MC SYLLABUS 17.2

P.S. STOBBE

LINEAIRE ALGEBRA

DEEL 2

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1973

AMS (MOS) onderwerpen classificatie schema (1970): 15-01

ISBN 90 6196 091 6

Inhoud

III. Lineaire endomorphismen

§III.1. Multilineaire functies

III.1.1 Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Dan is, voor elke $n \in \mathbb{N}$, V^n de verzameling van alle elementen van de vorm $(v_1,\ldots, v_n)$ waarbij $v_i \in V$ $(i = 1,\ldots, n)$. (cf. I.1.45). Twee van deze elementen $(v_1,\ldots, v_n)$ en $(w_1,\ldots, w_n)$ zijn gelijk dan en slechts dan als $v_1 = w_1,\ldots, v_n = w_n$. We kunnen V^n dus opvatten als de verzameling van alle n-tupels uit V en zullen dan ook in deze paragraaf $[v_1,\ldots, v_n]$ noteren in plaats van $(v_1,\ldots, v_n)$.

III.1.2 Definitie: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $n \in \mathbb{N}$. Een afbeelding

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

heet een n-lineaire functie op V als voldaan is aan de volgende twee voorwaarden:

(i) Voor $i = 1,\ldots, n$ en voor elk tweetal n-tupels

$$[v_1,\ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1},\ldots, v_n] \; ; \; [v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_n]$$

uit V geldt:

$$f[v_1,\ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1},\ldots, v_n] + f[v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_n] =$$

$$= f[v_1,\ldots, v_{i-1}, a+b, v_{i+1},\ldots, v_n].$$

(ii) Voor elk n-tupel $[v_1,\ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1},\ldots, v_n]$ uit V en elke $\lambda \in \mathbb{F}$ geldt:

$$f[v_1,\ldots, v_{i-1}, \lambda a, v_{i+1},\ldots, v_n] = \lambda . f[v_1,\ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1},\ldots, v_n].$$

III.1.3 Terminologie: Een 2-lineaire functie op een $\mathbb{F}$-vectorruimte V heet een bilineaire functie op V.

III.1.4 Voorbeeld: Beschouw de afbeelding

$$f : (\mathbb{R}_3)^2 \to \mathbb{R}$$

die gegeven wordt door:

$$f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\right] = 2\alpha_1(\beta_2-\beta_3) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3).$$

We laten zien dat f een bilineaire functie is op $\mathbb{R}_3$. Hiertoe controleren we de voorwaarden (i) en (ii) van III.1.2:

<u>ad (i)</u>: We moeten bewijzen dat voor elk drietal vectoren u, v, w uit $\mathbb{R}_3$ geldt: $f[u,v] + f[u,w] = f[u,v+w]$ en $f[u,v] + f[w,v] = f[u+w,v]$. Welnu, als

$$u = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \quad ; \quad w = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$$

dan vinden we:

$$f[u,v] + f[u,w] = f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \{2\alpha_1(\beta_2-\beta_3) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\} +$$

$$+ \{2\alpha_1(\gamma_2-\gamma_3) + \alpha_2\gamma_1 - \alpha_3(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\} =$$

$$= 2\alpha_1((\beta_2+\gamma_2)-(\beta_3+\gamma_3)) + \alpha_2(\beta_1+\gamma_1) - \alpha_3((\beta_1+\gamma_1)+(\beta_2+\gamma_2)+(\beta_3+\gamma_3)) =$$

$$= f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1+\gamma_1\\ \beta_2+\gamma_2\\ \beta_3+\gamma_3\end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\right] = f[u,v+w]$$

en ook:

$$f[u,v] + f[w,v] = f\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \{2\alpha_1(\beta_2-\beta_3) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\} +$$

$$+ \{2\gamma_1(\beta_2-\beta_3) + \gamma_2\beta_1 - \gamma_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\} =$$

$$= 2(\alpha_1+\gamma_1)(\beta_2-\beta_3) + (\alpha_2+\gamma_2)\beta_1 - (\alpha_3+\gamma_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3) =$$

$$= f[\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_1\\ \alpha_2+\gamma_2\\ \alpha_3+\gamma_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = f[u+w,v].$$

Voorwaarde (i) is hiermee geverifieerd.

<u>ad (ii)</u>: We moeten aantonen dat voor ieder tweetal vectoren $u,v \in \mathbb{R}_3$ en elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt: $f[\lambda u,v] = \lambda\cdot f[u,v]$ en $f[u,\lambda v] = \lambda\cdot f[u,v]$. Als weer

$$u = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix},$$

dan geldt:

$$f[\lambda u,v] = f[\lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = f[\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \lambda\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] =$$

$$= 2(\lambda\alpha_1)(\beta_2-\beta_3) + (\lambda\alpha_2)\beta_1 - (\lambda\alpha_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3) =$$

$$= \lambda\{2\alpha_1(\beta_2-\beta_3) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\} =$$

$$= \lambda\cdot f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = \lambda\cdot f[u,v].$$

Ook geldt:

$$f[u,\lambda v] = f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \lambda\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\beta_1\\ \lambda\beta_2\\ \lambda\beta_3\end{pmatrix}] =$$

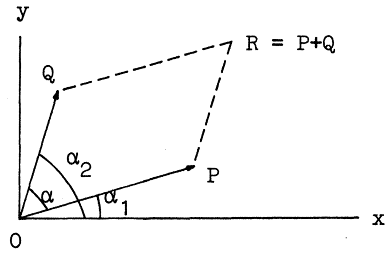
$$= 2\alpha_1(\lambda\beta_2-\lambda\beta_3) + \alpha_2(\lambda\beta_1) - \alpha_3(\lambda\beta_1+\lambda\beta_2+\lambda\beta_3) =$$

$$= \lambda\{2\alpha_1(\beta_2-\beta_3) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\} =$$

$$= \lambda\cdot f[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}] = \lambda\cdot f[u,v].$$

Hiermee is gecontroleerd dat f een bilineaire functie is op $\mathbb{R}_3$.

III.1.5 Voorbeeld:



Kies in $\mathbb{E}_2$ twee vectoren P en Q, zeg gegeven door:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$$

(cf. II.1.8). Zij α de hoek tussen de rechten OP en OQ, gemeten vanaf OP in de richting tegen de klok in. Zij α_1 (resp. α_2) de hoek tussen de positieve x-as en de rechte OP (resp. OQ), gemeten vanaf de positieve x-as in de richting tegen de klok in. Noteer voorts $|OP|$ (resp. $|OQ|$) voor de lengte van het lijnstuk OP (resp. OQ). (Dan is, als R = P + Q, $|OP|\cdot|OQ|\cdot|\sin\alpha|$ de oppervlakte van het parallellogram OPRQ.) Definieer nu de afbeelding

$$f : (\mathbb{E}_2)^2 \to \mathbb{R}$$

met:

$$f[P,Q] = |OP|\cdot|OQ|\cdot\sin\alpha.$$

Wegens $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ is

$$f[P,Q] = |OP|\cdot|OQ|\cdot\sin(\alpha_2-\alpha_1) =$$

$$= |OP|\cdot|OQ|\cdot(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) =$$

$$= |OP|\cdot|OQ|\cdot\left(\frac{y_Q}{|OQ|}\,\frac{x_P}{|OP|} - \frac{x_Q}{|OQ|}\,\frac{y_P}{|OP|}\right) =$$

$$= x_P y_Q - y_P x_Q.$$

Hiermee controlere de lezer zelf dat f een bilineaire functie is op $\mathbb{E}_2$.

III.1.6 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $n \in \mathbb{N}$. Een n-lineaire functie

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

heet een <u>antisymmetrische n-lineaire functie op</u> V als voor iedere n-permutatie τ die een verwisseling is en voor elk n-tupel $[v_1, \ldots, v_n]$ uit V geldt:

$$f[v_1, \ldots, v_n] = - f[v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}].$$

III.1.7 <u>Voorbeeld</u>: Zij

$$f : (\mathbb{E}_2)^2 \to \mathbb{R}$$

de in III.1.5 gedefinieerde bilineaire functie op $\mathbb{E}_2$, gegeven door:

$$f[P,Q] = x_P y_Q - y_P x_Q.$$

Dan is f wegens

$$f[P,Q] = x_P y_Q - y_P x_Q = -(x_Q y_P - y_Q x_P) = -f[Q,P]$$

antisymmetrisch.

III.1.8 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de afbeelding:

$$f : (\mathbb{R}_3^*)^2 \to \mathbb{R}$$

die gegeven wordt door:

$$f[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)] = \alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_3 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 + 2\alpha_3\beta_2 - \alpha_1\beta_3.$$

Ga na dat f een bilineaire functie is op $\mathbb{R}_3^*$. Ook is f antisymmetrisch. We moeten hiertoe verifiëren dat voor ieder tweetal vectoren $u,v \in \mathbb{R}_3^*$ geldt: $f[u,v] = -f[v,u]$. Welnu, als

$$u = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \qquad ; \qquad v = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

dan vinden we:

$$\begin{aligned} f[u,v] &= f[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)] = \\ &= \alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_3 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 + 2\alpha_3\beta_2 - \alpha_1\beta_3 = \\ &= -(\beta_1\alpha_2 - 2\beta_2\alpha_3 - \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_1 + 2\beta_3\alpha_2 - \beta_1\alpha_3) = \\ &= -f[(\beta_1,\beta_2,\beta_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)] = -f[v,u]. \end{aligned}$$

III.1.9 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

een n-lineaire functie op V. Dan is f antisymmetrisch dan en slechts dan als voor ieder n-tupel $[v_1,\ldots, v_n]$ uit V, waarin twee vectoren v_i en v_j $(i \neq j)$ gelijk zijn, geldt: $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$.

Bewijs: Veronderstel eerst dat f antisymmetrisch is. Zij $[v_1,\ldots, v_n]$ een n-tupel uit V met $v_i = v_j$ en $i \neq j$. We moeten bewijzen dat $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$. Noteer hiertoe

$$\tau = \tau^{(n)}_{i,j}$$

(cf. I.2.24). Dan ontstaat het n-tupel $[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}]$ uit $[v_1,\ldots, v_n]$ door v_i en v_j onderling van plaats te verwisselen. Omdat $v_i = v_j$ volgt hieruit:

$$[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}] = [v_1,\ldots, v_n]$$

en derhalve

$$f[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}] = f[v_1,\ldots, v_n]. \qquad (*)$$

Ook geldt, omdat f antisymmetrisch is:

$$f[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}] = -f[v_1,\ldots, v_n]. \qquad (**)$$

Uit (*) en (**) volgt: $f[v_1,\ldots, v_n] = -f[v_1,\ldots, v_n]$, zodat $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$.

Neem nu aan dat voor elk n-tupel $[v_1, \ldots, v_n]$ uit V, waarin twee vectoren v_i en v_j $(i \neq j)$ gelijk zijn, geldt: $f[v_1, \ldots, v_n] = 0$. We moeten dan bewijzen dat f antisymmetrisch is.

Kies een willekeurig n-tupel uit V, zeg:

$$[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n].$$

Het n-tupel, hieruit verkregen door de i^e en de j^e vector te verwisselen is dan:

$$[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \ldots, v_n]$$

en we moeten aantonen dat beide n-tupels een tegengesteld beeld hebben onder f. Welnu, f is n-lineair, zodat geldt, rekening houdend met het gegeven dat het beeld van een n-tupel,waarin twee gelijke vectoren voorkomen onder f, 0 is:

$$0 = f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a+b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a+b, v_{j+1}, \ldots, v_n] =$$

$$= f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a+b, v_{j+1}, \ldots, v_n] +$$

$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a+b, v_{j+1}, \ldots, v_n] =$$

$$= f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \ldots, v_n] +$$

$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n] +$$

$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \ldots, v_n] +$$

$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n] =$$

$$= 0 + f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n] +$$

$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1}, \ldots, v_n] + 0,$$

zodat inderdaad

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n] =$$

$$= -f[v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_{j-1}, a, v_{j+1},\ldots, v_n] ,$$

waarmee de opmerking bewezen is. □

III.1.10 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

een n-lineaire functie op V. Dan is f antisymmetrisch dan en slechts dan als voor ieder lineair afhankelijk stelsel $[v_1,\ldots, v_n]$ van V geldt: $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$.

Bewijs (i): Veronderstel eerst dat f antisymmetrisch is. Zij $[v_1,\ldots, v_n]$ een lineair afhankelijk stelsel van V. We moeten bewijzen dat $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$. Welnu, zij

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

$(\lambda_1,\ldots, \lambda_n \in \mathbb{F})$, waarbij niet alle getallen λ_i zul zijn. Zeg: $\lambda_k \neq 0$. Dan volgt:

$$v_k = -\lambda_k^{-1}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1}v_{k-1} + \lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n)$$

of, als we gemakshalve noteren: $\mu_i = -\lambda_k^{-1}\lambda_i$ $(i = 1,\ldots, k-1, k+1,\ldots, n)$:

$$v_k = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{k-1}v_{k-1} + \mu_{k+1}v_{k+1},\ldots, + \mu_n v_n =$$

$$= \sum_{i\neq k} \mu_i v_i .$$

Dan volgt, gebruik makend van de n-lineariteit van f:

$$f[v_1,\ldots, v_n] = f[v_1,\ldots, v_{k-1}, \sum_{i\neq k} \mu_i v_i, v_{k+1},\ldots, v_n] =$$

$$= \sum_{i\neq k} f[v_1,\ldots, v_{k-1}, \mu_i v_i, v_{k+1},\ldots, v_n] =$$

$$= \sum_{i\neq k} \mu_i f[v_1,\ldots, v_{k-1}, v_i, v_{k+1},\ldots, v_n]. \qquad (*)$$

Nu komt, als $i \neq k$, in het n-tupel $[v_1,\ldots, v_{k-1}, v_i, v_{k+1},\ldots, v_n]$ de vector

v_i op twee verschillende plaatsen voor, zodat volgens III.1.9 geldt:

$$f[v_1,\ldots, v_{k-1}, v_i, v_{k+1},\ldots, v_n] = 0 \quad \text{als } i \neq k.$$

Dus volgt hiermee uit (*) dat $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$.

<u>Bewijs (ii)</u>: Veronderstel nu omgekeerd dat f een n-lineaire functie op V is met de eigenschap dat voor elk lineair afhankelijk stelsel $[v_1,\ldots, v_n]$ uit V $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$ is. We moeten dan bewijzen dat f antisymmetrisch is.

Omdat elk n-tupel $[v_1,\ldots, v_n]$ uit V waarin op twee verschillende plaatsen dezelfde vector voorkomt een lineair afhankelijk stelsel is van V, is voor elk zo'n n-tupel $f[v_1,\ldots, v_n] = 0$. Volgens III.1.9 is dan f antisymmetrisch. □

III.1.11 <u>Gevolg</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte van dimensie</u> n, <u>en is</u>

$$f : V^m \to \mathbb{F}$$

<u>een antisymmetrische m-lineaire functie op</u> V, <u>terwijl</u> $m > n$, <u>dan is voor ieder m-tupel</u> $[v_1,\ldots, v_m]$ <u>uit</u> V $f[v_1,\ldots, v_m] = 0$.

<u>Bewijs</u>: Kies een willekeurig m-tupel $[v_1,\ldots, v_m]$ uit V. Omdat $m > n$ is, kan dit m-tupel volgens II.2.40 geen lineair onafhankelijk stelsel van V zijn. Dus is elk m-tupel uit V een lineair afhankelijk stelsel van V en volgt de bewering direkt uit III.1.10. □

III.1.12 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte en</u>

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

<u>een antisymmetrische n-lineaire functie op</u> V. <u>Dan geldt voor elk n-tupel</u> $[v_1,\ldots, v_n]$ <u>uit</u> V <u>en elke n-permutatie</u> σ:

$$f[v_{\sigma(1)},\ldots, v_{\sigma(n)}] = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot f[v_1,\ldots, v_n].$$

<u>Bewijs</u>: Als $n = 1$ valt er niets te bewijzen. We mogen dus aannemen dat $n \geq 2$. Volgens I.2.34 bestaan er dan verwisselingen $\tau_1,\ldots, \tau_s$ zodat

$\sigma = \tau_s \circ \tau_{s-1} \circ \ldots \circ \tau_1$. We bewijzen de opmerking nu met volledige inductie naar s.

Als $s = 1$, dan is $\sigma = \tau_1$ een verwisseling. Dan is $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ volgens I.2.44 en volgt de opmerking direkt uit definitie III.1.6.

Stel nu dat de opmerking bewezen is voor iedere n-permutatie die te schrijven is als samenstelling van $s - 1$ verwisselingen. Noteer: $\tau = \tau_{s-1} \circ \tau_{s-2} \circ \ldots \circ \tau_1$. Dan is $\sigma = \tau_s \circ \tau$ en volgens de inductie-aanname geldt:

$$f[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}] = \mathrm{sign}(\tau)\cdot f[v_1,\ldots, v_n]. \qquad (*)$$

Omdat $\sigma = \tau_s \circ \tau$, is

$$[v_{\sigma(1)},\ldots, v_{\sigma(n)}] = [v_{\tau_s(\tau(1))},\ldots, v_{\tau_s(\tau(n))}],$$

zodat $[v_{\sigma(1)},\ldots, v_{\sigma(n)}]$ uit $[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}]$ ontstaat door toepassing van de verwisseling τ_s. Volgens definitie III.1.6 is dan

$$f[v_{\sigma(1)},\ldots, v_{\sigma(n)}] = -f[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}]. \qquad (**)$$

Nu is wegens $\sigma = \tau_s \circ \tau$ volgens I.2.46:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\tau_s)\cdot \mathrm{sign}(\tau).$$

Omdat τ_s een verwisseling is, is volgens I.2.44 $\mathrm{sign}(\tau_s) = -1$. Dus volgt uit (*) en (**):

$$f[v_{\sigma(1)},\ldots, v_{\sigma(n)}] = -f[v_{\tau(1)},\ldots, v_{\tau(n)}] =$$

$$= -\,\mathrm{sign}(\tau)\cdot f[v_1,\ldots, v_n] = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot f[v_1,\ldots, v_n],$$

zodat de opmerking bewezen is. □

III.1.13 <u>Stelling</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en is</u> $\lambda \in \mathbb{F}$, <u>dan is er hoogstens één antisymmetrische n-lineaire functie</u>

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

<u>met de eigenschap dat</u> $f[a_1,\dots, a_n] = \lambda$.

<u>Bewijs</u>: We moeten bewijzen dat, als

$$f : V^n \to \mathbb{F} \qquad \text{en} \qquad g : V^n \to \mathbb{F}$$

twee antisymmetrische n-lineaire functies zijn op V met de eigenschap dat $f[a_1,\dots, a_n] = \lambda = g[a_1,\dots, a_n]$, dan f en g gelijk zijn; met andere woorden: dat dan voor ieder n-tupel $[v_1,\dots, v_n]$ uit V geldt: $f[v_1,\dots, v_n] = g[v_1,\dots, v_n]$.

Kies hiertoe een willekeurig n-tupel $[v_1,\dots, v_n]$ uit V. Omdat $[a_1,\dots, a_n]$ een basis is van V, kunnen we elke v_k op precies één manier schrijven als lineaire combinatie van $[a_1,\dots, a_n]$ (cf. II.4.13). Zeg:

$$v_k = \lambda_{1k}a_1 + \lambda_{2k}a_2 + \dots + \lambda_{nk}a_n = \sum_{i_k=1}^{n} \lambda_{i_k k}a_{i_k} \qquad (k=1,\dots,n).$$

Omdat f een n-lineaire functie is op V krijgen we:

$$\begin{aligned} f[v_1,\dots, v_n] &= f[\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1 1}a_{i_1},\dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n n}a_{i_n}] = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} f[\lambda_{i_1 1}a_{i_1},\dots, \lambda_{i_n n}a_{i_n}] = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1 1} \dots \lambda_{i_n n}\, f[a_{i_1},\dots, a_{i_n}]. \qquad (*) \end{aligned}$$

Nu is, omdat f antisymmetrisch is, volgens III.1.9 $f[a_{i_1},\dots, a_{i_n}] = 0$ als er onder de indices $i_1,\dots, i_n$ twee gelijk zijn. Komen onder de indices $i_1,\dots, i_n$ niet twee gelijken voor, dan is $[i_1,\dots, i_n]$ een n-permutatie, zodat in dat geval volgens III.1.12 geldt:

$$f[a_{i_1},\dots, a_{i_n}] = \operatorname{sign}(i_1,\dots, i_n)\, f[a_1,\dots, a_n].$$

Dus, als we noteren:

$$\begin{cases} s[i_1,\dots, i_n] = \operatorname{sign}(i_1,\dots, i_n) & \text{als } [i_1,\dots, i_n] \text{ een n-permutatie is,} \\ s[i_1,\dots, i_n] = 0 & \text{als er onder de indices } i_1,\dots, i_n \text{ twee gelijk zijn,} \end{cases}$$

dan kunnen we (*) in de vorm

$$f[v_1,\ldots, v_n] =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1 1} \ldots \lambda_{i_n n}\ s[i_1,\ldots, i_n]\ f[a_1,\ldots, a_n] \qquad (**)$$

schrijven. Analoog hebben we voor g:

$$g[v_1,\ldots, v_n] =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1 1} \ldots \lambda_{i_n n}\ s[i_1,\ldots, i_n]\ g[a_1,\ldots, a_n]. \qquad (***)$$

En, omdat

$$g[a_1,\ldots, a_n] = \lambda = f[a_1,\ldots, a_n]$$

volgt uit (**) en (***):

$$f[v_1,\ldots, v_n] =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1 1} \ldots \lambda_{i_n n}\ s[i_1,\ldots, i_n]\lambda = g[v_1,\ldots, v_n],$$

zodat de stelling bewezen is. □

III.1.14 <u>Voorbeeld</u>: Ter illustratie van het voorgaande herhalen we hieronder het bewijs van III.1.13 in het geval n = 2.

Laat V een 2-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte zijn met basis $[a_1,a_2]$ en laten

$$f : V^2 \to \mathbb{F} \qquad \text{en} \qquad g : V^2 \to \mathbb{F}$$

twee antisymmetrische bilineaire functies op V zijn. We kiezen een getal $\lambda \in \mathbb{F}$ en veronderstellen dat $f[a_1,a_2] = \lambda = g[a_1,a_2]$. We willen bewijzen dat dan voor een willekeurig gekozen 2-tupel $[v_1,v_2]$ uit V geldt dat $f[v_1,v_2] = g[v_1,v_2]$.

Welnu, laat

$$v_1 = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{21}a_2 \qquad ; \qquad v_2 = \lambda_{12}a_1 + \lambda_{22}a_2 .$$

Dan is:

$$\begin{aligned}
f[v_1,v_2] &= f[\lambda_{11}a_1 + \lambda_{21}a_2, \lambda_{12}a_1 + \lambda_{22}a_2] = \\
&= f[\lambda_{11}a_1, \lambda_{12}a_1] + f[\lambda_{11}a_1, \lambda_{22}a_2] + \\
&\quad + f[\lambda_{21}a_2, \lambda_{12}a_1] + f[\lambda_{21}a_2, \lambda_{22}a_2] = \\
&= \lambda_{11}\lambda_{12}\ f[a_1,a_1] + \lambda_{11}\lambda_{22}\ f[a_1,a_2] + \\
&\quad + \lambda_{21}\lambda_{12}\ f[a_2,a_1] + \lambda_{21}\lambda_{22}\ f[a_2,a_2] = \\
&= 0 + \lambda_{11}\lambda_{22}\ f[a_1,a_2] + \lambda_{21}\lambda_{12}\ f[a_2,a_1] + 0 = \\
&= \lambda_{11}\lambda_{22}\ f[a_1,a_2] - \lambda_{21}\lambda_{12}\ f[a_1,a_2] = \\
&= (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12})f[a_1,a_2] = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12})\lambda. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Evenzo laat men zien dat

$$g[v_1,v_2] = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12})\lambda, \qquad (**)$$

zodat uit (*) en (**) inderdaad volgt dat $f[v_1,v_2] = g[v_1,v_2]$ voor ieder 2-tupel $[v_1,v_2]$ uit V. Met andere woorden: $f = g$.

* * *

§III.2. Determinanten

III.2.1 <u>Stelling</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$. <u>Dan is er precies één antisymmetrische n-lineaire functie</u>

$$f : V^n \to \mathbb{F}$$

<u>op</u> V <u>met de eigenschap dat</u> $f[a_1,\ldots, a_n] = 1$.

<u>Bewijs</u>: Volgens stelling III.1.13 is er hoogstens één zo'n antisymmetrische n-lineaire functie. Als we in staat zijn een antisymmetrische n-lineaire functie $f : V^n \to \mathbb{F}$ met $f[a_1,\ldots, a_n] = 1$ te construeren, is de stelling derhalve bewezen.

We gaan eerst een afbeelding $f : V^n \to \mathbb{F}$ construeren en daarna bewijzen dat f aan alle verlangde eigenschappen voldoet.

Kies een willekeurig n-tupel $[v_1,\dots, v_n]$ uit V. We moeten dan het getal $f[v_1,\dots, v_n] \in \mathbb{F}$ definiëren. Als

$$v_1,\dots, v_n = \begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots \\ \lambda_{n1}\end{pmatrix},\dots, \begin{pmatrix}\lambda_{1n}\\ \vdots \\ \lambda_{nn}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]),$$

dan hebben we bij $[v_1,\dots, v_n]$ de vierkante matrix

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix}.$$

Definieer nu:

$$f[v_1,\dots, v_n] = \det(A).$$

Hiermee hebben we een afbeelding $f : V^n \to \mathbb{F}$ geconstrueerd. We controleren eerst dat f een n-lineaire functie is op V. Hiertoe verifiëren we de voorwaarden (i) en (ii) van definitie III.1.2.

<u>ad (i)</u>: Kies een willekeurig tweetal n-tupels van de vorm:

$$[v_1,\dots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\dots, v_n] \quad ; \quad [v_1,\dots, v_{i-1}, c, v_{i+1},\dots, v_n].$$

Zeg:

$$v_k = \begin{pmatrix}\lambda_{1k}\\ \vdots \\ \lambda_{nk}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]) \qquad (k = 1,\dots, i-1, i+1,\dots, n)$$

en

$$b,c = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Als

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1,i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{n,i-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,i+1} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,i+1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

dan vinden we:

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n] = \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \begin{matrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{matrix} & \boxed{A_2} \end{pmatrix} ;$$

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, c, v_{i+1}, \ldots, v_n] = \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \begin{matrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{matrix} & \boxed{A_2} \end{pmatrix} ;$$

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b+c, v_{i+1}, \ldots, v_n] = \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \begin{matrix} \beta_1+\gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_n+\gamma_n \end{matrix} & \boxed{A_2} \end{pmatrix},$$

zodat uit I.4.12 direkt volgt:

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n] +$$
$$+ f[v_1, \ldots, v_{i-1}, c, v_{i+1}, \ldots, v_n] =$$
$$= f[v_1, \ldots, v_{i-1}, b+c, v_{i+1}, \ldots, v_n].$$

ad (ii): Kies een willekeurig n-tupel $[v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n]$ uit V en een willekeurig getal $\lambda \in \mathbb{F}$. Laten $v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n$, zowel als A_1 en A_2 gegeven zijn zoals hiervoor. Dan is volgens I.4.13:

$$f[v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda b, v_{i+1}, \ldots, v_n] = \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \begin{matrix} \lambda\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\beta_n \end{matrix} & \boxed{A_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \det\left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{A_1} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{matrix} & \boxed{A_2}\end{array}\right) = \lambda\cdot f[v_1,\ldots,v_{i-1},b,v_{i+1},\ldots,v_n].$$

Hiermee is geverifieerd dat f een n-lineaire functie is op V. Nu controleren we dat f ook antisymmetrisch is. Kies twee verschillende getallen $i,j \in \{1,\ldots, n\}$. Zeg: $i < j$. Beschouw twee n-tupels uit V van de vorm

$$[v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_{j-1}, c, v_{j+1},\ldots, v_n];$$

$$[v_1,\ldots, v_{i-1}, c, v_{i+1},\ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1},\ldots, v_n].$$

(Het tweede ontstaat dus uit het eerste door toepassing van de verwisseling

$$\tau = \tau^{(n)}_{i,j}\ ).$$

Als

$$v_k = \begin{pmatrix}\lambda_{1k}\\ \vdots \\ \lambda_{nk}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) \quad (k=1,..,i-1,i+1,..,j-1,j+1,..,n)$$

en als

$$b,c = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]),$$

terwijl

$$A_1 = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1,i-1}\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{n,i-1}\end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix}\lambda_{1,i+1} & \cdots & \lambda_{1,j-1}\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,i+1} & \cdots & \lambda_{n,j-1}\end{pmatrix} ;$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}\lambda_{1,j+1} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,j+1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix},$$

dan volgt met behulp van I.4.18:

$$f[v_1,\ldots,\ v_{i-1},\ b,\ v_{i+1},\ldots,\ v_{j-1},\ c,\ v_{j+1},\ldots,\ v_n] =$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \boxed{A_1} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix} & \boxed{A_2} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{matrix} & \boxed{A_3}\end{array}\right) =$$

$$= -\ \det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \boxed{A_1} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{matrix} & \boxed{A_2} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix} & \boxed{A_3}\end{array}\right) =$$

$$= -\ f[v_1,\ldots,\ v_{i-1},\ c,\ v_{i+1},\ldots,\ v_{j-1},\ b,\ v_{j+1},\ldots,\ v_n],$$

zodat ook de antisymmetrie van f aangetoond is.

Nu blijft nog over te bewijzen dat $f[a_1,\ldots,\ a_n] = 1$. Welnu, wegens

$$a_1,a_2,\ldots,a_n = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\1\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots,\ a_n])$$

is volgens I.4.30

$$f[a_1,\ldots,a_n] = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = \det(I_n) = 1.$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

III.2.2 <u>Opmerking</u>: <u>Als in een vierkante matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>twee verschillende kolommen</u> (<u>resp. twee verschillende rijen</u>) <u>gelijk zijn, dan is</u> $\det(A) = 0$.

<u>Bewijs</u>: Laten de k^e en de l^e kolom van A aan elkaar gelijk zijn. Zij A' de

matrix die we uit A verkrijgen door deze twee kolommen te verwisselen. Dan is $A = A'$, dus $\det(A) = \det(A')$. Echter, volgens I.4.18 is ook $\det(A) = - \det(A')$. Dus is $\det(A) = - \det(A)$ zodat $\det(A) = 0$. Analoog, nu met behulp van I.4.24, voor rijen. □

III.2.3 Opmerking: Is A een vierkante matrix uit $\mathbb{F}$, en ontstaat A' (resp. A'') uit A door de k^e kolom (resp. k^e rij) λ keer op te tellen bij de l^e kolom (resp. l^e rij), dan is $\det(A) = \det(A')$ (resp. $\det(A) = \det(A'')$) $(k \neq l,\ \lambda \in \mathbb{F})$.

Bewijs: Als

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;C\;} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix} & \boxed{\;D\;} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ k^e \text{ kolom} & l^e \text{ kolom} \end{array}$$

dan hebben we, gebruik makend van I.4.12, I.4.13 en III.2.2,

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;C\;} & \begin{matrix}\beta_1+\lambda\alpha_1\\ \vdots\\ \beta_n+\lambda\alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;D\;} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;C\;} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix} & \boxed{\;D\;} \end{pmatrix} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;C\;} & \begin{matrix}\lambda\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{matrix} & \boxed{\;D\;} \end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) + \lambda \det\begin{pmatrix} B & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{matrix} & C & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{matrix} & D\end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) + 0 = \det(A). \ \square$$

Analoog voor rijen.

III.2.4 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> A <u>een (n × n)-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>is van de vorm</u>

$$A = \begin{pmatrix} B & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_t\end{matrix} & C \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ D & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_s\end{matrix} & E \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow k^e \text{ rij}, \\ \\ \end{matrix}$$

<u>dan geldt</u>:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} B & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & C \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ D & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & E \end{pmatrix}.$$

<u>Bewijs</u>: Deze opmerking volgt door herhaald toepassen van III.2.3. Tel eerst de k^e rij $-\alpha_1$ keer op bij de 1^e rij. We verkrijgen dan de matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}0\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_t\end{matrix} & \boxed{C} \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ \boxed{D} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{matrix} & \boxed{E}\end{pmatrix}$$

waarvan de determinant volgens III.2.3 gelijk is aan det(A). Tel nu de k^e rij van A_1 $-\alpha_2$ keer op bij de 2^e rij, enz., enz. We krijgen, zo doorgaande tot de (k-1)-ste rij, de matrix

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{C} \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ \boxed{D} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{matrix} & \boxed{E}\end{pmatrix}$$

waarvan de determinant nog steeds gelijk aan det(A) is. Nu de k^e rij $-\beta_1$ keer optellen bij de (k+1)-ste rij, enz., enz. Uiteindelijk volgt de opmerking. □

III.2.5 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> A <u>een $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>is van de vorm</u>

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{C} \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ \boxed{D} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{E}\end{pmatrix} & \leftarrow k^e \text{ rij} \\ \uparrow \\ 1^e \text{ kolom} & \end{array}$$

<u>dan is</u>

$$\det(A) = (-1)^{k+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \ \cdots & 0 \\ 0 & \begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline D & E \\ \hline \end{array} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} .$$

<u>Bewijs</u>: Verwissel de k^e rij van A met de $(k-1)^e$ rij, vervolgens in de nieuw verkregen matrix de $(k-1)^e$ rij met de $(k-2)^e$ rij, enz., enz. Zo krijgt men na k-1 verwisselingen van steeds twee rijen een matrix A' die als eerste rij heeft de k^e rij van A, terwijl de 2^e rij tot en met de k^e rij van A' respectievelijk de 1^e rij tot en met de $(k-1)^e$ rij van A zijn, die derhalve een plaats zijn opgeschoven:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \boxed{\quad B \quad} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \boxed{\quad C \quad} \\ \boxed{\quad D \quad} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \boxed{\quad E \quad} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ l^e \text{ kolom} \end{array} .$$

Omdat A' uit A is ontstaan door het achtereenvolgens uitvoeren van verwisselingen van steeds twee rijen, en bij iedere verwisseling van twee rijen de determinant van teken verandert, is

$$\det(A') = (-1)^{k-1}\det(A) . \qquad (*)$$

Net als hiervoor met de rijen gaan we nu te werk met de kolommen. Verwissel eerst de l^e kolom van A' met de $(l-1)^e$ kolom. Verwissel hierna in de nieuw verkregen matrix de $(l-1)^e$ kolom met de $(l-2)^e$ kolom, enz., enz. Na l-1 verwisselingen verkrijgen we de matrix

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & & \\ \vdots & B & C \\ 0 & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & D & E \\ 0 & & \end{array}\right)$$

waarbij

$$\det(A'') = (-1)^{l-1}\det(A').$$

Met (*) volgt hieruit:

$$\det(A'') = (-1)^{l+k-2}\det(A) = (-1)^{l+k}\det(A),$$

of, wat hetzelfde is,

$$\det(A) = (-1)^{l+k}\det(A'')$$

(ga na!), zodat de opmerking bewezen is. □

III.2.6 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>geldt</u>:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right) = \det(A).$$

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V en kies een basis $[a_1, \ldots, a_n]$ van V. Als $[v_1, \ldots, v_n]$ een willekeurig n-tupel uit V is, zeg:

$$v_1, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]),$$

dan kunnen we aan dit n-tupel twee matrices toevoegen:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

We hebben nu twee afbeeldingen $d : V^n \to F$ en $\phi : V^n \to F$, gedefinieerd door respectievelijk:

$$d[v_1,\ldots, v_n] = \det(B) \;;\; \phi[v_1,\ldots, v_n] = \det(B').$$

Uit het bewijs van III.2.1 weten we al dat d een antisymmetrische n-lineaire functie is op V met $d[a_1,\ldots, a_n] = 1$. Als we nu kunnen bewijzen dat ook ϕ een antisymmetrische n-lineaire functie is op V met $\phi[a_1,\ldots, a_n] = 1$, dan is volgens III.2.1 $\phi = d$. We controleren hier alleen de voorwaarde (i) van III.1.2 en laten zowel de verificatie van voorwaarde III.1.2 (ii), als van de antisymmetrie van ϕ over aan de lezer. (Doen!)

Kies een willekeurig tweetal n-tupels uit V van de vorm

$$[v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_n];$$

$$[v_1,\ldots, v_{i-1}, c, v_{i+1},\ldots, v_n].$$

Als

$$v_k = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) \quad (k = 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n),$$

terwijl

$$b,c = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]),$$

en als we verder noteren:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1,i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{n,i-1} \end{pmatrix} ; \; E_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,i+1} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,i+1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} ,$$

dan vinden we met behulp van I.4.12:

$$\phi[v_1,\ldots, v_{i-1}, b+c, v_{i+1},\ldots, v_n] =$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \hline 0 & & \beta_1+\gamma_1 & \\ \vdots & E_1 & \vdots & E_2 \\ 0 & & \beta_n+\gamma_n & \end{array}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \hline 0 & & \beta_1 & \\ \vdots & E_1 & \vdots & E_2 \\ 0 & & \beta_n & \end{array}\right) + \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \hline 0 & & \gamma_1 & \\ \vdots & E_1 & \vdots & E_2 \\ 0 & & \gamma_n & \end{array}\right) =$$

$$= \phi[v_1,\ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1},\ldots, v_n] +$$

$$+ \phi[v_1,\ldots, v_{i-1}, c, v_{i+1},\ldots, v_n] ,$$

zodat (i) geverifieerd is.

Dus (na verificatie door de lezer van de andere voorwaarden) kunnen we vaststellen dat ϕ een antisymmetrische n-lineaire functie is op V. Ook geldt:

$$\phi[a_1,\ldots, a_n] = \det\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ldots.0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & I_n \\ 0 & \end{array}\right) = \det(I_{n+1}) = 1.$$

(cf. I.4.30).Dus is ϕ = d.

Zij nu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beschouw het n-tupel $[w_1, \ldots, w_n]$ uit V, gegeven door:

$$w_1, \ldots, w_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]),$$

dan volgt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad A \quad} \\ 0 & \end{pmatrix} = \phi[w_1, \ldots, w_n] = d[w_1, \ldots, w_n] = \det(A),$$

waarmee de opmerking bewezen is. □

III.2.7 <u>Stelling</u>: <u>Zij</u>

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>een (n × n)-matrix uit</u> F <u>en zij</u> $k \in \{1, \ldots, n\}$. <u>Dan geldt</u> (cf. I.4.8):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj}(-1)^{k+j}\det(A_{k,j}).$$

<u>Bewijs</u>: Herhaald toepassen van I.4.21 geeft:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{k1} & \cdots & \lambda_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots\cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{k1} & 0 \ \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots\cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1j} & \cdots\cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 \ \ldots \ 0 & & \lambda_{kj} & & 0 \ \ldots \ 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nj} & \cdots\cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ \ldots & 0 & \lambda_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \det\begin{pmatrix} \boxed{B_j} & \begin{matrix}\lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{k-1,j}\end{matrix} & \boxed{C_j} \\ 0\ldots0 & \lambda_{kj} & 0\ldots0 \\ \boxed{D_j} & \begin{matrix}\lambda_{k+1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj}\end{matrix} & \boxed{E_j} \end{pmatrix}.$$

I.4.22 toepassen levert:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} \det\begin{pmatrix} \boxed{B_j} & \begin{matrix}\lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{k-1,j}\end{matrix} & \boxed{C_j} \\ 0\ldots.0 & 1 & 0\ldots.0 \\ \boxed{D_j} & \begin{matrix}\lambda_{k+1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj}\end{matrix} & \boxed{E_j} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Nu is volgens III.2.4, III.2.5 voor elke $j \in \{1,\ldots, n\}$:

$$\det\begin{pmatrix} B_j & \begin{matrix}\lambda_{1j}\\ \vdots \\ \lambda_{k-1,j}\end{matrix} & C_j \\ 0\ldots 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ D_j & \begin{matrix}\lambda_{k+1,j}\\ \vdots \\ \lambda_{nj}\end{matrix} & E_j \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B_j & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & C_j \\ 0\ldots 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ D_j & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & E_j \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{j+k} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \ldots \quad 0 \\ \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \begin{array}{|c|c|}\hline B_j & C_j \\ \hline D_j & E_j \\ \hline\end{array} \end{pmatrix},$$

terwijl de ((n-1) × (n-1))-matrix

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|}\hline B_j & C_j \\ \hline D_j & E_j \\ \hline\end{array} \end{pmatrix}$$

uit A ontstaat door de j^e kolom en de k^e rij uit A weg te laten. Deze matrix is dus $A_{k,j}$ (cf. I.4.8). Dus volgt uit (*) met III.2.6:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj}(-1)^{j+k}\det(A_{k,j}), \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \ldots \quad 0 \\ \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \boxed{A_{k,j}} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj}(-1)^{k+j}\det(A_{k,j}) , \qquad (**)$$

zodat de stelling bewezen is. □

III.2.8 Merk op dat de voorgaande stelling ons de mogelijkheid biedt om de determinant van een $(n \times n)$-matrix uit te drukken als som van determinanten van $((n-1) \times (n-1))$-matrices.

III.2.9 Terminologie: Als we, zoals in III.2.7, det(A) schrijven in de vorm (**), dan zeggen we dat we det(A) hebben ontwikkeld naar de k^e rij.

III.2.10 Voorbeeld: Beschouw de (4×4)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ontwikkeling van det(A) naar de 2^e rij geeft:

$$\det(A) = -a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} +$$

$$- a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{24}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

We kunnen een determinant ook naar een kolom ontwikkelen.

III.2.11 Stelling: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbf{F}$. Dan geldt voor iedere $l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jl}(-1)^{j+l}\det(A_{j,l}).$$

Bewijs:

$$A^T = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}, \ \mu_{ij} = \lambda_{ji} \quad (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n).$$

Ontwikkel $\det(A^T)$ naar de 1^e rij:

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j}(-1)^{1+j}\det(A^T_{1,j}). \qquad (*)$$

De lezer controleert gemakkelijk dat geldt:

$$A^T_{1,j} = (A_{j,1})^T.$$

Omdat de determinant van een matrix gelijk is aan de determinant van de getransponeerde matrix volgt hiermee uit (*):

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j1}(-1)^{j+1}\det(A_{j,1})^T =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j1}(-1)^{j+1}\det(A_{j,1}) \qquad (**)$$

waarmee de stelling bewezen is. □

III.2.12 Terminologie: Als we in III.2.11 det(A) in de vorm (**) schrijven, dan zeggen we dat we det(A) hebben ontwikkeld naar de 1^e kolom.

III.2.13 Voorbeeld: We berekenen de determinant van de (3×3)-matrix uit $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

op vier verschillende manieren.

(i) Volgens de definitie van de determinant

De 3-grepen zijn:

$$\begin{pmatrix} \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \end{pmatrix} \quad W_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\},\ \mathrm{sign}(W_1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad W_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\},\ \mathrm{sign}(W_2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix} \quad W_3 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\},\ \mathrm{sign}(W_3) = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad W_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\},\ \mathrm{sign}(W_4) = -1$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \end{pmatrix} \quad W_5 = \{(1,2),(2,1),(3,3)\},\ \mathrm{sign}(W_5) = -1$$

$$\begin{pmatrix} \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix} \quad W_6 = \{(1,1),(2,3),(3,2)\},\ \mathrm{sign}(W_6) = -1$$

We vinden:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{6} A(W_i) = (2\cdot1\cdot1) + (1\cdot2\cdot0) + (4\cdot1\cdot2) +$$

$$- (4\cdot1\cdot0) - (1\cdot1\cdot1) - (2\cdot2\cdot2) = 2 + 0 + 8 - 0 - 1 - 8 = 1.$$

(ii) Ontwikkelen naar de 2^e kolom

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Nu is in het algemeen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

zodat

$$\det(A) = -(1\cdot 1 - 2\cdot 0) + (2\cdot 1 - 4\cdot 0) - 2(2\cdot 2 - 4\cdot 1) =$$

$$= -1 + 2 + 0 = 1.$$

(iii) <u>Ontwikkelen naar de 3^e rij</u>

$$\det(A) = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 - 2(2\cdot 2 - 4\cdot 1) + 1(2\cdot 1 - 1\cdot 1) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

(iv) <u>Door herleiding van A tot een driehoeksmatrix en toepassing van I.4.27 of I.4.28 of I.4.29</u>

Beschouw

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tel de 1^e rij $-\frac{1}{2}$ keer op bij de 2^e rij. We krijgen de matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die -volgens III.2.3- dezelfde determinant heeft als A. Tel nu in A_1 de 2^e rij -4 keer op bij de 3^e rij. We vinden dan de matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ook nu is volgens III.2.3 $\det(A_2) = \det(A_1)$, zodat $\det(A_2) = \det(A)$. Volgens I.4.27 is $\det(A_2) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1$, zodat $\det(A) = 1$.

III.2.14 Opmerking: Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met een basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Als $[v_1,\ldots, v_n]$ het n-tupel is uit V, gegeven door

$$v_1,\ldots,v_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) ,$$

dan geldt: $\det(A) = 0$ dan en slechts dan als $[v_1,\ldots, v_n]$ een lineair afhankelijk stelsel is van V.

Bewijs: Zij $d : V^n \to \mathbb{F}$ de uniek bepaalde antisymmetrische n-lineaire functie op V die voldoet aan $d[a_1,\ldots, a_n] = 1$. Dan is (cf. het bewijs van III.2.1):

$$d[v_1,\ldots, v_n] = \det(A).$$

De opmerking volgt nu rechtstreeks uit III.1.10. ∎

III.2.15 Gevolg: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\phi : V \to V$ een lineair endomorphisme van V en A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat geldt:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan geldt: ϕ is surjectief dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.

Bewijs: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan is het n-tupel $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ uit V gegeven door (cf. II.5.7):

$$\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

Volgens III.2.14 is $\det(A) = 0$ dan en slechts dan als $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ een lineair afhankelijk stelsel van V is. Equivalent hiermee is: $\det(A) \neq 0$ dan en slechts dan als $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V.

(i) Stel eerst dat ϕ surjectief is. Dan is $\mathrm{Im}(\phi) = V$. Volgens II.4.20 is $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ een stelsel voortbrengenden van $\mathrm{Im}(\phi)$, en in dit geval dus van V. Volgens II.3.19 is dit n-tupel dan een basis van V en dus een lineair onafhankelijk stelsel, zodat $\det(A) \neq 0$.

(ii) Is $\det(A) \neq 0$, dan is $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ een lineair onafhankelijk stelsel dat bovendien $\mathrm{Im}(\phi)$ voortbrengt. Dus is dit n-tupel een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$, zodat $\mathrm{Im}(\phi)$ een lineaire deelruimte van V is met dimensie n. Volgens II.3.11 is dan $\mathrm{Im}(\phi) = V$, zodat ϕ surjectief is.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

III.2.16 <u>Lemma</u>: <u>Is</u> V <u>een</u> $\mathbb{F}$<u>-vectorruimte en zijn</u> $\phi : V \to V$ <u>en</u> $\psi : V \to V$ <u>twee endomorphismen van</u> V, <u>dan is, als</u> $\phi \circ \psi : V \to V$ <u>surjectief is, ook</u> ψ <u>surjectief</u>.

<u>Bewijs</u>: We hebben de situatie

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \phi"'] & V \arrow[r, "\psi"] & V \end{tikzcd}.$$

We moeten bewijzen dat er bij elke vector $v \in V$ een vector $w \in V$ bestaat zodat $\psi(w) = v$. Welnu, kies een vector $v \in V$. Omdat $\psi \circ \phi$ surjectief is, bestaat er een $u \in V$ met $(\psi \circ \phi)(u) = v$. Noteer nu: $w = \phi(u)$. Dan geldt:

$$\psi(w) = \psi(\phi(u)) = (\psi \circ \phi)(u) = v,$$

zodat het lemma geldt. □

III.2.17 <u>Gevolg</u>: <u>Als</u> A <u>en</u> B <u>twee $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zijn en als</u> $\det(A) = 0$, <u>dan is ook</u> $\det(AB) = 0$.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Als $\phi : V \to V$ en $\psi : V \to V$ de lineaire endomorphismen van V zijn, gegeven door:

$$\psi = (V,[a_1, \ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (V,[a_1, \ldots, a_n]);$$

$$\phi = (V,[a_1, \ldots, a_n]) \overset{B}{\to} (V,[a_1, \ldots, a_n]),$$

dan wordt $\psi \circ \phi : V \to V$ gegeven door:

$$\psi \circ \phi = (V,[a_1, \ldots, a_n]) \overset{AB}{\to} (V,[a_1, \ldots, a_n])$$

(cf. II.5.25). Als $\det(A) = 0$, dan is volgens III.2.15 ψ niet surjectief. Stel nu: $\det(AB) \neq 0$. Dan is -weer volgens III.2.15- $\psi \circ \phi$ surjectief. Volgens III.2.16 is dan ψ surjectief; tegenspraak. Dus leidt de veronderstelling dat $\det(AB) \neq 0$ tot een tegenspraak. Derhalve is $\det(AB) = 0$. □

III.2.18 <u>Propositie</u>: <u>Zij</u> V <u>een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1, \ldots, a_n]$. <u>Zij</u> $\psi : V \to V$ <u>een surjectief lineair endomorphisme van</u> V. <u>Zij</u>

$$d : V^n \to \mathbb{F}$$

<u>de antisymmetrische n-lineaire functie op</u> V, <u>bepaald door</u> $d[a_1, \ldots, a_n] = 1$. <u>Dan geldt voor ieder n-tupel</u> $[v_1, \ldots, v_n]$ <u>uit</u> V:

$$\frac{d[\psi(v_1), \ldots, \psi(v_n)]}{d[\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)]} = d[v_1, \ldots, v_n]. \qquad (*)$$

<u>Bewijs</u>: ψ is surjectief; dus, omdat $[\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)]$ $\mathrm{Im}(\psi)$ opspant en $\mathrm{Im}(\psi) = V$, is $[\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)]$ een stelsel voortbrengenden van V en der-

halve wegens II.3.19 een basis van V. Dit n-tupel is dus een lineair onafhankelijk stelsel zodat volgens III.1.10 $d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)] \neq 0$. De uitdrukking (*) is dus gedefinieerd.

Definieer de afbeelding

$$\phi : V^n \to \mathbb{F}$$

die aan ieder n-tupel $[w_1,\ldots, w_n]$ uit V toevoegt het beeld

$$\phi[w_1,\ldots, w_n] = \frac{d[\psi(w_1),\ldots, \psi(w_n)]}{d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)]}\,.$$

De lezer verifiëre dat -omdat d een antisymmetrische n-lineaire functie is op V- ook ϕ een antisymmetrische n-lineaire functie is op V. Omdat bovendien

$$\phi[a_1,\ldots, a_n] = \frac{d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)]}{d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)]} = 1$$

volgt met stelling III.2.1 dat $\phi = d$. In het bijzonder is dan

$$\frac{d[\psi(v_1),\ldots, \psi(v_n)]}{d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)]} = \phi[v_1,\ldots, v_n] = d[v_1,\ldots, v_n],$$

hetgeen bewezen moest worden.

III.2.19 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$, <u>en is</u> $\phi : V \to V$ <u>een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van</u> V <u>gegeven door de (n × n)-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>volgens</u>

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

<u>dan is, als</u> d <u>de antisymmetrische n-lineaire functie is op</u> V <u>met</u> $d[a_1,\ldots, a_n] = 1$,

$$d[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)] = \det(A).$$

<u>Bewijs</u>: Ga na! (Vgl. het bewijs van III.2.1.) □

III.2.20 <u>Stelling</u>: <u>Als</u> A <u>en</u> B <u>twee $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zijn</u>, <u>dan is</u>

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).$$

<u>Bewijs</u>: Is $\det(A) = 0$, dan is volgens III.2.17 ook $\det(AB) = 0$ en volgt de stelling.

Stel nu $\det(A) \neq 0$. Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Laten ϕ en ψ de $\mathbb{F}$-lineaire endomorphismen van V zijn, gegeven door:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n]);$$

$$\psi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{B} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan is

$$\phi \circ \psi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{AB} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Als d de antisymmetrische n-lineaire functie op V is met $d[a_1,\ldots, a_n] = 1$, dan geldt volgens III.2.19:

$$\det(A) = d[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)] \; ; \; \det(B) = d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)];$$

$$\det(AB) = d[\phi(\psi(a_1)),\ldots, \phi(\psi(a_n))].$$

Omdat $\det(A) \neq 0$, is ϕ surjectief, zodat uit III.2.18 (met ϕ in plaats van ψ en $[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)]$ in plaats van $[v_1,\ldots, v_n]$) volgt:

$$\frac{\det(AB)}{\det(A)} = \frac{d[\phi(\psi(a_1)),\ldots, \phi(\psi(a_n))]}{d[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]} =$$

$$= d[\psi(a_1),\ldots, \psi(a_n)] = \det(B),$$

zodat de stelling volgt. □

III.2.21 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> A <u>en</u> B <u>twee $(n \times n)$-matrices zijn, dan is in het algemeen</u> AB <u>niet gelijk aan</u> BA. <u>Wel geldt volgens de vorige stelling</u>:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(B)\cdot\det(A) = \det(BA).$$

* * *

§III.3. Automorphismen en basistransformaties

III.3.1 Een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme $\phi : V \to V$ van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V hebben we een <u>$\mathbb{F}$-lineair automorphisme</u> van V genoemd als ϕ een isomorphisme is, of, wat volgens I.1.33 op hetzelfde neerkomt, als ϕ bijectief (= surjectief èn injectief) is.

Volgens II.4.27 is ϕ bijectief als ϕ injectief is, en volgens II.4.28 is ϕ bijectief als ϕ surjectief is. Bovendien weten we dat ϕ injectief is dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ (cf. II.4.23) en dat ϕ surjectief is dan en slechts dan als $\mathrm{Im}(\phi) = V$.

Samenvattend:

III.3.2 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V. Dan geldt:

(i) ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als ϕ injectief is.

(ii) ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als ϕ surjectief is.

(iii) ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

(iv) ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als $\mathrm{Im}(\phi) = V$.

(v) ϕ is een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als er een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme $\phi^{-1} : V \to V$ bestaat met $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_V$ en $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_V$.

III.3.3 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\dots, a_n]$. Zij ϕ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V en A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Dan is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.

Bewijs: Volgens III.3.2 is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als ϕ surjectief is, en volgens III.2.15 is ϕ surjectief dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$. □

III.3.4 Definitie: Zij A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Een $(n \times n)$-matrix B heet een inverse matrix van A als B voldoet aan:

$$AB = I_n \quad \text{èn} \quad BA = I_n.$$

III.3.5 Opmerking: Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en is B een inverse matrix van A, dan is A een inverse matrix van B.

Bewijs: Dit volgt direkt uit definitie III.3.4. □

III.3.6 Voorbeeld: De (3×3)-matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{R}$ heeft als inverse matrix de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(ga na!). Daarentegen heeft de (2×2)-matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

geen inverse, want als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

een inverse van deze matrix zou zijn, dan moest in ieder geval gelden:

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

zodat onder meer zou volgen: $a = 1$ en $2a = 0$ en dit kan niet.

III.3.7 <u>Opmerking</u>: <u>Een $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>heeft hoogstens één inverse</u>.

<u>Bewijs</u>: Stel, B_1 en B_2 zijn beide inverse matrices van A. Dan geldt: $AB_1 = AB_2 = B_1A = B_2A = I_n$. We moeten bewijzen dat hieruit volgt: $B_1 = B_2$. Welnu, met behulp van II.5.30 volgt:

$$B_1 = I_nB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2I_n = B_2$$

(cf. ook II.5.26).

III.3.8 <u>Notatie</u>: Als een $(n \times n)$-matrix A een inverse heeft, dan geven we deze aan met

$$A^{-1}.$$

III.3.9 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> A <u>een $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>is</u>, <u>die een inverse heeft</u>, <u>dan is</u>

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

<u>Bewijs</u>: Dit volgt rechtstreeks uit III.3.5. $\square$

III.3.10 <u>Opmerking</u>: <u>Een $(n \times n)$-matrix</u> A <u>heeft een inverse dan en slechts dan als</u> $\det(A) \neq 0$.

<u>Bewijs</u>: (i) Stel eerst dat A een inverse heeft. Dan geldt:

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1,$$

zodat $\det(A) \neq 0$ moet zijn.
(ii) Neem nu aan dat $\det(A) \neq 0$. Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Zij ϕ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Volgens III.3.3 is ϕ dan een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V, zodat er volgens III.3.2 (v) een invers $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme ϕ^{-1} van ϕ bestaat. Zij B de $(n \times n)$-matrix, gegeven door:

$$\phi^{-1} = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{B} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan is:

$$id_V = \phi \circ \phi^{-1} = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{AB} (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

$$id_V = \phi^{-1} \circ \phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{BA} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Ook geldt:

$$id_V = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Lettend op II.5.6 volgt hieruit: $AB = BA = I_n$, zodat $B = A^{-1}$. Dus A heeft een inverse. □

III.3.11 <u>Terminologie</u>: Een vierkante matrix A uit $\mathbb{F}$ heet <u>regulier</u> als $\det(A) \neq 0$.
De reguliere matrices zijn dus die vierkante matrices uit $\mathbb{F}$ die een inverse hebben.

III.3.12 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> A <u>en</u> B <u>reguliere $(n \times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ zijn dan zijn ook de matrices</u> A^T <u>en</u> AB <u>regulier en er geldt</u>:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad ; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

<u>Bewijs</u>: $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$, dus $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$ en $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \neq 0$, zodat A^T en AB regulier zijn. Wegens

$$(A^{-1})^T\cdot A^T = (A\cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n;$$

$$A^T\cdot(A^{-1})^T = (A^{-1}\cdot A)^T = I_n^T = I_n,$$

is $(A^{-1})^T$ de inverse van A^T : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Wegens

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n;$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_nA^{-1}) = AA^{-1} = I_n,$$

is $B^{-1}A^{-1}$ de inverse van AB : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

III.3.13 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> A <u>en</u> B <u>twee $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zodat</u> $AB = I_n$, <u>dan zijn</u> A <u>en</u> B <u>regulier en geldt</u>: $A^{-1} = B$ <u>en</u> $B^{-1} = A$.

<u>Bewijs</u>: Wegens $\det(A)\cdot\det(B) = \det(AB) = \det(I_n) = 1$ is $\det(A) \neq 0$ en $\det(B) \neq 0$, zodat A en B reguliere matrices zijn. Dus hebben A en B inversen A^{-1} en B^{-1}. We weten al dat geldt:

$$AB = I_n. \tag{*}$$

Ook vinden we:

$$BA = I_n(BA) = (A^{-1}A)(BA) = A^{-1}(AB)A = A^{-1}(I_nA) =$$

$$= A^{-1}A = I_n. \tag{**}$$

Uit (*) en (**) volgt dat B de inverse is van A : $B = A^{-1}$. Dan is ook A de inverse van B (cf. III.3.5): $A = B^{-1}$. □

We gaan nu de volgende vraag beantwoorden: Gegeven een reguliere $(n \times n)$-matrix A; bepaal de inverse matrix A^{-1}. De te volgen methode hiertoe lichten we eerst toe aan de hand van een voorbeeld, en zullen die daarna algemeen bewijzen.

III.3.14 <u>Voorbeeld</u>: Gegeven zij de (3×3)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ga na dat $\det(A) = 3 \neq 0$, zodat A regulier is en inderdaad een inverse heeft.

Beschouw nu het paar matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

We gaan nu -door rijen van A een aantal keren bij andere rijen op te tellen; door rijen van A te verwisselen; door rijen van A met een getal te vermenigvuldigen- A overvoeren in de eenheidsmatrix I_3. Tegelijkertijd passen we op I_3 dezelfde handelingen toe.

Trek in beide matrices de 1^e rij van de 3^e rij af. We krijgen de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tel in beide matrices de 2^e rij $\frac{1}{2}$ keer op bij de 3^e rij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Trek in beide matrices de 3^e rij $\frac{2}{3}$ keer af van de 2^e rij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Trek in beide matrices de 2^e rij af van de 1^e rij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Deel de 2^e (resp. **de** 3^e) rij door 2 (resp. $\frac{3}{2}$):

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

We hebben nu A op vooromschreven wijze overgevoerd in I_3. I_3 is door toepassing van dezelfde handelingen overgevoerd in B. De lezer controlere dat de matrix B de inverse is van A.

We willen nu bewijzen dat de in voorgaand voorbeeld geschetste methode om de inverse van een reguliere matrix te berekenen in het algemeen opgaat. Hiertoe dienen we twee beweringen te controleren, t.w.:

(i) Dat iedere reguliere matrix A is over te voeren in de eenheidsmatrix door het achtereenvolgens uitvoeren van handelingen van de volgende typen: het λ ($\in \mathbb{F}$) keer optellen van een rij bij een andere rij; het vermenigvuldigen van een rij met λ ($\neq 0$); het verwisselen van twee rijen.

(ii) Dat als we dezelfde handelingen in dezelfde volgorde toepassen op de rijen van de eenheidsmatrix, deze overgaat in de inverse matrix van A.

III.3.15 <u>Terminologie</u>: Als we in een $(m \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$

(i) hetzij twee rijen (resp. kolommen) van plaats verwisselen;

(ii) hetzij een rij (resp. kolom) met een getal $\lambda \neq 0$ uit $\mathbb{F}$ vermenigvuldigen;

(iii) hetzij een rij (resp. kolom) λ ($\in \mathbb{F}$) keer optellen bij een andere rij (resp. kolom),

dan zeggen we dat we een <u>lineaire handeling</u> hebben toegepast op de rijen (resp. kolommen) van A.

III.3.16 <u>Opmerking</u>: <u>Een reguliere $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ is door herhaald toepassen van lineaire handelingen op de rijen over te voeren in de eenheidsmatrix I_n.</u>

<u>Bewijs</u>: (Met volledige inductie naar n).

(i) Zij n = 1. Kies een reguliere (1×1)-matrix, zeg:

$$A = (\lambda).$$

A is regulier, dus $\det(A) = \lambda \neq 0$. Deel de 1^e rij van A door λ, en A gaat over in $I_1 = (1)$.

(ii) Neem nu aan dat iedere $((n-1) \times (n-1))$-matrix uit $\mathbb{F}$ door herhaald toepassen van lineaire handelingen op de rijen is over te voeren in I_{n-1}, mits die matrix regulier is. Kies een $(n \times n)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{F}$ die regulier is.

Als voor elke $i \in \{1,\ldots,n\}$ geldt dat $\lambda_{i1} = 0$, dan zou de eerste kolom van A geheel uit nullen bestaan, zodat $\det(A) = 0$ zou zijn; in tegenspraak met de regulariteit van A. Door eventueel de 1^e rij van A te verwisselen met een andere rij (een lineaire handeling op de rijen!) mogen we aannemen dat $\lambda_{11} \neq 0$. Deel nu de 1^e rij door λ_{11}. We krijgen een matrix van de vorm

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_{n1} & & & \mu_{nn} \end{pmatrix},$$

waarvoor geldt: $\det(A_1) = \lambda_{11}^{-1}\det(A) \neq 0$. Dus A_1 is nog steeds regulier. Telkens als $\mu_{i1} \neq 0$ trekken we de 1^e rij μ_{i1} keer af van de i^e rij. Ook dit zijn lineaire handelingen op rijen. We krijgen een matrix van de vorm

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|ccc|} 1 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \\ \hline \end{array}\right),$$

waarvan de determinant gelijk is aan $\det(A_1)$. Dus A_2 is regulier. Ontwikkelen naar de eerste kolom van $\det(A_2)$ geeft:

$$0 \neq \det(A_2) = \det(B),$$

zodat de $((n-1) \times (n-1))$-matrix B regulier is.

Volgens de inductie-aanname is B door herhaald toepassen van lineaire handelingen op rijen over te voeren in I_{n-1}. Hieruit volgt dat A_2 door herhaald toepassen van lineaire handelingen op de 2^e tot en met de n^e rij is over te voeren in de matrix

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{I_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Trek nu de 2^e rij μ_{12} keer af van de 1^e rij; de 3^e rij μ_{13} keer af van de 1^e rij, enz., enz. We krijgen dan de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{I_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I_n,$$

zodat de opmerking bewezen is. □

We herformuleren nu met behulp van de in III.3.15 ingevoerde terminologie de opmerkingen II.5.17, II.5.18, II.5.19 in een speciaal geval:

III.3.17 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en is</u> A <u>een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, terwijl</u> ϕ <u>het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme is van</u> V <u>dat gegeven wordt door</u>

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

<u>Is</u> A' <u>een matrix die uit</u> A <u>ontstaat door toepassing van een lineaire handeling op de rijen van</u> A, <u>dan is er een basis</u> $[b_1,\ldots, b_n]$ <u>van</u> V, <u>uitsluitend bepaald door de aard van deze lineaire handeling op de rijen</u>, <u>zodat</u>

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A'} (V,[b_1,\ldots, b_n]).$$

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

III.3.18 Gevolg: (Bepaling van de inverse matrix) Zij A een reguliere $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Voer, door herhaald toepassen van lineaire handelingen op de rijen, A over in I_n. Laat I_n, door toepassing van deze lineaire handelingen op de rijen in dezelfde volgorde, overgaan in de matrix B. Dan is $B = A^{-1}$.

Bewijs: Zij ϕ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ dat gegeven wordt door

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[a_1,\ldots, a_n]). \tag{*}$$

Voorts is

$$id_V = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[a_1,\ldots, a_n]). \tag{**}$$

Herhaald toepassen van III.3.17 levert ons een basis $[b_1,\ldots, b_n]$ van V, zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[b_1,\ldots, b_n]) \tag{***}$$

en

$$id_V = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{B} (V,[b_1,\ldots, b_n]). \tag{****}$$

Uit (*) en (****) volgt:

$$\phi = id_V \circ \phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{BA} (V,[b_1,\ldots, b_n]).$$

Uit (**) en (***) volgt:

$$\phi = \phi \circ id_V = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{I_n \cdot I_n} (V,[b_1,\ldots, b_n]),$$

zodat, gelet op II.5.6, geldt:

$$BA = I_n \cdot I_n = I_n.$$

Volgens III.3.13 is dan $B = A^{-1}$. □

Geheel analoog geldt:

III.3.19 Opmerking: Zij A een reguliere $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Voer, door herhaald toepassen van lineaire handelingen op de kolommen, A over in I_n. Laat I_n, door toepassing van deze lineaire handelingen op de kolommen in dezelfde volgorde, overgaan in de matrix B. Dan is $B = A^{-1}$.

Bewijs: A gaat over, door lineaire handelingen op de kolommen, in I_n en I_n, middels dezelfde lineaire handelingen op de kolommen, in B. Dan gaat A^T door toepassing van overeenkomstige lineaire handelingen op de rijen over in $I_n^T = I_n$ en $I_n^T = I_n$ in B^T. Volgens III.3.18 is dan $B^T = (A^T)^{-1}$. Dus:

$$B = (B^T)^T = ((A^T)^{-1})^T = ((A^{-1})^T)^T = A^{-1},$$

waarmee de opmerking bewezen is. □

We hebben in de opmerkingen III.3.18 en III.3.19 methoden gegeven om, lineaire handelingen uitvoerend op rijen, resp. kolommen, de inverse van een reguliere matrix uit te rekenen. Men zij gewaarschuwd dat men beide methoden niet dooreén mengt, zoals het volgende voorbeeld illustreert.

Beschouw het paar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trek de eerste rij $\frac{1}{2}$ keer van de 2^e rij af:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Trek de eerste kolom $\frac{1}{2}$ keer van de 2^e kolom af:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Deel de eerste rij door 2 en de tweede rij door $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \neq A^{-1}.$$

III.3.20 Opmerking: Voor een reguliere $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ geldt:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Bewijs: $\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

In het hierna volgende gedeelte van deze paragraaf zullen we spreken over "basis-transformaties". Hierbij behandelen we de volgende twee vragen:
(i) We hebben gezien dat, als we in een $\mathbb{F}$-vectorruimte V een basis $[a_1,\dots, a_n]$ vast gekozen hebben, we de vectoren $v \in V$ kunnen beschrijven ten opzichte van deze basis volgens

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]), \qquad (*)$$

wat betekent: $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Hadden we een andere basis van V gekozen, dan hadden we een andere, analoge schrijfwijze voor v gevonden. De eerste vraag is nu: geef een vector $v \in V$ door $(*)$. Laat een tweede basis $[b_1,\dots, b_n]$ van V gegeven zijn. Bepaal dan $\mu_1,\dots, \mu_n$ in

$$v = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in (V,[b_1,\dots, b_n]).$$

(ii) Kies twee $\mathbb{F}$-vectorruimten V en W met bases $[a_1,\dots, a_n]$ en $[c_1,\dots, c_m]$. Zij $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat geldt:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[c_1,\dots, c_m]).$$

Kies nu twee andere bases $[a_1',\dots, a_n']$, $[c_1',\dots, c_m']$ van V, resp. W. De tweede vraag luidt: bepaal de $(m \times n)$-matrix A' zodat geldt:

$$\phi = (V,[a_1',\dots, a_n']) \xrightarrow{A'} (W,[c_1',\dots, c_m']).$$

We zullen beide vragen hierna beantwoorden.

III.3.21 Opmerking: Zijn $[a_1,\dots, a_n]$ en $[b_1,\dots, b_n]$ twee bases van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V en is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[b_1,\dots, b_n]),$$

dan is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V dan en slechts dan als A regulier is.

Bewijs: (i) Stel eerst dat ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme is van V. Dan is er het inverse endomorphisme ϕ^{-1} van ϕ. Zij B de $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, gegeven door:

$$\phi^{-1} = (V,[b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{B} (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Dan is volgens II.5.25

$$id_V = \phi^{-1} \circ \phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{BA} (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Ook is direkt duidelijk dat geldt:

$$id_V = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[a_1,\dots, a_n]),$$

zodat (cf. II.5.6) geldt: $BA = I_n$. Dus is $\det(B)\cdot\det(A) = \det(BA) = 1$, zodat $\det(A) \neq 0$ is. A is derhalve regulier. (Merk op dat $B = A^{-1}$ volgens III.3.13.)
(ii) Neem nu aan dat A regulier is: $\det(A) \neq 0$. Volgens III.3.10 heeft A de inverse matrix A^{-1}. Zij ψ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\psi = (V,[b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{A^{-1}} (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Dan geldt volgens II.5.25, wegens $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$:

$$\psi \circ \phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[a_1,\dots, a_n]) = id_V;$$

$$\phi \circ \psi = (V,[b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[b_1,\dots, b_n]) = id_V,$$

zodat ψ het inverse endomorphisme van ϕ is, en zodat ϕ derhalve een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme is van V.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

Uit het bewijs van de voorgaande opmerking volgt direkt:

III.3.22 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met bases $[a_1,\ldots, a_n]$ en $[b_1,\ldots, b_n]$ en is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V met

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V,[b_1,\ldots, b_n]),$$

dan heeft de $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ een inverse en er geldt:

$$\phi^{-1} = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \xrightarrow{A^{-1}} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Bewijs: Ga na! □

III.3.23 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $[b_1,\ldots, b_n]$ een n-tupel uit V, gegeven door

$$b_1,\ldots,b_n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan is $[b_1,\ldots, b_n]$ een basis van V dan en slechts dan als de matrix

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

regulier is.

Bewijs: Beschouw het $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme $\phi : V \to V$, gegeven door

$\phi(a_1) = b_1,\ldots, \phi(a_n) = b_n$. Dan is volgens II.5.25

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{S}{\rightarrow} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Volgens III.3.21 is ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme dan en slechts dan als S regulier is.

(i) Stel eerst dat $[b_1,\ldots, b_n] = [\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een basis is van V. Dan is dit n-tupel lineair onafhankelijk, en, omdat $\mathrm{Im}(\phi)$ door dit n-tupel wordt voortgebracht, is $[b_1,\ldots, b_n]$ een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$. Dus is dan de dimensie van $\mathrm{Im}(\phi)$, n, gelijk aan de dimensie van V. Volgens II.3.11 is dan $\mathrm{Im}(\phi) = V$ zodat ϕ surjectief is. Volgens III.3.2 (ii) is ϕ dan een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V, zodat S regulier is.

(ii) Stel nu dat S regulier is. ϕ is dan een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme van V en dus zeker surjectief. Dus $\mathrm{Im}(\phi) = V$. Omdat $[b_1,\ldots, b_n] = [\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ $\mathrm{Im}(\phi)$ voortbrengt is dit n-tupel dan een stelsel voortbrengenden van V. Omdat de dimensie van V n is, is $[b_1,\ldots, b_n]$ volgens II.3.19 een basis van V.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

III.3.24 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met bases</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en</u> $[b_1,\ldots, b_n]$. <u>Als</u>

$$b_1,\ldots,b_n = \begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots \\ \lambda_{n1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\lambda_{1n}\\ \vdots \\ \lambda_{nn}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots,a_n]) \qquad (*)$$

<u>en</u>

$$S = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix},$$

<u>dan heeft</u> S <u>een inverse en geldt</u>:

(i) $\mathrm{id}_V = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \overset{S}{\rightarrow} (V,[a_1,\ldots, a_n])$;

(ii) $\mathrm{id}_V = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{S^{-1}} (V,[b_1,\ldots, b_n])$.

Bewijs: Volgens III.3.23 is S regulier, en heeft derhalve een inverse. Uit (*) volgt wegens $id_V(b_i) = b_i$ $(i = 1,\dots,n)$ direkt dat (i) geldt.
(ii) volgt uit (i) met behulp van III.3.22. □

III.3.25 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met bases $[a_1,\dots, a_n]$ en $[b_1,\dots, b_n]$ en zij $v \in V$, zodat

$$v,b_1,\dots,b_n = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots\\ \lambda_{n1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\lambda_{1n}\\ \vdots\\ \lambda_{nn}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]).$$

Dan is, als

$$S = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn}\end{pmatrix},$$

de vector v ten opzichte van de basis $[b_1,\dots, b_n]$ gegeven door

$$v = S^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} \in (V,[b_1,\dots, b_n]).$$

Bewijs: Volgens III.3.24 hebben we:

$$id_V = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{S^{-1}} (V,[b_1,\dots, b_n]).$$

De opmerking volgt nu direkt uit II.5.32. □

Merk op dat III.3.25 het antwoord geeft op de eerste vraag, zoals omschreven in de opmerkingen, voorafgaande aan III.3.21 (blz.48).

III.3.26 Voorbeeld: Beschouw in $\mathbb{R}_3^*$ de bases $[e_1,e_2,e_3]$ en $[b_1,b_2,b_3]$ met
$e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$;
$b_1 = (2,0,1)$; $b_2 = (1,0,0)$; $b_3 = (0,1,1)$.

Zij voorts $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}_3^*$. Dan geldt

$$v, b_1, b_2, b_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[e_1,e_2,e_3]).$$

Als

$$S = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

dan is

$$id_{\mathbb{R}_3^*} = (\mathbb{R}_3^*,[e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{S^{-1}} (\mathbb{R}_3^*,[b_1,b_2,b_3]).$$

Ga na dat

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 2 & -2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

zodat volgt

$$v = S^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 2 & -2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[b_1,b_2,b_3]).$$

(Inderdaad is $2b_2 + b_3 = 2(1,0,0) + (0,1,1) = (2,1,1) = v$.)

III.3.27 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, evenals W, met bases $[a_1,\ldots, a_n]$, resp. $[c_1,\ldots, c_m]$. Zij $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, zodat geldt:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[c_1,\ldots, c_m]).$$

Zijn $[a_1',\ldots, a_n']$ en $[c_1',\ldots, c_m']$ bases van V, resp. W zodat voor $j = 1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,m$:

$$a_j' = \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sigma_{nj} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) \quad ; \quad c_k' = \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \vdots \\ \tau_{mk} \end{pmatrix} \in (W,[c_1,\ldots, c_m]).$$

<u>Als we noteren</u>:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mm} \end{pmatrix},$$

<u>dan geldt</u>:

$$\phi = (V,[a_1',\ldots, a_n']) \xrightarrow{T^{-1}AS} (W,[c_1',\ldots, c_m']).$$

<u>Bewijs</u>: Volgens III.3.24 hebben we:

$$id_V = (V,[a_1',\ldots, a_n']) \xrightarrow{S} (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

en

$$id_W = (W,[c_1,\ldots, c_m]) \xrightarrow{T^{-1}} (W,[c_1',\ldots, c_m']).$$

We hebben dan de situatie:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ id_V \uparrow & & \downarrow id_W \\ V & & W \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} (V,[a_1,\ldots, a_n]) & \xrightarrow{A} & (W,[c_1,\ldots, c_m]) \\ \uparrow S & & \downarrow T^{-1} \\ (V,[a_1',\ldots, a_n']) & & (W,[c_1',\ldots, c_m']), \end{array}$$

zodat volgens II.5.25 geldt:

$$\phi = id_W \circ \phi \circ id_V = (V,[a_1',\ldots, a_n']) \xrightarrow{T^{-1}AS} (W,[c_1',\ldots, c_m']),$$

waarmee de opmerking bewezen is. $\square$

III.3.28 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte met bases</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en</u> $[b_1,\ldots, b_n]$. <u>Zijn</u> A <u>en</u> B <u>twee $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en is</u> ϕ <u>een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van</u> V <u>zodat geldt</u>:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

<u>en</u>

$$\phi = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \overset{B}{\to} (V,[b_1,\ldots, b_n]) ,$$

<u>dan bestaat er een reguliere (n × n)-matrix</u> S <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zodat geldt</u>:

$$B = S^{-1}AS.$$

<u>Bewijs</u>: Zij

$$b_1,\ldots,b_n = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \vdots \\ \sigma_{n1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\sigma_{1n}\\ \vdots \\ \sigma_{nn}\end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

en noteer:

$$S = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}.$$

We hebben dan, net als in het bewijs van de vorige opmerking, de situatie:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V \\ {\scriptstyle id_V}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle id_V} \\ V & & V \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} (V,[a_1,\ldots, a_n]) & \xrightarrow{A} & (V,[a_1,\ldots, a_n]) \\ \uparrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle S^{-1}} \\ (V,[b_1,\ldots, b_n]) & & (V,[b_1,\ldots, b_n]), \end{array}$$

zodat weer volgt (cf. II.5.25):

$$\phi = id_V \circ \phi \circ id_V = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \xrightarrow{S^{-1}AS} (V,[b_1,\ldots, b_n]).$$

Ook was

$$\phi = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \overset{B}{\to} (V,[b_1,\ldots, b_n]),$$

zodat volgt:

$$B = S^{-1}AS,$$

hetgeen bewezen moest worden. □

III.3.29 <u>Definitie</u>: Twee $(n \times n)$-matrices A en B heten <u>aequivalent</u>, als er een reguliere $(n \times n)$-matrix S bestaat zodat

$$B = S^{-1}AS.$$

We noteren in dat geval:

$$A \sim B.$$

III.3.30 <u>Opmerking</u>: <u>Voor $(n \times n)$-matrices</u> A, B <u>en</u> C <u>geldt</u>:

(i) $A \sim A$;
(ii) Als $A \sim B$, dan is $B \sim A$;
(iii) Als $A \sim B$ en $B \sim C$, dan is $A \sim C$.

<u>Bewijs (i)</u>: Kies $S = I_n$. Dan is $A = S^{-1}AS$.
<u>Bewijs (ii)</u>: We hebben een reguliere matrix S zodat $B = S^{-1}AS$. Wegens $\det(S^{-1}) = \det(S)^{-1}$ is $\det(S^{-1}) \neq 0$ zodat S^{-1} een reguliere matrix is. Er geldt:

$$A = I_nAI_n = SS^{-1}ASS^{-1} = SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}B(S^{-1}),$$

zodat $B \sim A$.
<u>Bewijs (iii)</u>: We hebben reguliere matrices S en T zodat geldt:

$$B = S^{-1}AS \quad ; \quad C = T^{-1}BT.$$

Dan is:

$$C = T^{-1}S^{-1}AST = (ST)^{-1}A(ST).$$

Nu is $\det(ST) = \det(S)\cdot\det(T) \neq 0$, zodat ST een reguliere matrix is. Dus is $A \sim C$. □

We kunnen III.3.28 nu als volgt herformuleren:

III.3.31 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met bases $[a_1,\ldots, a_n]$ en $[b_1,\ldots, b_n]$. Zij ϕ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V. Als

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\rightarrow} (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

en

$$\phi = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \overset{B}{\rightarrow} (V,[b_1,\ldots, b_n]),$$

dan is $A \sim B$.

III.3.32 Opmerking: Voor elk tweetal aequivalente $(n \times n)$-matrices A en B uit $\mathbb{F}$ geldt: $\det(A) = \det(B)$.

Bewijs: Er is een reguliere $(n \times n)$-matrix S uit $\mathbb{F}$ zodat

$$B = S^{-1}AS.$$

Dan volgt:

$$\det(B) = \det(S^{-1})\cdot\det(A)\cdot\det(S) =$$

$$= \det(S)^{-1}\cdot\det(A)\cdot\det(S) = \det(A). \square$$

III.3.33 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en zij ϕ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, terwijl A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ is, zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\rightarrow} (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

Zij B een met A aequivalente $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Dan is er een basis $[b_1,\ldots, b_n]$ van V zodat

$$\phi = (V,[b_1,\ldots, b_n]) \overset{B}{\rightarrow} (V,[b_1,\ldots, b_n]).$$

Bewijs: Er is een reguliere $(n \times n)$-matrix S uit $\mathbb{F}$ zodat

$$B = S^{-1}AS.$$

Zij

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definieer het n-tupel $[b_1,\dots, b_n]$ uit V met

$$b_1,\dots, b_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \vdots \\ \sigma_{n1} \end{pmatrix},\dots, \begin{pmatrix} \sigma_{1n} \\ \vdots \\ \sigma_{nn} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\dots, a_n]). \qquad (*)$$

Omdat S regulier is, is $[b_1,\dots, b_n]$ een basis van V (cf. III.3.23). Nu volgt onmiddellijk uit III.3.27, dat

$$\phi = (V, [b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{S^{-1}AS} (V, [b_1,\dots, b_n]) =$$

$$= (V, [b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{B} (V, [b_1,\dots, b_n]),$$

zodat de opmerking bewezen is. □

* * *

IV. Lineaire stelsels vergelijkingen

§IV.1. De rang van een matrix

IV.1.1 Notatie: We noteren

$$\mathbb{F}_n = M_{n,1}(\mathbb{F}) \quad ; \quad \mathbb{F}_n^* = M_{1,n}(\mathbb{F})$$

(cf. II.1.24).

IV.1.2 Definitie: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. De rang van het n-tupel

$$[\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}]$$

uit $\mathbb{F}_m$ heet de kolommen-rang van A. De rang van het m-tupel

$$[(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, (\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn})]$$

uit $\mathbb{F}_n^*$ heet de rijen-rang van A.

IV.1.3 Voorbeeld: Beschouw de (4×3)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{R}$. Nu is de tweede vector uit het 3-tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\8\\-7\end{pmatrix}]$$

uit $\mathbb{R}_4$ wegens

$$\begin{pmatrix}3\\2\\8\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\8\\-7\end{pmatrix}$$

een lineaire combinatie van de overige twee vectoren. Volgens II.3.26 is de rang van dit 3-tupel gelijk aan de rang van het 2-tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\8\\-7\end{pmatrix}]$$

uit $\mathbb{R}_4$. Omdat dit 2-tupel een lineair onafhankelijk stelsel is van $\mathbb{R}_4$, is volgens II.3.16 de rang van dit 2-tupel 2. Dus is de kolommen-rang van A gelijk aan 2.

Beschouw nu het 4-tupel

$$[(1,3,1), (2,2,-2), (0,8,8), (4,1,-7)]$$

uit $\mathbb{R}_3^*$. Wegens

$$(4,1,-7) = 2(1,3,1) + (2,2,-2) - \tfrac{7}{8}(0,8,8)$$

is volgens II.3.26 de rang van dit 4-tupel gelijk aan de rang van

$$[(1,3,1), (2,2,-2), (0,8,8)] ,$$

en de rang van dit 3-tupel is -weer volgens II.3.26- wegens

$$(0,8,8) = 4(1,3,1) - 2(2,2,-2)$$

gelijk aan de rang van

$$[(1,3,1), (2,2,-2)].$$

Omdat dit een lineair onafhankelijk stelsel is van $\mathbb{R}_3^*$, is deze rang 2. Dus de rijen-rang van A is ook 2.

Merk op dat in dit voorbeeld rijen-rang en kolommen-rang van A gelijk zijn. We zullen in deze paragraaf laten zien dat dit voor iedere matrix waar is.

IV.1.4 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, dan geldt voor ieder m-tupel $[v_1,\ldots, v_m]$ uit V:

$$\text{rang}[\phi(v_1),\ldots, \phi(v_m)] \leq \text{rang}[v_1,\ldots, v_m].$$

Bewijs: Zij k de rang van $[\phi(v_1),\ldots, \phi(v_m)]$. Volgens II.3.17 kunnen we dan k vectoren $\phi(v_{i_1}),\ldots, \phi(v_{i_k})$ uit dit m-tupel kiezen, zodat het k-tupel $[\phi(v_{i_1}),\ldots, \phi(v_{i_k})]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van W. Dan is $[v_{i_1},\ldots, v_{i_k}]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V, want als

$$\lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_k v_{i_k} = 0 \qquad (\lambda_1,\ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}),$$

dan is

$$\lambda_1\phi(v_{i_1}) + \ldots + \lambda_k\phi(v_{i_k}) = \phi(\lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_k v_{i_k}) =$$

$$= \phi(0) = 0,$$

zodat $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Is V_1 de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[v_1,\ldots, v_m]$, dan is $[v_{i_1},\ldots, v_{i_k}]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V_1, zodat $k \leq \dim(V_1) = \text{rang}[v_1,\ldots, v_m]$ (cf. II.2.40). □

IV.1.5 Gevolg: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme, dan geldt voor ieder m-tupel $[v_1,\ldots, v_m]$ uit V:

$$\text{rang}[\phi(v_1),\ldots, \phi(v_m)] = \text{rang}[v_1,\ldots, v_m].$$

Bewijs: Zij $\phi^{-1} : W \to V$ de inverse ($\mathbb{F}$-lineaire) afbeelding van ϕ. Dan volgt uit IV.1.4:

$$\text{rang}[\phi(v_1),\dots, \phi(v_m)] \le \text{rang}[v_1,\dots, v_m] \tag{$*$}$$

en ook, wegens $\phi^{-1} \circ \phi = \text{id}_V$,

$$\text{rang}[v_1,\dots, v_m] = \text{rang}[\phi^{-1}(\phi(v_1)),\dots, \phi^{-1}(\phi(v_n))] \le$$

$$\le \text{rang}[\phi(v_1),\dots, \phi(v_n)]. \tag{$**$}$$

Uit ($*$) en ($**$) volgt dan de bewering. □

IV.1.6 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases $[a_1,\dots, a_n]$, resp. $[b_1,\dots, b_m]$, is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en is A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\dots, b_m]),$$

dan is de kolommen-rang van A gelijk aan de dimensie van $\text{Im}(\phi)$.

Bewijs: Beschouw de basis $[e_1,\dots, e_m]$ van $\mathbb{F}_m$, gegeven door:

$$e_1,e_2,\dots,e_m = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

en voorts de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\theta : W \to \mathbb{F}_m$, gegeven door $\theta(b_1) = e_1,\dots, \theta(b_m) = e_m$. Dan is:

$$\theta = (W,[b_1,\dots, b_m]) \xrightarrow{I_m} (\mathbb{F}_m,[e_1,\dots, e_m]).$$

Ook hebben we een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\theta' : \mathbb{F}_m \to W$, gegeven door:

$$\theta' = (\mathbb{F}_m,[e_1,\dots, e_m]) \xrightarrow{I_m} (W[b_1,\dots, b_m]).$$

Wegens $I_m I_m = I_m$ volgt uit II.5.25:

$$\theta \circ \theta' = (\mathbb{F}_m,[e_1,\ldots, e_m]) \xrightarrow{I_m} (\mathbb{F}_m,[e_1,\ldots, e_m]) = id_{\mathbb{F}_m};$$

$$\theta' \circ \theta = (W,[b_1,\ldots, b_m]) \xrightarrow{I_m} (W,[b_1,\ldots, b_m]) = id_W,$$

zodat θ een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme is.

We hebben nu de volgende situatie:

$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{\phi} W & & (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\ldots, b_m]) \\ \quad\;\; \downarrow \theta & = & \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow I_m \\ \quad\;\; \mathbb{F}_m & & \qquad\qquad\qquad (\mathbb{F}_m,[e_1,\ldots, e_m]). \end{array}$$

$\mathrm{Im}(\phi)$ is de lineaire deelruimte van W, opgespannen door $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$, dus:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \mathrm{rang}[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)].$$

Omdat θ een isomorphisme is, is $\mathrm{rang}[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)] =$
$= \mathrm{rang}[\theta(\phi(a_1)),\ldots, \theta(\phi(a_n))]$ (cf. IV.1.5), zodat we vinden:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \mathrm{rang}[\theta(\phi(a_1)),\ldots, \theta(\phi(a_n))]. \qquad (*)$$

Zij nu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dan geldt voor $k = 1,\ldots, n$:

$$\phi(a_k) = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\ldots, b_m])$$

en -volgens II.5.32- volgt hieruit voor $k = 1,\ldots, n$:

$$\theta(\phi(a_k)) = I_m \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_m, [e_1, \ldots, e_m]).$$

Dus geldt voor elke $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\theta(\phi(a_k)) = \alpha_{1k}e_1 + \ldots + \alpha_{mk}e_m =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{2k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}.$$

Uit (*) verkrijgen we dan:

$$\dim_{\mathbb{F}}(I_m(\phi)) = \text{rang}\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}\right] = \text{kolommen-rang } (A),$$

waarmee de opmerking bewezen is. $\square$

IV.1.7 <u>Notatie</u>: De rijen-rang en kolommen-rang van een matrix A zullen we ook aangeven met respectievelijk

$$\text{r.r}(A) \quad ; \quad \text{k.r}(A).$$

IV.1.8 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>geldt</u>:

$$\text{r.r}(A) = \text{k.r}(A^T) \quad ; \quad \text{k.r}(A) = \text{r.r}(A^T).$$

<u>Bewijs</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^T = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \ldots & \alpha'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \ldots & \alpha'_{nm} \end{pmatrix}.$$

(Dus: $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$; $i = 1,\ldots, m$; $j = 1,\ldots, n$.) Kies in $\mathbb{F}_n^*$ en $\mathbb{F}_n$ de respectievelijke bases $[f_1,\ldots, f_n]$ en $[e_1,\ldots, e_n]$ gegeven door:

$$f_1,f_2,\ldots,f_n = (1,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ldots,\ (0,\ldots,0,1);$$

$$e_1,e_2,\ldots,e_n = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Zij $\theta : \mathbb{F}_n^* \to \mathbb{F}_n$ de afbeelding, gegeven door:

$$\theta(\lambda_1,\ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} .$$

Het is direkt te controleren dat θ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is, terwijl wegens $\theta(f_1) = e_1,\ldots, \theta(f_n) = e_n$ geldt:

$$\theta = (\mathbb{F}_n^*,[f_1,\ldots, f_n]) \xrightarrow{I_n} (\mathbb{F}_n,[e_1,\ldots, e_n]).$$

Ook nu hebben we de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\theta' : \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_n^*$, gegeven door:

$$\theta' = (\mathbb{F}_n,[e_1,\ldots, e_n]) \xrightarrow{I_n} (\mathbb{F}_n^*,[f_1,\ldots, f_n]).$$

Net als in het bewijs van IV.1.6 ziet men dat

$$\theta \circ \theta' = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_n} \qquad ; \qquad \theta' \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_n^*},$$

zodat θ een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme is. Met behulp van IV.1.5 volgt nu:

$$\begin{aligned} \mathrm{r.r}(A) &= \mathrm{rang}[(\alpha_{11},\ldots, \alpha_{1n}),\ldots, (\alpha_{m1},\ldots, \alpha_{mn})] = \\ &= \mathrm{rang}[\theta(\alpha_{11},\ldots, \alpha_{1n}),\ldots, \theta(\alpha_{m1},\ldots, \alpha_{mn})] = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{rang}[\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots\\ \alpha_{1n}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\alpha_{m1}\\ \vdots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix}] = \operatorname{rang}[\begin{pmatrix}\alpha'_{11}\\ \vdots\\ \alpha'_{n1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\alpha'_{1m}\\ \vdots\\ \alpha'_{nm}\end{pmatrix}] =$$

$$= k.r(A^T).$$

Dus is $r.r(A) = k.r(A^T)$ voor iedere matrix A uit $\mathbb{F}$. In het bijzonder geldt dit voor A^T:

$$r.r(A^T) = k.r(A^T)^T = k.r(A).$$

Hiermee is ook de tweede bewering bewezen. □

IV.1.9 Opmerking: Zij A een matrix uit $\mathbb{F}$. Zij A' (resp. A") de matrix, verkregen uit A door toepassing van een lineaire handeling op de rijen (resp. kolommen) van A. Dan geldt:

$$r.r(A) = r.r(A') = r.r(A");$$

$$k.r(A) = k.r(A') = k.r(A").$$

Bewijs: Kies een tweetal $\mathbb{F}$-vectorruimten V,W met respectievelijke bases $[a_1,\dots, a_n]$, $[b_1,\dots, b_m]$ alsmede de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\phi : V \to W$ die voldoet aan:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

Volgens II.5.17, II.5.18 en II.5.19 kunnen we een nieuwe basis $[b'_1,\dots, b'_m]$ van W kiezen zodat:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A'} (W,[b'_1,\dots, b'_m]),$$

terwijl er volgens II.5.16 een basis $[a'_1,\dots, a'_n]$ van V te vinden is met:

$$\phi = (V,[a'_1,\dots, a'_n]) \xrightarrow{A"} (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

Volgens IV.1.6 geldt nu:

$$k.r(A) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) \quad ; \quad k.r(A') = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) \quad ;$$

$$k.r(A'') = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)),$$

zodat $k.r(A) = k.r(A') = k.r(A'')$. Het voorgaande toepassend op de matrix A^T in plaats van A (vgl. II.5.14), verkrijgen we:

$$k.r(A^T) = k.r(A')^T = k.r(A'')^T.$$

Met IV.1.8 heeft dit tot gevolg: $r.r(A) = r.r(A') = r.r(A'')$, zodat de opmerking bewezen is. □

IV.1.10 Opmerking: Is A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en is B een $(m \times l)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat geldt $(l \le n)$:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & \\ B & \\ & \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(dus de $(l+1)^e$ tot en met de n^e kolom van A bestaan uit louter nullen), dan geldt:

$$r.r(A) = r.r(B) \quad ; \quad k.r(A) = k.r(B).$$

Bewijs: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

en noteer:

$$k_1, \ldots, k_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_m;$$

$$r_1,\dots, r_m = (\alpha_{11},\dots, \alpha_{1n}),\dots, (\alpha_{m1},\dots, \alpha_{mn}) \in \mathbb{F}_n^*;$$

$$r_1',\dots, r_m' = (\alpha_{11},\dots, \alpha_{1l}),\dots, (\alpha_{m1},\dots, \alpha_{ml}) \in \mathbb{F}_l^*.$$

Dan is $k_{l+1} = \dots = k_n = 0$, terwijl bovendien geldt:

$$k.r(A) = \text{rang}[k_1,\dots, k_n] \;;\; k.r(B) = \text{rang}[k_1,\dots, k_l] \;;$$

$$r.r(A) = \text{rang}[r_1,\dots, r_m] \;;\; r.r(B) = \text{rang}[r_1',\dots, r_m'] \;.$$

Met II.3.24 volgt direkt:

$$k.r(A) = \text{rang}[k_1,\dots, k_n] = \text{rang}[k_1,\dots, k_l, 0,\dots, 0] =$$

$$= \text{rang}[k_1,\dots, k_l] = k.r(B).$$

Er rest ons te bewijzen dat $r.r(A) = r.r(B)$. Hiertoe definiëren we twee afbeeldingen:

$$\pi : \mathbb{F}_n^* \to \mathbb{F}_l^* \qquad ; \qquad u : \mathbb{F}_l^* \to \mathbb{F}_n^*$$

als volgt: als $(\lambda_1,\dots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_n$ en $(\mu_1,\dots, \mu_l) \in \mathbb{F}_l$, dan is

$$\pi(\lambda_1,\dots, \lambda_n) = (\lambda_1,\dots, \lambda_l) \in \mathbb{F}_l^* \;;$$

$$u(\mu_1,\dots, \mu_l) = (\mu_1,\dots, \mu_l, 0,\dots, 0) \in \mathbb{F}_n^*.$$

De lezer ga na dat π zowel als u een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is. Bovendien geldt, wegens (*), voor iedere $i \in \{1,\dots, m\}$:

$$\pi(r_i) = \pi(\alpha_{i1},\dots, \alpha_{in}) = (\alpha_{i1},\dots, \alpha_{il}) = r_i';$$

$$u(r_i') = u(\alpha_{i1},\dots, \alpha_{il}) = (\alpha_{i1},\dots, \alpha_{il}, 0,\dots, 0) =$$

$$= (\alpha_{i1},\dots, \alpha_{in}) = r_i.$$

Met IV.1.4 volgt hieruit enerzijds:

$$r.r(A) = \text{rang}[r_1,\ldots, r_m] = \text{rang}[u(r_1'),\ldots, u(r_m')] \leq$$

$$\leq \text{rang}[r_1',\ldots, r_m'] = r.r(B),$$

en anderzijds:

$$r.r(B) = \text{rang}[r_1',\ldots, r_m'] = \text{rang}[\pi(r_1),\ldots, \pi(r_m)] \leq$$

$$\leq \text{rang}[r_1,\ldots, r_m] = r.r(A),$$

zodat $r.r(A) = r.r(B)$. □

IV.1.11 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een</u> <u>(m × n)-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en is</u> $r.r(A) = m$, $k.r(A) = n$, <u>dan is</u> $m = n$ (<u>en derhalve</u> $r.r(A) = k.r(A)$).

<u>Bewijs</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

en noteer:

$$r_1,\ldots, r_m = (\alpha_{11},\ldots, \alpha_{1n}),\ldots, (\alpha_{m1},\ldots, \alpha_{mn}) \in \mathbb{F}_n^*;$$

$$k_1,\ldots, k_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix},\ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_m.$$

Dan is $r.r(A) = \text{rang}[r_1,\ldots, r_m] = m$ en $k.r(A) = \text{rang}[k_1,\ldots, k_n] = n$. Volgens II.3.18 zijn dan $[r_1,\ldots, r_m]$ en $[k_1,\ldots, k_n]$ lineair onafhankelijke stelsels van $\mathbb{F}_n^*$, resp. $\mathbb{F}_m$ die -volgens II.2.38 (*)- van dimensie n, resp. m zijn. Volgens II.2.40 is dan $m \leq n$, resp. $n \leq m$. Dus is $m = n$. □

IV.1.12 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een (m × n)-matrix uit</u> $\mathbb{F}$, <u>zodat</u> $k.r(A) = p$, <u>dan bestaat er een (m × p)-matrix</u> B <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>met</u> $k.r(B) = k.r(A) = p$ <u>en</u> $r.r(B) = r.r(A)$.

<u>Bewijs</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

en noteer:

$$k_1, \ldots, k_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_m.$$

Dan is $k.r(A) = \text{rang}[k_1, \ldots, k_n]$, dus $\text{rang}[k_1, \ldots, k_n] = p$.

(i) Stel, dat $p < n$.

Kies p vectoren $k_{i_1}, \ldots, k_{i_p}$ uit $[k_1, \ldots, k_n]$ zodat het p-tupel $[k_{i_1}, \ldots, k_{i_p}]$ lineair onafhankelijk is, terwijl de overige vectoren uit $[k_1, \ldots, k_n]$ lineaire combinaties zijn van dit p-tupel (cf. II.3.17).

Door eventueel in A de 1^e kolom en de i_1^e kolom te verwisselen, daarna de 2^e en de i_2^e kolom, enz., enz., verkrijgen we na het uitvoeren van deze lineaire handelingen op de kolommen een matrix A_1. Noteer:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \cdots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$$

en

$$k'_1, \ldots, k'_n = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} \\ \vdots \\ \alpha'_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha'_{1n} \\ \vdots \\ \alpha'_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_m.$$

Volgens IV.1.9 is dan: $r.r(A_1) = r.r(A)$; $k.r(A_1) = k.r(A)$. Bovendien is $[k'_1, \ldots, k'_p]$ een lineair onafhankelijk stelsel, terwijl de vectoren $k'_{p+1}, \ldots, k'_n$ lineaire combinaties zijn van $[k'_1, \ldots, k'_p]$. Stel:

$$k'_n = \lambda_1 k'_1 + \ldots + \lambda_p k'_p;$$

dan is

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1,n-1} & \lambda_1\alpha'_{11} + \cdots + \lambda_p\alpha'_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \cdots & \alpha'_{m,n-1} & \lambda_1\alpha'_{m1} + \cdots + \lambda_p\alpha'_{mp} \end{pmatrix}.$$

Trek nu de eerste kolom λ_1 keer af van de n^e kolom, de tweede kolom λ_2 keer af van de n^e kolom,..., de p^e kolom λ_p keer af van de n^e kolom. Na het uitvoeren van deze lineaire handelingen op de kolommen van A_1 verkrijgen we de matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \cdots & \alpha'_{m,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

met $r.r(A_2) = r.r(A_1) = r.r(A)$ en $k.r(A_2) = k.r(A_1) = k.r(A)$. We zien dus dat we in A_1 de n^e kolom door een uit nullen bestaande kolom kunnen vervangen zonder de rijen- en kolommen-rang te veranderen, wegens de omstandigheid dat de n^e kolom een lineaire combinatie is van de eerste p kolommen van A.

Op analoge manier kunnen we de $(p+1)^e$ tot en met de $(n-1)^e$ kolom van A_1 ook door kolommen met louter nullen vervangen. We krijgen zo een $(m \times n)$-matrix

$$A_3 = \left(\begin{array}{|c|ccc} \hline & 0 & \cdots & 0 \\ B & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \end{array}\right),$$

waarin B een $(m \times p)$-matrix is, terwijl $k.r(A_3) = k.r(A_1) = k.r(A) = p$ en $r.r(A_3) = r.r(A_1) = r.r(A)$. Volgens IV.1.10 geldt dan ook: $k.r(B) = p$ en $r.r(B) = r.r(A)$.

(ii) Als $p = n$, definieer dan: $B = A$.

Hiermee is in alle gevallen een $(m \times p)$-matrix B met de gewenste eigenschappen gevonden. $\square$

IV.1.13 Gevolg: Is A een (m × n)-matrix uit $\mathbb{F}$, zodat r.r(A) = q, dan bestaat er een (q × n)-matrix C uit $\mathbb{F}$ met r.r(C) = r.r(A) = q en k.r(C) = k.r(A).

Bewijs: Beschouw de (n × m)-matrix A^T. Deze heeft volgens IV.1.8 als eigenschap dat r.r(A^T) = k.r(A) en k.r(A^T) = r.r(A) = q. Volgens IV.1.12 bestaat er een (n × q)-matrix B met r.r(B) = r.r(A^T) en k.r(B) = k.r(A^T) = q. Definieer nu: C = B^T. Dan is C een (q × n)-matrix terwijl bovendien geldt:

$$\text{r.r}(C) = \text{k.r}(B) = \text{k.r}(A^T) = \text{r.r}(A) = q;$$

$$\text{k.r}(C) = \text{r.r}(B) = \text{r.r}(A^T) = \text{k.r}(A),$$

zodat de bewering bewezen is. □

IV.1.14 Stelling: Voor elke (m × n)-matrix A uit $\mathbb{F}$ is k.r(A) = r.r(A).

Bewijs: Zij r.r(A) = q en k.r(A) = p. Volgens IV.1.12 is er bij A een (m × p)-matrix B met r.r(B) = r.r(A) en k.r(B) = p. Volgens IV.1.13 is er bij B een (q × p)-matrix C met r.r(C) = r.r(B) = q en k.r(C) = k.r(B) = p. Volgens IV.1.11 is dan p = q, hetgeen te bewijzen was. □

De voorgaande stelling rechtvaardigt de volgende defintie:

IV.1.15 Definitie: Is A een matrix uit $\mathbb{F}$ dan heet de kolommen-rang de rang van A. (Deze is gelijk aan de rijen-rang van A).

* * *

§IV.2. Homogene stelsels

IV.2.1 Definitie: Een $\mathbb{F}$-lineair stelsel (van m vergelijkingen in n onbekenden) is een formele uitdrukking van de vorm:

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1n}x_n = \beta_1 \\ \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{m1}x_1 + \lambda_{m2}x_2 + \ldots + \lambda_{mn}x_n = \beta_m, \end{cases} \qquad (*)$$

waarbij voor elke $i \in \{1,\ldots, m\}$ en elke $j \in \{1,\ldots, n\}$ λ_{ij} en β_i getallen zijn uit $\mathbb{F}$, terwijl $x_1,\ldots,x_n$ n verschillende formele symbolen zijn.

IV.2.2 Definitie: Een lineair stelsel IV.2.1 (*) heet een homogeen stelsel als $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. In alle andere gevallen heet IV.2.1 (*) inhomogeen.

IV.2.3 Definitie: Een n-tupel $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ heet een oplossing voor het lineaire stelsel IV.2.1 (*) als geldt:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{1n}\alpha_n = \beta_1 \\ \lambda_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{2n}\alpha_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{m1}\alpha_1 + \lambda_{m2}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{mn}\alpha_n = \beta_m . \end{cases} \qquad (*)$$

IV.2.4 Notatie: Als $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ een oplossing is van IV.2.1 (*), dan kunnen we IV.2.3 (*) ook schrijven in de vorm:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} .$$

Daarom geven we het lineaire stelsel IV.2.1 (*) ook -louter formeel- wel weer middels de uitdrukking:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

IV.2.5 <u>Definitie</u>: De $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

heet <u>de matrix van het lineaire stelsel</u> IV.2.1 (*).

We bepalen ons in deze paragraaf tot homogene stelsels.

IV.2.6 <u>Definitie</u>: Als S_1 en S_2 twee homogene stelsels van m vergelijkingen in n onbekenden zijn, dan heten S_1 en S_2 <u>aequivalent</u> als elke oplossing van S_1 ook een oplossing is van S_2 en -omgekeerd- elke oplossing van S_2 een oplossing is van S_1.

IV.2.7 <u>Definitie</u>: Als A een $(m \times n)$-matrix is uit $\mathbb{F}$, dan zeggen we dat het homogene lineaire stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(cf. IV.2.4) het <u>door</u> A <u>geïnduceerde homogene stelsel</u> is.

IV.2.8 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> A <u>een $(m \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$, <u>terwijl</u> V <u>en</u> W <u>twee</u> <u>$\mathbb{F}$-vectorruimten zijn met bases</u> $[a_1,\dots, a_n]$, <u>resp</u>. $[b_1,\dots, b_m]$. <u>Zij de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u> $\phi : V \to W$ <u>gegeven door</u>:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W, [b_1,\dots, b_m]).$$

Zij vervolgens S het door A geïnduceerde homogene stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden. Dan is het n-tupel $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ een oplossing van S dan en slechts dan als de vector

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n])$$

bevat is in $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Bewijs: (i) Zij het n-tupel $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ een oplossing van S. S is het stelsel:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus geldt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Nu is volgens II.5.32:

$$\phi(v) = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (W, [b_1, \ldots, b_m]).$$

Dus is uit (*) direkt duidelijk dat $\phi(v) = 0$, oftewel: $v \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

(ii) Stel nu: $v \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Volgens II.5.32 is dan

$$0 = \phi(v) = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (W, [b_1, \ldots, b_m]),$$

zodat

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

hetgeen betekent dat $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ een oplossing is van S. □

IV.2.9 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> A <u>een (m × n)-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en zij</u> A' <u>een matrix, uit</u> A <u>verkregen door toepassing van een lineaire handeling op de rijen van</u> A. <u>Dan zijn de respectievelijk door</u> A <u>en</u> A' <u>geïnduceerde homogene stelsels</u>

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>aequivalent</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en een m-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte W met basis $[b_1,\ldots, b_m]$. Zij $\phi : V \to W$ de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W, [b_1,\ldots, b_m]). \qquad (*)$$

Volgens II.5.17, II.5.18 en II.5.19 kunnen we een basis $[b_1',\ldots, b_m']$ uit W vinden, zodat ook geldt:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A'} (W, [b_1',\ldots, b_m']). \qquad (**)$$

(i) Zij nu het n-tupel $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ een oplossing van het door A geïnduceerde homogene stelsel. Volgens IV.2.8 en (*) wil dit zeggen dat, als

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

geldt: $v \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Volgens IV.2.8 en (**) wil dit zeggen dat $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$

een oplossing is van het door A' geïnduceerde stelsel. Dus, elke oplossing van het door A geïnduceerde homogene stelsel is ook een oplossing van het door A' geïnduceerde homogene stelsel.

(ii) Volstrekt analoog bewijst men dat elke oplossing van het door A' geïnduceerde homogene stelsel ook een oplossing is van het door A geïnduceerde homogene stelsel. (Ga na!) □

IV.2.10 Opmerking: Elk $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel heeft minstens één oplossing.

Bewijs: Het n-tupel [0,..., 0] is altijd een oplossing voor een homogeen stelsel in n onbekenden. □

IV.2.11 Opmerking: Is S een homogeen stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden en is A de ($m \times n$)-matrix van S, dan heeft S precies één oplossing dan en slechts dan als de rang van A gelijk is aan n.

Bewijs: Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en zij W een m-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[b_1,\ldots, b_m]$. Zij voorts $\phi : V \to W$ de lineaire afbeelding, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W, [b_1,\ldots, b_m]).$$

Volgens IV.1.6 is de rang van A gelijk aan $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi))$. Volgens II.4.24 geldt dan:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = n - r(A).$$

Dus, $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ dan en slechts dan als $r(A) = n$. En omdat volgens IV.2.8 de oplossingen van S één-éénduidig corresponderen met de vectoren uit $\mathrm{Ker}(\phi)$, volgt dat S precies één oplossing heeft dan en slechts dan als $r(A) = n$. (Deze oplossing is dan uiteraard [0,..., 0].) □

IV.2.12 Opgave: Is S een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel waarin het aantal vergelijkingen kleiner is dan het aantal onbekenden, dan heeft S meer dan één oplossing.

IV.2.13 <u>Lemma</u>: <u>Een</u> (<u>vierkante!</u>) <u>$(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>is regulier dan en slechts dan als</u> $r(A) = n$.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Beschouw het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme ϕ van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Volgens IV.1.6 is $r(A) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi))$, zodat $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V)$ (of, wat hetzelfde is: $\mathrm{Im}(\phi) = V$) dan en slechts dan als $r(A) = n$. Nu is volgens III.3.2 (iv) $\mathrm{Im}(\phi) = V$ dan en slechts dan als ϕ een $\mathbb{F}$-lineair automorphisme is, en dit laatste is volgens III.3.21 weer aequivalent met de bewering dat A regulier is. Vandaar het lemma. □

IV.2.14 <u>Opmerking</u>: <u>Een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel</u> S <u>met vierkante matrix</u> A <u>heeft precies één oplossing dan en slechts dan als</u> A <u>een reguliere matrix is</u>.

<u>Bewijs</u>: Dit is een rechtstreeks gevolg van IV.2.11 en IV.2.13. (Ga na!) □

IV.2.15 Beschouw nogmaals een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel S van m vergelijkingen in n onbekenden met $(m \times n)$-matrix A:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neem aan dat $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ en $[\gamma_1,\ldots, \gamma_n]$ twee oplossingen zijn van dit stelsel S. Dus:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beschouw hierbij de n-tupels $[\alpha_1 + \gamma_1,\ldots, \alpha_n + \gamma_n]$ en $[\lambda\alpha_1,\ldots, \lambda\alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ (waarbij λ een getal uit $\mathbb{F}$ is). Dan geldt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{pmatrix} = A \cdot [\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}] =$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = 0$$

en eveneens:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot [\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}] = \lambda \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Dus zijn beide laatstgenoemde n-tupels uit $\mathbb{F}$ ook oplossingen van het stelsel S. (*)

Zij nu

$$\mathcal{O}_S$$

de verzameling van alle oplossingen van S. Door als volgt een optelling en een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging:

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] = [\alpha_1 + \gamma_1, \ldots, \alpha_n + \gamma_n]$$

$$\lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n]$$

te definiëren op de elementen van $\mathcal{O}_S$ wordt blijkens (*) $\mathcal{O}_S$ een $\mathbb{F}$-vectorruimte. We noemen $\mathcal{O}_S$ de <u>oplossingsruimte van het stelsel</u> S.

IV.2.16 <u>Opmerking</u>: <u>Is S een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel met $(m \times n)$-matrix A, dan is de dimensie van de oplossingsruimte $\mathcal{O}_S$ van S gelijk aan</u> $n - r(A)$.

<u>Bewijs</u>: Zij V de verzameling van alle n-tupels uit $\mathbb{F}$. Met de optelling

$$[\beta_1, \ldots, \beta_n] + [\beta_1', \ldots, \beta_n'] = [\beta_1 + \beta_1', \ldots, \beta_n + \beta_n']$$

en de $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging

$$\lambda[\beta_1,\ldots, \beta_n] = [\lambda\beta_1,\ldots, \lambda\beta_n] \qquad (\lambda \in \mathbb{F})$$

is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Uit IV.2.15 volgt direkt dat $\mathcal{O}_S$ een $\mathbb{F}$-lineaire deelruimte is van V. Kies voor V de basis $[a_1,\ldots, a_n]$, gegeven door:

$$a_1 = [1,0,\ldots,0];\ a_2 = [0,1,0,\ldots,0];\ \ldots;\ a_n = [0,\ldots,0,1],$$

en beschouw voorts een m-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte W met basis $[b_1,\ldots, b_m]$. Zij $\phi : V \to W$ de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W, [b_1,\ldots, b_m]).$$

Volgens de dimensiestelling geldt:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = n - r(A).$$

We zijn dus klaar met het bewijs als we kunnen aantonen, dat $\mathcal{O}_S = \mathrm{Ker}(\phi)$. Nu weten we volgens IV.2.8 dat $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] \in \mathcal{O}_S$ dan en slechts dan als de vector

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

bevat is in $\mathrm{Ker}(\phi)$. Maar

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = \\ &= \alpha_1[1,0,\ldots,0] + \ldots + \alpha_n[0,\ldots,0,1] = [\alpha_1,\ldots, \alpha_n]. \end{aligned}$$

We hebben dus bewezen: $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] \in \mathcal{O}_S$ dan en slechts dan als $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Dit betekent: $\mathcal{O}_S = \mathrm{Ker}(\phi)$, zodat de opmerking bewezen is. □

Als dus gevraagd wordt om een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel S met $(m \times n)$-matrix A op te lossen, dan is het voldoende om $n - r(A)$ lineair onafhankelijke n-tupels uit $\mathbb{F}$ te geven die stuk voor stuk oplossingen zijn van S, en derhalve een basis vormen voor O_S!

Tot slot van deze paragraaf geven we een algemene methode om een $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel op te lossen.

IV.2.17 Lemma: De oplossingen van het "homogene stelsel" van 1 vergelijking in n onbekenden:

$$\lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1n}x_n = 0 \qquad (\lambda_{11} \neq 0) \qquad (*)$$

zijn gegeven door de basis

$$[-\lambda_{11}^{-1}\lambda_{12}u_1+u_2,\ -\lambda_{11}^{-1}\lambda_{13}u_1+u_3,\ldots,\ -\lambda_{11}^{-1}\lambda_{1n}u_1+u_n] \qquad (**)$$

van de oplossingsruimte, waarbij de n-tupels u_i $(i = 1,\ldots,n)$ uit $\mathbb{F}$ gegeven zijn door:

$$u_1 = [1,0,\ldots,0];\ u_2 = [0,1,0,\ldots,0];\ldots;\ u_n = [0,\ldots,0,1].$$

Bewijs: Men verifieert rechtstreeks dat deze basisvectoren uit de oplossingsruimte inderdaad oplossingen zijn. (Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}-\lambda_{11}^{-1}\lambda_{12}u_1+u_2 &= -\lambda_{11}^{-1}\lambda_{12}[1,0,\ldots,0] + [0,1,0,\ldots,0] = \\ &= [-\lambda_{11}^{-1}\lambda_{12},1,0,\ldots,0]\end{aligned}$$

en dit n-tupel uit $\mathbb{F}$ is, zoals door substitutie blijkt, een oplossing van (*).) Men controlere zelf dat de $n - 1$ gegeven n-tupels uit het stelsel (**) lineair onafhankelijk zijn. De matrix A van het gegeven homogene stelsel is

$$A = (\lambda_{11},\ \lambda_{12},\ \ldots,\ \lambda_{1n}).$$

Omdat $\lambda_{11} \neq 0$, is $r(A) = 1$. Dus de dimensie van de oplossingsruimte is $n - r(A) = n - 1$. Derhalve is (**) -als lineair onafhankelijk stelsel van $n - 1$ vectoren uit de oplossingsruimte- een basis voor de oplossingsruimte van het homogene stelsel (*). $\square$

IV.2.18 Lemma: Zij S een **F**-lineair homogeen stelsel van de vorm:

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1,k-1}x_{k-1} + \lambda_{1k}x_k + \dots + \lambda_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_{2k}x_k + \dots + \lambda_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_{mk}x_k + \dots + \lambda_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

(waarbij $\lambda_{11} \neq 0$, $\lambda_{2k} \neq 0$, $k \geq 2$). Zij S_1 het deelstelsel van S, gevormd door de 2^e tot en met de m^e vergelijking:

$$\begin{cases} \lambda_{2k}x_k + \dots + \lambda_{2n}x_n = 0 \\ \lambda_{3k}x_k + \dots + \lambda_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{mk}x_k + \dots + \lambda_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{$**$}$$

Dan is $[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta_n]$ een oplossing van S dan en slechts dan als $[\beta_k, \dots, \beta_n]$ een oplossing is voor S_1 en als verder geldt:

$$\alpha_1 = -\lambda_{11}^{-1}(\lambda_{12}\alpha_2 + \dots + \lambda_{1,k-1}\alpha_{k-1} + \lambda_{1k}\beta_k + \dots + \lambda_{1n}\beta_n). \tag{$***$}$$

Bewijs: (i) Zij eerst $[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta_n]$ een oplossing voor S. Dan is zeker

$$\begin{cases} \lambda_{2k}\beta_k + \dots + \lambda_{2n}\beta_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{mk}\beta_k + \dots + \lambda_{mn}\beta_n = 0, \end{cases}$$

zodat $[\beta_k, \dots, \beta_n]$ een oplossing is voor S_1. Voorts geldt:

$$\lambda_{11}\alpha_1 + \dots + \lambda_{1,k-1}\alpha_{k-1} + \lambda_{1k}\beta_k + \dots + \lambda_{1n}\beta_n = 0$$

en omdat $\lambda_{11} \neq 0$ volgt hieruit direkt:

$$\alpha_1 = -\lambda_{11}^{-1}(\lambda_{12}\alpha_2 + \dots + \lambda_{1,k-1}\alpha_{k-1} + \lambda_{1k}\beta_k + \dots + \lambda_{1n}\beta_n).$$

(ii) Veronderstel nu dat $[\beta_k,\dots,\beta_n]$ een oplossing is voor S_1 en dat de getallen $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}$ uit $\mathbb{F}$ voldoen aan de betrekking (***). Dan geldt:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 + \dots + \lambda_{1,k-1}\alpha_{k-1} + \lambda_{1k}\beta_k + \dots + \lambda_{1n}\beta_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{2k}\beta_k + \dots + \lambda_{2n}\beta_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{mk}\beta_k + \dots + \lambda_{mn}\beta_n = 0, \end{cases}$$

zodat $[\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\beta_k,\dots,\beta_n]$ een oplossing is van S. □

IV.2.19 Gebruik makend van beide voorgaande lemma's kunnen we nu in het algemeen homogene $\mathbb{F}$-lineaire stelsels oplossen. Beschouw een willekeurig $\mathbb{F}$-lineair homogeen stelsel S:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We mogen vanzelfsprekend aannemen dat in de matrix (λ_{ij}) van dit stelsel geen rijen of kolommen voorkomen die uitsluitend uit nullen bestaan.

Passen we op de rijen van de matrix (λ_{ij}) een lineaire handeling toe, dan verkrijgen we volgens IV.2.9 een matrix (μ_{ij}) die een homogeen stelsel

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

induceert dat aequivalent is met het oorspronkelijke stelsel S. Hiervan maken we nu op de volgende wijze gebruik:

(i) Door eventueel twee rijen van (λ_{ij}) te verwisselen mogen we aannemen dat $\lambda_{11} \neq 0$.

(ii) Trek de eerste rij nu $\lambda_{11}^{-1}\lambda_{i1}$ keer af van de i^e rij, voor $i = 2,\dots,m$.

Door de onder (i) en (ii) genoemde lineaire handelingen op de rijen van (λ_{ij}) uit te voeren verkrijgen we een met S aequivalent stelsel van de vorm:

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ 0 & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(waarbij $\mu_{11} = \lambda_{11} \neq 0$). We onderscheiden nu twee mogelijkheden:

(a) De sub-matrix

$$\begin{pmatrix} \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

bestaat uitsluitend uit nullen. Dan is S aequivalent met het stelsel (*) dat de vorm

$$\mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \ldots + \mu_{1n}x_n = 0$$

heeft. Dit stelsel kunnen we met behulp van lemma IV.2.17 oplossen.

(b) De sub-matrix (**) bestaat niet uitsluitend uit nullen: in dit geval is er een $k \geq 2$ te vinden, zodat (**) van de vorm

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mu_{2k} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{mk} & \cdots & \mu_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

is, waarbij niet elk der elementen $\mu_{2k}, \mu_{3k}, \ldots, \mu_{mk}$ nul is. Door in de matrix

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1,k-1} & \mu_{1k} & \cdots & \mu_{1n} \\ 0 & & 0 & \mu_{2k} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{mk} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix}$$

van het homogene stelsel (*) eventueel de tweede rij met één der volgende rijen te verwisselen, kunnen we aannemen dat $\mu_{2k} \neq 0$ is. Het stelsel (*) is dan van de vorm:

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \dots + \mu_{1,k-1}x_{k-1} + \mu_{1k}x_k + \dots + \mu_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mu_{2k}x_k + \dots + \mu_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mu_{mk}x_k + \dots + \mu_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

met $\mu_{11} \neq 0$, $\mu_{2k} \neq 0$, $k \geq 2$. Met lemma IV.2.18 betekent dit dat het oplossen van het stelsel (*) bereikt wordt door het stelsel van $m - 1$ vergelijkingen

$$\begin{cases} \mu_{2k}x_k + \dots + \mu_{2n}x_n = 0 \\ \mu_{3k}x_k + \dots + \mu_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{mk}x_k + \dots + \mu_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

op te lossen. We hebben zo het stelsel S, voor wat betreft het bepalen van de oplossingen, gereduceerd tot een stelsel van minstens één vergelijking minder. Zo kunnen we doorgaan, tot we uiteindelijk een stelsel, bestaande uit één vergelijking verkrijgen, waarvan we volgens IV.2.17 de oplossing kennen. □

IV.2.20 Voorbeeld: We bepalen de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

De bijbehorende matrix is:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trek de 1^e rij 1 keer af van de 2^e rij, 3 keer van de 3^e rij en $\frac{1}{2}$ keer van de 4^e rij. We krijgen dan de matrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Het door A_1 geïnduceerde homogene stelsel is aequivalent met stelsel (*). Verwissel nu de 2^e en de 4^e rij van A_1. We verkrijgen dan een matrix A_2 van het homogene stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases} \tag{**}$$

dat nog steeds aequivalent is met (*). Volgens IV.2.18 kennen we de oplossingen van (**) als we de oplossingen van het deelstelsel

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{***}$$

kennen. Weer volgens IV.2.18 is het voldoende om de oplossingen te bepalen van het deelstelsel hiervan:

$$\begin{cases} 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Dit stelsel is uiteraard aequivalent met het stelsel

$$x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \tag{****}$$

(****) heeft als basis voor de oplossingsruimte van (****) (cf. IV.2.17.):

$$[[2,1,0], [-2,0,1]].$$

Anders gezegd: de oplossingen van (****) zijn de lineaire combinaties van deze basis:

$$\sigma_1[2,1,0] + \sigma_2[-2,0,1] = [2\sigma_1 - 2\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

Volgens IV.2.18 zijn dan de oplossingen van (***):

$$[\sigma_3,\ 2\sigma_1 - 2\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2],$$

waarbij:

$$\sigma_3 = -(\tfrac{1}{2})^{-1}\ \{(2\sigma_1 - 2\sigma_2) - \sigma_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_2\} = -2\sigma_1 + 3\sigma_2.$$

Dus, de oplossingen van (***) zijn de 4-tupels

$$[-2\sigma_1 + 3\sigma_2,\ 2\sigma_1 - 2\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

Weer volgens IV.2.18 vinden we hieruit de oplossingen van (**): dit zijn de 5-tupels

$$[\sigma_4,\ -2\sigma_1 + 3\sigma_2,\ 2\sigma_1 - 2\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2],$$

waarbij:

$$\sigma_4 = -2^{-1}\ \{(-2\sigma_1 + 3\sigma_2) + 4\sigma_1 + \sigma_2\} = -\sigma_1 - 2\sigma_2.$$

Dus de oplossingen van het oorspronkelijke stelsel (*) (zijnde de oplossingen van het aequivalente stelsel (**)) zijn de 5-tupels

$$[-\sigma_1 - 2\sigma_2,\ -2\sigma_1 + 3\sigma_2,\ 2\sigma_1 - 2\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}),$$

of, anders geschreven,

$$\sigma_1[-1, -2, 2, 1, 0] + \sigma_2[-2, 3, -2, 0, 1] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

De lineair onafhankelijke 5-tupels [-1,-2,2,1,0] en [-2,3,-2,0,1] vormen derhalve een basis van de oplossingsruimte van (*) die derhalve tweedimensionaal is. (Dit betekent volgens IV.2.16 :

$$r(A) = n - 2 = 3.$$

De lezer controlere dit door de rang van de matrix A te bepalen.)

* * *

§IV.3. Lineaire stelsels

In deze paragraaf maken we enkele opmerkingen over het oplossen van een $\mathbb{F}$-lineair stelsel.

IV.3.1 Opmerking: Zij S het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1n}x_n = \beta_1 \\ \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{m1}x_1 + \lambda_{m2}x_2 + \dots + \lambda_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

met de bijbehorende $(m \times n)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases $[a_1,\dots, a_n]$, resp. $[b_1,\dots, b_m]$ en is $\phi : V \to W$ de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding die gegeven wordt door:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W, [b_1,\dots, b_m]),$$

dan is het n-tupel $[\alpha_1,\dots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ een oplossing van S dan en slechts dan als

$$\phi(v) = w$$

waarbij:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\dots, a_n]) \quad ; \quad w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in (W, [b_1,\dots, b_m]).$$

Bewijs: Als $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ een oplossing is voor S, dan betekent dit:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

en dit wil volgens II.5.32 niets anders zeggen dan $\phi(v) = w$. □

IV.3.2 Definitie: Is

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

een **F**-lineair stelsel, dan heet de $(m \times (n+1))$-matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

de uitgebreide matrix van dit stelsel.

IV.3.3 Opmerking: Is

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

een **F**-lineair stelsel S met uitgebreide matrix A^*, dan heeft dit stelsel een oplossing dan en slechts dan als geldt:

$$r(A) = r(A^*).$$

Bewijs: A is een $(m \times n)$-matrix. Kies **F**-vectorruimten V en W met bases $[a_1, \ldots, a_n]$, resp. $[b_1, \ldots, b_m]$. Zij $\phi : V \to W$ de **F**-lineaire afbeelding die gegeven wordt door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (W, [b_1,\ldots, b_m]).$$

Noteer:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in (W, [b_1,\ldots, b_m]).$$

Volgens IV.3.1 is een n-tupel $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ uit $\mathbb{F}$ een oplossing van S dan en slechts dan als voor de vector

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

geldt:

$$\phi(a) = b.$$

Dus, S heeft oplossingen dan en slechts dan als er vectoren $a \in V$ bestaan, zodat b het beeld is van a onder ϕ. Dit wil niets anders zeggen dan: S heeft oplossingen dan en slechts dan als

$$b \in \mathrm{Im}(\phi).$$

Zij nu

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\phi(a_j) = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{mj} \end{pmatrix} \in (W, [b_1,\ldots, b_m]), \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Nu is volgens IV.1.6 de (kolommen-)rang van A gelijk aan de dimensie van $\mathrm{Im}(\phi)$, dus -omdat $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een stelsel voortbrengenden is van $\mathrm{Im}(\phi)$- gelijk aan de rang van dit n-tupel vectoren uit W. Evenzo is de rang van A^* gelijk aan de rang van het $(n+1)$-tupel vectoren $[\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n),b]$ uit W.

Is nu $b \in \mathrm{Im}(\phi)$, dan is b een lineaire combinatie van $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ zodat volgens II.3.26 $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ en $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n), b]$ dezelfde rang hebben.

Is omgekeerd gegeven dat laatstgenoemde twee tupels dezelfde rang hebben, dan is de dimensie van $\mathrm{Im}(\phi)$ gelijk aan de dimensie van de lineaire deelruimte van W, die opgespannen wordt door $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n), b]$. Omdat $\mathrm{Im}(\phi)$ bovendien in deze deelruimte is bevat, volgt dat $\mathrm{Im}(\phi)$ gelijk is aan de door $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n), b]$ opgespannen deelruimte van W. Dit houdt in: $b \in \mathrm{Im}(\phi)$.

We zien dus dat $b \in \mathrm{Im}(\phi)$ is dan en slechts dan als $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ en $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n), b]$ gelijke rang hebben, oftewel: dan en slechts dan als $r(A) = r(A^*)$. Dus heeft het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel S oplossingen dan en slechts dan als $r(A) = r(A^*)$. □

IV.3.4 <u>Definitie</u>: Is S het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

dan heet het $\mathbb{F}$-lineaire homogene stelsel S_1, geïnduceerd door de matrix A van S:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

het <u>met</u> S <u>geassocieerde homogene stelsel</u>.

IV.3.5 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ <u>een oplossing van het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel</u> S, <u>gegeven door</u>:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

<u>dan zijn de oplossingen van</u> S <u>precies alle n-tupels van de vorm</u>

$$[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] + [\gamma_1,\ldots, \gamma_n],$$

<u>waarbij</u> $[\gamma_1,\ldots, \gamma_n]$ <u>een oplossing is van het met</u> S <u>geassocieerde homogene stelsel</u> S_1.

<u>Bewijs</u>: (i) Beschouw een n-tupel

$$[\delta_1,\ldots, \delta_n] = [\alpha_1,\ldots, \alpha_n] + [\gamma_1,\ldots, \gamma_n],$$

waarbij $[\gamma_1,\ldots, \gamma_n]$ een oplossing is van S_1. Dan geldt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = A \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

zodat $[\delta_1,\ldots, \delta_n]$ inderdaad een oplossing is van S.

(ii) Zij nu $[\delta_1,\ldots, \delta_n]$ een willekeurige oplossing van S. We moeten dan laten zien dat er een oplossing $[\gamma_1,\ldots, \gamma_n]$ van S_1 bestaat zodat

$$[\delta_1,\ldots, \delta_n] = [\alpha_1,\ldots, \alpha_n] + [\gamma_1,\ldots, \gamma_n].$$

Met andere woorden, we moeten laten zien dat het n-tupel

$$[\delta_1,\ldots, \delta_n] - [\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$$

een oplossing is van S_1. Welnu, dit volgt wegens:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \delta_n - \alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hiermee is de opmerking bewezen. □

De voorgaande opmerking zegt dat, om een $\mathbb{F}$-lineair stelsel S op te lossen, het voldoende is om één oplossing van S te bepalen alsmede alle oplossingen van het geassocieerde homogene stelsel S_1. Dit laatste is in de voorgaande paragraaf behandeld, zodat het probleem blijft om een "particuliere" oplossing van het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel S te bepalen. Soms kan men zo'n particuliere oplossing gemakkelijk vinden. Dan is dus het oplossen van $\mathbb{F}$-lineaire stelsels teruggebracht tot het oplossen van homogene stelsels.

Ook indien men niet zo gemakkelijk een particuliere oplossing kan vinden, kan men in het algemeen het probleem van de oplossing van een $\mathbb{F}$-lineair stelsel terugvoeren tot het vinden van de oplossingen van een homogeen stelsel, dat dan echter één onbekende meer bevat.

IV.3.6. <u>Opmerking</u>: <u>Beschouw bij het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel</u> S, <u>gegeven door</u>:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

<u>het $\mathbb{F}$-lineaire homogene stelsel</u> S^*, <u>gegeven door</u>:

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>waarbij</u> A^* <u>de uitgebreide matrix is van</u> S. <u>Dan is</u> $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ <u>een oplossing van</u> S <u>dan en slechts dan als</u> $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -1]$ <u>een oplossing is van</u> S^*.

<u>Bewijs</u>: (i) Zij $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ een oplossing van S. Dan geldt, als

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix},$$

dat

$$\begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{1n}\alpha_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{m1}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{mn}\alpha_n = \beta_m. \end{cases}$$

Dus ook:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{1n}\alpha_n + (-1)\beta_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{m1}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{mn}\alpha_n + (-1)\beta_m = 0, \end{cases}$$

wat betekent dat $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, -1]$ een oplossing is van S^*.

(ii) Even simpel bewijze de lezer zelf dat, als $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, -1]$ een oplossing is van S^*, $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n]$ een oplossing is van S. □

IV.3.7 Men ziet uit de vorige opmerking dat men het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel S als volgt kan oplossen: Bepaal eerst alle oplossingen van S^*; kies hieruit díé oplossingen $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}]$ waarvoor geldt:

$$\alpha_{n+1} \neq 0;$$

is $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}]$ zo'n oplossing van S^*, dan is het n-tupel

$$[-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}},\ldots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}] \qquad (*)$$

een oplossing van S. (Immers, met $[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}]$ ($\alpha_{n+1} \neq 0$) is ook volgens IV.2.15

$$-\alpha_{n+1}^{-1}[\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}] = [-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}},\ldots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, -1]$$

een oplossing van S^*. Volgens IV.3.16 is (*) dan een oplossing van S.)

IV.3.8 <u>Voorbeeld</u>: We lossen het $\mathbb{R}$-lineaire stelsel S:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

op de twee hiervoor beschreven manieren op.

Allereerst bepalen we of S een oplossing heeft. Is A de matrix en A^* de uitgebreide matrix van S, dan moet -opdat er een oplossing is- gelden: $r(A) = r(A^*)$. De lezer controlere dat beide matrices de rang 3 hebben.

Neem eerst aan dat we geen particuliere oplossing van S kunnen vinden. We beschouwen dan het door A^* geïnduceerde $\mathbb{R}$-lineaire homogene stelsel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Omdat $r(A^*) = 3$ heeft de oplossingsruimte van dit stelsel de dimensie 2.) Trek in A^* de 1^e rij 2 (resp. 3, resp. 2) keer af van de 2^e (resp. 3^e, resp. 4^e) rij. We krijgen dan de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

We beschouwen nu (de methode volgend uit de vorige paragraaf) het homogene stelsel, geïnduceerd door de sub-matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Trek in deze matrix de 1^e rij 2 (resp. 1) keer af van de 2^e (resp. 3^e) rij. Dit levert de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

We beschouwen vervolgens de sub-matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -12 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Trek hierin de 1^e rij af van de 2^e rij:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (***)$$

Deze matrix induceert het "stelsel" van één vergelijking in drie onbekenden:

$$-2x_3 - 2x_4 - 12x_5 = 0.$$

De oplossingen van dit door (***) geïnduceerde stelsel zijn de 3-tupels:

$$[-\sigma_1 - 6\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

Dus het homogene stelsel, geïnduceerd door (**) heeft als oplossing de 4-tupels:

$$[\sigma_1 + 5\sigma_2, -\sigma_1 - 6\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

Het homogene stelsel, geïnduceerd door A^* heeft dus als oplossingen de 5-tupels van de vorm:

$$[\sigma_1 + 3\sigma_2, \sigma_1 + 5\sigma_2, -\sigma_1 - 6\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}).$$

De oplossingen van S zijn dus de 4-tupels van de vorm:

$$[-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 3, -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 5, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + 6, -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}] \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}; \sigma_2 \neq 0),$$

of, anders geschreven, de 4-tupels van de vorm:

(i) $$[-3,-5,6,0] + \tau[-1,-1,1,-1] \qquad (\tau \in \mathbb{R})$$

(waarbij we τ in plaats van $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ hebben geschreven).

Stel nu dat we een particuliere oplossing kennen; bijvoorbeeld:

$$[1, -1, 2, 4]$$

is een oplossing van S. We lossen nu het met S geassocieerde homogene stelsel S_1 op dat geïnduceerd wordt door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ga na dat deze oplossingen zijn: de 4-tupels

$$\sigma[1, 1, -1, 1] \qquad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

De oplossingen van S zijn dus de 4-tupels van de vorm:

(ii) $$[1,-1,2,4] + \sigma[1,1,-1,1] \qquad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

De lezer controlere dat de oplossingen van S zoals gegeven onder (i) en (ii) dezelfde zijn!

IV.3.9 <u>Opgave</u>: <u>Merk op dat de oplossingen van een niet-homogeen $\mathbb{F}$-lineair stelsel geen $\mathbb{F}$-vectorruimte vormen</u>!

IV.3.10 <u>Voorbeeld</u>: (Examen Wetenschappelijk Rekenen A; 1961).
We onderzoeken voor alle reële waarden a en b de oplosbaarheid van het stelsel S, gegeven door:

$$\begin{cases} 2x - \ y - \ z = 0 \\ 4x + \ y - az = 1 \\ \ x - 3y + 7z = b. \end{cases} \qquad (*)$$

S heeft een oplossing dan en slechts dan als geldt:

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -3 & 7 & b \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Volgens IV.2.13 is

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = 3$$

dan en slechts dan als

$$55 - 5a = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \neq 0,$$

oftewel: dan en slechts dan als $a \neq 11$.

(i) Stel $a \neq 11$. Dan is het 3-tupel vectoren

$$[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 7 \end{pmatrix}]$$

een lineair onafhankelijk stelsel uit $\mathbb{R}_3$. Derhalve is de (kolommen-)rang van de uitgebreide matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -3 & 7 & b \end{pmatrix}$$

groter dan of gelijk aan 3. Omdat deze matrix drie rijen heeft, is de (rijen-) rang ≤ 3. Dus is, als $a \neq 11$, ook de rang van de uitgebreide matrix S gelijk aan 3. Dus, voor $a \neq 11$ is het $\mathbb{F}$-lineaire stelsel S voor elke waarde van b oplosbaar.

(ii) Stel nu: $a = 11$. Dan is

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -11 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = 2.$$

(Ga na!) We bepalen nu voor $a = 11$ de rang van de uitgebreide matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -3 & 7 & b \end{pmatrix}$$

voor alle reële waarden van b.

Tel nu de 1^e kolom van A^* 2 keer op bij de 3^e kolom. We krijgen de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & b \end{pmatrix}.$$

Tel de 2^e kolom 3 keer op bij de derde kolom:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Deze matrix (die dezelfde rang heeft als A^*) heeft dezelfde rang als de (3×3)-matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & b \end{pmatrix}.$$

De rang van deze matrix is 3 dan en slechts dan als

$$6b + 5 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & b \end{pmatrix} \neq 0$$

(cf. IV.2.13). <u>Dus als</u>

$$a = 11 \quad , \quad b \neq -\tfrac{5}{6}$$

<u>dan is</u>

$$r \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -3 & 7 & b \end{pmatrix}$$

<u>en is het stelsel</u> S <u>niet oplosbaar</u>.
Stel nu:

$$a = 11 \quad , \quad b = -\tfrac{5}{6}.$$

Dan is

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -3 & 7 & b \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = 2,$$

zodat in dat geval S wel oplosbaar is.

Samenvattend:

$a \neq 11,\ b \in \mathbb{R}$ ..... er is een oplossing van S;

$a = 11,\ b = -\frac{5}{6}$ ..... er is een oplossing van S;

$a = 11,\ b \neq -\frac{5}{6}$ ..... er is geen oplossing van S.

Opgave: Bepaal in de eerste twee gevallen alle oplossingen van S.

* * *

V. Eigenwaarden

§V.1. Eigenwaarden en eigenvectoren

V.1.1 Voorbeeld: Beschouw het door de (3×3)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

geïnduceerde $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme

$$\phi = (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$

waarbij

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beschouw de twee vectoren $a, b \in \mathbb{E}_3$, gegeven door:

$$a = e_1 + e_2 + e_3 \quad ; \quad b = e_3.$$

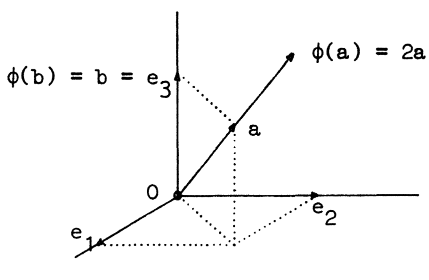
Dan geldt:

$$\phi(a) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3])$$

$$\phi(b) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$

oftewel:

$$\phi(a) = 2a \quad ; \quad \phi(b) = b.$$



De vectoren a en b uit $\mathbb{E}_3$ worden dus afgebeeld door ϕ op vectoren die "dezelfde richting" hebben als a, resp. b zelf. Zulke vectoren zullen we "eigenvectoren" van de afbeelding ϕ noemen. Nu werd a op $2 \cdot a$ en b op $1 \cdot b$ afgebeeld door ϕ. De reële getallen 2 (resp. 1) gaan we "eigenwaarden" van ϕ noemen.

V.1.2 Het probleem dat we nu in het algemeen zullen bespreken is: als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is en $\phi : V \to V$ is een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, welke zijn dan de getallen $\lambda \in \mathbb{F}$ (zo zulke getallen bestaan) waarbij een vector $v \in V$ kan worden gevonden met $v \neq 0$ zodat geldt:

$$\phi(v) = \lambda \cdot v \ ?$$

Zij n de dimensie van V; zij $[a_1, \ldots, a_n]$ een basis voor V en zij A de $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

We zullen proberen om alle eigenwaarden van ϕ op te sporen. Noteer:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zij nu $\lambda \in \mathbb{F}$. Opdat λ een eigenwaarde van ϕ is, moet er een bijbehorende eigenvector $b \neq 0$ in V te vinden zijn, zeg

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]),$$

zodat:

$$\phi(b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]). \qquad (*)$$

Nu is

$$\lambda\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \lambda I_n\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix},$$

zodat -opdat λ een eigenwaarde is bij b- we in plaats van (*) ook kunnen schrijven:

$$A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \lambda I_n\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix},$$

oftewel:

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Beschouw hierbij het homogene $\mathbb{F}$-lineaire stelsel S, gegeven door

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Volgens (**) is λ een eigenwaarde van ϕ als dit stelsel een oplossing $[\beta_1,\ldots, \beta_n]$ heeft, ongelijk aan de altijd bestaande oplossing $[0,\ldots, 0]$ (immers: $b \neq 0$). Volgens IV.2.14 is dit het geval dan en slechts dan als

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \qquad (***)$$

Samenvattend: $\lambda \in \mathbb{F}$ is een eigenwaarde van ϕ dan en slechts dan als $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Twee opmerkingen:

(i) In de betrekking (***) komen V en ϕ niet expliciet voor. Het al of niet eigenwaarde zijn van λ wordt dus door A bepaald.

(ii) $\det(A - \lambda I_n)$ is een n^e graads veelterm in λ. Bijvoorbeeld, als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(zodat hier $n = 3$), dan is

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 =$$

$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2,$$

zodat hier $\lambda = 1$ en $\lambda = 2$ de eigenwaarden zijn. (Vgl. V.1.1.)

V.1.3 We gaan nu de in V.1.1 en V.1.2 geschetste begrippen formeel invoeren:

V.1.4 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V. Als $\lambda \in \mathbb{F}$ is, en er bestaat een vector $b \in V$ met $b \neq 0$ zodat

$$\phi(b) = \lambda b,$$

dan heet λ een <u>eigenwaarde van</u> ϕ.

V.1.5 <u>Definitie</u>: Zij A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{F}$ heet een <u>eigenwaarde van</u> A als geldt:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

V.1.6 <u>Definitie</u>: Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, dan heet het n^e graads polynoom in λ (met coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$)

$$\det(A - \lambda I_n) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

de <u>karakteristieke veelterm van</u> A.

V.1.7 Definitie: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, terwijl λ een eigenwaarde is van ϕ, dan heet elke vector $a \in V$ die voldoet aan

$$\phi(a) = \lambda a$$

een eigenvector van ϕ bij de eigenwaarde λ van ϕ.

V.1.8 Opmerking: Is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, is λ een eigenwaarde van ϕ en zijn $a_1,\dots,a_k$ k eigenvectoren van ϕ bij λ, dan is ook elke lineaire combinatie van $[a_1,\dots,a_k]$ een eigenvector van ϕ bij λ.

Bewijs: Zij c een lineaire combinatie van $[a_1,\dots,a_k]$, zeg:

$$c = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k.$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \mu_1\phi(a_1) + \dots + \mu_k\phi(a_k) = \\ &= \lambda\{\mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k\} = \lambda c,\end{aligned}$$

zodat de opmerking geldt. □

Uit de laatste opmerking volgt onmiddellijk dat,als λ een eigenwaarde is van ϕ, de eigenvectoren bij λ van ϕ een $\mathbb{F}$-lineaire deelruimte vormen van V. We definiëren:

V.1.9 Definitie: Is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V en is $\lambda \in \mathbb{F}$ een eigenwaarde van ϕ, dan heet de $\mathbb{F}$-lineaire deelruimte der eigenvectoren van ϕ bij λ de eigenruimte van ϕ bij λ.

V.1.10 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, zijn λ_1 en λ_2 twee verschillende eigenwaarden van ϕ, zijn W_1 en W_2 de eigenruimten van ϕ bij λ_1, resp. λ_2, dan geldt:

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Bewijs: Als $c \in W_1 \cap W_2$, dan geldt:

$$\phi(c) = \lambda_1 c \quad ; \quad \phi(c) = \lambda_2 c ,$$

zodat $(\lambda_1 - \lambda_2)c = 0$. Omdat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ volgt hieruit: $c = 0$. □

V.1.11 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, zijn $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ paarsgewijs verschillende eigenwaarden van ϕ en zijn $b_1, \ldots, b_k \in V$, zodat b_j een eigenvector is van ϕ bij λ_j $(j = 1, \ldots, k)$ en $b_j \neq 0$, dan is het k-tupel $[b_1, \ldots, b_k]$ uit V een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs: Veronderstel dat het k-tupel $[b_1, \ldots, b_k]$ lineair afhankelijk is. Dan is de rang van $[b_1, \ldots, b_k]$ kleiner dan k. Zeg:

$$\text{rang}[b_1, \ldots, b_k] = r < k.$$

Kies r vectoren $b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}$ uit $[b_1, \ldots, b_k]$ zodat $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}]$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Kies vervolgens een b_j uit $[b_1, \ldots, b_k]$ die niet in dit r-tupel voorkomt. Dan is b_j een lineaire combinatie van $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}]$ zodat we getallen $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{F}$ kunnen kiezen, zodat

$$b_j = \mu_1 b_{i_1} + \ldots + \mu_r b_{i_r}. \tag{*}$$

Dan is

$$\begin{aligned} \lambda_j b_j = \phi(b_j) &= \mu_1 \phi(b_{i_1}) + \ldots + \mu_r \phi(b_{i_r}) = \\ &= \mu_1 \lambda_{i_1} b_{i_1} + \ldots + \mu_r \lambda_{i_r} b_{i_r}. \end{aligned} \tag{**}$$

Volgens (*) geldt ook (linker- en rechterlid met λ_j vermenigvuldigen):

$$\lambda_j b_j = \mu_1 \lambda_j b_{i_1} + \ldots + \mu_r \lambda_j b_{i_r}.$$

Dit laatste, gecombineerd met (**), levert:

$$0 = \mu_1(\lambda_{i_1} - \lambda_j) b_{i_1} + \ldots + \mu_r(\lambda_{i_r} - \lambda_j) b_{i_r}.$$

Omdat steeds $\lambda_{i_t} \neq \lambda_j$ $(t = 1,\ldots,r)$ moet, omdat $[b_{i_1},\ldots, b_{i_r}]$ een lineair onafhankelijk stelsel is, gelden:

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = 0,$$

hetgeen volgens (*) betekent: $b_j = 0$, in tegenspraak met het gegeven. Dus geldt de opmerking. □

V.1.12 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte</u>, <u>is</u> $\phi : V \to V$ <u>een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van</u> V, <u>is</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>een basis voor</u> ϕ <u>en is</u> A <u>de $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zodat</u>

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

<u>dan zijn de eigenwaarden van</u> ϕ <u>precies de wortels van de karakteristieke veelterm van</u> A <u>in</u> $\mathbb{F}$.

<u>Bewijs</u>: Dit is al bewezen in V.1.2. □

V.1.13 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> A <u>en</u> B <u>twee aequivalente $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$, <u>dan hebben</u> A <u>en</u> B <u>dezelfde karakteristieke veelterm</u>.

<u>Bewijs</u>: Er is een reguliere $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, zeg S, zodat

$$A = S^{-1}BS.$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) &= \det(S^{-1}BS - \lambda S^{-1}I_nS) = \\
&= \det(S^{-1}BS - S^{-1}(\lambda I_n)S) = \\
&= \det S^{-1}(B - \lambda I_n)S = \\
&= \det(S^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det(S) = \\
&= (\det(S))^{-1} \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det(S) = \\
&= \det(B - \lambda I_n). \ \square
\end{aligned}$$

V.1.14 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{F}$ <u>geldt</u>, <u>dat</u> A <u>en</u> A^T <u>dezelfde karakteristieke veelterm hebben</u>.

Bewijs: In het algemeen gelden voor elk tweetal $(m \times n)$-matrices M en N de rekenregels:

$$(M + N)^T = M^T + N^T \quad ; \quad (\lambda M)^T = \lambda(M^T) \ ,$$

zoals direkt duidelijk is. Hiervan gebruik makend vindt men:

$$\det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - (\lambda I_n)^T) = \det(A - \lambda I_n)^T =$$
$$= \det(A - \lambda I_n). \ \square$$

V.1.15 Opmerking: Is A een $(n \times n)$-bovendriehoeksmatrix uit $\mathbb{F}$, dan zijn de eigenwaarden van A juist de elementen op de hoofddiagonaal van A.

Bewijs: Als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \ \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ,$$

dan is de karakteristieke veelterm van A:

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} (\alpha_{11}-\lambda) & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \ \cdots & 0 & (\alpha_{nn}-\lambda) \end{pmatrix} =$$
$$= (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)\cdot \ldots \cdot(\alpha_{nn} - \lambda).$$

De eigenwaarden van A zijn de wortels van deze karakteristieke veelterm. Deze wortels zijn uiteraard: $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$. $\square$

V.1.16 Opgave: Formuleer en bewijs een aan V.1.15 analoge bewering voor onderdriehoeksmatrices.

V.1.17 Beschouw eens een $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$. De karakteristieke veelterm van A is:

$$\det(A - \lambda I_n).$$

Dit is een n^e graads veelterm in λ, zeg:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

met reële coëfficiënten $c_0, c_1, \ldots, c_n$. De (reële) eigenwaarden van A zijn dan de reële wortels van de vergelijking

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n = 0.$$

Nu is uit de algebra bekend dat elk polynoom

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$$

met reële coëfficiënten c_i $(i = 0,\ldots,n)$ te ontbinden is in factoren met reële coëfficiënten van graad ten hoogste twee. Of zo'n factor van graad 2 verder in twee lineaire factoren met reële coëfficiënten is te ontbinden, hangt af van de discriminant. Zover mogelijk ontbindend verkrijgen we:

$$\begin{aligned} &c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = \\ &= (a_1x - b_1)\cdot \ldots \cdot(a_tx - b_t)(d_1x^2 + e_1x + f_1)\cdot \ldots \cdot(d_sx^2 + e_sx + f_s) \end{aligned}$$

waarbij a_i, b_i, d_j, e_j, f_j $(i = 1,\ldots,t;\ j = 1,\ldots,s)$ reële getallen zijn en bovendien geldt:

$$e_j^2 - 4d_jf_j < 0 \qquad (j = 1,\ldots,s).$$

In dit geval heeft de reële matrix A dus t $(\le n)$ reële eigenwaarden:

$$\lambda_1 = \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \lambda_t = \frac{b_t}{a_t}$$

(waarbij meerdere gelijke eigenwaarden kunnen voorkomen).

Is daarentegen B een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{C}$, dan heeft B, omdat elk n^e graads polynoom

$$w_0x^n + w_1x^{n-1} + \dots + w_n$$

met complexe coëfficiënten w_i $(i = 0,\dots,n)$ in n lineaire factoren met complexe coëfficiënten is te ontbinden, n (complexe) eigenwaarden.

V.1.18 Opmerking: Elke $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ met n eigenwaarden in $\mathbb{F}$ is aequivalent met een bovendriehoeksmatrix uit $\mathbb{F}$.

Bewijs: Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1,\dots, a_n]$. Zij $\phi : V \to V$ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V dat gegeven wordt door

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\dots, a_n]).$$

Laten $\lambda_1,\dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ de eigenwaarden van A (en dus ook van ϕ) zijn. We gaan de opmerking met volledige inductie naar n bewijzen. Als $n = 1$ is de opmerking triviaal. Stel nu dat de opmerking geldt voor elke $((n-1) \times (n-1))$-matrix uit $\mathbb{F}$.

Kies bij $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ een eigenvector $b_1 \in V$ $(b_1 \neq 0)$. We kunnen het 1-tupel $[b_1]$ met n-1 vectoren uit $[a_1,\dots, a_n]$ aanvullen tot een basis van V, zeg:

$$[b_1, a_{i_2},\dots, a_{i_n}].$$

Laten S en B de $(n \times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ zijn, gegeven door:

$$id_V = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{S} (V, [b_1, a_{i_2},\dots, a_{i_n}])$$

en

$$\phi = (V, [b_1, a_{i_2},\dots, a_{i_n}]) \xrightarrow{B} (V, [b_1, a_{i_2},\dots, a_{i_n}]).$$

Dan is

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V \\ {\scriptstyle id_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_V} \\ V & \xrightarrow{\phi} & V \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} (V, [a_1,\dots, a_n]) & \xrightarrow{A} & (V, [a_1,\dots, a_n]) \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ (V, [b_1,a_{i_2},\dots,a_{i_n}]) & \xrightarrow{B} & (V, [b_1,a_{i_2},\dots,a_{i_n}]). \end{array}$$

Omdat

$$id_V \circ \phi = \phi \circ id_V,$$

volgt derhalve:

$$S \cdot A = B \cdot S.$$

Volgens III.3.3 is S regulier, zodat geldt:

$$A = S^{-1}BS.$$

Met andere woorden: A en B zijn aequivalent.

Omdat $\phi(b_1) = \lambda_1 b_1$ heeft de matrix B de vorm:

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Nu is C een $((n-1) \times (n-1))$-matrix uit $\mathbb{F}$. We laten nu eerst zien dat C n-1 eigenwaarden in $\mathbb{F}$ heeft (zodat we de inductie-aanname kunnen toepassen):

$$\det(B - \lambda I_n) = \det\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 - \lambda & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C - \lambda I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot \det(C - \lambda I_{n-1}) \qquad (*)$$

(ontwikkelen naar de eerste kolom). Nu is $\det(B - \lambda I_n)$ het karakteristieke polynoom van B. Omdat $B \sim A$ is $\det(B - \lambda I_n)$ ook het karakteristieke polynoom van A. Omdat A n eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ heeft, is deze n^e graads veelterm in λ in n lineaire factoren te ontbinden:

$$\det(B - \lambda I_n) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n) \qquad (\alpha \in \mathbb{F}).$$

Wegens (*) is dan

$$\det(C - \lambda I_{n-1}) = \alpha(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n),$$

zodat C inderdaad de n-1 eigenwaarden $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ heeft in $\mathbb{F}$. Dus is er volgens de inductie-aanname een reguliere $((n-1) \times (n-1))$-matrix T uit $\mathbb{F}$ alsmede een bovendriehoeksmatrix Δ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$T^{-1}CT = \Delta.$$

Noteer nu:

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

De lezer controlere dat dan geldt:

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T^{-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Voorts vindt men (ga na!):

$$T_1^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T^{-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{C} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T^{-1}CT} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\Delta} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

en dit is een bovendriehoeksmatrix Δ_1 uit $\mathbb{F}$. Omdat $B \sim \Delta_1$ en $A \sim B$ volgt hieruit dat A aequivalent is met Δ_1. □

V.1.19 <u>Opgave</u>: <u>In de met</u> A <u>aequivalente bovendriehoeksmatrix</u> Δ_1 <u>uit het bewijs van de voorgaande opmerking staan de eigenwaarden van</u> A <u>op de hoofddiagonaal van</u> Δ_1.

V.1.20 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een</u> <u>$(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>met</u> n <u>paarsgewijs verschillende eigenwaarden</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, <u>dan is</u> A <u>aequivalent met de diagonaalmatrix</u>

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>uit</u> $\mathbb{F}$.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1, \ldots, a_n]$.
Zij $\phi : V \to V$ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

Kies bij elke eigenwaarde $\lambda_i \in \mathbb{F}$ van A een eigenvector $b_i \neq 0$. Dan is volgens V.1.11 het n-tupel $[b_1, \ldots, b_n]$ uit V een lineair onafhankelijk stelsel en derhalve een basis voor V. Zij S de reguliere $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, gegeven door:

$$id_V = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \overset{S}{\to} (V, [b_1, \ldots, b_n]).$$

Het is direct duidelijk dat geldt:

$$\phi = (V, [b_1, \ldots, b_n]) \overset{D}{\to} (V, [b_1, \ldots, b_n]),$$

zodat geldt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V \\ \downarrow id_V & & \downarrow id_V \\ V & \xrightarrow{\phi} & V \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} (V, [a_1, \ldots, a_n]) & \xrightarrow{A} & (V, [a_1, \ldots, a_n]) \\ S\downarrow & & \downarrow S \\ (V, [b_1, \ldots, b_n]) & \xrightarrow{D} & (V, [b_1, \ldots, b_n]). \end{array}$$

Omdat $id_V \circ \phi = \phi \circ id_V$ is ook $S \cdot A = D \cdot S$, zodat

$$A = S^{-1}DS.$$

A is dus aequivalent met D. □

V.1.21 Opmerking: Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ met n eigenwaarden in $\mathbb{F}$, dan is $\det(A)$ gelijk aan het product van deze n eigenwaarden.

Bewijs: Volgens V.1.18 en V.1.19 is A aequivalent met een bovendriehoeksmatrix Δ die op de hoofddiagonaal de eigenwaarden van A heeft staan. Bovendien is volgens I.4.27 $\det(\Delta)$ gelijk aan het product van deze hoofddiagonaal-elementen. Omdat $A \sim \Delta$ is $\det(A) = \det(\Delta)$, zodat de opmerking volgt. □

V.1.22 Definitie: Als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

dan heet de som van de hoofddiagonaal-elementen van A het spoor van A, aangeduid met $\mathrm{Tr}(A)$. Dus:

$$\mathrm{Tr}(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}.$$

V.1.23 Opmerking: Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ $(n \geq 2)$ en is

$$\det(A - \lambda I_n) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

het karakteristieke polynoom van A, dan geldt:

(i) $c_n = \det(A)$;

(ii) $c_0 = (-1)^n$;

(iii) $c_1 = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Bewijs: Voor elke $\mu \in \mathbb{F}$ geldt:

$$\det(A - \mu I_n) = c_0\mu^n + c_1\mu^{n-1} + \ldots + c_n.$$

In het bijzonder vinden we voor $\mu = 0$: $\det(A) = c_n$, zodat (i) geldt.

De beweringen (ii) en (iii) bewijzen we hier met volledige inductie naar n. Voor $n = 2$ is de opmerking rechtstreeks door uitrekenen te bewijzen.

Stel nu dat de opmerking geldt voor elke $((n-1) \times (n-1))$-matrix uit $\mathbb{F}$. Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Noteer $B_{i,j}$ voor de sub-matrix van $A - \lambda I_n$ die verkregen wordt door uit de laatstgenoemde matrix de i^e rij en de j^e kolom te schrappen. Ontwikkel nu $\det(A - \lambda I_n)$ naar de 1^e kolom:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = \det(A - \lambda I_n) =$$

$$= (\alpha_{11}-\lambda)\det(B_{1,1}) + (-1)\alpha_{21}\det(B_{2,1}) + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n1}\det(B_{n,1}).$$

Nu is voor elke $i \in \{2,\ldots,n\}$

$$B_{i,1} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ (\alpha_{22}-\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \cdots & (\alpha_{nn}-\lambda) \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ rij}.$$

In deze matrices komen $n-2$ elementen voor van de vorm $(\alpha_{kk} - \lambda)$. Dus is $\det(B_{i,1})$ een veelterm in λ van graad hoogstens $n-2$ $(i = 2,\ldots,n)$.

Voorts is

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} (\alpha_{22}-\lambda) & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \cdots & (\alpha_{nn}-\lambda) \end{pmatrix} = A_{1,1} - \lambda I_{n-1}.$$

Dus is $\det(B_{1,1})$ (de karakteristieke veelterm van de $((n-1) \times (n-1))$-matrix $A_{1,1}$) een veelterm in λ van de vorm

$$d_0\lambda^{n-1} + d_1\lambda^{n-2} + \ldots + d_0,$$

waarbij

$$d_0 = (-1)^{n-1} \qquad ; \qquad d_1 = (-1)^{n-2}\mathrm{Tr}(A_{1,1}),$$

(de inductie-aanname).

Het voorgaande samenvattend, vinden we:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = \det(A - \lambda I_n) =$$
$$= (\alpha_{11} - \lambda)(d_0\lambda^{n-1} + d_1\lambda^{n-2} + \ldots + d_0) + H(\lambda),$$

waarin $H(\lambda)$ een veelterm is in λ van graad $\leq n-2$. Dus volgt:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n =$$
$$= -d_0\lambda^n + (-d_1 + \alpha_{11}d_0)\lambda^{n-1} + G(\lambda),$$

waarbij $G(\lambda)$ een veelterm is in λ van graad $\leq n-2$.

Gelijkstellen van de n^e graads termen links en rechts levert:

$$c_0 = -d_0 = -(-1)^{n-1} = (-1)^n,$$

zodat (ii) geldt; gelijkstellen van de $(n-1)^e$ graads termen geeft:

$$c_1 = (-d_1 + \alpha_{11}d_0) = (-(-1)^{n-2}\mathrm{Tr}(A_{1,1}) + \alpha_{11}(-1)^{n-1}) =$$
$$= (-1)^{n-1}\{\mathrm{Tr}(A_{1,1}) + \alpha_{11}\} =$$
$$= (-1)^{n-1}\{(\alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}) + \alpha_{11}\} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A),$$

zodat ook (iii) bewezen is. □

V.1.24 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> A <u>en</u> B <u>twee aequivalente $(n \times n)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$, <u>dan is</u>

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B).$$

<u>Bewijs</u>: A en B hebben gelijke karakteristieke veeltermen, zeg:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = \det(A - \lambda I_n) =$$
$$= \det(B - \lambda I_n) = d_0\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n.$$

Gelijkstellen van de $(n-1)^e$ graads termen levert volgens V.1.23:

$$(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A) = c_1 = d_1 = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(B),$$

zodat $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. □

V.1.25 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>met</u> n <u>eigenwaarden</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, <u>dan is</u>

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

<u>Bewijs</u>: A is aequivalent met een bovendriehoeksmatrix Δ die als hoofddiagonaal-elementen de eigenwaarden van A heeft (cf. V.1.18 en V.1.19). Derhalve is

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\Delta) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \;\square$$

V.1.26 Zij V een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V. We kunnen dan ondubbelzinnig spreken over het <u>spoor van</u> ϕ. Immers, kies een basis $[a_1, \ldots, a_n]$ van V. Dan induceert ϕ ten opzichte van deze basis een $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

Het spoor van ϕ definiëren we dan te zijn $\mathrm{Tr}(A)$. Dat dit een ondubbelzinnige definitie is, zien we als volgt. Hadden we een andere basis van V gekozen, zeg $[b_1, \ldots, b_n]$, dan hadden we een andere $(n \times n)$-matrix B uit $\mathbb{F}$ gevonden, met

$$\phi = (V, [b_1, \ldots, b_n]) \xrightarrow{B} (V, [b_1, \ldots, b_n]).$$

Echter A en B zijn dan aequivalent, zodat $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Met andere woorden: de keuze van de basis $[a_1, \ldots, a_n]$ van V speelt geen rol in de definitie van het spoor van ϕ.

Tot slot van deze paragraaf nog een enkele opmerking over $(n \times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ met n eigenwaarden die alle nul zijn.

V.1.27 Notatie: Met

$$0_n$$

geven we de $(n \times n)$-matrix aan waarvan alle elementen nul zijn (de $(n \times n)$-nulmatrix).

V.1.28 Notatie: (i) Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en is $k \in \mathbb{N}$, dan noteren we:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ keer}} .$$

(ii) Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme van V, dan noteren we:

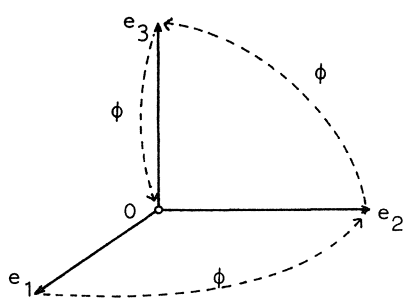
$$\phi^k = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{k \text{ keer}} : V \to V$$

voor elke $k \in \mathbb{N}$.

V.1.29 Definitie: Een $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ heet nilpotent als er een natuurlijk getal k bestaat zodat $A^k = 0_n$, terwijl bovendien $A \neq 0_n$.

V.1.30 Voorbeeld: Beschouw de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{E}_3$ met de kanonieke basis $[e_1,e_2,e_3]$, gegeven door:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



Beschouw het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme $\phi : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ dat gegeven wordt door:

$$\phi(e_1) = e_2 \quad ; \quad \phi(e_2) = e_3 \quad ; \quad \phi(e_3) = 0.$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\phi^3(e_1) &= \phi \circ \phi \circ \phi(e_1) = \phi \circ \phi(e_2) = \phi(e_3) = 0,\\
\phi^3(e_2) &= \phi \circ \phi \circ \phi(e_2) = \phi \circ \phi(e_3) = \phi(0) = 0,\\
\phi^3(e_3) &= \phi \circ \phi \circ \phi(e_3) = \phi \circ \phi(0) = \phi(0) = 0,
\end{aligned}$$

zodat het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme $\phi^3 : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ van $\mathbb{E}_3$ de drie basisvectoren e_1, e_2 en e_3 (en daarmee alle vectoren van $\mathbb{E}_3$) op de nulvector afbeeldt.

Als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dan is

$$\phi = (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

Dan volgt:

$$\phi^3 = (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A^3} (\mathbb{E}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$

zodat, omdat $\phi^3(e_1) = \phi^3(e_2) = \phi^3(e_3) = 0$, volgt:

$$A^3 = 0_3.$$

Omdat $A \neq 0_3$, is A dus een nilpotente (3×3)-matrix uit $\mathbb{R}$.

V.1.31 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een nilpotente $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en is</u> $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ <u>een eigenwaarde van</u> A, <u>dan is</u> $\lambda_1 = 0$.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V. Kies een basis $[a_1,\dots, a_n]$ voor V en beschouw het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme $\phi : V \to V$ van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\dots, a_n]).$$

Zij $A^k = 0_n$. Dan beeldt ϕ^k alle vectoren uit V af op de nulvector. De eigenwaarde λ_1 van A is ook een eigenwaarde van ϕ. Dus is er een eigenvector b_1 ($\neq 0$) van ϕ bij λ_1. Er geldt nu:

$$0 = \phi^k(b_1) = \phi^{k-1} \circ \phi(b_1) = \phi^{k-1}(\lambda_1 b_1) = \lambda_1\phi^{k-1}(b_1) =$$
$$= \lambda_1\phi^{k-2} \circ \phi(b_1) = \lambda_1\phi^{k-2}(\lambda_1 b_1) = \lambda_1^2\phi^{k-2}(b_1) = \dots = \lambda_1^k b_1.$$

Omdat $b_1 \neq 0$ is dus de k^e macht van het getal $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ nul. Dus is $\lambda_1 = 0$. □

V.1.32 <u>Opmerking</u>: <u>Een $(n \times n)$-bovendriehoeksmatrix Δ uit $\mathbb{F}$ waarvan alle elementen op de hoofddiagonaal nul zijn, is nilpotent.</u> ($\Delta \neq 0_n$.)

<u>Bewijs</u>: Zij

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Kies een n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1, \dots, a_n]$ en zij $\phi : V \to V$ het $\mathbb{F}$-lineaire endomorphisme, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1, \dots, a_n]) \xrightarrow{\Delta} (V, [a_1, \dots, a_n]).$$

We zullen bewijzen dat ϕ^n alle basisvectoren $a_1, \dots, a_n$ op de nulvector afbeeldt. Dan is, omdat

$$\phi^n = (V, [a_1, \dots, a_n]) \xrightarrow{\Delta^n} (V, [a_1, \dots, a_n]),$$

tevens bewezen dat $\Delta^n = 0_n$, zodat (mits uiteraard $\Delta \neq 0_n$) Δ nilpotent is.

We bewijzen met volledige inductie naar i de volgende

<u>Bewering</u>: <u>Voor elke</u> $i = 1, \dots, n$ <u>geldt</u>:

$$\phi^i(a_i) = 0. \qquad (*)$$

Bewijs voor deze bewering: Voor $i = 1$ is de bewering triviaal. (De eerste kolom van Δ bestaat uitsluitend uit nullen, zodat $\phi(a_1) = 0$.)

Stel nu dat we al bewezen hebben dat geldt:

$$\phi(a_1) = \phi^2(a_2) = \ldots = \phi^{i-1}(a_{i-1}) = 0.$$

Er geldt, zoals direkt uit de i^e kolom van Δ te zien is:

$$\phi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{i-1,i}a_{i-1}.$$

Dus volgt:

$$\begin{aligned}\phi^i(a_i) &= \phi^{i-1} \circ \phi(a_i) = \phi^{i-1}(\alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{i-1,i}a_{i-1}) = \\ &= \alpha_{1i}\phi^{i-1}(a_1) + \alpha_{2i}\phi^{i-1}(a_2) + \ldots + \alpha_{i-1,i}\phi^{i-1}(a_{i-1}) = \\ &= \alpha_{1i}\phi^{i-2} \circ \phi(a_1) + \alpha_{2i}\phi^{i-3} \circ \phi^2(a_2) + \ldots + \alpha_{i-1,i}\phi^{i-1}(a_{i-1}) = \\ &= \alpha_{1i}\phi^{i-2}(0) + \alpha_{2i}\phi^{i-3}(0) + \ldots + \alpha_{i-1,i}\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

waarmee de bewering bewezen is.

Uit (*) volgt nu voor elke $i = 1,\ldots,n-1$:

$$\phi^n(a_i) = \phi^{n-i} \circ \phi^i(a_i) = \phi^{n-i}(0) = 0.$$

Ook volgt uit (*): $\phi^n(a_n) = 0$. Dus beeldt ϕ^n inderdaad elke basisvector a_i af op 0, zodat de opmerking bewezen is. $\sqcap$

V.1.33 Opmerking: Is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, dan is A nilpotent dan en slechts dan als A n eigenwaarden in $\mathbb{F}$ heeft die alle nul zijn $(A \neq 0_n)$.

Bewijs: Neem eerst aan dat $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dan heeft A n eigenwaarden in $\mathbb{C}$.

(i) Stel eerst dat A nilpotent is. Volgens V.1.31 is dan elke eigenwaarde van A nul.

(ii) Neem nu aan dat elk der n eigenwaarden van A nul is. Omdat A n eigenwaarden heeft, is A aequivalent met een $(n \times n)$-bovendriehoeksmatrix Δ uit $\mathbb{C}$, die op de hoofddiagonaal de eigenwaarden van A heeft staan. Dus is Δ een bovendriehoeksmatrix met op de hoofddiagonaal uitsluitend nullen. Volgens V.1.32 is Δ dan nilpotent. Zeg: $\Delta^k = 0_n$. Nu is er, omdat $A \sim \Delta$, een reguliere $(n \times n)$-matrix S uit $\mathbb{C}$ zodat

$$A = S^{-1}\Delta S.$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} A^k &= (S^{-1}\Delta S)\cdot(S^{-1}\Delta S)\cdot \ \ldots \ \cdot(S^{-1}\Delta S) = \\ &= S^{-1}\Delta(SS^{-1})\Delta(SS^{-1})\cdot \ \ldots \ \cdot\Delta S = \\ &= S^{-1}\Delta^k S = S^{-1}0_n S = 0_n \end{aligned}$$

(ga na!), zodat A nilpotent is. De opmerking is dus bewezen ingeval $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Neem nu aan dat $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. A is dan een matrix met reële getallen. Omdat elk reëel getal ook een complex getal is, kunnen we A opvatten als een complexe matrix. A heeft dan n complexe eigenwaarden, die echter volgens het eerste geval alle nul zijn (en dus in het bijzonder reëel), als A nilpotent is. Als we omgekeerd ervan uitgaan, dat alle eigenwaarden van A nul zijn, dan kunnen we -geheel analoog aan het geval $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, maar nu met reële in plaats van complexe matrices- bewijzen dat A nilpotent is.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

* * *

§V.2. Complexe matrices

V.2.1 Definitie: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Dan heet een lineaire combinatie

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

waarin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reële getallen zijn, een reële lineaire combinatie van de basis $[a_1, \ldots, a_n]$.

V.2.2 Opmerking: Is V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$ en is W de deelverzameling van V die bestaat uit alle reële lineaire combinaties van $[a_1, \ldots, a_n]$, dan is W op natuurlijke wijze een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$.

Bewijs: We kiezen in W de door V geïnduceerde optelling en (reële) scalaire vermenigvuldiging:

$$(\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n) + (\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) =$$
$$= (\mu_1 + \lambda_1)a_1 + \ldots + (\mu_n + \lambda_n)a_n;$$

$$\gamma(\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n) = \gamma\mu_1 a_1 + \ldots + \gamma\mu_n a_n,$$

waarbij $\mu_1,\ldots,\mu_n$; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$; γ reële getallen zijn. Uiteraard is W zo een $\mathbb{R}$-vectorruimte. Ga na dat $[a_1,\ldots, a_n]$ een basis is voor W. □

V.2.3 Definitie: Is V een $\mathbb{C}$-vectorruimte, is $[a_1,\ldots, a_n]$ een basis voor V en is

$$W = \{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n \mid \mu_1,\ldots, \mu_n \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}$-vectorruimte van reële lineaire combinaties van $[a_1,\ldots, a_n]$, dan zeggen we dat $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ het reële deel is van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

V.2.4 Definitie: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ het reële deel van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Een $\mathbb{C}$-lineair endomorphisme $\phi : V \to V$ heet een reëel endomorphisme van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ als geldt:

$$\phi(W) \subset W.$$

V.2.5 Voorbeeld: Beschouw de $\mathbb{C}$-vectorruimte $\mathbb{C}_3^*$ met de basis $[a_1,a_2,a_3]$ gegeven door:

$$a_1 = (0, 1, i) \quad ; \quad a_2 = (i,-1, 1) \quad ; \quad a_3 = (0, 0,-i).$$

Beschouw het $\mathbb{C}$-lineair endomorphisme $\phi : \mathbb{C}_3^* \to \mathbb{C}_3^*$ dat gegeven wordt door:

$$\phi = (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3]),$$

waarin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dan is ϕ een reëel endomorphisme van $(\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$. Om dit te laten zien, moeten we aantonen dat elke vector van W als beeld onder ϕ weer een vector wordt uit W (als $(W, [a_1,a_2,a_3])$ het reële deel is van $(\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$). Welnu, kies een willekeurige vector w uit W, zeg:

$$w = \mu_1(0,1,i) + \mu_2(i,-1,1) + \mu_3(0,0,-i)$$

$(\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R})$. Dan is

$$\phi(w) = (\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3)a_1 + (2\mu_1 + \mu_2)a_2 + (-\mu_1 + \mu_2)a_3.$$

Omdat μ_1, μ_2 en μ_3 reële getallen zijn, zijn ook de getallen

$$\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \quad ; \quad 2\mu_1 + \mu_2 \quad ; \quad -\mu_1 + \mu_2$$

reëel, zodat $\phi(w) \in W$. Dus is ϕ inderdaad een reëel endomorphisme van $(\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$.

<u>Is $[b_1,b_2,b_3]$ een andere basis van $\mathbb{C}_3^*$, dan behoeft ϕ niet een reëel endomorphisme te zijn van</u> $(\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3])$! Bijvoorbeeld: kies

$$b_1 = (1,0,0) \quad ; \quad b_2 = (0,1,0) \quad ; \quad b_3 = (0,0,1).$$

Ga na dat

$$\phi(b_1) = (3, -1-2i, 5-4i).$$

Als $(U, [b_1,b_2,b_3])$ het reële deel is van $(\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3])$, dan is uiteraard $b_1 \in U$. Echter:

$$\phi(b_1) = 3b_1 - (1+2i)b_2 + (5-4i)b_3$$

is geen reële lineaire combinatie van de basis $[b_1,b_2,b_3]$, zodat $\phi(b_1) \notin U$. Dit betekent:

$$\phi(U) \not\subset U,$$

zodat ϕ geen reëel endomorphisme is van $(\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3])$.

V.2.6 Opmerking: Is V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$ en is $\phi : V \to V$ een $\mathbb{C}$-lineair endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

(waarbij A dus een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{C}$ is), dan geldt: ϕ is een reëel endomorphisme van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ dan en slechts dan als A uitsluitend reële getallen tot elementen heeft.

Bewijs: Zij $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ het reële deel van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ en zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

(i) Veronderstel eerst dat ϕ een reëel endomorphisme is van $(V,[a_1,\ldots,a_n])$. Dan geldt: $\phi(W) \subset W$. We moeten dan bewijzen dat elk element α_{kj} van A een reëel getal is. Stel er is een paar indices k,j zodat $\alpha_{kj} \notin \mathbb{R}$. Omdat $a_k \in W$ en $\phi(W) \subset W$ is $\phi(a_k) \in W$, oftewel:

$$\phi(a_k) = \alpha_{k1}a_1 + \ldots + \alpha_{kj}a_j + \ldots + \alpha_{kn}a_n \in W.$$

Maar dan is $\phi(a_k)$ een reële lineaire combinatie van $[a_1,\ldots, a_n]$. Dus zijn $\alpha_{k1},\ldots, \alpha_{kn}$, en in het bijzonder α_{kj}, reële getallen; tegenspraak. Dus zijn alle elementen van A reëel.

(ii) Neem nu aan dat A uitsluitend reële elementen bevat. Kies een willekeurige vector $w \in W$, zeg:

$$w = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n \qquad (\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{R}).$$

Dan is wegens

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

$$\phi(w) = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n ,$$

waarbij

$$\lambda_k = \alpha_{k1}\mu_1 + \ldots + \alpha_{kn}\mu_n.$$

Omdat elke α_{kj} en elke μ_j $(k = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n)$ een reëel getal is, is ook elke λ_k een reëel getal, zodat $\phi(w) \in W$. Dus geldt: $\phi(W) \subset W$, hetgeen betekent dat ϕ een reëel endomorphisme is van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. □

V.2.7 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$. <u>Zij</u> $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ <u>het reële deel van</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. <u>Dan is elke vector</u> $b \in V$ <u>op precies één manier te schrijven in de vorm</u>:

$$b = b_r + ib_c,$$

<u>waarbij</u> b_r <u>en</u> b_c <u>vectoren zijn uit</u> W.

<u>Bewijs</u>: Zij b een willekeurige vector uit V. Zeg:

$$b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n.$$

De complexe getallen $\beta_1,\ldots,\beta_n$ kunnen we schrijven in de vorm

$$\beta_1 = \gamma_1 + i\delta_1 \quad ; \quad \beta_2 = \gamma_2 + i\delta_2 \quad ; \ldots \quad ; \beta_n = \gamma_n + i\delta_n \ ,$$

waarbij γ_k en δ_k reële getallen zijn $(k = 1,\ldots,n)$. Er geldt nu:

$$b = (\gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n) + i(\delta_1 a_1 + \ldots + \delta_n a_n),$$

waarbij

$$b_r = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n$$

en

$$b_c = \delta_1 a_1 + \ldots + \delta_n a_n$$

vectoren zijn uit W.

Veronderstel nu dat we een vector $b \in V$ kunnen schrijven als

$$b = b_r + ib_c$$

en ook als

$$b = b'_r + ib'_c,$$

waarbij b_r, b_r', b_c en b_c' vectoren zijn uit W. We moeten dan nog aantonen dat hieruit volgt:

$$b_r = b_r' \quad ; \quad b_c = b_c'.$$

Welnu, er volgt, als

$$b_r = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n \quad ; \quad b_r' = \gamma_1' a_1 + \ldots + \gamma_n' a_n;$$

$$b_c = \delta_1 a_1 + \ldots + \delta_n a_n \quad ; \quad b_c' = \delta_1' a_1 + \ldots + \delta_n' a_n$$

(met $\gamma_k, \gamma_k', \delta_k, \delta_k' \in \mathbb{R}$; $k = 1,\ldots,n$):

$$(\gamma_1 + i\delta_1)a_1 + \ldots + (\gamma_n + i\delta_n)a_n =$$
$$= (\gamma_1' + i\delta_1')a_1 + \ldots + (\gamma_n' + i\delta_n')a_n.$$

Omdat $[a_1,\ldots, a_n]$ een basis is voor V, volgt hieruit:

$$\gamma_k + i\delta_k = \gamma_k' + i\delta_k' \qquad (k = 1,\ldots,n),$$

oftewel:

$$\gamma_k = \gamma_k' \quad ; \quad \delta_k = \delta_k' \qquad (k = 1,\ldots,n),$$

zodat

$$b_r = b_r' \quad ; \quad b_c = b_c'.$$

Hiermee is de opmerking bewezen. □

V.2.8 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$; zij $b \in V$ gegeven door:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan heet de vector $\overline{b} \in V$, gegeven door

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

de <u>complex geadjungeerde vector bij</u> b <u>in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

V.2.9 Merk op dat de notatie $\overline{b}$ in de vorige definitie eigenlijk slordig is, omdat er niet in wordt aangegeven dat $\overline{b}$ gedefinieerd is met betrekking tot de basis $[a_1,\dots, a_n]$ van V. Hadden we een andere basis $[b_1,\dots, b_n]$ van V gekozen, dan hadden we een andere vector van V gevonden die de complex geadjungeerde vector bij b is in $(V, [b_1,\dots, b_n])$, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

V.2.10 <u>Voorbeeld</u>: Kies de $\mathbb{C}$-vectorruimte $\mathbb{C}_3^*$. Kies hieruit de vector

$$b = (1, i, 1+i).$$

Kies eerst als basis voor $\mathbb{C}_3^*$ $[a_1,a_2,a_3]$ met

$$a_1 = (1,0,0) \quad ; \quad a_2 = (0,1,0) \quad ; \quad a_3 = (0,0,1).$$

Dan is

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3]),$$

zodat

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$$

de complex geadjungeerde vector in $(\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$ bij b is, oftewel:

$$b_1 = (1, -i, 1-i).$$

Kies nu eens $[b_1,b_2,b_3]$ als basis voor $\mathbb{C}_3^*$ met

$$b_1 = (i,0,0) \quad ; \quad b_2 = (0,i,0) \quad ; \quad b_3 = (0,0,i).$$

Dan is

$$b = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3]),$$

zodat de complex geadjungeerde vector van b in $(\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3])$ is:

$$b_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3]),$$

oftewel:

$$b_2 = (-1,\ i,\ i-1)$$

en ten duidelijkste is $b_1 \neq b_2$.

V.2.11 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Definieer de afbeelding

$$\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$$

als volgt. Als

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]) \quad ; \quad c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

dan is per definitie

$$\pi(b,c) = \overline{\beta}_1\gamma_1 + \overline{\beta}_2\gamma_2 + \ldots + \overline{\beta}_n\gamma_n.$$

Deze afbeelding π noemen we het <u>hermitisch inproduct in</u> $(V, [a_1,\ldots,a_n])$. Het complexe getal $\pi(b,c)$ noemen we het <u>hermitisch inproduct van</u> b <u>en</u> c <u>in</u> $(V, [a_1,\ldots,a_n])$.

V.2.12 <u>Voorbeeld</u>: Kies in $\mathbb{C}_3^*$ twee bases $[a_1,a_2,a_3]$ en $[b_1,b_2,b_3]$, gegeven door:

$$a_1 = (1,0,0) \quad ; \quad a_2 = (0,1,0) \quad ; \quad a_3 = (0,0,1),$$

$$b_1 = (i,0,0) \quad ; \quad b_2 = (1,i,-i) \quad ; \quad b_3 = (0,i,1+i).$$

Kies vervolgens twee vectoren $b,c \in \mathbb{C}_3^*$, bijvoorbeeld:

$$b = (2,\ i,\ 3i+2) \quad ; \quad c = (1+i,\ 2-3i,\ 5).$$

Laten vervolgens

$$\mathbb{C}_3^*\Pi\mathbb{C}_3^* \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \quad ; \quad \mathbb{C}_3^*\Pi\mathbb{C}_3^* \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$$

de hermitische inproducten zijn in $(\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3])$, resp. in $(\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3])$. Er geldt:

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 3i+2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3]) \;;\; b = \begin{pmatrix} -3i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [b_1,b_2,b_3]) \;,$$

$$c = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \\ 5 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*, [a_1,a_2,a_3]) \;;\; c = \begin{pmatrix} (-2-21i)/5 \\ (-16+7i)/5 \\ (1-17i)/5 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}_3^*,[b_1,b_2,b_3]).$$

Ga na dat geldt:

$$\pi(b,c) = -15i + 9 \quad ; \quad \pi(c,b) = 15i + 9,$$

$$\tau(b,c) = \tfrac{1}{5}(81 - 47i) \quad ; \quad \tau(c,b) = \tfrac{1}{5}(81 + 47i).$$

<u>We zien dus dat de definitie van het hermitisch inproduct afhankelijk is van de keuze van de basis, en dat bovendien het hermitisch inproduct niet commutatief is</u>: $\pi(b,c) \neq \pi(c,b)$; $\tau(b,c) \neq \tau(c,b)$.

V.2.13 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$. <u>Zij</u>

$$\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$$

<u>het hermitisch inproduct in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. <u>Dan geldt voor elke</u> $\mu \in \mathbb{C}$ <u>en elk drietal vectoren</u> a, b, c <u>uit</u> V:

(i) $\pi(a,b) = \overline{\pi(b,a)}$;

(ii) $\pi(a+b,c) = \pi(a,c) + \pi(b,c)$;

(iii) $\pi(a,b+c) = \pi(a,b) + \pi(a,c)$;

(iv) $\pi(\mu a,b) = \bar{\mu}\cdot\pi(a,b)$;

(v) $\pi(a,\mu b) = \mu\cdot\pi(a,b)$;

(vi) $\pi(a,a) \in \mathbb{R}$ <u>en</u> $\pi(a,a) \geq 0$;

(vii) $\pi(a,a) = 0$ <u>dan en slechts dan als</u> $a = 0$.

Bewijs: Zij

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \; ; \; b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n \; ; \; c = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n .$$

Dan volgt:

ad (i): $\overline{\pi(b,a)} = \overline{(\overline{\beta}_1\alpha_1 + \ldots + \overline{\beta}_n\alpha_n)} = \overline{\overline{\beta}_1\alpha_1} + \ldots + \overline{\overline{\beta}_n\alpha_n} =$

$= \beta_1\overline{\alpha}_1 + \ldots + \beta_n\overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\beta_n = \pi(a,b).$

ad (ii): $\pi(a+b,c) = \overline{(\alpha_1+\beta_1)}\gamma_1 + \ldots + \overline{(\alpha_n+\beta_n)}\gamma_n =$

$= (\overline{\alpha}_1+\overline{\beta}_1)\gamma_1 + \ldots + (\overline{\alpha}_n+\overline{\beta}_n)\gamma_n =$

$= (\overline{\alpha}_1\gamma_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\gamma_n) + (\overline{\beta}_1\gamma_1 + \ldots + \overline{\beta}_n\gamma_n) =$

$= \pi(a,c) + \pi(b,c).$

ad (iii): $\pi(a,b+c) = \overline{\alpha}_1(\beta_1+\gamma_1) + \ldots + \overline{\alpha}_n(\beta_n+\gamma_n) =$

$= (\overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\beta_n) + (\overline{\alpha}_1\gamma_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\gamma_n) =$

$= \pi(a,b) + \pi(a,c).$

ad (iv): $\pi(\mu a,b) = \overline{(\mu\alpha_1)}\beta_1 + \ldots + \overline{(\mu\alpha_n)}\beta_n = \overline{\mu}\,\overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\mu}\,\overline{\alpha}_n\beta_n =$

$= \overline{\mu}(\overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\beta_n) = \overline{\mu}\cdot\pi(a,b).$

ad (v): $\pi(a,\mu b) = \overline{\alpha}_1(\mu\beta_1) + \ldots + \overline{\alpha}_n(\mu\beta_n) = \mu(\overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\beta_n) =$

$= \mu\cdot\pi(a,b).$

ad (vi): $\pi(a,a) = \overline{\alpha}_1\alpha_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\alpha_n = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2$, een niet-negatief reëel getal.

ad (vii): $\pi(a,a) = 0$ dan en slechts dan als $|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 = 0$. Dit is het geval dan en slechts dan als $|\alpha_1|^2 = \ldots = |\alpha_n|^2 = 0$ en dit is weer aequivalent met $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, oftewel: $a = 0$. □

V.2.14 Opmerking: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\dots, a_n]$. Zij

$$\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$$

het hermitisch inproduct in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. Zij vervolgens $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel uit V, zodat $b_k \neq 0$ $(k = 1,\dots,m)$. Als voor elk tweetal verschillende indices k,l uit $\{1,\dots,m\}$ geldt:

$$\pi(b_k,b_l) = 0 ,$$

dan is $[b_1,\dots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs: Veronderstel dat $[b_1,\dots, b_m]$ lineair afhankelijk is. Dan zijn er complexe getallen $\mu_1,\dots,\mu_m$, niet alle nul, zodat

$$\mu_1 b_1 + \dots + \mu_m b_m = 0.$$

Dan volgt, gebruik makend van V.2.13:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_m b_m, \mu_1 b_1 + \dots + \mu_m b_m) = \\ &= \pi\Big(\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k, \sum_{l=1}^{m} \mu_l b_l\Big) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \pi(\mu_k b_k, \mu_l b_l) = \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \overline{\mu}_k \mu_l \pi(b_k,b_l). \end{aligned}$$

Nu is $\pi(b_k,b_l) = 0$ als $k \neq l$. Dus vinden we hieruit:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m} \overline{\mu}_k \mu_k \pi(b_k,b_k) = \\ &= |\mu_1|^2\pi(b_1,b_1) + \dots + |\mu_m|^2\pi(b_m,b_m). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Nu zijn $|\mu_1|^2,\dots, |\mu_m|^2$; $\pi(b_1,b_1),\dots, \pi(b_m,b_m)$ niet-negatieve reële getallen, zodat uit $(*)$ volgt:

$$|\mu_1|^2\pi(b_1,b_1) = \dots = |\mu_m|^2\pi(b_m,b_m) = 0. \tag{$**$}$$

Omdat geen der vectoren $b_1,\dots,b_m$ nul is, zijn volgens V.2.13 (vii) de getallen $\pi(b_1,b_1),\dots, \pi(b_m,b_m)$ alle strikt groter dan nul. Dus volgt uit (**):

$$|\mu_1|^2 = \dots = |\mu_m|^2 = 0 ,$$

oftewel:

$$\mu_1 = \dots = \mu_m = 0,$$

in tegenspraak met de veronderstelling. Hiermee is de opmerking bewezen. □

V.2.15 <u>Opgave</u>: <u>Ga na dat de omkering van</u> V.2.14 <u>niet geldt</u>.

V.2.16 <u>Definitie</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{C}$. Dan heet de matrix

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \dots & \bar{\alpha}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\alpha}_{n1} & \dots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

de <u>complex geadjungeerde matrix bij</u> A.

V.2.17 <u>Voorbeeld</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1+3i & 2 & 4-i \\ 3 & 4+i & -i \\ i & 3 & 14+i \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-3i & 2 & 4+i \\ 3 & 4-i & i \\ -i & 3 & 14-i \end{pmatrix} .$$

V.2.18 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{C}$ <u>geldt</u>:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

<u>Bewijs</u>: Triviaal. □

V.2.19 <u>Definitie</u>: Is

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{C}$, dan heet de matrix

$$A^H = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

gegeven door

$$\beta_{kj} = \overline{\alpha_{jk}} \qquad (k = 1,\dots,n;\ l = 1,\dots,n),$$

de <u>hermitisch getransformeerde matrix bij</u> A.

V.2.20 <u>Voorbeeld</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1+3i & 2 & 4-i \\ 3 & 4+i & -i \\ i & 3 & 14+i \end{pmatrix} \quad ; \quad A^H = \begin{pmatrix} 1-3i & 3 & -i \\ 2 & 4-i & 3 \\ 4+i & i & 14-i \end{pmatrix} .$$

V.2.21 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{C}$ <u>geldt</u>:

$$A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}.$$

<u>Bewijs</u>: Triviaal. □

V.2.22 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{C}$ <u>geldt</u>:

$$(A^H)^H = A.$$

<u>Bewijs</u>: Triviaal. □

V.2.23 Opmerking: Voor elke symmetrische (n × n)-matrix uit $\mathbb{C}$ met uitsluitend reële elementen geldt:

$$A = \overline{A} = A^T = A^H.$$

Bewijs: Triviaal. □

V.2.24 Definitie: Een (n × n)-matrix A uit $\mathbb{C}$ heet hermitisch (invariant) als geldt:

$$A^H = A.$$

V.2.25 Opmerking: Zij V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij

$$\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$$

het hermitisch inproduct in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Zij $\phi : V \to V$ een $\mathbb{C}$-lineair endomorphisme van V en zij A de (n × n)-matrix uit $\mathbb{C}$ zodat

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Laat $\psi : V \to V$ het $\mathbb{C}$-lineaire endomorphisme zijn van V, gegeven door:

$$\psi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A^H} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan is voor elke $b,c \in V$:

$$\pi(\phi(b),c) = \pi(b,\psi(c)).$$

Bewijs: Zij

$$b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n \quad ; \quad c = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n;$$

$$\phi(b) = \beta_1' a_1 + \ldots + \beta_n' a_n \; ; \; \psi(c) = \gamma_1' a_1 + \ldots + \gamma_n' a_n;$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ; \quad A^H = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} .$$

Dan hebben we (ga na!):

(i) $\qquad \beta_{kj} = \overline{\alpha}_{jk} \qquad (k = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n);$

(ii) $\qquad \gamma'_k = \beta_{k1}\gamma_1 + \dots + \beta_{kn}\gamma_n \qquad (k = 1,\dots,n);$

(iii) $\qquad \beta'_k = \alpha_{k1}\beta_1 + \dots + \alpha_{kn}\beta_n \qquad (k = 1,\dots,n).$

Er volgt:

$$\begin{aligned}
\pi(\phi(b),c) &= \overline{\beta'_1}\gamma_1 + \dots \overline{\beta'_n}\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta'_k}\gamma_k = \text{(volgens (iii))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{(\alpha_{k1}\beta_1 + \dots + \alpha_{kn}\beta_n)}\gamma_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{kj}}\,\overline{\beta_j} \Big)\gamma_k = \text{(volgens (i))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\overline{\beta_j}\gamma_k = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}\gamma_k \Big)\overline{\beta_j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\beta_{j1}\gamma_1 + \dots + \beta_{jn}\gamma_n)\overline{\beta_j} = \text{(volgens (ii))} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \gamma'_j\overline{\beta_j} = \overline{\beta_1}\gamma'_1 + \dots + \overline{\beta_n}\gamma'_n = \pi(b,\psi(c)),
\end{aligned}$$

zodat de opmerking bewezen is. □

V.2.26 <u>Stelling</u>: <u>Is</u> A <u>een hermitische $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{C}$, <u>dan zijn alle</u> n <u>eigenwaarden van</u> A <u>reëel</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een n-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\dots, a_n]$. Zij $\phi : V \to V$ het $\mathbb{C}$-lineaire endomorphisme van V dat gegeven wordt door:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\dots, a_n]).$$

Omdat A hermitisch is kunnen we ook schrijven:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A^H} (V, [a_1,\dots, a_n]).$$

Volgens V.2.25 geldt dan voor elk tweetal vectoren $b, c \in V$:

$$\pi(b,\phi(c)) = \pi(\phi(b),c),$$

als $\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$ het hermitisch inproduct is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

Zij nu λ een eigenwaarde van A. Dan is λ ook een eigenwaarde van ϕ. We kunnen dus een eigenvector $b \in V$ van ϕ bij λ kiezen met $b \neq 0$. Er volgt:

$$\lambda\cdot\pi(b,b) = \pi(b,\lambda b) = \pi(b,\phi(b)) = \pi(\phi(b),b) = \pi(\lambda b,b) = \overline{\lambda}\cdot\pi(b,b).$$

Omdat $b \neq 0$, is volgens V.2.13 (vii) ook $\pi(b,b) \neq 0$, zodat volgt:

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Dit betekent dat λ een reëel getal is. $\square$

V.2.27 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$. <u>Zij</u> A <u>een hermitische $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{C}$ <u>en zij</u> $\phi : V \to V$ <u>het $\mathbb{C}$-lineaire endomorphisme van</u> V, <u>gegeven door</u>

$$\phi : (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

<u>Zij voorts</u> $\pi : V\Pi V \to \mathbb{C}$ <u>het hermitisch inproduct in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. <u>Als</u> λ_1, λ_2 <u>twee verschillende</u> (<u>reële</u>) <u>eigenwaarden van</u> A <u>zijn</u>, <u>en</u> b_1 (<u>resp</u>. b_2) <u>is een eigenvector van</u> ϕ <u>bij</u> λ_1 (<u>resp</u>. λ_2), <u>dan geldt</u>:

$$\pi(b_1,b_2) = 0.$$

<u>Bewijs</u>: Er geldt (vgl. het bewijs van de voorgaande stelling):

$$\lambda_2\pi(b_1,b_2) = \pi(b_1,\lambda_2 b_2) = \pi(b_1,\phi(b_2)) = \pi(\phi(b_1),b_2) =$$
$$= \pi(\lambda_1 b_1,b_2) = \overline{\lambda_1}\pi(b_1,b_2).$$

Omdat λ_1 reëel is, is $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$, zodat volgt:

$$\lambda_2\pi(b_1,b_2) = \lambda_1\pi(b_1,b_2).$$

Omdat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ volgt hieruit:

$$\pi(b_1,b_2) = 0. \ \square$$

* * *

§V.3. Reële matrices en inwendige producten

V.3.1 Definitie: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Beschouw de functie

$$\phi : V \sqcap V \to \mathbb{R}$$

die als volgt is gedefinieerd: als

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]) \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

twee vectoren uit V zijn, dan is

$$\phi(a,b) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Deze functie ϕ zullen we het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ noemen. $\phi(a,b)$ heet het inwendig product van a en b in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

V.3.2 Evenals dit het geval was in de vorige paragraaf met het hermitische inproduct in het geval van complexe vectorruimten, hangt de definitie van ϕ uit V.3.1 uiteraard af van de keuze van de basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V.

Vaak zal echter uit de context duidelijk zijn met betrekking tot welke basis we het inwendig product gedefinieerd hebben. In dat geval noteren we ook wel:

$$\langle a,b \rangle$$

in plaats van $\phi(a,b)$.

V.3.3 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw in $\mathbb{R}_3^*$ de bases $[e_1,e_2,e_3]$ en $[a_1,a_2,a_3]$, gegeven door:

$$e_1 = (1,0,0) \quad ; \quad e_2 = (0,1,0) \quad ; \quad e_3 = (0,0,1) \quad ;$$

$$a_1 = (1,0,0) \quad ; \quad a_2 = (1,1,0) \quad ; \quad a_3 = (1,1,1) \quad ,$$

en kies twee vectoren a, b uit $\mathbb{R}_3^*$, bijvoorbeeld:

$$a = (2,2,1) \quad ; \quad b = (0,1,0).$$

Is nu ϕ (resp. ψ) het inwendig product in $(V, [e_1,e_2,e_3])$ (resp. $(V, [a_1,a_2,a_3])$), dan geldt wegens

$$a = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \quad ; \quad b = e_2 \quad ;$$

$$a = a_2 + a_3 \quad ; \quad b = -a_1 + a_2 \quad ,$$

dat

$$\phi(a,b) = 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2$$

en

$$\psi(a,b) = 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1.$$

V.3.4 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots,a_n]$ <u>en is voor elk tweetal vectoren</u> a, b $\in$ V, $\langle a,b\rangle$ <u>het inwendig product van</u> a <u>en</u> b <u>in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, <u>dan geldt</u>:

(i) $\langle\lambda a,b\rangle = \lambda\langle a,b\rangle = \langle a,\lambda b\rangle$;
(ii) $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$;
(iii) $\langle a,b+c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$;
(iv) $\langle a+b,c\rangle = \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle$;
(v) $\langle a,a\rangle \geq 0$;
(vi) $\langle a,a\rangle = 0$ <u>dan en slechts dan als</u> a = 0,

<u>voor elk drietal vectoren</u> a, b, c $\in$ V <u>en elke</u> $\lambda \in \mathbb{R}$.

V.3.5 Merk op dat uit (i), (iii) en (iv) volgt dat het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ een bilineaire functie is op V en -volgens (ii)- bovendien commutatief.

V.3.6 Opmerking: Is V een $\mathbb{C}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en is $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ het reële deel van $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, terwijl

$$\phi : V\Pi V \to \mathbb{C} \quad ; \quad \psi : W\Pi W \to \mathbb{R}$$

respectievelijk het hermitische inproduct in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ en het inwendige product in $(W, [a_1,\ldots, a_n])$ zijn, dan geldt voor elk paar vectoren $a, b \in W$:

$$\phi(a,b) = \psi(a,b).$$

Bewijs: Als

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \quad ; \quad b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n,$$

dan zijn $\alpha_1,\ldots,\alpha_n; \beta_1,\ldots,\beta_n$ reële getallen. In het bijzonder geldt:

$$\overline{\alpha}_k = \alpha_k \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Derhalve volgt:

$$\phi(a,b) = \overline{\alpha}_1\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n\beta_n = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \psi(a,b). \square$$

V.3.7 Opmerking: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en is ϕ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, dan geldt voor elk tweetal indices $i,j \in \{1,\ldots, n\}$:

$$\phi(a_i,a_j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Bewijs: Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van een inwendig product. (Ga na!) $\square$

V.3.8 Opgave: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en is $[b_1,\ldots, b_n]$ een andere basis van V terwijl ϕ het inwendig product is in $(V, [b_1,\ldots, b_n])$, dan behoeft niet te gelden: $\phi(a_i,a_j) = 0$ als $i \neq j$ en $\phi(a_i,a_i) = 1$. Geef zelf een voorbeeld.

V.3.9 Definitie: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $\phi : V\Pi V \to \mathbb{F}$ een bilineaire functie op V, dan heet ϕ symmetrisch als voor elk tweetal vectoren a, b $\in$ V geldt:

$$\phi(a,b) = \phi(b,a).$$

V.3.10 Volgens V.3.4 (ii) is, als ϕ het inwendig product is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ (waarbij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte is met basis $[a_1,\ldots, a_n]$), ϕ een symmetrische bilineaire functie op V.

V.3.11 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\phi : V\Pi V \to \mathbb{R}$ een bilineaire functie op V. Zij vervolgens

$$A = \begin{pmatrix} \phi(a_1,a_1) & \phi(a_1,a_2) & \ldots & \phi(a_1,a_n) \\ \phi(a_2,a_1) & \phi(a_2,a_2) & \ldots & \phi(a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(a_n,a_1) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \phi(a_n,a_n) \end{pmatrix}.$$

Dan geldt voor elk tweetal vectoren

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]) \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

dat

$$\phi(a,b) = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \qquad *)$$

Bewijs:

$$(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \{(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)A\} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi(a_i,a_1),\ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi(a_i,a_n)\right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

*) Strikt genomen is dit matrixproduct een (1×1)-matrix (τ) met $\tau \in \mathbb{R}$ en niet het reële getal τ. We zullen dit formele verschil tussen (τ) en τ voortaan negeren.

$$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(a_i, a_1))\beta_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(a_i, a_n))\beta_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(a_i, a_j)\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(\alpha_i a_i, \beta_j a_j) =$$

$$= \phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j) = \phi(a,b),$$

zodat de opmerking bewezen is. □

V.3.12 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Zij A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$. Definieer een afbeelding

ϕ : VIIV $\to \mathbb{R}$

als volgt: is

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]) \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]),$$

dan is per definitie:

$$\phi(a,b) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Er geldt nu dat de zo gedefinieerde functie ϕ een bilineaire functie is op V.

Bewijs: Laat μ een reëel getal zijn en a, b, c een drietal willekeurig gekozen vectoren uit V. Zeg:

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n;\ b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n;\ c = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n.$$

We dienen dan de volgende vier eigenschappen te verifiëren:

(i) $\phi(a+b,c) = \phi(a,c) + \phi(b,c)$;

(ii) $\phi(a,b+c) = \phi(a,b) + \phi(a,c)$;

(iii) $\phi(\mu a,b) = \mu \cdot \phi(a,b)$;

(iv) $\phi(a,\mu b) = \mu \cdot \phi(a,b)$.

ad (i):

$$\phi(a+b,c) = (\alpha_1+\beta_1,\ldots,\ \alpha_n+\beta_n)A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} =$$

$$= \{(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n) + (\beta_1,\ldots,\ \beta_n)\}A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n)A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} + (\beta_1,\ldots,\ \beta_n)A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} =$$

$$= \phi(a,c) + \phi(b,c).$$

De eigenschappen (ii), (iii) en (iv) bewijze de lezer zelf op een overeenkomstige manier. □

V.3.13 Opmerking: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots,\ a_n]$, <u>zijn</u> ϕ <u>en</u> ψ <u>twee bilineaire functies op</u> V <u>en geldt voor elk paar indices</u> i, j <u>dat</u>

$$\phi(a_i,a_j) = \psi(a_i,a_j),$$

<u>dan is</u> $\phi = \psi$.

<u>Bewijs</u>: We moeten laten zien dat voor elk tweetal vectoren a, $b \in V$ geldt: $\phi(a,b) = \psi(a,b)$. Welnu, zij

$$a = \alpha_1a_1 + \ldots + \alpha_na_n \quad ; \quad b = \beta_1a_1 + \ldots + \beta_na_n,$$

dan is

$$\phi(a,b) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_ia_i,\ \sum_{j=1}^{n} \beta_ja_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi(\alpha_ia_i,\ \beta_ja_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\phi(a_i,a_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\psi(a_i,a_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi(\alpha_ia_i,\beta_ja_j) = \psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_ia_i,\ \sum_{j=1}^{n} \beta_ja_j\Big) = \psi(a,b).\ \square$$

V.3.14 We kunnen uit de drie voorgaande opmerkingen de gevolgtrekking maken dat, als V een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte is en als $[a_1,\ldots, a_n]$ een eenmaal vast gekozen basis is van V, elke bilineaire functie ϕ op V één-éénduidig wordt bepaald door een $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$. Deze correspondentie tussen ϕ en A wordt door de keuze van de basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V vastgelegd.

Net zoals we eerder de correspondentie tussen lineaire afbeeldingen en matrices hebben vastgelegd in een notatiewijze, doen we dit nu voor bovengenoemde correspondentie tussen bilineaire functies en (vierkante) matrices.

V.3.15 <u>Notatie</u>: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en is

$$\phi : V \Pi V \to \mathbb{R}$$

een bilineaire functie op V terwijl de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

gedefinieerd is door:

$$\lambda_{ij} = \phi(a_i, a_j) \qquad (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n),$$

dan noteren we formeel:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \Pi (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

V.3.16 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$, <u>is</u> A <u>een $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{R}$ <u>en is</u> ϕ <u>de bilineaire functie op</u> V, <u>gegeven door</u>

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \Pi (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R},$$

<u>dan is</u> ϕ <u>het inwendig product in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ <u>dan en slechts dan als</u> $A = I_n$.

Bewijs: Zij ψ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Volgens V.3.13 is $\phi = \psi$ dan en slechts dan als voor elk paar indices i, j geldt:

$$\phi(a_i,a_j) = \psi(a_i,a_j).$$

Nu is

$$\psi(a_i,a_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j, \end{cases}$$

zodat we moeten laten zien dat

$$\phi(a_i,a_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

aequivalent is met $A = I_n$. Dit volgt echter, omdat:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

waarbij $\lambda_{ij} = \phi(a_i,a_j)$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n)$. □

V.3.17 Opmerking: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$, is A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ en is ϕ de bilineaire functie op V gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n])\Pi(V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R},$$

dan is ϕ symmetrisch dan en slechts dan als A symmetrisch is.

Bewijs: (i) Is ϕ symmetrisch, dan geldt voor elk tweetal vectoren $a, b \in V$: $\phi(a,b) = \phi(b,a)$. In het bijzonder geldt dan voor elk paar indices i, j dat $\phi(a_i,a_j) = \phi(a_j,a_i)$. Dus is $A = (\phi(a_i,a_j))_{i,j}$ een symmetrische matrix.

(ii) Stel nu dat A een symmetrische matrix is. Dan geldt, als

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \quad ; \quad b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$$

twee willekeurig gekozen vectoren uit V zijn, dat:

$$\phi(a,b) = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)\ A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Dit is een (1×1)-matrix, dus gelijk aan zijn getransponeerde. Derhalve is:

$$\phi(a,b) = \{(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}^T A^T(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)^T = (\beta_1,\ldots, \beta_n)A^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Nu is $A = A^T$, dus:

$$\phi(a,b) = (\beta_1,\ldots, \beta_n)A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \phi(b,a),$$

waarmee de symmetrie van ϕ geverifieerd is. □

V.3.18 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$ en A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$. Zij $\psi : V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V gegeven door:

$$\psi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n])$$

en ϕ de bilineaire functie op V, gegeven door

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n])\Pi(V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

Als $<\ >$ het inwendig product is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, dan geldt voor ieder tweetal vectoren $a, b \in V$:

$$\phi(a,b) = \langle a,\psi(b)\rangle.$$

Bewijs: Zij

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \quad ; \quad b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n .$$

Dan is, als $\psi(b) = \beta_1' a_1 + \ldots + \beta_n' a_n$,

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

Derhalve:

$$\phi(a,b) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_n' \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \beta_1' + \ldots + \alpha_n \beta_n' = \langle a, \psi(b) \rangle . \square$$

V.3.19 Opmerking: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$ en is A een symmetrische $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, is $\phi : V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V dat gegeven wordt door:

$$\phi = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1, \ldots, a_n]),$$

dan geldt, als $\langle\ \rangle$ het inwendig product is in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$, voor elk tweetal vectoren $a, b \in V$:

$$\langle a, \phi(b) \rangle = \langle \phi(a), b \rangle .$$

Bewijs: Zij ψ de bilineaire functie op V, gegeven door:

$$\psi = (V, [a_1, \ldots, a_n]) \Pi (V, [a_1, \ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R} .$$

Dan geldt volgens de vorige opmerking:

$$\langle a, \phi(b) \rangle = \psi(a,b) \quad ; \quad \langle \phi(a), b \rangle = \langle b, \phi(a) \rangle = \psi(b,a) .$$

Omdat A symmetrisch is, is ook ψ symmetrisch, zodat

$$\langle a,\phi(b)\rangle = \psi(a,b) = \psi(b,a) = \langle\phi(a),b\rangle. \quad \square$$

V.3.20 Opgave: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zijn A en B twee $(n \times n)$-matrices uit $\mathbb{R}$ en ϕ en ψ de bilineaire functies op V gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n])\Pi(V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

$$\psi = (V, [a_1,\ldots, a_n])\Pi(V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{B} \mathbb{R},$$

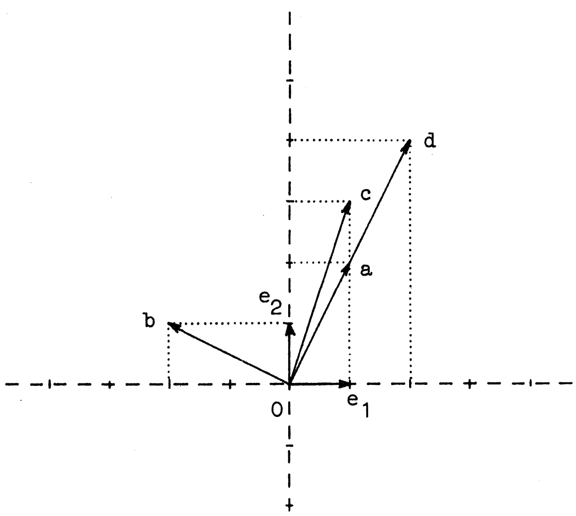
dan geldt: $A = B^T$ dan en slechts dan als voor elk paar vectoren a, b uit V geldt: $\phi(a,b) = \psi(b,a)$.

V.3.21 Beschouw nu eens de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{E}_2$ met de basis $[e_1,e_2]$ waarbij

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} .$$

Kies de volgende vier vectoren a, b, c en d uit $\mathbb{E}_2$:

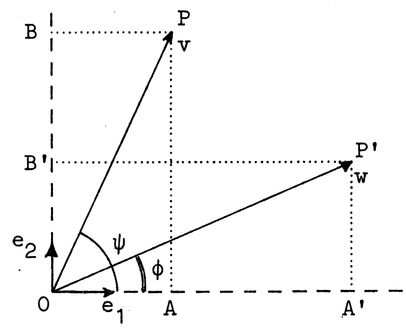
$$a = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \; ; \; c = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \; ; \; d = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} .$$



Intuïtief gesproken hebben de vectoren a en b "richtingen" die "onderling loodrecht" zijn. Hetzelfde geldt voor de vectoren d en b. De richtingen van a en c of van b en c zijn daarentegen niet loodrecht ten opzichte van elkaar.

Kies twee willekeurige vectoren v, w uit $\mathbb{E}_2$ met $v \neq 0$ en $w \neq 0$. Zeg:

$$v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \quad ; \quad w = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} .$$



Dan geldt (zie de figuur):

$$OA = \alpha_1 \quad ; \quad OB = \alpha_2 \quad ; \quad OA' = \beta_1 \quad ; \quad OB' = \beta_2 \quad ;$$

$$OP = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad ; \quad OP' = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \quad ,$$

zodat

$$\cos(\psi-\phi) = \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi =$$

$$= \frac{OA}{OP} \cdot \frac{OA'}{OP'} + \frac{OB}{OP} \cdot \frac{OB'}{OP'} =$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} . \tag{*}$$

Nu zijn de richtingen van v en w onderling loodrecht dan en slechts dan als $\cos(\psi-\phi) = 0$, oftewel:

$$\langle v,w\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

(Uiteraard is $\langle\ \rangle$ hier het inwendig product in $(\mathbb{E}_2, [e_1,e_2])$.) Bijvoorbeeld, voor wat betreft de eerder gekozen vectoren a, b, c en d uit $\mathbb{E}_2$:

$$\langle a,b\rangle = 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 0 \quad ; \quad \langle d,b\rangle = 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 = 0 \quad ;$$

$$\langle a,c\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 = 7 \neq 0 \quad ; \quad \langle b,c\rangle = (-2)\cdot 1 + 1\cdot 3 = 1 \neq 0 \quad .$$

Merk op dat we, omdat de definitie van het inwendig product $\langle\ \rangle$ in dit voorbeeld is gekoppeld aan de keuze van de basis $[e_1,e_2]$ van $\mathbb{E}_2$, niet mogen verwachten dat als we een willekeurige andere basis $[a_1,a_2]$ van $\mathbb{E}_2$ gekozen hadden, ook zou gelden: de richtingen van v en w zijn onderling loodrecht dan en slechts dan als $\phi(v,w) = 0$, waarbij ϕ het inwendig product is in $(\mathbb{E}_2, [a_1,a_2])$. Bijvoorbeeld: kies

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Dan is

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in (\mathbb{E}_2, [a_1,a_2]) \ ; \ b = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{E}_2, [a_1,a_2]),$$

zodat

$$\phi(a,b) = 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 \neq 0.$$

Bovenstaand voorbeeld suggereert dat we kunnen spreken over een soort "loodrechtheids"-begrip in een vectorruimte, mits we eerst hebben vastgelegd ten opzichte van welke basis we werken. (We mogen daarbij niet verwachten, dat dit begrip -bij keuze van een willekeurige basis- samenvalt met het in vectorruimten als $\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$, enz. intuïtieve begrip "loodrecht".)

V.3.22 Definitie: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\langle\ \rangle$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Een m-tupel $[b_1,\ldots, b_m]$ uit V heet orthogonaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, als voor elk paar verschillende indices $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ geldt:

$$\langle b_i,b_j\rangle = 0,$$

terwijl bovendien voor elke i, $b_i \neq 0$ is.

V.3.23 Voorbeeld: Zij V een 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,a_2,a_3]$. Zij

$$b_1 = -a_1 + 2a_3 \quad ; \quad b_2 = 2a_1 - a_2 + a_3 \quad ; \quad b_3 = 2a_1 + 5a_2 + a_3.$$

Dan is, als $<\ >$ het inwendig product is in $(V, [a_1,a_2,a_3])$,

$$<b_1,b_2> = <b_1,b_3> = <b_2,b_3> = 0.$$

Derhalve is $[b_1,b_2,b_3]$ een in $(V, [a_1,a_2,a_3])$ orthogonaal 3-tupel uit V. Ga zelf na of $[a_1,a_2,a_3]$ een orthogonaal 3-tupel is in $(V, [b_1,b_2,b_3])$ en in $(V, [a_1,a_2,a_3])$!

V.3.24 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Dan is elk m-tupel $[b_1,\ldots, b_m]$ uit V dat orthogonaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs: Stel dat $[b_1,\ldots, b_m]$ lineair afhankelijk is. Dan zijn er m reële getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ te vinden, niet alle nul, zodat

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = 0.$$

Zeg: $\lambda_1 \neq 0$. Dan geldt:

$$b_1 = \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_m b_m$$

(waarbij

$$\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \qquad (i = 2,\ldots,m)\ ).$$

Zij $<\ >$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} <b_1,b_1> &= <b_1, \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_m b_m> = \\ &= <b_1,\mu_2 b_2> + <b_1,\mu_3 b_3> + \ldots + <b_m,\mu_m b_m> = \\ &= \mu_2<b_1,b_2> + \mu_3<b_1,b_3> + \ldots + \mu_m<b_1,b_m>. \qquad (*) \end{aligned}$$

Omdat $[b_1,\ldots, b_m]$ orthogonaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, is $b_1 \neq 0$ (zodat ook $<b_1,b_1> \neq 0$), terwijl voor elke $i \in \{2,\ldots,m\}$ bovendien geldt: $<b_1,b_i> = 0$. Dus volgt uit $(*)$:

$$0 \neq \langle b_1,b_1\rangle = \mu_2 \cdot 0 + \mu_3 \cdot 0 + \ldots + \mu_m \cdot 0 = 0.$$

Tegenspraak. Dus is $[b_1,\ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel. □

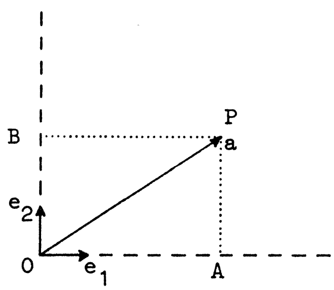
V.3.25 <u>Opgave</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en is</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>een lineair onafhankelijk stelsel vectoren uit</u> V, <u>dan behoeft dit m-tupel niet noodzakelijk orthogonaal te zijn in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. (Geef voorbeelden in $\mathbb{E}_2$!)

V.3.26 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\langle\ \rangle$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Dan is (cf. V.3.4) voor elke vector $a \in V$, $\langle a,a\rangle \geq 0$, zodat

$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$$

een (positief) reëel getal is. $\|a\|$ heet de <u>norm van de vector</u> a <u>in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

V.3.27 <u>Voorbeeld</u>:



Beschouw in $\mathbb{E}_2$ de vector

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Kies als basis voor $\mathbb{E}_2$ $[e_1,e_2]$ met

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als $< >$ het inwendig product is in $(\mathbb{E}_2, [e_1,e_2])$, dan geldt:

$$\|a\| = \sqrt{<a,a>} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

(waarbij $\|a\|$ de norm van a in $(\mathbb{E}_2, [e_1,e_2])$ is). Nu is $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ de lengte van het lijnstuk OP in de figuur. Dus in $(\mathbb{E}_2, [e_2,e_2])$ stemt de norm van a overeen met de "lengte" van a.

Hadden we een andere basis voor $\mathbb{E}_2$ gekozen, dan hoeft de norm van een vector ten opzichte van die basis niet met het "lengte"-begrip in $\mathbb{E}_2$ overeen te stemmen. Bijvoorbeeld: kies de basis $[a_1,a_2]$ met

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

en zij

$$a = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Is ϕ het inwendig product in $(\mathbb{E}_2, [a_1,a_2])$ en is $\|a\|^*$ de norm van a in $(\mathbb{E}_2, [a_1,a_2])$, dan vinden we (wegens $a = a_2 - a_1$):

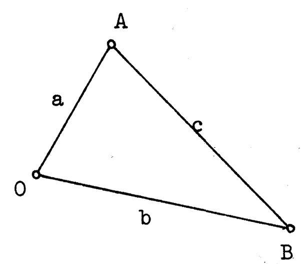
$$\|a\|^* = \sqrt{\phi(a,a)} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

terwijl de norm $\|a\|$ van a in $(\mathbb{E}_2, [e_1,e_2])$ is:

$$\|a\| = \sqrt{<a,a>} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Men ziet dus dat de norm van een vector afhankelijk is van de basis ten opzichte waarvan we werken.

V.3.28 Beschouw in "het platte vlak" een driehoek:



Een welbekende eigenschap uit de euclidische meetkunde is dan, als a, b respectievelijk c de lengtes zijn van de respectieve lijnstukken OA, OB en OC (zie de figuur):

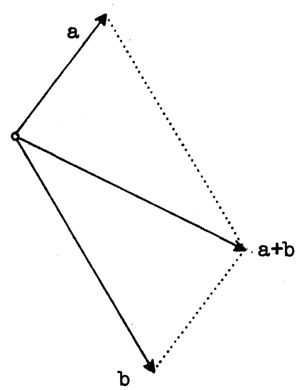
$$a + c \geq b.$$

(Deze betrekking heet wel de "driehoeksongelijkheid".) We hebben hiervoor al opgemerkt dat voor een $\mathbb{R}$-vectorruimte V met basis $[a_1, \ldots, a_n]$ de norm in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$ een generalisatie is van het lengtebegrip in vectorruimten zoals $\mathbf{E}_2$. Het blijkt dat we de hierboven omschreven driehoeksongelijkheid ook kunnen generaliseren:

V.3.29 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1, \ldots, a_n]$ <u>en is</u> $\| \ \|$ <u>de norm in</u> $(V, [a_1, \ldots, a_n])$, <u>dan geldt voor elk tweetal vectoren</u> a, b <u>uit</u> V:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

(Zie onderstaande figuur en vergelijk deze met de situatie uit V.3.28.)



<u>Bewijs</u>: Zij < > het inwendig product in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$. Voor elk reëel getal λ geldt volgens V.3.4:

$$\langle \lambda a+b, \lambda a+b \rangle \geq 0,$$

oftewel:

$$\langle\lambda a,\lambda a\rangle + \langle\lambda a,b\rangle + \langle b,\lambda a\rangle + \langle b,b\rangle \geq 0.$$

Omdat $\langle\lambda a,b\rangle = \lambda\langle a,b\rangle = \lambda\langle b,a\rangle = \langle b,\lambda a\rangle$ volgt hieruit dat voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\langle a,a\rangle\lambda^2 + 2\langle a,b\rangle\lambda + \langle b,b\rangle \geq 0. \qquad (*)$$

De discriminant van de kwadratische veelterm in λ

$$\langle a,a\rangle\lambda^2 + 2\langle a,b\rangle\lambda + \langle b,b\rangle$$

is:

$$4\langle a,b\rangle^2 - 4\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle$$

en het is welbekend dat $(*)$ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dan en slechts dan als deze discriminant niet positief is, dus:

$$\langle a,b\rangle^2 \leq \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle.$$

Hieruit volgt:

$$\langle a,b\rangle \leq \sqrt{\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle} = \|a\|\,\|b\| \qquad (**)$$

($(**)$ heet "<u>de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz</u>"). Uit $(**)$ volgt:

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 &= \langle a+b,a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle = \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle \leq \\ &\leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|.\|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2,\end{aligned}$$

zodat inderdaad geldt:

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|. \ \square$$

V.3.30 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Een m-tupel $[b_1,\ldots, b_m]$ uit V heet <u>orthonormaal in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ als geldt:

$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j\ , \end{cases}$$

waarbij $\langle\ \rangle$ het inwendig product is in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$.

V.3.31 Merk op dat een orthogonaal m-tupel orthonormaal is dan en slechts dan als elk der vectoren uit dit m-tupel norm 1 heeft.

V.3.32 Voorbeeld: Zij V een 4-dimensionale vectorruimte met basis $[a_1, a_2, a_3, a_4]$. Beschouw de volgende vectoren:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 \ ; & c_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, b_1 \ ; \\ b_2 &= a_1 - a_2 \ ; & c_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, b_2 \ ; \\ b_3 &= a_3 + a_4 \ ; & c_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, b_3 \ ; \\ b_4 &= a_3 - a_4 \ ; & c_4 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, b_4 \ . \end{aligned}$$

Noteer $\langle\ \rangle$ resp. $\|\ \|$ voor inwendig product, resp. norm in $(V, [a_1, \ldots, a_4])$. Wegens

$$\langle b_i, b_j\rangle = 0 \qquad \text{als } i \neq j$$

is $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ een orthogonaal 4-tupel in $(V, [a_1, \ldots, a_4])$. Echter:

$$\|b_1\| = \|b_2\| = \|b_3\| = \|b_4\| = \sqrt{2},$$

zodat $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ niet orthonormaal is in $(V, [a_1, \ldots, a_4])$. Ga na dat $[c_1, c_2, c_3, c_4]$ wel een orthonormaal stelsel is in $(V, [a_1, \ldots, a_4])$.

V.3.33 Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Omdat elk in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$ orthonormaal m-tupel $[b_1, \ldots, b_m]$ ook orthogonaal is in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$, is volgens V.3.24 $[b_1, \ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel. Is $m = n$, dan is $[b_1, \ldots, b_m] = [b_1, \ldots, b_n]$ een basis van V. We spreken wel over een orthonormale basis in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$.

V.3.34 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Zij $[b_1, \ldots, b_m]$ een in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$ orthonormaal m-tupel uit V. Als $m < n$, dan kunnen we een vector $b_{m+1} \in V$ kiezen zodat het (m+1)-tupel $[b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}]$ orthonormaal is in $(V, [a_1, \ldots, a_n])$.

<u>Bewijs</u>: Volgens V.3.33 is $[b_1,\dots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel. We kunnen dus met vectoren $a_1',\dots, a_{n-m}'$ uit V dit m-tupel aanvullen tot een basis $[b_1,\dots, b_m, a_1',\dots, a_{n-m}']$ van V. Definieer nu, als $<\ >$, resp. $\|\ \|$ het inwendig product, resp. de norm is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$:

$$b_{m+1}' = a_1' - \sum_{k=1}^{m} <a_1',b_k>b_k$$

en vervolgens

$$b_{m+1} = \frac{1}{\|b_{m+1}'\|} b_{m+1}'.$$

Voor elke index $l \in \{1,\dots,m\}$ geldt dan:

$$\begin{aligned} <b_l,b_{m+1}'> &= <b_l,a_1'> - <b_l, \sum_{k=1}^{m} <a_1',b_k>\, b_k> = \\ &= <b_l,a_1'> - \sum_{k=1}^{m} <b_l,\ <a_1',b_k>\, b_k> = \\ &= <b_l,a_1'> - \sum_{k=1}^{m} <a_1',b_k><b_l,b_k>. \end{aligned} \qquad (*)$$

Omdat $[b_1,\dots, b_m]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$, geldt voor $k \neq l$ dat $<b_k,b_l> = 0$. Bovendien is $<b_l,b_l> = 1$ voor elke $l \in \{1,\dots,m\}$. Dus volgt uit (*):

$$\begin{aligned} <b_l,b_{m+1}'> &= <b_l,a_1'> - <a_1',b_l><b_l,b_l> = \\ &= <b_l,a_1'> - <a_1',b_l> = 0 \end{aligned} \qquad (l = 1,\dots,m).$$

Dan geldt ook voor elke $l \in \{1,\dots,m\}$:

$$<b_l,b_{m+1}> = <b_l, \frac{1}{\|b_{m+1}'\|} b_{m+1}'> = \frac{1}{\|b_{m+1}'\|} <b_l,b_{m+1}'> = 0.$$

Dus geldt in het (m+1)-tupel $[b_1,\dots, b_m, b_{m+1}]$ voor elk tweetal verschillende indices $l, k \in \{1,\dots,m+1\}$:

$$<b_l,b_k> = 0.$$

Omdat $[b_1,\dots, b_m]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$ geldt ook:

$$\|b_1\| = \ldots = \|b_m\| = 1.$$

Voorts is ook:

$$\|b_{m+1}\|^2 = \langle b_{m+1}, b_{m+1}\rangle = \left\langle \frac{1}{\|b'_{m+1}\|} b'_{m+1}, \frac{1}{\|b'_{m+1}\|} b'_{m+1}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|b'_{m+1}\|^2} \langle b'_{m+1}, b'_{m+1}\rangle = \frac{\|b'_{m+1}\|^2}{\|b'_{m+1}\|^2} = 1,$$

zodat $[b_1,\ldots, b_m, b_{m+1}]$ een orthonormaal stelsel is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. (Omdat b'_{m+1} een lineaire combinatie is van $[b_1,\ldots, b_m, a'_1]$, waarin niet alle coëfficiënten nul zijn (zie de definitie van b'_{m+1}), en dit $(m+1)$-tupel uit V als deel van een basis voor V lineair onafhankelijk is, is b'_{m+1} (en derhalve b_{m+1} (ga na!)) ongelijk aan de nulvector.) □

V.3.35 <u>Gevolg</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>en is</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>orthonormaal in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ <u>met</u> $m < n$, <u>dan is dit m-tupel uit te breiden tot een orthonormale basis</u> $[b_1,\ldots, b_m,\ldots, b_n]$ <u>in</u> $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt onmiddellijk door (herhaald) toepassen van V.3.34. (Ga na!) □

V.3.36 <u>Voorbeeld</u>: Kies in $\mathbf{E}_3$ de basis $[a_1,a_2,a_3]$, gegeven door

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad ,$$

en bovendien het 2-tupel $[b_1,b_2]$ met

$$b_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} \quad ; \quad b_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\end{pmatrix} \quad .$$

Ga na dat $[b_1,b_2]$ orthonormaal is in $(\mathbf{E}_3, [a_1,a_2,a_3])$. We gaan op de manier zoals geschetst in het bewijs van V.3.34 dit 2-tupel uitbreiden tot een in $(\mathbf{E}_3, [a_1,a_2,a_3])$ orthonormaal 3-tupel ($\langle\ \rangle$, resp. $\|\ \|$ zijn het inwendig product, resp. de norm in $(\mathbf{E}_3, [a_1,a_2,a_3])$).

Breidt allereerst $[b_1,b_2]$ uit tot een basis $[b_1,b_2,a_1']$ van $\mathbb{E}_3$. Kies bijvoorbeeld:

$$a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definieer (de notatie van V.3.34 aanhoudend):

$$b_3' = a_1' - \langle a_1',b_1\rangle b_1 - \langle a_1',b_2\rangle b_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

(na!) en vervolgens:

$$b_3 = \frac{1}{\|b_3'\|}\, b_3' = \frac{1}{\frac{1}{6}\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

en controleer dat $[b_1,b_2,b_3]$ inderdaad orthonormaal is in $(\mathbb{E}_3, [a_1,a_2,a_3])$.

V.3.37 Definitie: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots,a_n]$. Een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme $\phi : V \to V$ van V heet orthonormaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ als voor elk m-tupel $[b_1,\ldots, b_m]$, dat orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$, geldt dat ook $[\phi(b_1),\ldots, \phi(b_m)]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

V.3.38 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\phi : V \to V$ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van V en A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, zodat

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

dan is ϕ orthonormaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ dan en slechts dan als

$$A^{-1} = A^T.$$

Bewijs: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$A^T = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\mu_{ij} = \lambda_{ji} \qquad (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n),$$

zodat

$$A^TA = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \cdots & \nu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_{n1} & \cdots & \nu_{nn} \end{pmatrix}$$

met

$$\begin{aligned} \nu_{ij} &= \mu_{i1}\lambda_{1j} + \mu_{i2}\lambda_{2j} + \dots + \mu_{in}\lambda_{nj} = \\ &= \lambda_{1i}\lambda_{1j} + \lambda_{2i}\lambda_{2j} + \dots + \lambda_{ni}\lambda_{nj}\ . \end{aligned} \qquad (*)$$

Voorts weten we, als < > het inwendig product is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$:

$$\phi(a_k) = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\dots, a_n]) \qquad (k = 1,\dots,n),$$

zodat geldt:

$$<\phi(a_i),\phi(a_j)> = \lambda_{1i}\lambda_{1j} + \lambda_{2i}\lambda_{2j} + \dots + \lambda_{ni}\lambda_{nj}$$

$(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n)$. Hieruit en uit (*) volgt voor elke i en j:

$$\nu_{ij} = <\phi(a_i),\phi(a_j)>\ ,$$

oftewel:

$$A^TA = \begin{pmatrix} <\phi(a_1),\phi(a_1)> & \dots & <\phi(a_1),\phi(a_n)> \\ \vdots & & \vdots \\ <\phi(a_n),\phi(a_1)> & \dots & <\phi(a_n),\phi(a_n)> \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(i) Veronderstel eerst dat ϕ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. Omdat uiteraard $[a_1,\dots, a_n]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$ (V.3.7), is ook $[\phi(a_1),\dots, \phi(a_n)]$ orthonormaal in $(V, [a_1,\dots, a_n])$ (en volgens V.3.33 dus zeker een basis van V, wat inhoudt dat A regulier is). Derhalve is

$$<\phi(a_i),\phi(a_j)> = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j, \end{cases}$$

oftewel -wegens (**)-

$$A^TA = I_n.$$

Omdat A regulier is betekent dit:

$$A^T = A^{-1}.$$

(ii) Neem nu aan dat $A^T = A^{-1}$. Kies een m-tupel $[b_1,\dots, b_m]$ uit V dat orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. We moeten dan laten zien dat ook $[\phi(b_1),\dots, \phi(b_m)]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. Zij

$$b_k = \begin{pmatrix} \beta_1^{(k)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(k)} \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\dots, a_n]) \qquad (k = 1,\dots,m);$$

$$\phi(b_k) = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_n^{(k)} \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\dots, a_n]) \qquad (k = 1,\dots,m).$$

Dan geldt:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_n^{(k)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1^{(k)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad (k = 1,\dots,m)$$

en, door links en rechts te transponeren:

$$(\gamma_1^{(k)},\ldots,\gamma_n^{(k)}) = \left\{A\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{(k)}\\ \vdots\\ \beta_n^{(k)}\end{pmatrix}\right\}^T = (\beta_1^{(k)},\ldots,\beta_n^{(k)})\cdot A^T.$$

D Derhalve geldt:

$$\langle\phi(b_i),\phi(b_j)\rangle = \gamma_1^{(i)}\gamma_1^{(j)} + \ldots + \gamma_n^{(i)}\gamma_n^{(j)} =$$

$$= (\gamma_1^{(i)},\ldots,\gamma_n^{(i)})\begin{pmatrix}\gamma_1^{(j)}\\ \vdots\\ \gamma_n^{(j)}\end{pmatrix} =$$

$$= (\beta_1^{(i)},\ldots,\beta_n^{(i)})A^TA\begin{pmatrix}\beta_1^{(j)}\\ \vdots\\ \beta_n^{(j)}\end{pmatrix} = (\beta_1^{(i)},\ldots,\beta_n^{(i)})I_n\begin{pmatrix}\beta_1^{(j)}\\ \vdots\\ \beta_n^{(j)}\end{pmatrix}$$

wegens $A^TA = A^{-1}A = I_n$. Dus:

$$\langle\phi(b_i),\phi(b_j)\rangle = (\beta_1^{(i)},\ldots,\beta_n^{(i)})\begin{pmatrix}\beta_1^{(j)}\\ \vdots\\ \beta_n^{(j)}\end{pmatrix} =$$

$$= \beta_1^{(i)}\beta_1^{(j)} + \ldots + \beta_n^{(i)}\beta_n^{(j)} = \langle b_i,b_j\rangle. \qquad (***)$$

Omdat $[b_1,\ldots, b_m]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ volgt uit (***):

$$\langle\phi(b_i),\phi(b_j)\rangle = \begin{cases}0 & \text{als } i \neq j\\ 1 & \text{als } i = j\end{cases}$$

zodat $[\phi(b_1),\ldots, \phi(b_m)]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Hiermee is de opmerking bewezen. □

V.3.39 <u>Definitie</u>: Een $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$ heet <u>orthonormaal</u> als

$$A^{-1} = A^T.$$

V.3.40 Merk op dat uit bovenstaande definitie impliciet volgt dat elke orthonormale matrix regulier is. We formuleren hieronder twee resultaten die in de bewijsvoering van V.3.38 al bewezen zijn. (Ga na!)

V.3.41 Opgave: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $<\ >$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ en zij $\phi : V \to V$ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van V en A een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, zodat

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

dan is

$$A^TA = \begin{pmatrix} <\phi(a_1),\phi(a_1)> & \ldots & <\phi(a_1),\phi(a_n)> \\ \vdots & & \vdots \\ <\phi(a_n),\phi(a_1)> & \ldots & <\phi(a_n),\phi(a_n)> \end{pmatrix}.$$

V.3.42 Opgave: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij A een orthonormale $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ en $\phi : V \to V$ het (in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ orthonormale) $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan geldt voor ieder tweetal vectoren $a, b \in V$:

$$<\phi(a),\phi(b)> \quad <a,b>$$

(als $<\ >$ het inwendig product is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$).

V.3.43 Voorbeeld:

$$I_n \quad ; \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

zijn voorbeelden van orthonormale matrices uit $\mathbb{R}$.

V.3.44 Opmerking: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$, dan is een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme $\phi : V \to V$ orthonormaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ dan en slechts dan als het n-tupel $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

Bewijs: Zij

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan is volgens V.3.41 :

$$A^TA = \begin{pmatrix} \langle\phi(a_1),\phi(a_1)\rangle & \ldots & \langle\phi(a_1),\phi(a_n)\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\phi(a_n),\phi(a_1)\rangle & \ldots & \langle\phi(a_n),\phi(a_n)\rangle \end{pmatrix};$$

ϕ is orthonormaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ dan en slechts dan als $A^TA = I_n$, en dit is het geval dan en slechts dan als

$$\langle\phi(a_i),\phi(a_j)\rangle = \begin{cases} 1 \text{ als } i = j \\ 0 \text{ als } i \neq j, \end{cases}$$

oftewel, als $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een orthonormale basis is in $(V,[a_1,\ldots,a_n])$.□

V.3.45 Opgave: Is A een orthonormale $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, dan is

$$|\det(A)| = 1.$$

V.3.46 Opgave: Is A een orthonormale $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, dan zijn ook A^{-1} en A^T orthonormaal. Is B een tweede orthonormale $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ dan is ook AB orthonormaal.

V.3.47 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met bases $[a_1,\ldots, a_n]$ en $[b_1,\ldots, b_n]$. Zij

$$id_V = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{S} (V, [b_1,\ldots, b_n]).$$

$[b_1,\ldots, b_n]$ is orthonormaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ dan en slechts dan als S een orthonormale matrix is.

<u>Bewijs</u>: Zij < > het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Zij voorts

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$id_V = (V, [b_1,\ldots, b_n]) \xrightarrow{S^{-1}} (V, [a_1,\ldots, a_n]),$$

zodat

$$b_k = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]) \qquad (*)$$

$(k = 1,\ldots,n)$. Zij voorts $\phi : V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{S^{-1}} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Dan volgt voor elke $k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\phi(a_k) = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix} \in (V, [a_1,\ldots, a_n]). \qquad (**)$$

Dus geldt volgens (*) en (**):

$$[b_1,\ldots, b_n] = [\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)].$$

Nu is S^{-1} orthonormaal dan en slechts dan als ϕ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Volgens V.3.44 is dit aequivalent met de orthonormaliteit van $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)] = [b_1,\ldots, b_n]$ in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Omdat uit V.3.46 volgt dat S orthonormaal is dan en slechts dan als S^{-1} orthonormaal is (ga na!), is de opmerking bewezen. □

V.3.48 <u>Opmerking</u>: <u>Elke symmetrische $(n \times n)$-matrix</u> A <u>uit</u> $\mathbb{R}$ <u>heeft</u> n <u>reële eigenwaarden</u>.

Bewijs: We kunnen A beschouwen als een matrix uit $\mathbb{C}$. Dan is, omdat A symmetrisch is,

$$A = A^T$$

en omdat A alleen reële elementen heeft,

$$A = \overline{A}.$$

Derhalve volgt:

$$A^H = \overline{(A^T)} = \overline{A} = A,$$

zodat A een hermitische matrix is uit $\mathbb{C}$. Volgens stelling V.2.26 heeft A dan n reële eigenwaarden. □

V.3.49 Opmerking: Bij elke symmetrische $(n \times n)$-matrix A uit $\mathbb{R}$ bestaat een orthonormale $(n \times n)$-matrix S uit $\mathbb{R}$ zodat

$$S^{-1}AS$$

een diagonaalmatrix is.

Bewijs: (Met volledige inductie naar n.) Voor $n = 1$ is er niets te bewijzen. Stel nu dat we bij elke symmetrische $((n-1) \times (n-1))$-matrix S' kunnen kiezen zodat $(S')^{-1}A'S'$ een diagonaalmatrix is.

Kies een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$, en zij $\phi : V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Omdat A een symmetrische matrix uit $\mathbb{R}$ is, heeft A reële eigenwaarden (cf. V.3.48). Kies zo'n eigenwaarde λ en laat $b_1' \neq 0$ een eigenvector zijn bij λ van ϕ. Dus:

$$\phi(b_1') = \lambda b_1'.$$

Definieer nu (als $\| \ \|$ de norm is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$):

$$b_1 = \frac{1}{\|b_1'\|}\, b_1'.$$

Dan is wegens

$$\phi(b_1) = \frac{1}{\|b_1'\|}\,\phi(b_1') = \frac{\lambda}{\|b_1'\|}\, b_1' = \lambda b_1$$

ook $b_1 \neq 0$ en tevens een eigenvector van ϕ bij λ. Ook geldt:

$$\|b_1\| = 1.$$

Dus is het 1-tupel $[b_1]$ uit V orthonormaal in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. Breidt dit 1-tupel uit tot een orthonormale basis

$$[b_1, c_2,\dots, c_n]$$

in $(V, [a_1,\dots, a_n])$ (vgl. V.3.35′). Zij S_1 vervolgens de (reguliere) $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, gegeven door:

$$id_V = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{S_1} (V, [b_1, c_1,\dots, c_n]).$$

We hebben dan de volgende situatie:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id_V"] & V \arrow[d, "id_V"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & V \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} (V, [a_1,\dots, a_n]) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S_1"] & (V, [a_1,\dots, a_n]) \arrow[d, "S_1"] \\ (V,[b_1,c_2,\dots,c_n]) \arrow[r, "B"] & (V,[b_1,c_2,\dots,c_n]) \end{tikzcd} ,$$

waarbij

$$B = S_1 A S_1^{-1}$$

g (ga na!). Volgens V.3.47 is, omdat $[b_1, c_2,\dots, c_n]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$, S_1 een orthonormale matrix. Derhalve geldt:

$$B^T = (S_1 A S_1^{-1})^T = (S_1 A S_1^T)^T = S_1 A^T S_1^T = S_1 A S_1^{-1} = B,$$

zodat B een symmetrische matrix is. Omdat

$$\phi = (V, [b_1, c_2, \ldots, c_n]) \xrightarrow{B} (V, [b_1, c_2, \ldots, c_n])$$

en $\phi(b_1) = \lambda b_1$ is B een $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ van de vorm:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Omdat B symmetrisch is, volgt:

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \ldots = \beta_{1n} = 0,$$

zodat

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

waarbij B_1 een symmetrische $((n-1) \times (n-1))$-matrix is uit $\mathbb{R}$. Kies bij B_1 een orthonormale $((n-1) \times (n-1))$-matrix T_1 uit $\mathbb{R}$ zodat

$$T_1^{-1} B_1 T_1$$

een diagonaalmatrix is. Definieer:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Dan ga de lezer na dat geldt:

$$S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T_1^{-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{(T_1)^T} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (S_2)^T,$$

zodat S_2 een orthonormale matrix is. Ook controlere men:

$$S_2^{-1}BS_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T_1^{-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{B_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{T_1^{-1}B_1T_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

en dit is een diagonaalmatrix. Omdat S_1 orthonormaal is, is ook S_1^{-1} orthonormaal. S_2 is eveneens orthonormaal, zodat $S_1^{-1}S_2$ ook orthonormaal is. We hebben dus een orthonormale matrix

$$R = S_1^{-1}S_2,$$

zodat

$$R^{-1}AR = (S_1^{-1}S_2)^{-1}A(S_1^{-1}S_2) = S_2^{-1}(S_1AS_1^{-1})S_2 = S_2^{-1}BS_2$$

en we hebben gezien dat $S_2^{-1}BS_2$ een diagonaalmatrix was. Hiermee is de opmerking bewezen. □

V.3.50 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis</u> $[a_1,\dots, a_n]$. <u>Zij</u> A <u>een symmetrische $(n \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{R}$. <u>Zij</u> $\phi : V \to V$ <u>het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van</u> V <u>dat gegeven wordt door</u>:

$$\phi = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\dots, a_n]).$$

<u>Dan bestaat er een orthonormale basis</u> $[b_1,\dots, b_n]$ <u>in</u> $(V, [a_1,\dots, a_n])$ <u>die geheel uit eigenvectoren van</u> ϕ <u>bestaat</u>.

<u>Bewijs</u>: Er bestaat volgens V.3.49 een orthonormale matrix S uit $\mathbb{R}$ zodat

$$D = S^{-1}AS$$

een diagonaalmatrix is. Omdat A aequivalent is met D via bovenstaande relatie is er een basis $[b_1,\dots, b_n]$ voor V zodat

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V \\ \downarrow{\scriptstyle id_V} & & \downarrow{\scriptstyle id_V} \\ V & \xrightarrow{\phi} & V \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} (V, [b_1,\dots, b_n]) & \xrightarrow{D} & (V, [b_1,\dots, b_n]) \\ \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ (V, [a_1,\dots, a_n]) & \xrightarrow{A} & (V, [a_1,\dots, a_n]). \end{array}$$

Als

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dan zijn -omdat A en D aequivalent zijn- $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A (en van ϕ). Uit

$$\phi = (V, [b_1,\dots, b_n]) \xrightarrow{D} (V, [b_1,\dots, b_n])$$

volgt bovendien:

$$\phi(b_k) = \lambda_k b_k \qquad (k = 1,\dots,n),$$

zodat elke b_k een eigenvector van ϕ bij λ_k is. Omdat S orthogonaal is, is ook S^{-1} orthogonaal. Wegens

$$id_V = (V, [a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{S^{-1}} (V, [b_1,\dots, b_n])$$

volgt hieruit met V.3.47 dat $[b_1,\dots, b_n]$ een orthonormale basis is in $(V, [a_1,\dots, a_n])$. □

V.3.51 Opmerking: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij A een symmetrische $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$ en ϕ een $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van V zodat

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Zijn $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ m verschillende reële eigenwaarden van A en zijn $b_1,\ldots, b_m$ vectoren uit V zodat $b_i \neq 0$ en b_i een eigenvector van ϕ bij λ_i is $(i = 1,\ldots,m)$, dan is $[b_1,\ldots, b_m]$ orthogonaal in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$.

Bewijs: Zij $< >$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Kies twee willekeurige indices $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ met $i \neq j$. We moeten bewijzen dat $<b_i,b_j> = 0$. Welnu, volgens V.3.19 geldt:

$$\begin{aligned} \lambda_i<b_i,b_j> &= <\lambda_i b_i,b_j> = <\phi b_i,b_j> = \\ &= <b_i,\phi b_j> = <b_i,\lambda_j b_j> = \lambda_j<b_i,b_j>. \end{aligned}$$

Omdat $\lambda_i \neq \lambda_j$ volgt hieruit dat $<b_i,b_j> = 0$. □

V.3.52 Voorbeeld: Beschouw de symmetrische (3×3)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

We gaan een orthonormale matrix S zoeken, zodat

$$S^{-1}AS$$

een diagonaalmatrix is. Hiertoe kiezen we de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{R}_3$ met basis $[e_1,e_2,e_3]$, gegeven door:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

De methode om zo'n S te bepalen is beschreven in het bewijs van V.3.50 :
We construeren een orthonormale basis $[b_1,b_2,b_3]$ in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ die uit eigenvectoren bestaat van het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme ϕ van $\mathbb{R}_3$, gegeven door:

$$\phi = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]).$$

Is S de matrix, bepaald door

$$id_{\mathbb{R}_3} : (\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3]) \overset{S}{\to} (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]),$$

dan is, wegens

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_3 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}_3}"] & \mathbb{R}_3 \arrow[d, "id_{\mathbb{R}_3}"] \\ \mathbb{R}_3 \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}_3 \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} (\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3]) \arrow[r, "S^{-1}AS"] \arrow[d, "S"] & (\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3]) \arrow[d, "S"] \\ (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \arrow[r, "A"] & (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]), \end{tikzcd}$$

en omdat b_1, b_2 en b_3 eigenvectoren zijn van ϕ, $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix. Ook is, omdat $[b_1,b_2,b_3]$ orthonormaal is in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ en omdat

$$id_{\mathbb{R}_3} = (\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{S^{-1}} (\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3])$$

volgens V.3.47 S^{-1} (en daarmee S) orthonormaal.

We gaan eerst de eigenwaarden van A bepalen. Het karakteristieke polynoom van A is:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2.$$

Dus $\lambda_1 = 1$ (enkelvoudig) en $\lambda_2 = 2$ (dubbeltellend) zijn de drie eigenwaarden van A.

Nu gaan we de eigenvectoren bij λ_1 en λ_2 van ϕ bepalen. Een vector

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

is een eigenvector van ϕ bij λ_1 (resp. λ_2) als $\phi(x) = x$ (resp. $\phi(x) = 2x$), oftewel (ga na!) als

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}).$$

Het linker stelsel levert de oplossingen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

en het rechter stelsel:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \nu_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}).$$

We kennen nu alle eigenvectoren van ϕ. Nu moeten we een orthonormale basis $[b_1,b_2,b_3]$ in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ van eigenvectoren kiezen. Hiertoe gaan we allereerst een in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ orthogonaal 3-tupel $[c_1,c_2,c_3]$ van eigenvectoren kiezen. Met de definities

$$b_i = \frac{1}{\|c_i\|}c_i \qquad (i = 1,2,3)$$

krijgen we dan het verlangde 3-tupel $[b_1,b_2,b_3]$ (ga na!).

Volgens V.3.51 is elke eigenvector bij λ_1 in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ orthogonaal met elke eigenvector bij λ_2. Als we dus een in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ orthogonaal 2-tupel $[c_2,c_3]$ van eigenvectoren bij λ_2 kiezen en een willekeurige eigenvector $c_1 \neq 0$ bij λ_1, dan is het 3-tupel $[c_1,c_2,c_3]$ orthogonaal in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$. Kies als eigenvector c_1 bij λ_1 bijvoorbeeld:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kies vervolgens een eigenvector c_2 bij λ_2, bijvoorbeeld:

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zij

$$c_3 = \nu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

een tweede eigenvector bij λ_2.

Zij $<\ >$ het inwendig product in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$. Opdat het 2-tupel $[c_2,c_3]$ orthogonaal zij in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$, moet dan gelden:

$$<c_2,c_3> = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \nu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > = 6\nu_1 + 6\nu_2 = 0.$$

Kies bijvoorbeeld: $\nu_1 = 1$ en $\nu_2 = -1$. Dit levert:

$$c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We hebben nu de verlangde in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ orthogonale basis

$$[c_1,c_2,c_3] = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

van eigenvectoren van ϕ. Omdat

$$\|c_1\| = \sqrt{2} \quad ; \quad \|c_2\| = \sqrt{6} \quad ; \quad \|c_3\| = \sqrt{3}$$

krijgen we als in $(\mathbb{R}_3, [e_1,e_2,e_3])$ orthonormale basis van eigenvectoren van ϕ:

$$[b_1,b_2,b_3] = [\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}].$$

Omdat

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3} = (\mathbb{R}_3, [b_1,b_2,b_3]) \overset{S}{\rightarrow} (\mathbb{R}_3, [e_2,e_2,e_3])$$

vinden we hieruit (ga na!):

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

De lezer controlere dat

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V.3.53 Beschouw een $\mathbb{R}$-vectorruimte V met basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij $\langle\ \rangle$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. We hebben gezien dat geldt:

(i) $\langle\ \rangle$ is een symmetrische bilineaire functie op $\mathbb{R}$;

(ii) voor elke $a \in V$ is $\langle a,a\rangle \geq 0$;

(iii) $\langle a,a\rangle = 0$ dan en slechts dan als $a = 0$.

We definiëren nu algemeen, analoog aan (ii) en (iii) hierboven:

V.3.54 Definitie: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte en zij

$$\phi : V \Pi V \rightarrow \mathbb{R}$$

een bilineaire functie op V. ϕ heet positief definiet als geldt:

(i) voor elke $a \in V$ is $\phi(a,a) \quad 0$;

(ii) $\phi(a,a) = 0$ dan en slechts dan als $a = 0$.

V.3.55 Opmerking: Is V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met basis $[a_1,\ldots, a_n]$, dan is het inwendig product $\langle\ \rangle$ in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ een positief definiet symmetrische bilineaire functie op V.

Bewijs: cf. V.3.53. □

We kunnen de vorige opmerking ook omdraaien:

V.3.56 Stelling: Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte. Zij

$$\phi : V \Pi V \to \mathbb{R}$$

een positief definiete symmetrische bilineaire functie op V. Dan bestaat er een basis $[b_1,\ldots, b_n]$ voor V zodat ϕ het inwendig product is in $(V, [b_1,\ldots, b_n])$.

Bewijs: Zij A de $(n \times n)$-matrix uit $\mathbb{R}$, gegeven door:

$$\phi = (V, [a_1,\ldots, a_n])\Pi(V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

Zij vervolgens $\psi : V \to V$ het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme van V zodat

$$\psi = (V, [a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (V, [a_1,\ldots, a_n]).$$

Omdat ϕ symmetrisch is, is A een symmetrische matrix. We kunnen dan een in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ orthonormale basis $[c_1,\ldots, c_n]$ van V kiezen die geheel uit eigenvectoren van ψ bestaat. Zeg:

$$\psi(c_i) = \lambda_i c_i \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Omdat ϕ positief definiet is, en elke $c_i \neq 0$, volgt:

$$\phi(c_i,c_i) > 0 \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

zodat we kunnen definiëren:

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{\phi(c_i,c_i)}}\, c_i \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Dan zijn ook $b_1,\ldots, b_n$ eigenvectoren van ψ en geldt:

$$\psi(b_i) = \lambda_i b_i \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

zoals gemakkelijk valt na te gaan.

Als π het inwendig product is in $(V, [b_1,\ldots, b_n])$ dan is het volgens V.3.13 voldoende om te laten zien dat voor elk tweetal indices $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ geldt:

$$\phi(b_i,b_j) = \pi(b_i,b_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j. \end{cases}$$

Welnu, zij $<\ >$ het inwendig product in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$. Dan geldt:

(i) als $i \neq j$:

$$\phi(b_i,b_j) = <b_i,\psi(b_j)> = <b_i,\lambda_j b_j> = \lambda_j<b_i,b_j> =$$
$$= \lambda_j <\frac{1}{\sqrt{\phi(c_i,c_i)}}\, c_i, \frac{1}{\sqrt{\phi(c_j,c_j)}}\, c_j> = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\phi(c_i,c_i)\phi(c_j,c_j)}} <c_i,c_j>.$$

Omdat $[c_1,\ldots, c_n]$ orthonormaal is in $(V, [a_1,\ldots, a_n])$ is $<c_i,c_j> = 0$, zodat $\phi(b_i,b_j) = 0$ als $i \neq j$.

(ii)

$$\phi(b_i,b_i) = <b_i,\psi(b_i)> = \lambda_i<b_i,b_i> = \frac{\lambda_i}{\phi(c_i,c_i)} <c_i,c_i> =$$
$$= \frac{1}{\phi(c_i,c_i)} <c_i,\lambda_i c_i> = \frac{1}{\phi(c_i,c_i)} <c_i,\psi(c_i)> = \frac{1}{\phi(c_i,c_i)} \phi(c_i,c_i) = 1.$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

V.3.57 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de bilineaire functie ϕ op $\mathbb{R}_3$, gegeven door:

$$\phi(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}) = \tfrac{3}{2}\alpha_1\beta_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_1\beta_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2\beta_1 + \tfrac{3}{2}\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3.$$

Ga na dat ϕ inderdaad bilineair en bovendien symmetrisch is. Wegens

$$\phi(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}) = \tfrac{3}{2}[(\alpha_1 + \tfrac{1}{3}\alpha_2)^2 + \tfrac{8}{9}\alpha_2^2] + 2\alpha_3^2$$

is ϕ ook positief definiet (ga na!). Voorts is, als

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi = (\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3])\Pi(\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} \mathbb{R}.$$

Zij vervolgens ψ het $\mathbb{R}$-lineair endomorphisme van $\mathbb{R}_3$, gegeven door:

$$\psi = (\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3]).$$

Dan weten we uit voorbeeld V.3.52 dat $[c_1,c_2,c_3]$ met

$$c_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad c_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \quad ; \quad c_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

een orthonormale basis in $(\mathbb{R}_3,\ [e_1,e_2,e_3])$ is, die geheel bestaat uit eigenvectoren van ψ. Nu is

$$\phi(c_1,c_1) = 1 \quad ; \quad \phi(c_2,c_2) = 2 \quad ; \quad \phi(c_3,c_3) = 2 \ ,$$

zodat we (de notatie uit V.3.57 volgend) als basis $[b_1,b_2,b_3]$ verkrijgen:

$$b_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad b_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

(waarbij b_1,b_2 en b_3 gedefinieerd waren door:

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{\phi(c_i,c_i)}}\, c_i \qquad\qquad (i = 1,2,3)).$$

Dus ϕ is het inwendig product in $(\mathbb{R}_3,\ [b_1,b_2,b_3])$. Kies bijvoorbeeld:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Dan vinden we enerzijds

$$\phi(a,b) = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 = 4.$$

Wegens

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3,\ [b_1,b_2,b_3])$$

en

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3,\ [b_1,b_2,b_3])$$

vinden we anderzijds dat het inwendig product van a en b in $(\mathbb{R}_3,\ [b_1,b_2,b_3])$ is:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3} + 0\cdot(-\frac{1}{3}\sqrt{6}) = 4.$$

* * *

Lijst van symbolen *)

* * *

*) Zie ook Deel 1, blz.

Index *)

*) Zie ook Deel 1, blz.

* * *

Literatuur

[1] Beaumont, R.A., *Linear algebra*, Harcourt, Bruce & World, New York etc., 1965.

[2] Bor, J.F.H., *Vraagstukken over lineaire algebra,* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1965.

[3] Bronson, R., *Matrix methods; an introduction,* Academic Press, New York etc., 1969.

[4] Lang, S., *Linear algebra,* Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1966.

[5] Lipschutz, S., *Theory and problems of linear algebra,* McGraw-Hill, New York etc., 1968.

[6] Mostow, G.D. & J.H. Sampson, *Linear algebra,* McGraw-Hill, New York etc., 1969.

[7] Noble, B., *Applied linear algebra,* Prentice-Hall, New Jersey, 1969.

[8] Rootselaar, B. van, *Lineaire algebra,* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

[9] School Mathematics Project, *Linear algebra and geometry,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.

[10] Steggerda, B.W. e.a., *Vraagstukken over analytische meetkunde en lineaire algebra,* Delftse Uitgeversmaatschappij, Delft, 1958.

OVERIGE UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005.

MCS 1.1 F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, *Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis*, 1965.

MCS 1.2 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening*, 1965.

MCS 1.3 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek*, 1966.

MCS 1.4 G. DE LEVE & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketen, en wachttijden*, 1966

MCS 1.5 G. DE LEVE & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde*, 1966.

MCS 1.6a B. DORHOUT & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1*, 1968.

MCS 1.7a G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1*, 1968.

MCS 1.7b G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2*, 1970.

MCS 1.7c G. De LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, 1971.

MCS 1.8 J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*, 1968.

MCS 2.1 G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*, 1967.

MCS 2.2 L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*, 1968.

MCS 3.1 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 1*, 1967.

MCS 3.2 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 2*, 1968.

MCS 3.3 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 3*, 1968.

MCS 4 H.A. LAUWERIER, *Representaties van groepen*, 1968.

MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL, P.C. BAAYEN, *Colloquium discrete wiskunde*, 1968.

MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969.

MCS 7.1 *Collequium moderne rekenmachines, deel 1*, 1969.

MCS 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*, 1969.

MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969.

MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1969.

MCS 9.2 W.P. VAN DE BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELLAERE, *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.

MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970.

MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.

MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971.

MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971.

MCS 14 H. BAVINK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium approximatie-theorie*, 1971.

MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972.

MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973.

* MCS 15.3 P.A. BEENTJES e.a., *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*.

MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973.

MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973.

MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974.

MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974.

MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE JONG, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974.

MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J. TH. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974.

* MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLACHT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.