwaarde (10) telt, of algemener:

$$\frac{\partial G}{\partial n} + \tau(s) \frac{\partial G}{\partial s} = 0 \quad \text{op} \quad C_k \quad (6)$$

De functie  $G(P, P_0)$  is dus *niet* symmetrisch. In het hier beschouwde geval, waarbij  $\tau(s) = \text{tg } \gamma$  langs de kust constant is, verandert zij niet als de punten  $P$  en  $P_0$  worden verwisseld en tegelijkertijd het teken van  $\text{tg } \gamma$ , d.w.z. van  $\Omega$ , wordt omgedraaid.

## 2.4 Bepaling van de functie van Green voor gebieden, die door ten hoogste twee rechten worden begrensd

### 2.4.1 Gebieden, die door één rechte worden begrensd

Een belangrijke bijdrage tot de theorie van het probleem van Green van de differentiaalvergelijking

$$(\Delta - \kappa^2) G = 0 \quad (1)$$

met homogene scheve randvoorwaarden (verg. (14) van 2.2) werd door VELTKAMP geleverd in een kort intern rapport van het Mathematisch Centrum. De grondgedachten zijn als volgt.

De functie van Green  $G(P, P_0)$ , die in het gehele vlak voldoet aan de vergelijking (1), in het gegeven punt  $P_0(x_0, y_0)$  een logaritmische singulariteit bezit en die in het oneindige verdwijnt, wordt gegeven door de Besselfunctie

$$\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa \rho \text{ch } u} du \quad (2)$$

Deze singulariteit zullen we, in aansluiting aan de theorie van de harmonische functies, een *pool* (in  $P_0$ ) noemen. Door differentiatie in een gegeven richting naar de coördinaten van het punt  $P_0$  ontstaat een *dipool*, door tweevoudige richtingsdifferentiatie een *quadrupool*, door  $k$ -voudige richtingsdifferentiatie een  $2^k$ -pool. We beschouwen nu de richtingsdifferentiaaloperator

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad (3)$$

De operatoren  $D_\alpha$  zijn voor alle waarden van  $\alpha$  commutatief. Men ziet gemakkelijk in dat zij, als we ze alleen toepassen op de oplossingen van de vergelijking

$$(\Delta - \kappa^2) w = 0$$

voldoen aan de identiteit

$$D_{\alpha-\gamma} D_\beta - D_{\beta-\gamma} D_\alpha = \kappa^2 \sin(\alpha-\beta) \sin \gamma, \quad (4)$$

of ook aan

$$D_{\alpha+\beta} D_{\alpha-\beta} = D_\alpha^2 - \kappa^2 \sin^2 \beta. \quad (5)$$

Voor  $\kappa = 0$  is  $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_k} = D_\alpha^k$ , waarbij  $\alpha = k^{-1} \sum_1^k \alpha_i$ , zodat voor elke  $k$  slechts *een enkele* soort harmonische  $2^k$ -polen bestaat. Voor  $\kappa \neq 0$  is dit echter niet meer het geval. Ten gevolge van (4) wordt langs de  $x$ -as aan de scheve randvoorwaarde  $D_\beta f = 0$  voldaan, indien  $f = D_{-\beta} g$  en als  $g$  als functie van  $y$  oneven is. Dan is nl.  $g = 0$  voor  $y = 0$ , zodat ook  $D_0^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$  langs de  $x$ -as, of volgens (4) eveneens  $D_\beta D_{-\beta} g = 0$ .



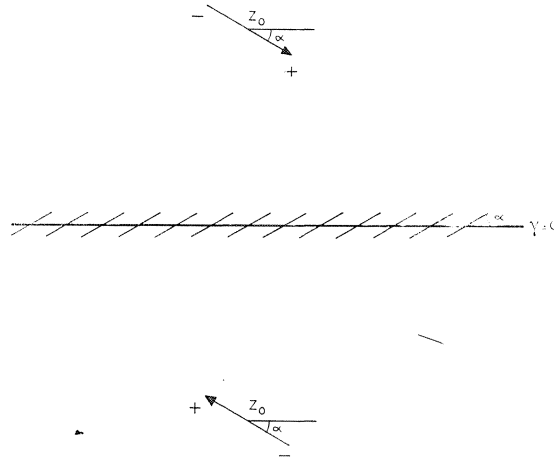
Ten einde een functie van Green voor (1) te vinden in het halve vlak  $y > 0$  met een pool  $P_0(x_0, y_0)$  die voldoet aan de randvoorwaarde

$$D_\alpha G = 0 \quad \text{voor } y = 0 \tag{6}$$

stellen wij  $\rho^* = \{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$  en  $2\pi g = K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa\rho^*)$ . Dan is  $g$  oneven in  $y$ ; en dus voldoet

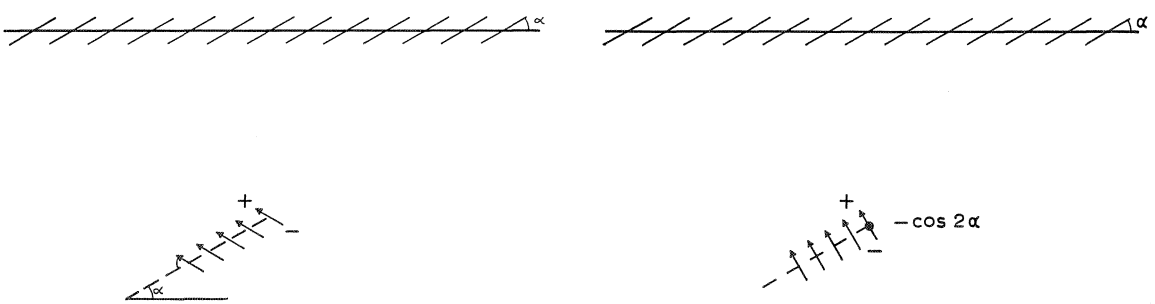
$$w = \frac{1}{2\pi} D_{-\alpha} (K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa\rho^*)) \tag{7}$$

zowel aan (1) als aan (6). Deze oplossing bestaat uit twee tegengesteld gerichte evenwijdige dipolen in de spiegelpunten  $P_0$  en  $P_0^*(x_0, -y_0)$ , waarvan de richting ten opzichte van  $\alpha$  gespiegeld is (zie figuur 2.4.1).



Figuur 2.4.1. Twee tegengesteld gerichte, evenwijdige dipolen

Aangezien deze oplossing voor *elke* pool  $P_0$  voldoet aan de voorwaarde (6), mogen we  $P_0$  voor alle  $t > 0$  vervangen door  $P_0^*(x_0 - t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$  en met betrekking tot  $t$  integreren. Dan verandert de dipool in  $P_0$  in een bron en tevens verandert de dipool in  $P_0^*$  in een halve rechte in de richting  $\alpha$ , die gelijkmatig belegd is met identieke en parallelle dipolen. Worden deze dipolen ontbonden in componenten, loodrecht op en evenwijdig aan deze halve rechten, dan is de sterkte van eerstgenoemde componenten  $\sin 2\alpha$ , terwijl laatstgenoemde componenten reduceren tot een enkele bron in  $P_0^*$  met een sterkte  $-\cos 2\alpha$  (figuren 2.4.2 en 2.4.3).



Figuur 2.4.2. Pool en dipoolstaart

Figuur 2.4.3. Pool en ontbonden dipoolstaart

De analytische vorm van deze oplossing wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}(t + i\alpha)}{\text{sh}(t - i\alpha)} e^{-\kappa(y+y_0) \text{ch } t - i\kappa(x-x_0) \text{sh } t} dt, \\
 \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa|y-y_0| \text{ch } t - i\kappa(x-x_0) \text{sh } t} dt
 \end{aligned} \tag{8}$$

Dit resultaat werd langs enigszins andere weg eveneens afgeleid door LAUWERIER [10].

2.4.2 Gebieden, die door twee evenwijdige rechten worden begrensd

Met behulp van de in 2.4.1 gevonden oplossing kan nu ook de functie van Green worden gevonden voor een (naar beide zijden oneindig lange) parallele strook [10]. Voor de strook  $|x| < a$  (een oneindig lang kanaal), waarbij

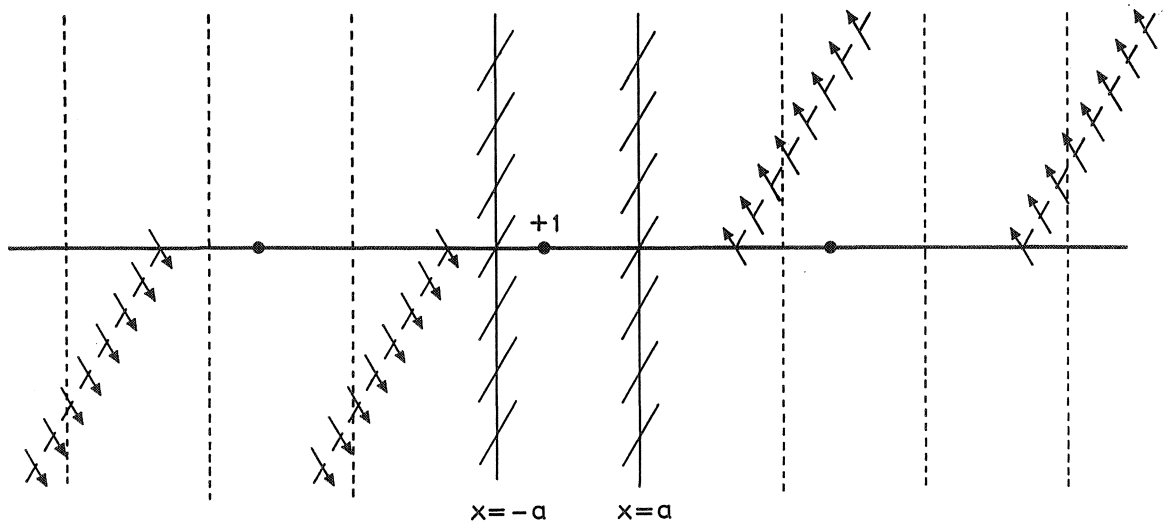
$$\frac{\partial G}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial G}{\partial y} \sin \gamma = 0 \quad \text{voor } x = \pm a$$

wordt

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\kappa(2a+x_0-x) \text{ch } \eta} + e^{-\kappa(2a-x_0+x) \text{ch } \eta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\text{ch}(\eta + i\gamma)}{\text{ch}(\eta - i\gamma)} e^{\kappa(x+x_0) \text{ch } \eta} + \frac{\text{ch}(\eta - i\gamma)}{\text{ch}(\eta + i\gamma)} e^{-\kappa(x+x_0) \text{ch } \eta} \right\} \frac{e^{-i\kappa(y-y_0) \text{sh } \eta}}{\text{sh}(2\kappa a \text{ ch } \eta)} d\eta, \tag{9}
 \end{aligned}$$

waarvoor we ook kunnen schrijven (zie figuur 2.4.4):

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa(y-y_0) \text{sh } \eta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|x - (-1)^n x_0 - 2na| \kappa \text{ ch } \eta} \frac{\text{ch}(\eta + i(-1)^n \gamma \text{sgn } n)}{\text{ch}(\eta + i\gamma \text{sgn } n)} \right\} d\eta \tag{10}$$

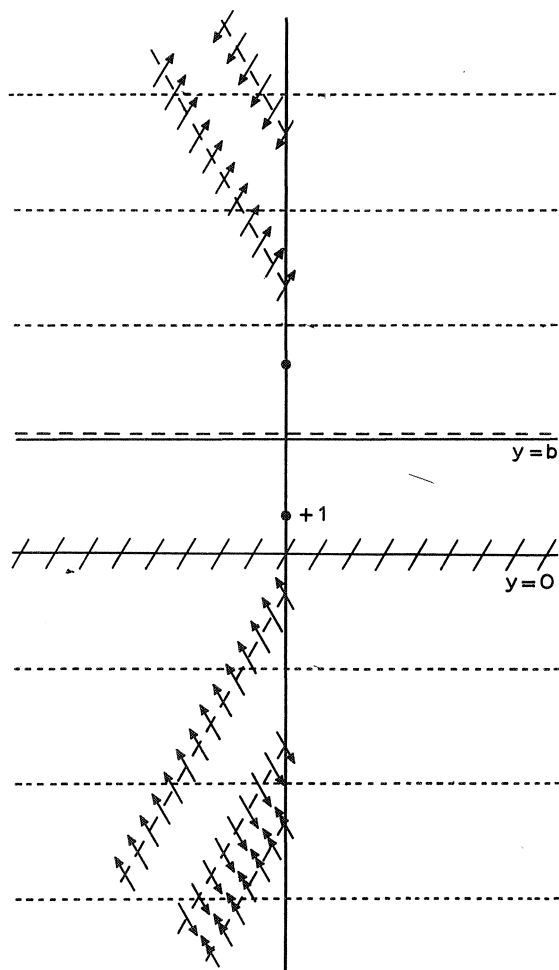


Figuur 2.4.4. Dipoolspiegeling bij twee evenwijdige kusten

De factoren  $\text{ch}(\eta \mp i\gamma)/\text{ch}(\eta \pm i\gamma)$  veranderen een bron in een „dipoolstaart”. Voor de strook  $0 < y < b$  met  $D_\alpha G = 0$  voor  $y = 0$  en  $G = 0$  voor  $y = b$ , zodat  $y = 0$  een kust ( $\alpha = \frac{1}{2} \pi + \gamma$ ) en  $y = b$  de grens met een oceaan voorstelt, vindt LAUWERIER de oplossing:

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho) - \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \rho^*) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}(\kappa(y-a) \text{ch } \eta) \text{sh}(\kappa(y_0-a) \text{ch } \eta)}{1 + \frac{\text{sh}(\eta - i\gamma)}{\text{sh}(\eta + i\gamma)} e^{2\kappa a \text{ch } \eta}} e^{-i\kappa(x-x_0) \text{sh } \eta} d\eta \quad (11)$$

die in figuur 2.4.5 is geschetst.



Figuur 2.4.5. Dipoolspiegeling bij kust en daaraan evenwijdige oceaandr

### 2.4.3 Hoekvormige gebieden

Het probleem wordt essentieel moeilijker in het eenvoudigste geval, dat een hoekpunt in de rand aanwezig is, in het bijzonder in het geval, waarin  $D$  een hoekgebied is, bijv. in poolcoördinaten, gegeven door  $r > 0$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ . We zullen in dat geval de oplossingen van de vergelijking (1) beschouwen en in het bijzonder de functie van Green, welke voldoet aan de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{voor} \quad \varphi = \varphi_1 \\ r \frac{\partial G}{\partial r} - \cotg \gamma_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{voor} \quad \varphi = \varphi_2 \end{aligned} \right\} (12)$$

hoewel we eigenlijk alleen de gevallen  $\gamma_1 = \gamma_2$  (twee kusten) en  $\cotg \gamma_1 = 0$  of  $\cotg \gamma_2 = 0$  (één kust en een oceaandr, in het laatste geval met de nevenvoorwaarde dat daar  $w = 0$  moet zijn) nodig hebben.

Reeds in 1956 heeft VELTKAMP [36] het gedrag onderzocht van een voor  $r \rightarrow 0$  eindig blijvende functie  $w$  in de omgeving van een hoekpunt, die in  $D$  is gedefinieerd en die hetzij voldoet aan de potentiaalvergelijking  $\Delta w = 0$  (of algemener aan  $\Delta w = O(r^{-2})$  voor  $r \rightarrow 0$ ) en aan de randvoorwaarden (12) met  $w$  in plaats van  $G$  (voor het geval dat  $\gamma_1 = \gamma_2$  moet  $r^{-2}$  vervangen worden door  $r^{-2+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ ), of die voor  $\varkappa \neq 0$  voldoet aan de bijzondere randvoorwaarden (12) met  $\gamma_1 = \gamma_2$  of  $\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$ . Daar het nodig bleek vele gevallen te onderscheiden, was er weinig hoop langs deze weg verder te komen door beschouwing van hogere benaderingen.

Kort geleden zijn VAN DANTZIG [5] en LAUWERIER [17], onafhankelijk van elkaar, er in geslaagd het hoekprobleem volledig op te lossen. De methode van VAN DANTZIG berust in wezen op de oplossing van een functionaalvergelijking en zal hieronder worden geschetst. De methode van LAUWERIER berust op de oplossing van een gegeneraliseerd Hilbertprobleem.

Bij de eerste methode stelt men

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa r \operatorname{sh} u} \{g_1(u + i\varphi) + g_2(-u + i\varphi)\} du, \quad (13)$$

waarbij  $g_1(w)$  en  $g_2(w)$  analytische functies van  $w$  zijn, welke in de twee stroken  $\varphi_1 < \operatorname{Im} w < \varphi_0$  en  $\varphi_0 < \operatorname{Im} w < \varphi_2$  holomorf zijn en op de rechte  $\operatorname{Im} w = \varphi_0$  een door de logaritmische singulariteit in  $(r_0, \varphi_0)$  bepaalde discontinuïteit bezitten. Toepassing van de randvoorwaarden (12) levert voor  $g_1$  en  $g_2$  de functionaalvergelijkingen

$$\operatorname{ch}(u - i\gamma_j) g_1(u + i\varphi_j) = \operatorname{ch}(u + i\gamma_j) g_2(-u + i\varphi_j) \quad (14)$$

voor  $j = 1$  en  $j = 2$ .

Dit stelsel heeft de particuliere oplossing

$$g_1(w) = g_2(w) = \Phi(w), \quad (15)$$

waarbij  $\Phi(w)$  een in het gehele vlak meromorfe functie is, te weten

$$\Phi(w) = e(w - i\varphi_1, \gamma_2) / e(w - i\varphi_2, \gamma_1), \quad (16)$$

waarin  $e(w, \gamma)$  voor  $|\operatorname{Im} w| < \theta + \frac{1}{2}\pi - |\gamma|$  door

$$e(w, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos wt}{t} \frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi t \operatorname{sh} \theta t} dt \quad (17)$$

met

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2 - \varphi_1 \quad (18)$$

gedefinieerd is en in het gehele vlak meromorf is.

Substitutie van (15) in (13) levert een oplossing van (1) en (2) welke, eventueel met uitzondering van  $r = 0$ , regulier is. Deze oplossing is nader bestudeerd door LAUWERIER [17]. Het blijkt, dat er slechts voor  $-\frac{1}{2}\pi \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq \frac{1}{2}\pi$  een oplossing bestaat, welke in  $r = 0$  regulier is.

Met behulp van de functie  $\Phi(w)$  kan het probleem van Green gemakkelijk worden opgelost. Het heeft voordeel de gevallen  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  en  $\gamma_1 > \gamma_2$  apart te beschouwen. In het eerste geval stellen we

$$g_1(w) = g_2(w) = P(w) \Phi(w). \quad (19)$$

De functie  $P(u)$  voldoet krachtens (14) aan de eenvoudiger functionaalvergelijkingen

$$P(i\varphi_j - u) = P(i\varphi_j + u) \quad (20)$$

en maakt een bekende sprong op de rechte  $\operatorname{Im} w = \varphi_0$ . Met behulp van de formules van Plemelj kan  $P(w)$  bepaald worden. Het resultaat is ten slotte:

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa s \operatorname{sh} u) \sin(\kappa r_0 \operatorname{sh} u_0) \frac{\Phi(u + i\varphi)}{\Phi(u_0 + i\varphi_0)} \cdot \frac{\operatorname{sh} v(u_0 + i\varphi_0)}{\operatorname{ch} v(u_0 + i\varphi_0) - \operatorname{ch} v(u + i\varphi)} du du_0, \quad (21)$$

waarbij

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \pi/\theta.$$

In het tweede geval stellen we

$$g_1(w) = -g_2(w) = i g(w), \quad (22)$$

waarna op analoge wijze het volgende resultaat wordt verkregen:

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda r \operatorname{sh} u) \cos(\lambda r_0 \operatorname{sh} u_0) \frac{\Phi(u + i\varphi)}{\Phi(u_0 + i\varphi_0)} \cdot \frac{\operatorname{sh} v(u + i\varphi)}{\operatorname{ch} v(u + i\varphi) - \operatorname{ch} v(u_0 + i\varphi_0)} du du_0. \quad (23)$$

De oplossing (21) is de enige, welke eindig blijkt in  $r = 0$ . Aan de oplossing (23) kan nog een overal in  $D$  reguliere oplossing worden toegevoegd. De oplossing (23) is de enige, welke voor  $r = 0$  verdwijnt.

LAUWERIER [17] vindt voor  $G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$  een andere uitdrukking, welke in verband met het in de aanvang van dit hoofdstuk besproken spiegelingprincipe een interessante interpretatie toelaat. Het blijkt namelijk, dat bij herhaalde spiegelingen polen met een toenemend aantal dipoolstaarten geïnduceerd worden. Voor bijzonderheden zij verwezen naar de desbetreffende publikatie.

## 2.5 Het stationaire geval

Het stationaire geval is onderzocht door SCHALKWIJK [30] voor een uniform windveld, terwijl het geval van een op delen van de Noordzee uniforme wind onderzocht is door WEENINK [37]. Dit laatste onderzoek is daarna uitgebreid door VELTKAMP [34].

De grondvergelijkingen voor het stationaire geval luiden als volgt:

$$\left. \begin{aligned} \lambda u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \lambda v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Aangezien een tweedimensionaal vectorveld  $(U, V)$  altijd kan worden beschreven met behulp van twee potentialen  $P$  en  $Q$ , die resp. het divergentievrije deel en het rotatievrije deel bepalen,

$$U = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad V = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (2)$$

kan de oplossing in het geval van een afgesloten zee worden verkregen uit een complexe analytische functie  $L$  van  $z = x + iy$ . We vinden

$$\zeta = \operatorname{Re} \left( \frac{\Omega}{\lambda} + i \right) (L + P + iQ), \quad (3)$$

waarbij  $L$  voldoen moet aan de randvoorwaarde

$$P + \operatorname{Re} L = \text{constant} \quad (4)$$

langs de begrenzing  $C_k$ . Er zijn berekeningen uitgevoerd voor enkele circulaire windvelden boven een oceaan, die door een halfvlak wordt voorgesteld. In het geval van een zee met op delen constante diepte, vindt VELTKAMP [34], dat  $L$  vervangen moet worden door een op delen holomorfe functie en dat de formules van Plemelj aanleiding geven tot een singuliere integraalvergelijking langs de lijn, waar de diepte discontinu is. Indien een ondiepe baai (de Noordzee) grenst aan een oceaan (de Atlantische Oceaan) met een grote, doch eindige diepte, kan een iteratieproces worden toegepast, waarin de verhouding van de twee diepten wordt gebruikt.

Bij een rechthoekige baai, welke ongeveer twee maal zo lang als breed is, hetgeen ruwweg overeenkomt met de vorm van de Noordzee, is de functie welke de rechthoek op een halfvlak afbeeldt, een bijna ontaarde elliptische functie. Indien  $P$  en  $Q$  zodanig worden gekozen dat  $P = 0$  op  $C_k$ , hetgeen altijd mogelijk is, blijkt de functie  $L(z)$  bij de „zuidkust” bijna constant te zijn, namelijk

$$L \sim \frac{1}{2}i \cos \mu\pi \int_0^a \cotg^{2\mu} \frac{\pi t}{2a} \operatorname{sgn} (t - \frac{1}{2}a) V(t, b) dt, \quad (5)$$

waarin

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\lambda}. \quad (6)$$

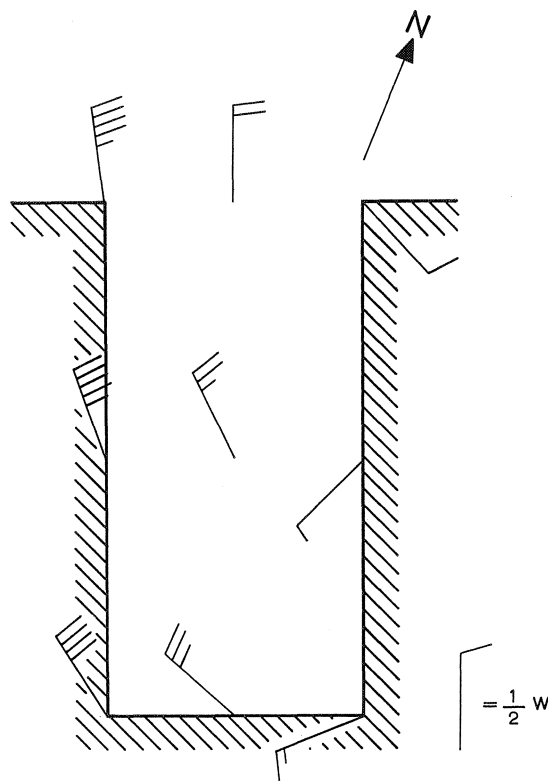
Met behulp hiervan kan  $\zeta$  berekend worden in het midden  $(\frac{1}{2}a, 0)$  van de zuidkust. Voor enkele typen windvelden zijn numerieke berekeningen uitgevoerd door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

In het geval van een lineair windveld (zie ook 3.1)

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{4} W \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + W \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ V &= -W - \frac{5}{4} W \left(1 - \frac{2x}{a}\right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

met  $b = 2a$ , zoals geschetst is in figuur 2.5.1, wordt

$$gh \zeta = 1,20 bW. \quad (8)$$



Figuur 2.5.1. Lineair windveld boven een rechthoekige zee

Bij het homogene windveld

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} W \\ V &= -W \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

is daarentegen

$$gh \zeta = 1,105 bW, \quad (10)$$

terwijl bij het veld

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -W \end{aligned} \right\} (11)$$

geldt

$$gh \zeta = bW. \quad (12)$$

We zien hieruit, dat de dwarscomponent  $U = \frac{1}{2} W$  de verhoging van het zeeniveau in het punt  $(\frac{1}{2} a, 0)$  ongeveer  $10\frac{1}{2} \%$  vergroot en dat de niet-homogeniteit daar nog eens ongeveer  $9\frac{1}{2} \%$  aan toevoegt.

LAUWERIER heeft, voortbouwend op het werk van VELTKAMP en WEENINK bij het stationaire probleem ook de invloed van een niet-uniforme diepte bestudeerd. In het bijzonder beschouwt hij het geval van een exponentiële toeneming van de diepte in de richting van de oceaan:

$$h = h_0 \exp 2\alpha y. \quad (13)$$

Hierbij heeft hij soortgelijke numerieke resultaten als hierboven afgeleid. Zijn resultaten zijn weergegeven in 3.0.

## 2.6 Het niet-stationaire geval

### 2.6.1 Vrije bewegingen

Het is in de eerste plaats van belang de vrije bewegingen van het zeegebied te kennen. Een beweging, waarbij  $u$ ,  $v$  en  $\zeta$  van de vorm

$$u = \bar{u}(x, y) e^{i\omega t}, \quad v = \bar{v}(x, y) e^{i\omega t}, \quad \zeta = \bar{\zeta}(x, y) e^{i\omega t}, \quad (1)$$

zijn, is bepaald door het stelsel van 2.2, waarbij  $\bar{U} = \bar{V} = 0$  en  $p = i\omega$ . De amplitudefunctie  $\bar{\zeta}$  van de verhoging voldoet dus aan een homogene Helmholtzvergelijking. Uit (11), (13) en (14) van 2.2 volgt:

$$(\Delta - \kappa^2) \bar{\zeta} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \frac{\Omega}{\lambda + i\omega} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} = 0 \quad \text{langs } C_k \quad (3)$$

en

$$\bar{\zeta} = 0 \quad \text{langs } C_o \quad (4)$$

Slechts voor enkele zeer eenvoudige gebieden is het gelukt de vrije bewegingen expliciet te bepalen. Voor een cirkelvormig meer kan de oplossing gemakkelijk verkregen worden (zie [9] Ch 8, art. 209). Het geval van een zich naar beide zijden in het oneindige uitstrekkende strook, welke door een kust en een oceaan begrensd wordt, is behandeld door LAUWERIER [14]. In dat geval kunnen we voor  $C_k$  de  $x$ -as nemen en voor  $C_o$  de rechte  $y = b$ . Men ziet gemakkelijk in, dat  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  en  $\bar{\zeta}$  niet van  $x$  afhangen, zodat (2), (3) en (4) zich vereenvoudigen tot:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \kappa^2 \right) \bar{\zeta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dy} = 0 \quad \text{voor } y = 0 \quad (6)$$

en

$$\bar{\zeta} = 0 \quad \text{voor } y = b. \quad (7)$$

De vrije bewegingen, welke hierdoor bepaald zijn, hebben de vorm

$$\zeta(y, t) = e^{i\omega t} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b}, \quad (8)$$

waarbij  $n = 0, 1, 2, \dots$ . De eigenwaarde  $\omega$  volgt uit de betrekking

$$\kappa^2 = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{b^2} \quad (9)$$

hetgeen een vergelijking van de derde graad in  $\omega$  is. Men vindt zo voor elke waarde van  $n$  in het algemeen één negatief reële wortel en twee toegevoegd complexe wortels met een negatief reëel deel. Indien echter de wrijvingsterm  $\lambda$  afwezig is, is (9) slechts van de tweede graad in  $\omega$ . In dat geval is de aperiodieke demping afwezig en is de vrije beweging een zuivere slingering waarbij  $|\omega| > \Omega$ . Ondanks zijn eenvoud vertoont dit model al enige karakteristieke elementen van het rechthoekige Noordzeemodel. LAUWERIER [15] heeft ook het model van een half-oneindige strook, welke aan drie zijden door kusten wordt begrensd, behandeld. Ook hier blijken de vrije bewegingen uiteen te vallen in aperiodiek gedempte en periodiek gedempte. Het rechthoekige model wordt in Bijdrage II.5 behandeld. Ten slotte heeft HOF-SOMMER [8] nog het model beschouwd van een halve cirkel, waarvan het cirkeldeel een kust en het rechte deel een oceaandrandsrand is.

### 2.6.2 Gedwongen bewegingen

Vervolgens beschouwen we de gedwongen beweging van de zee onder invloed van een gegeven windveld. De grootste moeilijkheid bij dit probleem bestaat in de uitvoering van de inverse Laplace-transformatie. Dit wordt o.a. reeds gedemonstreerd in het model van een zich naar alle zijden tot in het oneindige uitstreckende zee [12]. In dit geval is de oplossing van het probleem van Green in overeenstemming met (2) van 2.4

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}), \quad (10)$$

zodat volgens (3) van 2.3 de oplossing van (11) van 2.2 gegeven wordt door

$$\xi(x, y, p) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} K_0(\kappa \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) \bar{F}(x_0, y_0, p) dx_0 dy_0. \quad (11)$$

De inversie van de factor  $K_0(\kappa r)$ , waarbij  $r$  de afstand tussen  $(x, y)$  en  $(x_0, y_0)$  aanduidt, wordt bemoeilijkt door de gecompliceerde vorm van  $\kappa$ . In het eenvoudigste geval, als zowel de wrijving  $\lambda$  als de coëfficiënt van Coriolis  $\Omega$  nul is, is  $\kappa = p$  en vindt men voor de inverse

$$K_0(\kappa r) \doteq (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \iota(t-r), \quad (12)$$

waarbij

$$\iota(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$$

Indien de wrijving wel in aanmerking wordt genomen is

$$K_0(\kappa r) \doteq e^{-\frac{1}{2}\lambda t} (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ch} \left( \frac{1}{2} \lambda \sqrt{t^2 - r^2} \right) \iota(t-r) \quad (13)$$

en ten slotte is in het algemene geval:

$$K_0(\kappa r) \doteq \left\{ \frac{\text{ch} \frac{1}{2} \lambda \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} e^{-\frac{1}{2}\lambda t} - \frac{1}{2} \Omega e^{-\lambda t} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} J_1(\Omega (t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi) \cdot \exp \frac{\frac{1}{2} \lambda r^2}{t + (t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi} d\varphi \right\} \iota(t-r). \quad (14)$$

Het produkt van de factor  $K_0(\kappa r)$  met  $\bar{F}(x_0, y_0, p)$  kan nu met behulp van het convolutie-theorema geïnverteerd worden. In [12] worden in het bijzonder een aantal gevallen beschouwd, waarbij de uitdrukking voor  $\bar{F}$  equivalent is met een puntbron in de oorsprong, en waarbij de afhankelijkheid van de tijd het karakter van een sprongfunctie  $\iota(t)$  heeft. We noemen o.a.

- geen wind, een rotatie-symmetrisch drukveld;
- een rotatie-symmetrisch wervelvrij veld;
- een rotatie-symmetrisch wervelveld;
- een dipoolveld met constante richting;
- een willekeurig windveld van constante richting, dat, afgezien van een willekeurige tijdafhankelijke factor, een van de tijd onafhankelijk rotatie-symmetrische, maar overigens willekeurige verdeling heeft.



In een vroegere publikatie heeft LAUWERIER [11] het geval onderzocht van een op een halfvlak werkend uniform windveld, dat door een factor  $X(t) = m^2 t e^{-mt}$  ( $t > 0$ ) van de tijd afhangt. Voor kleine waarden van  $t$  stijgt deze functie, bereikt daarna een maximum en neemt ten slotte weer af. De verhoging  $\zeta$  aan de kust kan met elementaire middelen worden berekend en wordt gevonden uit de convolutie van de twee volgende functies

$$\varphi(t) = \sin \alpha X(t) - \Omega \cos \alpha \int_0^t e^{-\lambda \tau} X(t - \tau) d\tau \quad (15)$$

en

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t} I_0(\frac{1}{2}\lambda t) - \Omega e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda \tau} J_1(\Omega \tau) I_0(\frac{1}{2}\lambda(t - \tau)) d\tau. \quad (16)$$

Voor dit geval zijn numerieke berekeningen uitgevoerd, waaruit een goed overzicht wordt verkregen over de manier waarop de verhoging  $\zeta$  afhangt van de hoek  $\alpha$  tussen het windveld en de kust. Het blijkt, dat de maximale verhoging maximaal wordt voor ongeveer  $\alpha = 170^\circ$ , zodat de verhoging aan de kust veel sterker afhangt van een wind, die evenwijdig aan de kust is, dan van een loodrecht invallende wind, een feit, dat van te voren wel duidelijk was. Nadat  $\zeta$  maximaal is geworden, dempt deze functie langzaam met zwakke oscillaties uit; de periode van deze oscillaties is ongeveer  $2\pi/\Omega$ , hetgeen analytisch correspondeert met de singulariteiten van de Laplace-getransformeerde bij  $-\lambda + i\Omega$ . Het maximum van de verhoging komt veel later dan het maximum van het windveld. De grootte van het maximum van de verhoging hangt slechts weinig af van  $\Omega$ , doch zeer sterk van  $\alpha$ .

In de in de aanvang van deze paragraaf genoemde publikatie [14] is ook de invloed van enige eenvoudige uniforme windvelden op de verhoging aan de kust bestudeerd. Zowel voor een sprong-windveld van het type  $X(t) = \iota(t)$  als voor een sprong-sinuswindveld  $X(t) = \sin \omega t \iota(t)$  is een aantal expliciete resultaten afgeleid. Daar soortgelijke beschouwingen voor het *rechthoekige* Noordzeemodel in 4.0 gegeven zijn, zien wij er hier van af nader op details in te gaan.

Ten slotte willen we nog enkele opmerkingen maken betreffende het in 2.4.3 besproken hoek-probleem.

Het is bekend, dat de Noordzee in ruwe benadering de gedaante van een rechthoek heeft. Voor de Nederlandse kust zullen echter bij de meest voorkomende stormen noch de oostkust (Duitse Bocht, Denemarken, Kattegat, Noorwegen), noch de noordelijke rand (overgang naar de Atlantische Oceaan) een grote invloed hebben. Het model van een rechte hoek is dus niet zo erg slecht, vooral daar de invloed van een mathematische put (die de invloed van het Kanaal weergeeft, waarin de kracht van Coriolis wegens de kleine afmetingen kan worden verwaarloosd) reeds uitvoerig door LAUWERIER [13] is onderzocht.

Een depressie, welke zich over de Noordzee beweegt, wordt weergegeven door een verdeling van polen, die vrij dicht bij elkaar liggen langs de baan van het centrum van de depressie. Daarnaast hebben we de polen, die ontstaan door reflectie aan de kust en de daarmee samenhangende dipoolstaarten, die eveneens in beschouwing genomen moeten worden en die hier in de functies  $\Phi$  voorkomen. De meeste moeilijkheden geeft de Laplace-inversie van de factoren  $\Phi$ . Wegens de damping zullen de herhaalde reflecties nauwelijks meer bijdragen, tenzij het centrum van de depressie het singuliere hoekpunt rakelings voorbijtrekt. Dit zal slechts zelden gebeuren, maar kan toch niet geheel worden uitgesloten. De reflecties aan de Schotse en Engelse kust zullen waarschijnlijk wel niet verwaarloosd kunnen worden, in het bijzonder niet als de depressie zich tamelijk dicht onder deze kust en parallel er aan naar het zuiden beweegt of als dicht bij deze kust een sterke barometrische gradiënt bestaat. Beide verschijnselen traden bij de storm van 31 januari/1 februari 1953 in sterke mate op.

### 3.0 DE INVLOED VAN ENKELE STATIONAIRE, NIET-UNIFORME WINDVELDEN OP EEN NOORDZEEMODEL

#### 3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk onderzoeken we de invloed van een niet-uniform stationair windveld op het in 1.1 besproken rechthoekige model van de Noordzee. In Cartesische coördinaten  $(x, y)$  is dit model

bepaald door  $0 < x < a$  en  $0 < y < b$ , waarbij  $x = 0$ ,  $x = a$  en  $y = 0$  kusten zijn en  $y = b$  de overgang tot de oceaan voorstelt.

In overeenstemming met het feit, dat bij de Noordzee de diepte in de richting van de oceaan sterk toeneemt, kiezen we in het hier te beschouwen mathematische model van de diepte  $h$  een exponentiële functie van  $y$ , namelijk:

$$h = h_0 e^{2\alpha y}. \quad (1)$$

We beschouwen in het bijzonder de invloed van een lineair windveld. Hieronder verstaan we een windveld, waarbij de schuifspanning ( $U$ ,  $V$ ) een lineaire functie van  $x$  en  $y$  is, te weten:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + U_2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ V &= V_0 + V_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + V_2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

We denken het model gemakshalve noord-zuid gericht, zodat we bij voorbeeld  $y = 0$  de zuidkust kunnen noemen. In werkelijkheid maakt de lengte-as van de Noordzee een hoek van ongeveer  $24^\circ$  met de geografische noord-zuid-richting. Aangezien het midden van de zuidkust ruwweg overeenkomt met de positie van Den Helder, hebben we ons in hoofdzaak bepaald tot de berekening van de verhoging aan de zuidkust,  $\zeta(x, 0)$ , en in het bijzonder tot die van het midden daarvan,  $\zeta(\frac{1}{2}a, 0)$ .

Bij de numerieke toepassing trachten we het mathematische model zo goed mogelijk aan de omstandigheden van de Noordzee aan te passen. Daartoe kiezen we de volgende getallenwaarden:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ km} \\ b &= 800 \text{ km} \\ \Omega/\lambda &= 5 \\ h_m^* &= 65 \text{ m} \\ \sqrt{g h_m} &= 91 \text{ km/h} \\ \alpha &= \pi/4b \end{aligned}$$

Hierbij stelt  $h_m$  het harmonisch gemiddelde van de diepte voor. Volgens (1) neemt dan de diepte toe van 33 m aan de zuidkust tot ongeveer 158 m bij de oceaan (zie figuur 3.1.1). De resultaten van de berekeningen vindt men in tabel 3.8.5.

In figuur 3.8.1 is met behulp hiervan voor elke component afzonderlijk de verhoging aan de zuidkust geschetst. In het bijzonder geldt voor de verhoging in het midden:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g h_m \zeta(\tfrac{1}{2}a, 0) &= 1,67 U_0 + 0,71 U_1 + 1,43 U_2 + \\ &\quad - 6,28 V_0 - 2,72 V_1 - 4,04 V_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Ter vergelijking zijn dezelfde berekeningen uitgevoerd voor het eenvoudiger model met de uniforme diepte  $h = h_m$ . Dit leidt tot het resultaat:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g h_m \zeta(\tfrac{1}{2}a, 0) &= 1,31 U_0 + 0,64 U_1 + 0,19 U_2 + \\ &\quad - 6,28 V_0 - 0,74 V_1 - 3,14 V_2. \end{aligned} \quad (4)$$

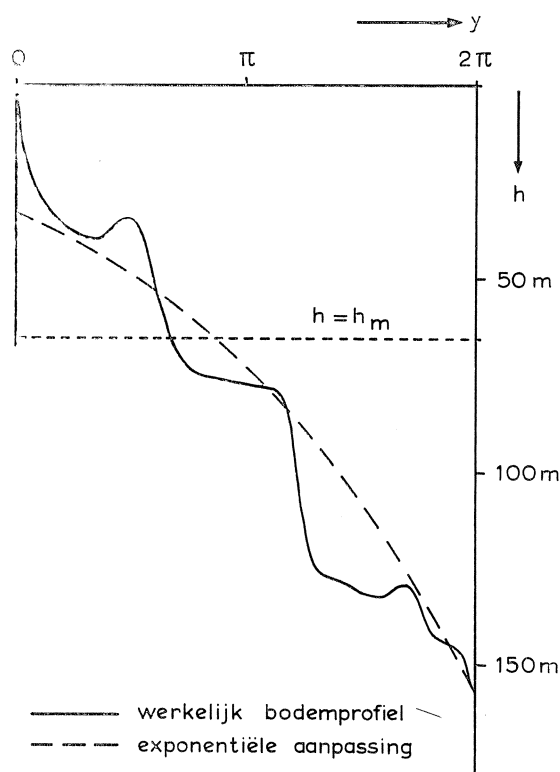
Om hierbij ook een indruk te krijgen van de invloed van de aardrotatie, zijn voor beide modellen de berekeningen nog eens uitgevoerd met  $\Omega = 0$ . De resultaten zijn:

Exponentiële diepte, geen aardrotatie

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g h_m \zeta(\tfrac{1}{2}a, 0) &= 0,51 U_1 + \\ &\quad - 6,28 V_0 \quad - 4,04 V_2; \end{aligned} \quad (5)$$

Uniforme diepte, geen aardrotatie

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g h_m \zeta(\tfrac{1}{2}a, 0) &= 0,26 U_1 + \\ &\quad - 6,28 V_0 \quad - 3,14 V_2. \end{aligned} \quad (6)$$



Figuur 3.1.1. Bodemprofiel van de Noordzee

Het linkerlid van (3) en volgende geeft aan hoe de resultaten gewijzigd moeten worden, indien voor  $a$  en  $h_m$  andere getallenwaarden gekozen worden. Bij de gekozen getallenwaarden is:

$$\frac{\pi}{a} g h_m = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ m/sec}^2. \quad (7)$$

Het verband tussen de schuifspanning en de windsnelheid op zeeniveau  $v_s$  is:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = 3,0 \cdot 10^{-6} v_s^2 \text{ m}^2/\text{sec}^2. \quad (8)$$

De verhoging  $\zeta$  vindt men aldus in meters.

Uit deze resultaten kan een aantal conclusies worden getrokken wat betreft de invloed van de niet-uniformiteit van de bodem ( $\alpha$ ) en de invloed van de draaiing van de aarde ( $\Omega$ ).

1. Bij een uniforme N-Z-wind hangt de verhoging aan de zuidkust niet af van bodemvariaties in de lengterichting en ook niet van de aardrotatie.
2. Bij een uniforme W-O-wind hebben  $\alpha$  en vooral  $\Omega$  een vrij grote invloed op de verhoging aan de zuidkust.
3. De voor een uniforme wind meest ongunstige richting wat betreft de verhoging aan de zuidkust wijkt ongeveer  $15^\circ$  naar het westen af van de noordelijke richting. Voor  $\alpha = 0$  zou dit ca.  $12^\circ$  zijn.
4. De invloed van  $\alpha$  en  $\Omega$  op de bijdragen van de divergentietermen  $U_1$  en  $V_2$  tot de verhoging aan de zuidkust is matig.
5. De invloed van  $\alpha$  en  $\Omega$  op de bijdragen van de rotatietermen  $U_2$  en  $V_1$  tot de verhoging aan de zuidkust is aanzienlijk.

Dit hoofdstuk sluit aan bij vroegere onderzoeken van SCHALKWIJK, VELTKAMP en WEENINK. SCHALKWIJK [30] beschouwt het model van een rechthoekige baai, waarbij zee en oceaan dezelfde uniforme diepte hebben. VELTKAMP [33] geeft van hetzelfde model een betere mathematische behandeling. Voorts beschouwt hij in een volgende publikatie [34] het geval, dat de oceaan een veel grotere diepte bezit dan de zee. In het bijzonder leidt VELTKAMP numerieke resultaten af voor o.a. de verhoging

aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld. Hierbij vindt hij vrijwel dezelfde getallenwaarden als boven in (4). WEENINK [37] beschouwt een geval van een uniform windveld, dat zich slechts over een deel van het zeegebied uitstrekt. In zijn proefschrift behandelt WEENINK [38] o.a. het door ons beschouwde model met een op exponentiële wijze variërende diepte. Hierbij beperkt hij zich echter tot het in zijn vorige artikel vermelde type windveld.

In dit hoofdstuk worden de volgende punten behandeld.

In 3.2 wordt het probleem mathematisch geformuleerd, waarbij wordt uitgegaan van de in 2.2 gegeven algemene behandeling. De invloed van de componenten  $V_0$  en  $V_2$ , welke zich wiskundig het gemakkelijkst laat behandelen, wordt besproken in 3.3. De invloed van de overige componenten wordt voor het model met uniforme diepte behandeld in 3.4 en voor het model met exponentiële diepte in 3.5. In beide gevallen kunnen de stroom en de verhoging afgeleid worden uit een potentiaal  $\Phi(x, y)$ , welke voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking (2) van 3.5 met de randvoorwaarden (5) en (6) van paragraaf 3.4. De oplossing (12) van 3.5 van dit probleem berust uiteindelijk op de bepaling van twee stelsels coëfficiënten  $c_n$  en  $d_n$ . De bepaling van de coëfficiënten  $c_n$  geeft geen moeilijkheden. Die van de coëfficiënten  $d_n$  daarentegen leidt tot aanzienlijke complicaties, welke in 3.6 behandeld worden. De verhoging aan de zuidkust kan met behulp van deze coëfficiënten gemakkelijk volgens (23) en (24) van 3.5 berekend worden. De numerieke toepassing wordt ten slotte in 3.8 behandeld.

### 3.2 Het mathematische probleem

Met inachtneming van de in 1.1 besproken vereenvoudigingen, waarbij echter de restrictie van de uniforme diepte is komen te vervallen, kan het probleem mathematisch geformuleerd worden met behulp van de differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2, waarbij de termen met  $\partial/\partial t$  in verband met de stationaire toestand afwezig zijn. Aldus heeft men:

$$\lambda u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = U \quad (1)$$

$$\lambda v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = V \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Hierbij hangt  $h$  volgens (1) van 3.1 van  $y$  af. Het hiermede corresponderende harmonisch gemiddelde  $h_m$  is bepaald door

$$h_m = 2 \alpha b (1 - e^{-2\alpha b})^{-1} h_0. \quad (4)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a, \quad (5)$$

$$v = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0, \quad (6)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{voor} \quad y = b. \quad (7)$$

Het verband tussen de schuifspanning ( $U, V$ ) en de windsnelheid op zeeniveau  $v_s$  is volgens (3) van 2.2 en (5) van 2.2:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = 3,0 \cdot 10^{-6} v_s^2. \quad (8)$$

Een kleine vereenvoudiging wordt bereikt, indien  $x$  en  $y$  worden gemeten in eenheden van  $a/\pi$ . Dit betekent, dat formeel  $a = \pi$  gesteld kan worden. De numerieke waarde van  $g h_m$ , welke 91 km/h bedraagt, moet in verband hiermede gewijzigd worden in  $\pi g h_m/a$ , of  $5,0 \cdot 10^{-3}$  m/sec<sup>2</sup>.

### 3.3 Een bijzonder geval

Er bestaat een eenvoudige bijzondere oplossing van het in de vorige paragraaf gestelde probleem, waarbij de grootheden slechts van  $y$  afhangen. Dit is het geval voor het windveld

$$U = 0 \quad V = V(y), \quad (1)$$

waarbij  $V(y)$  een *willekeurige* functie van  $y$  is. We kunnen nu zelfs toelaten, dat  $\lambda$ ,  $\Omega$  en  $h$  op willekeurige wijze van  $y$  afhangen. De bedoelde oplossing is:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad (2)$$

en

$$g \zeta(x, y) = - \int_y^b h^{-1}(\eta) V(\eta) d\eta. \quad (3)$$

In dit geval is er bij de stationaire toestand geen stroom en de stationaire opwaaiing is onafhankelijk van  $\lambda$  en  $\Omega$ . Is in het bijzonder  $V$  gelijk aan een constante  $V_0$ , dan volgt uit (3) voor de verhoging aan de zuidkust

$$g h_m \zeta(x, 0) = - b V_0. \quad (4)$$

Hetzelfde resultaat wordt klaarblijkelijk verkregen voor een model met de uniforme diepte  $h = h_m$ . Dit is dan ook de reden waarom het in de inleiding genoemde model met (1) van 3.1 vergeleken wordt met het model  $h = h_m$ .

Kiezen we voorts het lineaire windveld

$$U = 0 \quad V = V_0 + V_2(1-y/b), \quad (5)$$

dan volgt uit (3):

$$g h_m \zeta(x, 0) = - b V_0 - b(1-y_m/b) V_2, \quad (6)$$

waarbij

$$y_m = b^{-1} h_m \int_0^b h^{-1}(\eta) \eta d\eta. \quad (7)$$

In het numerieke geval, waarbij  $h$  door (1) van 3.1 gegeven is, vinden we uit (6) en (7):

$$g h_m \zeta(x, 0) = - 6,28 V_0 - 4,04 V_2. \quad (8)$$

Voor het model met uniforme diepte  $h = h_m$  is:

$$g h_m \zeta(x, 0) = - 6,28 V_0 - 3,14 V_2. \quad (9)$$

### 3.4 Het model met uniforme diepte

Op grond van (3) van 3.2 bestaat er een stroomfunctie  $\Phi(x, y)$ , waaruit  $u$  en  $v$  als volgt afgeleid kunnen worden:

$$\lambda u = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \lambda v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1)$$

Aangezien de kust, bestaande uit de stukken  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 0$ , een stroomlijn is, mogen we daar  $\Phi = 0$  kiezen.

Uit (1) en (2) van 3.2 volgt na eliminatie van  $\zeta$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = R/\lambda \quad (2)$$

met

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3)$$

Hierbij stelt  $R$  dus de rotatie van de windkracht voor. Bij de nu volgende behandeling is het essentieel, dat  $R$  een constante is. Dit is o.a. het geval bij een lineair windveld zoals (1) van 3.1. Het is, althans in deze paragraaf, niet nodig deze specialisatie te maken. Substitutie van (1) in (2) geeft voor  $\Phi$  de partiële differentiaalvergelijking:

$$\Delta \Phi = R \quad (4)$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$\Phi = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0, x = \pi, y = 0 \quad (5)$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\Omega}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = - U(x, b) \quad \text{voor} \quad y = b. \quad (6)$$

De laatste voorwaarde volgt gemakkelijk uit (1) en (6) van 3.2 en (1).

Zoals in 2.1 besproken is, geeft de scheve randvoorwaarde (6) de grootste moeilijkheden.

Ter oplossing van het bovengenoemde probleem stellen we

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \Phi_1(x, y), \quad (7)$$

waarbij  $\Phi_0$  een particuliere oplossing van (4) is, welke aan de randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = \pi$  voldoet. De functie  $\Phi_1$  voldoet dus aan de homogene vergelijking van Laplace, te weten  $\Delta\Phi = 0$ , en aan de randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = \pi$ . We kunnen  $\Phi_1$  opbouwen uit de elementaire oplossingen

$$\sin nx e^{\pm ny} \quad (8)$$

met  $n = 1, 2, 3, \dots$

Voor  $\Phi_0$  kunnen we gemakkelijk een geschikte functie vinden. We definiëren:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2} x (\pi - x). \quad (9)$$

Dan is dus bijv.

$$\Phi_0 = -R \varphi_0(x).$$

We stellen dus:

$$\Phi(x, y) = -R \varphi_0(x) + \sum_1^{\infty} c_n \sin nx e^{-ny} - \sum_1^{\infty} d_n \sin nx e^{-n(b-y)}. \quad (10)$$

De coëfficiënten  $c_n$  en  $d_n$  moeten nu bepaald worden met behulp van de randvoorwaarde bij  $y = 0$  (kustvoorwaarde) en die bij  $y = b$  (oceanvoorwaarde).

De kustvoorwaarde geeft:

$$\sum_1^{\infty} c_n \sin nx = R \varphi_0(x) + O(e^{-b}), \quad (11)$$

waarbij de ordeterm de bijdragen van de coëfficiënten  $d_n$  bevat. Hierbij treden de factoren  $e^{-nb}$  op, welke voor voldoende grote  $b$  zeer klein zijn. Hoewel we in dit theoretische deel nog niet de specialisatie  $b = 2\pi$  willen doorvoeren, gaan we er van uit, dat  $b$  zo groot is, dat de ordeterm feitelijk weggelaten kan worden. We merken op, dat bij de numerieke toepassing  $e^{-b} = 0,002$ . Uit (11) volgt met verwaarlozing van de ordeterm:

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even} \\ \frac{4R}{\pi n^3} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases} \quad (12)$$

De oceanvoorwaarde (6) geeft met een analoge ordeterm:

$$\sum_1^{\infty} n d_n \left( \sin nx + \frac{\Omega}{\lambda} \cos nx \right) = U(x, b) - R \frac{\Omega}{\lambda} \left( \frac{1}{2}\pi - x \right) + O(e^{-b}). \quad (13)$$

Reeksontwikkelingen van het type (13) zijn behandeld door LAUWERIER [18]. We vermelden in het bijzonder het aldaar afgeleide resultaat, dat  $d_n$  het volgende asymptotische gedrag bezit:

$$d_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2-2\mu}} D' + \frac{1}{n^{2+2\mu}} D'' + O(n^{-4+2\mu}) \quad (14)$$

waarbij

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\Omega}{\lambda} \quad (15)$$

Op de oceanvoorwaarde en op de berekening van de coëfficiënten  $d_n$  komen we in 3.7 nader terug.

We zullen in het bijzonder de verhoging aan de kust  $y = 0$  bestuderen. Uit (1) van 3.2 volgt voor  $y = 0$

$$gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = U(x, 0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (16)$$

zodat:

$$gh \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = \int_0^x U(\xi, 0) d\xi + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\xi, 0) d\xi \quad (17)$$

Substitutie van (10) geeft na enige herleiding:

$$gh \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = \int_0^x U(\xi, 0) d\xi - \sum_1^{\infty} c_n (1 - \cos nx) + O(e^{-b}), \quad (18)$$

waarbij de coëfficiënten  $c_n$  door (12) gegeven zijn. Het blijkt uit deze betrekking, dat de *relatieve* verhoging aan de zuidkust vrijwel onafhankelijk is van  $b$ , d.w.z. van de positie van de oceaan. De absolute verhoging aan de zuidkust volgt door integratie van (2) van 3.2 langs de westkust:

$$gh \zeta(0, 0) = - \int_0^b V(0, \eta) d\eta + \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} \Phi(0, \eta) d\eta. \quad (19)$$

Substitutie van (10) geeft:

$$gh \zeta(0, 0) = - \int_0^b V(0, \eta) d\eta - \frac{1}{2}\pi bR + \sum_1^{\infty} (c_n - d_n) + O(e^{-b}). \quad (20)$$

### 3.5 Het model met exponentiële diepte

De behandeling van dit model loopt vrijwel analoog aan die van het model met uniforme diepte. We voeren weer met behulp van (1) van 3.4 een stroomfunctie  $\Phi(x, y)$  in, welke aan de kust nul is. Uit (1) en (2) van 3.2 volgt nu echter met inachtneming van (1) van 3.1:

$$\lambda \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\alpha \lambda u - 2\alpha \Omega v = R + 2\alpha U, \quad (1)$$

waarbij  $R$  door (3) van 3.4 gegeven is.

Substitutie van (1) van 3.4 geeft:

$$A \Phi - 2A \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} = R + 2\alpha U, \quad (2)$$

waarbij

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \Omega / \lambda \quad (3)$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn als in 3.4:

$$\Phi = 0 \quad \text{voor } x = 0, x = \pi, y = 0 \quad (4)$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\Omega}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -U(x, b) \quad \text{voor } y = b. \quad (5)$$

Bij de behandeling van dit model gaan we uit van het lineaire windveld (2) van 3.1. Met weglating van de componenten  $V_0$  en  $V_2$ , welke in 3.3 besproken zijn, is dus:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1(1 - 2x/\pi) + U_2(1 - y/b) \\ V &= V_1(1 - 2x/\pi). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

De rotatie  $R$  is nu expliciet:

$$R = -\frac{2}{\pi} V_1 + \frac{1}{b} U_2. \quad (7)$$

In overeenstemming met de in 3.4 gevolgde methodiek zoeken we eerst een eenvoudige particuliere oplossing  $\Phi_0(x, y)$  van (2), welke aan de randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = \pi$  voldoet. Deze oplossing kunnen we samenstellen uit de in (9) van 3.4 gedefinieerde functie  $\varphi_0(x)$  en de volgende functie:

$$\varphi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2A} \left( \frac{e^{2Ax} - 1}{e^{2A\pi} - 1} - \frac{x}{\pi} \right). \quad (8)$$

Hieronder vermelden we het resultaat bij substitutie in het linkerlid van (2):

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &\rightarrow -(1 + A\pi) + 2Ax, \\ \varphi_1(x) &\rightarrow 1, \\ x \varphi_1(x) &\rightarrow \left( \frac{2\pi}{e^{2A\pi} - 1} - \frac{1}{A} \right) + 3x + 2A \varphi_1(x), \\ y \varphi_1(x) &\rightarrow y - 2\alpha \varphi_1(x).\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus voor  $\Phi_0(x, y)$  de uitdrukking:

$$\begin{aligned}\Phi_0(x, y) &= (R + 2\alpha U_0) \varphi_1 - \frac{2\alpha U_1}{A\pi} (\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{2\alpha U_2}{A b} \left\{ (A(b-y) - \alpha x) \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\alpha}{2A} (\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{\alpha}{A} \left( \frac{2A\pi}{e^{2A\pi} - 1} - 1 + \frac{3}{2} A\pi \right) \varphi_1 \right\}.\end{aligned}\quad (9)$$

De elementaire oplossingen van de bij (2) behorende homogene vergelijking zijn:

$$e^{Ax} \sin nx e^{(\alpha \pm \mu_n)y} \quad (10)$$

met  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  
waarbij

$$\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n^2 + A^2 + \alpha^2}. \quad (11)$$

We stellen nu naar analogie van (10) van 3.4:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + e^{Ax} \sum_1^{\infty} c_n \sin nx e^{-y(\mu_n - \alpha)} - e^{Ax} \sum_1^{\infty} d_n \sin nx e^{-(b-y)(\mu_n + \alpha)} \quad (12)$$

De kustvoorwaarde (4) bij  $y = 0$  geeft:

$$\sum_1^{\infty} c_n \sin nx = -e^{-Ax} \Phi_0(x, 0) + O(e^{-b}), \quad (13)$$

zodat met weglating van de ordeterm:

$$c_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-A\xi} \sin n\xi \Phi_0(\xi, 0) d\xi. \quad (14)$$

Uit (14) en (9) kan gemakkelijk een expliciete uitdrukking voor  $c_n$  afgeleid worden. Daar deze uitdrukking alleen voor de numerieke toepassing van belang is, laten we hem weg en vermelden hier slechts het asymptotisch gedrag van  $c_n$ , namelijk

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{2}{\pi n^3} \{ R + 2\alpha (U_0 + U_1 + U_2) \} + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2e^{-A\pi}}{\pi n^3} \{ R + 2\alpha (U_0 - U_1 + U_2) \} + O(n^{-5}).\end{aligned}\quad (15)$$

De oceaانvoorwaarde (5) leidt tot een resultaat, dat in de volgende vorm gebracht kan worden:

$$\begin{aligned}\sum_1^{\infty} \frac{n d_n}{\mu_n - \alpha} \frac{d}{dx} \left\{ e^{Ax} \left( -\cos nx + \frac{\Omega \mu_n}{\lambda n} \sin nx \right) \right\} = \\ = U(x, b) + \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\Omega}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_0(x, b) + O(e^{-b}).\end{aligned}\quad (16)$$



In sommige opzichten is de geïntegreerde vorm van (16) bruikbaar, te weten

$$\sum_1^{\infty} D_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = f(x) + O(e^{-b}), \quad (17)$$

met

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu_n (\mu_n - \alpha)^{-1} d_n, \quad (18)$$

$$\theta_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda n}{\Omega \mu_n} \quad (19)$$

en

$$e^{Ax} f(x) = C + \frac{\lambda}{\Omega} \int_0^x U(\xi, b) d\xi + \Phi_0(x, b) + \frac{\lambda}{\Omega} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \Phi_0(\xi, b) d\xi, \quad (20)$$

waarbij  $C$  een integratieconstante is.

In 3.6 komen we uitvoeriger op de behandeling van de reeksen (16) en (17) terug. We vermelden hier alleen het asymptotisch gedrag van  $d_n$ , namelijk

$$d_n = \frac{(-1)^{n-1} D'}{n^2 - 2\mu} + O(n^{-3 + 2\mu}), \quad (21)$$

waarbij  $D'$  een constante is, en waarbij

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\Omega}{\lambda}. \quad (22)$$

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust volgt uit (1) van 3.2 als in de vorige paragraaf (zie (17) van 3.4):

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = \int_0^x U(\xi, 0) d\xi + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\xi, 0) d\xi. \quad (23)$$

Substitutie van (9) en (12) geeft de expliciete uitdrukking:

$$\begin{aligned} gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} &= x(U_0 + U_2) + \frac{2}{\pi} U_1 \varphi_0(x) - \frac{2\alpha}{b} U_2 \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi + \\ &\quad - \sum_1^{\infty} (\mu_n - \alpha) c_n \int_0^x e^{A\xi} \sin n\xi d\xi + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (24)$$

De absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) volgt door integratie van (2) van 3.2 langs de westkust (vergelijk (20) van 3.4):

$$gh_0 \zeta(0, 0) = - \int_0^b e^{-2\alpha\eta} V(0, \eta) d\eta + \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(0, \eta) d\eta. \quad (25)$$

Substitutie van (12) geeft de uitdrukking:

$$\begin{aligned} gh_0 \zeta(0, 0) &= - \frac{1 - e^{-2\alpha b}}{2\alpha} V_1 + \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(0, \eta) d\eta + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \frac{n}{\mu_n + \alpha} c_n - e^{-2\alpha b} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\mu_n - \alpha} d_n + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (26)$$

De substitutie van (9) hebben we nagelaten in verband met de bewerkelijkheid van deze vorm.

### 3.6 De oceaanoorwaarde

We bespreken hier enige eigenschappen van de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_1^{\infty} b_n (\sin nx + \theta_n \cos nx), \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

welke optreedt in de oceaanvoorwaarde (13) van 3.4 en (17) van 3.5. Een uitvoerige behandeling van deze ontwikkeling wordt gegeven door LAUWERIER [18]. Hier beperken we ons tot enkele, voor dit onderzoek belangrijk zijnde eigenschappen.

We beschouwen eerst een ontwikkeling, waarbij  $\theta_n$  niet van  $n$  afhangt. We kunnen dan (1) schrijven als

$$f(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin(nx + \mu\pi), \quad (2)$$

waarbij we veronderstellen dat  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ . Het geval  $-\frac{1}{2} < \mu < 0$  volgt gemakkelijk hieruit met behulp van de transformatie  $x \rightarrow \pi - x$ . Indien of  $\mu = 0$  of  $\mu = \frac{1}{2}$  reduceert de ontwikkeling zich tot een zuivere sinus- of cosinusreeks.

Een belangrijk speciaal geval van (2) kan gemakkelijk als volgt verkregen worden. We gaan uit van de machtreeksontwikkeling

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^\beta = \sum_0^{\infty} e_n(\beta) s^n. \quad (3)$$

De eerste coëfficiënten zijn:

$$e_0(\beta) = 1 \quad e_1(\beta) = 2\beta \quad e_2(\beta) = 2\beta^2, \dots$$

Voorts bestaat de recurrente betrekking:

$$n e_n(\beta) = 2\beta e_{n-1}(\beta) + (n-2) e_{n-2}(\beta),$$

geldig voor  $n \geq 2$ .

Men kan afleiden, dat voor  $n \rightarrow \infty$  de coëfficiënt  $e_n(\beta)$  zich gedraagt als

$$e_n(\beta) = \frac{2^\beta}{\Gamma(\beta) n^{1-\beta}} + \frac{(-1)^n 2^{-\beta}}{\Gamma(-\beta) n^{1+\beta}} + O(n^{-3+\beta}), \quad (4)$$

mits  $0 < \beta < 1$ .

Stelt men in (3) nu  $\beta = -2\mu$  en  $s = e^{ix}$  dan volgt na enige herleiding, dat

$$\sum_0^{\infty} e_n(-2\mu) \sin(nx + \mu\pi) = 0, \quad (5)$$

hetgeen ook als

$$\sin \mu\pi = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} e_n(2\mu) \sin(nx + \mu\pi) \quad (6)$$

geschreven kan worden.

Op soortgelijke wijze kan uit (3) het volgende resultaat worden afgeleid:

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} \sin(nt + \mu\pi) dt = 0 \quad (7)$$

voor  $n = 1, 2, 3, \dots$

De functie  $k_0(x) = (\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)^{1-2\mu}$  is de eerste van het stelsel functies  $k_m(x)$ , welke biorthogonaal zijn met betrekking tot het stelsel  $\sin(nx + \mu\pi)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Zonder bewijs vermelden we dat de overige orthogonale functies bepaald zijn door

$$k_m(x) = 2 \cotg^{2\mu} \frac{1}{2}x \sum_1^m e_{m-j}(-2\mu) \sin jx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

De orthogonaliteit wordt dan uitgedrukt door

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k_m(t) \sin(nt + \mu\pi) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (9)$$

Met behulp van het biorthogonale stelsel  $k_m(x)$  kan voor de coëfficiënten van de ontwikkeling (2) een expliciete uitdrukking worden gegeven, namelijk

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k_n(t) f(t) dt. \quad (10)$$

Zonder bewijs vermelden we de asymptotische voorstelling van  $b_n$ . Deze is:

$$b_n = -\frac{e_n(-2\mu)}{\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} f(t) dt + \frac{B'}{n^{1+2\mu}} + O(n^{-3+2\mu}), \quad (11)$$

waarbij  $B'$  een constante is.

In het algemeen is de ontwikkeling (2) dus langzaam convergent, waarbij  $b_n$  de subharmonische orde  $1-2\mu$  bezit. Is echter

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} f(t) dt = 0, \quad (12)$$

dan heeft  $b_n$  de hyperharmonische orde  $1 + 2\mu$ .

Met behulp van (6) en (11) kan nog het volgende bijzondere geval worden afgeleid:

$$\frac{1}{2}\pi - x = \sum_1^{\infty} g_n \sin(nx + \mu\pi), \quad (13)$$

waarbij

$$g_n = -\frac{e_n(-2\mu)}{\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} (\frac{1}{2}\pi - t) dt + \frac{e_n(1-2\mu)}{n \cos \mu\pi}. \quad (14)$$

We komen nu tot de bespreking van de oceaانvoorwaarde (13) van 3.4.

Met weglating van de ordeterm kan deze voorwaarde geschreven worden als:

$$\sum_1^{\infty} n d_n \sin(nx + \mu\pi) = U(x, b) \cos \mu\pi - R(\frac{1}{2}\pi - x) \sin \mu\pi, \quad (15)$$

waarbij  $\mu$  door (15) van 3.4 bepaald is.

Aangezien het rechterlid van (15) een lineaire functie van  $x$  is, kan met behulp van (6) en (13) voor  $d_n$  gemakkelijk een expliciete uitdrukking worden afgeleid. Men vindt:

$$d_n = -\frac{\lambda e_n(-2\mu)}{\Omega n} U_0 + \left( \frac{2\lambda}{\pi\Omega} U_1 - R \right) \frac{g_n \sin \mu\pi}{n}. \quad (16)$$

Aangezien uiteindelijk blijkens (20) van 3.4 alleen de berekening van  $\sum_1^{\infty} d_n$  nodig is, moeten slechts drie uitdrukkingen bepaald worden, te weten:

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} (\frac{1}{2}\pi - t) dt, \quad (17)$$

$$\sum_1^{\infty} n^{-1} e_n(-2\mu) \quad \text{en} \quad \sum_1^{\infty} n^{-2} e_n(1-2\mu). \quad (18)$$

Hierbij kan alleen voor de eerste som een eenvoudige analytische uitdrukking afgeleid worden, namelijk:

$$\sum_1^{\infty} n^{-1} e_n(-2\mu) = \psi(\frac{1}{2}) - \psi(\frac{1}{2} + \mu), \quad (19)$$

waarbij

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma'(x) / \Gamma(x).$$

De eigenschappen van de algemenere ontwikkeling (1) kunnen gemakkelijk uit die van (2) afgeleid worden, indien  $\theta_n$  nagenoeg constant is.

We nemen aan dat

$$\theta_n = \theta + O(n^{-2}) \quad (20)$$

en dat  $\theta > 0$  is. Het geval  $\theta < 0$  kan hieruit weer afgeleid worden met behulp van de transformatie  $x \rightarrow \pi - x$ . We kunnen nu (1) schrijven als:

$$\sum_1^{\infty} b_n (\sin nx + \theta \cos nx) = f_1(x) \quad (21)$$

met

$$f_1(x) = f(x) - \sum_1^{\infty} b_n (\theta_n - \theta) \cos nx. \quad (22)$$

Op (21) kan bijvoorbeeld het resultaat (11) toegepast worden. Nu is  $f_1(x)$  weliswaar in  $x = \pi$  enigszins singulier, maar de invloed hiervan is slechts in de hogere termen van de asymptotische ontwikkeling (11) merkbaar. Dan is

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1} B}{n^{1-2\mu}} + \frac{B'}{n^{1+2\mu}} + \dots, \quad (23)$$

waarbij  $B$  en  $B'$  van  $f(x)$  afhankende constanten zijn.

We bespreken ten slotte de toepassing van het bovenstaande op de oceaanvoorwaarde (17) van 3.9. Hierbij is aan de voorwaarde (20) voldaan, hetgeen in feite de reden is, dat (17) van 3.5 te verkiezen is boven (16) van 3.5. Bij de toepassing van (23) op (17) van 3.5 moet men bedenken, dat de integratieconstante  $C$  in (20) van 3.5 zodanig is, dat  $B = 0$ . Dan heeft men:

$$D_n = \frac{(-1)^{n-1} D'}{n^{2-2\mu}} + O(n^{2-2\mu}), \quad (24)$$

waaruit met een iets slechtere ordeterm (21) van 3.5 volgt.

Het resultaat (24) is van groot belang voor de numerieke bepaling van de coëfficiënten  $d_n$  van (12) van 3.5. We zullen op deze numerieke bepaling hier niet verder ingaan maar volstaan met te verwijzen naar een soortgelijke behandeling in 4.6.

### 3.7 Het probleem zonder aardrotatie

Om een indruk te krijgen van de invloed van de aardrotatie, is het van belang het model met  $\Omega = 0$  te beschouwen. In de mathematische behandeling, welke analoog is aan die van het algemene geval  $\Omega \neq 0$ , treden aanzienlijke vereenvoudigingen op. In grote lijnen verloopt deze als volgt. De stroomfunctie  $\Phi(x, y)$  is bepaald door

$$\Delta\Phi - 2\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial y} = R + 2\alpha U, \quad (1)$$

met de randvoorwaarden

$$\Phi = 0 \quad \text{voor } x = 0, x = \pi, y = 0 \quad (2)$$

en

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -U(x, b) \quad \text{voor } y = b. \quad (3)$$

In overeenstemming met (12) en (9) van 3.5 stellen we:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \sum_1^{\infty} c_n \sin nx e^{-y(\mu_n - \alpha)} - \sum_1^{\infty} d_n \sin nx e^{-(b-y)(\mu_n + \alpha)}, \quad (4)$$

waarbij nu

$$\mu_n = \sqrt{n^2 + \alpha^2} \quad (5)$$

en

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = & - \left\{ R + 2\alpha U_0 + \frac{2}{3}\alpha \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) U_1 + 2\alpha \left(1 - \frac{y}{b}\right) U_2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha^2}{3b} (\varphi_0(x) + \frac{1}{2}\pi^2) \right\} \varphi_0(x). \end{aligned} \quad (6)$$

De kustvoorwaarde bij  $y = 0$  geeft in overeenstemming met (13) van 3.5:

$$\sum_1^{\infty} c_n \sin nx = -\Phi_0(x, 0) + O(e^{-b}). \quad (7)$$

Ten behoeve van de berekening van de coëfficiënten merken we op, dat

$$\int_0^{\pi} \varphi_0(x) \sin nx \, dx = \{1 - (-1)^n\} n^{-5}, \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \varphi_0(x) \sin nx \, dx = 3 \{1 + (-1)^n\} n^{-3}, \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} \left\{ \varphi_0^2(x) + \frac{1}{2}\pi^2 \varphi_0(x) \right\} \sin nx \, dx = 6 \{1 - (-1)^n\} n^{-5} \quad (10)$$

Met behulp hiervan volgt gemakkelijk, dat met verwaarlozing van de termen van de orde  $e^{-b}$ :

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \frac{8\alpha}{\pi n^3} U_1 && \text{voor even } n, \\ c_n &= \frac{8\alpha}{\pi n^3} U_0 - \frac{8}{\pi^2 n^3} V_1 + \left\{ \left(2\alpha + \frac{1}{b}\right) \frac{4}{\pi n^3} + \frac{16\alpha^2}{b\pi n^5} \right\} U_2 && \text{voor oneven } n \end{aligned} \right\} (11)$$

De oceaanvoorwaarde (3) geeft:

$$\sum_1^{\infty} (\mu_n + \alpha) d_n \sin nx = U_0 + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) U_1 + \frac{2\alpha}{b} \varphi_0(x) U_2 + O(e^{-b}), \quad (12)$$

waaruit gemakkelijk volgt, dat

$$\left. \begin{aligned} (\mu_n + \alpha) d_n &= \frac{4}{\pi n} U_1 && \text{voor even } n, \\ (\mu_n + \alpha) d_n &= \frac{4}{\pi n} U_0 + \frac{8\alpha}{b\pi n^3} U_2 && \text{voor oneven } n. \end{aligned} \right\} (13)$$

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust luidt het equivalent van (24) van 3.5:

$$\begin{aligned} gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} &= x(U_0 + U_2) + \frac{2}{\pi} U_1 \varphi_0(x) + \frac{2\alpha}{b} U_2 \int_0^x \varphi_0(\xi) d\xi + \\ &\quad - \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n (1 - \cos nx) + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (14)$$

Voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) geldt de uitdrukking (26) van 3.5. Het blijkt mogelijk voor de verhoging in het midden van de zuidkust een zeer eenvoudige uitdrukking te vinden. Uit (26) van 3.5 en (14) volgt na enige herleiding

$$\begin{aligned} gh_0 \zeta\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) &= \frac{1}{2}\pi (U_0 + \frac{1}{2}U_1 + U_2) + \frac{\alpha\pi^3}{24b} U_2 + \\ &\quad - \frac{1 - e^{-2\alpha b}}{2\alpha} \left\{ \alpha\pi U_0 + \frac{1}{3}\alpha\pi U_1 + \left(\frac{\pi}{2b} + \alpha\pi + \frac{\alpha^2\pi^3}{6b}\right) U_2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\alpha\pi}{b} \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \eta d\eta U_2 + \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n \cos \frac{1}{2}n\pi - e^{-2\alpha b} \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n + \alpha}{n} d_n + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (15)$$

Substitutie van (11) en (13) leidt ten slotte tot

$$gh_0 \zeta\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{8\alpha}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n - \alpha}{n^4} \cos \frac{1}{2}n\pi \right\} U_1 + O(e^{-b}). \quad (16)$$

Wij zien dus, dat in het midden van de zuidkust de bijdrage van de componenten  $U_0$ ,  $U_2$  en  $V_1$  verdwijnt.

### 3.8 Numerieke toepassingen

#### 3.8.1 Het model met uniforme diepte

Uit (18) en (12) van 3.4 volgt voor de relatieve verhoging aan de zuidkust:

$$gh_m \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = xU_0 + \left(x - \frac{x^2}{\pi}\right) U_1 + xU_2 - \frac{4R}{\pi} \sum' \frac{1 - \cos nx}{n^3} \quad (1)$$

waarbij  $\sum'$  de sommatie over oneven waarden van  $n$  aanduidt. Schrijven we:

$$gh_m \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = C_0 U_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + D_0 V_0 + D_1 V_1 + D_2 V_2, \quad (2)$$

waarin volledigheidshalve ook de bijdrage van de in 3.3 besproken componenten  $V_0$  en  $V_2$  is opgenomen, dan kan uit (1) de volgende tabel worden afgeleid.

Tabel 3.8.1

De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met uniforme diepte

$8x/\pi$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$D_0$	$D_1$	$D_2$
0	0	0	0	0	0	0
1	0,39	0,34	0,37	0	0,10	0
2	0,78	0,59	0,71	0	0,30	0
3	1,18	0,74	1,04	0	0,56	0
4	1,57	0,78	1,36	0	0,85	0
5	1,96	0,74	1,68	0	1,14	0
6	2,36	0,59	2,01	0	1,40	0
7	2,75	0,34	2,35	0	1,61	0
8	3,14	0	2,73	0	1,64	0

Uit (20) van 3.4 volgt voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0):

$$gh_m \zeta(0,0) = -\frac{1}{2}\pi U_2 + \sum_1^{\infty} (c_n - d_n). \quad (3)$$

De reeks  $\sum_1^{\infty} c_n$  kan gemakkelijk gesommeerd worden. Men vindt:

$$\sum_1^{\infty} c_n = 1,339 R. \quad (4)$$

De berekening van de reeks  $\sum_1^{\infty} d_n$  is beschreven in 3.6. Uit (16) van 3.6 volgt:

$$\sum_1^{\infty} d_n = -\frac{1}{5} U_0 \sum_1^{\infty} n^{-1} e_n(-2\mu) + \left(\frac{2}{5\pi} U_1 - R\right) \sin \mu\pi \sum_1^{\infty} n^{-1} g_n, \quad (5)$$

waarbij  $\mu = \pi^{-1} \arctg 5 = 0,473$ .

Uit (19) van 3.6 volgt:

$$-\sum_1^{\infty} n^{-1} e_n(-2\mu) = \psi(0,973) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1,278 \quad (6)$$

Uit (14) van 3.6 volgt:

$$\sin \mu\pi \sum_1^{\infty} n^{-1} g_n = -G \sum_1^{\infty} n^{-1} e_n(-2\mu) + 5 \sum_1^{\infty} n^{-2} e_n(1-2\mu), \quad (7)$$

waarbij

$$G = \pi^{-1} \sin \mu\pi \int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)^{1-2\mu} \left(\frac{1}{2}\pi - t\right) dt.$$

Numerieke integratie geeft  $G = -0,169$ .

De reeks  $\sum_1^{\infty} n^{-2} e_n (1 - 2\mu)$  kan rechtstreeks berekend worden. We vinden hiervoor de waarde 0,275.

Ten slotte is dan

$$\sum_1^{\infty} d_n = 0,256 U_0 + 1,160 (0,127 U_1 - R). \tag{8}$$

Substitutie van (4) en (8) in (3) geeft uiteindelijk

$$-gh_m \zeta(0,0) = 0,26 U_0 + 0,15 U_1 + 1,17 U_2 + 6,28 V_0 + 1,59 V_1 + 3,14 V_2, \tag{9}$$

waarbij ter wille van de volledigheid ook de bijdrage van de in 3.3 besproken componenten  $V_0$  en  $V_2$  opgenomen is.

Uit tabel 3.8.1 en formule (9) kan men o.a. de verhoging in het midden van de zuidkust bepalen. De uitdrukking hiervoor is gegeven door formule (4) van 3.1.

### 3.8.2 Het model met exponentiële diepte

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust geldt de uitdrukking (24) van 3.5, die we hier nogmaals, zonder de ordeterm, opschrijven:

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = xU_0 + \left(x - \frac{x^2}{\pi}\right) U_1 + xU_2 + \\ - \frac{2\alpha}{b} U_2 \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi - \sum_1^{\infty} (\mu_n - \alpha) c_n \int_0^x e^{A\xi} \sin n\xi d\xi. \tag{10}$$

De coëfficiënten  $c_n$  kunnen met behulp van (14) en (9) van 3.5 berekend worden. Zij zijn lineaire uitdrukkingen in  $U_0, U_1, U_2, V_1$ , waarvan de respectieve factoren in tabel 3.8.2 voor enige waarden van  $n$  gegeven zijn.

Tabel 3.8.2  
Enkele ontwikkelingscoëfficiënten

$c_k$	$U_0$	$U_1$	$U_2$	$V_1$
$c_1$	0,094	0,017	0,154	-0,239
$c_2$	0,014	0,016	0,022	-0,036
$c_3$	0,006	0,004	0,010	-0,016
$c_4$	0,002	0,003	0,003	-0,005
$c_5$	0,001	0,001	0,002	-0,004

De integralen in het rechterlid van (10) kunnen in elementaire functies uitgedrukt worden en zijn aldus gemakkelijk te berekenen. Schrijven we naar analogie van (2)

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0,0) \} = C_0 U_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + D_0 V_0 + D_1 V_1 + D_2 V_2, \tag{11}$$

dan kan tabel 3.8.3 samengesteld worden.

Tabel 3.8.3

De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte

$8x/\pi$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$D_0$	$D_1$	$D_2$
0	0	0	0	0	0	0
1	0,37	0,33	0,36	0	0,05	0
2	0,70	0,54	0,66	0	0,21	0
3	1,02	0,66	0,93	0	0,40	0
4	1,33	0,69	1,21	0	0,62	0
5	1,63	0,64	1,46	0	0,86	0
6	1,93	0,52	1,73	0	1,06	0
7	2,24	0,29	1,99	0	1,31	0
8	2,59	-0,04	2,33	0	1,40	0

Voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) geldt de uitdrukking (26) van 3.5 of korthalve

$$gh_0 \zeta(0,0) = I + II + III, \quad (12)$$

waarbij

$$I = -\frac{1 - e^{-2\alpha b}}{2\alpha} V_1 + \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(0, \eta) d\eta,$$

$$II = \sum_1^{\infty} \frac{n}{\mu_n + \alpha} c_n$$

en

$$III = -e^{-2\alpha b} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\mu_n - \alpha} d_n.$$

Noch de berekening van I, noch die van II geeft moeilijkheden. De berekening van III berust op de bepaling van de coëfficiënten  $d_n$ . Deze is uitgevoerd op analoge wijze als in 4.6, zodat we op deze plaats van een gedetailleerde bespreking afzien. We merken hierbij op, dat bij de numerieke berekening van III veel gemak is ondervonden van de asymptotische ontwikkeling (24) van 3.6. De resultaten van deze berekeningen zijn weergegeven in tabel 3.8.4. We zien hieruit, dat de bijdrage van de term III zeer klein is.

Tabel 3.8.4  
De coëfficiënten van de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0)  
bij het model met exponentiële diepte

	$U_0$	$U_1$	$U_2$	$V_1$
I	— 0,58	— 0,34	— 0,67	— 1,68
II	0,10	0,04	0,17	— 0,26
III	— 0,01	— 0,01	0,01	— 0,05

Hieruit volgt dus met gebruikmaking van (12):

$$-gh_0 \zeta(0,0) = 0,49 U_0 + 0,31 U_1 + 0,49 U_2 + 3,17 V_0 + 1,99 V_1 + 2,04 V_2, \quad (13)$$

waarin de bijdrage van de componenten  $V_0$  en  $V_2$  opgenomen is.

Uit tabel 3.8.3 en formule (13) volgt de absolute verhoging in de overige punten aan de zuidkust. In tabel 3.8.5 geven we de absolute verhoging volgens

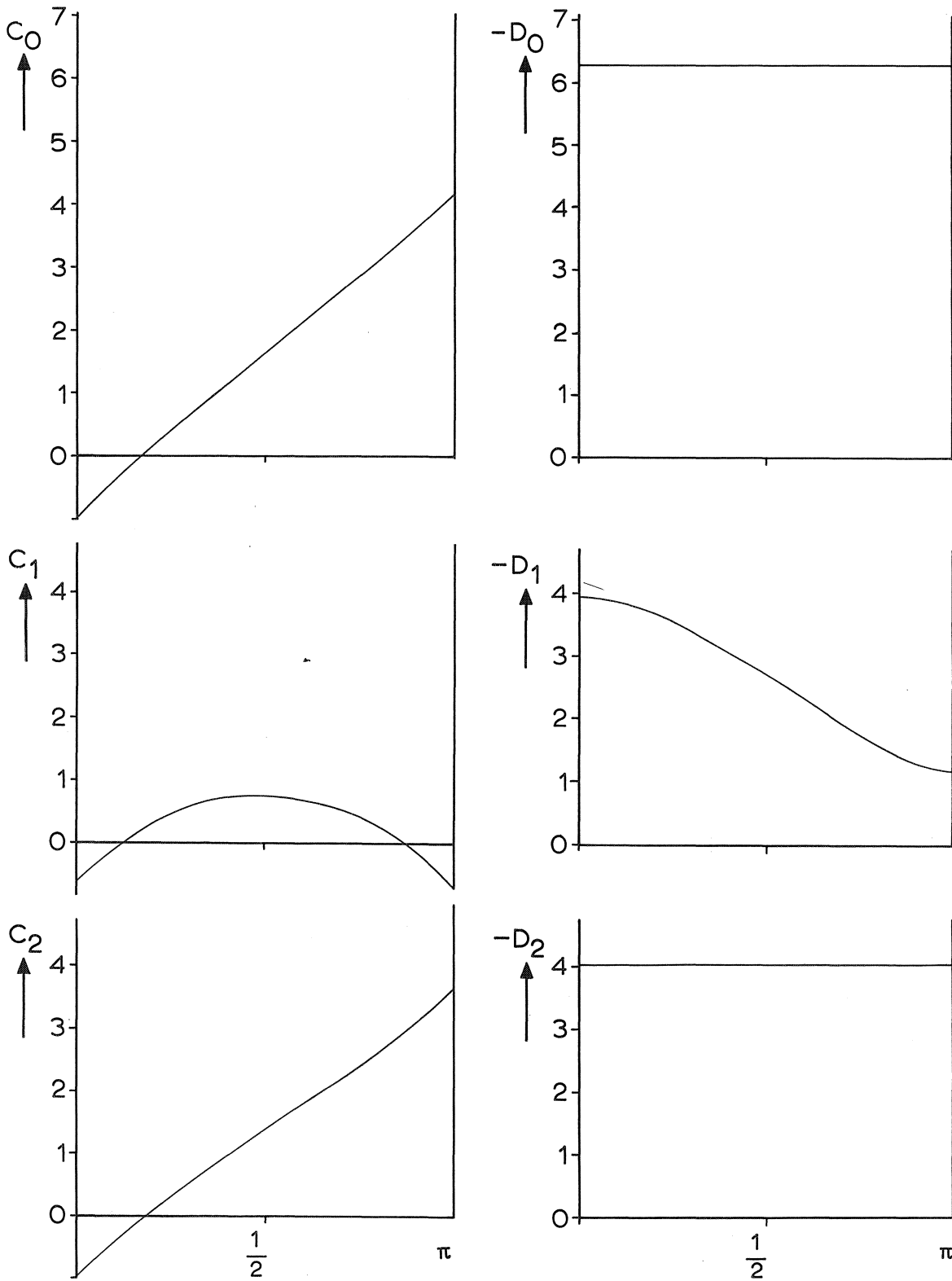
$$gh_m \zeta(x, 0) = C_0 U_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + D_0 V_0 + D_1 V_1 + D_2 V_2. \quad (14)$$

Tabel 3.8.5  
De coëfficiënten van de absolute verhoging aan de zuidkust  
bij het model met exponentiële diepte

$8x/\pi$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$D_0$	$D_1$	$D_2$
0	—0,97	—0,61	—0,97	—6,28	—3,95	—4,04
1	—0,24	0,04	—0,26	—6,28	—3,85	—4,04
2	0,42	0,46	0,34	—6,28	—3,53	—4,04
3	1,05	0,69	0,88	—6,28	—3,15	—4,04
4	1,67	0,71	1,43	—6,28	—2,72	—4,04
5	2,26	0,65	1,92	—6,28	—2,24	—4,04
6	2,86	0,42	2,46	—6,28	—1,84	—4,04
7	3,47	—0,04	2,97	—6,28	—1,35	—4,04
8	4,16	—0,69	3,65	—6,28	—1,17	—4,04

Een grafische illustratie van tabel 3.8.5 wordt gegeven in figuur 3.8.1





Figuur 3.8.1. De absolute verhoging aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld bij het model met exponentiële diepte

3.8.3 *Het model zonder aardrotatie*

De relatieve verhoging aan de zuidkust volgt uit (14) van 3.7 of, met weglating van de ordeterm:

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = x(U_0 + U_2) + x \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) U_1 + \\ + \frac{\alpha}{b} \left( \frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) - \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n (1 - \cos nx), \quad (15)$$

waarbij  $c_n$  door (11) van 3.7 bepaald is. Hieruit kan de met de tabellen 3.8.1 en 3.8.3 overeenkomende tabel 3.8.6 afgeleid worden.

Tabel 3.8.6

De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model zonder aardrotatie

$8x/\pi$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$D_0$	$D_1$	$D_2$
0	0	0	0	0	0	0
1	0,36	0,32	0,35	0	0,09	0
2	0,68	0,54	0,63	0	0,27	0
3	0,98	0,67	0,88	0	0,50	0
4	1,28	0,71	1,14	0	0,75	0
5	1,58	0,67	1,40	0	1,00	0
6	1,88	0,54	1,65	0	1,23	0
7	2,20	0,32	1,93	0	1,41	0
8	2,56	0	2,28	0	1,50	0

De absolute verhoging volgt het eenvoudigst uit formule (16) van 3.1 namelijk

$$gh_0 \zeta \left( \frac{1}{2} \pi, 0 \right) = 0,26 U_1 - 3,17 V_0 - 2,04 V_2, \quad (16)$$

waarbij weer de bijdrage van de componenten  $V_0$  en  $V_2$  opgenomen is. In (5) van 3.1 is het aequivalent van deze uitdrukking met de factor  $gh_m$  gegeven.

Indien zowel  $\Omega = 0$  als  $\alpha = 0$  geeft formule (16) van 3.7 het resultaat:

$$gh_m \zeta \left( \frac{1}{2} \pi, 0 \right) = 0,26 U_1 - 6,28 V_0 - 3,14 V_2. \quad (17)$$

## 4.0 NIET-STATIONAIRE WINDEFFECTEN IN EEN RECHTHOEKIGE BAAI

## 4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we een mathematisch model voor het gedrag van de Noordzee bij een storm. De Noordzee wordt hierbij voorgesteld door een rechthoekige baai, welke aan drie zijden door kusten begrensd is en aan de vierde zijde in een oceaan overgaat. In dit model nemen we aan, dat de baai overal dezelfde diepte heeft (vgl. 1.1). Evenals in 3.0 denken we de lengtes van de baai gemakshalve noord-zuid gericht. De zuidelijke zijde van de rechthoek correspondeert dan met o.a. de Nederlandse kust en het midden van deze zijde komt dan ruwweg overeen met de positie van Den Helder. Een storm wordt beschreven door een gegeven schuifspanning ( $U$ ,  $V$ ) aan het wateroppervlak, welke van de plaats ( $x$ ,  $y$ ) en de tijd  $t$  kan afhangen.

De wiskundige behandeling betreft aanvankelijk dit algemene geval en wordt later nader uitgewerkt voor het geval van een uniforme wind in noord-zuid-richting, namelijk:

$$U = 0 \quad V = V(t). \quad (1)$$

Bij de numerieke toepassing hebben we getracht zo goed mogelijk aan de fysische gegevens van de Noordzee aan te sluiten (vgl. 3.1). Deze toepassing is niet zozeer het doel van het onderzoek dan wel een illustratie van de wiskundige methode. In het bijzonder hebben wij een aantal expliciete resultaten verkregen in de volgende eenvoudige gevallen:

$$\text{exponentieel windveld} \quad U = 0, \quad V = -0,27 (e^{0,12t} - 0,2 e^{0,18t}), \quad (2)$$

$$\text{sprong-windveld} \quad U = 0, \quad V = -1 \quad (t > 0), \quad (3)$$

$$\text{sinuswindveld} \quad U = 0, \quad V = -\sin 0,1t \quad (t > 0). \quad (4)$$

In al deze gevallen is in het bijzonder het verloop van de verhoging in het midden van de zuidkust berekend en is hierbij de invloed van de draaiing van de aarde ( $\Omega$ ) en de wrijvingsconstante ( $\lambda$ ) nagegaan. De resultaten zijn weergegeven in de figuren 4.10.1, 4.10.3 en 4.10.4. Voor het geval van een exponentieel windveld is in figuur 4.10.2 een aantal momentopnamen van de rechthoekige baai gegeven, waarbij telkens enige niveaulijnen geschetst zijn. Opmerkelijk is, dat reeds bij dit zeer eenvoudige model van een windveld althans kwalitatief het werkelijk verloop van de niveaulijnen goed weergegeven wordt. De in deze grafieken en de bijbehorende tabellen gegeven getallen betreffen dimensieloze grootheden. Hierbij staat de tijd in eenheden van ongeveer 1,4 uur en de lengte in eenheden van ongeveer 127 km. De windvelden zijn zodanig genormeerd, dat bij de bovengenoemde drie gevallen de maximaal optredende windsnelheid  $v_s$  dezelfde is. Om uit de voor de verhoging  $\zeta$  gegeven getallen een resultaat in meters af te leiden, moeten deze getallen met een van  $v_s$  kwadratisch afhankelijke factor vermenigvuldigd worden, welke voor enkele gevallen in tabel 4.10.1 gegeven is.

In dit hoofdstuk zijn de middelen aangegeven om de numerieke toepassingen naar believen uit te breiden. Het spreekt vanzelf, dat de op grond van de hier gegeven numerieke toepassingen te trekken conclusies met voorzichtigheid dienen te worden beschouwd. Zoals reeds in 1.1 is uiteengezet, verschaffen de gevonden resultaten ons slechts een globaal inzicht in de waterbeweging van de Noordzee.

De uitkomsten van deze studie geven aanleiding tot de volgende conclusies:

1. De invloed van de aardrotatie  $\Omega$  uit zich hoofdzakelijk in een oost-west-scheefheid van het wateroppervlak. Deze scheefheid is aan de zuidkust zeer gering en neemt in noordelijke richting toe tot dicht bij de oceaan. Voorts bewerkstelligt  $\Omega$  aan de zuidkust een verlaging van de maximale opwaaiing.
2. Bij een plotseling opstekende storm (sprong-windveld) neemt de verhoging aan de zuidkust snel toe, zodat na ongeveer 12 uur de verhoging reeds 90% van de stationaire opwaaiing bedraagt.
3. Bij een storm van het sinustype kan de verhoging aan de zuidkust redelijk beschreven worden door de bij de windsterkte van het ogenblik behorende stationaire verhoging, welke een zekere vaste tijd later zou optreden.
4. Bij een storm van het sinustype kan de verhoging aan de zuidkust opgevat worden als de som van de kwasi-stationaire opwaaiing (opgedrongen slingering) en een van de laagste negatief-reële eigenwaarde afkomstige dempingsterm.

In dit hoofdstuk worden de volgende punten behandeld:

In 4.2 wordt het probleem mathematisch beschreven met behulp van de vereenvoudigde hydrodynamische vergelijkingen voor de stroom ( $u, v$ ) en de verhoging  $\zeta$ . Met behulp van een Laplace-transformatie wordt de tijd hieruit verwijderd. Eliminatie van de stroom leidt tot een Helmholtzvergelijking voor  $\bar{\zeta}$ , de Laplace-getransformeerde van de verhoging, met een gemengde randvoorwaarde. Dit probleem kan teruggebracht worden tot een probleem van Green. Aangezien voor een rechthoekige baai de functie van Green niet op expliciete wijze kan worden bepaald, terwijl dit voor een oneindig lange strook wel mogelijk is, wordt ter oplossing van het gestelde probleem de volgende weg ingeslagen.

Met behulp van de functie van Green voor een oneindig lange strook, welke in 4.3 bepaald wordt, is het mogelijk de Laplace-getransformeerde van de verhoging  $\bar{\zeta}_0$  in de strook te vinden. De Laplace-getransformeerde van de verhoging  $\bar{\zeta}$  in de rechthoekige baai schrijven we als

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \bar{\zeta}_0(x, y, p) + \bar{\zeta}_1(x, y, p) \quad (5)$$

De functie  $\bar{\zeta}_1$  is een lineaire combinatie van vrije bewegingen in de strook, namelijk twee Kelvin-golven en twee stelsels Poincaré-golven.

In 4.4 wordt deze methode nader uitgewerkt voor het uniforme windveld (1). In dit geval kan  $\bar{\zeta}_0$  gemakkelijk rechtstreeks bepaald worden. De coëfficiënten  $A_j$  en  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) van de Kelvin- en Poincaré-golven, waaruit  $\bar{\zeta}_1$  samengesteld is, kunnen met behulp van de randvoorwaarde aan de zuidelijke rand (kustvoorwaarde) en die aan de noordelijke rand (oceanvoorwaarde) bepaald worden.

De kustvoorwaarde wordt besproken in 4.5 en leidt tot een stelsel lineaire betrekkingen I.

De oceanvoorwaarde wordt besproken in 4.6 en leidt tot een soortgelijk stelsel II. Het probleem is nu teruggebracht tot de bepaling van de coëfficiënten uit I en II, waarna nog een inverse Laplace-transformatie moet worden uitgevoerd.

Voor kleine waarden van  $\Omega$  zijn deze stelsels in 4.8 opgelost. Dit leidt o.a. tot een eenvoudige benaderde uitdrukking voor  $\zeta$  aan de zuidkust (zie (12) van 4.8). Het blijkt hierbij, dat op de lengteas van de baai de invloed van  $\Omega$  een effect van de tweede orde is, zodat er in eerste instantie een symmetrische scheefheid van de zeespiegel om deze as ontstaat. Het limietgeval  $\Omega = 0$ , dat van eenvoudige aard is, is zelfstandig in 4.7 behandeld. Voor de toepassing op de Noordzee heeft dit slechts enige kwalitatieve betekenis omdat de coëfficiënt van Coriolis voor de Noordzee eerder groot dan klein genoemd kan worden.

In 4.9 wordt daarom een benadering afgeleid als  $\Omega \gg p$ . Hoewel een mathematisch streng bewijs ontbreekt, lijkt de veronderstelling gewettigd, dat met deze benadering, na de inverse Laplace-transformatie, een resultaat wordt verkregen, dat de toestand gedurende en na het hoogtepunt van de storm goed beschrijft.

In 4.10.1. wordt een numerieke toepassing gegeven voor het exponentiële windveld (2). In dit geval zijn de stelsels I en II exact opgelost. Aangezien hierbij de inverse Laplace-transformatie niet uitgevoerd behoeft te worden, zijn de uiteindelijk verkregen numerieke resultaten voor  $\zeta(x, y, t)$  eveneens exact.

In 4.10.2 en 4.10.3 waarbij respectievelijk de windvelden (3) en (4) behandeld worden, is gebruik gemaakt van de in 4.9 afgeleide benadering voor  $\zeta$  in het midden van de zuidkust. Met behulp van een inverse Laplace-transformatie, welke hier onontbeerlijk is, zijn de bovenbeschreven numerieke resultaten afgeleid.

## 4.2 Probleemstelling

De mathematische beschrijving van het rechthoekige Noordzeemodel wordt gegeven door differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2, namelijk

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) u - \Omega v + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) v + \Omega u + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

met de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 & \text{voor } x &= 0 & \text{en } x &= a \\ v &= 0 & \text{voor } y &= 0 \\ \zeta &= 0 & \text{voor } y &= b. \end{aligned} \right\} (2)$$

Het verband tussen de componenten  $U, V$  van de windkracht en de windsnelheid aan het zeeoppervlak is volgens (3) en (5) van 2.2:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = k \frac{\rho a}{\rho} v_s^2. \quad (3)$$

Bij het hier beschouwde model kunnen met voordeel op de volgende wijze dimensieloze grootheden worden ingevoerd:

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &\rightarrow \pi^{-1} a (x, y) & t &\rightarrow \pi^{-1} a c^{-1} t \\ (u, v) &\rightarrow hc (u, v) & \zeta &\rightarrow h\zeta \\ (U, V) &\rightarrow \pi a^{-1} h c^2 (U, V) & b &\rightarrow \pi^{-1} a b. \end{aligned} \right\} (4)$$

Aangezien we voortaan uitsluitend dimensieloze grootheden zullen gebruiken, voeren we hiervoor geen aparte notatie in. Substitutie van de dimensieloze grootheden (4) in (1) en (2) geeft de differentiaalvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) u - \Omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) v + \Omega u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} (5)$$

en de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 & \text{voor } x &= 0 & \text{en } x &= \pi \\ v &= 0 & \text{voor } y &= 0 \\ \zeta &= 0 & \text{voor } y &= b \end{aligned} \right\} (6)$$

De betrekking (3) wordt met dimensieloze  $U$  en  $V$ :

$$\sqrt{U^2 + V^2} = \frac{k \rho_a a}{\pi \rho h c^2} v_s^2 \quad (7)$$

In de numerieke toepassing nemen we:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ km} & \Omega &= 0,43 \text{ h}^{-1} \\ b &= 800 \text{ km} & \lambda &= 0,09 \text{ h}^{-1} \\ h &= 65 \text{ m} & c &= 91 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

Voorts is:

$$\rho_a / \rho = 1,21 \cdot 10^{-3} \text{ en } k = 0,0025.$$

Substitutie van deze getallenwaarden in (4) geeft o.a. een tijdschaal van 1,4 uur. De numerieke grootte van de in (5) en (6) optredende dimensieloze constanten is met een geringe afronding:

$$\Omega = 0,6 \quad \lambda = 0,12 \quad b = 2\pi. \quad (8)$$

De betrekking (7) wordt met bovenstaande getallen:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = 0,93 \cdot 10^{-5} v_s^2, \quad (9)$$

indien  $v_s$  in m/sec wordt gemeten.

De eerste stap tot de oplossing van het stelsel (5) met de randvoorwaarden (6) bestaat uit de eliminatie van de tijdvariabele met behulp van de Laplace-transformatie (8) van 2.2:

$$\bar{\zeta}(x, y, p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-pt} \zeta(x, y, t) dt \text{ enz.} \quad (10)$$

De vergelijkingen (5) gaan over in:

$$\left. \begin{aligned} (p + \lambda) \bar{u} - \Omega \bar{v} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} &= \bar{U} \\ (p + \lambda) \bar{v} + \Omega \bar{u} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} &= \bar{V} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + p \bar{\zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

Eliminatie van  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  leidt in overeenstemming met (11) van 2.2 tot de inhomogene Helmholtz-vergelijking:

$$(\Delta - \kappa^2) \bar{\zeta} = \bar{F}(x, y, p), \quad (12)$$

met

$$\bar{F}(x, y, p) = \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) + \text{tg } \gamma \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right), \quad (13)$$

waarin

$$\operatorname{tg} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega}{p + \lambda}. \quad (14)$$

Uit de eerste twee vergelijkingen van (11) volgt:

$$p^{-1} \kappa^2 \bar{u} = - \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) + (\bar{U} + \operatorname{tg} \gamma \bar{V}) \quad (15)$$

en

$$p^{-1} \kappa^2 \bar{v} = - \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) + (\bar{V} - \operatorname{tg} \gamma \bar{U}). \quad (16)$$

Hieruit vloeien de volgende randvoorwaarden voort (vgl. (14) van 2.2):

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \bar{U} + \operatorname{tg} \gamma \bar{V} \quad \text{voor } x = 0 \quad \text{en } x = \pi \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{V} - \operatorname{tg} \gamma \bar{U} \quad \text{voor } y = 0 \quad (18)$$

De oceaanvoorwaarde is eenvoudig (vgl. (13) van 2.2):

$$\bar{\zeta} = 0. \quad (19)$$

Uit (12) en hetzij (15), hetzij (16) kan een inhomogene Helmholtzvergelijking voor  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  afgeleid worden, namelijk

$$(\Delta - \kappa^2) \bar{u} = \bar{F}_1(x, y, p), \quad (\Delta - \kappa^2) \bar{v} = \bar{F}_2(x, y, p), \quad (20)$$

waarbij

$$\bar{F}_1(x, y, p) = (p + \lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) - p (\bar{U} + \operatorname{tg} \gamma \bar{V}) \quad (21)$$

en

$$\bar{F}_2(x, y, p) = (p + \lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - p (\bar{V} - \operatorname{tg} \gamma \bar{U}). \quad (22)$$

De vergelijkingen (11) kunnen ook op andere wijze ontstaan. Indien men namelijk een oplossing zoekt, waarbij de afhankelijkheid van de tijd uitsluitend bestaat in een exponentiële factor  $\exp(pt)$ , dan kan men stellen:

$$\zeta(x, y, t) = \bar{\zeta}(x, y, p) e^{pt}, \quad (23)$$

en overeenkomstig voor  $u$ ,  $v$ ,  $U$  en  $V$ . Substitutie in (5) leidt aldus tot het stelsel (11). Op deze wijze kan voor (12) met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) een aantal particuliere oplossingen gevonden worden, welke niet meer aan een inverse Laplace-transformatie onderworpen moeten worden. Daar bij deze methode ook  $U$  en  $V$  de factor  $\exp(pt)$  bevatten, kan slechts voor zeer speciale windvelden een oplossing verkregen worden. In 4.10.1 zal hierop nader worden ingegaan.

Zoals in 2.0 besproken is en zoals in het bijzonder in 2.3 nader uiteengezet is, vereist de algemene oplossing van het probleem (12) met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) de voorafgaande oplossing van het probleem van Green. In enkele bijzondere gevallen, met name bij een uniform windveld is een meer rechtstreekse oplossingsmethode mogelijk en kunnen we het probleem van Green buiten beschouwing laten. In 4.4 zullen we hierop nader terugkomen.

Het is echter niet mogelijk gebleken om voor de rechthoek  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < b$  het probleem van Green expliciet op te lossen. Het lukt wel voor de oneindig lange strook  $0 < x < \pi$ ,  $-\infty < y < \infty$  (vgl. 2.4) met de gehomogeniseerde randvoorwaarden (17). Het betreffende probleem van Green zal in de volgende paragraaf opgelost worden. Met behulp van de gevonden functie van Green kan het probleem (12) met de inhomogene randvoorwaarden (17) zonder moeite opgelost worden. We noemen de gevonden oplossing  $\bar{\zeta}_0(x, y, p)$ . De oplossing van het probleem (12) voor de rechthoek schrijven we in de vorm:

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \bar{\zeta}_0(x, y, p) + \bar{\zeta}_1(x, y, p). \quad (24)$$

De functie  $\xi_1(x, y, p)$  voldoet dus aan een homogene vergelijking van Helmholtz en aan homogene randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = \pi$  en kan derhalve opgebouwd worden uit de bij de oneindig lange strook behorende Kelvin- en Poincarégolven. Zijn  $A_0$  en  $B_0$  de coëfficiënten van de op- en neergaande Kelvingolf en  $A_j$  en  $B_j$  ( $j = 1, 2, 3 \dots$ ) die van de Poincarégolven, dan leidt de kustvoorwaarde (18) tot lineaire betrekkingen van het type

$$A_j = \Phi_j(B_0, B_1, B_2 \dots) \quad j = 0, 1, 2 \dots \quad (25)$$

en de oceaانvoorwaarde (19) tot lineaire betrekkingen van het type

$$B_j = \Psi_j(A_0, A_1, A_2 \dots) \quad j = 0, 1, 2 \dots \quad (26)$$

De coëfficiënten kunnen uit deze twee stelsels betrekkingen, bijvoorbeeld met behulp van een iteratieve methode, opgelost worden. We merken nog op dat, indien  $b$  groot is, de betrekkingen (25) en (26) overgaan in

$$A_j = \Phi_j(B_0) + O(e^{-b}) \quad (27)$$

en

$$B_j = \Psi_j(A_0) + O(e^{-b}) \quad (28)$$

voor  $j = 0, 1, 2 \dots$ . In de toepassing op de Noordzee is de ordeterm  $O(e^{-b})$  verwaarloosbaar.

### 4.3 Probleem van Green

Het in de voorafgaande paragraaf genoemde probleem van Green voor de oneindige strook  $0 < x < \pi$  luidt expliciet<sup>1)</sup>:

$$(\Delta - \kappa^2) G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = -\delta(x-\xi)(y-\eta) \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi. \quad (2)$$

Voorts verlangen we, dat voor  $|y| \rightarrow \infty$  de functie van Green van de orde  $O(\exp -\varepsilon |y|)$  is, waarbij  $\varepsilon$  een willekeurig kleine positieve constante is.

Uit de stelling van Green volgt gemakkelijk de symmetriebetrekking

$$G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = G(\xi, \eta, x, y, -\gamma). \quad (3)$$

Zodra  $G$  bekend is, volgt  $\xi_0(x, y)$  weer met behulp van dezelfde stelling van Green, nl.

$$\begin{aligned} \xi_0(x, y) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} G(x, y, \xi, \eta, \gamma) \bar{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0, \eta, \gamma) \bar{f}(0, \eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \pi, \eta, \gamma) \bar{f}(\pi, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij

$$\bar{f}(x, y) = \bar{U}(x, y) + \operatorname{tg} \gamma \bar{V}(x, y).$$

Substitutie van (13) van 4.2 en partiële integratie geeft een wat eenvoudiger uitdrukking, nl.:

$$\xi_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \left\{ \bar{U} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \right) G + \bar{V} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \right) G \right\} d\xi d\eta. \quad (5)$$

We zullen hier  $G$  niet systematisch afleiden, maar op de volgende enigszins heuristische wijze een bruikbare voorstelling van  $G$  aangeven.

De bij (1) en (2) behorende Kelvingolven hebben de gedaante:

$$\exp \pm (sx - qy). \quad (6)$$

De bij (1) en (2) behorende Poincarégolven hebben de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} (\sin nx + \theta_n \cos nx) e^{-\nu n y} & \quad n = 1, 2 \dots \\ (\sin nx - \theta \cos nx) e^{\nu n y} & \quad n = 1, 2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Voor dit gebruik van de deltafunctie vergelijk men [23] en [24] Ch 7.

waarbij

$$v_n^2 = n^2 + \kappa^2 \quad \text{en} \quad \theta_n = \frac{n(p + \lambda)}{v_n \Omega}. \quad (8)$$

In verband met (3) proberen we  $G$  als volgt voor te stellen:

$$G = C e^{s(x + \xi - \pi) - a(y - \eta)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\sin nx + \theta_n \cos nx) (\sin n\xi + \theta_n \cos n\xi) e^{-v_n(y - \eta)} \quad \text{voor } y > \eta \quad (9)$$

en

$$G = C e^{-s(x + \xi - \pi) + a(y - \eta)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) (\sin n\xi - \theta_n \cos n\xi) e^{-v_n(\eta - y)} \quad \text{voor } y < \eta \quad (10)$$

De continuïteit van  $G$  bij  $y = \eta$  vereist

$$C \operatorname{sh} s(x + \xi - \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n C_n \sin n(x + \xi) = 0, \quad (11)$$

zodat

$$\theta_n C_n = \frac{2n \operatorname{sh} s\pi}{\pi(n^2 + s^2)} C. \quad (12)$$

We controleren nu of met deze coëfficiënten  $C_n$  en een geschikt gekozen  $C$  aan (1) voldaan wordt. Substitutie van (9) en (10) in (1) geeft met toepassing van differentiatie in gegeneraliseerde zin (zie [23] ch 2 en 5):

$$\begin{aligned} (\Delta - \kappa^2) G &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} G(y > \eta) - \frac{\partial}{\partial y} G(y < \eta) \right\} \delta(y - \eta) = \\ &= \left\{ -2qC \operatorname{ch} s(x + \xi - \pi) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n C_n (\sin nx \sin n\xi + \theta_n^2 \cos nx \cos n\xi) \right\} \delta(y - \eta). \end{aligned}$$

Daar door differentiatie uit (11) volgt, dat

$$2qC \operatorname{ch} s(x + \xi - \pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \theta_n^2 C_n \cos n(x + \xi) = 0$$

leidt de bovenstaande substitutie tot het rechterlid:

$$\left\{ -2\kappa^2 s^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + s^2) v_n^{-1} C_n \sin nx \sin n\xi \right\} \delta(y - \eta).$$

Met behulp van (12) wordt dit:

$$-\frac{4\kappa^2 \operatorname{sh} s\pi}{\pi p \Omega} C \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin n\xi \right) \delta(y - \eta) = -\frac{2\kappa^2 \operatorname{sh} s\pi}{p \Omega} C \delta(x - \xi) \delta(y - \eta).$$

Het blijkt dus, dat voor

$$C = \frac{p \Omega}{2\kappa^2 \operatorname{sh} s\pi} \quad (13)$$

aan alle eisen voldaan is. Uit (12) volgt dan:

$$C_n = \frac{s^2}{\pi \kappa^2} \frac{v_n}{n^2 + s^2}. \quad (14)$$



Substitutie van (13) en (14) in (9) en (10) geeft de expliciete uitdrukking:

$$G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = \frac{p\Omega}{2\kappa^2 \operatorname{sh} s\pi} e^{\sigma \{s(x+\xi-\pi) - q(y-\eta)\}} + \\ + \frac{s^2}{\pi\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{n^2 + s^2} (\sin nx + \sigma\theta_n \cos nx) (\sin n\xi + \sigma\theta_n \cos n\xi) e^{-\nu_n |y-\eta|}, \quad (15)$$

waarbij

$$\sigma = \operatorname{sgn}(y - \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y - \eta}{|y - \eta|}$$

#### 4.4 Oplossing voor een uniform windveld

Indien het windveld uniform is, d.w.z. niet van de plaats afhangt, is het niet nodig van de in de vorige paragraaf afgeleide functie van Green gebruik te maken. We kunnen namelijk op eenvoudige wijze rechtstreeks het probleem voor een oneindig lange strook oplossen. We beschouwen in het bijzonder het uniforme windveld

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= V(t). \end{aligned} \right\} (1)$$

Het probleem (12) van 4.2 met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) van 4.2 vereenvoudigt zich met (1) tot

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \kappa^2 \right) \bar{\xi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} = \operatorname{tg} \gamma \bar{V} \quad \text{voor } x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \bar{V} \quad \text{voor } y = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\xi} = 0 \quad \text{voor } y = b. \quad (5)$$

Bij de oplossing  $\bar{\xi}_0$  van dit probleem voor de oneindig lange strook  $0 < x < \pi$ , waarbij alleen de randvoorwaarden (3) gelden, mogen we veronderstellen, dat  $\bar{\xi}_0$  alleen van  $x$  afhangt. Men verifieert gemakkelijk, dat aan (2) en (3) voldaan wordt door

$$\bar{\xi}_0(x) = -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\kappa} \frac{\operatorname{sh} \kappa (\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\kappa\pi} \bar{V}. \quad (6)$$

Uit (15) en (16) van 4.2 volgt dan voor de componenten van de totale stroom:

$$\bar{u}_0(x) = \frac{p \operatorname{tg} \gamma}{\kappa^2} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \kappa (\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\kappa\pi} \right\} \bar{V}, \quad (7)$$

en

$$\bar{v}_0(x) = \frac{p}{\kappa^2} \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\operatorname{ch} \kappa (\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\kappa\pi} \right\} \bar{V}. \quad (8)$$

In overeenstemming met (24) van 4.2 stellen we nu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_0(x) + \bar{u}_1(x, y) \\ \bar{v} &= \bar{v}_0(x) + \bar{v}_1(x, y) \\ \bar{\xi} &= \bar{\xi}_0(x) + \bar{\xi}_1(x, y), \end{aligned} \right\} (9)$$

waarbij  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{v}_1$  en  $\bar{\xi}_1$  lineaire combinaties van Kelvin- en Poincarégolven zijn. Voor  $\bar{\xi}_1$  zijn deze vrije

golfbewegingen door (6) en (7) van 4.3 gegeven. Met behulp hiervan en met de overeenkomstige vormen voor  $\bar{u}_1$  en  $\bar{v}_1$  stellen we:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, y) = & \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \nu_n^{-1} (n^2 + s^2) A_n \sin nx e^{-\nu_n y} + \\ & - \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \nu_n^{-1} (n^2 + s^2) B_n \sin nx e^{-\nu_n (b-y)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(x, y) = & s \Omega^{-1} A_0 \operatorname{ch} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qy) + s \Omega^{-1} B_0 \operatorname{sh} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qy) + \\ & + \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos nx + \alpha_n \sin nx) e^{-\nu_n y} + \\ & + \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\cos nx - \alpha_n \sin nx) e^{-\nu_n (b-y)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1(x, y) = & A_0 \operatorname{sh} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qy) + B_0 \operatorname{ch} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qy) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} A_n (\sin nx + \theta_n \cos nx) e^{-\nu_n y} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) e^{-\nu_n (b-y)}, \end{aligned} \quad (12)$$

waarbij

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p\Omega}{n\nu_n}. \quad (13)$$

Ten slotte moet aan de randvoorwaarden bij  $y = 0$  en  $y = b$  voldaan worden. De kustvoorwaarde (4) geeft met behulp van (11):

$$\begin{aligned} sA_0 \operatorname{ch} s(x - \frac{1}{2}\pi) + sB_0 \operatorname{sh} s(x - \frac{1}{2}\pi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos nx + \alpha_n \sin nx) + \Omega \bar{v}_0(x) + O(e^{-b}) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

waarbij de ordeterm  $O(e^{-b})$  de bijdrage vormt van de termen met de coëfficiënten  $B_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , d.w.z. de Poincarégolven bij de oceaan. Voor voldoende grote  $b$  kan deze bijdrage verwaarloosd worden. Deze voorwaarde zal in 4.5 nader bestudeerd worden.

De oceaanvoorwaarde (5) geeft met behulp van (12):

$$\begin{aligned} A_0 \operatorname{sh} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qb) + B_0 \operatorname{ch} (s(x - \frac{1}{2}\pi) - qb) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) + \bar{\xi}_0(x) + O(e^{-b}) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

waarbij de ordeterm  $O(e^{-b})$  de bijdrage vormt van de Poincarégolven bij de kust  $y = 0$ . Ook deze term kan voor voldoende grote  $b$  verwaarloosd worden. Deze voorwaarde zal in 4.6 behandeld worden.

In de navolgende behandeling zullen we  $\bar{V} = -1$  kiezen, hetgeen zonder verlies van algemeenheid mogelijk is. Deze keuze komt overeen met het windveld:

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -\delta(t), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

d.w.z. een windstoot uit noordelijke richting op het tijdstip  $t = 0$ .

#### 4.5 Kustvoorwaarde

De voorwaarde (14) van 4.4 leidt tot een stelsel lineaire vergelijkingen van de vorm (25) of (27) van 4.2. In verband met het feit, dat  $\alpha_n = O(n^{-2})$  voor  $n \rightarrow \infty$  kan een dergelijk stelsel gemakkelijk worden verkregen door het linkerlid van (14) van 4.4 in het interval  $(0, \pi)$  in een cosinusreeks te ontwikkelen en de coëfficiënten hiervan gelijk aan nul te stellen. We voeren eerst de volgende notaties in:

$$s_m = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx e^{-s(x-\frac{1}{2}\pi)} dx \quad (1)$$

$$\Gamma_{mn} = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx \sin nx dx \quad (2)$$

$$v_m = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx \bar{v}_0(x) dx, \quad (3)$$

voor  $m = 0, 1, 2, \dots$

Men leidt gemakkelijk de volgende formules af:

$$\left. \begin{array}{ll} m & \text{even} & s_m & = 4\pi^{-1} s (m^2 + s^2)^{-1} \text{sh } \frac{1}{2}s\pi \\ m & \text{oneven} & s_m & = 4\pi^{-1} s (m^2 + s^2)^{-1} \text{ch } \frac{1}{2}s\pi \end{array} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{array}{ll} m+n & \text{even} & \Gamma_{mn} & = 0 \\ m+n & \text{oneven} & \Gamma_{mn} & = 4\pi^{-1} n (n^2 - m^2)^{-1} \end{array} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{array}{ll} m & \text{even} & v_m & = -2p (m^2 + \kappa^2)^{-1} \text{tg } 2\gamma (\frac{1}{2}\kappa\pi)^{-1} \text{th } \frac{1}{2}\kappa\pi \\ m & \text{oneven} & v_m & = 0 \end{array} \right\} (6)$$

Vermenigvuldigen we nu beide leden van (14) van 4.4 met  $\cos mx$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) en integreren we tussen 0 en  $\pi$ , dan vinden we bij verwaarlozing van de ordeterm:

$$\left. \begin{array}{ll} m & \text{even} & A_m & = -s_m s A_0 - \Omega v_m - \sum_1 \Gamma_{0n} \alpha_n A_n \\ m & \text{oneven} & A_m & = s_m s B_0 - \sum_2 \Gamma_{mn} \alpha_n A_n \end{array} \right\} (7)$$

waarbij, zowel hier als later,  $\sum_1$  een sommatie over oneven indices 1, 3, 5... en  $\sum_2$  een over even indices 2, 4, 6... voorstelt. Uit het stelsel (7) kunnen de coëfficiënten  $A_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) vrij gemakkelijk met behulp van een iteratief proces in  $B_0$  uitgedrukt worden. Aldus leidt (7) tot een stelsel van de vorm (28) van 4.2.

We kunnen de betrekking (14) van 4.4 ook als volgt schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = \alpha(x). \quad (8)$$

Daarbij is, wederom met weglating van de ordeterm

$$-\alpha(x) = sA_0 \text{ch } s(x-\frac{1}{2}\pi) + sB_0 \text{sh } s(x-\frac{1}{2}\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \sin nx + \Omega \bar{v}_0(x). \quad (9)$$

Uit (8) volgt de asymptotische voorstelling van  $A_n$ :

$$A_n = -2\pi^{-1} \{ \alpha'(0) + (-1)^{n-1} \alpha'(\pi) \} n^{-2} + O(n^{-4}). \quad (10)$$

We schrijven dit in de volgende vorm:

$$A_n \approx \{ A' + (-1)^{n-1} A'' \} n^{-2}. \quad (11)$$

De betekenis van dit resultaat met betrekking tot het gedrag van  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  en  $\bar{\xi}$  in de hoekpunten (0, 0) en  $(\pi, 0)$  volgt door beschouwing van de reeksen met de coëfficiënten  $A_n$  in (10), (11) en (12) van 4.4. Zonder moeite zien we, dat  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  en  $\bar{\xi}$  daar continu zijn.

#### 4.6 Oceaanvoorwaarde

De voorwaarde (15) van 4.4 leidt tot een soortgelijk stelsel lineaire vergelijkingen als de kustvoorwaarde (14) van 4.4. Het dan verkregen stelsel is van de vorm (26) of (28) van 4.2. We herhalen nog even de voorwaarde (15) van 4.4. Met weglating van de ordeterm is

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = \varphi(x), \quad (1)$$

waarin

$$-\varphi(x) = A_0 \text{sh } (s(x-\frac{1}{2}\pi) - qb) + B_0 \text{ch } (s(x-\frac{1}{2}\pi) - qb) + \bar{\xi}_0(x). \quad (2)$$

Ontwikkelingen van het type (1) zijn elders uitvoerig bestudeerd [18]. Enkele aldaar verkregen resultaten zullen hieronder zonder bewijs medegedeeld worden. We merken eerst nog op, dat voor  $n \rightarrow \infty$ :

$$\theta_n = \theta + O(n^{-2}), \quad (3)$$

waarbij

$$\theta = (p + \lambda) / \Omega = \cotg \gamma. \quad (4)$$

De eigenschappen van de ontwikkeling (1) zijn daarom sterk verwant aan die van de eenvoudiger ontwikkeling

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin nx - \theta \cos nx) = \beta(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (5)$$

We zullen ons eerst met deze reeksontwikkeling bezighouden.

De ontwikkeling (5) is eenduidig en de coëfficiënt  $b_n$  heeft voor  $n \rightarrow \infty$  het volgende gedrag:

$$b_n = B n^{-1+\alpha} + (-1)^{n-1} B' n^{-1-\alpha} + B'' n^{-3+\alpha} + \dots \quad (6)$$

waarbij

$$\alpha = 2\pi^{-1} \arctg \theta = 1 - 2\pi^{-1} \gamma. \quad (7)$$

Voor  $B$  heeft men de expliciete uitdrukking:

$$B = -\frac{2^\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha\pi}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_0^\pi (\tg \frac{1}{2}x)^{\alpha-1} \beta(x) dx. \quad (8)$$

Volgens (6) en (8) convergeert de reeks (5) vrij langzaam, namelijk subharmonisch. Indien  $B = 0$  is, is de convergentie evenwel van hyperharmonische orde. De functies, aan het stelsel  $\sin nx - \theta \cos nx$  met  $n = 1, 2, \dots$  biorthogonaal toegevoegd, zijn betrekkelijk eenvoudig en bestaan uit een product van een trigonometrische som en de factor  $(\tg \frac{1}{2}x)^{\alpha-1}$ .

Voor ons is slechts de eerste functie van dit biorthogonale stelsel van belang, namelijk,  $(\tg \frac{1}{2}x)^{\alpha-1}$  zelf. Hiervoor geldt:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha\pi}{\pi} \int_0^\pi (\sin nx - \theta \cos nx) (\tg \frac{1}{2}x)^{\alpha-1} dx = \begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ -1 & n = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Bij deze beschouwingen hebben we ons nog niet uitgelaten over de functie  $\beta(x)$ . Het is voor de meeste gevallen voldoende, dat  $\beta(x)$  een in  $(0, \pi)$  continue afgeleide bezit.

De eigenschappen van de ontwikkeling (1) kunnen we hieruit afleiden, indien we stellen:

$$B_n = n b_n, \quad \beta(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n - \theta) b_n \cos nx. \quad (10)$$

In het bijzonder geldt de asymptotische voorstelling (6) nl.:

$$B_n = B n^\alpha + (-1)^{n-1} B' n^{-\alpha} + B'' n^{-2+\alpha} + \dots \quad (11)$$

waarbij  $B, B', B''$  nu andere constanten zijn.

We zullen nu laten zien, dat het mathematische model vereist, dat  $B = 0$  is. Dit brengt met zich mee, dat aan  $\varphi(x)$  een bepaalde voorwaarde opgelegd wordt, te weten

$$\int_0^\pi h_0(x) \varphi(x) dx = 0, \quad (12)$$

waarbij  $h_0(x)$  orthogonaal is ten opzichte van alle functies van het stelsel  $\sin nx - \theta_n \cos nx, n = 1, 2, \dots$  Deze orthogonaliteitsbetrekking leidt dan uiteindelijk tot een lineaire betrekking tussen  $A_0$  en  $B_0$ .

Men ziet gemakkelijk in, dat eventuele singulariteiten van het model slechts bij de hoekpunten  $(0, b)$  en  $(\pi, b)$  kunnen voorkomen. Uit (12) van 4.4 en (11) volgt, dat voor het hoekpunt  $(0, b)$  in lokale poolcoördinaten  $(r, \varphi)$ , bepaald door:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = b - r \sin \varphi, \quad (13)$$

$$\xi(x, y) = B \sec \frac{1}{2}\alpha\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha} \exp i(nre^{i\varphi} - \frac{1}{2}\alpha\pi) \right\} + O(1), \quad (14)$$

zodat voor  $r \rightarrow 0$ :

$$\bar{\xi}(x, y) = B\Gamma(\alpha) \sec \frac{1}{2}\alpha\pi r^{-\alpha} \sin \alpha\varphi + O(1). \tag{15}$$

Het blijkt dus, dat een oplossing met  $B \neq 0$  zou leiden tot een discontinuïteit voor  $\bar{\xi}$  in het hoekpunt  $(0, b)$ , hetgeen niet met de fysische realiteit overeenkomt. Derhalve is dus  $B = 0$ . Op overeenkomstige wijze blijken ook  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  in dit hoekpunt nu continu te zijn. We onderzoeken vervolgens het hoekpunt  $(\pi, b)$ . In lokale poolcoördinaten  $(r, \varphi)$ , bepaald door

$$x = \pi - r \cos \varphi, \quad y = b - r \sin \varphi, \tag{16}$$

heeft men weer voor  $r \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(x, y) &= \text{constante} - B' \sec \frac{1}{2}\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} \exp -i(nre^{-i\varphi} + \frac{1}{2}\alpha\pi) + O(r) = \\ &= \text{constante} + B' \Gamma(-\alpha) \sec \frac{1}{2}\alpha\pi r^\alpha \sin \alpha\varphi + O(r). \end{aligned} \tag{17}$$

In dit hoekpunt is  $\bar{\xi}$  dus continu. De afgeleiden van  $\bar{\xi}$  naar  $x$  en  $y$  zijn dit echter niet, hetgeen betekent, dat de stroming in dit punt discontinu is. Hieraan valt niets meer te veranderen en dit feit moet dan ook beschouwd worden als inhaerent te zijn aan het gekozen model, te weten een ondiepe zee, welke plotseling in een „oneindig diepe” oceaan overgaat. We staan nu voor de taak, uit (1) een stelsel betrekkingen van het type (26) van 4.2 af te leiden, zoals we dit voor de kustvoorwaarde gedaan hebben. Praktisch stuit dit op moeilijkheden in verband met de uit (11) voortvloeiende langzame convergentie. In de in dit hoofdstuk beschouwde numerieke toepassing is deze moeilijkheid als volgt opgelost. We stellen:

$$B_n = (-1)^{n-1} B' n^{-\alpha} + B'' n^{-2+\alpha} + (-1)^{n-1} B''' n^{-2-\alpha} + n E_n \tag{18}$$

en

$$\theta_n = \theta - \varepsilon_n, \tag{19}$$

waarbij dus  $E_n$  en  $\varepsilon_n$  als kleine correcties beschouwd kunnen worden. Daarmee kan (1) geschreven worden als:

$$\begin{aligned} & B' \{ \Psi(\pi-x, 1+\alpha) + \theta \Phi(\pi-x, 1+\alpha) + E' \} + \\ & + B'' \{ \Psi(x, 3-\alpha) - \theta \Phi(x, 3-\alpha) + E'' \} + \\ & + B''' \{ \Psi(\pi-x, 3+\alpha) + \theta \Phi(\pi-x, 3+\alpha) + E''' \} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = \varphi(x), \end{aligned} \tag{20}$$

waarbij

$$\begin{aligned} \Phi(x, s) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cos nx, \\ \Psi(x, s) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sin nx, \\ E' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1-\alpha} \varepsilon_n \cos nx, \\ E'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3+\alpha} \varepsilon_n \cos nx, \\ E''' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3-\alpha} \varepsilon_n \cos nx. \end{aligned} \tag{21}$$

In de praktijk breken we de laatste reeks in het linkerlid van (20) af bij de  $j^e$  term. Voor  $x$  kiezen we daarna  $j + 4$  waarden, welke even zovele lineaire vergelijkingen opleveren. Daaruit kunnen  $B_0, E_1, E_2, \dots, E_j, B', B'', B'''$  worden bepaald, d.w.z. lineair uitgedrukt in  $A_0$ .

Op het hier beschreven proces zijn nog wel enkele niet essentieel verschillende varianten mogelijk. We merken op, dat bij dit proces de reeksen  $\Phi$  en  $\Psi$  gemakkelijk sommeerbaar zijn en dat de reeksen  $E', E'', E'''$  vrij snel convergeren.

In de te maken numerieke toepassing zullen we  $j = 3$  kiezen, terwijl voor  $x$  de volgende waarden gesubstitueerd zullen worden:

$$x = 0, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi. \tag{22}$$

#### 4.7 Het bijzondere geval $\Omega = 0$

In het speciale geval, dat  $\Omega = 0$  is, kan een oplossing van het gestelde probleem gemakkelijk langs directe weg verkregen worden. Indien evenals in (16) van 4.4:

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -\delta(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

luit de oplossing van (12) van 4.2 met (17), (18) en (19) van 4.2:

$$\bar{u} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{p + \lambda} \left\{ 1 - \frac{\text{ch } q(b-y)}{\text{ch } qb} \right\} \quad (3)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\text{sh } q(b-y)}{q \text{ ch } qb} \quad (4)$$

Vergelijken we dit met de algemene uitdrukkingen (10) van 4.4 e.v., dan blijkt gemakkelijk dat door specialisatie de bovenstaande uitdrukkingen afgeleid kunnen worden, indien voor  $\Omega \rightarrow 0$  de volgende limietovergangen in acht genomen worden:

$$\left. \begin{aligned} A_n \Omega^{-1} &\rightarrow 0 & B_n \Omega^{-1} &\rightarrow 0 & \text{voor } n &\geq 1 \\ A_0 &\rightarrow q^{-1} & B_0 &\rightarrow q^{-1} \text{ th } qb. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Voor later gebruik geven we nog de waarde van  $\bar{\xi}$  aan de kust  $y = 0$ :

$$\bar{\xi}(x, 0, p) = q^{-1} \text{ th } qb. \quad (6)$$

#### 4.8 Benadering voor kleine $\Omega$

Indien  $\Omega$  klein is, kunnen we heel geschikt  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  en  $\bar{\xi}$  naar opklimmende machten van  $\Omega$  ontwikkelen. We zullen ons hier alleen met de laagste termen bezighouden. Overigens zijn aan de bepaling van de latere termen geen essentiële moeilijkheden verbonden.

Een oppervlakkige beschouwing van de kustvoorwaarde (14) van 4.4 en de oceaانvoorwaarde (15) van 4.4 leert al, dat voor  $\Omega \rightarrow 0$ :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= O(1) & B_0 &= O(1) \\ n = \text{even} & A_n = O(\Omega^3) & B_n &= O(\Omega^3) \\ n = \text{oneven} & A_n = O(\Omega^2) & B_n &= O(\Omega^2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

We merken op, dat

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= p\Omega (n^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} & \{ 1 + O(\Omega^2) \} \\ v_n &= (n^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} & \{ 1 + O(\Omega^2) \} \\ \theta_n &= n(p + \lambda)\Omega^{-1} (n^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} & \{ 1 + O(\Omega^2) \}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Uit (4) en (6) van 4.5 volgt:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= 2 \{ 1 + O(\Omega^2) \} \\ v_0 &= -2(p + \lambda)^{-1} \{ 1 + O(\Omega^2) \}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Met behulp van deze schattingen volgt uit het stelsel (7) van 4.5 met weglating van de ordeterm  $O(e^{-b})$ :

$$A_0 = q^{-1} \{ 1 + O(\Omega^2) \} \quad (4)$$

en voor oneven  $n$

$$A_n = \frac{4s^2}{\pi n^2} B_0 \{ 1 + O(\Omega^2) \} \quad (5)$$

We beschouwen vervolgens de oceaانvoorwaarde (15) van 4.4. Deze leidt met behulp van bovenstaande schattingen tot:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} B_n \cos nx &= \text{tg } \gamma \{ s(x - \frac{1}{2}\pi) \text{ ch } qb - \text{sh } qb \} A_0 + \\ &- \text{tg } \gamma \{ s(x - \frac{1}{2}\pi) \text{ sh } qb - \text{ch } qb \} B_0 - \text{tg}^2 \gamma q^{-1} \text{ sech } \frac{1}{2} q\pi \text{ sh } q(x - \frac{1}{2}\pi) + O(\Omega^3) \end{aligned} \quad (6)$$

Daar linker- en rechterlid in het interval  $(0, \pi)$  gemiddeld nul zijn, volgt hieruit, dat

$$B_0 = q^{-1} \operatorname{th} qb \{ 1 + O(\Omega^2) \}. \quad (7)$$

Voorts kunnen we hieruit gemakkelijk afleiden, dat voor oneven  $n$ :

$$B_n = -\frac{4s^2 \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + q^2}}{n^2 \operatorname{ch} qb} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + q^2}} \right\}}{\pi q^2} \{ 1 + O(\Omega) \}. \quad (8)$$

Met behulp van (4), (5), (7) en (8) vinden we bijvoorbeeld voor  $\bar{\zeta}(x, y)$  uit (6) en (12) van 4.4:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(x, y) &= \frac{\operatorname{sh} q(b-y)}{q \operatorname{ch} qb} + \\ &+ \operatorname{tg} \gamma \left\{ -\frac{\operatorname{sh} q(x - \frac{1}{2}\pi)}{q \operatorname{ch} \frac{1}{2}q\pi} + \frac{(x - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{ch} q(b-y)}{\operatorname{ch} qb} + \frac{4}{\pi} q \operatorname{th} qb \Sigma_1 \frac{\cos nx e^{-y\sqrt{n^2+q^2}}}{n^2 \sqrt{n^2+q^2}} + \right. \\ &\left. + \frac{4}{\pi} \Sigma_1 \left( \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} qb} - \frac{1}{n^2 + q^2} \right) \cos nx e^{-(b-y)\sqrt{n^2+q^2}} \right\} + O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (9)$$

In het bijzonder volgt hieruit voor  $x = \frac{1}{2}\pi$ :

$$\bar{\zeta}(\frac{1}{2}\pi, y) = \frac{\operatorname{sh} q(b-y)}{q \operatorname{ch} qb} + O(\Omega^2) + O(e^{-b}), \quad (10)$$

zodat dus de invloed van  $\Omega$  op de waarde van  $\bar{\zeta}$  op de as  $x = \frac{1}{2}\pi$  een *tweede-orde-effect* is. De invloed van de draaiing van de aarde leidt dus in eerste instantie tot een symmetrische scheefheid van de zeespiegel om de noord-zuid-as. In formulevorm:

$$\bar{\zeta}(x, y) + \bar{\zeta}(\pi-x, y) = 2 \bar{\zeta}(\frac{1}{2}\pi, y) + O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \quad (11)$$

Voor ons is in het bijzonder de waarde van  $\bar{\zeta}$  van belang aan de kust  $y = 0$ . Uit (9) volgt weer:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(x, 0) &= q^{-1} \operatorname{th} qb + \operatorname{tg} \gamma \left\{ -\frac{\operatorname{sh} q(x - \frac{1}{2}\pi)}{q \operatorname{ch} \frac{1}{2}q\pi} + (x - \frac{1}{2}\pi) + \frac{4}{\pi} q \operatorname{th} qb \Sigma_1 \frac{\cos nx}{n^2 \sqrt{n^2 + q^2}} \right\} \\ &+ O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4.9 Benadering voor grote $\Omega$ en kleine $p$

In de toepassing op de Noordzee is  $\Omega$  relatief groot, zodat de beschouwingen van de vorige paragraaf ten hoogste een kwalitatieve betekenis hebben. Ten einde voor grote waarden van  $\Omega$  verder te kunnen komen, kunnen we verschillende wegen inslaan. We kunnen trachten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\zeta}$  te ontwikkelen voor *grote* waarden van de Laplace-variabele  $p$ . Indien het gelukt termsgewijze de terugtransformatie naar de tijd  $t$  uit te voeren, vinden we een ontwikkeling voor *kleine* waarden van  $t$ . De betekenis hiervan is twijfelachtig, aangezien dit min of meer betekent, dat we het verloop van  $\zeta(x, y, t)$  kennen voor slechts die waarden van  $t$ , waarvoor de storm nog in zijn beginstadium is. Aan de andere kant kunnen we  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\zeta}$  voor *kleine* waarden van  $p$  ontwikkelen, hetgeen leidt tot de toestand, waarbij de storm al afgelopen is. We vermoeden dat we op deze wijze voor een ontwikkeling van  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\zeta}$  voor *matige* waarden van  $p$  toch nog een bruikbaar resultaat vinden. Immers, de schatting van de coëfficiënten  $A_n$  en  $B_n$ , welke we hier zullen afleiden, berust in wezen op het feit, dat  $\Omega$  groot is ten opzichte van de combinatie  $p + \lambda$ . Hierbij is dus het geval ingesloten, dat  $p$  zelf klein is. We vermoeden dat hierdoor na de inverse Laplace-transformatie een resultaat wordt verkregen, dat de toestand beschrijft waarin de storm op zijn hoogtepunt is en ook de toestand daarna. Een exact bewijs daarvoor is echter nog niet gegeven.

Beschouwen we nog eens het oorspronkelijke probleem (12) van 4.2 enz., dan zien we, dat  $\bar{\zeta}$  in wezen van de twee parameters  $\theta$  en  $\varkappa$  afhangt. Daar

$$\varkappa^2 = s^2 (1 + \theta^2), \quad (1)$$

kunnen we ook  $\theta$  en  $s$  als onafhankelijke parameters beschouwen. We doen nu dit laatste en we zullen hierbij veronderstellen, dat  $\theta$  klein en  $s$  noch bijzonder groot, noch bijzonder klein is. Aldus is:

$$\alpha_n = \frac{s^2}{n \sqrt{n^2 + s^2}} \theta \{1 + O(\theta^2)\}, \quad (2)$$

en uit (6) van 4.5 volgt voor even  $m$  inclusief  $m = 0$ :

$$\Omega v_m = \theta s m^{-1} \operatorname{sech} \frac{1}{2} s \pi \{1 + O(\theta^2)\}. \quad (3)$$

Vooruitlopend op een resultaat, dat we straks zullen afleiden, nl.:

$$B_0 = O(\theta^{-1}), \quad (4)$$

volgt nu gemakkelijk uit het stelsel (7) van 4.5:

$$A_0 = \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{sech} \frac{1}{2} s \pi \{1 + O(\theta)\}, \quad (5)$$

voor oneven index:

$$A_n = s_n s B_0 \{1 + O(\theta)\} \quad (6)$$

en voor even index:

$$A_n = O(1). \quad (7)$$

We beschouwen vervolgens de oceaanvoorwaarde (15) van 4.4. We zullen hierbij uitgaan van de veronderstelling, dat  $\theta$  klein en  $\theta b$  (of  $qb$ ) matig is. Men heeft dan voor  $\theta \rightarrow 0$  wederom met weglating van de ordeterm  $O(e^{-b})$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta \cos nx) = \beta(x), \quad (8)$$

waarbij

$$\begin{aligned} \beta(x) = & -A_0 \operatorname{sh} \{s(x - \frac{1}{2}\pi) - qb\} - B_0 \operatorname{ch} \{s(x - \frac{1}{2}\pi) - qb\} + \\ & + \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{sech} \frac{1}{2} s \pi \operatorname{sh} s(x - \frac{1}{2}\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n - \theta) n^{-1} B_n \cos nx + O(\theta). \end{aligned} \quad (9)$$

In 4.6 is gebleken, dat  $\beta(x)$  aan de voorwaarde

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)^{\alpha-1} \beta(x) dx = 0 \quad (10)$$

dient te voldoen, waarbij  $\alpha$  door (7) van 4.6 gegeven is. Daar voor  $\theta \rightarrow 0$  ook  $\alpha \rightarrow 0$  betekent de voorwaarde (10) in de limiet, dat

$$\beta(0) = 0.$$

Gemakkelijk blijkt dat voor  $n \geq 1$ :

$$B_n = O(\theta^{-1}).$$

Uit (9) volgt dus voor  $\theta \rightarrow 0$ :

$$A_0 \operatorname{sh} \beta - B_0 \operatorname{ch} \beta = \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{th} \frac{1}{2} s \pi + O(1), \quad (11)$$

waarbij  $\beta$  gedefinieerd is als

$$\beta = \frac{1}{2} s \pi + qb. \quad (12)$$

Uit (5) volgt voor  $B_0$ :

$$B_0 = \frac{\operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \frac{1}{2} s \pi}{q \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \frac{1}{2} s \pi} + O(1). \quad (13)$$

Met gebruikmaking van de gevonden uitdrukkingen voor  $A_0$  en  $B_0$  volgt uit (8) en (9) na enig rekenwerk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n \sin nx = \frac{(\operatorname{ch} qb - 1) \operatorname{sh} sx}{q \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \frac{1}{2} s \pi} + O(1),$$

zodat

$$B_n = \frac{4(\operatorname{ch} qb - 1) \operatorname{sh} \frac{1}{2} s \pi}{\pi q \operatorname{ch} \beta} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{n^2 + s^2} + O(1). \quad (14)$$



Met behulp van de gevonden benaderingen kan nu een benadering voor bijv.  $\bar{\xi}(x, y)$  afgeleid worden. We zullen ons beperken tot de waarde van  $\bar{\xi}$  aan de kust  $y = 0$ , aangezien deze voor ons het belangrijkste is. Na enig gereken blijkt dat voor  $\theta \rightarrow 0$ :

$$\bar{\xi}(x, 0) = \frac{\text{sh } \beta - \text{sh } \frac{1}{2}s\pi}{q \text{ ch } \beta \text{ ch } \frac{1}{2}s\pi} \left\{ \text{ch } s(x - \frac{1}{2}\pi) + \sum_1 n^{-1} s s_n \sin nx \right\} + O(1). \quad (15)$$

Nu volgt uit (1) en (4) van 4.5, dat

$$\text{sh } s(x - \frac{1}{2}\pi) = - \sum_1 s_n \cos nx,$$

zodat

$$\text{ch } \frac{1}{2}s\pi - \text{ch } s(x - \frac{1}{2}\pi) = \sum_1 n^{-1} s s_n \sin nx.$$

Hiermede vereenvoudigt (15) zich tot

$$\bar{\xi}(x, 0) = \frac{\text{sh } \beta - \text{sh } \frac{1}{2}s\pi}{q \text{ ch } \beta} + O(1) \quad (16)$$

Ter vergemakkelijking zullen we de gevonden benadering van  $\bar{\xi}(x, 0)$  met  $\bar{Z}(p)$  aanduiden, d.w.z.

$$\bar{Z}(p) \stackrel{\text{def}}{=} q^{-1} (\text{th } \beta - \text{sech } \beta \text{ sh } \frac{1}{2}s\pi). \quad (17)$$

Uit (16) blijkt wederom, dat in eerste instantie de verhoging aan de kust  $y = 0$  niet van  $\Omega$  afhangt.

Tot dusverre zijn we uitgegaan van het windveld  $U = 0$ ,  $V = -\delta(t)$ . Vervangen we hier de deltafunctie door een willekeurige tijdfunctie, d.w.z.

$$U = 0 \quad V = V(t), \quad (18)$$

dan is dus, steeds in dezelfde benadering,

$$\bar{\xi}(x, 0) = -\bar{V}(p) \bar{Z}(p), \quad (19)$$

en ten slotte met de inverse Laplace-transformatie:

$$\xi(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \bar{V}(p) \bar{Z}(p) dp, \quad (20)$$

waarbij  $L$  een in het rechterhalfvlak gelegen verticale integratieweg is. Het rechterlid van (20) kan met residu-rekening berekend worden. In de eerste plaats kunnen er polen van  $\bar{V}(p)$  zijn. Interessanter zijn echter de polen van  $\bar{Z}(p)$ . Deze analytische functie, welke in de oorsprong regulier is en waarbij

$$\bar{Z}(0) = b,$$

heeft polen, welke volgen uit  $\text{ch } \beta = 0$ , d.w.z.

$$s(\frac{1}{2}\pi + \theta b) = \pm (m + \frac{1}{2}) \pi i \quad (21)$$

voor  $m = 0, 1, 2, \dots$

Voor elke waarde van  $m$  zijn er aldus drie polen, één reëel en in het interval  $(-\lambda, 0)$  en twee toegevoegd complex met negatief reëel deel.

Deze polen komen kwalitatief overeen met de eigenwaarden van het model. De afwijkingen zullen des te groter zijn naarmate de benadering (16) minder goed is. Aangezien de benadering het beste is als  $|\theta|$  zo klein mogelijk is, kunnen we feitelijk alleen overeenstemming verwachten voor de bij  $m = 0$  behorende polen, welke het dichtste bij de oorsprong liggen. In het bijzonder is dit het geval voor de bij  $m = 0$  behorende negatief reële pool. Hierop komen we bij de numerieke toepassing terug.

De benadering (16) kan ook op de volgende wijze geïnterpreteerd worden. Schrijven we:

$$\bar{Z}(p) = q^{-1} \{ 1 - (e^{s\pi} - 1) e^{-\beta} - 2e^{-2\beta} + (e^{s\pi} - 1) e^{-3\beta} + \dots \}, \quad (22)$$

dan stelt de eerste term in het rechterlid de rechtstreekse verstoring aan de kust  $y = 0$  voor. De tweede term stelt de van de oceaan uitgaande storing voor, welke na  $b$  (dimensieloze) tijdeenheden aan de kust  $y = 0$  arriveert. De derde term stelt de reflectie voor van de rechtstreekse verstoring aan de kust  $y = 0$  ten opzichte van de oceaan. Deze secundaire storing doet zich pas gelden na  $2b$  tijdeenheden, enz.

Indien  $\Omega = 0$  is, gaat (16) over in:

$$\bar{\xi}(x, 0) = q^{-1} \text{th } qb. \quad (23)$$

Volgens (6) van 4.7 is dit voor dit geval de exacte uitdrukking.

Ten slotte vermelden we nog het speciale geval  $\lambda = 0$ . Dan is

$$\bar{Z}(p) \rightarrow p^{-1} \left\{ \text{th} \left( \frac{1}{2} \Omega \pi + pb \right) - \text{sech} \left( \frac{1}{2} \Omega \pi + pb \right) \text{sh} \frac{1}{2} \Omega \pi \right\}. \quad (24)$$

De Laplace-inverse hiervan is:

$$Z(t) = \iota(t) - 2 \text{sh} \frac{1}{2} \Omega \pi \iota(t-b) - 2e^{-\Omega \pi} \iota(t-2b) + 2 \text{sh} \frac{1}{2} \Omega \pi \iota(t-3b) + \dots, \quad (25)$$

waarbij met  $\iota(t)$  de sprongfunctie

$$\iota(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

bedoeld wordt.

#### 4.10 Numerieke toepassingen

##### 4.10.1 Exponentieel windveld

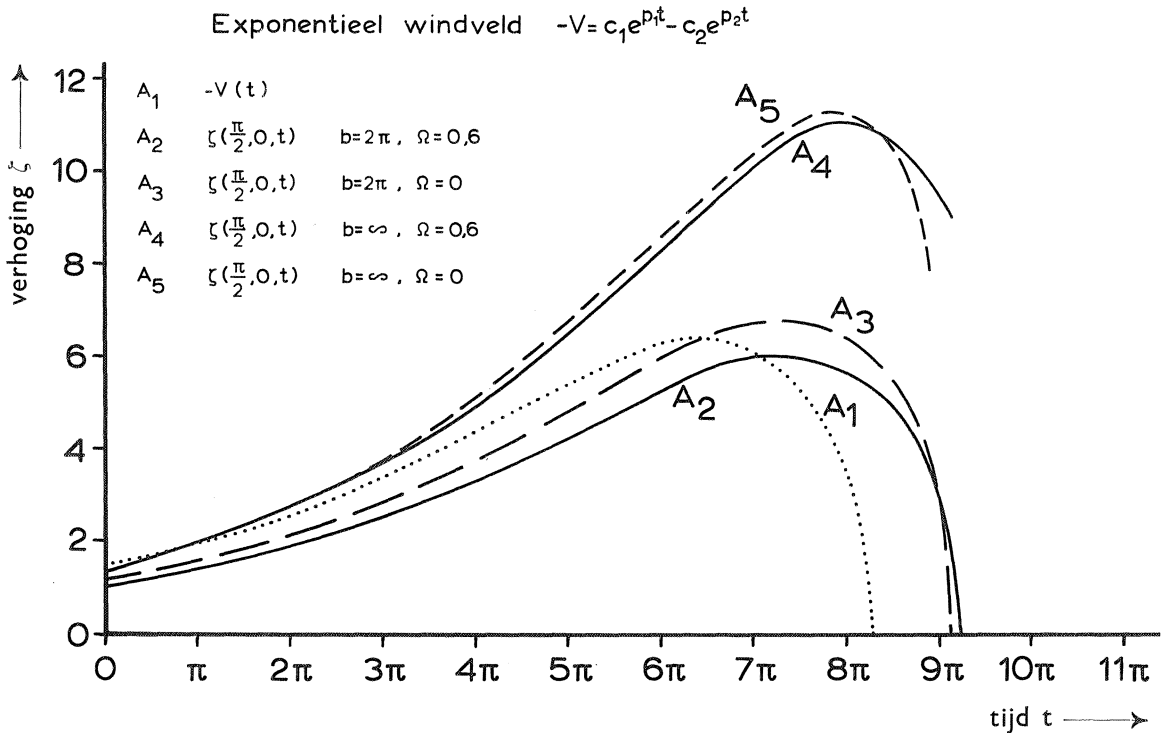
We maken nu de volgende numerieke toepassing:

$$\Omega = 0,6 \qquad \lambda = 0,12 \qquad b = 2\pi$$

en

$$\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -0,27 (e^{0,12t} - 0,2 e^{0,18t}). \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbij hebben we dus een exponentieel windveld gekozen van het in 4.2 beschreven type. De getallenfactoren zijn hierbij vrij willekeurig. We hebben er echter wel voor gezorgd, dat dit windveld een kwalitatief beeld geeft van een opkomende en later weer afnemende storm. Voorts is er voor gezorgd, dat  $|V_{max}| = 1$ . Enkele getallenwaarden staan vermeld in tabel 4.10.1, zie ook figuur 4.10.1. ( $\pi$  tijdseenheden komen overeen met 4,4 uur).



Figuur 4.10.1. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een exponentieel windveld

Tabel 4.10.1  
Exponentieel windveld

$t$	$-V$	$t$	$-V$
0	0,22	$5\pi$	0,85
$\pi$	0,30	$6\pi$	0,98
$2\pi$	0,40	$7\pi$	0,95
$3\pi$	0,54	$8\pi$	0,53
$4\pi$	0,70	$9\pi$	— 0,73

Het maximum treedt op voor  $t = 20,1$ . De wind slaat om van richting voor  $t = 26,8$ . Tot aan dit tijdstip kunnen we spreken van een noordwind, welke langzaam zijn maximum bereikt en daarna vrij snel afneemt. Voorbij  $t = 26,8$  gaat de wind over in een zodanig snel in intensiteit toenemende zuidwind, dat het model al spoedig zinloos wordt. In de berekeningen zullen we dan ook niet verder mogen gaan dan tot  $t = 9\pi$ . Dit is overigens een essentieel bezwaar van het gebruik van een dergelijk exponentieel windveld. Het enorme voordeel is, dat we hierbij de gecompliceerde inverse Laplace-transformatie vermijden.

We werken bij deze numerieke toepassing met dimensieloze grootheden. Zoals in 4.2 is opgemerkt, wordt de tijd gemeten in eenheden van 1,4 uur en  $\zeta$  in eenheden van 65 meter. Om nu op grond van (9) van 4.2 aan een maximale windsterkte van  $v_s$  m/sec meteen voor  $\zeta$  een uitkomst in meters te kunnen verbinden, handelen we als volgt. We gaan steeds uit van een maximale windsterkte, welke dimensieloos gelijk aan 1 is, d.w.z.

$$\{ \sqrt{U^2 + V^2} \}_{max} = 1. \quad (2)$$

Aan de hierbij behorende (dimensieloze) verhoging  $\zeta$  voegen we dan een conversiefactor toe welke de in tabel 4.10.2 gegeven grootte heeft.

Tabel 4.10.2  
Conversiefactoren

Maximale windsterkte in m/sec	Conversiefactor
29	0,50
30	0,54
35	0,75
41	1,00

We berekenen nu de coëfficiënten  $A_n$  en  $B_n$  voor enige waarden van  $n$ . Uit het stelsel (7) van 4.5 volgt vrij gemakkelijk met slechts enkele iteraties:

$$\begin{aligned}
 p = 0,12 \quad & A_0 = 4,805 \quad - \quad 0,022 B_0 \\
 & A_1 = \quad \quad \quad 0,239 B_0 \\
 & A_2 = -0,005 \quad + \quad 0,007 B_0 \\
 & A_3 = \quad \quad \quad 0,031 B_0 \\
 & A_4 = -0,001 \quad + \quad 0,002 B_0 \\
 & A_5 = \quad \quad \quad 0,001 B_0 \\
 p = 0,18 \quad & A_0 = 3,390 \quad - \quad 0,035 B_0 \\
 & A_1 = \quad \quad \quad 0,289 B_0 \\
 & A_2 = -0,009 \quad + \quad 0,013 B_0 \\
 & A_3 = \quad \quad \quad 0,038 B_0 \\
 & A_4 = -0,002 \quad + \quad 0,003 B_0 \\
 & A_5 = \quad \quad \quad 0,014 B_0
 \end{aligned}$$

Met behulp van de in 4.6 beschreven methode vinden we met niet al te veel moeite voor  $p = 0,12$  in de eerste plaats:

$$B_0 = -0,954 \quad + \quad 0,913 A_0.$$

De coëfficiënten  $A_0$  en  $B_0$  zijn nu bekend, nl.

$$A_0 = 4,731 \quad B_0 = 3,366.$$

Voorts vinden we:

$$\begin{aligned} B' &= 0,930 & E_1 &= 0,116 \\ B'' &= 0,033 & E_2 &= 0,006 \\ B''' &= -0,232 & E_3 &= 0,014. \end{aligned}$$

In verband met (18) van 4.6 vinden we ten slotte:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,805 & B_1 &= 0,847 \\ A_2 &= 0,019 & B_2 &= -0,721 \\ A_3 &= 0,104 & B_3 &= 0,710 \\ A_4 &= 0,006 & B_4 &= -0,654 \\ A_5 &= 0,037 & B_5 &= 0,628. \end{aligned}$$

Voor  $p = 0,18$  vinden we op soortgelijke wijze:

$$\begin{aligned} A &= 3,294 & B &= 2,702 \\ A_1 &= 0,782 & B_1 &= 0,846 \\ A_2 &= 0,026 & B_2 &= -0,674 \\ A_3 &= 0,103 & B_3 &= 0,669 \\ A_4 &= 0,006 & B_4 &= -0,657 \\ A_5 &= 0,038 & B_5 &= 0,615. \end{aligned}$$

Met behulp van de gevonden waarden voor de coëfficiënten zijn we in staat  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\bar{v}(x, y)$  en  $\bar{\zeta}(x, y)$  voor een willekeurige combinatie  $(x, y)$  en voor de twee waarden  $p = 0,12$  en  $p = 0,18$  te berekenen. Uit (23) van 4.2 volgt aldus voor bij voorbeeld  $\zeta(x, y, t)$ , dat

$$\zeta(x, y, t) = 0,27 (\bar{\zeta}(x, y, p_1) e^{p_1 t} - 0,2 \bar{\zeta}(x, y, p_2) e^{p_2 t}). \quad (3)$$

In de eerste plaats zullen we het gedrag van  $\zeta$  aan de kust  $y = 0$  nagaan. Uit (6) en (12) van 4.4 volgen voor enige waarden aan deze kust  $x = 0$  ( $\pi/8$ )  $\pi$  de in tabel 4.10.3 gegeven waarden voor  $\bar{\zeta}$ .

Tabel 4.10.3  
Het gedrag van  $\bar{\zeta}$  voor  $y = 0$

$x$	$\bar{\zeta}(x, 0, p_1)$	$\bar{\zeta}(x, 0, p_2)$
0	4,44	3,80
1. $\pi/8$	4,40	3,76
2. $\pi/8$	4,33	3,67
3. $\pi/8$	4,23	3,56
4. $\pi/8$	4,14	3,46
5. $\pi/8$	4,05	3,35
6. $\pi/8$	3,97	3,25
7. $\pi/8$	3,90	3,17
$\pi$	3,86	3,14

Voor het punt  $x = \frac{1}{2}\pi$  vinden we dan met behulp van (3) (zie figuur 4.10.1) de waarden van tabel 4.10.4.

Tabel 4.10.4  
De verhoging in het midden van de zuidkust

$t$	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$	$t$	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$
0	0,93	5 $\pi$	4,22
$\pi$	1,30	6 $\pi$	5,19
2 $\pi$	1,80	7 $\pi$	5,90
3 $\pi$	2,45	8 $\pi$	5,61
4 $\pi$	3,26	9 $\pi$	2,99

Voor de andere punten aan de kust is het resultaat maar weinig anders. Interessant is hierbij hoe de maximale verhoging in een vast punt van de plaats aan de kust afhangt. Dit blijkt uit tabel 4.10.5.

Tabel 4.10.5  
Verloop van de maximale verhoging langs de zuidkust

$x$	$\zeta_{\max}$	$x$	$\zeta_{\max}$
0	6,05	$5\pi/8$	5,88
$1\pi/8$	6,04	$6\pi/8$	5,85
$2\pi/8$	6,00	$7\pi/8$	5,84
$3\pi/8$	5,99	$\pi$	5,83
$4\pi/8$	5,90		

Hierin wordt weer duidelijk de ten gevolge van de Corioliskracht optredende scheefheid gedemonstreerd. Zoals reeds is gebleken, is deze scheefheid aan de kust  $y = 0$  het geringst. Men kan op dezelfde wijze vinden, dat het maximum voor  $x = 0$  iets eerder optreedt dan voor  $x = \pi$ , hetgeen overeenkomt met een in positieve zin rondlopende vloedgolf.

Voor de aan de kust  $y = 0$  optredende verhoging ten gevolge van een uniform *stationair* windveld  $U = 0$ ,  $V = -1$  zouden we  $\zeta(x, 0) = 2\pi$  gevonden hebben. Deze waarde ligt maar weinig boven die van  $\zeta_{\max}$  uit tabel 4.10.5. Voegen we nu aan het windveld (1) op elk moment de er bij behorende stationaire waarde van  $\zeta(x, 0)$  toe, dan ontstaat een curve  $\zeta = -2\pi V(t)$ , welke blijkens figuur 4.10.1 maar weinig van de boven voor  $x = \frac{1}{2}\pi$  berekende verhoging afwijkt. Het belangrijkste verschil is, dat de twee curven horizontaal verschoven lijken te zijn. We komen hierop nog nader terug.

De invloed van  $\Omega$  blijkt vooral indien we het speciale geval  $\Omega = 0$  beschouwen. Dan is volgens 4.7:

$$\zeta(x, 0, t) = 0,27 \left( \frac{\text{th } 2\pi q_1}{q_1} e^{p_1 t} - 0,2 \frac{\text{th } 2\pi q_2}{q_2} e^{p_2 t} \right) \quad (4)$$

Hierbij is  $q_1^{-1} \text{th } 2\pi q_1 = 4,64$  en  $q_2^{-1} \text{th } 2\pi q_2 = 3,86$ . Het windeffect aan de kust wordt hiermede (zie figuur 4.10.1):

Tabel 4.10.6  
De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie

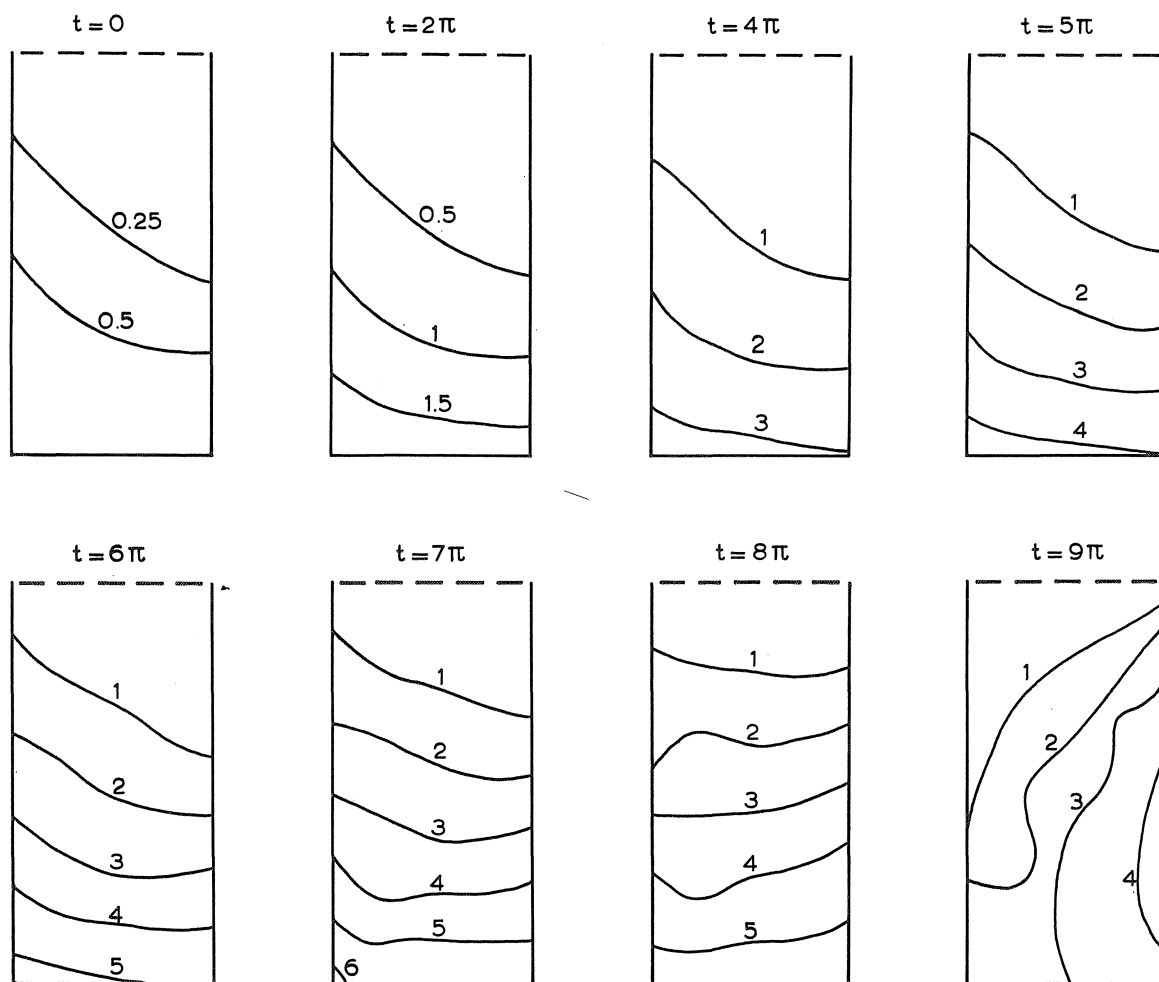
$t$	$\zeta(\Omega = 0)$	$t$	$\zeta(\Omega = 0)$
0	1,05	$5\pi$	4,73
$\pi$	1,46	$6\pi$	5,83
$2\pi$	2,02	$7\pi$	6,63
$3\pi$	2,75	$8\pi$	6,36
$4\pi$	3,66	$9\pi$	3,45

Deze waarden liggen wat hoger dan die voor  $\Omega \neq 0$ , hetgeen zou kunnen duiden op een soort dempende invloed van het Corioliseffect. In figuur 4.10.1 is de verhoging aan de kust in het punt  $x = \frac{1}{2}\pi$  onder de verschillende omstandigheden geschetst:

- A1 geeft de op de bovenbeschreven quasi-stationaire wijze uit het windveld  $V$  afgeleide verhoging  $-2\pi V$ ;
- A2 geeft  $\zeta$  voor  $\Omega = 0,6$ ;
- A3 geeft  $\zeta$  voor  $\Omega = 0$ ;
- A4 geeft  $\zeta$  voor  $\Omega = 0,6$ , indien de oceaan naar het oneindige verplaatst, d.w.z. weggelaten is;
- A5 geeft hetzelfde, maar dan met  $\Omega = 0$ .

We hebben ten slotte voor een aantal over de gehele zee verspreide punten de waarden van  $\zeta(x, y, t)$  op verschillende tijdstippen berekend. Uit het verkregen numerieke materiaal zijn nu in figuur 4.10.2

enige momentopnamen samengesteld, waarin telkens enige niveaulijnen geschetst zijn. De bij deze niveaulijnen behorende getallen spreken voor zich zelf. Als de maximale wind 41 m/sec bedraagt, zodat de conversiefactor 1 is, dan kunnen we deze getallen als verhogingen in centimeters interpreteren. Duidelijk blijkt uit deze serie plaatjes, hoe de scheefheid van het wateroppervlak in positieve  $y$ -richting toeneemt. Opmerkelijk is voorts, dat reeds dit zeer eenvoudige model van een windveld althans kwalitatief het werkelijke verloop van de niveaulijnen vrij goed weergeeft (vgl. [2, 29]).



Figuur 4.10.2. Niveaulijnen in een rechthoekige baai ten gevolge van een exponentieel windveld

#### 4.10.2 Sprong-windveld

We beschouwen nu het volgende windveld:

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= 0 \quad \text{voor } t < 0 \\ V &= -1 \quad \text{voor } t > 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

We gaan nu uit van de in 4.9 afgeleide benadering voor de Laplace-getransformeerde van  $\zeta(x, 0, t)$ . Aangezien deze benadering het beste is voor  $x = \frac{1}{2}\pi$  zullen we hierbij steeds spreken over de verhoging in het punt  $x = \frac{1}{2}\pi, y = 0$ . Met een goede benadering is dus met inachtneming van het windveld (4):

$$\bar{\zeta}\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) \approx p^{-1} \bar{Z}(p), \quad (5)$$

waarbij  $\bar{Z}(p)$  door (17) van 4.9 is bepaald.

Voordat we met (5) verder gaan, willen we eerst een indruk geven van de aard van de in 4.9 voor  $A_n$ ,  $B_n$  gegeven benaderingen. In de vorige paragraaf zijn voor  $p = 0,12$  en voor  $p = 0,18$ , wat we matige waarden zouden kunnen noemen, de exacte waarden van deze coëfficiënten afgeleid. Men ziet ze in tabel 4.10.7 te zamen met de uit (5), (6) en (13) van 4.9 volgende benaderingen.

Tabel 4.10.7  
Vergelijking van exacte en benaderde waarden voor enkele coëfficiënten

	$p = 0,12$		$p = 0,18$	
	exact	benadering	exact	benadering
$B_0$	3,37	3,32	2,71	2,69
$A_0$	4,73	4,79	3,30	3,37
$A_1$	0,81	0,79	0,78	0,78
$A_2$	0,02	0,00	0,03	0,00
$A_3$	0,10	0,10	0,10	0,10
$A_4$	0,01	0,00	0,01	0,00
$A_5$	0,04	0,04	0,04	0,04

De benadering blijkt dus, althans in deze gevallen, zeer goed te zijn. De verwachting is gewettigd, dat voor kleinere waarden van  $p$  de overeenstemming nog beter is.

We vergelijken ook nog even de waarden van  $\bar{Z}(p_1)$  en  $\bar{Z}(p_2)$  met de overeenkomstige exacte waarden:

	$p = 0,12$		$p = 0,18$	
	exact	benadering	exact	benadering
$\bar{Z}(p)$	4,144	4,087	3,459	3,439

Ook hier is de overeenstemming zeer bevredigend.

We keren nu weer terug tot (5). De inverse transformatie kan hier gemakkelijk met behulp van residuerekening worden uitgevoerd.

Het windveld levert de pool  $p = 0$ . Hierbij behoort het residu  $b = 2\pi$  hetgeen de bij de *stationaire* wind  $V = -1$  behorende stationaire verhoging is. Vervolgens berekenen we de bij  $\bar{Z}(p)$  behorende polen. Uit (21) van 4.9 volgen voor  $m = 0, 1, 2$  en  $3$  de drietallen polen  $c_m, a_m \pm ib_m$ :

Tabel 4.10.8  
De bij  $\bar{Z}(p)$  behorende polen

$m$	$c_m$	$a_m \pm ib_m$
0	— 0,0744	— 0,233 $\pm i$ 0,216
1	— 0,115	— 0,213 $\pm i$ 0,736
2	— 0,118	— 0,211 $\pm i$ 1,241
3	— 0,119	— 0,210 $\pm i$ 1,744

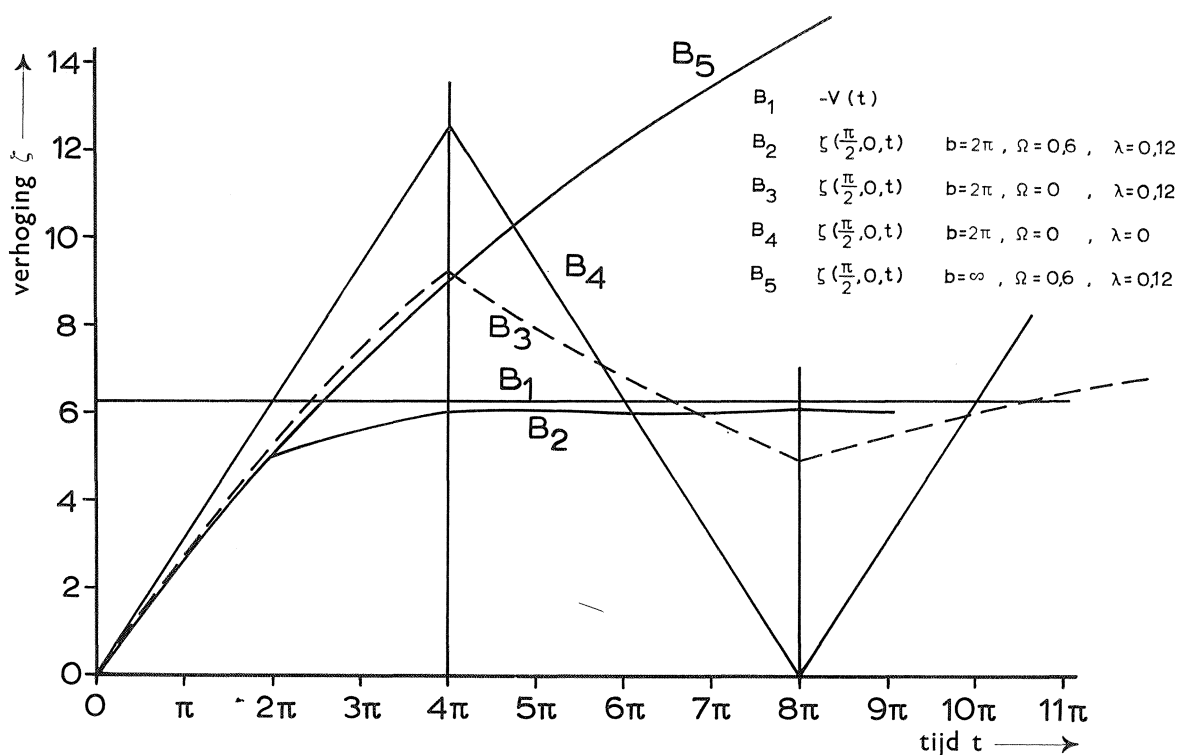
Uit (5) volgt nu (we vervangen het  $\approx$  teken maar door het  $=$  teken):

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\pi, 0, t\right) = b + \sum_m \left\{ C_m e^{c_m t} + \operatorname{Re} (A_m + iB_m) e^{(a_m + ib_m)t} \right\}, \quad (6)$$

waarbij  $A_m, B_m$  enz. niets te maken hebben met de vroeger optredende coëfficiënten, maar de volgende getallenwaarden hebben:

$$\begin{array}{lll} A_0 = -4,59 & A_1 = -0,26 & A_2 = -0,24 \\ B_0 = 2,95 & B_1 = 0,84 & B_2 = -0,16 \\ C_0 = -0,77 & C_1 = -0,01 & C_2 = -0,00. \end{array}$$

$$\text{Sprong-windveld} \quad -V = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Figuur 4.10.3. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sprong-windveld

Uit (6) volgt dan tabel 4.10.9 (zie ook figuur 4.10.3).

Tabel 4.10.9  
De verhoging in het midden van de zuidkust

$t$	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$	$t$	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$
0	0	$6\pi$	6,15
$\pi$	2,79	$7\pi$	6,15
$2\pi$	5,06	$8\pi$	6,16
$3\pi$	5,73	$9\pi$	6,18
$4\pi$	6,07	$10\pi$	6,20
$5\pi$	6,18	$\infty$	6,28

Zoals we zien, wijkt na een aanvangsperiode van ongeveer  $4\pi$  of 18 uur de verhoging minder dan 4% van de stationaire waarde af.

Ter vergelijking hebben we ook het speciale geval  $\Omega = 0$  berekend. Dan is exact:

$$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, p) = \frac{\text{th } 2\pi q}{pq} = \frac{1}{pq} (1 - 2e^{-4\pi q} + 2e^{-8\pi q} - \dots) \quad (7)$$

Met behulp van [7], formule (26) blz. 233 en formule (36) blz. 249, kan men de volgende formules afleiden:

$$\frac{1}{pq} \doteq te^{-\frac{1}{2}\lambda t} \{I_0(\frac{1}{2}\lambda t) + I_1(\frac{1}{2}\lambda t)\} \quad \frac{1}{pq} e^{-cq} \doteq \int_c^t e^{-\frac{1}{2}\lambda \tau} I_0(\frac{1}{2}\lambda \sqrt{\tau^2 - c^2}) d\tau \text{ voor } t > c.$$



Hiermede kan de inversie van (7) gemakkelijk uitgevoerd worden. Aldus vindt men (zie figuur 4.10.3) de waarden van tabel 4.10.10.

Tabel 4.10.10  
De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie

$t$	$\zeta (\Omega = 0)$	$t$	$\zeta (\Omega = 0)$
0	0	$6 \pi$	6,88
$\pi$	2,87	$7 \pi$	5,90
$2 \pi$	5,29	$8 \pi$	4,94
$3 \pi$	7,37	$9 \pi$	5,45
$4 \pi$	9,17	$10 \pi$	5,97
$5 \pi$	7,97	$\infty$	6,28

Ook hier blijkt weer duidelijk de dempende invloed van  $\Omega$ . In figuur 4.10.3 zijn ook nog een paar andere gevallen getekend:

- B1 geeft de stationaire verhoging  $2\pi$ ;
- B2 geeft  $\zeta (\frac{1}{2}\pi, 0, t)$  voor  $\Omega = 0,6$  als boven beschreven;
- B3 geeft hetzelfde voor  $\Omega = 0$ ;
- B4 geeft het allereenvoudigste geval  $\Omega = 0$  en  $\lambda = 0$ ;
- B5 geeft ten slotte een schets van het in B2 beschouwde geval, indien de zee en het windveld zich tot in het oneindige zouden uitstrekken ( $b \rightarrow \infty$ ).

#### 4.10.3 Sinuswindveld

De beste en tevens mathematisch gemakkelijk hanteerbare voorstelling van een opkomende en weer wegstervende storm wordt wellicht geleverd door de sinusfunctie. We stellen weer, dat op  $t = 0$  alles in rust is en dat dan het volgende windveld optreedt:

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= 0 \quad \text{voor } t < 0 \\ V &= -\sin \omega t \quad \text{voor } t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Bij wijze van illustratie nemen we  $\omega = 0,1$  hetgeen betekent, dat er gedurende een tijdsinterval van  $10\pi$  (halve periode) noordenwind is met een maximum  $|V| = 1$  ten tijde  $t = 5\pi$  (ongeveer 22 uur). Nu is

$$\zeta (\frac{1}{2}\pi, 0) \approx \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \bar{Z}(p). \quad (9)$$

Inversie geeft als in de vorige subparagraaf

$$\zeta (\frac{1}{2}\pi, 0, t) = \text{Im} \{ e^{i\omega t} Z (\frac{1}{2}\pi, i\omega) \} + \text{residuen van } Z. \quad (10)$$

Substitutie van de getallenwaarden geeft (zie figuur 4.10.4)

$$\zeta (\frac{1}{2}\pi, 0, t) = (5,42 \sin \omega t - 2,18 \cos \omega t) + 0,37 e^{-0,074t} + \dots \quad (11)$$

De bijdragen van de andere polen blijken wel verwaarloosd te kunnen worden. Dit is een belangrijk resultaat. Het blijkt dus, dat de verhoging in hoofdzaak bepaald wordt door

- a. de kwasi-stationaire toestand nl. de eerste term in het rechterlid van (10);
- b. de bijdrage van de laagste *negatief-reële* eigenwaarde.

Het vermoeden lijkt gewettigd, dat deze eigenschap van algemene aard is en niet het resultaat is van het toevallig beschouwde numerieke geval.

We kunnen bij (10) nog enige verbeteringen aanbrengen. We zouden de benadering  $Z (\frac{1}{2}\pi, i\omega)$  desgewenst kunnen vervangen door een exacte waarde. Dit brengt natuurlijk weer de bepaling van de coëfficiënten  $A_n$  en  $B_n$  voor  $p = i\omega$  met zich mee. Voorts kan de eigenwaarde  $-0,074$  van de benadering

gecorrigeerd worden. Hoewel de berekening niet uitgevoerd is, valt te verwachten, dat de overeenkomstige eigenwaarde van het model hiervan slechts zeer weinig zal verschillen.

Het spreekt vanzelf, dat we slechts het tijdsinterval  $0 < t < 10\pi$  beschouwen. Hiervoor zijn in figuur 4.10.4 behalve de grafiek van (11) ook nog enige andere gevallen beschouwd.

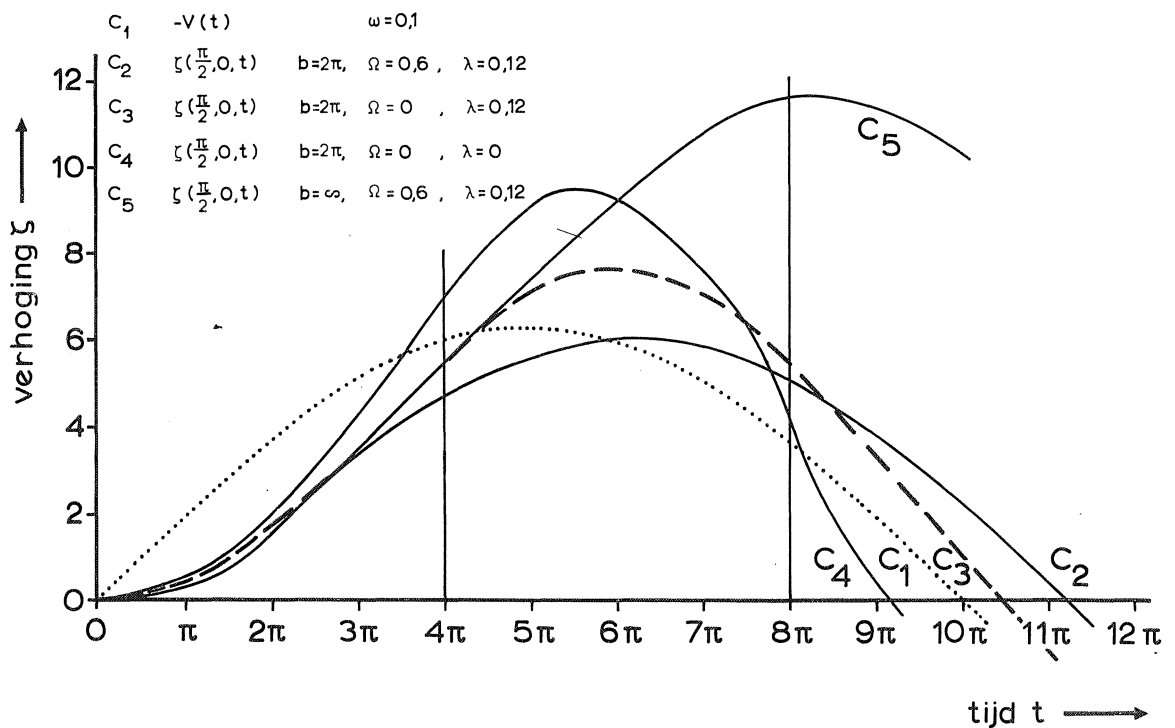
Is  $\Omega = 0$  dan heeft men exact

$$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{\text{th } 2\pi q}{q}. \tag{12}$$

De bij  $q^{-1} \text{th } 2\pi q$  behorende polen leveren residuen welke, op het eerste paar na, wel verwaarloosd kunnen worden. Men vindt dan:

$$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t) = (6,96 \sin \omega t - 1,33 \cos \omega t) + e^{-0,06 t} (1,32 \cos 0,243 t - 2,05 \sin 0,243 t). \tag{13}$$

$$\text{Sinus-windveld} \quad -V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t > 0 \end{cases}$$



Figuur 4.10.4. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sinusoidaal windveld

In figuur 4.10.4 vindt men evenals in figuur 4.10.3:

- C1 de stationaire verhoging  $2\pi \sin \omega t$ ;
- C2 de verhoging  $\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$  volgens (11);
- C3 hetzelfde voor  $\Omega = 0$  volgens (13);
- C4 het eenvoudigste geval  $\Omega = \lambda = 0$ ;
- C5 een schets van het met C2 overeenkomende geval voor  $b = \infty$ .

Het is interessant de voor de verschillende gevallen geldende maximale verhogingen onderling te vergelijken:

- C1  $\zeta_{max} = 6,28$ ;
- C2  $\zeta_{max} = 5,91$ ;
- C3  $\zeta_{max} = 7,61$ ;
- C4  $\zeta_{max} = 9,37$ .

BIJDRAGE II.5

VRIJE SLINGERINGEN  
VAN EEN VLOEISTOF IN EEN  
ROTTEREND RECHTHOEKIG  
BEKKEN



## INHOUDSOVERZICHT

	Blz.
0.1 Inhoudsoverzicht . . . . .	193
0.2 Opgenomen figuur . . . . .	193
0.3 Overzicht van de gebruikte symbolen . . . . .	193
0.4 Literatuuropgave . . . . .	194
0.5 Summary . . . . .	195
0.6 Résumé . . . . .	195
<b>1.0 Samenstelling van de bijdrage . . . . .</b>	<b>197</b>
1.1 Inleiding. . . . .	197
1.2 Inhoud van de bijdrage . . . . .	198
1.3 Auteur en medewerker. . . . .	198
<b>2.0 Uiteenzetting van het probleem . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>3.0 Het oneindige kanaal . . . . .</b>	<b>200</b>
<b>4.0 Het rechthoekige meer. . . . .</b>	<b>202</b>
<b>5.0 Ontwikkelingen voor kleine waarden van <math>\Omega</math> . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>6.0 De rechthoekige baai . . . . .</b>	<b>210</b>
<b>7.0 De lage frequenties van een lange baai . . . . .</b>	<b>215</b>

### 0.2 OPGENOMEN FIGUUR

3.0.1 De bij de Kelvin- en Poincarégolven behorende polen . . . . .	202
---------------------------------------------------------------------	-----

### 0.3 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

$g$	de versnelling van de zwaartekracht;
$t$	de tijd;
$u, v$	de componenten van de totale stroom;
$U, V$	de componenten van de wrijvingskracht, welke door de wind op het wateroppervlak wordt uitgeoefend;
$x, y, z$	Cartesische coördinaten, waarbij het model bepaald is door $0 < x < \pi$ , $0 < y < b$ , waarbij $z = 0$ het zee-oppervlak en $z = h$ de bodem aangeeft;
$\varepsilon$	een sommatie-index, welke de twee waarden $\pm 1$ aanneemt;
$\zeta$	de verhoging van het water, gerekend vanaf de rusttoestand;
$\varkappa$	$\varkappa = (\Omega^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$ ;
$\lambda$	een wrijvingscoëfficiënt;
$\omega$	de frequentie van een vrije slingering;
$\Omega$	de coëfficiënt van Coriolis.

**0.4 LITERATUUR** De verwijzing in de tekst is aangegeven door [ ]

1. *R. H. Corkan and A. T. Doodson* Free tidal oscillations in a rotating square sea. Proc. Roy. Soc. A 215, 147–162, 1952.
2. *D. van Dantzig* Mathematical problems raised by the flood disaster 1953. Proc. Int. Congr. of Math. I, 218–239, 1954.
3. *D. van Dantzig* Enkele voorbeelden van berekening van waterbeweging onder invloed van wind. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. Afd. Natuurkunde, 65, nr. 3, 1956.
4. *D. van Dantzig* Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. Hauptvortrag GAMM, Saarbrücken. Rapport TW 53, Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
5. *D. van Dantzig* Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin. Rapport TW 49 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
6. *G. R. Goldsbrough* The tidal oscillations in rectangular basins. Proc. Roy. Soc. A 132, 689–701, 1931.
7. *H. Jeffreys* The free oscillations of water in an elliptical lake. Proc. Lond. Math. Soc., 23, 455–476, 1925.
8. *H. Lamb* Hydrodynamics. 6th ed. par. 207–212a, Cambridge, 1932.
9. *H. A. Lauwerier* The expansion of a function into a Fourier series with prescribed phases, valid in the half-period interval. Rapport TW 33, Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
10. *H. A. Lauwerier* The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea. Rapport TW 41, Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
11. *H. A. Lauwerier* On certain trigonometrical expansions. J. Math. Mech. 8, 419–432.
12. *H. A. Lauwerier* Free motion in a rotating sea which has the form of a semi-infinite strip. Rapport TW 46, Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
13. *J. Proudman* Note on the free tidal oscillations of a sea with slow rotation. Proc. Lond. Math. Soc., 35, 75–82, 1933.
14. *Lord Rayleigh* On the vibrations of a rectangular sheet of rotating liquid. Phil. Mag. 5, 297–301, 1903.  
(Ook Papers, 5, 93–97).
15. *Lord Rayleigh* Notes concerning tidal oscillations upon a rotating globe. Proc. Roy. Soc. A 82, 448–464, 1909.  
(Ook Papers, 5, 497–513).
16. *G. I. Taylor* Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins, Proc. Lond. Math. Soc., 20, 148–181, 1922.
17. *G. W. Veltkamp* Ontwikkelingen van Fourier-reeksen met voorgeschreven fasen. Rapport TW 34, Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
18. *G. W. Veltkamp* On Kelvin and Poincaré waves in a strip. Rapport TW 37, Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
19. *G. W. Veltkamp* The behaviour of a solution of Helmholtz' equation near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives. Rapport TW 40, Math. Centrum, Amsterdam, 1956.

## 0.5 SUMMARY <sup>1)</sup>

### Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin

In this contribution the free motions of a fluid in a rotating rectangular basin of uniform depth are studied. This investigation may throw some light upon the behaviour of the free modes of the North Sea since this sea, in a rough approximation, can be considered as a rectangular basin which is closed on three sides by coasts and which is connected to the ocean on the remaining side.

The free motions depend largely on the speed of rotation which finds its expression in the coefficient of Coriolis  $\Omega$ . To a lesser extent they depend also on the bottom friction which is accounted for by the friction coefficient  $\lambda$ . In this study much attention is paid to the influence of  $\Omega$  and  $\lambda$  on the eigenvalues. For  $\lambda = 0$  and small  $\Omega$  the eigenvalues can be expanded into a series of increasing powers of  $\Omega$ . Examples of such expansions are given in (1), (2) and (3) of chapter 1.0.

In this contribution the following results have been obtained. The classic formula of LAMB [8] for the lowest eigenvalue of a square lake (17) of 5.0 is extended by a second order term in  $\Omega$  (19) of 5.0. Corresponding formulae are given for the rectangular lake (8) of 5.0 and for the rectangular bay (22) of 7.0. If in particular the length of the basin is twice its breadth we find the numerical results (9) of 5.0 and (23) of 7.0 respectively. The latter formulae show that the main free period of a rectangular lake is increased by a (slow) rotation but that of a rectangular bay is decreased. These results have only a qualitative meaning for the eigenvalues of the North Sea because at the latitude of the North Sea  $\Omega$  is rather large. Nevertheless the main part of the theory is developed irrespective of the value of  $\Omega$ .

The contents of this contribution are as follows. In 1.0 a historical introduction to the problem is given. The problem is formulated mathematically in 2.0.

The free motions with the frequency  $\omega$  are determined by the differential equations (2) of 2.0. By means of the transformation (3) of 2.0 the case with  $\lambda \neq 0$  can be reduced to the case  $\lambda = 0$ . The influence of a small friction term upon the frequency  $\omega$  is given in formula (5) of 2.0. In the first approximation the free period is left unaltered but the oscillations are damped. In the subsequent part of the investigation it is assumed that  $\lambda = 0$ . By way of introduction the free motions in an infinite channel are considered in 3.0. They consist of linear combinations of the well-known Kelvin- and Poincaré-waves.

In 4.0 a rectangular lake with sides  $\pi$  and  $2b$  is considered. For  $\Omega = 0$  the solution is trivial and the free frequencies are given in (4). The case  $\Omega \neq 0$  is treated by means of the formalism of operators in Hilbert space. The solution can be expressed in the form of a linear combination of Kelvin- and Poincaré-waves with two sets of unknown coefficients. The boundary conditions lead to two sets of equations (7) from which the free periods and the coefficients can be determined. The system (7) is equivalent to the systems (22) and (28). The latter system can be written in the form (29) and it can be reduced to (30). The solution of (30) involves the inversion of two operators. In 5.0 this inversion is carried out for small values of  $\Omega$  by making use of expansions in rising powers of  $\Omega$ . In this way the first few terms of the expansion of the free frequencies in a power series of  $\Omega$  are determined. Special attention is paid to the case of a square sea. The results have already been quoted above. In 6.0 the free oscillations of a rectangular bay are studied in a similar way as for a rectangular lake in 4.0. The free frequencies follow from the determinantal equation (37) of 6.0. In 7.0 it is assumed that  $\Omega$  is small and  $b$ , the length of the bay, is large. Then the influence of  $\Omega$  upon the lowest frequency can be determined from (37) of 6.0. The first order term is given in (19) of 7.0 and the second order term in (20) of 7.0. The numerical form of the first order correction has already been quoted above.

## 0.6 RÉSUMÉ <sup>2)</sup>

### Oscillations libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire en rotation

Dans cette contribution on étudie les mouvements libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire ayant une profondeur uniforme et animé d'une rotation. Cette étude peut apporter quelques éclaircissements sur le comportement des oscillations libres de la Mer du Nord, celle-ci pouvant être, en gros, représentée par un bassin rectangulaire fermé sur trois côtes par des côtes, et communiquant avec l'océan sur le quatrième côté.

Les oscillations libres dépendent dans une forte mesure de la vitesse de rotation exprimée par le coefficient de Coriolis  $\Omega$ . Dans une moindre mesure elles dépendent aussi des frictions sur le fond qui interviennent dans le calcul par l'introduction du coefficient de friction  $\lambda$ . Dans ce chapitre on accorde une grande attention à l'influence de  $\Omega$  et de  $\lambda$  sur les valeurs propres. Pour  $\lambda = 0$  et un petit  $\Omega$ , les valeurs propres peuvent être développées en une série avec des puissances croissantes de  $\Omega$ . Des exemples de ces développements en séries sont donnés en (1), (2) et (3) du chapitre 1.0.

Dans cette contribution on obtient les résultats suivants. La formule classique de LAMB [8] pour la plus basse valeur propre d'un lac carré (17) du 5.0 est augmentée d'un terme de second ordre en  $\Omega$ , (19) du 5.0. Des formules correspondantes sont données pour le lac rectangulaire, (8) du 5.0, et pour la baie rectangulaire, (22) du 7.0. Dans le cas particulier où la longueur du bassin est le double de sa largeur, nous trouvons respectivement les résultats numériques (9) du 5.0 et (23) du 7.0. Ces formules montrent que par suite d'une (lente) rotation, la plus longue période

<sup>1)</sup> An English version of this contribution is obtainable as report TW 49 of the Mathematical Centre.

<sup>2)</sup> Une version anglaise de cette contribution, le rapport TW 49, peut être obtenue au Centre Mathématique.

d'oscillation propre croît dans le cas d'un lac rectangulaire, mais décroît dans le cas d'une baie rectangulaire. Pour les valeurs propres de la Mer du Nord, ces résultats n'ont qu'une signification qualitative, attendu que  $\Omega$ , à la latitude géographique de la Mer du Nord, est assez grande. Néanmoins, la partie la plus importante de la théorie est développée indépendamment de la valeur de  $\Omega$ .

Cette contribution se subdivise comme suit. En 1.0 on donne une introduction historique au problème. Le problème est formulé mathématiquement en 2.0.

Les oscillations libres avec la fréquence  $\omega$  sont déterminées par les équations différentielles (2) du 2.0. Au moyen de la transformation (3) du 2.0, les cas où  $\lambda \neq 0$  peuvent être ramenés au cas où  $\lambda = 0$ . L'influence d'un petit terme de friction sur la fréquence  $\omega$  est donnée dans la formule (5) du 2.0. En première approximation la période libre demeure inchangée, mais les oscillations sont amorties. Dans la partie suivante de l'étude, on admet que  $\lambda = 0$ . Pour servir d'introduction les mouvements libres dans un canal infini sont examinés en 3.0. Ils consistent en une combinaison linéaire des ondes bien connues de Kelvin et de Poincaré. En 4.0, on considère un lac rectangulaire ayant pour côtés  $\pi$  et  $2b$ . Pour  $\Omega = 0$ , la solution est triviale, et les fréquences libres, pour ce cas, sont données en (4). Le cas où  $\Omega \neq 0$  est traité au moyen du formalisme des opérateurs dans l'espace de Hilbert. La solution peut être présentée par une combinaison linéaire des ondes de Kelvin et de Poincaré, avec deux systèmes de coefficients inconnus. Les conditions-limites conduisent à deux systèmes d'équations (7) d'où l'on peut déterminer les périodes libres et les coefficients. Le système (7) est équivalent aux systèmes (22) et (28). Ce dernier peut s'écrire sous la forme (29) et être réduit à (30). Pour résoudre (30), on doit invertir deux opérateurs. En 5.0, cette inversion est réalisée pour de petites valeurs de  $\Omega$  à l'aide de développements en puissances croissantes de  $\Omega$ . De cette façon on détermine les tout premiers termes du développement des fréquences propres dans une série de puissances de  $\Omega$ . On accorde une attention particulière au cas d'un lac carré. Les résultats en ont déjà été mentionnés ci-dessus. Au paragraphe 6.0 les oscillations libres d'une baie rectangulaire sont étudiées d'une manière analogue qu'en 4.0 pour un lac rectangulaire. Les fréquences propres découlent de l'équation déterminante (37) du 6.0. Au paragraphe 7.0, on admet que  $\Omega$  est petit et que  $b$ , la longueur de la baie, est grand. On peut alors tirer de (37) du 6.0 l'influence de  $\Omega$  sur la plus basse fréquence. Le terme de premier ordre est donné en (19) du 7.0, et le terme de second ordre en (20) du 7.0. La forme numérique de la correction de premier ordre a été mentionnée ci-dessus.



## 1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

### 1.1 Inleiding

In deze bijdrage wordt het vraagstuk behandeld van de vrije slingeren in een roterende rechthoekige zee. Aangezien de Noordzee ongeveer de vorm van een rechthoek heeft, welke aan drie zijden door kusten wordt begrensd en aan de vierde zijde open is en daar overgaat in een oceaan, is de hier ontwikkelde theorie op de Noordzee van toepassing.

Bij dit onderzoek wordt aangenomen, dat de zee een constante diepte heeft. De beweging van het water ontstaat onder invloed van de windkrachten, van de getijden en van de vrije slingeren. Ten gevolge van de linearisering van de hydrodynamische grondvergelijkingen kan het superpositiebeginsel worden toegepast. Dit betekent, dat bovengenoemde oorzaken van de waterbeweging afzonderlijk mogen worden beschouwd en dat de werkelijke beweging uit de afzonderlijke bewegingen kan worden samengesteld. In Bijdrage II.4 zijn de waterbewegingen ten gevolge van de windkrachten uitvoerig behandeld. In deze bijdrage worden de vrije slingeren onderzocht.

Vrije slingeren in een waterbekken zullen fysisch ontstaan, indien de watermassa door een of andere oorzaak in beweging is gebracht en de kracht, welke de beweging heeft veroorzaakt, heeft opgehouden te werken. Dit geval doet zich bijv. voor als een storm het water heeft opgestuwd en daarna is gaan liggen.

Mathematisch worden de vrije slingeren beschreven door dezelfde differentiaalvergelijkingen als in de voorgaande bijdrage. Aangezien we afwezigheid van windkrachten veronderstellen, zijn de rechterleden nu nul. De verhoging van de zeespiegel en elk van de beide snelheidscomponenten blijkt aan een *homogene* vergelijking van Helmholtz met *homogeen* randvoorwaarden te voldoen.

Het onderzoek van dit moeilijke vraagstuk heeft tot numerieke resultaten geleid in het geval van kleine waarden van de coëfficiënt van Coriolis, zoals bij een roterend model in een laboratorium kan voorkomen. Op de Noordzee mag deze coëfficiënt niet meer als „klein” worden beschouwd. Voor dit geval is in algemene zin aangegeven hoe de oplossing van het probleem kan worden bepaald.

Getijgolven in roterende rechthoekige zeeën zijn door een aantal, in hoofdzaak Britse onderzoekers bestudeerd. Zij beschouwden echter alleen het geval van een gesloten zee, die door vier kusten wordt begrensd.

RAYLEIGH [14, 15] beschouwde in 1903 en 1909 de vrije trillingen als de rotatie ( $\Omega$ ) klein is, maar enkele van zijn resultaten waren onjuist. TAYLOR [16] gaf in 1922 de eerste volledige oplossing voor een gesloten rechthoekige zee. JEFFREYS [7] oefende in 1925 critiek uit op TAYLOR's conclusies en bracht naar voren, dat in TAYLOR's oplossing een tweevoudig oneindig aantal eigenwaarden lag besloten en dat er golven mogelijk waren, die in beide richtingen het bekken rond konden lopen.

LAMB [8] leidde in 1932 met een andere methode de benaderingen voor de laagste eigenwaarden af als  $\Omega$  klein is. In het bijzonder verkreeg hij voor een vierkante zee de formule

$$\omega - \omega_0 = \pm \frac{4}{\pi^2} \Omega.$$

GOLDSBROUGH [6] gaf in 1931 een benaderde oplossing voor de vrije trillingen van een roterende rechthoekige zee. Het geval van een vierkante zee werd in het bijzonder onderzocht en de formule van LAMB werd bevestigd. PROUDMAN [13] onderwierp in 1933 RAYLEIGH's onderzoek aan een nadere beschouwing en toonde aan, dat door een juiste toepassing van het principe van RAYLEIGH de formule van LAMB verkregen kan worden. CORKAN en DOODSON [1] beschouwden in 1952 de vrije trillingen van een roterende vierkante zee. Met behulp van iteratie-methoden werd een aantal gevallen numeriek behandeld.

De stormramp van 1 februari 1953 stimuleerde het onderzoek op dit gebied. In 1954 gaf VAN DANTZIG [2] een overzicht van de resultaten die door het Mathematisch Centrum waren verkregen. Tot dien waren enkele voorlopige resultaten betreffende de vrije trillingen van een open roterende rechthoek gevonden. Meer recent onderzoek werd in 1956 en 1958 door VAN DANTZIG besproken [3, 4]. In daarop volgende rapporten van het Mathematisch Centrum werden enkele aspecten behandeld, die ook van belang zijn voor het geval van vrije bewegingen. LAUWERIER [9, 11] en VELTKAMP onderzochten een bepaalde goniometrische ontwikkeling, die ter sprake komt in 6.0. VELTKAMP [18] be-

schouwde uitvoerig de Kelvin- en Poincaré-golven, die hier behandeld worden in 3.0, 4.0 en 6.0. VELTKAMP [19] gaf een gedetailleerde beschouwing over de aard van de singulariteit, die ontstaat waar een kust en een oceaandrandsamenkomen. LAUWERIER [10, 12] beschouwde de vrije beweging in een oneindig lange strook met een kust- en een oceaangebrenzing en in een half oneindige strook met drie kusten. Het laatste geval wordt hier niet expliciet behandeld maar kan gemakkelijk als grensgeval van het rechthoekige bassin afgeleid worden uit 4.0 of ook uit 6.0.

## 1.2 Inhoud van de bijdrage

De vrije bewegingen en de vrije perioden hangen af van de Corioliscoëfficiënt  $\Omega$  en de wrijvingscoëfficiënt  $\lambda$ . Hoewel verderop alleen het geval van *reële*  $\Omega$  (en  $\lambda = 0$ ) expliciet zal worden vermeld, zijn de resultaten ook geldig voor complexe  $\Omega$ , zodat met behulp van de genoemde transformatie het geval  $\lambda \neq 0$  (en reële  $\Omega$ ) eveneens wordt gedekt.

In 2.0 wordt in navolging van VELTKAMP [18] aangetoond, dat met behulp van een complexe transformatie het geval  $\lambda \neq 0$  gereduceerd kan worden tot het geval  $\lambda = 0$ . We behoeven dus alleen het laatste te behandelen. Voor  $\Omega = 0$  is het vraagstuk elementair en in de gevallen van een rechthoekig bekken zoals besproken in 4.0 en 6.0 wordt een discreet spectrum van eigenwaarden verkregen. Voor  $\Omega \neq 0$  worden alleen die eigenwaarden beschouwd, die voor  $\Omega \rightarrow 0$  tot dit discrete spectrum naderen. Een eventueel continu spectrum zal hier buiten beschouwing worden gelaten.

In 3.0 wordt het welbekende geval van een oneindig lang kanaal behandeld.

In 4.0 wordt dit probleem opgelost voor een rechthoekig meer door gebruikmaking van de operatorenstechniek in een Hilbertruimte.

De formele oplossing, die in 4.0 wordt gevonden, wordt in 5.0 voor kleine  $\Omega$  ontwikkeld. Als bijzonder geval wordt een vierkante, roterende zee beschouwd. Dit hoofdstuk omvat de resultaten, welke door bovengenoemde auteurs zijn verkregen.

In 6.0 wordt het geval van een rechthoekige baai onderzocht. De in dit hoofdstuk verkregen resultaten zijn alle nieuw. Ook hier wordt een ontwikkeling van de eigenwaarden voor kleine  $\Omega$  afgeleid. Voor de laagste eigenwaarde in een baai, die twee keer zo lang als breed is, vinden we

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 2,01 \Omega^2 + O(\Omega^4), \quad (1)$$

zodat een langzame rotatie de vrije periode verkleint, in tegenstelling tot het geval van een rechthoekig meer. Bij dezelfde afmetingen als boven vinden we in dit geval:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - 0,30 \Omega^2 + O(\Omega^4). \quad (2)$$

De hier toegepaste behandeling voldoet niet in alle opzichten, aangezien de resultaten slechts voor kleine  $\Omega$  bruikbaar zijn.

Door gebruik te maken van ontwikkelingen van het type van Fredholm voor de resolventen, had deze beperking vermeden kunnen worden. Ten gevolge hiervan zijn de in deze bijdrage verkregen resultaten eerder van toepassing op een laboratoriummodel van een rechthoekig bassin, dat met een vrij lage snelheid roteert, dan op de Noordzee, waar  $\Omega$  tamelijk groot is. De bepaling van de orthogonale functies, waarin een willekeurig elevatiepatroon zou kunnen worden ontwikkeld, is niet uitgevoerd, aangezien hier aanzienlijke complicaties zouden optreden.

## 1.3 Auteur en medewerker

Deze bijdrage is een vertaling van een in het Engels geschreven rapport van D. van Dantzig [5]. De Nederlandse versie is verzorgd door D. J. Hofsommer.

## 2.0 UITEENZETTING VAN HET PROBLEEM

Met de notatie van Bijdrage II.4, formules (6) en (7) van 2.0, zijn de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

We nemen aan, dat  $h$ ,  $\lambda$  en  $\Omega$  positieve constanten zijn. We kunnen de voortplantingssnelheid  $\sqrt{gh}$  van de vrije golven voor het geval, dat er geen wrijving is en geen rotatie plaatsvindt, als eenheid van snelheid kiezen, zodat  $gh = 1$ . Voor het geval van een bekken, waarvan de diepte ongeveer overeenkomt met de gemiddelde diepte van de Noordzee, wordt deze eenheid van snelheid ongeveer 91 km/h. We nemen verder aan, dat het bekken hetzij aan alle kanten door ondoordringbare kusten wordt begrensd, hetzij gedeeltelijk wordt begrensd door zulke kusten en gedeeltelijk door een oneindig diepe oceaan. Langs een kust verdwijnt de normale component van de snelheid; langs de oceaan is de hoogte van het zeeniveau constant, d.w.z.  $\zeta = 0$ .

We wensen slechts de vrije (gedempte) trillingen van een rechthoekig bekken te beschouwen. In dat geval is  $U = V = 0$  en  $u$ ,  $v$  en  $\zeta$  zijn de reële delen van grootheden, welke evenredig zijn met  $e^{i\omega t}$ , waarin  $\omega$  complex is met een positief imaginair deel als  $\lambda > 0$ . Als we deze evenredigheidsfactoren met dezelfde symbolen aanduiden, worden de vergelijkingen (1):

$$\left. \begin{aligned} (i\omega + \lambda) u - \Omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \\ \Omega u + (i\omega + \lambda) v + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\omega \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Door een complexe verandering van de schaal kunnen deze vergelijkingen worden gereduceerd tot een gelijksoortig stelsel (met dezelfde randvoorwaarden), maar zonder wrijving [18]. Daartoe stellen we

$$\left. \begin{aligned} \omega' &\stackrel{\text{def}}{=} \omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Omega' &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \zeta' &\stackrel{\text{def}}{=} \zeta \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (3)$$

waardoor een stelsel van de vorm (2) wordt verkregen, waarin  $u' = u$ ,  $v' = v$  en  $\lambda' = 0$ . Als de eigenfrequenties van dit stelsel bij gegeven randvoorwaarden gevonden zijn in de vorm  $\omega' = \varphi(\Omega')$  wordt  $\omega$  verkregen door het oplossen van de vergelijking

$$\omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \varphi \left(\Omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (4)$$

Als  $\lambda \ll |\omega|$  vinden we in eerste-ordebenadering:

$$\omega = \varphi(\Omega) + \frac{1}{2}i\lambda [1 + \Omega\varphi'(\Omega)/\varphi(\Omega)] + O(\lambda^2/\omega^2). \quad (5)$$

Dit betekent, dat de perioden in eerste benadering onveranderd blijven, maar dat de trillingen gedempt zijn. De dempingsfactor  $\exp -\frac{1}{2}\lambda [1 + \Omega\varphi'(\Omega)/\varphi(\Omega)] t$  kan worden berekend als  $\varphi(\Omega)$  bekend is voor reële waarden van  $\Omega$ .

Op overeenkomstige wijze vinden we voor  $\zeta' = \psi(\Omega') = \psi(\Omega', x, y)$  dat

$$\zeta = \psi(\Omega) - i\frac{\lambda}{2\omega} [\psi(\Omega) - \Omega\psi'(\Omega)] + O(\lambda^2/\omega^2). \quad (6)$$

We zien hieruit, dat de amplitude van  $\zeta$  voor  $\lambda > 0$  in eerste benadering verkregen kan worden uit die voor  $\lambda = 0$  door vermenigvuldiging met de dempingsfactor

$$\exp - \frac{\lambda}{2\omega} [\psi(\Omega) - \Omega\psi'(\Omega)] t. \quad (7)$$

Het is derhalve voldoende slechts het geval zonder wrijving te beschouwen.

Als we de accenten weglaten of, wat op hetzelfde neerkomt, als we  $\lambda = 0$  stellen in (2) worden deze vergelijkingen vereenvoudigd tot:

$$\left. \begin{aligned} i\omega u - \Omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \\ \Omega u + i\omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\omega \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Hieruit volgt, dat

$$\left. \begin{aligned} \Delta u - \kappa^2 u &= 0 \\ \Delta v - \kappa^2 v &= 0 \\ \Delta \zeta - \kappa^2 \zeta &= 0, \end{aligned} \right\} (9)$$

waarin

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

en

$$\kappa^2 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 - \omega^2. \quad (10)$$

We vermelden nog de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\kappa^{-2} \left( i\omega \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \Omega \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ v &= \kappa^{-2} \left( \Omega \frac{\partial \zeta}{\partial x} - i\omega \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

en

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \omega^2 \zeta &= i\omega \frac{\partial u}{\partial x} - \Omega \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \omega^2 v &= i\Omega \omega u - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (12)$$

### 3.0 HET ONEINDIGE KANAAL

Gemakshalve zullen we hier de reeds lang bekende oplossingen voor een oneindig lang recht kanaal met (constante) breedte  $2a$  in herinnering brengen. We kiezen  $a/\pi$  als lengte-eenheid, zodat  $a/(\pi\sqrt{gh})$  de eenheid van tijd wordt. Als de breedte en de diepte van het kanaal overeenkomen met de gemiddelde breedte en diepte van de Noordzee, wordt de eenheid van lengte ongeveer 128 km en de daarmee overeenkomende eenheid van tijd 1,4 h. Op de breedte van de Noordzee is  $\Omega$  ongeveer  $0,43 \text{ h}^{-1}$ , d.w.z. 0,6 in onze dimensieloze eenheden.

Kiezen we nu één kust van het kanaal als  $y$ -as, zo, dat de twee kusten worden voorgesteld door  $x = 0$  en  $x = \pi$ , dan worden de randvoorwaarden:

$$u = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi.$$

We beschouwen slechts die oplossingen  $(u, v, \zeta)$ , die (voor bijna elke  $y$ ) kwadratisch integreerbaar zijn (symbolisch:  $\in L^2$ ) in het interval  $0 < x < \pi$  zodat de theorieën over Fourierreeksen en over de Hilbertruimte kunnen worden toegepast. Elke  $u \in L^2$  in dit interval kan worden ontwikkeld volgens:

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n(y) e^{inx}.$$

De eerste differentiaalvergelijking (9) van 2.0 eist, dat  $u_n(y)$  evenredig is met  $e^{\pm v_n y}$ , waarin

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n^2 + \kappa^2} \quad (\kappa^2 = \Omega^2 - \omega^2). \quad (1)$$

Als we met  $\varepsilon$  een variabele aangeven, die de beide waarden  $+1$  en  $-1$  kan aannemen (of ook: die de twee tekens  $+$  en  $-$  kan voorstellen) en als we sommatie over deze variabele met een kleine  $\Sigma$  aanduiden, vinden we na toevoeging van een factor  $-\frac{1}{2}i(n^2 + \Omega^2)$ :

$$u = -\frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) e^{inx - \varepsilon v_n y}$$

Om aan de randvoorwaarden te voldoen, is het noodzakelijk en voldoende dat

$$C_{-n}^\varepsilon = -C_n^\varepsilon, \quad (2)$$

d.w.z. dat de  $C_n^\varepsilon$  oneven functies van  $n$  zijn. Daaruit volgt dat  $u$  een lineaire combinatie met coëfficiënten  $(n^2 + \Omega^2) C_n^\varepsilon$  is van de elementaire oplossingen

$$e^{-\varepsilon v_n y} \sin nx,$$

die „Poincarégolven” worden genoemd, evenals de overeenkomstige  $v$  en  $\zeta$ , die door substitutie uit (12) van 2.0 worden verkregen. Uit (12) van 2.0 blijkt echter, dat we hieraan nog oplossingen van de overeenkomstige homogene vergelijkingen moeten toevoegen, die samen met  $u = 0$  de zgn. „Kelvingolven” voorstellen. Deze laatste kunnen ook formeel uit de Poincarégolven worden gevonden door  $-i\varepsilon\Omega$  voor  $n$  en  $i\omega$  voor  $v_n$  te substitueren. De algemene oplossing voor het oneindige kanaal luidt dus, als we nog een kleine verandering aanbrengen in de constante factoren:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) e^{inx - \varepsilon v_n y} \\ v &= \frac{1}{2} \Sigma \sum C_n^\varepsilon (\varepsilon n v_n + \Omega\omega) e^{inx - \varepsilon v_n y} - \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \\ \zeta &= \frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n\omega - \varepsilon\Omega v_n) e^{inx - \varepsilon v_n y} - \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \end{aligned} \right\} (3)$$

waarin  $\Sigma$  een sommatie aangeeft over alle gehele getallen  $n$  en  $\Sigma'$  een sommatie over de twee waarden  $\varepsilon = +1$  en  $\varepsilon = -1$ , of ook over de twee tekens  $\varepsilon = +$  en  $\varepsilon = -$ , waarbij aan de voorwaarde (2) moet zijn voldaan. We merken op, dat  $v_{-n} = v_n$  zodat de gedeelten van  $v$  en  $\zeta$  die met Poincarégolven overeenkomen, een term (resp.  $C_n^\varepsilon \Omega\omega$ ,  $C_n^\varepsilon \varepsilon\Omega v_n$ ) bevatten, die een oneven en één (resp.  $\varepsilon C_n^\varepsilon n v_n$ ,  $C_n^\varepsilon n\omega$ ) die een even functie is van  $n$ . Gebruikmakende van (2) kunnen de vergelijkingen (3) geschreven worden in de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} u &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) \sin nx e^{-\varepsilon v_n y} \\ v &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (\varepsilon n v_n \cos nx + i\Omega\omega \sin nx) e^{-\varepsilon v_n y} - \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \\ \zeta &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (i n \omega \cos nx + \varepsilon\Omega v_n \sin nx) e^{-\varepsilon v_n y} - \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \end{aligned} \right\} (4)$$

De analogie van de twee Kelvingolven met een paar Poincarégolven zou kunnen worden gebruikt voor een uniforme behandeling met behulp van de residu-rekening in plaats van een behandeling met behulp van reeksen. Dit kan bij voorbeeld worden uitgevoerd in een complex  $v$ -vlak, waarin

$n = n(\nu) = \pm (\nu^2 + \omega^2 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}$ . De tweewaardigheid van  $n(\nu)$  is niet ernstig, aangezien alleen even functies er van in de integranden voorkomen. Met betrekking tot een monotoon toenemende rij van gebieden, die in de limiet alle nulpunten van de noemers bevatten (of ook een enkel gebied  $|\operatorname{Im} \nu| < a$ , waarin  $a > |\omega|$ ), verkrijgen we in plaats van (4):

$$\left. \begin{aligned} u &= \mathcal{E} \frac{\sin n(\nu) x C(\nu) e^{-\nu y}}{\tan \pi n(\nu)} \\ v &= \mathcal{E} \frac{\nu n(\nu) \cos n(\nu) x + i\omega\Omega \sin n(\nu) x}{(\nu^2 + \omega^2) \tan \pi n(\nu)} C(\nu) e^{-\nu y} \\ \zeta &= \mathcal{E} \frac{i\omega n(\nu) \cos n(\nu) x + \Omega \nu \sin n(\nu) x}{(\nu^2 + \omega^2) \tan \pi n(\nu)} C(\nu) e^{-\nu y}, \end{aligned} \right\} (5)$$

waarin  $\mathcal{E}$  de som van de residuen voorstelt en  $C(\nu)$  een functie holomorf in het (limiet)gebied is.

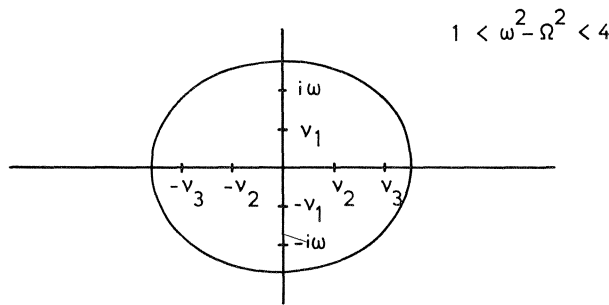


Fig. 3.0.1. De bij de Kelvin- en Poincarégolven behorende polen

We zullen echter geen gebruik maken van de residu-rekening. Formele ontwikkelingen (4) zullen slechts dan worden beschouwd oplossingen van ons probleem te zijn, als  $u$  en  $v$  (voor bijna iedere  $y$ ) behoren tot de klasse  $L^2$  van kwadratisch integreerbare functies van  $x$  in het interval  $0 < x < \pi$ . Ditzelfde geldt dan voor  $\partial\zeta/\partial x$  en  $\partial\zeta/\partial y$  en a fortiori voor  $\zeta$  zelf. Deze voorwaarde is gelijkwaardig met de eis, dat de rijen  $n^2 C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon\nu_n y}$  voor beide waarden van  $\varepsilon$  en alle  $y$  in het interval  $0 < y < b$  behoren tot de klasse  $l^2$  van kwadratisch sommeerbare rijen, d.w.z., dat

$$\sum n^4 |C_n^\varepsilon|^2 e^{2b|\operatorname{Re} \nu_n|} < \infty.$$

De reeksen, die in (4) en verderop optreden, behoeven niet overal convergent te zijn.

#### 4.0 HET RECHTHOEKIGE MEER

We bespreken nu het rechthoekige meer (d.w.z. een bekken, dat geheel begrensd wordt door ondoordringbare kusten) met een lengte  $2b$ , hetwelk kan worden beschouwd als een kanaal  $0 < x < \pi$  afgesloten door dammen bij  $y = b$  en  $y = -b$ . We moeten nu de oplossingen (2), (3) en (4) van 3.0 aanpassen aan de nieuwe randvoorwaarden:

$$v = 0 \quad \text{voor } y = b \quad \text{en voor } y = -b.$$

We vinden dan:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \sum_{n=1}^{\infty} C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon\nu_n b} (\varepsilon\nu_n \cos nx + i\omega\Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega b - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \\ \Sigma \sum_{n=1}^{\infty} C_n^\varepsilon e^{\varepsilon\nu_n b} (\varepsilon\nu_n \cos nx + i\omega\Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x + i\omega b - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \end{aligned} \right\} (1)$$

Voeren we nu in:

$$\left. \begin{aligned} d^+_n &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C_n^\varepsilon \\ d^-_n &\stackrel{\text{def}}{=} -i \Sigma C_n^\varepsilon \end{aligned} \right\} (2)$$

dan blijkt, als we sommen en verschillen nemen van overeenkomstige leden van (1), dat:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^\infty \cosh v_nb (nv_n d^+_n \cos nx - \omega \Omega d^-_n \sin nx) &= \cos \omega b \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \sum_1^\infty \sinh v_nb (nv_n d^-_n \cos nx + \omega \Omega d^+_n \sin nx) &= \sin \omega b \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \right\} (3)$$

We merken op, dat de imaginaire eenheid  $i$  niet meer expliciet voorkomt, hoewel hij impliciet kan voorkomen in enkele van de  $v_n$ , in het bijzonder als  $\omega^2 > n^2 + \Omega^2$ .

Het probleem is nu alle waarden van  $\omega$  te bepalen waarvoor niet-triviale stelsels ( $d^+_n, d^-_n, C^+, C^-$ ) bestaan en de daarmee overeenkomende oplossing ( $u, v, \zeta$ ) te vinden.

Voor  $\Omega = 0$  is de oplossing triviaal. Daar de functies  $\cos nx$  voor  $n \geq 0$  alle onafhankelijk zijn, is het noodzakelijk en voldoende, dat alle coëfficiënten verdwijnen, d.w.z. dat

$$\begin{aligned} (\cos \omega b) \Sigma C^\varepsilon &= 0 & (\sin \omega b) \Sigma \varepsilon C^\varepsilon &= 0 \\ d^+_n v_n \cosh v_nb &= 0 & d^-_n v_n \sinh v_nb &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat hetzij  $\sin 2\omega b = 0$  is, hetzij dat  $\sinh 2v_nb = 0$  is voor de een of andere  $n$ . De laatstgenoemde voorwaarde betekent dat  $2v_nb = i\pi k$  voor een of andere gehele  $k$ , d.w.z. dat

$$\omega = \pm (n^2 + \frac{1}{4}\pi^2 k^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

De oplossingen van  $\sin 2\omega b = 0$  hebben ook de vorm (4) met  $n = 0$ .

De oplossingen, die behoren bij een  $\omega$ , die de vorm (4) heeft, behoeven niet eenduidig te wezen, daar meer dan één paar  $(n, k)$  dezelfde  $\omega$  kan geven, die dan een veelvoudige eigen-frequentie is. We zullen de oplossingen niet expliciet opschrijven. Terugkerende tot het algemene geval  $\Omega \neq 0$  definiëren we

$$\left. \begin{aligned} f^+_n &\stackrel{\text{def}}{=} nv_n d^+_n \cosh v_nb \\ f^-_n &\stackrel{\text{def}}{=} nv_n d^-_n \sinh v_nb \end{aligned} \right\} (5)$$

en

$$\left. \begin{aligned} a^+(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (\cos \omega b) \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ a^-(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (\sin \omega b) \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \right\} (6)$$

zodat (3) overgaat in:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^\infty f^+_n \cos nx - \omega \Omega \sum_1^\infty \frac{\text{ctnh } v_nb}{nv_n} f^-_n \sin nx &= a^+(x) \\ \sum_1^\infty f^-_n \cos nx + \omega \Omega \sum_1^\infty \frac{\tanh v_nb}{nv_n} f^+_n \sin nx &= a^-(x) \end{aligned} \right\} (7)$$

De hiervoor genoemde voorwaarde over de kwadratische integreerbaarheid betekent, dat  $f^\pm_n \in L^2$ .

Voor elk paar reële functies  $\varphi, \psi \in L^2$  (d.w.z. steeds kwadratisch integreerbaar op het interval  $0 < x < \pi$ ) definiëren we het „inwendige product“:

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx \tag{8}$$

(de aandacht zij gevestigd op de factor 2), en voor elke  $\varphi$  de norm:

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

De cosinus-ontwikkeling van een functie  $\varphi$  op het interval  $0 < x < \pi$  is gelijk aan

$$\varphi(x) = \Sigma_* \varphi_m \cos mx, \quad (10)$$

als de reeks convergeert, waarbij

$$\varphi_m \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \varphi(x)), \quad (11)$$

terwijl het symbool  $\Sigma_*$  een sommatie aangeeft over alle *niet-negatieve* gehele getallen, waarbij we echter voor  $m = 0$  de *helft* van de sommand nemen<sup>1)</sup>. Uit (8) t/m (11) volgt dan dat

$$(\varphi, \psi) = \Sigma_* \varphi_m \bar{\psi}_m$$

en in het bijzonder

$$\|\varphi\|^2 = \Sigma_* |\varphi_m|^2.$$

Voor

$$I_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \cos nx) \quad (m \geq 0, n \geq 0) \quad (12)$$

geldt in het bijzonder:

$$I_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2 & \text{als } m = n = 0 \\ 0 & \text{als } m \neq n \end{cases} \quad (13)$$

en voor alle  $\varphi$ :

$$\varphi_m = \Sigma_* I_{mn} \varphi_n.$$

Ook is, als

$$\Gamma_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \sin nx), \quad (14)$$

$\Gamma_{mn} = 0$  als  $m - n$  even is en  $\Gamma_{mn} = 4n/\pi (n^2 - m^2)$  als  $m - n$  oneven is, d.w.z.

$$\Gamma_{mn} = \frac{4}{\pi} \frac{n}{n^2 - m^2} p(n - m), \quad (15)$$

waarin

$$p(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is} \\ 1 & \text{als } k \text{ oneven is.} \end{cases} \quad (16)$$

In het bijzonder is

$$\Gamma_{m0} = 0 \quad \Gamma_{0n} = \frac{4p(n)}{\pi n}, \quad (17)$$

zodat

$$\sin nx = \Sigma_* \cos mx \Gamma_{mn} \quad (0 < x < \pi). \quad (18)$$

Daarboven hebben we

$$\cos mx = \Sigma_* \Gamma_{mn} \sin nx \quad (0 < x < \pi), \quad (19)$$

waarbij uiteraard het symbool  $\Sigma_*$  vervangen kan worden door  $\sum_1^\infty$  of  $\sum_0^\infty$ .

We merken de identiteit op:

$$\sum_n \Gamma_{ln} \Gamma_{mn} = I_{ln} \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Het is mogelijk de factor 2 in (8) weg te laten en  $\sum_{-\infty}^{+\infty}$  i.p.v.  $\Sigma_*$  te gebruiken, indien we op een geschikte manier de coëfficiënten ook voor negatieve  $n$  definiëren. De voor- en nadelen van deze verandering in het formalisme, evenals van de vervanging van het interval  $(0, \pi)$  door  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$  of  $(-\pi, +\pi)$ , zijn ongeveer even groot.



echter is:

$$\sum_m^* \Gamma_{mk} \Gamma_{mn} = I_{kn} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} I_{kn} & \text{als } k \neq 0 \\ 0 & \text{als } k = 0, \end{cases} \quad (21)$$

d.w.z.  $I_{kn} = I_{kn}(1 - \delta_{ko})$ . Daarenboven is  $\Gamma_{nm} = -\frac{m}{n} \Gamma_{mn}$  tenzij  $n = 0$ .

Als we de inwendige producten vormen van de beide leden van de vergelijkingen (7) met  $\cos mx$ , vinden we voor  $m > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f_m^+ - \omega \Omega \sum_1^\infty \Gamma_{mn} \frac{\text{ctnh } \nu_n b}{n \nu_n} f_n^- &= (\cos mx, a^+(x)) \\ f_m^- + \omega \Omega \sum_1^\infty \Gamma_{mn} \frac{\tanh \nu_n b}{n \nu_n} f_n^+ &= (\cos mx, a^-(x)) \end{aligned} \right\} (22)$$

Voor  $m = 0$  blijft (22) gelden als we definiëren

$$f_{+0} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad f_{-0} \stackrel{\text{def}}{=} 0. \quad (23)$$

Definiëren we voor  $m \geq 0$

$$a_m^\pm \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, a^\pm(x)), \quad (24)$$

dan hebben we, omdat  $(\cos mx, e^{\lambda x}) = \frac{2\lambda}{\pi(m^2 + \lambda^2)} [(-1)^m e^{\pi\lambda} - 1]$ :

$$\left. \begin{aligned} a_m^+ &= \frac{2\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} \cos \omega b \Sigma_\varepsilon C^\varepsilon [(-1)^m e^{\varepsilon\pi\Omega} - 1] e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^+ \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega \cos \omega b & m \text{ even} \\ -\frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^- \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega \cos \omega b & m \text{ oneven} \end{cases} \\ a_m^- &= \frac{2\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} \sin \omega b \Sigma_\varepsilon C^\varepsilon [(-1)^m e^{\varepsilon\pi\Omega} - 1] e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^+ \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega \sin \omega b & m \text{ even} \\ -\frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^- \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega \sin \omega b & m \text{ oneven,} \end{cases} \end{aligned} \right\} (25)$$

waarin

$$b^+ \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^\varepsilon \quad b^- \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_\varepsilon C^\varepsilon. \quad (26)$$

Wegens (25) zijn de  $a_m^\pm \in l^1$  (d.w.z. absoluut sommeerbaar) en dus zeker  $\in l^2$  (d.w.z. kwadratisch sommeerbaar).

Definiëren we nu nog voor  $n > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} K_{mn}^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\text{ctnh } \nu_n b}{n \nu_n} \\ K_{mn}^- &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\tanh \nu_n b}{n \nu_n} \end{aligned} \right\} (27)$$

en

$$K_{m0}^\pm \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

dan kunnen de vergelijkingen (22) als volgt worden geschreven:

$$\left. \begin{aligned} f_m^+ - \omega \Omega \sum_m^* K_{mn}^+ f_n^- &= a_m^+ \\ f_m^- + \omega \Omega \sum_m^* K_{mn}^- f_n^+ &= a_m^- \end{aligned} \right\} (28)$$

We merken op, dat de  $K^\pm$  eindige normen  $\|K^\pm\|$  bezitten:

$$\|K^\pm\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m^*} \sum_{n^*} |K^\pm|^2 = \sum_1^\infty n \frac{|\tan v_n b|^{\bar{+}2}}{n^2 |v_n|^2} \sum_{m^*} \Gamma_{mn^2} = \sum_1^\infty \frac{|\tan v_n b|^{\bar{+}2}}{n^2 |v_n|^2} < \infty$$

(wegens (21)), aangezien voor  $n \rightarrow \infty$  geldt  $\tanh v_n b \rightarrow 1$  en  $v_n/n \rightarrow 1$ .

Als we de vectoren en matrices in de Hilbertruimte door dezelfde symbolen aangeven als hun componenten met weglating van de indices, kunnen de vergelijkingen (28) verkort worden geschreven <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} f^+ - \omega \Omega K^+ f^- &= a^+ \\ f^- + \omega \Omega K^- f^+ &= a^- \end{aligned} \right\} (29)$$

We dienen nu de niet-triviale oplossingen ( $f^+, f^-, C^+, C^-$ ) van (29) met (25) te vinden, hieraan de voorwaarden (23) op te leggen en ten slotte de  $d^{\pm}_n$  op te lossen uit (5). De laatstgenoemde oplossing is slechts dan mogelijk en eenduidig als  $\sinh 2v_n b \neq 0$ . Aan deze voorwaarde wordt niet noodzakelijkerwijs voldaan maar bij een gegeven  $\Omega$  zal er slechts voor bijzondere waarden van  $b$  niet aan voldaan zijn (en omgekeerd). Dit treedt dan en slechts dan op als, in analogie met (4):

$$\omega^2 = \Omega^2 + n^2 + \pi^2 k^2 / 4b^2.$$

We zullen daarom aannemen dat  $\sinh 2v_n b \neq 0$  voor alle waarden van  $n \geq 1$ , zodat het voldoende is (29), (25), (23) op te lossen.

Eliminatie van resp.  $f^-$  en  $f^+$  uit (29) levert:

$$\left. \begin{aligned} f^+ + \omega^2 \Omega^2 K^+ K^- f^+ &= h^+ \stackrel{\text{def}}{=} a^+ + \omega \Omega K^+ a^- \\ f^- + \omega^2 \Omega^2 K^- K^+ f^- &= h^- \stackrel{\text{def}}{=} a^- - \omega \Omega K^- a^+ \end{aligned} \right\} (30)$$

Het stelsel (29) is gelijkwaardig met het stelsel, dat ontstaat indien één van zijn (vector)vergelijkingen, bijv. de eerste, vervangen wordt door de overeenkomstige vergelijking uit (30).

Daar  $K^\pm$ , en dus ook  $K^\pm K^\mp$  eindige normen bezitten, hebben de matrices  $I + \omega^2 \Omega^2 K^\pm K^\mp$  voor voldoende kleine waarden van  $\omega \Omega$  eenduidige tweezijdige reciproken  $R^\pm$ , die voor voldoende kleine waarden van  $\omega^2 \Omega^2$  verkregen kunnen worden met behulp van een ontwikkeling volgens Neumann <sup>2)</sup> <sup>3)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} R^+ &\stackrel{\text{def}}{=} (I + \omega^2 \Omega^2 K^+ K^-)^{-1} = \sum_0^\infty (-\omega^2 \Omega^2)^n (K^+ K^-)^n \\ R^- &\stackrel{\text{def}}{=} (I + \omega^2 \Omega^2 K^- K^+)^{-1} = \sum_0^\infty (-\omega^2 \Omega^2)^n (K^- K^+)^n \end{aligned} \right\} (31)$$

We merken op, dat

$$\left. \begin{aligned} R^- &= I - \omega^2 \Omega^2 K^- R^+ K^+, & K^+ R^- &= R^+ K^+ \\ R^+ &= I - \omega^2 \Omega^2 K^+ R^- K^-, & K^- R^+ &= R^- K^- \end{aligned} \right\} (32)$$

<sup>1)</sup> In deze notatie hebben de identiteiten (20), (21) de eenvoudige gedaanten  $\Gamma \Gamma' = I$ ,  $\Gamma' \Gamma = I^\circ$ , waarbij  $\Gamma'$  de ge-transponeerde van de matrix  $\Gamma$  is.

<sup>2)</sup> Het feit dat in de  $R^\pm$  (zie ook (4) van 5.0 hierna) twee verschillende operatoren afwisselend voorkomen, is niet essentieel. Hadden we i.p.v. (27) gedefinieerd

$$\begin{aligned} K'^{\pm} &\stackrel{\text{def}}{=} \pm (-1)^n \Gamma_{mn} (n v_n)^{-1} (\tanh v_n b)^{\bar{+}(-1)^n} = (-1)^n K_{mn} \pm (-1)^n \\ f_n'^{\pm} &\stackrel{\text{def}}{=} f_n^{\pm(-1)^n} \end{aligned}$$

dan vinden we afzonderlijke vergelijkingen voor  $f'^+$  en  $f'^-$ , die elk slechts afhankelijk zijn van de overeenkomstige operator  $K'^+$ , resp.  $K'^-$ .

<sup>3)</sup> Indien  $\omega^2 \Omega^2 > \|K^+ K^-\|^{-1}$  kan de geldigheid van de machtreeksen (31) vervallen. De reciproken  $R^\pm$  blijven dan echter bestaan, tenzij  $-(\omega \Omega)^{-2}$  een latente wortel is van  $K^+ K^-$  (en eveneens van  $K^- K^+$ ). Als deze wortel  $r$ -voudig is, moeten er voor de oplosbaarheid van de vergelijkingen (30)  $r$  lineaire betrekkingen voor  $h^+$  en eveneens  $r$  betrekkingen voor  $h^-$  bestaan. Zowel  $f^+$  als  $f^-$  zijn dan op  $r$  constanten na bepaald. Ook in dit geval volgen dus uit ieder van de voorwaarden (23)  $(r+1) - r = 1$  lineaire betrekkingen tussen  $b^+$  en  $b^-$ . Om ze te vinden, hebben we de spectrale ontwikkeling van  $K^\pm K^\mp$  nodig. We zullen hier niet verder op ingaan.

Met behulp van (31) kan (30) worden opgelost:

$$\left. \begin{aligned} f^+ &= R^+ h^+ \\ f^- &= R^- h^- \end{aligned} \right\} (33)$$

Hieraan moeten de voorwaarden (23) worden opgelegd, d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_* R^+_{om} h^+_m &= 0 \\ \Sigma_* R^-_{om} h^-_m &= 0 \end{aligned} \right\} (34)$$

We brengen in herinnering, dat de  $\Gamma_{mn}$ ,  $K^{\pm}_{mn}$  alleen dan niet verdwijnen als  $m$  en  $n$  ongelijke pariteit hebben. Derhalve is  $R^{\pm}_{om} = 0$ , tenzij  $m$  even is, zodat alleen  $h^{\pm}_m$  met *even*  $m$  in (34) voorkomen. Ten gevolge van (30) zijn deze functies van  $a^{\pm}_m$  voor even  $m$  en van  $a^{\mp}_n$  voor oneven  $m$ , en dus wegens (25) alleen hetzij van de  $b^+$  of van de  $b^-$ . We verkrijgen dus twee stelsels oplossingen, één met  $b^+ \neq 0$ ,  $b^- = 0$ , het andere met  $b^+ = 0$ ,  $b^- \neq 0$ .

Definiëren we nu nog:

$$\varrho^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 \Sigma_* R^{\pm}_{om} (m^2 + \Omega^2)^{-1} \quad (35)$$

en

$$\sigma^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 \Sigma_* (R^{\pm} K^{\pm})_{0n} (n^2 + \Omega^2)^{-1}, \quad (36)$$

dan vinden we uit (34), (30) en (25)

hetzij  $b^- = 0$ ,  $b^+ \neq 0$  en

$$\varrho^+ \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \cos \omega b - \omega \Omega \sigma^+ \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \sin \omega b = 0, \quad (37)$$

hetzij  $b^+ = 0$ ,  $b^- \neq 0$  en

$$\varrho^- \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \sin \omega b + \omega \Omega \sigma^- \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \cos \omega b = 0. \quad (38)$$

## 5.0 ONTWIKKELINGEN VOOR KLEINE WAARDEN VAN $\Omega$

Bij gegeven  $\Omega$  en  $b$  is elk van de transcendente vergelijkingen (37) en (38) van 4.0 voor  $\omega$  bijzonder gecompliceerd. Immers  $\omega$  komt voor

- impliciet in de  $K^{\pm}_{mn}$  via het argument  $\nu_n = (n^2 + \Omega^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$ ,
- impliciet in de  $R^{\pm}_{om}$  via het argument  $\omega \Omega$ ,
- expliciet wegens de factor  $\omega^{\pm 1} \tan \omega b$ .

De afhankelijkheid van  $\Omega$  is zelfs nog gecompliceerder en die van  $b$  ongeveer even gecompliceerd.

We kunnen echter  $\varrho^{\pm}$  en  $\sigma^{\pm}$  in een machtreeks in  $\Omega^2$  ontwikkelen, waaruit benaderingen van  $\omega$  voor kleine  $\Omega^2$  gemakkelijk kunnen worden afgeleid (we herinneren eraan, dat in gewone eenheden  $\Omega$  vervangen moet worden door  $\Omega a \pi^{-1} (gh)^{-\frac{1}{2}}$ ). We zullen dit alleen voor de eerste vergelijking (37) van 4.0 uitvoeren.

Daar  $R^+_{om}$  verdwijnt tenzij  $m$  even is en daar  $R_{00}^+ = I_{00} = 2$ , volgt uit (35) van 4.0 dat

$$\varrho^+ = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-\Omega^2)^s \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2s} R^+_{om}. \quad (1)$$

Daarenboven is voor  $m \neq 0$

$$R^+_{om} = \sum_{r=1}^{\infty} (-\omega^2 \Omega^2)^r [(K^+ K^-)^r]_{om}, \quad (2)$$

waaruit:

$$\varrho^+ = 1 - \omega^2 \Omega^4 \sum_{r=0}^{\infty} (-\Omega^2)^r \sum_{h=0}^r \omega^{2r} M_{r-h+1}^{2h+2}, \quad (3)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} M_l^{2h} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2l} [(K^+ K^-)^h]_{on} \\ M_l^{2h+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2l} [(K^+ K^-)^h K^+]_{on}, \end{aligned} \right\} (4)$$

en op dezelfde manier, daar  $(R^+K^+)$  verdwijnt tenzij  $n$  oneven is, is:

$$\sigma^+ = \Omega^2 \sum_{r=0}^{\infty} (-\Omega^2)^r \sum_o^r \omega^{2h} M_{r-h+1}^{2h+1} \quad (5)$$

Om een tweede-ordebenadering (in  $\Omega^2$ ) te vinden, is het voldoende om te stellen:

$$\begin{aligned} \varrho^+ &= 1 + O(\Omega^4) \\ \sigma^+ &= \Omega^2 M_1^1 - \Omega^4 (M_2^1 + \omega^2 M_3^1) + O(\Omega^6). \end{aligned}$$

We krijgen:

$$\frac{\text{ctn } \omega b}{\omega} - \frac{\Omega}{\tanh \frac{1}{2} \pi \Omega} \frac{\sigma^+}{\varrho^+} = \frac{2}{\pi} \left[ \Omega^2 M_1^1 - \Omega^4 \left( -\frac{1}{12} \pi^2 M_1^1 + M_2^1 + \omega^2 M_3^1 \right) \right] + O(\Omega^6). \quad (6)$$

Echter is

$$\begin{aligned} M_1^1 &= \sum_1^{\infty} n^{-2l} K_{on}^+ = \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} v_n \tanh v_n b} = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} v_n^o \tanh v_n^o b} - \frac{2}{\pi} \Omega^2 \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} v_n^o n^3} \left\{ \frac{1}{\tanh v_n^o b} + \frac{v_n^o}{\sinh^2 v_n^o b} \right\} + O(\Omega^4), \quad (7) \end{aligned}$$

waarin  $v_n^o = \sqrt{n^2 - \omega_o^2}$  en waarbij verondersteld is dat  $v_n^o \neq 0$  voor alle waarden van  $n$ , terwijl als argument van  $M_3^1$  in plaats van  $v_n$  genomen mag worden  $v_n^o$ . Verdere vereenvoudiging kan worden verkregen als  $b$  groot is (we kunnen altijd veronderstellen, dat  $b \geq a = \frac{1}{2}\pi$ ). Dit zal hierna afzonderlijk worden gedaan. Het vinden van hogere ordebenaderingen vereist slechts geduld. Als we ons beperken tot de eerste-ordebenadering, vinden we, als we nog  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega_o - \omega$  stellen, waarin  $\cos \omega_o b = 0$  zodat  $\omega^{-1} \text{ctn } \omega b = \omega_o^{-1} \delta b + O(\Omega^2)$ :

$$\frac{\delta}{\omega_o} = \frac{8\Omega^2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^4 v_n^o b \tanh v_n^o b} + O(\Omega^4). \quad (8)$$

Deze reeks convergeert tamelijk snel, daar  $n$  alleen oneven waarden aanneemt en de algemene term is  $O(n^{-5})$ .

Voor de laagste frequentie is in het bijzonder  $\omega_o b = \frac{1}{2}\pi$ , zodat

$$v_n^o b = \sqrt{n^2 b^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Als hierin de lengte  $2b$  van het meer het dubbele is van de breedte  $2a = \pi$ , zodat  $b = \pi$ ,  $\omega_o = \frac{1}{2}$ , dan gaat (8) over in:

$$\frac{\delta}{\omega_o} = 0,302 \Omega^2. \quad (9)$$

Het is duidelijk, dat de hyperbolische tangenten snel tot 1 naderen. Dit feit kan worden gebruikt bij de berekening van hogere termen in  $\Omega^2$ , als  $b$  groot genoeg is. We zullen alleen de eerste-ordebenadering in  $\beta = e^{-2v_n b}$  aangeven. Dan is  $e^{-2v_n b} = O(\beta^3)$  als  $n \geq 3$ . Daarenboven is:

$$\left. \begin{aligned} \text{ctnh } v_1 b - 1 &= \frac{e^{-v_1 b}}{\sinh v_1 b} = 2\beta + O(\beta^2) \\ 1 - \tanh v_1 b &= \frac{e^{-v_1 b}}{\cosh v_1 b} = 2\beta + O(\beta^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Stellen we <sup>1)</sup>

$$K_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_{mn} (nv_n)^{-1} & \text{als } n \neq 0 \\ 0 & \text{als } n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

dan volgt hieruit dat

$$\left. \begin{aligned} K_{m1}^+ &= K_{m1} (1 + 2\beta) + O(\beta^2) \\ K_{m1}^- &= K_{m1} (1 - 2\beta) + O(\beta^2) \\ K_{\pm mn} &= K_{mn} + O(\beta^3) \end{aligned} \right\} \quad \text{als } n > 1. \quad (12)$$

<sup>1)</sup> We herinneren er aan, dat we hebben aangenomen, dat  $v_n \neq 0$  voor alle waarden van  $n$ .

Derhalve is:

$$\left. \begin{aligned} [(K^+K^-)^h]_{mn} &= (K^{2h})_{mn} (1 - 2\beta \delta_{n1}) + 2\beta \sum_1^{2h-1} (-1)^{j-1} (K^j)_{m1} (K^{2h-j})_{1n} + O(\beta^2) \\ [(K^+K^-)^h K^+]_{mn} &= (K^{2h+1})_{mn} (1 + 2\beta \delta_{n1}) + 2\beta \sum_1^{2h} (-1)^{j-1} (K^j)_{m1} (K^{2h+1-j})_{1n} + O(\beta^2). \end{aligned} \right\} (13)$$

We zullen deze waarden niet in (2) t/m (5) en de daaruit afgeleide vergelijkingen invullen. We zullen ze slechts gebruiken voor de berekening van de tweede-ordebenadering voor  $\delta$  als  $\omega_o = \pi/2b$  en als  $b$  groot is. Ten slotte beschouwen we het hiervoor uitgezonderde geval, waarin één van de  $\nu_n^o$ , bijv.  $\nu_s^o$ , verdwijnt. Dit betekent, dat  $\omega_o = s$  (of  $-s$ ) ( $s$  oneven) een ontaarde eigenfrequentie is. Het eenvoudigste geval, waarvoor de eerste-ordebenadering reeds lang bekend is (zie LAMB [8], PROUDMAN [13], CORKAN en DOODSON [1]), is de laagste eigenfrequentie van een vierkant meer:  $b = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\omega_o = 1$ .

Voor het geval, dat  $\nu_s^o = 0$  kan de afleiding tot en met (6) gehandhaafd worden, maar (7) is alleen juist voor de termen waarvoor  $n \neq s$ . Voor  $n = s$  wordt:

$$\nu_s^2 = s^2 + \Omega^2 - (\omega_o - \delta)^2 = 2\omega_o \delta + \Omega^2 - \delta^2. \quad (14)$$

Hieruit zien we, dat  $M_1^1$  van de orde  $\nu_s^{-2}$  wordt, d.w.z. van de orde  $\delta^{-1}$ , en dat  $\delta = O(\Omega)$  wordt in plaats van  $\delta = O(\Omega^2)$ . De term  $n = s$  in de eerste som van het rechterlid van (7) wordt:

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{s^{2l+2} \nu_s \tanh \nu_s b} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{s^{2l+2} b} \frac{1 + \frac{2}{3} \omega_o \delta b^2}{2\omega_o \delta + \Omega^2 - \delta^2} (1 + O(\Omega^4)). \quad (15)$$

In eerste benadering hebben we dus wegens (6):

$$\frac{\delta b}{\omega_o} = \frac{\delta b}{s} = \frac{2\Omega^2}{\pi} \frac{2}{\pi b s^5 \delta},$$

of

$$\delta = \frac{2}{\pi s^2 b} + O(\Omega^2). \quad (16)$$

In het bijzondere geval van het vierkante meer ( $s = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}\pi$ ) wordt dit:

$$\delta = \frac{4\Omega}{\pi^2} + O(\Omega^2), \quad (17)$$

in overeenstemming met de door LAMB gegeven waarde.

Gebruiken we (15) voor het verkrijgen van een tweede-ordebenadering, dan vinden we met behulp van (6) en (4):

$$\delta = \frac{2\Omega}{\pi b s^2} \left[ 1 - \frac{\pi \Omega b s}{8} \left( 1 + \frac{4}{\pi^2 b^2 s^4} - \frac{16}{3\pi^2 s^2} \right) + \frac{2\Omega s^3}{\pi} \sum_{n \neq s} \frac{p(n)}{n^4 \nu_n^o \tanh \nu_n^o b} \right] + O(\Omega^3) \quad (18)$$

In het bijzondere geval van de laagste eigenfrequentie van een vierkant meer wordt dit

$$\delta = \frac{4\Omega}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{\Omega}{4} \left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{3} \right) + \frac{2\Omega}{\pi} \sum_3^{\infty} \frac{p(n)}{n^4 \nu_n^o \tanh \frac{1}{2} \nu_n^o \pi} \right] + O(\Omega^3), \quad (19)$$

waarin

$$\nu_n^o = \sqrt{n^2 - 1}$$

zodat numeriek:

$$\delta = 0,4053 \Omega (1 - 0,3570 \Omega). \quad (20)$$

We zien dat voor  $\Omega = 0,6$  de frequentieverlaging meer dan 20 % wordt overschat als we slechts de eerste benadering beschouwen.

## 6.0 DE RECHTHOEKIGE BAAI

Met dezelfde veronderstellingen als in 2.0 beschouwen we een rechthoekige baai  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < b$ , begrensd door ondoordringbare kusten  $x = 0$ ,  $0 < y < b$ ;  $y = 0$ ,  $0 < x < \pi$ ;  $x = \pi$ ,  $0 < y < b$  en door een oceaan  $y > b$ , die oneindig diep wordt verondersteld. Langs de grens  $y = b$  mag  $\zeta = 0$  worden genomen.

Om de eigentrillingen te vinden, gaan we weer uit van de oplossing (4) van 3.0 voor het oneindig lange kanaal, waaraan we de volgende voorwaarden opleggen:

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ voor } y = 0, 0 < x < \pi \\ \zeta &= 0 \text{ voor } y = b, 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

of expliciet:

$$\begin{aligned} \Sigma \sum C_n^\varepsilon (\varepsilon n v_n \cos nx + i\omega \Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \Sigma \sum C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} (i\omega n \cos nx + \varepsilon \Omega v_n \sin nx) &= \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) - i\varepsilon \omega b} \end{aligned} \quad (1)$$

We definiëren (zie ook (26) van 4.0):

$$\left. \begin{aligned} b^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^\varepsilon \\ b^- &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C^\varepsilon \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \cosh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) \\ \sigma(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sinh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \psi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \right\} (4)$$

en voor  $n > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f_n &\stackrel{\text{def}}{=} n v_n \Sigma \varepsilon C_n^\varepsilon \\ g_n &\stackrel{\text{def}}{=} i\omega n \Sigma C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} \end{aligned} \right\} (5)$$

We nemen aan, dat  $\cos \omega b \neq 0$  en  $n v_n \cosh v_n b \neq 0$  voor alle  $n \geq 1$ . Bij gegeven  $b$  is dit voor vrijwel alle  $\Omega$  juist en omgekeerd, mits  $\omega$  een eigenfrequentie is. In dat geval kunnen de  $C_n^\varepsilon$  uit (5) worden opgelost. We vinden:

$$C_n^\varepsilon = \frac{1}{2i\omega n v_n \cosh v_n b} (v_n g_n + \varepsilon i\omega e^{\varepsilon v_n b} f_n) \quad (6)$$

Tevens is:

$$C^\varepsilon = \frac{1}{2} (b^+ + \varepsilon b^-) \quad (7)$$

en

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \gamma(x) b^+ + \sigma(x) b^- \\ \psi(x) &= \sigma(x) b^+ + \gamma(x) b^- \end{aligned} \right\} (8)$$

De uitdrukkingen voor  $(u, v, \zeta)$  worden:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_1^{\infty} \frac{(n^2 + \Omega^2) \sin nx}{i\omega n v_n \cosh v_n b} [i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y], \\ v &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{i\omega \cosh v_n b} [\cos nx \{ i\omega f_n \cosh v_n (b - y) - v_n g_n \sinh v_n y \} + \\ &\quad + \frac{i\omega \Omega}{n v_n} \sin nx \{ i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y \}] - \varphi(x) \cos \omega y + i\psi(x) \sin \omega y, \\ \zeta &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{i\omega n v_n \cosh v_n b} [i\omega n \cos nx \{ i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y \} + \\ &\quad + \Omega v_n \sin nx \{ i\omega f_n \cosh v_n (b - y) - v_n g_n \sinh v_n y \}] - \psi(x) \cos \omega y + i\varphi(x) \sin \omega y. \end{aligned} \right\} (9)$$

De voorwaarden (1) worden:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} f_n \left( \cos nx + \frac{i\omega \Omega}{n v_n} \tanh v_n b \sin nx \right) + \Omega \sum_1^{\infty} \frac{g_n \sin nx}{n \cosh v_n b} &= \varphi(x) \\ \sum_1^{\infty} g_n \left( \cos nx + \frac{i v_n}{n \omega} \tanh v_n b \sin nx \right) + \sum_1^{\infty} \frac{f_n \sin nx}{n \cosh v_n b} &= \psi_*(x) \end{aligned} \right\} (10)$$

waarin:

$$\psi_*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) \cos \omega b - i\varphi(x) \sin \omega b.$$

Voor  $\Omega = 0$  is het vraagstuk weer triviaal. Daar de  $\cos nx$  voor  $n \geq 0$  alle onafhankelijk zijn, verkrijgen we uit (1) met behulp van (5) en (2):

$$\left. \begin{aligned} \sum \varepsilon C^\varepsilon &= \sum \varepsilon C^\varepsilon e^{-i\varepsilon \omega b} = 0 \\ v_n \sum \varepsilon C_n^\varepsilon &= \omega \sum C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} = 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

voor alle waarden van  $n$ . Dan is ook:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega b \sum \varepsilon C^\varepsilon &= 0 \\ \omega \cosh v_n b \sum C_n^\varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

De enige niet-triviale oplossingen (d.w.z. die waarvoor niet alle  $(u, v, \zeta)$  identiek verdwijnen) worden verkregen uit:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega b = 0; \quad \omega &= (k + \frac{1}{2}) \pi b^{-1}; \quad C^- = C^+ \text{ (bijv. } = \frac{1}{2}) \\ u = 0; \quad v &= -i \sin \omega y; \quad \zeta = \cos \omega y \end{aligned} \right\} (13)$$

en voor enkele positieve gehele getallen uit:

$$\cosh v_s b = 0; \quad \omega^2 = s^2 + (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2 b^{-2}; \quad C^{+s} = C^{-s} \text{ (bijv. } = \frac{1}{2is})$$

namelijk:

$$\left. \begin{aligned} u &= -is \sin sx \cosh v_s y \\ v &= i v_s \cos sx \sinh v_s y \\ \zeta &= \omega \cos sx \cosh v_s y. \end{aligned} \right\} (14)$$

We kunnen de eerstgenoemde trillingswijze (13) formeel uit de laatstgenoemde afleiden (op een constante factor na) als we  $s$  ook de waarde 0 laten aannemen (en dus willekeurige gehele waarden).

Terugkerend tot het algemene geval nemen we de cosinus-coëfficiënten van beide leden van vergelijking (10). We hebben met een gehele  $m \geq 0$ :

$$(e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda\pi}, \cos mx) = \frac{2\lambda \{ (-1)^m e^{\frac{1}{2}\lambda\pi} - e^{-\frac{1}{2}\lambda\pi} \}}{\pi (\lambda^2 + m^2)} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m &\stackrel{\text{def}}{=} (\cosh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi), \cos mx) = \begin{cases} 0, & \text{als } m \text{ oneven is} \\ \frac{4\Omega \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega}{\pi (\Omega^2 + m^2)}, & \text{als } m \text{ even is} \end{cases} \\ \sigma_m &\stackrel{\text{def}}{=} (\sinh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi), \cos mx) = \begin{cases} 0, & \text{als } m \text{ even is} \\ -\frac{4\Omega \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega}{\pi (\Omega^2 + m^2)}, & \text{als } m \text{ oneven is} \end{cases} \end{aligned} \right\} (16)$$

zodat

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + m^2} \gamma_0 \quad (m \text{ even}) \\ \sigma_m &= \frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + m^2} \sigma_1 \quad (m \text{ oneven}) \end{aligned}$$

en, wegens (8):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_m b^+ + \sigma_m b^- \\ \psi_m &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_m b^+ + \gamma_m b^- \end{aligned} \right\} (17)$$

Daarboven, als we voor  $m \geq 0, n > 0$  definiëren

$$\left. \begin{aligned} K_{mn}^- &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\tanh v_n b}{n v_n} \\ H_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{v_n}{n} \tanh v_n b \\ N_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{1}{n \cosh v_n b} \end{aligned} \right\} (18)$$

vinden we voor  $m \geq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f_m + i\omega\Omega \sum_1^\infty K_{mn}^- f_n + \Omega \sum_1^\infty N_{mn} g_n &= \varphi_m \\ g_m + \frac{i\Omega}{\omega} \sum_1^\infty H_{mn} g_n + \Omega \sum_1^\infty N_{mn} f_n &= \psi_m \end{aligned} \right\} (19)$$

waarbij we gesteld hebben

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} (1, f) = 0, \quad g_0 \stackrel{\text{def}}{=} (1, g) = 0. \quad (20)$$

De definities (18) breiden we uit tot  $n = 0$  door de eis te stellen dat  $\Gamma_{mn}/n = -\Gamma_{nm}/m$  en  $\Gamma_{mn} = 0$  als  $m = N(v)$ , ook voor  $n = 0$  geldig blijven, d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} K_{m0}^- &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \frac{\tanh \varkappa b}{\varkappa} \\ H_{m0} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \varkappa \tanh \varkappa b \\ N_{m0} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \frac{1}{\cosh \varkappa b}, \end{aligned} \right\} (18a)$$

met  $v_0 = \varkappa$ .



De  $(m, 0)$ -componenten van  $K^-$ ,  $H$ ,  $N$  blijven dan eindig voor alle  $m \geq 0$  en verdwijnen voor  $m = 0$ . Het symbool  $\sum_1^\infty$  in (19) kan dan wegens (20) vervangen worden door  $\Sigma_*$  en (19) kan in operatorvorm als volgt worden geschreven:

$$\left. \begin{aligned} f + i\omega\Omega K^-f + \Omega Ng &= \varphi \\ g + \frac{i\Omega}{\omega} Hg + \Omega Nf &= \psi_* \end{aligned} \right\} (21)$$

Het voornaamste verschil met het geval van een meer is het volgende. Zoals we in 4.0 hebben gezien, heeft  $K^-$  een eindige norm en hetzelfde geldt voor  $N$  omdat de kwadraten van de coëfficiënten van  $\Gamma_{mn}$  in deze matrices convergeren, maar dit geldt niet voor  $H$  omdat  $\sum |v_n n^{-1} \tanh v_n b|^2 = \infty$ . Desondanks is  $H$  begrensd, d.w.z. als  $\psi \in L^2$  dan is  $H\psi \in L^2$  en  $\|H\psi\| / \|\psi\|$  is begrensd. Inderdaad is:

$$\|H\psi\|^2 = \Sigma_* |n^{-1} v_n \psi_n \tanh v_n b|^2 \leq (1 + |\varkappa|^2) C^2 \|\psi\|^2,$$

waarin  $C$  een bovengrens is voor alle  $|\tanh v_n b|$ . Deze grens bestaat omdat we verondersteld hebben dat  $\cosh v_n b \neq 0$  voor alle waarden van  $n$ , zodat indien  $C' = \max |\tanh v_n b|$  over alle  $n^2 \leq \Omega^2 - \omega^2$ ,  $C = \max(1, C')$  aan de gestelde voorwaarden voldoet. Hieruit volgt dat voor voldoende kleine waarden van  $\Omega/\omega$ , (bijv.  $|\Omega/\omega| \leq C(1 + |\varkappa|^2)^{\frac{1}{2}}$ ), de operator

$$Q^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left( I + \frac{i\Omega}{\omega} H \right)^{-1} \quad (22)$$

bestaat en dat

$$Q^+ = \sum_0^\infty \left( -\frac{i\Omega}{\omega} \right)^n H^n. \quad (23)$$

De voorwaarde voor het bestaan van de inversen van operatoren van de gedaante  $I + \gamma H$  zijn in enkele belangwekkende rapporten onderzocht door LAUWERIER [9], [11] en VELTKAMP [17], die verschillende methoden toepasten. Voor het bijzondere geval, dat  $H = \Gamma$  verkreeg LAUWERIER expliciete oplossingen, waartoe hij het algemene geval, waarin  $H_{mn} = \Gamma_{mn} + O(n^{-2})$ , terugbracht.

Stellen we

$$h \stackrel{\text{def}}{=} g + \frac{i\Omega}{\omega} Hg, \quad (24)$$

dan hebben we wegens (22) dat

$$g = Q^+ h. \quad (25)$$

Met behulp van de afkorting

$$\left. \begin{aligned} Q^- &\stackrel{\text{def}}{=} (I + i\omega\Omega K^-)^{-1} \\ &= \sum_0^\infty (-i\omega\Omega)^n (K^-)^n \end{aligned} \right\} (26)$$

geeft (20)

$$\left. \begin{aligned} h + \Omega Nf &= \psi_* \\ f &= Q^-(\varphi - \Omega N Q^+ h), \end{aligned} \right\} (27)$$

waaruit:

$$\left. \begin{aligned} (I - \Omega^2 Q^- N Q^+ N) f &= \chi^+ \stackrel{\text{def}}{=} Q^-(\varphi - \Omega N Q^+ \psi_*) \\ (I - \Omega^2 N Q^- N Q^+) h &= \psi_* - \Omega N Q^- \varphi \end{aligned} \right\} (28)$$

Met behulp van de operator

$$\left. \begin{aligned} S^+ &\stackrel{\text{def}}{=} (I - \Omega^2 Q^- N Q^+ N)^{-1} \\ &= \sum_0^\infty \Omega^{2n} (Q^- N Q^+ N)^n \end{aligned} \right\} (29)$$

verkrijgen we uit (28), (27), (26):

$$\left. \begin{aligned} f &= S^+ \chi^+ \\ g &= Q^+ (\psi_* - \Omega N Q^- \varphi). \end{aligned} \right\} (30)$$

We hebben eveneens

$$g = S^- \chi^-, \quad (31)$$

waarin

$$S^- \stackrel{\text{def}}{=} Q^+ (I - \Omega^2 N Q^- N Q^+)^{-1} (Q^+)^{-1} = (I - \Omega^2 Q^+ N Q^- N)^{-1} \quad (32)$$

en

$$\chi^- \stackrel{\text{def}}{=} Q^+ (\psi_* - \Omega N Q^- \varphi). \quad (33)$$

Tussen  $S^-$  en  $S^+$  bestaan de identiteiten:

$$\left. \begin{aligned} S^{\mp} &= I - \Omega^2 Q^{\pm} N S^{\pm} Q^{\mp} N \\ S^{\mp} Q^{\pm} N &= Q^{\pm} N S^{\pm}. \end{aligned} \right\} (34)$$

We merken op, dat de imaginaire eenheid  $i$  niet meer expliciet voorkomt, hoewel dit impliciet wel het geval is, in het bijzonder via  $i\omega\Omega K^-$  in  $Q^-$  en via  $i\Omega\omega^{-1}H$  in  $Q^+$ , dus ook in  $S^{\pm}$ .

Uit de voorwaarden (21) volgen twee homogene lineaire vergelijkingen voor de twee Kelvin-coëfficiënten  $C^e$ , of ook voor de  $b^e$ . De eigenfrequentievoorwaarde komt overeen met het verdwijnen van de determinant van deze vergelijkingen. Als we de coëfficiënt van  $b^e$  in  $f, g$  resp. met  $f^e, g^e$  aangeven, vinden we met behulp van (8), (10), (28) uit (30) en (31):

$$\left. \begin{aligned} f^+ &= S^+ Q^- [(I + i\Omega \sin \omega b N Q^+) \gamma - \Omega \cos \omega b N Q^+ \sigma] \\ f^- &= S^+ Q^- [(I + i\Omega \sin \omega b N Q^+) \sigma - \Omega \cos \omega b N Q^+ \gamma] \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} g^+ &= S^- Q^+ [\cos \omega b \sigma - (i \sin \omega b I + \Omega N Q^-) \gamma] \\ g^- &= S^- Q^+ [\cos \omega b \gamma - (i \sin \omega b I + \Omega N Q^-) \sigma]. \end{aligned} \right\} (36)$$

De nul-componenten van deze stelsels moeten voldoen aan de *eigenfrequentievoorwaarde*

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f^+_0 & g^+_0 \\ f^-_0 & g^-_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

of, uitgeschreven:

$$\left| \begin{array}{l} (S^+ Q^- \gamma)_0 - \Omega (S^+ Q^- N Q^+ \{\sigma \cos \omega b - i\gamma \sin \omega b\})_0 \\ (S^- Q^+ \{\sigma \cos \omega b - i\gamma \sin \omega b\})_0 + \Omega (S^- Q^+ N Q^- \gamma)_0 \\ (S^+ Q^- \sigma)_0 - \Omega (S^+ Q^- N Q^+ \{\gamma \cos \omega b - i\sigma \sin \omega b\})_0 \\ (S^- Q^+ \{\gamma \cos \omega b - i\sigma \sin \omega b\})_0 + \Omega (S^- Q^+ N Q^- \sigma)_0 \end{array} \right| = 0. \quad (38)$$

Dit is de gezochte vergelijking voor de eigenfrequenties  $\omega$ . Is hieraan voldaan, dan bestaan  $b^e \neq 0$  zodat  $f$  en  $g$ , gedefinieerd door (35) en (36), voldoen aan (20). De  $(u, v, \zeta)$  gedefinieerd door (7) zijn de overeenkomstige trillingswijzen.

Hoewel de vergelijking (38) nog steeds zowel impliciet als expliciet imaginaire grootheden bevat, is zij in werkelijkheid reëel, zoals op de volgende wijze kan worden ingezien. In de eerste plaats verdwijnen  $\gamma_m$  en  $\sigma_m$  tenzij  $m$  even, resp. oneven is. Dan zal de operator  $I$ , en dus ook  $K^-, N, H$  en producten van oneven orde van deze grootheden, de pariteit van de index veranderen, terwijl producten van even orde de pariteit onveranderd laten. Ten slotte betekent de vorming van een inwendig product met de constante 1, dat we de component met index 0 nemen. Uiteindelijk gaan de  $\gamma$  en  $\sigma$  dan vergezeld van producten van respectievelijk even en oneven orde. Nu treden  $K^-$  en  $H$  steeds met een factor  $i$  in  $R^-, L$  en  $S$  op. Aangezien het linkerlid van (20) als een reële functie van  $Q^e, S^e, \gamma, i\sigma, iN$  kan worden geschreven, blijkt, dat alle imaginaire grootheden wegvallen.

7.0 DE LAGE FREQUENTIES VAN EEN LANGE BAAI

Wegens de ingewikkelde aard van vergelijking (38) van 6.0 zullen we alleen benaderde oplossingen in wat meer bijzonderheden bespreken, waarbij we de volgende veronderstellingen maken:

1. de lengte  $b$  van de baai is groot;
2.  $\Omega$  is in voldoende mate klein.

Nauwkeuriger gezegd: we zullen de nulde- en eerste-ordebenadering bespreken met betrekking tot

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\nu_1 b}, \tag{1}$$

waarbij aangenomen wordt, dat  $\nu_1$  reëel is, d.w.z.  $\omega^2 < 1 + \Omega^2$ . Dan zijn alle  $e^{-\nu_n b}$  ( $n > 1$ ) van de orde  $O(\beta^2)$ . In het geval van de Noordzee hebben we ongeveer  $b = 2a = 2\pi$ ,  $\Omega = 0,6$ . De laagste eigenfrequenties naderen voor  $\Omega \rightarrow 0$  tot de wortels van  $\cos \omega_0 b = 0$ , d.w.z.  $\omega_0 = (k + \frac{1}{2}) \pi/b$ . Voor  $k = 0$  en  $k = 1$  wordt dit dus  $\omega_0 = \frac{1}{4}$  resp.  $\omega_0 = \frac{3}{4}$ . Dus is  $\beta$  van de orde van grootte van (ongeveer)  $e^{-2\pi} = 0,002$ , resp.  $e^{-\pi} = 0,043$ . We mogen dus verwachten, dat voor  $\omega_0 = \frac{1}{4}$  de nulde-ordebenadering en voor  $\omega_0 = \frac{3}{4}$  de eerste-ordebenadering redelijk goed zijn. Voor de frequenties, die voor  $\Omega \rightarrow 0$  tot de wortels van  $\cosh \nu_s b = 0$  naderen, is de benadering niet langer geldig.

Nu is wegens (18) van 6.0 (zie ook (12) van 5.0):

$$\begin{aligned} K_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{1}{n\nu_n} = K^{-mn} + O(\beta^2) \\ H^0_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\nu_n}{n} = H_{mn} + O(\beta^2) \\ N_{mn} &= \begin{cases} 2\beta\Gamma_{m1} + O(\beta^3) & \text{als } n = 1 \\ O(\beta^2) & \text{als } n < 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

In het bijzonder kunnen alle termen, die twee factoren  $N$  bevatten, worden verwaarloosd, speciaal de tweede term tussen haakjes in (32) van 6.0.

Voeren we daarenboven de reële delen  $R^\pm$  van  $Q^\pm$  in volgens

$$\begin{aligned} R^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \left( I - \frac{\Omega^2}{\omega^2} H^2 \right)^{-1} = \sum_0^\infty \left( \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)^n H^{2n} \\ R^- &\stackrel{\text{def}}{=} (I - \omega^2 \Omega^2 (K^-)^2)^{-1} = \sum_0^\infty (\omega^2 \Omega^2)^n (K^-)^{2n}, \end{aligned} \tag{3}$$

dan is:

$$\begin{aligned} Q^+ &= R^+ - i \frac{\Omega}{\omega} R^+ H = R^+ - i \frac{\Omega}{\omega} H R^+ \\ Q^- &= R^- - i\omega\Omega R^- K^- = R^- - i\omega\Omega K^- R^-. \end{aligned} \tag{4}$$

Wegens de reeds genoemde pariteitsbetrekkingen wordt dan:

$$\begin{aligned} (Q^\pm \gamma)_0 &= (R^\pm \gamma)_0 \\ (Q^+ \sigma)_0 &= -i\Omega\omega^{-1} (R^+ H \sigma)_0 \\ (Q^- \sigma)_0 &= -i\Omega\omega (R^- K^- \sigma)_0 \end{aligned} \tag{5}$$

en

$$\begin{aligned} (Q^+ N Q^- \gamma)_0 &= i\omega\Omega (R^+ N K^- R^- \gamma)_0 - i\Omega\omega^{-1} (R^+ H N R^- \gamma)_0 \\ (Q^- N Q^+ \gamma)_0 &= -i\omega\Omega (R^- K^- N R^+ \gamma)_0 - i\Omega\omega^{-1} (R^- N H R^+ \gamma)_0 \\ (Q^+ N Q^- \sigma)_0 &= (R^+ N R^- \sigma)_0 - \Omega^2 (R^+ H N K^- R^- \sigma)_0 \\ (Q^- N Q^+ \sigma)_0 &= (R^- N R^+ \sigma)_0 - \Omega^2 (R^- K^- N H R^+ \sigma)_0. \end{aligned} \tag{6}$$

We merken op, dat voor willekeurige operatoren  
 $(UNV)_{mn} = 2\beta (U\Gamma)_{m1} V_{1n}(1 + O(\beta))$   
 en dat  
 $(R^\pm HN)_{01} = (R^\pm K-N)_{01} = 0.$

Laten we in het vervolg de  $O(\beta^2)$ -correctie weg, dan wordt (6):

$$\left. \begin{aligned} (Q^+NQ^-)_{00} &= -2i\Omega\omega\beta (R^+\Gamma)_{01} (K^-R^-)_{11} \\ (Q^-NQ^+)_{00} &= -2i\Omega\omega^{-1}\beta (R^-\Gamma)_{01} (HR^+)_{11} \\ (Q^+NQ^-)_{00} &= 2\beta (R^+\Gamma)_0 (R^-)_{11} \\ (Q^-NQ^+)_{00} &= 2\beta (R^-\Gamma)_0 (R^+)_{11}. \end{aligned} \right\} (7)$$

De nulde-ordebenadering van (38) van 6.0 wordt derhalve

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{vmatrix} (Q^-)_{00} & (Q^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^+)_{00} \sin \omega b \\ (Q^-)_{00} & (Q^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^+)_{00} \sin \omega b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (R^-)_{00} & -i\Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \cos \omega b - i(R^+)_{00} \sin \omega b \\ -i\omega\Omega(R^-K^-)_{00} & (R^+)_{00} \cos \omega b - \Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

of:

$$\Delta_0 = \Delta_{0c} \cos \omega b - \Delta_{0s} \sin \omega b, \quad (9)$$

waarin

$$\begin{aligned} \Delta_{0c} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (R^-)_{00} & \Omega(R^+H\sigma)_0 \\ -\Omega(R^-K^-)_{00} & (R^+)_{00} \end{vmatrix} \\ \Delta_{0s} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (R^-)_{00} & \omega(R^+)_{00} \\ \Omega(R^-K^-)_{00} & \Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

De eerste-ordecorrectie is:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Omega \begin{vmatrix} (Q^-NQ^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^-NQ^+)_{00} \sin \omega b & (Q^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^+)_{00} \sin \omega b \\ (Q^-NQ^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^-NQ^+)_{00} \sin \omega b & (Q^+)_{00} \cos \omega b - i(Q^+)_{00} \sin \omega b \end{vmatrix} + \\ &+ \Omega \begin{vmatrix} (Q^-)_{00} & (Q^+NQ^-)_{00} \\ (Q^-)_{00} & (Q^+NQ^-)_{00} \end{vmatrix} \\ &= -2\Omega\beta (R^-\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^+)_{11} \cos \omega b - \Omega\omega^{-1}(R^+H\gamma)_1 \sin \omega b & -i\Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \cos \omega b - i(R^+)_{00} \sin \omega b \\ -i\Omega\omega^{-1}(R^+H\gamma)_1 \cos \omega b - i(R^+)_{11} \sin \omega b & (R^+)_{00} \cos \omega b - \Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} + \\ &+ 2\Omega\beta (R^+\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^-)_{00} & -i\Omega\omega(R^-K^-)_{11} \\ -i\Omega\omega(R^-K^-)_{00} & (R^-)_{11} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

d.w.z.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\Omega\beta (R^+\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^-)_{00} & \Omega\omega(R^-K^-)_{11} \\ -\Omega\omega(R^-K^-)_{00} & (R^-)_{11} \end{vmatrix} + \\ &- 2\Omega\beta (R^-\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^+)_{11} & \Omega\omega^{-1}(R^+H\sigma)_0 \\ -\Omega\omega^{-1}(R^+H\gamma)_1 & (R^+)_{00} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Onze benaderde vergelijking heeft de gedaante

$$\Delta_{0c} \cos \omega b - \Delta_{0s} \sin \omega b + \Delta_1 = 0, \quad (12)$$

waarin  $\Delta_1 = O(\beta)$ . De benaderde oplossing van de nulde orde is

$$\omega = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,ctn} \frac{\Delta_{0s}}{\Delta_{0c}} + O(\beta) \quad (13)$$

en de eerste-ordebenadering is

$$\omega = \frac{1}{b} \left[ \operatorname{arc\,ctn} \frac{\Delta_{0s}}{\Delta_{0c}} + \Delta_1 (\Delta_{0c}^2 + \Delta_{0s}^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + O(\beta^2). \quad (14)$$

Om meer uitgewerkte resultaten te krijgen, zullen we ons beperken tot het geval, waarin  $\Omega$  klein is en waarbij de trilling voor  $\Omega \rightarrow 0$  overgaat in één van de enkelvoudige ééndimensionale trillingen (13) van 6.0, waarvan de frequentie  $\omega_0 = (k + \frac{1}{2}) \pi/b$  bedraagt, hetgeen een oplossing is van  $\cos \omega_0 b = 0$ . We nemen aan, dat er geen ontaarding optreedt, d.w.z. dat voor deze waarde  $\omega_0$  van  $\omega$  en  $\Omega = 0$  alle  $\nu_n = \nu_n^0$  ongelijk nul zijn. We zullen de benadering tot en met de orde  $O(\Omega^4)$  geven, waarbij  $\beta$  en  $\Omega^2$  als van gelijke orde zullen worden beschouwd. Later zullen we de eerste-ordebenadering nader uitwerken, die van de orde  $O(\Omega^2)$  is. We merken op, dat  $\gamma_0 = 4 \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega / \pi \Omega$  van de orde  $O(1)$  in  $\Omega$  is (nauwkeuriger:  $2 + O(\Omega^2)$ ), dat alle  $\gamma_m$  voor  $m > 1$  van de orde  $O(\Omega^2)$  zijn en dat alle  $\sigma_n$  van de orde  $O(\Omega)$  zijn. Derhalve is voor  $n \geq 1$

$$(H^{2n}\gamma)_0 = \Sigma_* (H^{2n})_{0m} \gamma_m = O(\Omega^2),$$

aangezien  $(H^{2n})_{00} = \Sigma_* (H^{2n-1})_{0k} H_{k0} = 0$  omdat  $H_{k0} = 0$  voor alle waarden van  $k$ . Op overeenkomstige wijze blijkt dat

$$((K^-)^{2n}\gamma)_0 = O(\Omega^2) \text{ voor } n \geq 1,$$

en dat

$$(H^{2n+1}\sigma)_0 = O(\Omega),$$

en

$$((K^-)^{2n+1}\sigma)_0 = O(\Omega).$$

Dan is:

$$(R^+\gamma)_0 = \sum_0^\infty \left( -\frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)^n (H^{2n}\gamma)_0 = \gamma_0 + O(\Omega^4)$$

(en niet slechts  $O(\Omega^2)$ ) en

$$(R^+\gamma)_0 = \gamma_0 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} (H^2\gamma)_0 + O(\Omega^6).$$

Op overeenkomstige wijze blijkt

$$(R^-\gamma)_0 = \gamma_0 - \Omega^2 \omega^2 ((K^-)^2\gamma)_0 + O(\Omega^6).$$

Verder is

$$(R^+H\sigma)_0 = (H\sigma)_0 + O(\Omega)$$

$$(R^-K^-\sigma)_0 = (K^-\sigma)_0 + O(\Omega^3)$$

en dus wegens (10):

$$\begin{aligned} \Delta_{0c} &= \begin{vmatrix} \gamma_0 - \omega^2 \Omega^2 ((K^-)^2\gamma)_0 & \Omega (H\sigma)_0 \\ -\Omega (K^-\sigma)_0 & \gamma_0 + \Omega^2 \omega^{-2} (H^2\gamma)_0 \end{vmatrix} + O(\Omega^6) \\ &= \gamma_0^2 + O(\Omega^4) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0s} &= \begin{vmatrix} \gamma_0 & \omega\gamma_0 \\ (K^-\sigma)_0 - \omega^2 \Omega^2 ((K^-)^3\sigma)_0 & \omega^{-1} (H\sigma)_0 - \omega^{-3} \Omega^2 (H^3\sigma)_0 \end{vmatrix} + O(\Omega^6) \\ &= \Omega\gamma_0 [\omega^{-1} (H\sigma)_0 - \omega (K^-\sigma)_0] - \Omega^3 \gamma_0 [\omega^{-3} (H^3\sigma)_0 - \omega^3 ((K^-)^3\sigma)_0] + O(\Omega^6) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta_1 = O(\Omega^4, \beta^2). \quad (17)$$

Stellen we nu nog

$$\omega = \omega_0 - \delta, \quad (18)$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{ctn} \omega b + \tan \delta b = \delta b + O(\delta^3),$$

dan wordt de eerste-ordebenadering volgens (13):

$$\delta = \delta_1 + O(\Omega^4, \beta),$$

waarin

$$\delta_1 = b^{-1} \Delta_{0s}/\Delta_{0c} + O(\beta) = \frac{1}{2} \Omega^2 b^{-1} [(\omega \Omega)^{-1} (H\sigma)_0 - \omega \Omega^{-1} (K^- \sigma)_0]. \quad (19)$$

De tweede-ordebenadering wordt:

$$\delta = \delta_2 + O(\Omega^6, \beta^2),$$

waarin

$$\begin{aligned} \delta_2 &= b^{-1} [\Delta_{0s}/\Delta_{0c} - \frac{1}{2} \Delta_1 (\Delta_{0s}^2 + \Delta_{0c}^2)^{-\frac{1}{2}}] + O(\beta^2) \\ &= \delta_1 \left[ 1 - \frac{\pi^2 \Omega^2}{12} \right] - \frac{1}{2} \Omega^3 b^{-1} [\omega^{-3} (H^3 \sigma)_0 - \omega^3 (K^-)^3 \sigma_0]. \end{aligned} \quad (20)$$

Schrijven we weer  $\nu_n$  voor  $\sqrt{n^2 - \omega_0^2}$  dan vinden we

$$\begin{aligned} (H\sigma)_0 &= \sum_1^{\infty} \Gamma_{0n} \frac{\nu_n \tanh \nu_n b}{n} \sigma_n = \\ &= \frac{16}{\pi^2} \Omega \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \sum_1^{\infty} \frac{p(n) \nu_n \tanh \nu_n b}{n^2 (n^2 - \Omega^2)} \\ &= -\frac{16\Omega}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n) \nu_n^0}{n^4} + O(\Omega^2, \beta^2) \\ (K\sigma)_0 &= \sum_1^{\infty} \Gamma_{0n} \frac{\tanh \nu_n b}{n \nu_n} \sigma_n = \\ &= -\frac{16\Omega}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^4 \nu_n^0} + O(\Omega^2, \beta^2) \end{aligned} \quad (21)$$

zodat (19) overgaat in:

$$\frac{\delta_1}{\omega_0} = -\frac{8\Omega^2}{\pi^2 b \omega_0^2} \sum_1^{\infty} \frac{(n^2 - 2\omega_0^2) p_n}{n^4 \nu_n^0}. \quad (22)$$

We zullen (20) niet nader uitwerken, waarin bijvoorbeeld het verschil tussen  $\omega^2$  en  $\omega_0^2$ , dat impliciet in de  $\nu_n$  voorkomt, in rekening moet worden gebracht.

In het bijzondere geval dat  $b = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{4}$  (d.w.z. de laagste eigentrilling van een op de Noordzee gelijkende baai) wordt (22):

$$\frac{\delta_1}{\omega_0} = -2,01 \Omega^2 \quad (23)$$

Voor de Noordzee is evenwel  $\Omega$  veel groter dan  $\omega_0$ , zodat in verband met de divergentie van ontwikkelingen als die van  $R^+$  volgens (3), de toepassing van (23) eigenlijk niet gerechtvaardigd is. De eerste-ordecorrectie bedraagt 72 % voor  $\Omega = 0,6$ . We hebben reden om aan te nemen, dat de exacte waarde van  $\omega$  groter dan die van  $\Omega$  is. De bijdragen van de volgende termen van de ontwikkeling van  $\omega$  in opklimmende machten van  $\Omega$  zullen dus aanzienlijk zijn.