MC SYLLABUS 17.3

N.M. TEMME

LINEAIRE ALGEBRA

DEEL 3 (VRAAGSTUKKEN)

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1976

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 15-01

ISBN 90 6196 123 8

INHOUD

(De paginanummers tussen haakjes verwijzen naar de oplossingen)

Inhoud		*iii*	
Voorwoord		*v*	
I.	Opmerkingen vooraf	1	(89)
	1. Verzamelingen	1	(89)
	2. Permutaties	6	(92)
	3. Matrices: combinatorische aspecten	8	(94)
	4. Determinanten: combinatorische aspecten	9	(95)
II.	Vectorruimten en lineaire afbeeldingen	11	(96)
	1. Vectorruimten	11	(96)
	2. Dimensie	14	(97)
	3. Lineaire deelruimten	18	(98)
	4. Lineaire afbeeldingen	24	(101)
	5. Matrices en lineaire afbeeldingen	31	(107)
III.	Lineaire endomorphismen	39	(111)
	1. Multilineaire functies	39	(111)
	2. Determinanten	40	(111)
	3. Automorphismen en basistransformaties	45	(113)
IV.	Lineaire stelsels vergelijkingen	51	(118)
	1. De rang van een matrix	51	(118)
	2. Homogene stelsels	53	(120)
	3. Lineaire stelsels	55	(121)
V.	Eigenwaarden	59	(122)
	1. Eigenwaarden en eigenvectoren	59	(122)
	2. Complexe matrices	66	(126)
	3. Reële matrices en inwendige producten	69	(127)

Voorwoord

Het grootste deel van de hier gepresenteerde vraagstukken is gebruikt tijdens een op het Mathematisch Centrum gehouden cursus Wetenschappelijk Rekenen A. De notatie in de vraagstukken is gelijk aan die van de eerste twee deeltjes van deze syllabus Lineaire Algebra, geschreven door P.S. Stobbe. Veel vraagstukken zijn speciaal voor de bovengenoemde cursus ontworpen, waarbij de bijdragen geleverd zijn door L. Ammeraal, J.W. de Roever, P.S. Stobbe, D.T. Winter en de samensteller van deze bundel. Verder zijn vraagstukken ontleend aan andere bronnen nadat de notatie en de stijl werd aangepast. Zo zijn vraagstukken ontleend aan het Nieuw Tijdschrift van Wiskunde, de MO-A examens en de vraagstukkenverzameling die gebruikt wordt op het practicum van het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam. Van vrijwel alle vraagstukken wordt in het tweede deel de oplossing gegeven. De verwijzingen zijn als volgt: S II.2.12 verwijst naar het betreffende nummer in de twee deeltjes van de syllabus van P.S. Stobbe, V III.3.13 and O III.3.13 verwijzen respectievelijk naar een vraagstuk en de oplossing daarvan in dit deeltje.

VRAAGSTUKKEN

I. Opmerkingen vooraf

§ I.1. Verzamelingen

I.1.1 Laat de verzameling M gedefinieerd worden door $M = \{2,3,4,5,6\}$. Ga na welke van de zes volgende beweringen juist zijn.
a) $3 \in M$; b) $3 \subset M$; c) $\{3\} \in M$; d) $\{3\} \subset M$; e) $\{3,6\} \subset M$;
f) $\{5\} \subset \{4,5\} \subset M$.

I.1.2 Van de drie verzamelingen A, B en C is bekend dat A een deelverzameling is van B en dat B een deelverzameling is van C. Veronderstel verder $1 \in A$, $2 \in B$, $3 \in C$, $4 \notin A$, $5 \notin B$, $6 \notin C$. Verifieer of de volgende beweringen juist zijn.
a) $1 \in C$; b) $2 \in A$; c) $3 \notin A$; d) $4 \in B$; e) $5 \notin A$; f) $6 \notin A$.

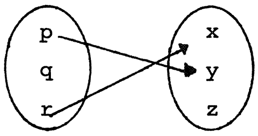
I.1.3 Beschouw de verzamelingen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, en $C = \{2,5,6,7\}$. Bepaal dan
a) $A \cup C$; b) $A \cup \{B \cap C\}$; c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; d) $A \cap B \cap C$.
Merk op dat de verzamelingen in b) en c) aan elkaar gelijk blijken te zijn.

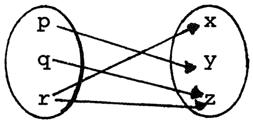
I.1.4 A, B en C zijn drie verzamelingen. Toon aan dat
a) $A \cap (B \cup A) = A$; b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

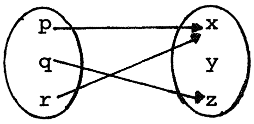
I.1.5 A, B en C zijn drie verzamelingen. Bewijs de volgende uitspraak:
$A \subset C$ dan en slechts dan als $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

I.1.6 Bepaal het aantal verschillende deelverzamelingen van een eindige verzameling van n elementen ($n \in \mathbb{N}$).

I.1.7 Geef voor elk van de diagrammen a, b en c aan of het een afbeelding van $A = \{p,q,r\}$ in $B = \{x,y,z\}$ definieert.

a. 

b. 

c. 

Als er sprake is van een afbeelding noem deze dan f. Geef in dat geval aan waaruit Im(f) bestaat.

I.1.8 In de volgende 6 onderdelen is steeds een afbeelding gedefinieerd. Gevraagd wordt, of deze afbeelding in-, sur- of bijectief is, en of het misschien een endo-, iso- of automorphisme is.

a) $f\colon \{1,4,9,16,25\} \to \{1,2,3,4,5\}$,
$f(v) = \sqrt{v}$;

b) $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$,
$f(i) = -\frac{1}{2}(3i^2-11i+4)$;

c) $f\colon \{1,2,3,-1,-2,-3\} \to \{1,2,3\}$,
$f(i) = i$ als $i > 0$, $f(i) = -i$ als $i < 0$;

d) $f\colon V \cap W \to V$ (V en W twee verzamelingen, $V \neq W$),
$f(u) = u$;

e) $f\colon V \to V \cup W$ (V en W twee verzamelingen, $W \not\subset V$),
$f(u) = u$;

f) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$f(n) = n + 1$.

I.1.9 Beschouw de afbeeldingen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ en $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ gedefinieerd door $f(0) = 0$, $f(p/q) = p + q$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, p en q hebben geen gemeenschappelijke delers), $g(z) = z/(z^2+1)$. Bepaal $f \circ g$ en $g \circ f$.

I.1.10 Notatie: Zij $f: X \to Y$ een afbeelding en $A \subset X$. Onder $f(A)$ zullen we verstaan de deelverzameling van Y die bestaat uit die elementen van Y die het beeld zijn van een element uit A onder de afbeelding f. Anders genoteerd:

$$f(A) = \{b \mid b \in Y \text{ en er is een } a \in A \text{ met } f(a) = b\}.$$

We noemen $f(A)$ het beeld van A onder f.
Ga na dat $f(A) = \mathrm{Im}(f)$ dan en slechts dan als $A = X$.

I.1.11 Beschouw de afbeelding f in vraagstuk I.1.8 f). Wat is $f(\mathbb{N})$?

I.1.12 Gegeven zijn $f: V \to W$ en $g: W \to X$, zowel f als g is injectief. Bewijs dat de afbeelding $(g \circ f): V \to X$ eveneens injectief is.

I.1.13 Gegeven zijn $f: V \to W$ en $g: W \to X$, zowel f als g is surjectief. Bewijs dat de afbeelding $(g \circ f): V \to X$ eveneens surjectief is.

I.1.14 Gegeven is $(g \circ f): V \to X$, de samenstelling van $f: V \to W$ en $g: W \to X$, is injectief. Bewijs dat f injectief is. Is noodzakelijk g injectief? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

I.1.15 Gegeven is $(g \circ f): V \to X$, de samenstelling van $f: V \to W$ en $g: W \to X$, is surjectief. Bewijs dat g surjectief is. Is noodzakelijk f surjectief? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

I.1.16. Gegeven is de afbeelding $f: X \to Y$. Bewijs dat f injectief is, dan en slechts dan als $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ voor alle deelverzamelingen A en B van X.

I.1.17 Construeer een isomorphisme en zijn inverse voor

$$f: \{q \mid q \in \mathbb{Q}, q \geq 0\} \to \{q \mid q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q < 1\} .$$

I.1.18 Construeer een isomorphisme en zijn inverse voor

$$f: \mathbb{Q} \to \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ \ q \geq 0\}.$$

I.1.19 Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{1,2,3\}$ en $B = \{3,4\}$. Schrijf alle elementen op van de verzameling $A \amalg B$.

I.1.20 A,B,X en Y zijn verzamelingen. Dan is

a) $(A \cup B) \amalg X = (A \amalg X) \uplus (B \amalg X)$;

b) $(A \cap B) \amalg (X \cap Y) = (A \amalg X) \cap (B \amalg Y)$.

I.1.21 Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{1,2,3,4\}$ en $W = \{1,4,9,16\}$ en bovendien de afbeelding $g: V \to W$, met $g(v) = v^2$. Ga na dat de afbeelding $f: V \amalg W \to V \amalg W$ gedefinieerd door $f(v,w) = (g^{-1}(w), g(v))$ een automorphisme van $V \amalg W$ is.

I.1.22 Laat de volgende afbeelding gegeven zijn:

$$f: \mathbb{Z} \amalg \{n \mid n \in \mathbb{N},\ \ n > 0\} \to \mathbb{Q},$$

$$f(z,n) = z/n.$$

Wat voor type afbeelding is f ?

I.1.23 Definieer:

$$f: \mathbb{Q} \amalg \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$

$$f(q_1,q_2) = q_1 - q_2.$$

Wat voor type afbeelding is f ?
Definieer verder:

$$f_q: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \ q \in \mathbb{Q},$$

$$f_q(q_1) = f(q,q_1).$$

Wat voor type afbeelding is f_q ?

I.1.24 Als de vorige opgave, maar nu met

$$f: \mathbb{Q} \amalg \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$

$$f(q_1,q_2) = q_1 \times q_2.$$

I.1.25 Gegeven zijn twee verzamelingen V en W met evenveel (eindig veel) elementen. Laat zien dat

1) als $f: V \to W$ injectief is, dat f dan ook surjectief is;

2) als $f: V \to W$ surjectief is, dat f dan ook injectief is.

Blijven de redeneringen ook opgaan als V en W oneindig veel elementen bevatten?

I.1.26 Gegeven is de volgende afbeelding:

$$f: \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \to \mathbb{R} \amalg \mathbb{R},$$

$$f(r_1,r_2) = (2r_1+r_2,\ r_1+2r_2).$$

Is f een isomorphisme ? (hint: probeer f^{-1} te vinden).

I.1.27 Dezelfde vraag voor:

$$g: \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \to \mathbb{R} \amalg \mathbb{R},$$

$$g(r_1,r_2) = (2r_1+r_2,\ 4r_1+2r_2).$$

I.1.28 Dezelfde vraag voor:

$$h: \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \to \mathbb{R} \amalg \mathbb{R},$$

$$h(r_1,r_2) = (r_1+r_2,\ r_1-r_2).$$

I.1.29 Gegeven is de afbeelding $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r_1,r_2,r_3) = (\alpha r_1+r_2+r_3,\ r_1+r_2+r_3,\ r_1+r_2+\alpha r_3), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Voor welke waarde(n) van α is f een isomorphisme ?

I.1.30 Dezelfde vraag voor $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r_1,r_2,r_3) = (\alpha r_1+r_2+r_3,\ r_1+\alpha r_2+r_3,\ r_1+r_2+\alpha r_3), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

I.1.31 Waaraan moeten α en β voldoen ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$) opdat de afbeelding $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r_1,r_2,r_3) = (\alpha r_1+\alpha\beta r_2+\alpha r_3,\ 2\beta r_2+r_3,\ 3r_1+3\beta r_2+r_3),$$

een isomorphisme is ?

I.1.32 Ga na of de afbeelding $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r_1,r_2,r_3) = (r_1+\tfrac{1}{2}r_2+\tfrac{1}{3}r_3,\ \tfrac{1}{2}r_1+\tfrac{1}{3}r_2+\tfrac{1}{4}r_3,\ \tfrac{1}{3}r_1+\tfrac{1}{4}r_2+\tfrac{1}{5}r_3)$$

een isomorphisme is.

I.1.33 Opmerking: Met behulp van de theorie die later ontwikkeld wordt kunnen de vraagstukken I.1.26 tot en met I.1.32 heel snel geverifieerd worden. In hoofdstuk III, paragraaf 3 wordt hier nader op ingegaan.

§ I.2. Permutaties

I.2.1 Gegeven zijn de 4-tupels [1,3,4,1], [2,3,1,4] en [3,4,2,3]. Ga na welke van deze tupels 4-permutaties zijn.

I.2.2 Bepaal van de volgende 3-permutaties [2,3,1], [1,2,3], [3,1,2] en [1,3,2] de inversen.

I.2.3 Schrijf het schema van alle 4-permutaties en hun inversen op.

I.2.4 Gegeven zijn twee 4-permutaties σ en τ, gedefinieerd door de schema's [1,3,2,4], respectievelijk [4,1,2,3]. Bepaal het schema van $\sigma\circ\tau$ en van $\tau\circ\sigma$.

I.2.5 Beschouw de 6 3-permutaties $\sigma_1 = [1,2,3]$, $\sigma_2 = [1,3,2]$, $\sigma_3 = [2,1,3]$, $\sigma_4 = [2,3,1]$, $\sigma_5 = [3,1,2]$, $\sigma_6 = [3,2,1]$. Bepaal voor alle natuurlijke getallen i en j met $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 6$ de permutaties $\rho_{ij} = \sigma_i\circ\sigma_j$. Druk ρ_{ij} uit in één van de permutaties σ_k en maak een tabel.

I.2.6 Zij V de verzameling {1,2,3}. Noem de 3-permutaties weer $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_6$

zoals in het vorige vraagstuk.
Definieer nu 36 afbeeldingen ρ_{ij} $(1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6)$ als volgt

$$\rho_{ij}: V \Pi V \to V \Pi V,$$

$$\rho_{ij}(v_1,v_2) = (\sigma_i(v_1),\sigma_j(v_2)).$$

a) Laat zien dat ρ_{ij} een automorphisme van $V \pi V$ is. Beschouw voorts de verzameling $W = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ en de afbeelding

$$\tau: V \Pi V \to W,$$

$$\tau(v_1,v_2) = 3v_1 + v_2 - 3.$$

b) Laat zien dat voor iedere i en j, $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 6$, de afbeelding $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1}$ bestaat en een 9-permutatie is.
c) Wat is de inverse van $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1}$?
d) Voor welke i en j is $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1} = id_W$?

I.2.7 Laat gegeven zijn de verzameling V van 3-permutaties en de verzameling W van 4-permutaties en definieer $f: V \to W$ als volgt: als σ een 3-permutatie is met schema $[\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)]$ dan heeft f het schema $[\sigma(3),\sigma(2),4,\sigma(1)]$; wat voor type afbeelding is f ?

I.2.8 Schrijf het schema op van de verwisselingen $\tau^{(4)}_{1,3}$, $\tau^{(7)}_{2,3}$ en $\tau^{(5)}_{4,5}$.

I.2.9 Welke 3- en 4-permutaties zijn verwisselingen ?
Zijn er nog andere 3- c.q. 4-permutaties met de eigenschap $\sigma \circ \sigma = \sigma_0$ (de eenheidspermutatie)?

I.2.10 Schrijf de 4-permutatie met schema [2,4,1,3] als samenstelling van verwisselingen. Doe hetzelfde voor de 6-permutatie met schema [2,5,1,4,6,3].

I.2.11 Schrijf de inversies op van de permutaties met de schema's [1,4,3,2], [6,2,3,1,4,5], [2,1,3,4,6,5,8,7], en bepaal het teken van de permutaties.

I.2.12 Noteer van de 4-permutaties de waarde van de sign-functie.

I.2.13 Schrijf de permutaties, waarvan de schema's hieronder zijn geschreven, als samenstelling van verwisselingen:

a) [2,8,7,3,1,4,6,5];

b) [7,3,1,5,9,2,8,6,4];

c) [1,3,5,7,9,2,4,6,8,10].

Wat is het teken van deze permutaties ?
Welke inversies horen bij deze permutaties ?

§ I.3. Matrices: Combinatorische aspecten

I.3.1 Schrijf van de matrix $f: \mathcal{R}_{2,4} \to \mathbb{R}$, $f(i,j) = i + j$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$, het schema op.

I.3.2 Wat zijn de 4-grepen uit $\mathcal{R}_{4,4}$?
Wat is het sign van deze 4-grepen ?

I.3.3 Laat V de verzameling $\{1,2,3,4\}$ zijn; welk schema hoort dan bij de matrix $f: V \amalg V \to \mathbb{N}$, gedefinieerd door $f(v_1,v_2) = v_1^2 + v_2$?

I.3.4 Maak een lijst van roostertransformaties van (2×2)-roosters en ga na welke transformaties even zijn en welke oneven zijn.

I.3.5 Laat n een positief natuurlijk getal zijn, V de verzameling $\{x \mid x \in \mathbb{N},\ 1 \le x \le n\}$ en σ_1 en σ_2 twee n-permutaties. Definieer nu $\rho: V \amalg V \to V \amalg V$ als volgt: $\rho(v_1,v_2) = (\sigma_1(v_1),\sigma_2(v_2))$.
Laat zien dat

a) ρ een automorphisme is;

b) ρ een roostertransformatie is;

c) $\text{sign}(\rho(W)) = \text{sign}(\sigma_1).\text{sign}(\sigma_2).\text{sign}(W)$, waarin W een n-greep is.

I.3.6 Is de transpositie te schrijven als een afbeelding ρ zoals deze voorkwam in de vorige opgave ?

I.3.7 Beschouw een matrix $f: \mathcal{R}_{4,4} \to V$ uit een verzameling V en noem de elementen van f v_{ij}. Zij σ de 4-permutatie met schema [4,1,3,2] en τ de 4-permutatie met schema [3,1,4,2]. Bepaal dan de matrix $f \circ K_\sigma \circ R_\tau: \mathcal{R}_{4,4} \to V$.

§ I.4. Determinanten: Combinatorische aspecten

I.4.1 Bereken de determinanten van de matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

I.4.2 Als in een $(n\times n)$-matrix A uit $\mathbb{C}$ de i-de en de j-de kolom ($i\neq j$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$) aan elkaar gelijk zijn dan is $\det(A) = 0$. Bewijs dit. Een analoge uitspraak geldt voor rijen.

I.4.3 Bereken $\det(f)$ voor f uit opgave I.3.3.

I.4.4 Laat V de verzameling $\{1,2,3,4\}$ zijn; definieer $f: V \amalg V \to \mathbb{N}$ als volgt: $f(v_1,v_2) = (v_1-v_2)^2$. Wat is $\det(f)$?

I.4.5 Beantwoord dezelfde vraag voor het geval dat $V = \{1,2,3\}$, $f: V \amalg V \to \mathbb{Q}$, en $f(v_1,v_2) = 1/(v_1+v_2-1)$ is.

I.4.6 Gegeven is de $(n\times n)$-matrix f uit $\mathbb{N}$ met $f(i,j) = i + j$. Wat is $\det(f)$ voor n respectievelijk 1, 2 en 3? Wat is $\det(f)$ voor $n > 3$?

I.4.7 Gegeven is een $(n\times n)$-matrix f uit $\mathbb{R}$ met $f(i,j) = -f(j,i)$. Laat zien dat $\det(f) = 0$ als n oneven is.

I.4.8 Laat gegeven zijn een willekeurige (2×2)-matrix f uit $\mathbb{R}$ en de (2×2)-matrix g, gedefinieerd door

$$g(1,i) = a\, f(1,i) + b\, f(2,i),$$

$$g(2,i) = c\, f(1,i) + d\, f(2,i),$$

voor $i = 1,2$ en $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
Toon aan dat

$$\det(g) = \det(f)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

I.4.9 Gegeven is het volgende schema van een (2×2)-matrix f

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschouw nu de 2-permutaties σ_0, σ_1 met schema's [1,2], respectievelijk [2,1], en de daaruit voortvloeiende rij- en kolompermutaties R_{σ_0}, R_{σ_1}, K_{σ_0}, K_{σ_1}. Definieer nu:

$$f_{ij} = f \circ R_{\sigma_i} \circ K_{\sigma_j} ;$$

zo zijn dus gedefinieerd f_{00}, f_{01}, f_{10} en f_{11}. Bereken nu de determinanten bij deze matrices en vergelijk het antwoord met respectievelijk det(f), $\mathrm{sign}(\sigma_0)$ en $\mathrm{sign}(\sigma_1)$.

I.4.10 Van een (2×2)-matrix f uit $\mathbb{R}$ is gegeven dat det(f) = 0. Laat zien dat er twee reële getallen a en b zijn, die niet allebei tegelijk 0 zijn, zodanig dat

$$a\, f(1,1) + b\, f(1,2) = 0$$

en

$$a\, f(2,1) + b\, f(2,2) = 0.$$

I.4.11 Van de (n×n)-matrix f_n uit $\mathbb{N}$ is gegeven dat $f_n(n-i+1,i) = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$ en $f_n(i,j) = 0$ voor alle andere paren (i,j). (Dus voor n = 2 ontstaat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

voor n = 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

etc.)
Bereken voor elke $n \geq 2$ $\det(f_n)$.

II. Vectorruimten en lineaire afbeeldingen

§ II.1. Vectorruimten

II.1.1 Ga na in welke van de volgende gevallen er sprake is van een binaire operatie zoals gedefinieerd in S II.1.2.

a) $V = \mathbb{R}$, $m(x,y) = x + y$;

b) $V = \mathbb{N}$, $m(i,j) = i - j$;

c) $V = \mathbb{Z}$, $m(i,j) = i - j$;

d) $V = \mathbb{Z}$, $m(i,j) = i^j$;

d) $V = \mathbb{N}$, $m(i,j) = i^j$.

II.1.2 Ga na aan welke voorwaarden (S II.1.5, (i), (ii), (iii), (iv)) van de definitie van abelse groep is voldaan door de onderstaande paren (V,m), waarin V een verzameling en m een binaire operatie op V is.

a) $V = \mathbb{R}$, $m(r,s) = rs$;

b) $V = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$ $m(r,s) = rs$;

c) $V = \mathbb{N}$, $m(i,j) = i + j$;

d) $V = \mathbb{Z}$, $m(i,j) = i + j$.

II.1.3 Definitie: Zij V een verzameling en m: $V \Pi V \to V$ een binaire operatie op V.

(i) Een element $e \in V$ is een nul-element voor m als voor elke $a \in V$ geldt $m(e,a) = m(a,e) = a$.

(ii) m heet commutatief als voor elk tweetal elementen v, $w \in V$ geldt: $m(v,w) = m(w,v)$.

(iii) m heet associatief als voor elk drietal elementen u, v, $w \in V$ geldt $m(m(u,v),w) = m(u,m(v,w))$.

II.1.4 Ga na dat definitie S II.1.5 met behulp van de vorige definities als volgt geformuleerd kan worden.

Definitie: Als V een verzameling is en m: $V \Pi V \to V$ is een binaire operatie op V die voldoet aan de volgende vier voorwaarden:

(i) m bezit in V een nul-element v_0;

(ii) m is commutatief;

(iii) er is bij ieder element $v \in V$ een element $v^* \in V$ zodat $m(v_1v^*) = v_0$;

(iv) m is associatief;

dan heet het paar (V,m) een abelse groep.

II.1.5 Zij V de verzameling van alle reële polynomen van de graad 2 (of lager) in een variabele x; d.w.z.

$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Beschouw op V de binaire operatie m: $V \Pi V \to V$ met

$$m(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) x + (a_2+b_2) x^2.$$

Is (V,m) een abelse groep?

II.1.6 Zij V de verzameling van alle geordende rijtjes reële getallen $(a_1,\ldots,a_n)$ die voldoen aan $a_1 + \ldots + a_n = 0$ (n mag per rijtje verschillen). Definieer als binaire operatie m: $V \Pi V \to V$ met

$$m((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_m)) = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m).$$

Is (V,m) een abelse groep?

II.1.7 Zij $V = \mathbb{R}$ en m: $V \Pi V \to V$ de binaire operatie op V gedefinieerd door $m(x,y) = x + y - xy$.

a) Is m commutatief?

b) Is m associatief?

c) Is er een nul-element voor m? Zo ja, welk element?

d) Is (V,m) een abelse groep?

II.1.8 Bewijs dat er voor een binaire operatie op een verzameling V geen twee verschillende nul-elementen bestaan.

II.1.9 Beschouw de verzameling bestaande uit vier standen van een vlak, die ontstaan door dit vlak om een vast punt linksom te draaien over hoeken van 0°, 90°, 180° en 270°. Deze standen noteren we respectievelijk met $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, dus $V = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$. Als binaire operatie (+) definieren we het na elkaar uitvoeren van twee draaiingen. Zo is bijvoorbeeld $\underline{1} + \underline{3} = \underline{0}$.
Bereken, door onderstaande tabel in te vullen, voor alle mogelijke paren $(u,v) \in V \Pi V$ hun som $u + v$.

u \ v	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$\underline{0}$				
$\underline{1}$				
$\underline{2}$				
$\underline{3}$				

a) Is er een nul-element?

b) Heeft elk element van V een inverse in V? Zo ja, bepaal deze.

c) Is V een abelse groep?

II.1.10 Beschouw nog eens de verzameling V en de binaire operatie m uit V II.1.5. Voeg hier aan toe de reële operatie $\sigma\colon \mathbb{R} \,\Pi\, V \to V$, met

$$\sigma(\lambda,\ a_0+a_1x+a_2x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2.$$

Is V hiermee een lineaire ruimte? Is V een vectorruimte?

II.1.11 Zij V de verzameling van alle geordende rijtjes van n reële getallen $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ $(n\geq 1)$ die voldoen aan $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, d.w.z.

$$V = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^*_n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}.$$

Definieer de binaire operatie $m\colon V \,\Pi\, V \to V$ met

$$m((a_1,\dots,a_n),\ (b_1,\dots,b_n)) = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$

en de reële operatie $\sigma\colon \mathbb{R} \,\Pi\, V \to V$ met

$$\sigma(\lambda,(a_1,\dots,a_n)) = (\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n).$$

Ga na dat V een lineaire ruimte is. Is V een vectorruimte? Probeer een stelsel van n - 1 vectoren $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1}\}$ te vinden zodat elk element $v \in V$ te schrijven is als $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$ met $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.

II.1.12 Laat zien dat de verzameling F van functies $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ een $\mathbb{R}$-lineaire ruimte is. Neem als optelling $\{f_1+f_2\}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ en als scalaire vermenigvuldiging $\{\lambda f\}(x) = \lambda f(x)$.

II.1.13 Bereken x en y als $(x,3) = (2,x+y)$, waarin beide leden tot $\mathbb{R}_2^*$ behoren.

II.1.14 Bereken x, y en z als

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$ en de vectoren behoren tot $\mathbb{R}_3$.

II.1.15 In $\mathbb{R}_3$ is gegeven

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bereken $x = a + b + c$.
b) Bereken $y = \lambda a + \mu b + \nu c$, met $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 4$.
c) Zij $z = x + y$; druk z uit in a, b en c.
d) Ga na of er reële getallen α, β en γ zijn (niet alle gelijk 0) zodat $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$.

II.1.16 Beschouw de lineaire ruimte $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Gegeven is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 7\frac{1}{2} & 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Druk M uit in A, B en C.

§ II.2. Dimensie

II.2.1 De vectoren in dit vraagstuk zijn elementen van $\mathbb{R}_2$. Bewijs:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een lineaire combinatie van $[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$;

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ is een lineaire combinatie van $[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}]$;

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een lineaire combinatie van $[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}]$;

d) $[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}]$ is een lineair afhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_2$;

e) $[\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}]$ is een lineair onafhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_2$.

II.2.2 Definitie: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij $[a_1,\ldots,a_m]$ een m-tupel uit V. Een vector $v \in V$ heet lineair afhankelijk van $[a_1,\ldots,a_m]$ als er getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ in $\mathbb{F}$ bestaan zodat $v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$.
Opmerking: We zeggen ook dat v een lineaire combinatie is van $[a_1,\ldots,a_m]$; zie S II.2.15.
Een vector $v \in V$ heet lineair onafhankelijk van $[a_1,\ldots,a_m]$ als v geen lineaire combinatie is van $[a_1,\ldots,a_m]$.

II.2.3 Is in $\mathbb{R}_5^*$ de vector (1,2,3,1,0) te schrijven als een lineaire combinatie van [(1,2,0,0,0), (1,2,3,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,-1,0,0)]? Zo ja, geef deze lineaire combinatie.

II.2.4 Laat zien dat in $\mathbb{R}_3$ de vector

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

op meer dan één manier als lineaire combinatie van

$$[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}]$$

te schrijven is.

II.2.5 Het tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}]$$

is een basis voor $\mathbb{R}_3$. Bewijs dit.

II.2.6 Beschouw in $\mathbb{R}_3$ het tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Ga na voor welke a het tupel een basis van $\mathbb{R}_3$ is.

II.2.7 Als V een 4-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte is met basis $[a_1,a_2,a_3,a_n]$, dan is ook $[a_1,a_2,a_3 + \lambda a_1,a_4]$ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ een basis van V. Toon dit aan.

II.2.8 Als

$$[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}]$$

een basis is van $\mathbb{R}_3$, dan is

$$[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}]$$

een basis van $\mathbb{R}_4$. Bewijs dit.

II.2.9 Bewijs dat in $\mathbb{R}_4$ het tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}]$$

een lineair onafhankelijk stelsel is. Vul dit tupel aan tot een basis van $\mathbb{R}_4$.

II.2.10 Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen van de graad ≤ 3 in de variabele t. Ga na of [u,v,w] lineair afhankelijk, danwel lineair onafhankelijk is met

a) $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $v = t^3 - t^2 + 8t + 2$, $w = 2t^3 - 4t^2 + $
$+ 9t + 5$;

b) $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$, $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$, $w = 3t^3 + 8t^2 +$
$- 8t + 7$.

II.2.11 Zij V de $\mathbb{R}$-lineaire ruimte van continue functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ga na of $[f,g,h]$ een lineair onafhankelijk stelsel is, als

a) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = t^2$, $h(t) = t$;

b) $f(t) = \cos 2t$, $g(t) = \sin^2 t$, $h(t) = 1$.

c) Ga na of V een vectorruimte is.

II.2.12 In een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V is $[v_1,\dots,v_m]$ lineair onafhankelijk, maar $[v_1,\dots,v_m,w]$ lineair afhankelijk.

a) Toon aan dat w een lineaire combinatie van $[v_1,\dots,v_m]$ is.

b) Geef een voorbeeld van een lineair afhankelijk stelsel $[v_1,v_2,v_3,w]$, waarbij

(i) $[v_1,v_2,v_3]$ lineair onafhankelijk is én

(ii) w lineair afhankelijk is van $[v_1,v_2,v_3]$ én

(iii) v_1 niet lineair afhankelijk is van $[v_2,v_3,w]$.

c) Als b), maar nu met als derde voorwaarde

(iii) v_1 is lineair afhankelijk van $[v_2,v_3,w]$,
v_2 is lineair afhankelijk van $[v_1,v_3,w]$,
v_3 is lineair afhankelijk van $[v_1,v_2,w]$.

II.2.13 Laat $[u,v,w]$ een lineair onafhankelijk stelsel zijn in een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V. Laat zien dat $[u+v,u-v,u-2v+w]$ ook een lineair onafhankelijk stelsel is.

II.2.14 Is het tupel $[(1,1,1), (2,2,2), (1,0,0)]$ een stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_3^*$?

II.2.15 Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen met reële coefficienten van de graad ≤ 3 in de variabele t. Bepaal de dimensie van deze vectorruimte.

II.2.16 In een 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte V zijn gegeven de vectoren a, b, c, en d zodat het tupel $[a+2b, a+c, c]$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Welk van de volgende tupels vormt een basis voor V?

(i) $[a+b+c, a+2b, c-b]$;

(ii) $[a,b,c]$;

(iii) $[a,b,c,d]$.

II.2.17 Gegeven is een $\mathbb{F}$-vectorruimte V; a, b, c en d zijn vectoren uit V. Bewijs de volgende uitspraken.

(i) $[a,b,c]$ is lineair afhankelijk als $[a+b,b+c,a+c]$ lineair afhankelijk is.

(ii) [a,b,c] is lineair onafhankelijk als [a+b,b,c] lineair onafhankelijk is.

(iii) Als $a \neq 0$ lineair afhankelijk is van [b,c] en b is niet lineair afhankelijk van [a,c], dan is c lineair afhankelijk van [a].

(iv) Als [a,b,c] een lineair onafhankelijk stelsel is en d is lineair afhankelijk van [a,c] en ook van [b,c], maar niet van [a,b], dan is d lineair afhankelijk van [c] en c is lineair afhankelijk van [d].

II.2.18 Gegeven zijn in $\mathbb{R}_4$ vijf vectoren a, b, c, x, y; x is lineair onafhankelijk van [a,b,c] en y is lineair onafhankelijk van [x,a,b,c]. Onderzoek of [a,b,c] een lineair afhankelijk, dan wel een lineair onafhankelijk stelsel is.

II.2.19 Gegeven is in $\mathbb{R}_3$ de verzameling vectoren $\{a_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ met

$$a_\lambda = \lambda^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

en bovendien de vectoren

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Onderzoek voor welke waarde(n) van λ de vector a_λ lineair afhankelijk is van [b,c].

(ii) Voor welke λ is c lineair afhankelijk van $[a_\lambda,b]$?

§ II.3. Lineaire deelruimten

II.3.1 Beschouw de verzameling vectoren $\{a_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ met a_λ gegeven in V II.2.19. Onderzoek of deze verzameling een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_3$ vormt.

II.3.2 Voor welke $\lambda \in \mathbb{R}$ is

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid (1+\lambda)x_1^2 + 2\lambda x_2 + 4x_3 + \lambda^3 x_4 = 0\}$$

een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_4^*$?

II.3.3 Als a, b en c vectoren zijn van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, dan is $W = \{a + \lambda b + \mu c \mid \lambda,\mu \in \mathbb{F}\}$ een lineaire deelruimte van V dan en slechts dan als $0 \in W$. Bewijs deze uitspraak.

II.3.4 Bepaal of de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}_3^*$ lineaire deelruimten van $\mathbb{R}_3^*$ zijn:

a) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$;

b) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2-x_3 = 1\}$;

c) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2-x_2-x_3 = 0\}$;

d) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_3+x_3 = 0$ én $2x_1+x_2-x_3 = 0\}$

II.3.5 Toon aan dat de verzameling

$$W = \{\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix} \mid \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}\}$$

een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_4$ is en bepaal de dimensie van W.

II.3.6 U en V zijn lineaire deelruimten van een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte A. Zijn $U\backslash V = \{v \mid v\in U, v\notin V\}$, $U \cup V$ en $U \cap V$ ook lineaire deelruimten van A ?

II.3.7 Laat U en W de volgende lineaire deelruimten van $\mathbb{R}_4$ zijn:

$$U = \{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mid b + c + d = 0\}, \quad W = \{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mid a + b = 0 \text{ en } c = 2d\}.$$

Bepaal een basis van U, van W en van $U \cap W$.

II.3.8 Beschouw in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte W opgespannen door

$$[\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}].$$

Bepaal de dimensie van W en zoek een basis van W.

II.3.9 Bepaal een basis van de lineaire deelruimte W van $\mathbb{R}_5$ gegeven door

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid 2x_2 - 8x_3 - 3x_5 = 0,\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_5 = 0,\ 2x_1 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Wat is de rang van

$$[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]?$$

II.3.10 Bepaal de rang van het tupel

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}].$$

II.3.11 Het tupel [a,b,c] is een basis voor een $\mathbb{R}$-vectorruimte V. Zij $\rho \in \mathbb{R}$ en $x = \rho a + b - c$, $y = \rho(b-a) + 2c$ en $z = \rho(c-a) - b$. Bepaal voor alle waarden van ρ dimensie van $\{\lambda x+\mu y+\nu z \mid \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}$.

II.3.12 $$V = \{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

is voor zekere reële α een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_3$. Bepaal α en een basis voor V.

II.3.13 D_1, D_2 en $D_1 \cup D_2$ zijn lineaire deelruimten van een $\mathbb{R}$-vectorruimte V. Bewijs dat $D_1 \subset D_2$ of $D_1 \supset D_2$.

II.3.14 Notatie: Laat A en B deelverzamelingen zijn van een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V. We schrijven A + B voor de verzameling van alle elementen a + b met $a \in A$ en $b \in B$:

$$A + B = \{v \in V \mid v = a+b \text{ met } a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

II.3.15 Als A en B lineaire deelruimten van een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V zijn, dan is ook A + B een lineaire deelruimte van V. Bewijs dit.

II.3.16 Bepaal een basis van U + W met U en W uit V II.3.7.

II.3.17 Zij A een $\mathbb{F}$-vectorruimte en B een lineaire deelruimte van A.

(i) Bewijs dat er minstens één lineaire deelruimte C van A is met de eigenschap

$$A = B + C, \quad B \cap C = \{0\}.$$

(ii) Veronderstel dat zo'n C gekozen is. Toon aan dat elke vector $a \in A$ op één en slechts één manier geschreven kan worden als $a = b + c$ met $b \in B$ en $c \in C$.

II.3.18 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en A en B lineaire deelruimten van V. Bewijs dat

$$\dim_{\mathbb{F}}(A) + \dim_{\mathbb{F}}(B) = \dim_{\mathbb{F}}(A \cap B) + \dim_{\mathbb{F}}(A+B).$$

II.3.19 Beschouw in de $\mathbb{E}_3$ de punten E_1, E_2, E_3, gegeven door de matrices

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{E}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Beschouw verder de deelverzameling

(*) $$V = \{P + \lambda Q \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

waarin P en Q punten zijn gegeven door $P = E_1 + 2E_2$, $Q = 2E_1 + E_2 - E_3$.

a) Is V een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$?

b) Wat stelt V meetkundig voor? Probeer V te tekenen in $\mathbb{E}_3$.

c) De punten R en S uit $\mathbb{E}_3$ zijn gegeven door

$$R = 5E_1 + 4E_2 - 2E_3, \quad S = -E_1 + 3E_2 + E_3.$$

Ga na of $R \in V$ en $S \in V$.

d) Bepaal de 1-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$ (dus de rechte door 0, de oorsprong van het carthesisch assenstelsel), die evenwijdig is aan V.

e) De voorstelling van V in (*) heet een <u>vector-voorstelling</u> van V en de vector Q heet een <u>richtingsvector</u> van V.
Geef een vectorvoorstelling van de rechte W door het punt $D = -E_1 + 3E_2 + 2E_3$, die evenwijdig is aan de rechte $\{\lambda T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, met $T = E_1 + 2E_2 + E_3$. Wat is een richtingsvector van W?

f) Wat is de vectorvoorstelling van de rechte door de punten $A = E_1 + 2E_2 + 3E_3$, $B = 2E_1 - E_3$? (Aanwijzing: een richtingsvector is de vector $C = A - B$).

g) Ga na dat de verzameling $U = \{R+\lambda Q+\mu T \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ een vlak voorstelt en dat dit vlak het vlak is door V evenwijdig aan W.

h) Zij nu een willekeurig punt van het vlak U gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bij dit punt horen zekere λ en μ uit $\mathbb{R}$ zodat voldaan is aan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De coördinaten x, y en z en de parameters λ en μ voldoen dus aan het stelsel van drie lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda + \mu, \\ y = 4 + \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - \lambda + \mu. \end{cases}$$

Eliminatie van λ en μ geeft een (lineaire) vergelijking voor x, y en z. Stel deze vergelijking op. Deze vergelijking heet de vergelijking van het vlak U.

i) Geef een vectorvoorstelling van het vlak M door de punten E_1, E_2, E_3. Geef ook de vergelijking van dit vlak.

j) Als een vlak N in de $\mathbb{E}_3$ gegeven wordt door de vergelijking $3x + 4y - z = 6$, geef dan een vectorvoorstelling van dit vlak. Wat is de vergelijking van het vlak evenwijdig aan N door O? En die van het vlak evenwijdig aan N door het punt $2(E_1+E_2+E_3)$?

k) Ligt de rechte met vectorvoorstelling $\{E_1+\lambda(2E_1-E_2+2E_3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ in vlak N? Is deze rechte evenwijdig aan N of snijdt hij N in een punt?

l) Bepaal het snijpunt van V met N en dat van W met N.

m) Geef de vergelijking van het vlak F door de punten T en $4E_2 - 2E_3$, en evenwijdig aan de rechte $\{\lambda P \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

n) Geef een vectorvoorstelling van $G = \{F \cap M\}$, G is de snijlijn van de vlakken F en M. De vergelijkingen van F en M worden, als stelsel, de vergelijkingen van de rechte G genoemd.

o) Ga na dat de vergelijking van een vlak, op een faktor na, eenduidig bepaald is. De vectorvoorstelling voor vlak en lijn zijn niet eenduidig, evenals de vergelijkingen van een lijn.

II.3.20 Gegeven zijn in de $\mathbb{E}_3$ de punten A, B en C, zodat het tupel [A,B,C] een basis is voor $\mathbb{E}_3$. Gegeven zijn

het vlak $V = \{A-B + \lambda(A-2B+C) + \mu(A-C) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$,

het vlak $W = \{B-C + \lambda(2A-B-3C) + \mu(A-2C) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ en

de rechte $P = \{B-A + \lambda(A-B-C) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

a) Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van V en W.

b) Onderzoek of P de vlakken V en W snijdt. Indien P een vlak snijdt, druk dan het snijpunt uit in A, B en C.

§ II.4. Lineaire afbeeldingen

II.4.1 Laat zien dat de volgende afbeeldingen $\mathbb{R}$-lineair zijn.

a) $\phi: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ gedefinieerd door

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix};$$

b) $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - 3y + z.$$

II.4.2 Ga na of de volgende afbeeldingen $\mathbb{R}$-lineair zijn.

a) $\phi: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy;$$

b) $\phi: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3$ gedefinieerd door

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix};$$

c) $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ gedefineerd door

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.4.3 Laat $\phi: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding zijn met $\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ en $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$. Laat zien dat ϕ hiermee volledig bepaald is en bepaal $\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ voor elke $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$. Bepaal ook $\mathrm{Ker}(\phi)$.

II.4.4 Als de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ bepaald wordt door

$$\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bepaal dan een basis van Ker(ϕ) en van Im(ϕ).
Als nog een tweede $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding ψ: $\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ gegeven wordt door

$$\psi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \psi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \psi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

bepaal dan Im($\psi \circ \phi$).

II.4.5 Voor welke reële waarden van α is er een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding ϕ_α: $\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ met

$$\phi\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}, \qquad \phi_\alpha\begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \phi_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \quad ?$$

Voor welke van deze waarden is ϕ_α volledig bepaald? Voor welke van deze waarden is ϕ_α surjectief ?

II.4.6 Notatie: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}(V,V)$ (zie S II.4.34). Onder ϕ^2 verstaan we het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme $\phi\circ\phi$: $V \to V$. Dus $\phi^2(x) = (\phi\circ\phi)(x) = \phi(\phi(x))$. Analoog wordt onder ϕ^k, met $k \geq 2$ verstaan

$$\underbrace{\phi \circ \phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{k \text{ keer}} .$$

II.4.7 Van een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme ϕ van een vectorruimte V is gegeven dat voor iedere $x \in V$ de vectoren $\phi(x)$ en $\phi^2(x)$ lineair afhankelijk zijn.
Bewijs dat iedere $x \in V$ geschreven kan worden als $x = u + v$, met $u \in \text{Im}(\phi)$ en $v \in \text{Ker}(\phi^2)$.

II.4.8 Zij $\phi \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4, \mathbb{R}_3)$ gedefinieerd door

$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\\s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+s+t\\x+2s-t\\x+y+3s-3t\end{pmatrix}.$$

Vind een basis van Im(ϕ) en Ker (ϕ).

II.4.9 Vind een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_4$ zodat $\mathrm{Im}(\phi)$ wordt voortgebracht door

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}].$$

II.4.10 Zij $\phi: \mathbb{R}_3^* \to \mathbb{R}_3^*$ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{R}_3^*$, gegeven door $\phi(1,0,0) = (1,2,1)$, $\phi(0,1,0) = (2,2,1)$, $\phi(0,0,1) = (0,-2,-1)$.

a) Bepaal $\phi(1,1,1)$ en $\phi(2,1,3)$.

b) Bepaal $\mathrm{Ker}(\phi)$.

c) Bepaal $\mathrm{Im}(\phi)$.

d) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}_3^*$ die afgebeeld worden op de vector $(2,2,1)$.

II.4.11 Zij $\phi \in M_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_4, \mathbb{R}_2)$. Bewijs dat

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) \geq 2.$$

II.4.12 Laat V een $\mathbb{F}$-vectorruimte zijn met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Zij W een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[b_1,b_2,\ldots,b_n]$, met $n \geq 4$. Zij $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,W)$ gegeven door

$$\phi(a_1) = b_1, \quad \phi(a_2) = b_2 + 3b_3, \quad \phi(a_3) = b_4.$$

Bewijs dat $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ en dat $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = 3$.

II.4.13 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Zij $\phi: V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme gegeven door

$$\phi(a_1) = a_1, \quad \phi(a_2) = a_2, \quad \phi(a_3) = 2a_1 + 3a_2.$$

Voor welke $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{F}$ geldt $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \in \mathrm{Ker}(\phi)$?
Voor welke $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{F}$ geldt $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \in \mathrm{Im}(\phi)$?

II.4.14 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3,a_4]$. Zij $\phi: V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding met

$$\phi(a_1) = a_1, \quad \phi(a_2) = a_2 + a_3, \quad \phi(a_3) = a_1 + a_3, \quad \phi(a_4) = a_1 + a_2 + \lambda a_3.$$

Bepaal voor elke $\lambda \in \mathbb{F}$ een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$ en een basis van $\mathrm{Ker}(\phi)$.

II.4.15 V en W zijn $\mathbb{F}$-vectorruimten, $\phi \in M(V,V)$ en $\psi \in M(V,W)$. Bewijs dat ϕ een isomorphisme is dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$. Geldt een dergelijke uitspraak ook voor ψ?

II.4.16 Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,V)$ waarvoor geldt $\phi^2 = \phi$ (ϕ heet dan een projectie).

(i) Bewijs dat $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$.

(ii) Toon aan dat $V = \mathrm{Ker}(\phi) + \mathrm{Im}(\phi)$.

II.4.17 U, V en W zijn $\mathbb{F}$-vectorruimten, $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,W)$ en $\psi \in M_{\mathbb{F}}(W,U)$. Toon aan dat (zie voor de notatie V I.1.10)

$$\phi(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)) = \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\phi).$$

II.4.18 A is een $\mathbb{R}$-lineaire vectorruimte. Van het endomorphisme $\phi \in M_{\mathbb{R}}(A,A)$ is gegeven, dat voor iedere vector $x \in A$, met $x \neq 0$, het stelsel $[x,\phi(x)]$ lineair onafhankelijk is. Als $\psi = \phi + \mathrm{id}_A$, bewijs dan dat voor $x \neq 0$ ook het stelsel $[\phi(x), \psi(x)]$ lineair onafhankelijk is.

II.4.19 In $\mathbb{R}_3$ is gegeven de verzameling V door

$$V = \{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

a) Ga na of V een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_3$ is.

b) Voor elk paar (α,β) is het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme ϕ van $\mathbb{R}_3$ gegeven door

$$\phi\begin{pmatrix}1\\-8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\alpha+1\\3\end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+2\beta\\1+\beta\\3\end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\beta\\\alpha+\beta\\0\end{pmatrix}.$$

Bepaal voor elk paar (α,β) een basis van $V \cap \mathrm{Im}(\phi)$.

II.4.20 Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren we $\phi_\alpha \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3, \mathbb{R}_3)$ door

$$\phi_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}, \qquad \phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Verder is

$$a = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal voor elke α $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi_\alpha))$.

(ii) Los $\phi_\alpha(x) = a$ op voor elke α.

II.4.21 In de $\mathbb{E}_2$ kiezen we de basis $[E_1,E_2]$, waarbij E_1 en E_2 gegeven zijn door de matrices

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \text{ respectievelijk } \vec{E}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Men beschouwt de $\mathbb{R}$-lineaire endomorphismen σ, ε en ρ met de volgende werking:

$\sigma(E_1) = E_2$, $\sigma(E_2) = -E_1$ (draaiing van $\mathbb{E}_2$ over $\frac{1}{2}\pi$);

$\varepsilon(E_1) = E_1$, $\varepsilon(E_2) = E_2$ (de identieke afbeelding $\mathrm{id}_{\mathbb{E}_2}$);

$\rho(E_1) = 2E_1$, $\rho(E_2) = E_2$.

Bepaal de meetkundige betekenis van

(i) σ^3; (ii) σ^4; (iii) $\sigma + \varepsilon$; (iv) $(\rho-\varepsilon) \circ \sigma \circ (\rho+\varepsilon)$;

(v) $\sigma\circ(\rho-\varepsilon)^2$.

II.4.22 V is een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,V)$; a, b en c zijn vectoren uit V, alle ongelijk 0. Er is verder gegeven dat $\phi(a) = a$, $\phi(b) = -b$, $\phi(c) = 0$.

(i) Bewijs dat $[a,b,c]$ een lineair onafhankelijk stelsel is.

(ii) Bereken $\phi^5(a+3b-2c)$.

II.4.23 V is een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,V)$.

(i) Bewijs: $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ dan en slechts dan als $\phi^2 = 0$.

(ii) Geef een voorbeeld van een endomorphisme van $\mathbb{R}_2$ zódat $\phi \neq 0$ en $\phi^2 = 0$.

II.4.24 Zoek een $\phi \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4, \mathbb{R}_4)$ zódat $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) = 2$ en

$$\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Bewijs dat $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Im}(\phi^2)) = 1$.

II.4.25 F is de $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen van graad ≤ 4:

$$F = \{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4 \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

E is de deelverzameling van F bestaande uit de polynomen van F waarvoor $\alpha_4 = 0$.

(i) Bewijs dat E een lineaire deelruimte van F is.

Definieer $\delta: F \to E$ en $\pi: E \to F$ door

$$\delta(\sum_{i=0}^{4} \alpha_i x^i) = \sum_{i=1}^{4} i\alpha_i x^{i-1}, \qquad \pi(\sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\alpha_i}{i+1} x^{i+1}.$$

(ii) Toon aan dat δ en π $\mathbb{R}$-lineaire afbeeldingen zijn.

(iii) Bepaal $\mathrm{Ker}(\delta)$, $\mathrm{Im}(\delta)$, $\mathrm{Ker}(\pi)$ en $\mathrm{Im}(\pi)$.

(iv) Laat zien dat $\delta \circ \pi = \mathrm{id}_E$, maar dat $\pi \circ \delta \neq \mathrm{id}_F$.

II.4.26 ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V.

Toon aan:

(i) $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(\phi^2)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi^2)$ dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$.

II.4.27 V is een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,V)$ met $\phi^3 = \phi$.

Toon aan:

(i) $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi^2)$.

(ii) $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi^2) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}_V - \phi^2)$.

(iii) $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$.

(iv) Elke vector $v \in V$ is op één en slechts één manier te schrijven als $v = u + w$, met $u \in \mathrm{Im}(\phi)$, $w \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

II.4.28 Zij $[a_1,\ldots,a_n]$ een basis voor een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, $n \geq 4$.

We definieren $\phi \in M_{\mathbb{F}}(V,V)$ door $\phi(a_i) = a_{i+1}$ voor $1 \leq i < n$ en $\phi(a_n) = 2a_n$.

(i) Bepaal $\mathrm{Ker}(\phi^k)$ voor $k = 1,2,3$.

(ii) Los op $\phi^2(x) = a_3$ en $\phi^3(y) = a_3$.

(iii) Bewijs dat $\phi^n = 2\phi^{n-1}$.

II.4.29 Gegeven is een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme ϕ van een $\mathbb{F}$-lineair vectorruimte V zodanig dat $\phi^3 = id_V$. Stel $b = a + \phi(a) + \phi^2(a)$, voor zekere $a \in V$.

Toon aan dat

(i) $\phi(b) = b$.

(ii) $Ker(\phi) = \{0\}$.

(iii) $\phi(U) = U$, als $U = \{\lambda(3a-b) + \mu\, \phi(3a-b) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{F}\}$.

II.4.30 Zij σ: $\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ een $\mathbb{R}$- lineaire afbeelding. Zij a een (vaste) vector uit $Ker(\sigma)$.

Zij verder ϕ: $\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ gedefinieerd door

$$\phi(x) = x - \sigma(x)a.$$

(i) Bewijs dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is.

(ii) Bewijs dat $Ker(\phi) = \{0\}$.

(iii) Bewijs dat

$$\dim_{\mathbb{R}}((Im(id_{\mathbb{R}_n} - \phi)) \leq 1.$$

(iv) Bewijs dat ϕ een inverse heeft en dat $\phi^{-1}(x) = x + \sigma(x)a$.

II.4.31 Zij A een $\mathbb{F}$-vectorruimte, B en C lineaire deelruimten van V met de eigenschap $A = B + C$, $B \cap C = \{0\}$. (Zie V II.3.17). De afbeelding ϕ: $A \to A$ is gedefinieerd door de eigenschap, dat wanneer $a = b + c$ met $b \in B$ en $c \in C$ dan is $\phi(a) = b$.

(i) Bewijs dat ϕ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is.

(ii) Bepaal $Ker(\phi)$.

(iii) Toon aan dat $\phi^2 = \phi$.

II.4.32 Zij $\phi \in M(\mathbb{R}_n, \mathbb{R}_n)$ waarvoor geldt

$$\phi - \phi^2 = id_{\mathbb{R}_n}.$$

Toon aan dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire automorphisme van $\mathbb{R}_n$ is.

II.4.33 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi \in M(V,V)$ met de eigenschap $\phi^2 = \phi$. Veronderstel $\phi \neq id_V$. Toon aan dat ϕ geen $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V is.

§ II.5. Matrices en lineaire afbeeldingen

II.5.1 Terminologie: Onder de standaardbasis van $\mathbb{R}_n$ verstaan we het tupel $[e,e_2,\ldots,e_n]$, met

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analoog voor $\mathbb{R}_n^*$.

II.5.2 Schrijf de vectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{R}_3$

a) als vector van

$$(\mathbb{R}_3, [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]),$$

b) als vector van

$$(\mathbb{R}_3, [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]).$$

II.5.3 Schrijf de vectoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_4^*,\ [(1,1,1,1),\ (1,0,1,0),(1,1,0,0),$$

$$(0,0,0,1)]$$

als vectoren uit $(\mathbb{R}_4^*, [(1,2,1,2),(1,1,1,1),(0,1,0,0),(3,0,0,-1)])$.

II.5.4 De twee $\mathbb{R}$-lineaire afbeeldingen

$$\phi = (\mathbb{R}_2,\ [\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_2, [\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}],$$

$$\psi = (\mathbb{R}_2,\ [\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_2, [\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}]$$

zijn gegeven door de matrices

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Bepaal voor elke vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$ de beelden $\phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en $\psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Bepaal vervolgens $\mathrm{Ker}(\phi)$, $\mathrm{Ker}(\psi)$, $\mathrm{Im}(\phi)$ en $\mathrm{Im}(\psi)$.

II.5.5 De $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi = (\mathbb{R}_3^*,\ [(1,2,2),\ (0,1,0),\ (0,0,-1)]) \overset{A}{\to}$ $(\mathbb{R}_2,\ [\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}])$ is gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix B bij de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$3.\phi = (\mathbb{R}_3^*,\ [(0,1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,-1)]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_2, [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}]).$$

Bepaal ook $\mathrm{Ker}(\phi)$ en $\mathrm{Ker}(3.\phi)$.

II.5.6 Beschouw de vector

$$v = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_4^*,\ [(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)]).$$

Bepaal een basis $[v_1,v_2,v_3,v_4]$ van $\mathbb{R}_4^*$, zodat v te schrijven is als

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_4^*,\ [v_1,v_2,v_3,v_4]).$$

II.5.7 Bepaal de matrices voor de afbeeldingen uit V II.4.1 a) en b). Gebruik de standaardbases van $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_2$, $\mathbb{R}_3$.

II.5.8 Bepaal de matrix voor de afbeelding uit V II.4.3. Gebruik de standaardbases van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_2$.

II.5.9 Bepaal de matrix voor de afbeelding uit V II.4.8. Gebruik de standaardbases van $\mathbb{R}_3$ en $\mathbb{R}_4$.

II.5.10 Bepaal de matrix voor de afbeelding

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \to (W,[b_1,b_2,\ldots,b_n])$$

uit V II.4.12.

II.5.11 Bepaal de matrix voor de afbeelding

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3,a_4]) \to (V,[a_1,a_2,a_3,a_4])$$

uit V II.4.14.

II.5.12 V en W zijn $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases $[a_1,a_2,a_3]$, resp. $[b_1,b_2,b_3,b_4]$. De $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding ϕ: $V \to W$ wordt ten opzichte van deze bases gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix A' in

$$\phi = (V,[a_1,a_1+a_2,a_1+a_3]) \xrightarrow{A'} (W,[b_4,b_3,b_2,b_1]).$$

Bepaal voorts de beelden onder ϕ van de vectoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_2,a_3]), \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_1+a_2,a_1+a_3]).$$

Bepaal $\mathrm{Ker}(\phi)$.

II.5.13 Bepaal het produkt van de volgende paren matrices

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad (1,0,1).$

c) $(1,-1,1,4), \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\\1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

II.5.14 De $\mathbb{R}$-lineaire afbeeldingen

$$\phi = (V,[a_1,a_2,\ldots,a_7]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,b_2,\ldots,b_6])$$

en

$$\psi = (W,[2b_1,b_2,\ldots,b_6]) \xrightarrow{B} (U,[c_1,c_2])$$

zijn gegeven door de matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 2\\4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix C in

$$\psi \circ \phi = (V,[a_1,a_2,\ldots,a_7]) \overset{C}{\to} (U,[c_1,c_2]).$$

II.5.15 Bepaal de matrices D en P voor de afbeeldingen

$$\delta = (F,[1,x,x^2,x^3,x^4]) \overset{D}{\to} [E,(1,x,x^2,x^3])$$

$$\pi = (E,[1,x,x^2,x^3]) \overset{P}{\to} (F,[1,x,x^2,x^3,x^4])$$

uit V II.4.25. Laat nog eens zien dat $\delta \circ \pi = id_E$, maar dat $\pi \circ \delta \neq id_F$, door de matrices A en B in

$$\pi \circ \delta = (F,[1,x,x^2,x^3,x^4) \overset{A}{\to} (F,[1,x,x^2,x^3,x^4]),$$

$$\delta \circ \pi = (E,[1,x,x^2,x^3]) \overset{B}{\to} (E,[1,x,x^2,x^3])$$

te berekenen.

II.5.16 Gegeven is de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\phi = (\mathbb{R}_2, [\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_2, [\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}]) \qquad (*)$$

door de matrix $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Bepaal de matrices van

$$\phi^2, \quad \phi^3, \quad \phi^4, \quad 2.\phi + \phi^2$$

ten opzichte van de basis waarmee ϕ in (*) is gedefinieerd. Bepaal $\mathrm{Ker}(\phi^2+\phi^4)$.

II.5.17 V is de $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen van de graad ≤ 2 en W de $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen van de graad ≤ 3. Zij verder $\phi\colon V \to W$ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding bepaald door

$$\phi(1+x) = x^3+1, \quad \phi(1-x) = 3x^3+2x^2-1, \quad \phi(x^2) = x^3+x^2.$$

Bepaal de matrix A in

$$\phi = (V,[1,1+x,(1+x)^2]) \overset{A}{\to} (W,[1,x,x^2,x^3]).$$

II.5.18 Gegeven zijn de vectoren in de $\mathbb{R}_3$

$$a = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Zij U, V en W lineaire deelruimten van $\mathbb{R}_3$ opgespannen door de tupels $[a,b]$, $[a,c]$ en $[b,c]$. Zij ϕ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{R}_3$ dat de lineaire deelruimten U, V en W in zichzelf afbeeldt (d.w.z. $\phi(U) \subset U$, $\phi(V) \subset V$, $\phi(W) \subset W$). Verder is

$$\phi(d) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$

waarin $[e_1,e_2,e_3]$ de standaardbasis van $\mathbb{R}_3$ is.

II.5.19 $\phi \in M(\mathbb{R}_4, \mathbb{R}_3)$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1 & 1\\1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

t.o.v. de standaardbases van $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{R}_3$; $\psi \in M(\mathbb{R}_3, \mathbb{R}_3)$ is gegeven door

$$\psi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bepaal $\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$ en $\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)$ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.5.20 V is de $\mathbb{F}$-vectorruimte van alle veeltermen van graad ≤ 3. De $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding ϕ: V $\to$ V is gegeven door

$$\phi(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_0x+a_1x^2+a_2x^3, \qquad a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{F}.$$

(i) Bepaal de matrix A in

$$\phi = V,[2,1+x,1+x^2,1+x^3]) \xrightarrow{A} (V,[2,1+x,1+x^2,1+x^3]).$$

(ii) Bepaal $\mathrm{Ker}(\phi^3)$ en $\mathrm{Im}(\phi^2)$.

II.5.21 De $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi_\lambda\colon \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ wordt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+3 & 2 \\ -\lambda & -\lambda-1 & -1 \end{pmatrix}$$

t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}_3$.
Bepaal voor iedere $\lambda \in \mathbb{R}$ de dimensie van $\mathrm{Im}(\phi_\lambda)$ en bereken in die gevallen, waarin de dimensie niet gelijk aan 3 is de kern en het beeld van de afbeelding.

II.5.22 Gegeven zijn de matrices uit $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken voor all $n \in \mathbb{N}$: A^{3n+2}, B^{6n} en C^{6n}.

II.5.23 Bepaal voor elke waarde van $\alpha \in \mathbb{R}$ de dimensie van de kern van de afbeelding $\phi_\alpha\colon \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4$ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \alpha+3 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha-1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}_4$.

II.5.24 Gegeven is de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi\colon \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}_3$. Bepaal de matrix van ϕ^{2n} t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}_3$.

III. Lineaire endomorphismen

§ III.1. Multilineaire functies

III.1.1 Gegeven zijn de afbeeldingen

a) $f: (\mathbb{R}_2)^3 \to \mathbb{R}$.

$$f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}] = \alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2;$$

b) $f: \mathbb{R}_4^* \to \mathbb{R}$,

$$f[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)] = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;$$

c) $f: (\mathbb{R}_4^*)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)] = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4;$$

d) $f: (\mathbb{R}_2)^3 \to \mathbb{R}$,

$$f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}] = \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Ga na in welke gevallen f een multilineaire functie is.

III.1.2 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Elke bilineaire functie f: $V^2 \to \mathbb{F}$ is de som van een symmetrische (zie Def. S V.3.9) en een antisymmetrische bilineaire functie. Bewijs dit.

III.1.3 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en f: $V^n \to \mathbb{F}$ een antisymmetrische lineaire functie op V. Zij $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ een basis van V met de eigenschap $f[a_1,\ldots,a_n] = 0$. Bewij dat f identiek 0 is.

III.1.4 Kies in $\mathbb{E}_2$ drie vectoren P, Q en R, zeg gegeven door

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix}x_Q\\ y_Q\end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix}x_R\\ y_R\end{pmatrix}.$$

Zij α de hoek tussen de rechter PQ en PR, gemeten vanaf PQ in de richting tegen de klok in. Noteer $|PQ|$ (resp. $|PR|$) voor de lengte van het lijnstuk PQ (resp. PR). Dan is $\frac{1}{2}\ |PQ|\cdot|PR|\ \sin\alpha$ de oppervlakte van Δ PQR. Definieer nu de afbeelding

$$f\colon (\mathbb{E}_2)^3 \to \mathbb{R}$$

met

$$f[P,Q,R] = \tfrac{1}{2}\ |PQ|\cdot|PR|\cdot\sin\alpha.$$

Toon aan dat f een antisymmetrische trilineaire functie op $\mathbb{E}_2$ is.

III.1.5 Zij V en W $\mathbb{F}$-vectorruimten, $\phi\colon V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en $f\colon W^n \to \mathbb{F}$ een n-lineaire functie op W. Definieer $g\colon V^n \to \mathbb{F}$ door

$$g[v_1,\ldots,v_n] = f[\phi(v_1),\ldots,\phi(v_n)].$$

a) Toon aan dat g een n-lineaire functie op V is.

b) Als bovendien gegeven is dat f antisymmetrische is, geldt dit dan ook voor g?

III.1.6 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ een n-lineaire functie op V. We noemen f <u>alternerend</u> als $f(v_1,\ldots,v_n) = 0$ telkens wanneer twee aangrenzende componenten gelijk zijn; d.w.z. telkens wanneer er een index $j < n$ bestaat zodat $v_j = v_{j+1}$.

a) Bewijs dat een antisymmetrische multilineaire functie op een vectorruimte V alternerend is.

b) Als $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ een alternerende n-lineaire functie op V is, bewijs dan dat $f[v_1,\ldots,v_n] = 0$ als $v_i = v_j$, $i \neq j$.

c) Ga na dat uit a) en b) volgt dat de begrippen alternerend en antisymmetrisch equivalent zijn.

§ III.2. <u>Determinanten</u>

III.2.1 Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$ en $\phi\colon V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V gegeven door een (nxn)-matrix A uit $\mathbb{F}$ volgens

$$\phi = (V_1[a_1,\dots,a_n]) \overset{A}{\to} (V_1[a_1,\dots,a_n]).$$

Zij $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ een antisymmetrische n-lineaire functie.
Toon aan dat

$$f[\phi(v_1),\dots,\phi(v_n)] = \det(A)\ f\,[v_1,\dots,v_n],$$

waarin $[v_1,\dots,v_n]$ een willekeurig n-tupel uit V is.

III.2.2 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ en $g\colon V^n \to \mathbb{F}$ twee antisymmetrische n-lineaire functies, beide niet identiek nul. Dan is voor twee bases $[a_1,\dots,a_n]$ en $[b_1,\dots,b_n]$ steeds

$$\frac{f[a_1,\dots,a_n]}{g[a_1,\dots,a_n]} = \frac{f[b_1,\dots,b_n]}{g[b_1,\dots,b_n]}.$$

Bewijs dit.

III.2.3 Bereken de determinant van de matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

III.2.4 Bepaal de waarde van k waarvoor $\det\begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix} = 0$.

III.2.5 B is de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de waarde(n) van λ waarvoor $\det(B-\lambda I_3) = 0$.

III.2.6 Bewijs dat

$$\det\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix} = (a-b)\ (b-c)\ (a-c) = \det\begin{pmatrix} bc & a & 1 \\ ca & b & 1 \\ ab & c & 1 \end{pmatrix}.$$

III.2.7 a) Ga na dat

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

waarin x_P, y_P, x_Q, y_Q gegeven reële getallen zijn, de vergelijking van een rechte in $\mathbb{E}_2$ door de punten P en Q met $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ en $\vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$ voorstelt.

b) Toon aan dat de punten P, Q en R uit $\mathbb{E}_2$ met matrices resp. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$ op een rechte liggen.

c) Wat stelt (in $\mathbb{E}_3$) de vergelijking

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

voor?

Hierin zijn x_i, y_i, z_i gegeven reële getallen $(i = 1,2,3)$.

III.2.8 Toon aan

$$\det\begin{pmatrix} x & p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ a_1 & x & q_1 & q_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & x & r_1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \end{pmatrix} = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ (x-a_4).$$

Breid dit uit (nxn)-matrix.

III.2.9 Zij $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ twee afbeeldingen. Van een (nxn)-matrix ($n \geq 2$) is het algemene element $a_{ij} = f(i)g(j)$. Bewijs dat de determinant van de matrix gelijk aan 0 is. Beschouw eveneens het geval waarin $a_{ij} = f(i) + g(j)$.

III.2.10 De (nxn)-matrix A_n met elementen a_{ij} is gegeven door $a_{ii} = 2 \cos \phi$ $a_{ij} = 1$ voor $i-j = \pm 1$, terwijl de overige elementen van A_n gelijk aan 0 zijn. Schrijf $D_n = \det(A_n)$.

a) Ga na dat $D_1 = 2 \cos \phi$, $D_2 = 4 \cos^2 \phi - 1$.

b) Bewijs de recurrente betrekking

$$D_n = 2\, D_{n-1} \cos \phi - D_{n-2}, \qquad n > 2.$$

Hieraan is ook voldaan voor $n = 2$ als we $D_0 = 1$ nemen.

c) Toon aan dat

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin \phi}, \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

III.2.11 Bereken de determinant van de (nxn)-matrix met elementen a_{ij}, waarvoor geldt $a_{ij} = 1$ als $i-j = 0$, 1 of -1, terwijl de overige elementen 0 zijn.

III.2.12 Van de (nxn)-matrix A_n zijn alle elementen 1 behalve:

$$a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{nn} = 0.$$

Bereken $\det(A_n)$ voor alle $n \geq 1$.

III.2.13 Beschouw de (nxn)-matrix $V(x_1,\ldots,x_n)$ met algemeen element $a_{ij} = x_i^{j-1}$, waarin $x_i \in \mathbb{C}$. V wordt de matrix van Vandermonde genoemd. Trek de eerste rij van ieder der volgende rijen af en ontwikkel daarna de determinant van de nieuwe matrix naar de eerste kolom (waarvan alle elementen op het eerste na tot 0 gemaakt zijn). Ga na dat

$$\det(V(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1).$$

$$\det(V(x_2.x_3,\ldots,x_n)).$$

Dit proces kan op $V(x_2,\dots,x_n)$, een $(n-1) \times (n-1)$ matrix met $a_{ij} = x_{i+1}^{j-1}$, herhaald worden. Ga na dat ontstaat

$$\det(V(x_1,\dots,x_n)) = \prod_{i<j} (x_j-x_i);$$

het symbool in het rechterlid betekent dat het produkt gevormd wordt van alle termen x_j-x_i, met $i < j$, en $i,j = 1,2,\dots,n$. Uit het resultaat volgt dat de determinant van een Vandermonde matrix $V(x_1,\dots,x_n)$ dan en alleen dan gelijk aan 0 is, als onder de getallen $x_1,x_2,\dots,x_n$ minstens 2 gelijke voorkomen.

III.2.14 De (nxn)-matrix A met elementen a_{ij} is gegeven door $a_{1j} = j$ $(j=1,\dots,n)$, $a_{i1} = 1$ $(i=1,\dots,n)$, $a_{n-k,k+2} = 1$ $(k=0,\dots,n-2)$ en $a_{ij} = 0$ voor alle andere paren (i,j). Bereken $\det(A)$.

III.2.15 Zij A een (nxn)-matrix waarvoor $A^2-A+I_n = 0$. Bewijs dat $\det(A) \neq 0$.

III.2.16 Notatie: Zij $[k_1,\dots,k_n]$ een n-tupel uit $\mathbb{F}_n$ (zie S IV.1.1). De elementen k_j kunnen dan gegeven worden door

$$k_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{F}, \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

Onder $\det(k_1,k_2,\dots,k_n)$ verstaan we dan de determinant van matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

III.2.17 Zij $[k_1,\dots,k_n]$ een n-tupel uit $\mathbb{F}_n$. Bewijs dat $\det(k_1,\dots,k_n) = 0$ dan en slechts dan als $[k_1,\dots,k_n]$ een lineair afhankelijk stelsel is in $\mathbb{F}_n$.

III.2.18 Het vorig vraagstuk behelst het volgende: als van een (nxn)-matrix A de kolommen opgevat worden als elementen van $\mathbb{R}_n$ of $\mathbb{C}_n$, dan geldt det(A) = 0, dan en slechts dan als de kolommen een lineair afhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_n$ (of C_n) vormen. Een analoge uitspraak geldt ook voor rijen. Ga dit na.

III.2.19 In $\mathbb{R}_4$ zijn de lineair onafhankelijke vectoren a, b, c en d gegeven met de eigenschap det(a,b,c,d) = 1. Bepaal de vectoren $x \in \mathbb{R}_4$, die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \det(a,b,c,x) = 2, \\ \det(a,b,x,d) = -4. \end{cases}$$

III.2.20 Bereken de determinant van de (nxn)-matrix H_n, waarvan de elementen a_{ij} gegeven worden door $a_{ij} = 1/(i+j)$, i,j = 1,...,n. (H_n wordt een Hilbert-matrix genoemd.)

§ III.3. Automorphismen en basistransformaties

III.3.1 Zij $[a_1,a_2,a_3]$ een basis van $\mathbb{R}_3$ en ϕ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{R}_3$ gegeven door

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3]) \overset{A}{\rightarrow} (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3])$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ga na of ϕ een $\mathbb{R}$-lineair automorphisme van $\mathbb{R}_3$ is.

III.3.2 Bereken de inverse (als deze bestaat) van de volgende matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

III.3.3 Bepaal de matrix B in

$$\phi^{-1} = (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3]) \overset{B}{\rightarrow} (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3])$$

voor de afbeelding ϕ uit V III.3.1.

III.3.4 Ga na voor welke waarde(n) van λ het tupel

$$[\begin{pmatrix}\lambda\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\\lambda\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}]$$

een basis van $\mathbb{R}_3$ is.

III.3.5 In een 3-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V zijn gegeven de vectoren a, b en c zodanig dat [a,b,c] een basis voor V is. Welke van de volgende tupels is een basis voor V?

a) [a+b+c, a+2b, c-b];
b) [11a-3b-c, -8a+2b+c, -10a+3b+c];
c) [6a+4b, a+c, -2b+3c];
d) [5a+4b, a+c, -2b+5c].

III.3.6 Gegeven in $\mathbb{R}_3$ is de basis [a,b,c] en de vectoren x, y en z gegeven door x = a+c, y = 2a-b+3c, z = 4a+3b+2c. Ga na of [x,y,z] een basis is, en zo ja, schrijf dan a, b en c als een lineaire combinatie van [x,y,z].

III.3.7 Gegeven is: $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ en

$$\phi = (\mathbb{R}_2^*, [e_1,e_2]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_2^*, [e_1,e_2]),$$

$b_1 = 2e_1 + 3e_2$, $b_2 = e_1 + 2e_2$. Bepaal de matrices S en B, zó dat $B = S^{-1}AS$ en

$$\phi = (\mathbb{R}_2^*, [b_1,b_2]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_2^*, [b_1,b_2]).$$

III.3.8 Zij A een (nxn)-matrix uit $\mathbb{R}$ van de vorm

(*) $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & . \\ . & & & \boxed{B} & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & \beta \end{pmatrix}, \quad n \geq 3, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

a) Bewijs dat A regulier is, dan en slechts dan als B regulier is.

b) Zij B equivalent met een (n-2)x(n-2)-matrix C. Bewijs dat A equivalent is met de matrix A_1 die uit A in (x) ontstaat door B te vervangen door C.

c) Bewijs, dat als C equivalent is met een diagonaal-matrix, ook A equivalent is met een diagonaalmatrix.

d) Als det(B) = b, welke waarden nemen dan det(A), det(A_1) en det(C) aan?

III.3.9 Wat is de algemene gedaante van een (2x2)-matrix A uit $\mathbb{R}$, die de eigenschap heeft, dat de enige matrix die met A equivalent is, A zelf is?

III.3.10 Gegeven zijn de twee (nxn)-matrices A en B uit $\mathbb{R}$, met $A \neq O_n$, $B \neq O_n$ (zie S V.1.27), $AB = O_n$. Toon aan dat A en B beide singulier zijn. Geef voor n = 3 een voorbeeld van twee zulke matrices A en B.

III.3.11 Beschouw de volgende bases in $\mathbb{R}_3$: $[e_1,e_2,e_3]$, $[f_1,f_2,f_3]$, met

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de matrices A en B in

$$id_{\mathbb{R}_3} = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3]),$$

$$id_{\mathbb{R}_3} = (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

b) Ga na dat inderdaad $A = B^{-1}$.

c) Zij ϕ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{R}_3$ gegeven door

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3]) \overset{C}{\to} (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3])$$

met

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix D in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{D} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

d) Bepaal de matrix E in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{E} (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3])$$

en de matrix F in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [f_1,f_2,f_3] \xrightarrow{F} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

III.3.12 Zij ϕ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van een drie dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte V, gedefinieerd door

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \xrightarrow{A} (V,[b_1,b_2,b_3]),$$

waarin $[a_1,a_2,a_3]$ en $[b_1,b_2,b_3]$ bases van V zijn en

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Ga na voor welke λ ϕ een $\mathbb{R}$-lineair automorphisme van V is.

b) Bepaal voor alle λ waarvoor dit mogelijk is de matrix B in

$$\phi^{-1} = (V,[b_1,b_2,b_3]) \xrightarrow{B} (V,[a_1,a_2,a_3]).$$

c) Kies nu bij de basis $[a_1,a_2,a_3]$ het tupel $[b_1,b_2,b_3]$ volgens

$$b_1,b_2,b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_2,a_3]).$$

Bewijs dat $[b_1,b_2,b_3]$ inderdaad een basis van V is.

d) Bepaal de matrix S (en S^{-1}) zodat

$$\mathrm{id}_V = (V,[b_1,b_2,b_3]) \xrightarrow{S} (V,[a_1,a_2,a_3])$$

en

$$\mathrm{id}_V = (V,[a_1,a_2,a_3] \xrightarrow{S^{-1}} (V,[b_1,b_2,b_3]).$$

e) Zij $v \in V$ gegeven door $v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ met $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Bepaal dan $\mu_i \in \mathbb{R}$ zodat

$$v = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3.$$

f) Kies nog twee tupels $[c_1,c_2,c_3]$ en $[d_1,d_2,d_3]$ met

$$c_1,c_2,c_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_2,a_3]),$$

$$d_1,d_2,d_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \in (V, [b_1,b_2,b_3]).$$

Ga na dat $[c_1,c_2,c_3]$ en $[d_1,d_2,d_3]$ bases van V zijn.

g) Bepaal de matrix M in

$$\phi = (V, [c_1,c_2,c_3]) \xrightarrow{M} (V,[d_1,d_2,d_3]).$$

Kies daarbij in A $\lambda = -1$.

h) Zij nu ψ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van V bepaald door

$$\psi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,a_2,a_3]).$$

Ga na dat er een λ is zodat

$$\psi = (V,[f_1,f_2,f_3]) \xrightarrow{D} (V,[f_1,f_2,f_3])$$

met

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal ook het tupel $[f_1,f_2,f_3]$ t.o.v. de basis $[a_1,a_2,a_3]$.

III.3.13 Gegeven zijn de twee (2x2)-matrices uit $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

waarin θ een reël getal is. Toon aan dat $A \sim B$.

III.3.14 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij ϕ en ψ twee $\mathbb{F}$-lineaire endomorphismen van V. We vragen ons af: bestaan er bases $[a_1,\ldots,a_n]$ en $[b_1,\ldots,b_n]$ van V zodat, als

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,\ldots,a_n]),$$

$$\psi = (V,[b_1,\ldots,b_n]) \overset{B}{\to} (V,[b_1,\ldots,b_n]),$$

$A = B$. Bewijs dat er twee van die bases bestaan dan en slechts dan als er een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme σ van V bestaat zodat $\psi = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$.

III.3.15 Maak de vraagstukken V I.1.26 tot en met V I.1.32 nog eens met behulp van de theorie uit § III.3. Zie ook V I.1.33.

IV. Lineaire stelsels en vergelijkingen

§ IV.1. De rang van een matrix

IV.1.1 Bepaal de rang van de volgende matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

IV.1.2 Bepaal de rang van de volgende matrices voor verschillende waarden van a

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.1.3 Als A en B (3×3)-matrices zijn uit $\mathbb{F}$ en $r(A) = r(B) = 2$, bewijs dan dat $AB \neq O_3$.

IV.1.4 Als A en B twee $(n\times m)$-matrices uit $\mathbb{F}$ zijn, bewijs dan dat

$$|r(A) - r(B)| \leq r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

IV.1.5 Als A en B twee matrices zijn uit $\mathbb{F}$ waarvan het produkt gevormd kan worden, wat is er dan te zeggen over $r(AB)$?

IV.1.6 A is een (3×3)-matrix uit $\mathbb{F}$ en B is dezelfde matrix met een extra kolom toegevoegd. Is dan $r(B) = r(A)$? Zo ja, bewijs; zo neen, geef een tegenvoorbeeld.

IV.1.7 Als $A \sim B$, dan is $r(A) = r(B)$. Bewijs!

IV.1.8 Zij V en W twee $\mathbb{R}$-vectorruimten met bases $[a_1,a_2,a_3,a_4]$, resp. $[b_1,b_2,b_3]$; zij $\phi: V \to W$ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding gedefinieerd door

$$\phi = (V,\ [a_1,a_2,a_3,a_4]) \xrightarrow{A} (W,\ [b_1,b_2,b_3])$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & 12 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zij verder v_1,v_2,v_3 vectoren uit V met

$$v_1,v_2,v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_2,a_3,a_4]).$$

a) Bepaal dan de rang van A.

b) Bepaal de dimensie van de lineaire deelruimte van V opgespannen door $[v_1,v_2,v_3]$.

c) Bepaal de rang van het tupel $[\phi(v_1),\phi(v_2),\phi(v_3)]$.

IV.1.9 Als A een reguliere $(n\times n)$-matrix is uit $\mathbb{F}$ en B een $(m\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, bewijs dan dat $r(B) = r(BA)$. Een analoge uitspraak geldt als B regulier is.

IV.1.10 A en B zijn $(n\times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ met $r(A-I_n) = p$ en $r(B-I_n) = q$. Toon aan dat $r(AB-I_n) \leq p + q$.

IV.1.11 Zijn U, V en W drie $\mathbb{F}$-lineaire ruimten met bases $[u_1,\dots,u_n]$, $[v_1,\dots,v_m]$ en $[w_1,\dots,w_k]$ en zijn ϕ: U $\to$ V en ψ: V $\to$ W twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen met

$$\phi = (U,[u_1,\dots,u_n]) \xrightarrow{A} (V,[v_1,\dots,v_m)],$$

$$\psi = (V,[v_1,\dots,v_m]) \xrightarrow{B} (W,[w_1,\dots,w_k]),$$

en is $X = \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\phi)$, dan is $\dim_{\mathbb{F}}(X) = r(A) - r(BA)$. Bewijs deze uitspraak.

IV.1.12 A,B en C zijn 3 matrices uit $\mathbb{F}$ zodat het produkt ABC bestaat. Bewijs dat $r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC)$.

IV.1.13 Als P en Q twee $(n\times n)$-matrices zijn uit $\mathbb{F}$, waarvoor geldt $P^2 = P$, $PQ = QP = O_n$, dan is $r(P+Q) = r(P) + r(Q)$. Bewijs!

IV.1.14 Als P en Q reguliere matrices zijn en A een matrix is zodat het produkt PAQ bestaat, dan is $r(PAQ) = r(A)$. Bewijs!

IV.1.15 Een $(n\times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ is regulier dan en slechts dan als $r(A) = n$. Bewijs!

IV.1.16 Gegeven is een $(m\times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$. Beschouw alle reguliere vierkante submatrices die ontstaan door kolommen en/of rijen in A te schrappen. Toon aan dat de rang van A gelijk is aan de rang van de grootste reguliere submatrix van A.

IV.1.17 Gegeven zijn de $\mathbb{F}$-vectorruimten V, W en U, met bases respectievelijk $[a_1,\ldots,a_m]$, $[b_1,\ldots,b_n]$ en $[c_1,\ldots,c_r]$, en de $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen ϕ: $V \to W$, ψ: $W \to U$ en de matrices A en B zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_m]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\ldots,b_n]),$$

$$\psi = (W,[b_1,\ldots,b_n]) \overset{B}{\to} (U,[c_1,\ldots,c_r]).$$

Voorts is gegeven dat ψ surjectief is en dat $\psi \circ \phi = 0$. Toon aan dat $r(A) + r(B) \leq n$.

IV.1.18 Gegeven zijn twee $(n\times n)$-matrices A en B. Er geldt:

$$AB = A^2.$$

Zij $r(B) = n-1$. Bewijs dat $r(A) < n$.

§ IV.2. Homogene stelsels

IV.2.1 Los de volgende homogene stelsels vergelijkingen op

a) $\begin{cases} x_1 \qquad\quad +2x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 +5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ 13x + 14y - 4z = 0 \\ -7x - 5y + 3z = 0 \\ 11x + 13y - 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\qquad - 8x_5 = 0 \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

IV.2.2 Als A en B twee (n×n)-matrices uit $\mathbb{F}$ zijn en $A \sim B$, zijn dan de oplossingsruimten van de door A en B geïnduceerde homogene stelsels gelijk aan elkaar? D.w.z. zijn de door A en B geïnduceerde homogene stelsels equivalent?

IV.2.3 Zie Opgave S IV.2.12.

IV.2.4 Zij A een (m×n)-matrix uit $\mathbb{R}$ en zij O_S de oplossingsruimte van het door A geïnduceerde homogene stelsel S. In S komen m vergelijkingen voor (in de onbekenden $x_1,\ldots,x_n$). Stelsel S kan opgesplitst worden in homogene stelsels $S_1,\ldots,S_m$ (elk bestaande uit één vergelijking) met bijbehorende oplossingsruimte $O_{S_1},\ldots,O_{S_m}$. Welk verband is er tussen O_S en $O_{S_1},\ldots,O_{S_m}$?

IV.2.5 Zij A een (m×n)-matrix uit $\mathbb{F}$ en V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases $[a_1,\ldots,a_n]$ en $[b_1,\ldots,b_m]$. Zij ϕ de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding gedefinieerd door

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\ldots,b_m]).$$

Zij O_S de oplossingsruimte van het door A geïnduceerde homogene stelsel S.
Is er verband tussen $\mathrm{Ker}(\phi)$ en O_S?
In welke geval is $\mathrm{Ker}(\phi) = O_S$?

IV.2.6 Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de dimensie van de oplossingsruimte O_S van het homogene stelsel met matrix A. Vergelijk Voorbeeld S IV.2.20.

IV.2.7 Bepaal de oplossingen van het homogene stelsel

$$\begin{cases} a + 3b + 4c + d + 3e = 0 \\ a + 3b + 8c + 2d + 5e = 0 \\ 2a + 6b - 4c + 3d = 0 \\ 3a + 9b + 4d + 3e = 0\,. \end{cases}$$

IV.2.8 Bewijs de omkering van S IV.2.9. D.w.z., bewijs de volgende uitspraak. Als S en S' twee equivalente homogene stelsels zijn van m vergelijkingen in n onbekenden en A en A' zijn de matrices van S en S', dan kan A uit A' verkregen worden door toepassing van een lineaire handeling op de rijen van A' (en evenzo kan A' uit A verkregen worden).

IV.2.9 Zijn de volgende $\mathbb{R}$- lineaire homogene stelsels equivalent? Zo ja, schrijf dan elke vergelijking in elk stelsel als een lineaire combinatie van de vergelijkingen in het andere stelsel.

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

IV.2.10 Onderzoek de volgende stelsels zoals in het voorgaande vraagstuk.

a) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 5/2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

§ IV.3. Lineaire stelsels

IV.3.1 Als de (n×n)-matrix A uit $\mathbb{F}$ regulier is, dan heeft het $\mathbb{F}$- lineaire stelsel

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

één en slechts één oplossing $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ met

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

Bewijs dit.

IV.3.2 Maak opgave S IV.3.9.

IV.3.3 Ga na voor welke $a,b,c \in \mathbb{R}$ het volgende stelsel een oplossing heeft

$$\begin{cases} ax + ay + bz = 1 \\ ax + cy + bz = 1 \\ bx + by + az = 1 \end{cases}$$

IV.3.4 Gegeven is het stelsel

$$A . \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} .$$

a) Onderzoek voor welke reële paren (a,b) dit stelsel precies één oplossing heeft.

b) Ga na of het stelsel oplossingen heeft voor de andere reële paren (a,b).

IV.3.5 Bepaal voor iedere waarde van $a \in \mathbb{R}$ de oplossingen van het stelsel

$$A . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

IV.3.6 Gegeven zijn de reële getallen $a_1,\ldots,a_n$. Bepaal alle oplossingen van het stelsel

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

waarin de elementen van de $(n\times n)$-matrix A (met $n > 0$) gedefinieerd zijn door $a_{ii} = 0$, $i = 1,\ldots,n$ en $a_{ij} = 1$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,n$.

IV.3.7 a) Bewijs dat, als a, b, c verschillende getallen zijn, het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + by + b^2z = 1 \\ x + cy + c^2z = 1 \end{cases}$$

één en slechts één oplossing bezit en bepaal die oplossing.

b) Laat $x_0 < x_1 < x_2$ en y_0,y_1,y_2 gegeven getallen zijn, en laat $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, waarin a_0,a_1,a_2 nog onbekende getallen zijn. We willen er voor zorgen dat $P(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2$. Toon aan dit aanleiding geeft tot een stelsel van 3 lineaire vergelijkingen voor a_0,a_1,a_2 dat één en slechts één oplossing bezit.

IV.3.8 Is aan de vergelijking:

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

voldaan door n verschillende waarden van x, dan zijn de getallen $a_0,a_1,\ldots,a_n$ alle 0. Bewijs dit.

IV.3.9 Beschouw in de $\mathbb{E}_3$ een willekeurig punt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

In V II.3.19 is de vergelijking van een vlak, zeg V, in $\mathbb{E}_3$ geïntroduceerd:

(*) $$ax + by + cz = d,$$

waarbij a,b,c en d gegeven reële getallen zijn. Beschouwt men vergelijking (*) als een niet-homogeen lineair stelsel en lost men dit stelsel op, dan kan men de oplossing in verband brengen met de vectorvoorstelling van het vlak V. Ga dit na. Beschouwt men nog een vlak W gegeven door de vergelijking $ex + fy + gz = h$ dan kan de verzameling van oplossingen van het niet-homogene lineaire stelsel

(**) $$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

in verband gebracht worden met de snijlijn van V en W. Ga na wat het, meetkundig gezien, betekent als het stelsel (**) geen oplossing heeft.

IV.3.10 In de $\mathbb{E}_2$ zijn twee rechten gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 &= 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Stel een nodige en voldoende voorwaarde op opdat de rechten één en slechts één punt gemeen hebben. Bereken in dat geval het snijpunt.

IV.3.11 In de $\mathbb{E}_2$ zijn drie rechten gegeven door de vergelijkingen

$$a_ix_1 + b_ix_2 + c_i = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Toon aan dat de rechten door één punt gaan dan en slechts dan als

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

V. Eigenwaarden

§ V.1. Eigenwaarden en eigenvectoren

V.1.1 Beschouw de door de (3×3)-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

geïnduceerde $\mathbb{R}$-lineaire endomorphismen

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$
$$\psi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

Bepaal de eigenwaarden van ϕ en ψ en de bijbehorende eigenvectoren.

V.1.2 Zij A een (n×n)-matrix uit $\mathbb{F}$ met eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ en beschouw het door A geinduceerde $\mathbb{F}$- lineaire endomorphisme

$$\phi = (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n]).$$

a) Zij ψ het door A^T geïnduceerde $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme

$$\psi = (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n]) \overset{A^T}{\to} (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n]).$$

Bewijs dat ψ en ϕ dezelfde eigenwaarden hebben. Hebben ψ en ϕ dezelfde eigenvectoren? Zo ja, bewijs, zo neen, geef een tegenvoorbeeld.

b) Bewijs dat αA, $\alpha \in \mathbb{F}$, de eigenwaarden $\alpha\lambda_i$, $i = 1,\ldots,k$ heeft. Wat is het verband tussen de eigenvectoren van ϕ en $\alpha\phi$?

c) Bewijs dat de matrix A^p, $p \in \mathbb{N}$, de eigenwaarden $\lambda_i^{\,p}$, $i = 1,\ldots,k$ heeft. Wat is het verband tussen de eigenvectoren van ϕ en ϕ^p?

d) Als A regulier is, dan heeft A^{-1} als eigenwaarden λ_i^{-1}, $i = 1,\ldots,k$. Bewijs dit. Wat is het verband tussen eigenvectoren van de automorphismen ϕ en ϕ^{-1}?

e) Bewijs dat $A + \alpha I_n$ de eigenwaarden $\lambda_i + \alpha$ heeft. Wat is het verband tussen de eigenvectoren van ϕ en $\phi + \alpha\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n}$?

f) Als $A^2 = I_n$ dan kunnen slechts +1 en -1 als eigenwaarden van A voorkomen. Bewijs dit.

V.1.3. Gegeven is de veelterm

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad a_i \in \mathbb{F}.$$

Beschouw de (n×n)-matrix uit $\mathbb{F}$

$$A = (-1)^n \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat de karakteristieke veelterm van A gelijk is aan $f(\lambda)$.

V.1.4 Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en het door A geïnduceerde $\mathbb{R}$- lineaire endomorphisme

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

a) Bereken de eigenwaarden van A.

b) Bewijs dat elke vector in $\mathrm{Im}(\phi)$ een eigenvector van ϕ is.

c) Bereken A^7.

V.1.5 Zij V een $\mathbb{F}$- vectorruimte met basis $[a_1,\dots,a_n]$. Zij ϕ: V → V een $\mathbb{F}$- lineair endomorphisme van V en zij A de (n×n)-matrix uit $\mathbb{C}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\dots,a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\dots,a_n]).$$

Veronderstel dat λ_0 een eigenwaarde van ϕ is en dat $\det(A-\lambda I_n) = (\lambda-\lambda_0)^p\, g(\lambda)$, waarin $1 \le p \le n$ en $g(\lambda)$ een veelterm is van graad $n-p$, $g(\lambda_0) \neq 0$. We noemen p de <u>algebraïsche</u> <u>multipliciteit</u> van λ_0. Veronderstel dat de eigenruimte van ϕ bij λ_0 dimensie k heeft. We noemen k de <u>geometrische</u> <u>multipliciteit</u> van λ_0.
Bewijs dat $k \le p$.

V.1.6 Van een $(n\times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$ is bekend dat $r(A) = r < n$.

a) Bewijs dat 0 een eigenwaarde van A is met algebraïsche multipliciteit niet kleiner dan $n-r$.

b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de algebraïsche multipliciteit groter is dan $n-r$.

V.1.7 Gegeven is de $(n\times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$ met als eigenschap

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & & & \cdot \\ \cdot & & \ddots & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

met $a_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, $a_i \neq a_j$ voor alle $i \neq j$.

a) Bewijs dat (voor elke i, $i = 1,\ldots,n$) precies één van de twee getallen $\sqrt{a_i}$ en $-\sqrt{a_i}$ een eigenwaarde van A is.

b) Welke gedaante heeft A en hoeveel mogelijkheden zijn er voor A?

V.1.8 De $(n\times n)$-matrix A_n met elementen a_{ij} is gegeven door $a_{ii} = a$, $a_{ij} = 1$ voor $i - j = \pm 1$ $(i,j=1,\ldots,n)$, terwijl de overige elementen van A_n gelijk aan 0 zijn. Bepaal de eigenwaarden van A_n.
(Zie V III.2.10).

V.1.9 Geef een voorbeeld van een $\mathbb{R}$- lineair endomorphisme

$$\phi\colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$$

(i) dat geen reële eigenwaarden heeft,

(ii) dat twee gelijke reële eigenwaarden heeft,

(iii) dat twee verschillende reële eigenwaarden heeft.

V.1.10 De matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

induceert het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme

$$\phi = (\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_4, [e_1,e_2.e_3,e_4]).$$

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ. Geef lineaire deelruimten W van $\mathbb{R}_4$ zodat $\phi(W) \subset W$.

V.1.11 Zij V een vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Zij ϕ: V $\to$ V het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V gegeven door $\phi(a_1) = -2a_1 + a_2$, $\phi(a_2) = a_1 - 2a_2 + a_3$, $\phi(a_3) = a_2 - 2a_3$. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ.

V.1.12 Zij A, B en C de in V III.3.8 geïntroduceerde matrices. Als $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}$ reële eigenwaarden van B zijn, wat zijn dan de reële eigenwaarden van A? Wat is Tr(A) en Tr(C) als Tr(B) = t?

V.1.13 a) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix (θ is reëel)

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & 1+\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is met basis $[a_1,a_2,a_3]$ en ϕ: V $\to$ V het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme gegeven door

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \to (V,[a_1,a_2,a_3]),$$

bepaal dan alle eigenvectoren van ϕ.

c) Kan er een basis $[b_1,b_2,b_3]$ van V gekozen worden die geheel uit eigenvectoren van ϕ bestaat?

d) Zo ja, bepaal de matrix B in

$$\phi = (V,[b_1,b_2,b_3]) \overset{B}{\to} (V,[b_1,b_2,b_3]).$$

V.1.14 a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Als V een $\mathbb{F}$- vectorruimte is met basis $[a_1,a_2,a_3]$ en als $\phi\colon V \to V$ het $\mathbb{F}$- lineair endomorphisme is gegeven door

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,a_2,a_3]),$$

bepaal dan alle eigenvectoren van ϕ.

c) Vindt een bovendriehoeksmatrix B die equivalent is met A.

V.1.15 Van een (2×2)-matrix A uit $\mathbb{R}$ is gegeven:

$$\mathrm{Tr}(A) = t, \quad \det(A) = d.$$

a) Waaraan moeten t en d voldoen opdat A

(i) twee reële gelijke eigenwaarden heeft?
(ii) twee verschillende reële eigenwaarden heeft?
(iii) geen reële eigenwaarden heeft?

b) Als A twee gelijke reële eigenwaarden heeft, bepaal deze.

V.1.16 A is een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, waarbij n even is. Bovendien is $\det(A) < 0$. Bewijs dat A twee reële eigenwaarden heeft.

V.1.17 Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ met n eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ in $\mathbb{F}$. Bewijs dat $c_1 = (-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$, waarin c_1 de coefficient van λ^{n-1} is in de karakteristieke veelterm van A.

V.1.18 Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ met n verschillende reële eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

a) Bewijs dat er een reguliere $(n\times n)$-matrix P uit $\mathbb{R}$ bestaat met

$$(*) \qquad A^k = P^{-1} D^k P, \qquad k \in \mathbb{N},$$

waarin D een diagonaalmatrix is. Specificeer D^k nader. Ga na dat (*) ook juist is voor $k = -1$, als alle $\lambda_i \neq 0$.

b) Zij voorts $f(x) = a_0x^m+\dots+a_m$ een veelterm en $f(A)$ de matrix $a_0A^m+\dots+a_mI_n$. Bewijs dat $f(A) = P^{-1}\ E\ P$, waarin P de matrix is uit a) en E een diagonaalmatrix is met diagonaalelementen $f(\lambda_i)$, $i = 1,\dots,n$.

c) Zij nu $f(\lambda) = a_0\lambda^n+\dots+a_n$ de karakteristieke veelterm van A. Bewijs dat $f(A) = O_n$.

V.1.19 Bepaal de eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en ga na dat A equivalent is met een diagonaalmatrix D. Bepaal S in $A = S^{-1}\ D\ S$. Toon aan dat $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = O_3$.

V.1.20 Zij A de $(n\times n)$-matrix met elementen a_{ij} gedefinieerd door $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1,2,\dots,n-1$, en $a_{ij} = 0$ voor andere paren (i,j).

a) Bewijs dat A nilpotent is.

b) Bepaal $k \in \mathbb{N}$ waarvoor $A^{k-1} \neq O_n$, $A^k = O_n$.
(We noemen het gehele getal k dat hieraan voldoet de <u>index</u> van A.)

V.1.21 Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ met index k (zie V V.1.20). Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\dots,a_n]$ en zij

$$\phi = (V,[a_1,\dots,a_n]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,\dots,a_n])$$

het door A geïnduceerde $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V. Zij a zodanig dat $\phi^{k-1}(a) \neq 0$.

a) Bewijs dat $[a,\phi(a),\dots,\phi^{k-1}(a)]$ een lineair onafhankelijk tupel van V is.

b) Bewijs dat $k \le n$.

V.1.22 Zij A de (6×6)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bewijs dat A nilpotent is.

b) Bepaal de index van A.

V.1.23 V is de vectorruimte van reële veeltermen van de graad ≤ 3. Zij $\phi: V \to V$ de afbeelding die elke veelterm afbeeldt op zijn afgeleide (d.w.z. $\phi(a+bx+cx^2+dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$ voor elke element $a + bx + cx^2 + dx^3 \in V$).

a) Bewijs dat ϕ een $\mathbb{R}$- lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (V,[1,x,x^2,x^3]) \overset{A}{\to} (V,[1,x,x^2,x^3]).$$

c) Toon aan dat A nilpotent is en bepaal de index van A.

d) Bepaal de eigenruimtes van ϕ^k, $k = 0,1,2,3$ bij de eigenwaarden van ϕ^k.

V.1.24 Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat $A^k = O_n$ voor zeker $k > n$. Toon aan dat $A^n = O_n$.

V.1.25 Zij $[a_1,\dots,a_n]$ een basis van een $\mathbb{F}$- vectorruimte V en zij $\phi: V \to V$ het $\mathbb{F}$- lineaire endomorphisme gedefinieerd door $\phi(a_1) = 0$, $\phi(a_2) = a_{21}a_1$, $\phi(a_3) = a_{31}a_1 + a_{32}a_2,\dots,\phi(a_n) = a_{n1}a_1 +\dots+ a_{n,n-1}a_{n-1}$, met $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Toon aan dat $\phi^n = 0$.

V.1.26 Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ met eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, $r \leq n$. Veronderstel dat van elke eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit gelijk is aan de geometrische multipliciteit. Bewijs dat A equivalent is met een diagonaalmatrix.

V.1.27 Zij A en B twee $(n\times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$. Toon aan dat AB en BA dezelfde eigenwaarden hebben.

V.1.28 Als A een reguliere $(n\times n)$-matrix is uit $\mathbb{F}$ dan is de coefficient van λ in de karakteristieke veelterm van A gelijk aan $(-1)^{n-1}|\det(A)|\mathrm{Tr}(A^{-1})$. Bewijs dit.

V.1.29 A en B zijn $(n\times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ zodat $AB = A$ en B heeft een eigenwaarde $\lambda \neq 1$. Toon aan dat $r(A) < n$.

V.1.30 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3,a_4]$. Het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme $\phi: V \to V$ is bepaald door $\phi(a_i) = a_i + a_{i+1}$, $i = 1,2,3$ en $\phi(a_4) = a_4$.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ.

b) Zij $\psi: V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V gegeven door $\psi = \phi - id_V$. Toon aan dat de matrix B in

$$\psi = (V,[b_1,b_2,b_3,b_4]) \xrightarrow{B} (V,[b_1,b_2,b_3,b_4])$$

voor elke basis $[b_1,b_2,b_3,b_4]$ van V nilpotent is en bepaal de index van B.

§ V.2. Complexe matrices

V.2.1 Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte en $(W,[a_1,\ldots,a_n])$ het reële deel van $(V,[a_1,\ldots,a_n])$, waarin $[a_1,\ldots,a_n]$ een basis van V is. Zoals bekend is $W \subset V$ en zijn de dimensies van V en W gelijk. Verklaar waarom toch niet $V = W$.

V.2.2 Bepaal de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 3i & 3 \\ 1 & i-1 & 0 \\ 1-i & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

en los het $\mathbb{C}$-lineaire homogene stelsel op:

$$\begin{cases} 3z_1 + 3iz_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 + (i-1)z_2 = 0 \\ (1-i)z_1 + 2iz_3 = 0 \end{cases}$$

V.2.3 Laten W_1,W_2,W_3 de reële delen zijn van de $\mathbb{C}$-vectorruimten

$(\mathbb{C}_3^*, [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)])$,

$(\mathbb{C}_3^*, [(i,0,0), (0,i,0), (0,0,i)])$,

$(\mathbb{C}_3^*, [(1+i,1-i,0), (0,1,i), (0,0,1)])$

en laten de $\mathbb{C}$-lineaire endomorphismen ϕ,ψ,π van $\mathbb{C}_3^*$ ten opzichte van de basis [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)] gegeven zijn door de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & i/2 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+i \\ (1+i)/2 & -3i & 2-i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_3$, $W_2 \cap W_3$.

b) Bepaal of ϕ,ψ,π reële endomorphismen zijn van $\mathbb{C}_3^*$ ten opzichte van de drie bovengenoemde bases van $\mathbb{C}_3^*$.

V.2.4 Zij W het reële deel van de $\mathbb{C}$-vectorruimte ($\mathbb{C}_3^*$, [(1+i,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]). Schrijf de vectoren (1,0,0), (i,i,1), (1+i,1+i,1) in de vorm b + i c met $b \in W$, $c \in W$.

V.2.5 Zij de vector $b \in \mathbb{C}_4^*$ gegeven door

$$b = (1+i,1+i,1-2i,3+i).$$

a) Wat is de complex geadjungeerde vector van b ten opzichte van de basis

[(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)].

b) Idem ten opzichte van de basis

[(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)].

c) Idem ten opzichte van de basis

[(1,0,0,0), (i,i,0,0), (1,1,1,0), (0,0,0,i)].

V.2.6 Laten a en b twee vectoren uit $\mathbb{C}_3^*$ gegeven zijn door

$$a = (i,2,-i), \quad b = (1+i,-2i,5).$$

Bepaal het hermitisch inproduct $\pi(a,b)$ in

($\mathbb{C}_3^*$,[(1+i,i,0), (0,0,i), (0,1+2i,0)])

en in

$(\mathbb{C}_3^*, [1-i,-i,0), (0,0,-i), (0,1-2i,0)])$.

V.2.7 Zie S V.2.15.

V.2.8 Zij

$$a_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix},$$

en zij π: $\mathbb{C}_3 \amalg \mathbb{C}_3 \to \mathbb{C}$ het hermitisch inproduct in $(\mathbb{C}_3,[a_1,a_2,a_3])$. Bepaal een element $x \in \mathbb{C}_3$ dat voldoet aan de drie betrekkingen

$$\pi(b_1,x) = i, \quad \pi(b_2+a_1+b_3,x) = 0, \quad \pi(a_1+a_2+b_1,x) = 1;$$

alsmede het element $y \in \mathbb{C}_3$ dat voldoet aan

$$\pi(y,b_1) = i, \quad \pi(y,b_2+a_1+b_3) = 0, \quad \pi(y,a_1+a_2+b_1) = 1.$$

V.2.9 Bewijs:

a) $\overline{A}\overline{B} = \overline{AB}$, waarin A en B (n×n)-matrices uit $\mathbb{C}$ zijn.

b) $(AB)^H = B^H A^H$, waarin A en B (n×n)-matrices uit $\mathbb{C}$ zijn.

c) Als A een hermitische (n×n)-matrix uit $\mathbb{C}$ is en Q een willekeurige (n×n)-matrix uit $\mathbb{C}$, dan is $Q^H AQ$ weer hermitisch.

d) Alle eigenwaarden van de matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 32-i & 14+6i \\ 32+i & 97 & 29+4i \\ 14-6i & 29-4i & 111 \end{pmatrix}$$

zijn reëel.

V.2.10 Zij $[e_1,\ldots,e_n]$ de standaardbasis van $\mathbb{C}_n$ en π: $\mathbb{C}_n \amalg \mathbb{C}_n \to \mathbb{C}$ het hermitisch inproduct in $(\mathbb{C}_n,[e_1,\ldots,e_n])$. Zij a een vaste vector in $\mathbb{C}_n$, $a \neq 0$, $a = \alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n$.
Zij de afbeelding ϕ: $\mathbb{C}_n \to \mathbb{C}_n$ gegeven door

$\phi(x) = x + \pi(a,x)a.$

a) Bewijs dat ϕ een $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{C}_n, [e_1, \dots, e_n]) \xrightarrow{A} (\mathbb{C}_n, [e_1, \dots, e_n]).$$

c) Bewijs dat A hermitisch is.

d) Bepaal Ker(ϕ).

e) Bewijs dat a een eigenvector is van ϕ en bepaal de corresponderende eigenwaarde.

f) Bewijs dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde van ϕ is en bewijs dat er bij deze eigenwaarde precies n-1 onafhankelijke eigenvectoren zijn.

§ V.3. Reële matrices en inwendige producten

V.3.1 Voor elk tweetal vectoren a en b uit $\mathbb{R}_3$ noteren we $\langle a,b \rangle$ voor het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

a) Bepaal twee lineair onafhankelijke $x,y \in \mathbb{R}_3$ zodat $\langle u,x \rangle = 0$, $\langle u,y \rangle = 0$ met $u = e_1 + e_2 + e_3$.

b) Toon aan dat het tupel [u,x,y] lineair onafhankelijk is.

V.3.2 Zie opgave S V.3.8.

V.3.3 Laat $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$. Bepaal in welke van de volgende gevallen $\phi: \mathbb{R}_2 \sqcap \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ een bilineaire functie is. Welke bilineaire functie is symmetrisch? Welke is anti-symmetrisch?

a) $\phi(u,v) = 2u_1v_2 - 3u_2v_1$

b) $\phi(u,v) = u_1 + v_2$

c) $\phi(u,v) = 3u_2v_2$

d) $\phi(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$

e) $\phi(u,v) = u_1u_2 + v_1v_2$

f) $\phi(u,v) = 1$

g) $\phi(u,v) = 0$

h) $\phi(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2.$

V.3.4 Stel voor de functies ϕ uit a, c, d, h van V V.3.3 de matrix op die voorkomt in de notatie

$$\phi = (\mathbb{R}_1, [e_1,e_2]) \amalg (\mathbb{R}_2, [e_1,e_2]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

en ga nog eens via de matrix na of ϕ symmetrisch is.

V.3.5 Gegeven is de functie ϕ: $\mathbb{R}_2 \amalg \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\phi(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_2$ voor alle

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2.$$

a) Bewijs dat ϕ een bilineair functie op $\mathbb{R}_2$ is.

b) Bepaal de matrix A en B in

$$\phi = (\mathbb{R}_2, [a_1,a_2] \amalg (\mathbb{R}_1, [a_1,a_2]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi = (\mathbb{R}_2, [b_1,b_2] \amalg (\mathbb{R}_2, [b_1,b_2]) \xrightarrow{B} \mathbb{R}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Bepaal de matrix S in

$$id_{\mathbb{R}_2} = (\mathbb{R}_2, [a_1,a_2]) \xrightarrow{S} (\mathbb{R}_2, [b_1,b_2])$$

en ga na dat $A = S^TBS$.

V.3.6 Zie opgave S V.3.20.

V.3.7 Laat ϕ een bilineaire functie zijn op de $\mathbb{F}$-vectorruimte V met bases $[a_1,\ldots,a_n]$ en $[b_1,\ldots,b_n]$ en laat A en B matrices zijn zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \amalg (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R},$$

$$\phi = (V,[b_1,\ldots,b_n]) \amalg (V,[b_1,\ldots,b_n]) \xrightarrow{B} \mathbb{R}.$$

Zij verder de matrix S gegeven door

$$id_V = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{S} (V,[b_1,\ldots,b_n]).$$

Bewijs dat $A = S^TBS$.

V.3.8 Voor $x, y \in \mathbb{R}_3$ stelt $< x,y >$ het inwendig product voor in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$; a en b zijn vectoren in $\mathbb{R}_3$.

a) Als voor alle $x \in \mathbb{R}_3$ geldt $< a,x > = < b,x >$, dan is $a = b$. Toon dit aan.

b) Definieer de functie ϕ: $\mathbb{R}_3 \ \Pi \ \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ door $\phi(x,y) =$ $= < a,x > < b,y >$. Waaraan moeten a en b voldoen opdat ϕ een symmetrische bilineaire functie op $\mathbb{R}_3$ is?

V.3.9 Zij $r = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \in \mathbb{R}_3$ en $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding gegeven door

$$\phi(x) = \frac{1}{9} < x,r > r,$$

waarin $< >$ het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ is.

a) Toon aan dat $\phi^2 = \phi$.

b) Bepaal de eigenwaarden van ϕ en de bijbehorende eigenvectoren.

c) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

V.3.10 Zij V een 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Beschouw de functie ϕ: $V \ \Pi \ V \to \mathbb{R}$, die als volgt gedefinieerd is: Als $x, y \in V$, zeg:

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3,$$

$$y = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3$$

dan is per definitie

$$\phi(x,y) = x_1y_1 + \frac{1}{3}x_2y_2 + \frac{1}{5}x_3y_3 + x_1y_2 + \frac{2}{3}x_1y_3 + \tfrac{1}{2}x_2y_3$$

a) Is ϕ een bilineaire functie op V?

b) Is ϕ een symmetrische bilineaire functie?

c) Is ϕ een positief definiete functie?

d) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (V,\ [a_1,a_2,a_3])\ \Pi\ (V,\ [a_1,a_2,a_3]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

e) Bepaal A^{-1}.

f) Wat is de door A^{-1} geïnduceerde bilineaire functie ψ (t.o.v. de basis $[a_1,a_2,a_3]$)?

g) Ga na of ψ symmetrisch en/of positief definiet is.

V.3.11 Zie S V.3.23. Ga na of $[a_1,a_2,a_3]$ een orthogonaal 3-tupel is in $(V,[b_1,b_2,b_3])$ en in $(V,[a_1,a_2,a_3])$.

V.3.12 Zie opgave S V.3.25.

V.3.13 Zij V een 3-dimensionale $\mathbb{R}$- vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Zij

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 5a_2 + 2a_3, \\ b_2 &= 2a_1 - a_3, \\ b_3 &= a_1 + a_2 + 2a_3. \end{aligned}$$

a) Is $[b_1,b_2,b_3]$ een orthogonaal 3-tupel in $(V,[a_1,a_2,a_3])$?

b) Is $[a_1,a_2,a_3]$ een orthogonaal 3-tupel in $(V,[b_1,b_2,b_3])$?

c) Bepaal getallen $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ zodat $[\lambda_1 b_1,\lambda_2 b_2,\lambda_3 b_3]$) een orthonormaal 3-tupel in $(V,[a_1,a_2,a_3])$ is.

V.3.14 Beschouw in $\mathbb{R}_3$ de basis $[a_1,a_2,a_3]$ met

$$a_1 = e_1 + e_3,\quad a_2 = -e_1 - e_2,\quad a_3 = e_3.$$

(i) Ga na of de volgende tupels orthogonaal zijn in $(\mathbb{R}_3,\ [a_1,a_2,a_3])$.

a) $[a_1,a_2,a_3]$.

b) $[a_1,a_2,a_1+a_3]$.

c) $[-e_2+e_3,\ 2e_1+e_2+e_3]$.

d) $[e_1+2e_3,\ e_1,\ -e_1 -e_2]$.

(ii) Beschouw de orthogonale 2-tupels in $(\mathbb{R}_3,\ [a_1,a_2,a_3])$:

$$[-e_1-e_2+e_3,\ -e_1-e_2-e_3] \quad \text{en} \quad [e_1-3e_2+4e_3,7e_1+4e_2+3e_3].$$

Vul deze 2-tupels aan tot orthogonale 3-tupels van $(\mathbb{R}_3,\ [a_1,a_2,a_3])$.

V.3.15 Gegeven is de lineaire deelruimte

$$V = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

van $\mathbb{R}_3$ met $a = e_1 + e_3$, $b = e_2 - e_3$. Zij verder gegeven de vector $d = 3e_1$.

a) Ga na dat $d \notin V$.

b) Bepaal een vector $c \in \mathbb{R}_3$, zodat $< c,v > = 0$ voor elke $v \in V$; $< >$ is het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

c) Ga na dat $[a,b,c]$ een basis voor $\mathbb{R}_3$ is en bepaal λ, μ en ν zodat $d = \lambda a + \mu b + \nu c$. Noem $x = \lambda a + \mu b$, met de gevonden λ en μ.

d) Toon aan dat x het element van V is waarvoor $\| x - d \|$ minimaal is; hierin is $\| v \|$ de norm van de vector v in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

V.3.16 Beschouw het lineaire stelsel vergelijkingen

$$S: \begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 3 \\ x \phantom{{}+y} + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 0. \end{cases}$$

a) Ga na dat dit stelsel geen oplossing heeft.

b) Beschouw nu de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$$

waarin A de matrix van het lineaire stelsel S is.
Bepaal $\mathrm{Im}(\phi)$ en $\mathrm{Ker}(\phi)$. Merk op dat $\mathrm{Im}(\phi) = V$, V uit V V.3.15.

c) Bepaal een tupel $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ dat "zo goed mogelijk" voldoet aan het stelsel S; "zo goed mogelijk" in de zin dat het tupel zó gekozen wordt dat

$$\left\| A \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \right\|$$

minimaal is; hierin is $\| \ \|$ de norm in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.
Is er één zo'n tupel?

d) Ga het verband na met V V.3.15.

V.3.17 Beschouw in $\mathbb{R}_4$ de vectoren $b_1 = \frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$ en $b_2 = \frac{1}{3}(2e_1-2e_2+e_4)$. Zij $< \ >$ het inwendig product in $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4])$.

a) Ga na dat $[b_1,b_2]$ orthonormaal is in $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4])$.

b) Breid het tupel $[b_1,b_2]$ uit tot een orthonormale basis $[b_1,b_2,b_3,b_4]$ van $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4])$.

V.3.18 Zij V een $\mathbb{R}$- vectorruimte V met basis $[a_1,\dots,a_n]$ en $< \ >$ en $\| \ \|$ het inwendig product, respectievelijk de norm in $(V,[a_1,\dots,a_n])$. Bewijs, als x en y elementen van V zijn, dat

a) $\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2$ dan en slechts dan als $< x,y > = 0$;

b) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \|x \|^2 + 2 \| y \|^2$;

c) zij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $y \neq 0$; $\| x - \alpha y \|$ is minimaal voor $\alpha =$ $= < x,y >/\| y \|^2$; voor deze α is $< x-\alpha y,y > = 0$.

Geef een geometrische interpretatie van de beweringen in a), b) en c).

V.3.19 Zij V een $\mathbb{R}$- vectorruimte met basis $[a_1,\dots,a_n]$ en W een lineaire deelruimte van V. Zij $< \ >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\dots,a_n])$. Bewijs dat er een $\mathbb{R}$- lineaire deelruimte U van V bestaat met de volgende eigenschappen:

a) $U \cap W = \{0\}$;

b) $V = U + W$ (voor deze notatie zie V II.3.14);

c) voor elk paar (u,w) met $u \in U$, $w \in W$ is $< u,w > = 0$.

U wordt wel het <u>orthogonale complement</u> van W in $(V,[a_1,\dots,a_n])$ genoemd. <u>Notatie</u>: $U = W^{\perp}$ (spreek uit: W-loodrecht), m.a.w.

$$W^{\perp} = \{w | w \in V, \ < w,u > = 0 \text{ voor alle } u \in W\}.$$

V.3.20 a) Bewijs dat de verzameling $W^{\perp}$ uit V V.3.19 een lineaire deelruimte is van V.

b) Bewijs voorts dat $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

V.3.21 Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}_4$ opgespannen door het tupel $[b_1,b_2]$ uit V V.3.17. Bepaal $W^{\perp}$.

V.3.22 Beschouw het $\mathbb{R}$- lineaire endomorphisme $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ gegeven door

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Bewijs dat ϕ een orthonormaal endomorphisme is van $(\mathbb{R}_3, [e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3])$ maar niet van $(\mathbb{R}_3, [e_1, e_2, e_3])$.

b) Bewijs dat A equivalent is met een orthonormale matrix B.

c) Geef een reguliere matrix S, zodat $S^{-1}AS$ een orthonormale matrix is.

V.3.23 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Zij ϕ: $V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V en A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, zodat geldt

$$\phi = (V, [a_1, \ldots, a_n] \xrightarrow{A} (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

Stel, er is een basis $[b_1, \ldots, b_n]$ van V, zodat ϕ een orthonormaal endomorphisme is van $(V, [b_1, \ldots, b_n])$. Toon aan dat $|\det(A)| = 1$.

V.3.24 In $\mathbb{R}_2$ zijn gegeven de vectoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geef een basis $[a_1, a_2]$ (met $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2$) voor $\mathbb{R}_2$, zodat $[b_1, b_2]$ een orthogonaal tupel is in $(\mathbb{R}_2, [a_1, a_2])$.

b) Geef een basis $[a_1, a_2]$ (met $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2$) voor $\mathbb{R}_2$, zodat $[b_1, b_2]$ een orthonormaal tupel is in $(\mathbb{R}_2, [a_1, a_2])$.

V.3.25 Gegeven is de bilineaire functie ϕ op $\mathbb{R}_3$ gegeven door

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1, e_2, e_3]) \amalg (\mathbb{R}_3, [e_1, e_2, e_3]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bewijs dat ϕ een positief definiete symmetrische bilineaire functie is.

b) Geef de matrix B in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3] \, \Pi \, (\mathbb{R}_3, [a_1,a_2,a_3]) \overset{B}{\to} \mathbb{R}$$

met $a_1 = e_1$, $a_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_2$, $a_3 = e_1 - e_3$.

V.3.26 Beschouw in $\mathbb{R}_4$ de vectoren

$$a = e_1 + e_3, \quad b = e_1 + e_2 + \tfrac{1}{2}e_3.$$

(i) Schrijf b in de vorm $b = b_1 + b_2$, waarbij $b_1 = \alpha_1 a$ $(\alpha_1 \in \mathbb{R})$ en $[b_2,a]$ een orthogonaal tupel van $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4])$ is.

(ii) Schrijf b in de vorm $b = b_1' + b_2'$, waarbij $b_1' = \alpha_1' a(\alpha_1' \in \mathbb{R})$ en $[b_2',a]$ een orthogonaal tupel van $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4])$ is.

(iii) Geef een basis $[c_1,c_2,c_3,c_4]$ van $\mathbb{R}_4$, zodat $[a,b]$ een orthogonaal tupel in $(\mathbb{R}_4, [c_1,c_2,c_3,c_4])$ is.

V.3.27 Zie opgave S V.3.45.

V.3.28 Zie opgave S V.3.46.

V.3.29 (i) Beschouw in $\mathbb{R}_4$ de basis $[b_1,b_2,b_3,b_4]$ gegeven door

$$b_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad b_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad b_3 = e_1 + e_2,$$

$$b_4 = e_4.$$

Zoek een basis $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ voor $\mathbb{R}_4$ die orthonormaal is in $(\mathbb{R}_4, [e_1,e_2,e_3,e_4])$, zodat de respectievelijke tupels

$$[b_1], \quad [b_1,b_2], \quad [b_1,b_2], \quad [b_1,b_2,b_3], \quad [b_1,b_2,b_3,b_4]$$

dezelfde lineaire deelruimten opspannen als de tupels

$$[a_1], \quad [a_1,a_2], \quad [a_1,a_2,a_3], \quad [a_1,a_2,a_3,a_4] .$$

(ii) Dezelfde vraag als $b_1 = e_1$, $b_2 = e_1 + e_2$, $b_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

V.3.30 Beschouw het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme ϕ: $\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ dat gegeven wordt door

$$\begin{cases} \phi(e_1) = \frac{10}{9} e_1 + \frac{2}{9}\sqrt{2}\, e_2, \\ \phi(e_2) = \frac{2}{9}\sqrt{2}\, e_1 + \frac{17}{9} e_2, \\ \phi(e_3) = -e_3. \end{cases}$$

(i) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ.

(ii) Kies drie eigenvectoren van ϕ, zeg $[b_1,b_2,b_3]$, zodat $[b_1,b_2,b_3]$ een orthonormale basis is van $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

(iii) Geef een diagonaalmatrix D die equivalent is met de matrix A gedefinieerd door

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

(iv) Geef een reguliere matrix S zodat $D = S^{-1}AS$.

(v) Bewijs dat S orthonormaal is.

V.3.31 Beschouw de symmetrische (3×3)-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & \frac{1}{4}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 50/49 & 0 & 4\sqrt{3}/49 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4\sqrt{3}/49 & 0 & 97/49 \end{pmatrix} .$$

Bepaal orthonormale (3×3)-matrices S en T zodat

$$S^{-1}AS \quad \text{en} \quad TBT^{-1}$$

diagonaalmatrices zijn.

V.3.32 Beschouw de symmetrische (3×3)-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Bepaal orthonormale (3×3)-matrices S en T zodat

$$S^{-1}AS \quad \text{en} \quad TBT^{-1}$$

diagonaalmatrices zijn.

V.3.33 (i) Zij n een oneven natuurlijk getal. Zij A een orthonormale $(n\times n)$-matrix met $\det(A) = 1$. Bewijs dat A de eigenwaarde 1 heeft.

(ii) Het endomorphisme $\phi\colon \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \phi(e_1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e_3 \\ \phi(e_2) = -e_2 \\ \phi(e_3) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e_3 . \end{cases}$$

Geef een vector $a \in \mathbb{R}_3$ die voldoet aan $\phi(a) = a$.

V.3.34 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$. Zij $<\ >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$. Zij $\phi\colon V \amalg V \to \mathbb{F}$ een symmetrische bilineaire functie op V en A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, zodat geldt

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \amalg (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

Dan geldt: ϕ is positief definiet, dan en slechts dan als alle eigenwaarden van A positief zijn.

V.3.35 Onderzoek of de volgende bilineaire functies op $\mathbb{R}_3$ positief definiet zijn:

(i) $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_3.$

(ii) $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 9x_1y_1 - 6x_1y_2 + 2x_1y_3 - 6x_2y_1 + 8x_2y_2 - 4x_2y_3 + 2x_3y_1 - 4x_3y_2 + 4x_3y_3.$

(iii) $\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$

V.3.36 Onderzoek van de volgende bilineaire functies ϕ op $\mathbb{R}_3$ of zij symmetrisch en positief definiet zijn. Zo ja, bepaal een basis $[b_1,b_2,b_3]$ voor $\mathbb{R}_3$, zodat deze symmetrische positief definiete functie het inwendig product is in $(V,[b_1,b_2,b_3])$.

$$\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}) =$$

(i) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 3x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3,$

(ii) $3x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 +$
$+ 3x_3y_3.$

V.3.37 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$. Zij A een $(n\times n)$-matrix en ϕ: $V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme, zodat geldt

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots,a_n]).$$

Zij ϕ^T: $V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme gedefineerd door

$$\phi^T = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A^T} (V,[a_1,\ldots,a_n]).$$

Zij $< \; >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$.

(i) Bewijs dat voor ieder tweetal vectoren c, d $\in$ V geldt:

$$< \phi^T(c), d > = < c, \phi(d) >.$$

(ii) Bewijs dat voor ieder tweetal vectoren x, y $\in$ V geldt

$$< \phi^T \circ \phi(x), y > = < \phi(x), \phi(y) >.$$

(iii) Ga na of de bilineaire functie σ: $V \,\Pi\, V \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\sigma = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \;\Pi\; (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A^TA} \mathbb{R}$$

positief definiet is.

(iv) Toon aan dat de eigenwaarden van de matrix A^TA reëel en niet-negatief zijn.

V.3.38 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$ en zij $<\ >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$. Een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme $\phi: V \to V$ heet <u>symmetrisch</u> als

$$<\phi(c),\ d> \ = \ <c,\ \phi(d)>$$

voor ieder tweetal vectoren $c,\ d \in V$.

V.3.39 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$. Zij A een $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ en zij $\phi: V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme gegeven door

$$\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,\ldots,a_n]).$$

Zij $<\ >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$. Bewijs dat ϕ symmetrisch is dan en slechts dan als A symmetrisch is.

V.3.40 Toon aan dat een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme $\phi: V \to V$ symmetrisch is dan en slechts dan als $\phi = \phi^T$ (waar ϕ^T in V V.3.37 is gegeven).

V.3.41 Zie opgaven S V.3.41 en S V.3.42. Ga ook na dat uit de bewering van S V.3.42 volgt dat $\|\phi(a)\| = \|a\|$ voor elke $a \in V$, als $\|\ \|$ de norm in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$ is.

V.3.42 Toon aan dat de eigenwaarden van een orthonormale $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ voldoen aan $|\lambda| = 1$; als A bovendien symmetrisch is toon dan aan dat $\lambda = \pm 1$.

V.3.43 Gegeven is een $(n\times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$. Vat de kolommen $k_1,\ldots k_n$ van A op als elementen uit $(\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n])$. Bewijs dat A orthonormaal is dan en slechts dan als $[k_1,\ldots,k_n]$ een orthonormaal tupel in $(\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n])$ is. Analoog voor rijen.

V.3.44 Zij $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme gegeven door

$$\phi(x) = <a,x>b - <b,x>a,$$

waarin < > het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ is en $[a,b,c]$ een orthonormaal tupel is in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

(i) Ga na of ϕ een symmetrisch endomorphisme is.

(ii) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [a,b,c]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [a,b,c]).$$

(iii) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ.

(iv) Bewijs dat $\phi^3 = -\phi$.

V.3.45 Bepaal een orthonormale (3×3)-matrix waarvan de eerste rij een veelvoud is van $(1,1,1)$. Bepaal daarna de eigenwaarden van de gevonden matrix. Verifieer of inderdaad de reële eigenwaarden $\pm$ 1 zijn en dat de overige in absolute waarde 1 zijn (zoals beweerd in V V.3.42).

V.3.46 Zij gegeven de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthonormale basis $[b_1,b_2,b_3]$ van $\mathbb{R}_3$ die geheel uit eigenvectoren bestaat. Bepaal een matrix P zodat P^TAP de diagonaalvorm heeft.

V.3.47 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\dots,a_n]$. Zij < >, $\|\ \|$ het inwendig product, respectievelijk de norm, van $(V,[a_1,\dots,a_n])$. Gegeven is verder een orthonormaal tupel $[b_1,\dots,b_n]$ in $(V,[a_1,\dots a_n])$.

Bewijs:

(i) Voor elke $v \in V$ is

$$v = \langle v,b_1 \rangle b_1 + \dots + \langle v,b_n \rangle b_n.$$

(ii) Als u orthogonaal is ten opzichte van alle b_i dan is $u = 0$.

(iii) Voor elke $v \in V$ is

$$\| v \|^2 = \sum_{i=1}^{n} < v, b_i >^2 .$$

V.3.48 Bepaal voor de lineaire deelruimte W van $\mathbb{R}_4$ die opgespannen wordt door $[u_1, u_2, u_3]$ met

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

een orhtonormale basis $[v_1, v_2, v_3]$. Bepaal tevens $W^{\perp}$.

V.3.49 Ga na of de volgende matrices orthonormaal zijn:

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

V.3.50 Geef een classificatie van de orthonormale endomorphismen van $\mathbb{E}_2$ door na te gaan welke mogelijkheden er zijn voor de eigenwaarden. Geef ook een geometrische interpretatie voor elk van de mogelijkheden.

V.3.51 Geef ook een classificatie van de orthonormale endomorphismen van $\mathbb{E}_3$ met een meetkundige interpretatie.

V.3.52 In $\mathbb{R}_3$ zijn gegeven de vectoren $a \neq 0$, b en c. Er geldt voor elke $x \in \mathbb{R}_3$

$$< a, x >^2 = < b, x >^2 + < c, x >^2$$

met $< \ >$ het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1, e_2, e_3])$. Toon aan dat $[a, b, c]$ een lineair afhankelijk tupel is.

V.3.53 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ en ϕ: V $\to$ V het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme gegeven door

$$\phi(a_1) = a_1 + a_2, \quad \phi(a_2) = a_1 + a_2 + a_3, \quad \phi(a_3) = a_2 + a_3 + a_4,$$

$$\phi(a_4) = a_3 + a_4.$$

a) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3,a_4]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,a_2,a_3,a_4]).$$

b) Bewijs (zonder berekeningen) dat er een orthonormale basis in $(V,[a_1,a_2,a_3,a_n])$ is die geheel uit eigenvectoren bestaat.

c) Ga na dat de vier eigenwaarden van ϕ zijn $1 \pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$.

d) Bepaal de corresponderende eigenvectoren.

e) Bepaal de matrix S zodat $A = S^{-1}DS$, waarin D de diagonaalvorm heeft.

f) Bewijs dat $< x,\phi(y) > = < y,\phi(x) >$ voor elke $x,y \in V$, waarin $< >$ het inwendig product in $(V,[a_1,a_2,a_3,a_4])$ is.

V.3.54 Gegeven zijn twee $\mathbb{R}$-lineaire endomorphismen van de n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte V, ϕ: $V \to V$, ψ: $V \to V$. Zowel ϕ als ψ hebben n verschillende eigenvectoren. Bewijs:

a) Als ϕ en ψ dezelfde eigenvectoren hebben dan is $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

b) Als $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ dan hebben ϕ en ψ dezelfde eigenvectoren.

V.3.55 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ en ϕ: $V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme gegeven door

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3,a_4]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,a_2,a_3,a_4])$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Toon aan dat de karakteristieke veelterm van ϕ gegeven is door $\{(1-\lambda)^2 - \alpha^2\}^2$.

b) Ga na voor welke waarden van α ϕ een automorphisme van V is en bepaal voor alle α de dimensie van $Ker(\phi)$.

c) Bepaal voor alle α de eigenvectoren van ϕ.

d) Bepaal voor alle α een orthonormale matrix S, zodat SAS^{-1} een diagonaalmatrix is.

V.3.56 Gegeven zijn in $\mathbb{R}_3$ de vectoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$[e_1,e_2,e_3]$ is de standaardbasis van $\mathbb{R}_3$ en $< >$ is het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

(i) Zoek een vector $c \in \mathbb{R}_3$ zodat $< a,c > = < b,c > = 0$.
Ga na dat het tupel $[a,b,c]$ een basis voor $\mathbb{R}_3$ is.

(ii) Beschouw het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme $\phi\colon \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ gedefinieerd door

$$\phi(a) = b, \quad \phi(b) = a, \quad \phi(c) = -c.$$

Toon aan dat $\operatorname{Ker}(\phi) = \{0\}$.

(iii) Bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

(iv) Bepaal zonder berekeningen de matrix A^{-1}.

V.3.57 Als we met $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ willekeurige elementen van $\mathbb{R}_2$ aangeven dan definieren we de volgende bilineaire functies op $\mathbb{R}_2$. Ga na in welke gevallen de functies symmetrisch en in welke gevallen de functies positief definiet zijn.

a) $\phi(x,y) = \alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2$.
b) $\phi(x,y) = \alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1\beta_2 - 3\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$.
c) $\phi(x,y) = 4\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1\beta_2 - 3\alpha_2\beta_1 + 9\alpha_2\beta_2$.
d) $\phi(x,y) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - 3\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_2\beta_2$.

Bepaal in de gevallen waarin ϕ symmetrisch én positief definiet is een basis $[b_1,b_2]$ van $\mathbb{R}_2$ zodat ϕ het inwendig product is in $(\mathbb{R}_2, [b_1,b_2])$. (Gebruik eventueel een methode die afwijkt van die uit S V.3.56.)

V.3.58 Op $\mathbb{R}_3$ met standaardbasis $[e_1,e_2,e_3]$ is de bilineaire functie $\phi\colon \mathbb{R}_3 \amalg \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat ϕ een positief definiete symmetrische bilineaire functie is en zoek een basis $[b_1,b_2,b_3]$ zodat ϕ het inwendig product is in $(\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3])$.

V.3.59 Zij V de $\mathbb{R}$-lineaire vectorruimte van de polynomen in x van graad < 3, d.w.z. de verzameling van alle polynomen van de vorm $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R}$. Definieer ϕ: $V \Pi V \to \mathbb{R}$ door

$$\phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad \text{voor alle } f,g \in V.$$

a) Bewijs dat ϕ een symmetrische positief definiete bilineaire functie op V is.

b) Kies een basis $[f_1,f_2,f_3]$ van V zodat ϕ het inwendig product in $(V,[f_1,f_2,f_3])$ is.

V.3.60 Zij de bilineaire functie op een $\mathbb{R}$-vectorruimte V met basis $[a_1,a_2,a_3]$ gegeven door

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \ \Pi \ (V,[a_1,a_2,a_3]) \overset{A}{\to} \mathbb{R}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Toon aan dat ϕ een symmetrische positief definiete bilineaire functie is.

b) Ga na dat $\phi(x,y) = 0$ met $x = 2a_1 - a_2$, $y = -5a_1 + a_2 + a_3$.

c) Zoek een vector $z \in V$ zodat $\phi(x,z) = 0$ én $\phi(y,z) = 0$.

d) Bepaal een basis $[a,b,c]$ van V zodat ϕ het inwendig product in $(V,[a,b,c])$ is.

V.3.61 Gegeven is de (3×3)-matrix uit $\mathbb{R}$

$$A_{\lambda,\mu} = \lambda \begin{pmatrix} 2 & \mu & 1-\mu \\ 1-\mu & 2 & \mu \\ \mu & 1-\mu & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal λ en $\mu \in \mathbb{R}$ zodat $A_{\lambda,\mu}$ orthonormaal is.

V.3.62 Zij A de (4×4)-matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ga na of A orthonormaal is.

b) Bereken de inverse van A.

V.3.63 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$ en < > het inwendig product in $(V,[a_1,a_2,a_3])$.
Zij $\phi: V \to V$ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van V en $[a,b,c]$ een orthogonaal stelsel eigenvectoren van ϕ. Toon aan dat ϕ symmetrisch is (zie V V.3.38).

V.3.64 Van een symmetrisch endomorphisme $\phi: V \to V$ zijn de eigenwaarden niet negatief. Bewijs dat er een symmetrisch endomorphisme $\psi: V \to V$ bestaat zodat

$$\psi \circ \psi = \phi.$$

V.3.65 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi: V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V met de eigenschap $\phi \circ \phi = \phi$. Dan noemen we ϕ een <u>projectie</u>.

V.3.66 Beschouw de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ met

$$\phi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{voor elke } \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Toon aan dat ϕ een projectie is.

V.3.67 De $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ heeft als eigenwaarden 0,1 en 1 met als corresponderende eigenvectoren respectievelijk

$$2E_1 - E_2 + 2E_3, \quad 2E_1 + 2E_2 - E_3, \quad E_1 - 2E_2 - 2E_3.$$

Toon aan dat ϕ een projectie is en geef een geometrische interpretatie.

Toon aan dat ϕ symmetrisch is.

V.3.68 Bewijs dat een projectie slechts 0 en 1 als eigenwaarden kan hebben, en dat, als 0 geen eigenwaarde is, de afbeelding gelijk is aan de identieke afbeelding.

V.3.69 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$ en zij $<\ >$ het inwendig product in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$. We veronderstellen voorts dat het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme $\phi: V \to V$ een projectie is.

a) Toon aan dat $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$.

b) Bewijs dat elke vector uit V op één en slechts één manier geschreven kan worden als $v_1 + v_2$ met $v_1 \in \mathrm{Im}(\phi)$ en $v_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

c) Ga na dat de opsplitsing bedoeld in b) aangegeven kan worden met $x = \phi(x) + \{x-\phi(x)\}$.

d) Bewijs dat ϕ symmetrisch is dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi)$ het orthogonale complement van $\mathrm{Im}(\phi)$ is.

e) Zij ϕ symmetrisch, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) = r$, $r \le n$. Stel dat $[u_1,u_2,\ldots,u_n]$ een orthonormale basis is van V en dat $[u_1,\ldots,u_r]$ een orthonormale basis is van $\mathrm{Im}(\phi)$. Ga na dat voor elke $v \in V$ geldt:

$$\phi(v) = < u_1,v > u_1 + < u_2,v > u_2 + \ldots + < u_r,v > u_r$$

en bepaal de matrix A in

$$\phi = (V,[u_1,\ldots,u_n]) \xrightarrow{A} (V,[u_1,\ldots,u_n]).$$

V.3.70 Zij in $\mathbb{E}_3$ gegeven de vectoren $P = E_1 + E_2 - E_3$, $Q = E_1 + 3E_2 - 2E_3$ en het vlak $W = \{\lambda P + \mu Q \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$. Inwendig product en norm worden beschouwd in $(\mathbb{E}_3, [E_1,E_2,E_3])$. Zij $\phi: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{E}_3$ zodat W een eigenruimte van ϕ is bij de eigenwaarde 1 en $W^\perp$ een eigenruimte is bij de eigenwaarde -1.

a) Kies een orthonormale basis $[P_1,P_2,P_3]$ in $\mathbb{E}_3$ die uit eigenvectoren van ϕ bestaat en bepaal de matrix A in

$$\phi = (\mathbb{E}_3, [P_1,P_2,P_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{E}_3, [P_1,P_2,P_3]).$$

b) Geef een meetkundige beschrijving van de afbeelding.

c) Bepaal de matrix B in

$$\phi = (\mathbb{E}_3, [E_1,E_2,E_3]) \xrightarrow{B} (\mathbb{E}_3, [E_1,E_2,E_3]).$$

V.3.71 Zij A een symmetrische (3×3)-matrix met rang 1 en

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Zij

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3 [e_1,e_2,e_3])$$

het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme met

$$\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a.$$

Norm en inwendig product worden beschouwd in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$.

(i) Wat is $\mathrm{Im}(\phi)$?

(ii) Toon aan dat a een eigenvector van ϕ is.

(iii) Toon aan dat $a \in \{\mathrm{Ker}(\phi)\}^{\perp}$.

(iv) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ.

(v) Bepaal de matrix A.

AANWIJZINGEN EN/OF OPLOSSINGEN

I. Opmerkingen vooraf

§ I.1. Verzamelingen

I.1.1 a), d), e) en f) zijn juist.

I.1.2 a), e) en f) zijn juist.

I.1.3 a) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; b) $\{1,2,3,4,5,7\}$; c) $\{1,2,3,4,5,7\}$; d) $\{5\}$.

I.1.4 a) We tonen aan dat $A \cap (B \cup A) \subset A$ én $A \cap (B \cup A) \supset A$. Zie S I.1.11. Als $x \in A \cap (B \cup A)$, dan is $x \in A$ én $x \in B \cup A$, dus $x \in A$. Dus $A \cap (B \cup A) \subset A$. Neem nu $x \in A$, dan is $x \in B \cup A$, dus $x \in A \cap (B \cup A)$, zodat ook de tweede relatie bewezen is.

b) Noem $X = A \cup (B \cap C)$, $Y = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. We bewijzen eerst $X \subset Y$. Als $x \in X$, dan is $x \in A$ of $x \in B \cap C$. Als $x \in A$, dan is $x \in A \cup B$ én $x \in A \cup C$, dus $x \in Y$. Als $x \in B \cap C$, dan is $x \in B$ én $x \in C$, maar dan is ook $x \in A \cup B$ én $x \in A \cup C$, dus $x \in Y$. Het bewijs van $Y \subset X$ verloopt analoog.

I.1.5 Noem $X = A \cup (B \cap C)$, $Y = (A \cup B) \cap C$. Er moeten twee uitspraken bewezen worden: a) $A \subset C$ impliceert $X = Y$ en b) $X = Y$ impliceert $A \subset C$. Bewijs van a): $A \subset C$. Volgens V I.1.4a) is $X = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Als $A \subset C$, dan is $A \cup C = C$ (ga na), dus $X = Y$. Bewijs van b): $X = Y$. Neem $a \in A$, dan is $a \in X$, dus $a \in Y$. Maar dan is $a \in A \cup B$ én $a \in C$, dus $a \in C$.

I.1.6 2^n. Bewijs met volledige inductie.

I.1.7 a. Neen; aan q wordt geen beeld toegekend; b. Neen; r wordt aan twee elementen toegevoegd; c. Ja; $Im(f) = \{x,z\}$.

I.1.8

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
injectief	ja	ja	neen	ja	ja	ja
surjectief	ja	ja	ja	neen	neen	neen
bijectief	ja	ja	neen	neen	neen	neen
endomorphisme	neen	ja	neen	neen	neen	ja
isomorphisme	ja	ja	neen	neen	neen	neen
automorphisme	neen	ja	neen	neen	neen	neen

I.1.9 $f \circ g(z) = z^2 + z + 1$ als $z \neq 0$ en $f \circ g(0) = 0$; $g \circ f(p/q) = \mp (p+q)/p^2+2pq+q^2+1)$ als $p \neq 0$, $q \neq 0$, $g \circ f(0) = 0$.

I.1.11 De verzameling $\mathbb{N}$ zonder het element 0.

I.1.12 Neem $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$. Noem $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$. Dan is $w_1 \neq w_2$. Noem $x_1 = g(w_1)$, $x_2 = g(w_2)$. Dan is $x_1 \neq x_2$. Dus $g(f(v_1)) \neq g(f(v_2))$.

I.1.13 Bij elke $x \in X$ is er een $w \in W$ met $x = g(w)$. Er is dan ook (omdat f surjectief is) een $v \in V$ met $w = f(v)$. De samenstelling is dus ook surjectief.

I.1.14 Neem $v_1 \neq v_2$ uit V. Noem $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$, $x_1 = g(w_1)$, $x_2 = g(w_2)$. Dan is $x_1 \neq x_2$. Dus $w_1 \neq w_2$, aangezien $w_1 = w_2$ tot een tegenspraak leidt. Ook g moet injectief zijn.

I.1.15 Bij elke $x \in X$ is er een $v \in V$ met $g(f(v)) = x$, met $f(v) \in W$. Hieruit volgt de surjectiviteit van g; f hoeft niet surjectief te zijn. Neem maar $V = \{0\}$, $W = \{0,1\}$, $X = \{0\}$, $f(0) = 1$, $g(0) = g(1) = 0$. Dan is $g \circ f$ surjectief, maar f niet.

I.1.16 Noem $C = f(A \cap B)$, $D = f(A) \cap f(B)$. Er moeten twee uitspraken bewezen worden: a) $C = D$ impliceert de injectiviteit en b) f is injectief impliceert $C = D$. Bewijs van a): $C = D$ voor elke A en B. Neem x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$. Dan is $C = \emptyset$, dus $D = \emptyset = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\}$. Dus $f(x_1) \neq f(x_2)$. Bewijs van b): f injectief. We bewijzen eerst $C \subset D$. Als $C = \emptyset$, dan is $C \subset D$. Als $C \neq \emptyset$, neem dan een $c \in C$. Er is een $x \in A \cap B$ met $f(x) = c$; $x \in A$ én $x \in B$, dus $f(x) \in f(A)$ én $f(x) \in f(B)$, dus $f(x) = c \in D$. (De injectiviteit van f is niet gebruikt). Nu nog $D \subset C$. Als $D = \emptyset$ dan klaar, zo niet, neem $d \in D$. Dus $d \in f(A)$ én $d \in f(B)$. Er is dus een $a \in A$

en $b \in B$ met $f(a) = d$, $f(b) = d$. Maar f is injectief, dus $a = b$ en dus $a \in A \cap B$, zodat $f(a) \in C$, ofwel $d \in C$.

I.1.17 Neem $f(q) = q/(1+q)$, dan is $f^{-1}(q) = q/(1-q)$.

I.1.18 Neem $f(q) = q/(q-1)$ voor $q \leq 0$ en $f(q) = q + 1$ voor $q > 0$. Dan is $f^{-1}(q) = q/(q-1)$ voor $0 \leq q < 1$ en $f^{-1}(q) = q-1$ voor $q \geq 1$.

I.1.19 $A \Pi B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$.

I.1.20 a) Zij $z \in (A \cup B) \Pi X$, dan is $z = (c,x)$, met $c \in A \cup B$, $x \in X$. Dan is $z \in A \Pi X$ of $z \in B \Pi X$, dus $z \in (A \Pi X) \cup (B \Pi X)$. Voor het andere deel van het bewijs de volgorde van het bovenstaande bewijs omkeren.

b) Zij $z \in (A \cap B) \Pi (X \cap Y)$. Dan is $z = (c,w)$, $c \in A \cap B$, $w \in X \cap Y$. Dus $c \in A$ én $c \in B$, $w \in X$ én $w \in Y$, dus $z \in (A \Pi X)$ én $z \in (B \Pi Y)$ etc. Andere deel weer analoog.

I.1.21 Bepaal alle 16 elementen van $V \Pi W$ en alle 16 elementen van $f(V \Pi W)$.

I.1.22 f is surjectief, maar niet bijectief: bijvoorbeeld $f(1,2) = f(2,4)$.

I.1.23 f is surjectief, maar niet bijectief; f_q is een automorphisme, $f_q = f_q^{-1}$.

I.1.24 f is surjectief, maar niet bijectief; f_q is een automorphisme, mits $q \neq 0$; als $q \neq 0$, dan is $f_q^{-1}(p) = p/q$. Als $q = 0$ is f_q niet surjectief.

I.1.25 Noem de elementen van V: v_i, $i = 1,\ldots,N$, en die van W: w_i.

1) f is injectief, dus in $\{f(v_1), f(v_2),\ldots,f(v_N)\}$ komen geen gelijke elementen voor, dus f is surjectief. 2) Omdat f surjectief is zijn er precies N elementen $f(v_i) \in W$. Deze zijn dan noodzakelijk verschillend. Voor oneindig veel elementen: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$: bijectief, niet surjectief; $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, $f(n) = n-1$ $(n \geq 1)$ is surjectief, niet bijectief.

I.1.26 Noem $f(r_1,r_2) = (s_1,s_2)$, dan is $r_1 = (2s_1-s_2)/3$, $r_2 = (2s_2-s_1)/3$. Dus voor elk paar (s_1,s_2) is er één en slechts één paar (r_1,r_2) zo-

dat $f(r_1,r_2) = (s_1,s_2)$. Dan is f een isomorphisme en $f^{-1}(s_1,s_2) =$
$= ((2s_1-s_2)/3,(2s_2-s_1)/3)$.

I.1.27 Neen: $f(0,1) = f(\frac{1}{2},0) = (1,2)$, dus f niet bijectief.

I.1.28 Ja, $h^{-1}(s_1,s_2) = ((s_1+s_2)/2,\ (s_1-s_2)/2)$.

I.1.29 Noem $f(r_1,r_2,r_3) = (s_1,s_2,s_3)$, dan is, als $\alpha \neq 1$, $r_1 = (s_1-s_2)/(\alpha-1)$, $r_2 = (\alpha s_2+s_2-s_1-s_3)/(\alpha-1)$, $r_3 = (s_3-s_2)/(\alpha-1)$. Dus als $\alpha \neq 1$ is f een isomorphisme, als $\alpha = 1$ niet (f is niet bijectief).

I.1.30 Voor elke $\alpha \neq 1, -2$ is f een isomorphisme.

I.1.31 $\alpha\ \beta \neq 0$.

I.1.32 Ja.

§ I.2. Permutaties

I.2.1 [2,3,1,4].

I.2.2 Voor het eerste tupel: $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$; dus $\sigma^{-1}(2) = 1$, $\sigma^{-1}(3) = 2$, $\sigma^{-1}(1) = 3$; het schema van σ^{-1} is dus [3,1,2]. De overige: [1,2,3], [2,3,1], [1,3,2].

I.2.3 [1,2,3,4], [1,3,2,4], [3,1,2,4], [3,2,1,4], [2,1,3,4], [2,3,1,4],
[1,2,4,3], [1,4,2,3], [4,1,2,3], [4,2,1,3], [2,1,4,3], [2,4,1,3],
[1,4,3,2], [1,3,4,2], [3,1,4,2], [3,4,1,2], [4,1,3,2], [4,3,1,2],
[4,2,3,1], [4,3,2,1], [3,4,2,1], [3,2,4,1], [2,4,3,1], [2,3,4,1].
De inversen van de laatste rij zijn:
[4,2,3,1], [4,3,2,1], [4,3,1,2], [4,2,1,3], [4,1,3,2], [4,1,2,3].

I.2.4 $\sigma\circ\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(4) = 4$; $\sigma\circ\tau(2) = 1$, $\sigma\circ\tau(3) = 3$, $\sigma\circ\tau(4) = 2$.
Dus $\sigma\circ\tau$ heeft als schema [4,1,3,2]; $\tau\circ\sigma$ heeft als schema [4,2,1,3].

I.2.5

j / i	1	2	3	4	5	6
1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
2	σ_2	σ_1	σ_5	σ_6	σ_3	σ_4
3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_6	σ_5
4	σ_4	σ_3	σ_6	σ_5	σ_1	σ_2
5	σ_5	σ_6	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
6	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1

I.2.6 a) Noem $\rho_{ij}(v_1,v_2) = (w_1,w_2)$, met $w_1,w_2 \in V$. Dan is $\sigma_i(v_1) = w_1$, $\sigma_i^{-1}(w_1) = v_1$. Bij elk paar (w_1,w_2) kunnen we dus één en slechts één paar (v_1,v_2) vinden (met $v_1 = \sigma_i^{-1}(w_1)$, $v_2 = \sigma_j^{-1}(w_2)$) zodat $\rho_{ij}(v_1,v_2) = (w_1,w_2)$. Dan is ρ_{ij} een automorphisme.

b) Ga na dat τ surjectief is, door $\tau(V\Pi V)$ te bepalen. Dan is τ een isomorphisme (zie V I.1.25). Dus τ^{-1} bestaat en en daarom eveneens $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1}$. Deze samengestelde afbeelding is een afbeelding van W naar W en dus een 9-tupel. Bovendien is de samenstelling bijectief, want τ, τ^{-1} en ρ_{ij} zijn isomorphismen. Volgens S I.2.6 is dus $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1}$ een 9-permutatie.

c) De inverse van ρ_{ij} is $\rho_{ij}^{-1}(v_1,v_2) = (\sigma_i^{-1}(v_1), \sigma_j^{-1}(v_2))$. Als $\tau \circ \rho_{ij} \circ \tau^{-1}(w_1) = w_2$, dan is dus $w_1 = \tau \circ \rho_{ij}^{-1} \circ \tau^{-1}(w_2)$.

d) Alleen voor $i = j = 1$.

I.2.7 $f(V)$ bestaat uit de 4-permutaties τ met $\tau(3) = 4$.

I.2.8 [3,2,1,4], [1,3,2,4,5,6,7], [1,2,3,5,4].

I.2.9 V I.2.5: σ_2, σ_3, σ_6. Bij de 4-permutaties 6 verwisselingen. Ja.

I.2.10 $\tau^{(4)}_{3,4} \circ \tau^{(4)}_{2,3} \circ \tau^{(4)}_{1,3}$ en $\tau^{(6)}_{5,6} \circ \tau^{(6)}_{3,6} \circ \tau^{(6)}_{2,3} \circ \tau^{(6)}_{1,3}$.

I.2.11 {4,3}, {4,2}, {3,2}. {6,2}, {6,3}, {6,1}, {6,4}, {6,5}, {2,1}, {3,1}. {2,1}, {6,5}, {8,7}.
Tekens steeds -1.

I.2.12 O I.2.3 eerste rij: 1, -1, 1, -1, -1, 1; tweede rij: -1, 1, -1, 1, 1, -1.

I.2.13 a) $\sigma = \tau^{(8)}_{6,7} \circ \tau^{(8)}_{5,8} \circ \tau^{(8)}_{4,6} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{1,5}$, sign $(\sigma) = 1$, $N[\sigma] = 14$.

b) $\sigma = \tau^{(9)}_{7,8} \circ \tau^{(9)}_{6,8} \circ \tau^{(9)}_{5,9} \circ \tau^{(9)}_{4,9} \circ \tau^{(9)}_{3,6} \circ \tau^{(9)}_{2,6} \circ \tau^{(9)}_{1,3}$, sign $(\sigma) = -1$, $N[\sigma] = 17$.

c) $\sigma = \tau^{(10)}_{8,9} \circ \tau^{(10)}_{6,8} \circ \tau^{(10)}_{5,6} \circ \tau^{(10)}_{4,7} \circ \tau^{(10)}_{3,6} \circ \tau^{(10)}_{2,6}$, sign (σ) = $= 1$, $N[\sigma] = 10$.

§ I.3. Matrices: Combinatorische aspecten

I.3.1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

I.3.2 Construeer ze met behulp van S I.3.19 en O I.2.3. Er zijn dus 24 4-grepen. Het sign volgt uit S I.3.21 en O I.2.12.

I.3.3 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$.

I.3.4 Er zijn 8 roostertransformaties van $R_{2,2}$: $\Omega_1, \ldots, \Omega_8$.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(2,2)	(2,2)	(2,1)	(1,2)	(2,1)	(1,2)
(2,2)	(2,2)	(2,2)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,2)	(2,1)
(1,2)	(1,2)	(2,1)	(1,2)	(2,1)	(1,1)	(1,1)	(2,2)	(2,2)
(2,1)	(2,1)	(1,2)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(2,2)	(1,1)	(1,1)

Ω_1 is de identieke afbeelding, Ω_2 is de transpositie van $R_{2,2}$.
De eerste 4 zijn even, de andere oneven.

I.3.5 a) Aangezien σ_1 en σ_2 twee n-permutaties zijn is ρ injectief, dus ook bijectief (S I.3.29 of V I.3.25). Daarom is ρ een automorphisme.

b) Merk op dat we een n-greep $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ kunnen schrijven als $\{(1,\sigma(1)), \ldots, (n\ \sigma(n))\}$, met σ een n-permutatie; dus $w_i = (i,\sigma(i))$. Dan is $\rho(w_i) = (\sigma_1(i),\ \sigma_2 \circ \sigma(i))$; maar $\sigma_2 \circ \sigma$ is weer een n-permutatie, dus $\rho(W)$ is een n-greep.

c) Volgt uit S I.3.21 en het voorgaande.

I.3.6 Neen. Er zou moeten gelden $\rho(1,1) = (\sigma_1(1),\ \sigma_2(1)) = (1,1)$ en $\rho(1,2) = (\sigma_1(1), \sigma_2(2)) = (2,1)$.

I.3.7 Het element v_{ij} wordt veranderd in $v_{\tau(i),\sigma(j)}$.

§ I.4. Determinanten: Combinatorische aspecten

I.4.1 $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$, 5, $(-2+0-18) - (0-16+3) = -7$, 50.

I.4.2 Gebruik S I.4.18 (respectievelijk S I.4.24): det(A) = -det(A).

I.4.3 Niet de 24 4-grepen berekenen. Merk op dat de elementen van opvolgende kolommen steeds 1 verschillen. Pas S I.4.12, S I.4.15 en het vorige vraagstuk toe. Antwoord: 0.

I.4.4 0.

I.4.51 Volgens S 1.4.13 is

$$\det(f) = \frac{1}{6.12.60} \det \begin{pmatrix} 6 & 6 & 20 \\ 3 & 4 & 15 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

I.4.6 n = 1: 2, n = 2: -1, n = 3: 0. Voor n > 3 eveneens 0.

I.4.7 De elementen van corresponderende rijen in f en f^T zijn elkaars tegengestelde. Gebruik S I.4.14 en S I.4.17.

I.4.8 Alle determinanten uitrekenen, of herhaald toepassen van S I.4.12, S I.4.13 en V I.4.2 op de determinant van g.

I.4.9 $\det(f_{ij}) = \det(f)\cdot\mathrm{sign}(\sigma_i)\cdot\mathrm{sign}(\sigma_j)$.

I.4.10 Als f(1,2) = f(2,2) = 0, neem dan b = 1, a = 0. Als f(1,2) ≠ 0 neem dan b = -a f(1,1)/f(1,2) en a = 1. Als f(1,2) = 0, neem dan b = -a f(2,1)/f(2,2), etc.

I.4.11 Verwissel de kolommen zodat de eenheidsmatrix ontstaat. Voor n = 2,3 één verwisseling, voor n = 4,5 twee verwisselingen, etc. Antwoord: $\det(f_n) = (-1)^{[n/2]}$, waarin [x] het grootste gehele getal kleiner of gelijk x is.

II. Vectorruimten en lineaire afbeeldingen

§ II.1. Vectorruimten

II.1.1 a), c) en e).

II.1.2 a) niet aan (iii) voor het getal 0; b) aan alle; c) niet aan (iii); d) aan alle.

II.1.5 Ja. Het nul-element is $a_0 + a_1x + a_2x^2$ met $a_0 = a_1 = a_2 = 0$; m is commutatief, want $m(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 = (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2 = m(b_0+b_1x+b_2x^2, a_0+a_1x+a_2x^2)$; m is ook associatief en de inverse van $a_0 + a_1x + a_2x^2$ is $-a_0$.

II.1.6 Neen. Er is geen nul-element, m is niet commutatief en niet associatief. Er is geen inverse te definieren.

II.1.7 a) Ja, $m(x,y) = x + y - xy = y + x - yx = m(y,x)$. b) Ja. c) Ja, 0. d) Neen, het element 1 heeft geen inverse; de inverse van $x \neq 1$ is $x/(x-1)$.

II.1.8 Vergelijk het bewijs in S II.1.10.

II.1.9

u \ v	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$
$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$
$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$

a) Ja, $\underline{0}$.
b) Ja, volgt uit tabel.
c) Ja.

II.1.10 V is een lineaire ruimte en een vectorruimte. De eindige deelverzameling uit S II.1.29 kan zijn $\{1,x,x^2\}$.

II.1.11 V is een vectorruimte; neem $v_1 = (1,-1,0,\ldots,0)$, $v_2 = (1,0,-1,0,\ldots,0),\ldots, v_{n-1} = (1,0,\ldots,0,-1)$; alle $v_i \in V$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Zij $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in V$. Kies $\lambda_1 = -a_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$; dan is $a = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1}v_{n-1}$.

II.1.12 De binaire operatie heeft als nul-element 0, de functie met de eigenschap $f(x) = 0$, voor alle $x \in [0,1]$; de binaire operatie is commutatief want $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$, hetgeen volgt uit $f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x)$ en is associatief. Als inverse bij f nemen we $-f$. De scalaire vermenigvuldiging voldoet ook aan de gestelde eisen.

II.1.13 $x = 2$, $y = 1$.

II.1.14 $x = 4$, $y = -7$, $z = 5$.

II.1.15 a) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; b) $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ 19 \end{pmatrix}$; c) $z = 3a - 2b + 5c$; d) Neen.

II.1.16 $M = 8A + 1\frac{1}{2}B + 5C$.

§ II.2. Dimensie

II.2.3 Ja. De getallen in de lineaire combinatie zijn bijvoorbeeld 0,1,1,1.

II.2.5 Vergelijk S II.2.29 of gebruik S II.2.39.

II.2.6 Voor $a \neq 1$.

II.2.7 $a_3 + \lambda a_1 \neq 0$ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ga na). Gebruik S II.2.31.

II.2.8 Bewijs dat het nieuwe tupel lineair onafhankelijk is.

II.2.9 Neem de vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.10 a) lineair onafhankelijk; b) $5u - 2v - w = 0$.

II.2.11 a) Zij $\alpha e^{2t} + \beta t^2 + \gamma t = 0$, voor elke $t \in \mathbb{R}$ en zekere α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. Neem $t = 0$; dit geeft $\alpha = 0$; neem $t = -1$; dit geeft bovendien $\beta - \gamma = 0$; neem $t = 1$, dit geeft ook nog $\beta + \gamma = 0$, zodat $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

b) $f = h - 2g$ voor elke t; dus $[f,g,h]$ is lineair afhankelijk.

c) Neen. Veronderstel dat V wel een vectorruimte is, met dimensie $n(< \infty)$. Beschouw het tupel $[1,t,t^2,\dots,t^n]$; dit is lineair onafhankelijk, maar bestaat uit n + 1 vectoren. In tegenspraak met S II.2.40.

II.2.12 a) Er zijn getallen $\lambda_i \in \mathbb{F}$, niet alle gelijk aan 0, zodat $\lambda_0 w + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$; als $\lambda_0 = 0$ dan volgt uit het gegeven dat $\lambda_i = 0, i = 1,\ldots,n$. Dus $\lambda_0 \neq 0$. Er kan dus door gedeeld worden.

b) Neem $V = \mathbb{R}_3$ en $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $w = (0,1,1)$.

c) Neem v_1,v_2,v_3 zoals in b), maar $w = (1,1,1)$.

II.2.13 Zij $\lambda(u+v) + \mu(u-v) + \nu(u-2v+w) = 0$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{F}$. Dan is $(\lambda+\nu+\mu)u + (\lambda-\mu-2\nu)v + \nu w = 0$. Uit het gegeven volgt $\nu = 0$ en dat ook $\lambda = \mu = 0$.

II.2.14 Neen.

II.2.15 De dimensie is 4; een basis is $[1,t,t^2,t^3]$.

II.2.16 Merk op dat [a+2b,a+c,c] een basis is (S II.2.39).
(i) a + b + c = (a+2b) + (c-b); dus geen basis. (ii) Wel een basis, gebruik S II.2.31. (iii) Geen basis.

II.2.17 (iii) $a = \lambda b + \mu c$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Als $\lambda \neq 0$, dan is $b = \frac{1}{\lambda}(a-\mu c)$, in strijd met gegeven. Dus $\lambda = 0$ en $a = \mu c$. Als $\mu = 0$, dan is $a = 0$, maar $a \neq 0$. Dus $c = \frac{1}{\mu}a$.

(iv) $d = \alpha a + \gamma c$, $d = \beta b + \delta c$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{F}$. Dus $\alpha a - \beta b + (\gamma-\delta)c = 0$, zodat $\alpha = \beta = \gamma - \delta = 0$. Uit het gegeven volgt eveneens dat $\gamma \neq 0$.

II.2.18 Er zijn getallen λ_i, $i = 1,\ldots,5$, niet alle gelijk aan 0 $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 x + \lambda_5 y = 0$; $\lambda_5 \neq 0$ geeft een tegenspraak; $\lambda_4 \neq 0$ ook. [a,b,c] is lineair afhankelijk.

II.2.19 (i) $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$. (ii) $\lambda = 3$.

§ II.3. Lineaire deelruimten

II.3.1 Neen; er is geen λ zodat $a_\lambda = 0$.

II.3.2 $\lambda = -1$.

II.3.4 a) ja; b) neen; c) neen; d) ja.

II.3.5 De dimensie is 2.

II.3.6 $0 \notin U\backslash V$, dus $U\backslash V$ is geen lineaire deelruimte; $U \cup V$ is i.h.a. geen lineaire deelruimte; $U \cap V$ is wel een lineaire deelruimte.

II.3.7 Basis van U: $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$,

van W: $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right]$,

en van $U \cap W$: $\left[\begin{pmatrix}3\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\right]$.

II.3.8 De dimensie is 2, een basis is

$$\left[\begin{pmatrix}1 & -5\\-4 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\right].$$

II.3.9 Een basis is

$$\left[\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\3\\0\\-8\end{pmatrix}\right],$$

de rang van het andere tupel is 3.

II.3.10 De rang is 3.

II.3.11 De rang van [x,y,z] is 2 als $\rho(\rho^2-1) = 0$ en 3 als $\rho(\rho^2-1) \neq 0$.

II.3.12 $\alpha = 3$ en een basis is

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right].$$

II.3.13 Aangezien $D_1 \subset D_1 \cup D_2$, $D_2 \subset D_1 \cup D_2$ geldt $\dim_{\mathbb{R}}(D_1) \le \dim_{\mathbb{R}}(D_1 \cup D_2)$ en $\dim_{\mathbb{R}}(D_2) \le \dim_{\mathbb{R}}(D_1 \cup D_2)$. Als in één van de relaties het = geldt is de uitspraak bewezen, want in dat geval is $D_1 = D_1 \cup D_2$ of $D_2 = D_1 \cup D_2$ (zie S II.3.11) en dus $D_2 \subset D_1$ of $D_1 \subset D_2$. Veronderstel nu dat $\dim_{\mathbb{R}}(D_1) \le \dim_{\mathbb{R}}(D_1 \cup D_2)$ en $\dim_{\mathbb{R}}(D_2) \le \dim_{\mathbb{R}}(D_1 \cup D_2)$. Dan is er een $x \in D_1$, $x \notin D_2$ en $y \in D_2$, $y \notin D_1$. Deze x en y komen voor in $D_1 \cup D_2$, dus ook $x + y \in D_1 \cup D_2$ (want $D_1 \cup D_2$ is een lineaire deelruimte). Maar $x + y \in D_1 \cup D_2$ impliceert $x + y \in D_1$ of $x + y \in D_2$, hetgeen in beide gevallen tot een tegenspraak leidt.

II.3.15 Verifieer S II.3.1. (i) Zij $v_1, v_2 \in A + B$, dan is $v_1 = a_1 + b_1$, $v_2 = a_2 + b_2$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$; $v_1 + v_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$, met $a_1 + a_2 \in A$, $b_1 + b_2 \in B$. Dus $v_1 + v_2 \in A + B$. (ii) Analoog. (iii) A en B zijn niet leeg.

II.3.16 $U + W = \mathbb{R}_4$.

II.3.17 (i) Zij de dimensie van A en B respectievelijk n en m. Kies een basis $[b_1,\dots,b_m]$ van B en vul deze basis met $k = n - m$ vectoren $[c_1,\dots,c_k]$ aan tot een basis van A. Kies voor C de lineaire deelruimte die opgespannen wordt door $[c_1,\dots,c_k]$.

(ii) Zij $a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$; dan is $b_1 - b_2 = c_2 - c_1$, met $b_1 - b_2 \in B$, $c_1 - c_2 \in C$; dus $b_1 = b_2$ en $c_1 = c_2$, want $B \cap C = \{0\}$.

II.3.18 Zij $[e_1,\dots,e\ ]$ een basis voor $A \cap B$, $r \ge 0$, en zij $m = \dim_{\mathbb{F}}(A)$, $n = \dim_{\mathbb{F}}(B)$. Dan is $m \ge r$, $n \ge r$. Vul de basis van $A \cap B$ tot bases voor A en B. Zij $[e_1,\dots,e_r, f_{r+1},\dots, f_m]$, $[e_1,\dots,e_r, g_{r+1},\dots,g_n]$ bases voor resp. A en B. Dan is $[e_1,\dots,e_r, f_{r+1},\dots, f_m, g_{r+1},\dots,g_n]$ een basis voor A + B. Bewijs: Het tupel is een stelsel voortbrengenden van A + B. Het tupel is eveneens een lineair onafhankelijk stelsel van A + B, want als $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \dots + \beta_m f_m + \gamma_{r+1} g_{r+1} + \dots + \gamma_n g_n = 0$, dan is $\Sigma\, \gamma_i g_i = -\Sigma\, \alpha_i e_i - \Sigma\, \beta_i f_i$. Het linkerlid behoort tot B, het rechterlid tot A. Dus $\Sigma\, \gamma_i g_i \in A \cap B$, zodat er $\delta_1,\dots,\delta_r$ te vinden zijn met $\Sigma\, \gamma_i g_i = \Sigma\, \delta_i e_i$. Hieruit volgt weer $\Sigma\, \beta_i f_i + \Sigma\, (\alpha_i - \delta_i)\, e_i = 0$, zodat $\beta_i = 0$, $i = r+1,\dots,m$. Maar dan is ook $\Sigma\, \alpha_i e_i + \Sigma\, \gamma_i g_i = 0$, zodat $\alpha_i = 0$, $i = 1,\dots,r$ en $\gamma_i = 0$, $i = r+1,\dots,n$. Het tupel is dus een basis en bestaat uit r + (m-r) + (n-r) = m + n - r vectoren. Dus $\dim_{\mathbb{F}}(A+B) = m + n - r = \dim_{\mathbb{F}}(A) + \dim_{\mathbb{F}}(B) - \dim_{\mathbb{F}}(A\cup B)$.

II.3.19 a) Neen. b) Rechte lijn. c) $R \in V$, $S \notin V$. d) $\{\lambda Q \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. e) $W = \{D + \lambda T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; T is de richtingsvector. f) $\{A + \lambda\,(A-B) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. g) $U /\!/ W$: er zijn geen $\lambda,\mu,\alpha \in \mathbb{R}$ zodat: $R + \lambda Q + \mu T = D + \alpha T$. $V\subset U$: voor elke $\gamma \in \mathbb{R}$ is er een λ en $\mu \in \mathbb{R}$ zodat: $R + \lambda Q + \mu T = P + \gamma Q$. h) $x - y + z = -1$. i) $M = \{E_1 + \lambda\,(E_2-E_1) + \mu(E_3-E_1)\}$; $x + y + z = 1$. j) Zoek 3 punten van het vlak, bijvoorbeeld $2E_1$, $-6E_3$ en $\frac{3}{2}E_2$, zodat $N = \{2E_1 + \lambda\,(2E_1 + 6E_3) + \mu\,(2E_1 - \frac{3}{2}E_2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; $3x + 4y - z = 0$; $3x + 4y - z = 12$. k) evenwijdig. l) $\frac{1}{11}(E_1 + 17E_2 + 5E_3)$; $\frac{1}{10}(-11E_1 + 28E_2 + 19E_3)$. m) $F = \{T + \lambda P + \mu\,(T-4E_2+2E_3) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; vergelijking van F: $-6x + 3y + 4z = 4$. n) Bepaal $F' \cap M'$, met F' en M' vlakken door O evenwijdig aan F resp. M. De lineaire deelruimten F' en M' hebben als basis $[E_1+2E_2, E_1-2E_2+3E_3]$, resp. $[-E_1+E_2, -E_1+E_3]$. $F' \cap M'$ heeft als basis $[E_1-10E_2+9E_3]$. Nu nog een gezamenlijk punt van F en M zoeken: E_3. Dus $G = \{E_3 + \lambda(E_1-10E_2+9E_3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Kan ook gevonden worden door de vergelijkingen van F en M als een stelsel te beschouwen.

II.3.20 a) $V \cap W = \{\lambda(B-C) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. b) $P \cap V = \{B-A\}$, $P \cap W = \emptyset$.

§ II.4. Lineaire afbeeldingen

II.4.1 a)

$$\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}.$$

$$\phi\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1+x_2+y_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}.$$

Dus de eerste voorwaarde van S II.4.1 is geverifieerd. De tweede gaat analoog.

II.4.2 a) Neen; b) Neen; c) Neen.

II.4.3 $[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]$ is een basis voor $\mathbb{R}_2$ en dus is ϕ dan bepaald (S II.4.15).

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x - 2(y-x) = 5x - 2y$. Ker($\phi$) volgt uit $5x - 2y = 0$, dus $\text{Ker}(\phi) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 5x - 2y = 0\right\}$.

II.4.4 $\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y \\ y \end{pmatrix}$.

Een basis van Ker(ϕ) is dus

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Een basis van Im(ϕ) wordt bepaald door uit het tupel

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

een maximaal aantal lineair onafhankelijke vectoren te nemen. Een basis is dus

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Im($\psi \circ \phi$) wordt bepaald door de werking van ψ op de basis van Im(ϕ).

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dus Im($\psi \circ \phi$) bestaat uit de nul-vector.

II.4.5 Als

$$[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}]$$

een basis van $\mathbb{R}_3$ is, dan is er zo'n ϕ_α. Voor $\alpha = 1$ en $\alpha = -2$ is het tupel echter geen basis. Voor $\alpha = -2$ bestaat er geen lineaire ϕ_α, voor $\alpha = 1$ wel. Voor alle $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq 1$ is ϕ_α surjectief.

II.4.7 Neem $x \in V$; er zijn (bij deze x) α, $\beta \in \mathbb{F}$ (niet beide 0) zodat $\alpha\phi(x) + \beta\phi^2(x) = 0$. Zij $\alpha = 0$. Dan is $\beta\phi^2(x) = 0$, dus $x \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$. Neem dan $u = 0$ en $v = x$. Zij $\alpha \neq 0$, dan is $\phi(x) + \frac{\beta}{\alpha}\phi^2(x) = \phi(x+\frac{\beta}{\alpha}\phi(x)) = 0$, dus $y = x + \frac{\beta}{\alpha}\phi(x) \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Als $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$ dan is ook $y \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$; dus $x = u + v$, met $u = -\frac{\beta}{\alpha}\phi(x)$ en $v = y$.

II.4.8 Een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$ is

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]$$

en van $\mathrm{Ker}(\phi)$:

$$\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right] .$$

II.4.9

$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix};$$

kies bijv. $\lambda = x$ en $\mu = y$, dan ontstaat

$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\2x\\-y\\-4x-3y\end{pmatrix}.$$

II.4.10 a) $(3,2,1)$, $(4,0,0)$. b) $\mathrm{Ker}(\phi) = \{\lambda(2,-1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. c) Een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$ is $[(1,2,1), (0,2,1)]$. d) Niet alleen $(0,1,0)$ maar ook deze vector + vector uit $\mathrm{Ker}(\phi)$. Dus alle vectoren $x = (0,1,0) + \lambda(2,-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.4.11 Volgt uit S II.4.24 en $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) \leq 2$.

II.4.12 $[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ is een basis dus $[b_1,b_2+3b_3,b4]$ is een lineair onafhankelijk stelsel. Dus $\mathrm{Im}(\phi)$ heeft dimensie 3. Uit S II.4.24 volgt $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$. Anders: Zij $\phi(\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3) = 0$, dan is $\lambda b_1 + 3\mu b_2 + 3\mu b_3 + \nu b4 = 0$ zodat $\lambda = \mu = \nu = 0$.

II.4.13 Als $\lambda_1 = -2\lambda_3$ en $\lambda_2 = -3\lambda_3$. Als $\lambda_3 = 0$.

II.4.14 Voor elke $\lambda \in \mathbb{F}$ is $[a_1,a_2,a_3]$ een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$. Voor elke $\lambda \in \mathbb{F}$ is $[(\lambda-2)a_1-a_2+(1-\lambda)a_3+a_4]$ een basis voor $\mathrm{Ker}(\phi)$.

II.4.15 De uitspraak voor ϕ volgt uit S II.4.23 en S II.4.27. Voor ψ is de uitspraak waar dan en slechts dan als de dimensies van V en W gelijk zijn.

II.4.16 (i) Zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi)$; dan is $\phi(x) = 0$ en er is een $y \in V$ met $\phi(y) = x$. Dan is $\phi^2(y) = \phi(x)$, maar $\phi^2 = \phi$, dus $x = \phi(x)$ $(= 0)$.

(ii) Voor elke $x \in V$ geldt $x = x - \phi(x) + \phi(x)$, met $x - \phi(x) \in \mathrm{Ker}(\phi)$ en $\phi(x) \in \mathrm{Im}(\phi)$.

II.4.17 Zij $x \in \phi(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi))$. Dan is $x \in \mathrm{Im}(\phi)$ en er is een $y \in \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$ met $\phi(y) = x$. Ook geldt $\psi \circ \phi(y) = 0$; d.w.z. $\psi(\phi(y)) = \psi(x) = 0$, dus $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Dan is dus $x \in \mathrm{Im}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$. Zij nu $x \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\phi)$; dan is $\psi(x) = 0$ en er is een $y \in V$ met $\phi(y) = x$; dus $\psi(x) = \psi(\phi(y)) = 0$, dus $y \in \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$ zodat $x = \phi(y) \in \phi(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi))$.

II.4.18 Zij $\lambda\phi(x) + \mu\psi(x) = 0$ voor zekere $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dan is $(\lambda+\mu)\phi(x) + \mu x = 0$, dus $\mu = 0$ en ook $\lambda = 0$.

II.4.19 a) Ja.

b) Als ϕ een isomorphisme is, dan is $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_3$. ϕ is een isomorphisme d.e.s.d. als $\alpha\beta \neq 0$. Een basis van $V \cap \mathrm{Im}(\phi)$ is dan bijvoorbeeld de basis van V. Er volgen nu nog 3 gevallen: (i) $\alpha = \beta = 0$, (ii) $\alpha = 0, \beta \neq 0$, (iii) $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Een basis van $\mathrm{Im}(\phi) \cap V$ is

$$\text{(i) } [\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}], \quad \text{(ii) } [\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}] \ (V = \mathrm{Im}(\phi)), \quad \text{(iii) } [\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}].$$

II.4.20 (i) Als $\alpha(\alpha-1) \neq 0$ dan is $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)) = 0$, als $\alpha(\alpha-1) = 0$ dan is de dimensie 1.

(ii) Als $\alpha(\alpha-1) \neq 0$ dan is ϕ_α een isomorphisme; er is dan één en slechts één oplossing, te weten

$$\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}-\alpha\\2\\-2-\alpha\end{pmatrix}.$$

Als $\alpha = 0$ dan is er geen oplossing, als $\alpha = 1$ dan is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de vector

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

een oplossing. Merk op dat voor $\alpha = 1$ $\mathrm{Ker}(\phi)$ wordt opgespannen door

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

II.4.21 (i) Draaiing van $\mathbb{E}_2$ over $3\pi/2$; (ii) draaiing over 2π, de identieke afbeelding; (iii) draaiing over $\frac{1}{4}\pi$, terwijl de lengte van de vector wordt vergroot met een factor $\sqrt{2}$; (iv) noem de afbeelding $\phi, \phi(E_1) = 0$, $\phi(E_2) = -2\,E_1$, dus elke vector wordt een veelvoud van E_1; merk op dat $\phi^2 = 0$; (v) noem de afbeelding ψ, $\psi(E_1) = E_2$, $\psi(E_2) = 0$.

II.4.22 (i) Zij $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$, dan is $\phi(\lambda a+\mu b+\nu c) = 0$, dus $\lambda a - \mu b = 0$, dus $\phi(\lambda a-\mu b) = \lambda a + \mu b = 0$. Er volgt nu $\lambda = \mu = \nu = 0$.
(ii) $a - 3b$.

II.4.23 (i) Zij $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. Zij $x \in V$, noem $y = \phi(x)$; $y \in \mathrm{Im}(\phi)$, dus $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$; dus $\phi^2(x) = \phi(\phi(x)) = \phi(y) = 0$. Zij $\phi^2 = 0$, neem $x \in \mathrm{Im}(\phi)$. Er is dan een $y \in V$ met $\phi(y) = x$. Dan is $\phi(x) = \phi^2(y) = 0$, dus $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$.
(ii) $\phi\binom{1}{0} = 0$, $\phi\binom{0}{1} = \binom{1}{0}$.

II.4.24 $\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.4.25 (iii) $\mathrm{Ker}(\delta)$ is de lineaire deelruimte van F met $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; voor $\mathrm{Im}(\delta)$ geldt $\alpha_4 = 0$; $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$ en voor $\mathrm{Im}(\pi)$ is $\alpha_0 = 0$.

(iv) $\delta(\pi(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3)) = \delta(\alpha_0x+\frac{1}{2}\alpha_1x^2+\frac{1}{3}\alpha_2x^3+\frac{1}{4}\alpha_2x^4) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3$; $\pi \circ \delta(1) = \pi(0) = 0 \neq 1$.

II.4.26 (i) Zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dan is $\phi(x) = 0$ en eveneens $\phi^2(x) = 0$, dus $x \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$.

(ii) Zij $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi^2)$ en $x \in \mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi)$. Er is dan een $y \in V$ met $\phi(y) = x$ en er geldt eveneens $\phi(x) = 0$, zodat $\phi(x) = \phi^2(y) = 0$; dus $y \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$, dus $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dus $\phi(y) = x = 0$. Zij nu $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$ en zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$. Als aangetoond is dat $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ dan volgt (met i)) het gestelde. Welnu, noem $y = \phi(x)$. Dan is, wegens $x \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$, $\phi(y) = 0$, dus $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$ maar ook is $y \in \mathrm{Im}(\phi)$, dus $y = 0$.

II.4.27 (i) Zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$, dan is $\phi^2(x)$ en $\phi^3(x) = 0$; dus $\phi(x) = 0$, zodat $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$. De rest volgt uit V II.4.26 (i).

(ii) $\mathrm{Im}(\phi^2) \subset \mathrm{Im}(\phi)$ geldt voor elk $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme. We bewijzen nu $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(id_V-\phi^2)$. Zij $x \in \mathrm{Im}(\phi)$, dan is er een $y \in V$ met $\phi(y) = x$. Verder is $(id_V-\phi^2)(x) = x - \phi^2(x) = \phi(y) - \phi^3(y) = 0$. Dus $x \in \mathrm{Ker}(id_V-\phi^2)$. We bewijzen verder nog $\mathrm{Ker}(id_V-\phi^2) \subset \mathrm{Im}(\phi^2)$. Zij $x \in \mathrm{Ker}(id_V-\phi^2)$, dan is $x = \phi^2(x)$, dus $x \in \mathrm{Im}(\phi^2)$. Nu is alles bewezen.

(iii) volgt uit (i) en V II.4.26;

(iv) Neem $u = \phi^2(v)$ en $w = v - \phi^2(v)$. Zie ook V II.3.17.

II.4.28 (i) $\mathrm{Ker}(\phi) = \{\mu(a_n-2a_{n-1}) \mid \mu \in \mathbb{F}\}$, $\mathrm{Ker}(\phi^2) = \{\mu(a_{n-1}-2a_{n-2}) + \nu(a_n-4a_{n-2}) \mid \mu, \nu \in \mathbb{F}\}$, $\mathrm{Ker}(\phi^3) = \{\lambda(a_{n-2}-2a_{n-3}) + \mu(a_{n-1}-4a_{n-3}) + \nu(a_n-8a_{n-3})\} \mid \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{F}\}$.

(ii) $x = a_1+z$, waarin $z \in \mathrm{Ker}(\phi^2)$; de tweede vergelijking heeft geen oplossing.

(iii) Zij $x = \lambda_1a_1 + \ldots + \lambda_na_n$, $\phi^{n-1}(x) = (\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2^{n-1}\lambda_n)a_n$, etc.

II.4.29 (iii) $\phi(3a-b) = 3\,\phi(a) - b$; $\phi^2(3a-b) = 3\,\phi^2(a) - b = 3(b-a-\phi(a)) - b = 2b - 3a - 3\,\phi(a) = b - 3a + b - 3\,\phi(a) = b - 3a + \phi(b-3a)$. Dus $\phi(U)$ en U worden beide opgespannen door $[(3a-b), \phi(3a-b)]$.

II.4.30 (i) Aangezien σ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is geldt $\phi(x+y) = (x+y) - \sigma(x+y)a = x - \sigma(x)a + y - \sigma(y)a = \phi(x) + \phi(y)$. Evenzo geldt $\phi(\lambda x) = \lambda\,\phi(x)$.

(ii) Zij ϵ Ker(ϕ), dan is $x - \sigma(x)a = 0$, dus $x = \sigma(x)a$, zodat x een lineaire combinatie is van [a]. Dus $x \in$ Ker(σ), maar dan is $\sigma(x) = 0$, dus $x = 0a = 0$.

(iii) $\mathrm{Im}(id_{\mathbb{R}_n} - \phi)$ wordt opgespannen door [a].

(iv) ϕ heeft een inverse omdat Ker(ϕ) = {0}, zie V II.4.15. De gegeven ϕ^{-1} voldoet aan $\phi\circ\phi^{-1} = \phi^{-1}\circ\phi = id_{\mathbb{R}_n}$, namelijk $\phi^{-1}\circ\phi(x) = \phi^{-1}(x-\sigma(x)a) = (x-\sigma(x)a) + \sigma(x-\sigma(x)a)a = x$ want $\sigma(\sigma(x)a) = \sigma(x)\ \sigma(a) = 0$. Evenzo $\phi\circ\phi^{-1}(x) = x$.

II.4.31 Merk eerst op dat ϕ eenduidig gedefinieerd is omdat er bij a slechts één $b \in B$ is met $a = b + c$. Zie V II.3.17.
(ii) Ker(ϕ) = C.

II.4.32 Gebruik V II.4.15. Veronderstel Ker(ϕ) $\neq$ {0}. Dan is er een $x \neq 0$ met $\phi(x) = 0$; dus $\phi(x) - \phi^2(x) = 0$. Uit het gegeven volgt $\phi(x) - \phi^2(x) = x$. Tegenspraak.

II.4.33 Veronderstel ϕ^{-1} bestaat. Dan is $\phi(x) = \phi^{-1}\circ\phi\circ\phi(x) = \phi^{-1}\circ\phi(x) = x$, voor elke $x \in V$. Dus $\phi = id_V$. Tegenspraak.

§ II.5. Matrices en lineaire afbeeldingen

II.5.2
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\9\\30\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3, [\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}]) =$$
$$= \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3, [\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}]).$$

II.5.3
$$\begin{pmatrix}2/3\\7/3\\-11/3\\-1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4/3\\7/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix} \in [\mathbb{R}_4^*, [(1,2,1,2),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(3,0,0,0-1)]).$$

II.5.4 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ met $\lambda = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y$, $\mu = \frac{1}{3}(x-y)$. Dus
$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3, [\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}]) = \begin{pmatrix}-2\lambda+2\mu\\4\lambda+2\mu\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2x-5y\\-x+7y\end{pmatrix};$$

$\psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(\psi) = \{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_2$, $\mathrm{Im}(\psi) = \{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

II.5.5 $B = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 15 \\ 12 & -12 & -3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}(\phi) = \{\lambda(12,19,20) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Ker}(3.\phi)$.

II.5.6 $v = (4,1,-1,0)$. Neem $v_1 = (2,0,0,0)$, $v_3 = (0,1,-1,0)$ en v_2 en v_4 zodat $[v_1,v_2,v_3,v_4]$ een basis is voor $\mathbb{R}_4^*$, bijvoorbeeld $v_2 = (0,1,0,0)$ en $v_4 = (0,0,0,1)$.

II.5.7 a) $\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $(2\ \ -3\ \ 1)$.

II.5.8 $(5\ \ -2)$.

II.5.9 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

II.5.10 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II.5.11 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II.5.12 Gebruik S II.5.16 en S II.5.19

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad i$$

$2b_1-2b_2+6b_3+6b_4$; $3b_1-2b_2+8b_3+7b_4$;
$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\lambda(-3a_1-2a_2+a_3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

II.5.13 a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) (2); c) (3 3); d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; e) niet gedefinieerd.

II.5.14 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 7 & 12 \\ 15 & 8 & 7 & 5 & 0 & -1 & 22 \end{pmatrix}$.

II.5.15
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B = I_4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.5.16 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}(\phi^2+\phi^4) = \mathbb{R}_2$.

II.5.17
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.5.18 $\phi(a) = \alpha a + \beta b$, $\phi(a) = \gamma a + \delta c$ voor zekere $\alpha,\beta,\gamma,\delta$; aangezien $[a,b,c]$ een basis is, is $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta = 0$. Dus is er een $\alpha \in \mathbb{R}$ met $\phi(a) = \alpha a$. Zo ook $\phi(b) = \beta b$, $\phi(c) = \gamma c$ voor zekere β en $\gamma \in \mathbb{R}$. $d = a-b-c$;

$$\phi(d) = \alpha a - \beta b - \gamma c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dus $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. De matrix B in $\phi = (\mathbb{R}_3, [a,b,c]) \xrightarrow{B} (\mathbb{R}_3, [a,b,c])$ is dus

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -11 & -6 & 10 \\ -13 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

II.5.19 Voor $\lambda = -1$ is een basis voor $\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$, resp. $\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)$ gegeven door

$$\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\right], \qquad \text{resp. } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right].$$

Voor $\lambda \neq -1$ is een basis gegeven door

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\right], \text{ resp. } \left[\begin{pmatrix}1\\\lambda\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

II.5.20 (i)
$$A = \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(\phi^3) = \{a_1+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{F}\}$.

$\mathrm{Im}(\phi^2) = \{a_2x^2+a_3x^3 \mid a_2,a_3 \in \mathbb{F}\}$.

II.5.21 Voor $\lambda^2 \neq 1$ is de dimensie 3; voor $\lambda = 1$ is de dimensie 1, voor $\lambda = -1$ is de dimensie 2.

$$\lambda = 1, \quad \mathrm{Ker}(\phi_\lambda) = \{\nu \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid \nu,\mu \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Im}(\phi_\lambda) = \{\nu \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \mid \nu \in \mathbb{R}\}.$$

$$\lambda = 1, \quad \mathrm{Ker}(\phi_\lambda) = \{\nu \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \mid \nu \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Im}(\phi_\lambda) = \{\nu \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid \nu,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

II.5.22 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\quad 2^{6n}I_3$, $\quad 2^{6n}I_3$.

II.5.23 De dimensie is 0 als $\alpha(\alpha^2-1) \neq 0$, 2 als $\alpha = 0$, 1 als $\alpha^2 = 1$.

II.5.24 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2n\\ 0 & 1 & 2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

III. Lineaire endomorphismen

§ III.1. Multilineaire functies

III.1.1 a, b en d.

III.1.2 $f[v,w] = \frac{1}{2}(f[v,w] + f[w,v]) + \frac{1}{2}(f[v,w] - f[w,v])$.

III.1.3 Volgt uit S III.1.13 met $\lambda = 0$.

III.1.4 $f[P,Q,R] = \frac{1}{2}(x_P y_Q + x_R y_P + x_Q y_R - x_R y_Q - x_P y_R - x_Q y_P)$.

III.1.5 a) Volgt uit de lineariteit van ϕ en uit de multilineariteit van f.
b) Ja.

III.1.6 a) Volgt uit S III.1.9.
b) Als $|i-j| = 1$, dan is $f[v_1,\ldots,v_n] = 0$, want f is alternerend. Zij nu $i + 2 = j$; $f[v_1,\ldots,v_i,v_{i+1},v_j,\ldots,v_n] = f[v_1,\ldots,v_i + v_{i+1},v_{i+1},v_j,\ldots,v_n] - f[v_1,\ldots,v_{i+1},v_{i+1},v_j,\ldots,v_n] = f[v_1,\ldots,v_i+v_{i+1},v_{i+1},v_j,\ldots,v_n] = f[v_1,\ldots,v_{i+1},v_{i+1} + v_j,v_j,\ldots,v_n] = 0$, want $v_i = v_j$. Zo kan (bijv. met volledige inductie) het algemene geval bewezen worden.
c) Volgt uit a) en b) en uit S III.1.9.

§ III.2. Determinanten

III.2.1 Noem $f[a_1,\ldots,a_n] = \lambda$; dan is $\lambda \neq 0$. Beschouw de antisymmetrische n-lineaire functie d: $V^n \to \mathbb{F}$, gedefinieerd door $d = \lambda^{-1}f$. Dan is $d[\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)] = \det(A)$, zie S III.2.19, zodat $f[\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)] = \lambda \det(A)$. Het gevraagde volgt nu uit de lineariteit van f en ϕ en dat elke vector v_i een lineaire combinatie is van $[a_1,\ldots,a_n]$.

III.2.2 Zij $\lambda = f[a_1,\ldots,a_n]$, $\mu = g[a_1,\ldots,a_n]$ en d de antisymmetrische n-lineaire functie op V met $d[a_1,\ldots,a_n] = 1$. Dan is $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ en $d = \lambda^{-1}f = \mu^{-1}g$. Hieruit volgt $f = \lambda\mu^{-1}g$ en tevens het gestelde.

III.2.3 a) 23; b) $-b^2$; c) -45; d) 28; e) 1; f) 3.

III.2.4 $k = 2$, $k = 0$.

III.2.5 $\det(B-\lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -3-\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda+16) = 0$ voor

$\lambda = 2, -2, 4.$

III.2.6 $\det\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^2-b^2 & a-b & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix} = (a-b)\det\begin{pmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix}$ etc.

III.2.7 a) Merk eerst op dat de vergelijking lineair is. Substitutie van $x = x_P$, $y = y_P$, resp. $x = x_Q$, $y = y_Q$ in de determinant levert twee gelijke rijen, zodat voor deze waarden van x en y aan de vergelijking is voldaan. Dus P, resp. Q ligt op de rechte.

b) Ga na dat

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 10 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

c) De vergelijking is lineair. Voorts is aan de vergelijking voldaan voor $x = x_i$, $y = y_i$; $z = z_i$ $(i = 1,2,3)$. De vergelijking is dus de vergelijking van het vlak door de drie punten P_i met matrix,

$$\vec{P}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3.$$

III.2.8 Trek de 5^{de} rij van de overige rijen af, ontwikkel naar element (5,5) en gebruik verder S I.4.29.

III.2.9 Gebruik S I.4.13 en S III.2.2. Voor $a_{ij} = f(i) + g(j)$ is voor $n = 2$ de determinant gelijk aan $\{f(2)-f(1)\}\{g(1)-g(2)\}$ en voor $n > 2$ gelijk aan 0. Bewijs dit door de determinant als de som van 2^n determinanten te schrijven.

III.2.10 b) Ontwikkel de determinant naar de laatste rij of kolom.

c) Met volledige inductie en b).

III.2.11 Een speciaal geval van V III.2.10 met $\cos\phi = \frac{1}{2}$, d.w.z. $\phi = \pi/3$.

III.2.12 Toon aan dat $\det(A_n) = -\det(A_{n-1})$. Antwoord: $\det(A_n) = (-1)^{n-1}$.

III.2.14 Trek de 2^{de}, 3^{de}, ..., n^{de} kolom af van de eerste. Ontwikkel dan naar het nieuwe element $a_{11} = 1 - \sum_{i=2}^{n} i = 1 - \frac{1}{2}(n+2)(n-1)$. Er ontstaat een $(n-1)\times(n-1)$-matrix waarvan een diagonaal alle elementen gelijk 1 heeft; de overige elementen zijn 0. Verwissel van die matrix de eerste en $(n-1)$-ste kolom, de 2^{de} en $(n-2)$-de kolom etc. Er ontstaat $(-1)^m I_{n-1}$ met $m = 0$ als $n = 1,2,5,6,9,10,\ldots$, $m = 1$ als $n = 3,4,7,8,\ldots$, ofwel $(-1)^m = (-1)^{(n-1) \div 2}$.
Antwoord:

$$(-1)^m \left(1 - \frac{(n+2)(n-1)}{2}\right).$$

III.2.15 Uit het gegeven volgt $A - A^2 = I_n$. Dan is $1 = \det(A-A^2) = \det[A(I_n-A)]$ (volgens S II.5.27) $= \det(A).\det(I_n-A)$ (volgens S III.2.20). Dus $\det(A) \neq 0$.

III.2.17 Volgt uit S III.2.14. Neem $V = \mathbb{F}_n$ en $a_i = e_i$ (standaardbasis van $\mathbb{F}_n$).

III.2.19 Uit het gegeven en S I.4.13 volgt dat $\det(a,b,c,x) = \det(a,b,c,2d)$ en dat $\det(a,b,x,d) = \det(a,b,-4c.d)$. Dus $x - 2d = \lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c$, $x + 4c = \lambda_2 a + \mu_2 b + \nu_2 c$, waaruit $(\lambda_1-\lambda_2)\, a + (\mu_1-\mu_2)\, b + (\nu_1+4)\, c + (2-\nu_2)\, d = 0$. Uit de onafhankelijkheid volgt dan dat $x = \lambda a + \mu b - 4c + 2d$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

III.2.20 $\det(H_n) = [1!2! \ldots (n-1)!]^3/[(n+1)!(n+2)! \ldots (2n)!]$. Trek de laatste kolom af van alle vorige. Haal per rij gemeenschappelijke factoren uit de noemers en per kolom uit de tellers van de elementen. De laatste kolom bevat dan louter "enen". Trek de laatste rij van alle overige rijen af, haal gemeenschappelijke factoren weg en ontwikkel naar de plaats (n,n). Er ontstaat een determinant $\det(H_{n-1})$. Verder met recursie.

§ III.3. Automorphismen en basistransformaties

III.3.1 Gebruik S III.3.3. Ja, want $\det(A) = -1$.

III.3.2 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, D^{-1} bestaat niet.

III.3.3 $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -8 & -10 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Volgt uit S III.3.22.

III.3.4 Gebruik S III.3.23.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 6 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$\det(S) = 4\lambda^2 - 24\lambda + 32$. Dus $(\lambda-2)(\lambda-4) \neq 0$.

III.3.5 a) Neen; b) Ja; c) Neen; d) Ja.

III.3.6 De matrix S uit S III.3.23 is A uit V III.3.1. S is regulier, dus $[x,y,z]$ is een basis. S^{-1} via V III.3.3 geeft met S III.3.25

$$a = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3, [x,y,z]) = 11x - 3y - z,$$

$$b = -\ 8x + 2y + z,$$

$$c = -\ 10x + 3y + z.$$

III.3.7 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, dus $B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$.

III.3.8 a) Gebruik S III.2.7.

b) Er is een reguliere $(n-2) \times (n-2)$ matrix S uit $\mathbb{R}$ zodat $B = S^{-1}\, C\, S$. Noem

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & . \\ . & & \boxed{\quad S \quad} & & 0 \\ . & & & & \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is T regulier en uit S III.3.18 volgt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & . \\ . & & \boxed{\quad S^{-1} \quad} & & . \\ . & & & & 0 \\ 0 & & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ga na dat $T^{-1}A_1T = A$.

c) Er is een reguliere $(n-2) \times (n-2)$ matrix U uit $\mathbb{R}$ en een $(n-2) \times (n-2)$ diagonaalmatrix D_{n-2} uit $\mathbb{R}$ zodat $C = U^{-1}D_{n-2}U$. Dan is $B \sim D_{n-2}$, d.w.z. er is een reguliere $(n-2) \times (n-2)$-matrix V uit $\mathbb{R}$ met $B = V^{-1}D_{n-2}V$. Noem D_n de $(n\times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ die ontstaat door D_{n-2} te "randen" met nullen, behlave op de plaatsen $(1,1)$ en (n,n) waar resp. α en β komen. Ga na dat V analoog veranderd kan worden in een $(n\times n)$-matrix door op de plaatsen $(1,1)$ en (n,n) het getal 1 te plaatsen en dat $A =$ $= W^{-1}D_nW$.

d) $\det(A) = \det(A_1) = \alpha\ \beta\ b$, $\quad \det(C) = b$.

III.3.9 Voor elke reguliere S moet kennelijk gelden $A = S^{-1}AS$, dus $SA =$ $= AS$. Noem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

dan ontstaat een aantal vergelijkingen voor a_{ij}, waaraan voldaan moet worden voor elke reguliere S. Ga na dat hieruit volgt $A =$ $= \lambda\ I_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

III.3.10 Veronderstel A^{-1} bestaat; uit $AB = O_n$ volgt dan $B = A^{-1}O_n = O_n$. Tegenspraak. Voor $n = 3$, neem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.3.11 a) $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1$, $e_1 = f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 - f_2$. Dus

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $AB = I_3$.

c)

$$D = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) $E = AD = ABCB^{-1} = CB^{-1} = CA$, $F = DB = BCB^{-1}B = BC$;

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.3.12 a) $\lambda \neq 0,1$.

b) Voor $\lambda \neq 0,1$ is

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\lambda-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ -1/\lambda & 1 & -1 \\ 1/\lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

c)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

d)
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Zie S III.3.25

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

f)
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dan is $\det(S) \neq 0$, $\det(T) \neq 0$.

g) Zie S III.3.27,

$$M = T^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 5 & 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

h) Aangezien $\det(D) = 0$, zal λ de waarde 0 of 1 moeten aannemen. Neem $\lambda = 0$, dan is $\psi(a_1) = a_2$, $\psi(a_2) = \psi(a_3) = a_3$. Zoek een basis $[f_1,f_2,f_3]$, zodat $\psi(f_1) = \psi(f_2) = -f_1 + f_2 + f_3$, $\psi(f_3) = f_3$. Neem $f_3 = a_3$. Even proberen levert $f_2 = a_1$, $f_1 =$

$= a_1 - a_2 + a_3$. (Ook kan een reguliere S gezocht worden, zodat $D = S^{-1}AS$ en met S kan dan $[f_1, f_2, f_3]$ gevonden worden.)

III.3.13 Kan aangetoond worden door een reguliere S uit $\mathbb{C}$ te zoeken zodat $B = S^{-1}AS$. Een andere aanpak is: Noem ϕ de $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding van $\mathbb{C}_2$ die door de matrix A t.o.v. de standardbasis $[e_1, e_2]$ van $\mathbb{C}_2$ gedefinieerd is. Zoek dan een tupel $[a_1, a_2]$ uit $\mathbb{C}_2$, zodat $\phi(a_1) = e^{i\theta}a_1$, $\phi(a_2) = e^{-i\theta}a_2$, zodat $[a_1, a_2]$ een basis is van $\mathbb{C}_2$. Een keuze is $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Ga na dat hiermee het gestelde bewezen is en dat de hierboven genoemde matrix S gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

III.3.14 Zij A = B voor zekere bases. Definieer σ via $\sigma(a_i) = b_i$, $i = 1,\ldots,n$. Dan is (ga na) $\psi = \sigma\ \phi\ \sigma^{-1}$. Zij nu $\psi = \sigma\ \phi\ \sigma^{-1}$, voor zeker automorphisme σ. Zij $[a_1,\ldots,a_n]$ een willekeurige basis van V en $[b_1,\ldots,b_n]$ de basis met $b_i = \sigma(a_i)$. Dan is A = B, want $\psi(b_i) = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}(b_i) = \sigma \circ \phi(a_i) = \sigma\ (a_{1i}a_1 + a_{2i}a_2 + \ldots + a_{ni}a_n) = a_{1i}b_1 + \ldots + a_{ni}b_n$, als a_{ij} de elementen van de matrix A voorstellen. Evenzo, als b_{ij} de elementen van B voorstellen, is $\psi(b_i) = b_{1i}b_1 + \ldots + b_{ni}b_n$. Hieruit volgt $a_{ij} = b_{ij}$ voor $1 \le i,j \le n$.

IV. Lineaire stelsels en vergelijkingen

§ IV.1. De rang van een matrix

IV.1.1 a) 2, b) 2, c) 2, d) 3.

IV.1.2 Als $a(a-1) \neq 0$ dan 4, als $a = 0$ dan 3, als $a = 1$ dan 2; als $a(1-a)(a+2) \neq 0$ dan 4, als $a = 0$ dan 3, als $a = -2$ dan 3, als $a = 1$ dan 2.

IV.1.3 Definieer het $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme $\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,a_2,a_3])$, waarin $[a_1,a_2,a_3]$ een basis is van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V; definieer ψ via B. We tonen aan dat $\phi \circ \psi \neq 0$. Uit S IV.1.6 volgt dat de dimensies van $\mathrm{Im}(\phi)$, $\mathrm{Im}(\psi)$, $\mathrm{Ker}(\phi)$ en $\mathrm{Ker}(\phi)$ en $\mathrm{Ker}(\psi)$ resp. 2,2,1 en 1 zijn. Neem $x \in \mathrm{Im}(\psi)$, $x \neq 0$. Er is een $y \in V$, $y \neq 0$ zodat $\psi(y) = x$. Er zijn nu twee mogelijkheden (ga na) (i) $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\psi) = \{0\}$ of (ii) $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathrm{Im}(\psi)$. In (i) is $x \in \mathrm{Im}(\psi)$, dus $x \notin \mathrm{Ker}(\phi)$, dus $\phi(x) = \phi \circ \psi(y) \neq 0$ en ook in (ii) kan x zo gekozen worden dat $x \notin \mathrm{Ker}(\phi)$. Dus ook nu is $\phi \circ \psi(y) \neq 0$.

IV.1.4 $r(A)$ is de dimensie van de lineaire deelruimte van $\mathbb{F}_m$ die voortgebracht wordt door de n kolommen van A. Analoog $r(B)$ en $r(A+B)$. Noem deze deelruimten $K(A)$, $K(B)$, $K(A+B)$. Dan is $K(A+B) \subset K(A) + K(B)$. Uit V II.3.18 volgt dan $\dim_{\mathbb{F}}(K(A)) + \dim_{\mathbb{F}}(K(B)) = \dim_{\mathbb{F}}(K(A) \cap K(B)) + \dim_{\mathbb{F}}(K(A)+K(B)) \geq \dim_{\mathbb{F}}(K(A+B))$.

IV.1.5 $r(AB) \leq \max(r(A),r(B))$. Zij A een $(n\times m)$-matrix en B een $(m\times k)$-matrix. Introduceer $\mathbb{F}$-vectorruimte U, V en W (van dimensie resp. k,m en n) en $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen $\psi: U \to V$, $\phi: V \to W$ die bij gegeven bases resp. via B en A gedefinieerd kunnen worden. Dan is $r(B) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\psi))$, $r(A) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi))$, $r(AB) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi\circ\psi))$. $\mathrm{Im}(\phi\circ\psi) = \phi(\mathrm{Im}(\psi)) \subset \mathrm{Im}(\phi)$; dus $r(AB) \leq r(A)$. Tevens is $\dim_{\mathbb{F}}(\phi(\mathrm{Im}(\psi))) \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\psi))$ (zie S IV.1.4).

IV.1.6 Neen. Neem $A = O_3$.

IV.1.7 Via S III.3.33 en S IV.1.6.

IV.1.8 a) 3; b) 3; c) 3.

IV.1.9 Uit V IV.1.5 volgt $r(AB) \leq r(B)$. Verder is $B = A^{-1}(AB)$, zodat (weer via V IV.1.5) volgt $r(B) \leq r(AB)$. Klaar.

IV.1.10 Uit V IV.1.4 en IV.1.5 volgt $r(AB-I_n) = r(AB-A+A-I_n) = r(A(B-I_n)+ +A-I_n) \leq r(A(B-I_n)) + p \leq \max(r(A),q) + p \leq q + p$.

IV.1.11 Zij $[p_1,\ldots,p_\ell]$, $\ell \leq m$ een basis voor $\mathrm{Im}(\phi)$. Beschouw de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\alpha\colon \mathrm{Im}(\phi) \to W$ gedefinieerd door $\alpha = (\mathrm{Im}(\phi), [p_1,\ldots,p_\ell]) \to (W,[w_1,\ldots,w_k])$, dan is $X = \mathrm{Ker}(\alpha)$ en volgens S II.4.24 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\alpha)) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi))$. Nu is $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\psi\circ\phi)$, zodat $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\alpha)) = r(BA)$.

IV.1.12 Introduceer $\mathbb{F}$-vectorruimten U,V,W,X en afbeeldingen α,β,γ zodat $\gamma = (U,[u_1,\ldots,u_p]) \xrightarrow{C} (V,[v_1,\ldots,v_q])$; $\beta = (V,[v_1,\ldots,v_q]) \xrightarrow{B} (W,[w_1,\ldots,w_r])$; $\alpha = (W,[w_1,\ldots,w_r]) \xrightarrow{A} (X,[x_1,\ldots,x_s])$; definieer $Y = \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\beta)$ en $Z = \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\beta\circ\gamma)$. Dan is $Z \subset Y$ (ga na). Dus $\dim_{\mathbb{F}}(Z) \leq \dim_{\mathbb{F}}(Y)$. Maar volgens V IV.1.11 is $\dim_{\mathbb{F}}(Y) = r(B) - r(AB)$. Analoog kan bewezen worden (ga na!) dat $\dim_{\mathbb{F}}(Z) = r(BC) - r(ABC)$. Uit $r(BC) - r(ABC) \leq r(B) - r(AB)$ volgt het gestelde.

IV.1.13 Neem in V IV.1.12 $A = P$, $B = P + Q$, $C = Q$, dan volgt $r(P) + r(Q^2) \leq r(P+Q)$. Neem verder $AB = PQ^2$, $BC = Q$, $B = Q^2$, dan is $ABC = PQ^2C$, dus $r(PQ^2) + r(Q) \leq r(Q^2) + r(PQ^2C)$, zodat $r(Q) \leq r(Q^2)$. De twee ongelijkheden geven dus $r(P) + r(Q) \leq r(P+Q)$, zodat in verband met V IV.1.4 het gestelde bewezen is.

IV.1.14 Volgt uit V IV.1.9.

IV.1.15 Volgt uit S IV.1.6 met $V = W$ (en $m=n$) en S III.3.3.

IV.1.16 Zij $r(A) = p$. Construeer een $(m\times p)$-matrix B als in S IV.1.12, met $p = r(A) = r(B)$. Door soortgelijke handelingen op de rijen van B ontstaat een $(p\times p)$-matrix C, zodat $r(C) = p$. Er kan dus een reguliere submatrix gevonden worden met rang gelijk aan die van A. Een grotere reguliere submatrix kan niet voorkomen; anders zou de bovenstaande constructie omgekeerd kunnen worden, waarna geconstateert moet worden dat $r(A) > p$.

IV.1.17 Er is een lineaire deelruimte X van W zodat $W = X + \mathrm{Im}(\phi)$ en $X \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$; dan is $\dim_{\mathbb{F}}(X) = N-r(B)$ (zie V II.3.17 en

V II.3.18). Definieer een afbeelding ψ': $X \to U$, met $\psi'(x) = \psi(x)$ voor alle $x \in X$. Ga na dat ψ' een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is, en dat ψ' surjectief is. Uit S II.4.24 toegepast op ψ' volgt dan het gestelde.

IV.1.18 Uit het gegeven volgt $\det(AB) = \det(A^2)$. Dus $\det(A)\ \det(B) = \det(A).\ \det(A)$. Aangezien $r(B) = n-1$ is $\det(B) = 0$, dus $\det(A) = 0$.

§ IV.2. Homogene stelsels

IV.2.1 Een basis voor de oplossingsruimte is: a) [[-2,1,1]], b) [[2,-1,3]], c) [0], d) [[-4,2,1,0,0], [-6,3,0,1,0], [0,2,0,0,1]].

IV.2.2 Neen.

IV.2.3 Volgt uit S IV.2.11.

IV.2.4 $O_S = O_{S_1} \cap O_{S_2} \cap O_{S_3} \cap \ldots \cap O_{S_m}$.

IV.2.5 Merk op dat $\mathrm{Ker}(\phi) \subset V$ en $O_S \subset \mathbb{F}_n$. $\mathrm{Dim}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(O_S)$. Formeel kunnen de twee deelruimten gelijk aan elkaar gesteld worden als $V = \mathbb{F}_n$.

IV.2.6 De dimensie is $r(A) = 3$.

IV.2.7 De oplossingen zijn veelvouden van het 5-tupel [-3,1,0,0,0].

IV.2.8 Uit S IV.2.17 volgt de juistheid voor $m = 1$. Voor $m > 1$ kunnen beide stelsels gebracht worden (door toepassing van lineaire handeling op de rijen van A en A') tot stelsels van de vorm (*) in S IV.2.18. Op de beide deelstelsels S_1 en S_1' (zoals (**) in S IV.2.18) kan dit herhaald worden. Aangezien S en S' dezelfde oplossingen hebben, zijn de laatste vergelijkingen in de gewijzigde stelsels S en S' op een multiplicatieve factor na gelijk aan elkaar, waaruit volgt dat de matrices A en A' door lineaire handelingen op de rijen beide op dezelfde matrix kunnen worden gebracht, waarmee het bewijs geleverd is.

IV.2.9 Ja.

IV.2.10 Ja.

§ IV.3. Lineaire stelsels

IV.3.1 Uit S IV.2.14 volgt dat het n-tupel [0,...,0] een oplossing is van het geassocieerde homogene stelsel. Uit substitutie blijkt dat de aangegeven oplossing voldoet. Uit S IV.3.5 volgt dan het gestelde.

IV.3.2 Het n-tupel [0,...,0] is geen oplossing van een niet-homogeen $\mathbb{F}$-lineair stelsel.

IV.3.3 De determinant van de matrix is $(c-a)(a^2-b^2)$. Dus voor $a \neq c$, $b^2 \neq a^2$ heeft het stelsel één en slechts één oplossing. Als $a = -b$ dan is er geen oplossing, voor $a \neq -b$ is er wel een oplossing.

IV.3.4 a) Aangezien $\det(A) = a^5 + b^5$ (ga na!) is er één en slechts één oplossing als $a \neq -b$. b) Zij $a = -b$. Er is geen oplossing.

IV.3.5 Aangezien $\det(A) = (a+1)(a+2)$ is er één en slechts één oplossing als $a \neq -1$ en $a \neq -2$. In dat geval is de oplossing $[(2a+3)/(a+2), 0, -1/(a+2)]$. Als $a = -1$ dan is de oplossing $[1,0,-1] + \lambda\,[1,-1,0]$; als $a = -2$ dan is er geen oplossing.

IV.3.6 Aangezien $\det(A) = (n-1)(-1)^{n-1}$ (ga na!) is er één en slechts één oplossing als $n \geq 2$. Als $n = 1$ is er een oplossing als $a_1 = 0$. Voor $n \geq 2$ is de oplossing gegeven door $x_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_j - a_i$, $i = 1,\ldots,n$.

IV.3.7 a) De determinant is $(a-b)(b-c)(c-a)$; oplossing is $[1,0,0]$.

IV.3.8 Substitueer de bedoelde waarden van x in de vergelijking. Er ontstaan n homogene lineaire vergelijkingen in $a_0,\ldots,a_n$. De determinant van dit stelsel is $\neq 0$ (zie V III.2.13).

IV.3.9 In dat geval lopen de vlakken evenwijdig.

V. Eigenwaarden

§ V.1. Eigenwaarden en eigenvectoren

V.1.1 Van ϕ: eigenwaarden

$$1 \text{ met eigenvector } \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad -1 \text{ met eigenvector } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Van ψ:

$$0 \text{ met } \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad 2 \text{ met } \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad 3 \text{ met } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

V.1.2 a) Zie S V.1.14. Eigenvectoren zijn i.h.a. niet gelijk. Neem $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. b) Als $\alpha \neq 0$ dan hebben ϕ en $\alpha\,\phi$ dezelfde eigenvectoren. c) Als $p \neq 0$ dan hebben ϕ en ϕ^p dezelfde eigenvectoren. d) ϕ en ϕ^{-1} hebben dezelfde eigenvectoren. e) $\det(A-\lambda I_n) = \det(A+\alpha I_n-(\alpha+\lambda)I_n)$. f) Zij λ een eigenwaarde, met bijbehorende eigenvector v; dan is $\phi(v) = \lambda v$ en $\phi^2(v) = v$, dus $\lambda^2 = 1$.

V.1.3 Ontwikkel $\det(A-\lambda I_n)$ eerst naar de eerste kolom.

V.1.4 a) De eigenwaarden zijn 0 en 3.
b) $\mathrm{Im}(\phi)$ wordt voortgebracht door de bij 3 behorende eigenvectoren

$$a = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dus $\phi(e_i) = \lambda_i a + \mu_i b$; uit berekening volgt $\lambda_1 = -1$, $\mu_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = \lambda_3 = 1$, maar deze getallen hoeft men niet te kennen. Uit $\phi^7(e_i) = 3^6(\lambda_i a+\mu_i b)$, $i = 1,2,3$, volgt rechtstreeks $A^7 = 3^6 A$.

V.1.5 Noem de eigenvectoren bij λ_0: $v_1,\ldots,v_k$. Vul dit onafhankelijke stelsel aan tot een basis $[v_1,\ldots,v_k, w_1,\ldots,w_s]$ van V $(k+s=n)$. Beschouw $\phi = (V,[v_1,\ldots,v_k, w_1,\ldots,w_s]) \overset{B}{\to} (V,[v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_s])$. Dan hebben volgens S V.1.13 A en B dezelfde karakteristieke veelterm. Ga na hoe de eerste k kolommen van B er uit zien en bewijs dat $\det(B-\lambda I_n) = (\lambda-\lambda_0)^k\, h(\lambda)$, met $h(\lambda)$ een veelterm van graad $n-k$. Hieruit volgt $k \le p$.

V.1.6 a) Zij ϕ: $\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding zodat $\phi = (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n] \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n])$, dan is volgens S IV.1.6 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) = r$; dus volgens S II.4.24 is $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = n - r$. Er zijn dus $n - r$ onafhankelijke vectoren in $\mathrm{Ker}(\phi)$ en deze vectoren zijn eigenvectoren bij de eigenwaarde 0. De geometrische multipliciteit van 0 is dus $n - r$. Volgens V V.1.5 is het gestelde bewezen.

b) Neem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

V.1.7 a) Duidelijk is dat $a_1,\ldots,a_n$ de eigenwaarden van A^2 zijn. Zij $\phi = (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_n, [e_1,\ldots,e_n])$ en veronderstel dat λ een eigenwaarde van ϕ is bij de eigenvector x. Dan is $\phi(x) = \lambda x$ en $\phi^2(x) = \lambda^2 x$, dus $\lambda^2 = a_i$ voor zekere i; dus $\lambda = \pm\sqrt{a_i}$. Veronderstel dat zowel $+\sqrt{a_i}$ en $-\sqrt{a_i}$ een eigenwaarde is met eigenvectoren respectievelijk a en b. Dan zijn volgens S V.1.10 a en b lineair onafhankelijk. Maar zowel a als b is een eigenvector van ϕ^2 bij a_i. Maar a_i is een eigenwaarde van ϕ^2 met bijbehorende eigenvector e_i. Tegenspraak

b) Er zijn 2^n mogelijkheden voor A.

V.1.8 Uit V III.2.10 volgt dat $\det(A_n-\lambda I_n) = \sin(n+1)\,\phi \,/\, \sin\phi$, met $2\cos\phi = a - \lambda$. Eigenwaarden zijn $\lambda_k = a - 2\cos\phi_k$, $\phi_k = k\pi/(n+1)$, $k = 1,\ldots,n$.

V.1.9 (i) $\phi(e_1) = e_2$, $\phi(e_2) = e_1$; (ii) $\phi(e_1) = 0$, $\phi(e_2) = e_1$, (iii) $\phi(e_1) = \phi(e_2) = e_2$.

V.1.10 Ga na dat de eigenwaarden volgen uit die van $\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$. Dus 0 en 25. Bij 0 horen de eigenvectoren $4e_1 + 3e_2$ en $-3e_3 + 4e_4$, bij 25 horen $3e_1 - 4e_2$ en $4e_3 + 3e_4$. Voor de eigenruimten geldt $\phi(W) = W$.

V.1.11 -2 met $a_1 - a_3$, $-2+\sqrt{2}$ met $a_1 + \sqrt{2}a_2 + a_3$, $-2-\sqrt{2}$ met $a_1 - \sqrt{2}a_2 + a_3$.

V.1.12 De eigenwaarden van A zijn die van B en bovendien α en β.
$Tr(C) = t$, $Tr(A) = t + \alpha + \beta$.

V.1.13 a) -1, 1 en 2.
b) Bij -1 hoort $b_1 = a_3$, bij 1 hoort $b_2 = -\cos\theta\, a_1 + \sin\theta\, a_2$, bij 2 hoort $b_3 = \sin\theta\, a_1 + \cos\theta\, a_2$; $[b_1,b_2,b_3]$ is een basis van eigenvectoren.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V.1.14 a) 1, 2, 3.
b) Bij 1, $b_1 = a_1 + a_2$, bij 2, $b_2 = \sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2 + a_3$, bij 3, $b_3 = \sqrt{2}a_1 + a_3$.
c) Volgens S V.1.20 is A equivalent met

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

V.1.15 a) (i) $t^2 = 4d$, (ii) $t^2 > 4d$, (iii) $t^2 < 4d$. b) $t/2$.

V.1.16 Uit S V.1.23 volgt dat het karakteristieke polynoom $P(\lambda)$ voor $\lambda = 0$ negatief is. Aangezien n even is geldt $P(\lambda) \to +\infty$ als $\lambda \to \pm\infty$.

V.1.17 Volgens S V.1.23 is $c_1 = (-1)^{n-1}\, Tr(A)$. De rest volgt uit S V.1.25.

V.1.18 Volgens S V.1.20 is A equivalent met een diagonaalmatrix D, met op de diagonaal de eigenwaarden van A. Er is een reguliere P zodat $A = P^{-1}DP$. Dan is $A^2 = P^{-1}DPD^{-1}DP = P^{-1}D^2P$, etc. Op de diagonaal van D^k staan λ_i^k, $i = 1,\dots,n$.

V.1.19 Uit S V.1.15 volgt dat $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, dus

$$A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Via S V.1.20 wordt S gevonden,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Uit V V.1.18 volgt de rest.

V.1.20 a) A is een bovendriehoeksmatrix; uit S V.1.32 volgt dat A nilpotent is. b) De index is n.

V.1.21 a) Zij $a_1 a + a_2\phi(a) + \ldots + a_{k-1}\,\phi^{k-1}(a) = 0$. Herhaald toepassen van ϕ geeft dat alle a_i nul zijn ($\phi^{(k)}(v) = 0$ voor elke $v \in V$).
b) $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n$; het lineair onafhankelijk stelsel uit a) kan hoogstens n vectoren bevatten; dus $k \le n$.

V.1.22 a) Eigenwaarden zijn alle 0. b) De index is 3.

V.1.23 b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

c) De eigenwaarden van A zijn 0, index is 4.
d) ϕ^0: de eigenruimte bij $\lambda = 1$ is V zelf; ϕ^k: de eigenruimte is de verzameling van polynomen van de graad k-1 of lager ($k \ge 1$).

V.1.24 Volgt uit V V.1.21.

V.1.25 Volgt uit S V.1.32 en V V.1.24.

V.1.26 Vergelijk S V.1.20. De algebraîsche multipliciteit van λ_i zij μ_i (i=1...4); dan is $\mu_1 + \ldots + \mu_r = n$. Bij elke eigenwaarde λ_i zijn voor een endomorphisme ϕ als in S V.1.20 precies μ_i onafhankelijke eigenvectoren. Er is in V dus een basis van eigenvectoren.

V.1.27 Zij λ een eigenwaarde van AB. Als $\lambda = 0$, dan is $\det(AB) = \det(BA) = 0$, dus $\lambda = 0$ is dan ook een eigenwaarde van BA. Veronderstel nu $\lambda \neq 0$. Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$ en $\phi: V \to V$ en $\psi: V \to V$ twee $\mathbb{F}$-lineaire endomorphismen gegeven door $\phi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots,a_n])$, $\psi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{B} (V,[a_1,\ldots,a_n])$. Er is een eigenvector $v \neq 0$ van $\phi \circ \psi$ zodat $\phi \circ \psi(v) = \lambda v$. Noem $w = \psi(v)$. Aangezien $v \neq 0$, $\lambda \neq 0$ en $\phi(w) = \lambda v \neq \neq 0$. Maar w is een eigenvector van $\psi \circ \phi$ behorende bij λ want $\psi \circ \phi(w) = = \psi(\lambda v) = \lambda\,\psi(v) = \lambda\, w$; dus λ is een eigenwaarde van $\psi \circ \phi$ en dus van BA. Omgekeerd is elke eigenwaarde van BA een eigenwaarde van AB. Opmerking: Als gegeven is dat A regulier is, kan het bewijs als volgt verlopen. De karakteristieke veelterm van AB volgt uit $\det(AB-\lambda I_n) = 0$; dus $\det(A) \,.\, \det(B-\lambda A^{-1}I_n) = 0$; dus $\det(B-\lambda A^{-1}I_n$. $.\det(A) = 0$, dus $\det(BA-\lambda I_n) = 0$, steeds voor dezelfde λ. Evenzo als B regulier is.

V.I.28 $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \ldots \lambda_n^{-1}$ en $\det(A-\lambda I_n) = (-1)^n \cdot (\lambda-\lambda_1) \ldots (\lambda-I_n)$.

V.1.29 Zij $r(A) = n$, dan is A regulier. Dan is $B = I_n$ en B heeft dan geen eigenwaarden anders dan 1. Tegenspraak.

V.1.30 a) $\lambda = 1$ is eigenwaarde met eigenvector a_4.

b) Noem de matrix van ψ t.o.v. de basis $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ C. Ga na dat C nilpotent is met index 4. Zij $[b_1,b_2,b_3,b_4]$ een willekeurige basis en de matrix bij ψ t.o.v. deze basis zij B. Dan hebben B en C dezelfde eigenwaarden. Dus B is nilpotent. Bovendien is er een reguliere matrix S zodat $B = SCS^{-1}$, zodat $B^k = SC^kS^{-1}$ en de index van B is dus gelijk aan die van C.

§ V.2. Complexe matrices

V.2.1 V is een $\mathbb{C}$-vectorruimte, terwijl W een $\mathbb{R}$-vectorruimte is.

V.2.2 3; $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

V.2.3 a) $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$; $W_1 \cap W_3 = \{\lambda(0,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

	ϕ	ψ	π
1	neen	ja	neen
2	neen	ja	neen
3	neen	neen	neen

V.2.4 De vectoren b en c zijn voor de drie gevallen respectievelijk $\frac{1}{2}(1+i,0,0)$ en $-\frac{1}{2}(1+i,0,0)$; $\frac{1}{2}(1+i,0,0) + (0,0,1)$ en $\frac{1}{2}(1+i,0,0) +$ $+ (0,1,0)$; $(1+i,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$ en $(0,1,0)$.

V.2.5 a) $(1-i,1-i,1+2i,3-i)$; b) $(1-i,1-i,1+2i,3-i)$; c) $(1+5i,$ $1+5i,1+2i,-3+i)$.

V.2.6 (76+277i)/50, (4+38i)/10.

V.2.7 Neem $b_1 = (1,0)$, $b_2 = (1,1)$ in $\mathbb{C}_2^*$.

V.2.8 $x = \frac{1}{5}(2+i)a_1 + \frac{3}{5}(1-2i)a_2 - a_3$; $y = -\frac{1}{5}(1-2i)a_1 + \frac{3}{5}(2+i)a_2 + a_3$.

V.2.9 a) Volgt uit $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$ en $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, voor $z, w \in \mathbb{C}$. b) $(AB)^H = (\overline{AB})^T = (\overline{A}.\overline{B})^T = (\overline{B})^T.(\overline{A})^T = B^H A^H$. c) $(Q^H AQ)^H = Q^H A^H (Q^H)^H = Q^H AQ$. d) De matrix is hermitisch. Zie S V.2.26.

V.2.10 a) Gebruik de lineariteit van π; merk op dat in $\pi(a,x)$ de x op de tweede plaats staat.

b),c) Bereken $\phi(e_j) = e_j + \overline{\alpha}_j a = \overline{\alpha}_j\alpha_1 e_1 + \overline{\alpha}_j\alpha_2 e_2 + \ldots + (1+\overline{\alpha}_j\alpha_j)\, e_j + \ldots + \alpha_j\alpha_n e_n$, $j = 1,\ldots,n$. Alle diagonaalelementen van A zijn van de vorm $1 + \overline{\alpha}_j\alpha_j$, $j = 1,\ldots,n$ en dus reëel; de overige elementen zijn van de vorm $\overline{\alpha}_i\alpha_j$; er geldt verder $\overline{\overline{\alpha}_i\alpha_j} = \alpha_i\overline{\alpha}_j$. Hieruit volgt dat A hermitisch is.

d) Zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$; dan is $\phi(x) = 0$, dus $x = -\pi(a,x)a$; d.w.z. x is een veelvoud van a, zeg $x = \mu a$; dus $\mu a = -\pi(a,\mu a)$, dus $\mu(1+\pi(a,a)) = 0$. Dan is noodzakelijk $\mu = 0$; d.w.z. $x = 0$.

e) De eigenwaarde is $1 + \pi(a,a)$.

f) $\phi(x) = \lambda x$ met $\lambda = 1$ voor die x waarvoor $\pi(a,x) = 0$; $\pi(a,x) = 0$ geeft aanleiding tot een $\mathbb{C}$-lineair homogeen stelsel met 1 vergelijking voor het tupel $[x_1,\ldots,x_n]$ met $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. De oplossingsruimte heeft dimensie $n-1$, dus er zijn precies $(n-1)$ lineair onafhankelijke eigenvectoren x bij $\lambda = 1$.

§ V.3. Reële matrices en inwendige producten

V.3.1 a) $x = e_1 - e_2$, $y = e_2 - e_3$; b) zij $\alpha x + \beta y + \gamma u = 0$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$; dan is $< \alpha x + \beta y + \gamma u, u > = \gamma < u,u > = 0$, dus $\gamma = 0$, etc.

V.3.3 b), e) en f) zijn niet bilineair; c), g) en h) zijn symmetrisch; d) en g) zijn anti-symmetrisch.

V.3.4 a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

V.3.5 $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

V.3.6 Als

$$a,b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots,a_n]),$$

dan is

$$\phi(a,b) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{en} \quad \phi(a,b)^T = \phi(a,b) =$$

$$= (\beta_1,\ldots,\beta_n)A^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\psi(b,a) = (\beta_1,\ldots,\beta_n)\ B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Dus $\phi(a,b) = \psi(b,a)$ dan en slechts dan als $A^T = B$ (d.w.z. $A = B^T$).

V.3.7 Noteer

$$a,b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots,a_n]) =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{pmatrix} \in (V,[b_1,\ldots,b_n]).$$

Dan is

$$S\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \gamma_n\end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \delta_n\end{pmatrix}$$

en voor elke a, $b \in V$

$$\phi(a,b) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ A \begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\ B \begin{pmatrix}\delta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \delta_n\end{pmatrix} =$$

$$= \{S\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix}\}^T BS \begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ S^TBS\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix},$$

dus $A = S^TBS$.

V.3.8 a) Schrijf $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ en gebruik het gegeven met $x = e_1, e_2, e_3$.

b) Ga na dat ϕ voor elke a, b een bilineaire functie is. Veronderstel voorts $a \neq 0$, $b \neq 0$ (anders is ϕ zeker symmetrisch). Neem $x = a$, dan moet voor symmetrie gelden $< a,a > < b,y > = < a,y > < b,a >$ voor alle $y \in \mathbb{R}_3$. Dus $< b,y > = < a,y > < b,a >/< a,a >$; ofwel $< b,y > =$ $= < \frac{<b,a>}{<a,a>} a,y >$ voor elke $y \in \mathbb{R}_3$; dus $b = \frac{<b,a>}{<a,a>} a$, dus $b = \mu a$ voor zekere $\mu \in \mathbb{R}$; a en b zijn dus lineair afhankelijk.

V.3.9 b) Eigenwaarden zijn 0 en 1; r is de eigenvector bij 1, de overige zijn oplossingen van de vergelijking $< x,r > = 0$.

c)

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

V.3.10 a) Ja;

b) neen;

c) ja; ga na dat $\phi(x,x) = (x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{1}{12}(x_2+x_3)^2 + \frac{1}{180}x_3^2$;

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix};$$

c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 25/6 \\ 0 & 3 & -15/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

f) $\psi(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 - 3x_1y_2 + 25/6\ x_1y_3 - 15/2\ x_2y_3$;

g) ψ is niet symmetrisch en positief definiet wegens

$\psi(x,x) = (x_1-3/2x_2+25/12x_3)^2 + 3/4(x_2-5/6x_3)^2 + 5/36x_3^2$.

V.3.11 $[a_1,a_2,a_3]$ is niet orthogonaal in $(V,[b_1,b_2,b_3]$, wel in $(V,[a_1,a_2,a_3]$.

V.3.13 a) Ja; b) neen; c) $\lambda_1 = 1/\sqrt{30}$, $\lambda_2 = 1/\sqrt{5}$, $\lambda_3 = 1/\sqrt{6}$.

V.3.14 (i) a) Ja; b) neen; c) ja; d) ja. (ii) Neem $e_1 + e_3$ en $49e_1 + 28e_2 + 46e_3$, respectievelijk.

V.3.15 $c = -e_1+e_2+e_3$; c) $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = -1$; d) neem x willekeurig in V, zeg $x = \alpha a + \beta b$; dan is $\|x-d\|^2 = (\alpha-\lambda)^2 < a,a > +$ $+ (\beta-\mu)^2 < b,b > + \nu^2 < c,c > + 2(\alpha-\lambda)(\beta-\mu) < a,b > =$ $\|(\alpha-\lambda)\ a + (\beta-\mu)\ b\|^2 + \nu^2 \|c\|^2$ en dit is minimaal voor $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$.

V.3.16 c) Zoek een element y, dat voldoet aan $\phi(y) = x$ (x uit het vorige vraagstuk). Een y die voldoet is $y = 2e_1 - e_3$; hierbij kan elk element uit $\mathrm{Ker}(\phi)$ nog opgeteld worden.

V.3.17 b) Neem $b_3^1 = e_3 - < e_3,b_1 > b_1 - < e_3,b_2 > b_2$ en $b_3 = b_3^1/\|b_3^1\|$; dit geeft $b_3 = \frac{1}{6}\sqrt{2}(e_1+e_2+4e_3)$; $b_4 = \frac{1}{6}\sqrt{2}(-e_1+e_2+e_3+4e_4)$.

V.3.19 Ga uit van een orthonormale basis $[b_1,\ldots,b_m]$ van W (met $m = \dim_{\mathbb{R}}(W) \leq n$). Vul deze basis aan met $[c_1,\ldots,c_k]$, $k = n-m$, zodat $[b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_k]$ een orthonormale basis is van V. Noem $U = W^{\perp}$ de lineaire deelruimte opgespannen door $[c_1,\ldots,c_k]$. Ga na dat nu aan alle voorwaarden is voldaan.

V.3.20 b) Noem $U = W^\perp$. Bewijs eerst dat $W \subset U^\perp$: zij $w \in W$, dan is $<w,v> = 0$ voor elke $v \in U$, dus $w \in U^\perp$. Bewijs daarna dat $U^\perp \subset W$: Uit het vorige vraagstuk volgt dat $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W)$, maar dan geldt ook, door: i.p.v. W van U uit te gaan: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U^\perp) + \dim_{\mathbb{R}}(U)$, zodat $\dim_{\mathbb{R}}(W) = \dim_{\mathbb{R}}(U^\perp)$. Eerst was bewezen $W \subset U^\perp$, dus nu volgt dat $W = U^\perp$.

V.3.21 $W^\perp = \{\lambda b_3 + \mu b_4 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$, met b_3 en b_4 uit V V.3.17.

V.3.22 $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

V.3.24 b) Als $b_1 = \sin\theta\, a_1 + \cos\theta\, a_2$, $b_2 = \cos\theta\, a_1 - \sin\theta\, a_1$, $0 < \theta < \pi$, dan is voor elke θ $[b_1,b_2]$ orthogonaal in $(\mathbb{R}_2, [a_1,a_2])$; a_1 en a_2 kunnen dan eenvoudig in b_1 en b_2 uitgedrukt worden.

V.3.25 b) Gebruik V V.3.7 of S V.3.15.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7/4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V.3.26 (i) $\alpha_1 = 0$, $b_2 = b$; (ii) $\alpha_1' = \frac{3}{4}$; (iii) zie (i).

V.3.27 Zie S V.3.38.

V.3.29 (i) $a_1 = \frac{1}{2}b_1$, $a_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}b_2$, $a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}b_3$, $a_4 = b_4$; (ii) analoog.

V.3.30 (i) $\lambda = -1$ met eigenvector e_3, $\lambda = 1$, met eigenvector $-2\sqrt{2}e_1 + e_2$, $\lambda = 2$ met $\frac{1}{4}\sqrt{2}e_1 + e_2$.

(ii) $b_1 = e_3$, $b_2 = \frac{1}{3}(-2\sqrt{2}e_1 + e_2)$, $b_3 = \frac{1}{3}(e_1 + 2\sqrt{2}e_2)$.

(iii)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V.3.31 $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7}\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

V.3.32 $T = S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

V.3.33 (i) S V.3.42. Zij λ een reële eigenwaarde met eigenvector a van een afbeelding ϕ gedefinieerd als in S V.3.42. Dan is $< \phi(a),\phi(a) > = \lambda^2 < a,a > = < a,a >$, dus $\lambda^2 = 1$. Aangezien n oneven is, is er minstens één reële eigenwaarde, waarvoor dus geldt $\lambda^2 = 1$. De complexe eigenwaarden komen in complex geconjugeerde paren voor. Uit $\lambda_1 \ldots \lambda_n = 1$ volgt nu het gestelde.

(ii) $e_1 + (\sqrt{2}-1)e_3$.

V.3.34 (i) Zij ϕ positief definiet en zij $b \neq 0$ een eigenvector van ϕ bij een eigenwaarde λ; zij $b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$. Dan is

$$0 < \phi(b,b) = (\beta_1,\ldots,\beta_n)\ A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda(\beta_1^2+\ldots+\beta_n^2).$$

Omdat $b \neq 0$, is minstens één $\beta_i \neq 0$, dus $\lambda > 0$.

(ii) Zij $\psi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots,a_n])$; omdat A symmetrisch is, is er een orthonormale basis $[b_1,\ldots,b_n]$ van eigenvectoren van ψ. Verder geldt $\phi(c,d) = < c,\psi(d) >$ (zie S V.3.34). Neem nu $c \in V$ willekeurg, $c \neq 0$, zij $c = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n$. Ga na dat $\phi(c,c) = \lambda_1\gamma_1^2 + \ldots + \lambda_n\gamma_n^2$.

V.3.35 Gebruik het vorige vraagstuk: (i) neen, (ii) ja, (iii) ja.

V.3.36 (i) Niet symmetrisch; (ii) ja. $b_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(-e_1+e_2-e_3)$, $b_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}(e_1+e_2)$, $b_3 = \frac{1}{12}\sqrt{6}(e_1-e_2-2e_2)$.

V.3.37 (i) Zij $\psi = V \sqcap V \to \mathbb{R}$, $\psi^T : V \sqcap V \to \mathbb{R}$ de bilineaire functies $\psi = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \sqcap (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}$, $\psi^T = (V,[a_1,\ldots,a_n]) \sqcap (V,[a_1,\ldots,a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}$, dan is $< c,\phi(d)> =$

$= \psi(c,d)$ en $< \phi^T(c),d > = < d,\phi^T(c) > = \psi^T(d,c)$. Door $\psi(c,d)$ en $\psi^T(d,c)$ via de matrices A en A^T uit te schrijven volgt $\psi(c,d) = \psi^T(c,d)$.

(iii) Ga na m.b.v. (i) dat $\sigma(x,x) = < \phi(x),\phi(x) >$ voor alle $x \in V$. Dus $\sigma(x,x) \geq 0$ voor alle $x \in V$; σ is echter niet positief definiet, want als ϕ een eigenwaarde 0 heeft is voor de corresponderende eigenvector $\sigma(x,x) = 0$.

(iv) A^TA is symmetrisch; zij λ een eigenwaarde, met bijbehorende eigenvector x van $\phi^T\circ\phi$, dan is $\lambda < x,x > = < \phi^T\circ\phi(x),x > = = < \phi(x),\phi(x) >$, zodat $\lambda \geq 0$.

V.3.39 Volgt uit S V.3.19 en definitie V V.3.38.

V.3.44 (i) Neen

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(iii) $\lambda = 0$ met eigenvector c.

V.3.46 De eigenwaarden van A zijn -9, -9 en 27.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} & -2/3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}.$$

V.3.48

$$v_1 = \tfrac{1}{2} u_1, \quad v_2 = \frac{1}{6}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{6}\sqrt{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$W^\perp = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

V.3.49 Ja.

V.3.50 Er zijn vier mogelijkheden. (i) Beide eigenwaarden zijn 1; dit geval correspondeert met de $id_{\mathbb{E}_2}$. (ii) $\lambda_1 = +1$,

$\lambda_2 = -1$; spiegeling. (iii) beide eigenwaarden -1; draaiing over een hoek van π radialen. (iv) Geen reële eigenwaarden; draaiing zoals bijv. in S II.4.5. Merk op dat in alle vier gevallen de norm van een vector en zijn beeld gelijk zijn. Zie V V.3.41.

V.3.51 (i) Alle eigenwaarden 1. (ii) $\lambda_1 = 1$, λ_2 en λ_3 complex; draaiing met als as de eigenvector bij $\lambda_1 = 1$. (iii) speciaal geval van (ii); draaiing met een hoek van π radialen. (iv) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, spiegeling t.o.v. het vlak door de oorsprong met normaal de egenvector bij $\lambda_3 = -1$. (v) $\lambda_1 = -1$, λ_2 en λ_3 complex; spiegeling t.o.v. het vlak door de oorsprong met normaal de eigenvector bij $\lambda_1 = -1$, gevolgd door een draaiing met als as dezelfde eigenvector. (vi) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; speciaal geval van (v) met draaiingshoek π; of: elke vector wordt met -1 vermenigvuldigd.

V.3.52 Kies $x_0 \neq 0$, zodat $< a,x_0 > = 0$; dan is $< b,x_0 > = < c,x_0 > = 0$.

V.3.53 c) Zie eventueel V V.1.8;

d) bij $1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ hoort $a_1 + a_4 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)(a_2+a_3)$, bij $1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ hoort $-a_1 + a_4 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(-a_2+a_3)$, bij $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ hoort $-a_1 + a_4 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)(a_2-a_3)$, bij $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ hoort $a_1 + a_4 - - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(a_2+a_3)$.

e) Gebruik de kentallen van de genormeerde eigenvectoren als kolommmen van S.

V.3.54 Noem de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ en ψ respectievelijk $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $\mu_1,\ldots,\mu_n$, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$. Dan zijn $[x_1,\ldots,x_n]$ en $[y_1,\ldots,y_n]$ bases van V.

(i) Zij $x_i = y_i$, $i = 1,\ldots,n$. Zij $v = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in V$ willekeurig. Dan is (ga na) $\psi \circ \phi(v) = \phi \quad \psi(v)$.

(ii) $\phi(x_i) = \lambda_i x_i$, $i = 1,\ldots,n$; dus $\psi \circ \phi(x_i) = \lambda_i \psi(x_i)$; gegeven is $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$, dus $\phi(\psi(x_i)) = \psi \circ \phi(x_i) = \lambda_i \psi(x_i)$. Dus $\psi(x_i)$ is een eigenvector van ϕ bij λ_i, dus $\psi(x_i) = \alpha_i x_i$ voor zeker α_i, $i = 1,\ldots,n$. Dus x_i is ook een eigenvector van ψ, $i = i,\ldots,n$.

V.3.55 b) $\alpha^2 \neq 1$; als $\alpha^2 \neq 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$; als $\alpha^2 = 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2$.

c) Als $\alpha = 0$, dan is elke vector van V eigenvector (bij de eigenwaarde 1). Als $\alpha \neq 0$: bij $\lambda = 1 + \alpha$ behoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix};$$

bij $\lambda = 1 - \alpha$ behoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

d) Als $\alpha = 0$, $S = I_n$; als $\alpha \neq 0$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

V.3.56 (i)

$$c = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(iii)

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-5 & -2 & 1\\-4 & 2 & -4\\3 & -6 & -3\end{pmatrix}.$$

(iv) Ga na dat $\phi^2 = id_{\mathbb{R}_3}$, dus $A^2 = I_3$, dus $A = A^{-1}$.

V.3.57 a) Niet symmetrisch, niet positief definiet = $\phi(x,x) = (\alpha_1-\alpha_2)^2 = 0$ als $\alpha_1 = \alpha_2$. b) Symmetrisch, niet positief definiet.

c) Symmetrisch en positief definiet: $\phi(x,x) = (\alpha_1-3\alpha_2)^2 + 3\alpha_1^2$.

d) Niet symmetrisch, niet positief definiet.

c) De eigenwaarden van de matrix zijn $(13\pm\sqrt{61})/2$, de eigenvectoren zijn hiermee te berekenen en de methode uit S V.3.56 kan gevolgd worden; om naar rekenwerk te voorkomen kiezen we een andere methode. Ga uit van een eenvoudige vector, zeg $c_1 = e_1$; $\phi(e_1,e_1) = 4$; kies nu $b_1 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}e_1$. Als tweede vector kiezen we een vector c_1 zodat $\phi(c_1,c_2) = 0$; een systematische keuze is (zie S V.3.34) $c_2 = e_2 - \phi(e_2,b_1)b_1 = e_2 + \frac{3}{4}e_1$, $\phi(c_2,c_2) =$ $= \frac{27}{4}$; neem dus $b_2 = \frac{2}{9}\sqrt{3}\ (\frac{3}{4}e_1+e_2)$. Nu is $\phi(b_1,b_1) = \phi(b_2,b_2) = 1$ en $\phi(b_1,b_2) = 0$. Volgens S V.3.16 is ϕ het inwendig product in $(\mathbb{R}_2, [b_1,b_2])$.

V.3.58 De eigenwaarden van A volgen uit $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$; gemakkelijk is in te zien dat de eigenwaarden positief zijn, maar ze zijn niet eenvoudig te berekenen. De methode van S V.3.57 faalt dus. We gaan, als in O V.3.57 c) anders te werk. We zoeken een basis $[a,b,c]$ door $[e_1,e_2,e_3]$ te "orthonormaliseren" via ϕ. Kies $a = e_1$, dan is $\phi(e_1,e_1) = 1$. Neem $b = e_2 - \phi(e_2,a)a$; dan is $\phi(a,b) = 0$; $b = e_2 - e_1$; $\phi(b,b) = 1$. Neem $c = e_3 - \phi(e_3,a)a - \phi(e_3,b)b =$ $= e_1 - e_2 + e_3$. Ook nu weer is $\phi(c,c) = 1$.

V.3.59 b) Er is nog geen basis in V gegeven. Dit kan zijn $[1,x,x^2]$. We gaan deze basis weer via ϕ orthonormaliseren. $\phi(1,1) = 2$, dus $f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f_2' = x - \phi(x,f_1)f_1 = x$, $f_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,x$; zo ook $f_3 =$ $= \frac{3}{4}\sqrt{10}(x^2-1/3)$.

V.3.60 c) Neem $z = a_1$. d) $a = x$, $b = y$, $c = z$.

V.3.61 $\mu = 2$ en $\lambda = \pm\ 1/3$, of $\mu = -1$ en $\lambda = \pm\ 1/3$.

V.3.62 a) Neen. $B = 1/3\ A$ is wel orthonormaal. b) $A = 3B$, $A^{-1} = 1/3\ B^{-1} =$ $= 1/3\ B^T = 1/3(1/3A)^T = \frac{1}{9}A^T$.

V.3.63 $[a,b,c]$ is een basis; we veronderstellen dat (zonder verlies van algemeenheid) $[a,b,c]$ een orthonormale basis is. Zij $\phi =$ $= (V,[a_1,a_2,a_3]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,a_2,a_3])$ en $\phi = (V,[a,b,c]) \xrightarrow{D} (V,[a,b,c])$, dan is D een diagnonaalmatrix en er is een orthonormale matrix S zodat $A = SDS^{-1} = SDS^T$. Hieruit volgt eenvoudig dat $A = A^T$.

V.3.64 Volgens V V.3.50 bestaat er een orthonormale basis van eigenvectoren $[x_1,\ldots,x_n]$. Schrijf $\phi = (V,[x_1,\ldots,x_n]) \xrightarrow{D} (V,[x_1,\ldots,x_n])$, waarin D een diagonaalmatrix is met op de diagonaal de eigenwaarden van λ_i. Definieer $\psi = (V,[x_1,\ldots,x_n]) \xrightarrow{D'} (V,[x_1,\ldots,x_n])$ met D' de diagonaalmatrix die als diagonaalelementen $\sqrt{\lambda_i}$ heeft, zodat $D = (D')^2$.

V.3.67 ϕ is een loodrechte projectie op het vlak $\{\lambda(2E_1+2E_2-E_3) + \mu(E_1-2E_2-2E_3) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$. Symmetrie volgt bijvoorbeeld uit V V.3.63.

V.3.69 a) Zij $x \in \mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi)$; dan is $\phi(x) = 0$ en er is een $y \in V$ met $\phi(y) = x$, dus $\phi^2(y) = \phi(x) = 0$. Maar $\phi^2(y) = \phi(y) = x$, dus $x = 0$.

d) (i) Zij ϕ symmetrisch. Zij $x \in \mathrm{Im}(\phi)$, $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Er is een $z \in V$ met $\phi(z) = x$. $< x,y > = < \phi(z),y > = < z,\phi(y) > = < z,0 > = 0$. (ii) $< x,\phi(y) > = < x-\phi(x) + \phi(x),\phi(y) > = < \phi(x),\phi(y) >$ (want $x - \phi(x) \in \mathrm{Ker}(\phi)$), $< y,\phi(x) > \doteq < y-\phi(y) + \phi(y), \phi(x) > = < \phi(y),\phi(x) >$.

e) In de linkerbovenhoek van A komt I_r, op de overige plaatsen staan nullen.

V.3.70 a) $P_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ P$, $P_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-E_1+E_2)$, $P_3 = \frac{1}{6}\sqrt{6}(E_1+E_2+2E_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Spiegeling t.o.v. W.

c)

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

V.3.71 (i) Aangezien $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) = 1$ en $a \in \mathrm{Im}(\phi)$, $a \neq 0$ is $\mathrm{Im}(\phi) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Aangezien $\phi(a) \in \mathrm{Im}(\phi)$ is er een λ zodat $\phi(a) = \lambda a$.

(iii) Omdat A symmetrisch is, bestaat er een orthonormale basis van eigenvectoren $[b_1,b_2,b_3]$ van ϕ. Neem $b_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}\ a$; b_2 en b_3 horen bij de eigenwaarde 0, dus $b_2,b_3 \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dus $a \in \{\mathrm{Ker}(\phi)\}^{\perp}$.

(iv) Noem

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

neem dan $b_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\, b$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\, c$. Schrijf

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

(iii) dan is

$$< \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a > = \alpha < a,a >,$$

dus $\alpha = \frac{1}{3}$ en

$$a = \phi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\ \phi(a) = \frac{1}{3}\lambda\ a,$$

als λ de eigenwaarde bij a is; dus $\lambda = 3$. Schrijf $e_1 =$
$= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$, dan is $\alpha_1 = \frac{1}{6}$ en $\phi(e_1) = \alpha_1 \lambda a = \frac{1}{2}a$; etc.
Zo ontstaat

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

MCS 1.1 F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, *Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis*, 1965. ISBN 90 6196 014 2.

MCS 1.2 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening*, 1965. ISBN 90 6196 015 0.

MCS 1.3 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek*, 1966. ISBN 90 6196 016 9.

MCS 1.4 G. DE LEVE & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens, en wachttijden*, 1966. ISBN 90 6196 017 7.

MCS 1.5 J. KRIENS & G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde*, 1966. ISBN 90 6196 018 5.

MCS 1.6a B. DORHOUT & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 032 0.

MCS 1.7a G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 033 9.

MCS 1.7b G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2*, 1970. ISBN 90 6196 055 X.

MCS 1.7c G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, 1971. ISBN 90 6196 066 5.

MCS 1.8 J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*, 1968. ISBN 90 6196 034 7.

MCS 2.1 G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 023 1.

MCS 2.2 L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 035 5.

MCS 3.1 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 024 X.

MCS 3.2 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 036 3.

MCS 3.3 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 3*, 1968. ISBN 90 6196 043 6.

MCS 4 H.A. LAUWERIER, *Representaties van groepen*, 1968. ISBN 90 6196 037 1.

MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, *Colloquium discrete wiskunde*, 1968. ISBN 90 6196 044 4.

MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969. ISBN 90 6196 045 2.

MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.

MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.

MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969. ISBN 90 6196 056 8.

MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970. ISBN 90 6196 048 7.

MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970. ISBN 90 6196 049 5.

MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.

MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971. ISBN 90 6196 067 3.

MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.

MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.

MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatietheorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.

MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.

MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.

MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975. ISBN 90 6196 118 1.

MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.

MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.

MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.

MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.

MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.

MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.

MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.TH. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.

MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.

MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975. ISBN 90 6196 103 3.

* MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOOF, *Asymptotische methoden in de statistiek*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.

MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 X.

* MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.

MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden* , 1974. ISBN 90 6196 106 8.

MCS 25 *Colloquium Structuur van Programmeertalen*, 1976. ISBN 90 6196 116 5.

MCS 26.1 N.M. TEMME (red.), *Nonlinear Analysis, volume 1*, 1976. ISBN 90 6196 117 3.

MCS 26.2 N.M. TEMME (red.), *Nonlinear Analysis, volume 2*, 1976. ISBN 90 6196 121 1.

MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discreteringmethoden*, 1976. ISBN 90 6196 124 6.

* MCS 28 N.M. TEMME (red.), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976. ISBN 90 6196 126 2.

* MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Numerieke Programmatuur, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 128 9.

MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de Coderingstheorie*, 1976. ISBN 90 6196 136 X.

* MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976. ISBN 90 6196 137 8.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.