Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

MATHEMATICAL CENTRE TRACTS 84

H.L.L. BUSARD

THE TRANSLATION OF THE ELEMENTS OF EUCLID FROM THE ARABIC INTO LATIN BY HERMANN OF CARINTHIA(?) BOOKS VII-XII

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1977

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 01 A 20, 10 A 75

ISBN 90 6196 148 3

ACKNOWLEDGEMENTS

I thank the Mathematical Centre for the opportunity to publish this monograph in their series Mathematical Centre Tracts and all those at the Mathematical Centre who have contributed to its technical realization.

THE TRANSLATION OF THE ELEMENTS OF EUCLID FROM THE ARABIC INTO LATIN BY HERMANN OF CARINTHIA (?) BOOKS VII-XII

BY

H.L.L.BUSARD

In 1968 I published the first six books of this translation (1). Now I finish the work by publishing the books VII-XII (2), for the single extant copy of this translation does not contain the books XIII-XV. After finishing the first six books I concluded:

1. The manuscript Paris, Bibl.Nat.Latin 16646, written in the 13th century, is a copy of a translation from the Arabic, and Hermann of Carinthia is the probable author, though it is not quite sure.
2. Campanus did not use this translation.
3. In my opinion Hermann took his version from the so-called Isḥāq-Ṯābit text rather than from the al-Ḥaǧǧāǧ text, because Hermann does not refer to earlier propositions, does not illustrate the proofs by numerical examples, does not explain the definitions and on the whole his proofs are shorter.

Now, after finishing the work I maintain the conclusions 1 and 2. As I could not find any indication about the translator, I can only repeat the suggestion of A. Birkenmajer (3), that this manuscript,

---

(1) H.L.L.Busard, The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?), Leiden 1968.

(2) I have already published the books VII-IX in Janus 59 (1972), 125-187.

(3) A.Birkenmajer, Bibljoteka Ryszarda de Fournival. In: Rozprawy of the Cracow Academy 60, No.4 (1922), 49-52.

which was left by Gerard d'Abbeville to the Sorbonne in his legacy of 1271, is identical with item 37 of the Biblionomia composed by Richard de Fournival at Amiens some time close to 1246. This item runs as follows: 37. Euclidis geometria, arithmetica et stereometria ex commentario Hermanni Secundi. In uno volumine cuius signum est littera D.

The two separate Arabic redactions of the Elements from which the twelfth-century translators Adelard of Bath, Hermann of Carinthia and Gerard of Cremona worked, were prepared by al-Ḥaǧǧāǧ and Isḥāq ibn Ḥunayn. According to the Fihrist al-Ḥaǧǧāǧ translated the Elements twice: the first translation was known as "Hārūni", the second bore the name "Ma'mūni". None Arabic manuscript is known of the first version, six books of the second version survive in a Leiden MS (4). The translation of Isḥāq was revised by Ṯābit ibn Qurra. Although no copies of Isḥāq's initial version appear to have survived, we do possess a number of manuscripts of the Isḥāq-Ṯābit recension (5).

The question now arising is: Upon which of these Arabic editions were the Latin translations based?
M.Clagett (6) revealed that one had reliable evidence to ascribe not just one, but three, quite distinct, versions of the Elements to Adelard of Bath. The first of these - Adelard I - seems clearly to be a translation of an Arabic original. Yet, consideration of the number of extant manuscripts of Adelard I and of the quotations

---

(4) R.O.Besthorn, J.L.Heiberg, W.Thomson, G.Junge and J.Raeder, Codex Leidensis 399.1 Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii, Kopenhagen 1893-1932.

(5) See for these manuscripts F.Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, Vol. V (Leiden 1974), 104.

(6) M.Clagett, The Medieval Latin Translations From the Arabic of the Elements of Euclid. In: Isis 44 (1953), 16-42.

made by medieval authors of the Euclid they were employing, clearly indicates that this most literal of the Alardian versions was not the Elements most frequently used. The "standard" medieval Euclid up to the time of Campanus appears rather to have been Adelard II which also might be considered as a translation of some Arabic progenitor. For this assumption I can give some reasons: The most important is the frequent use in the books XI and XII of the words alif (the first letter of the Arabic alphabet), gim (ǧīm) and del (dāl) marking the points A, G and D, which do not occur with Adelard I. Also the following Arabicisms not present in Adelard I: thulthein (VII.8); elkalb leiunken (IX.11); gemea (X.105); elfadhel (XI.16); burrahunu (XII.15); filhewe (XIII.13 and XV.2); Wa delicah me aradene en nubeienne (XIII.7) and al-burhan (XIV.8), point to the same. Moreover, one characteristic of the al-Ḥaǧǧāǧ II version as we have today, is the careful references to earlier propositions when their results are used. Hermann and Adelard I lack these references, but Adelard II does not, sometimes the proofs of Adelard II exist only of references to earlier propositions. The same is valid for the arithmetical examples with which Adelard II illustrates the proofs of X.17 and 105. In X.17 Adelard gives an example of two rational straight lines commensurable in square only and in such a way that the square on the greater is greater than the square on the smaller by the square on a straight line incommensurable in length with the greater. For the greater Adelard chose a line of five feet, for the smaller a line of $\sqrt{15}$ feet. The same example is given by Muḥammad ibn ʿAbd al-Bāqī (1050-1141) in his commentary on book X (7). Another striking difference between them is, that Adelard I, Hermann and Gerard give the porisms at the end of the proofs, whereas with Adelard II and Cam-

(7) M.Curtze, Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii, Leipzig (1899), 301.

panus they are contained in the enunciations (8). To illustrate the differences between Adelard I and II I will give an example:

Adelard I	Adelard II
X.62 Omnis linea communicans linee maiori erit item maior.	X.60 Omnis linea communicans linee maiori: est linea maior.
Exempli gratia: Sit linea maior a lineaque b communicans linee a. Dico itaque quia b item linea maior. Rationis causa: Sit enim linea g d rationalis posita adiungaturque ad g d superficies d h equalis quadrato ex a superficiesque z n equalis quadrato ex b, linea itaque a maior atqui g d rationalis, at vero d h equalis quadrato ex a quare g h binomium quartum atqui a communicans b, quadratum ergo ex a communicans quadrato ex b, erant autem g z et z n equalia duobus quadratis ex a et b. Quare g z communicans z n et g h communicans h n atqui g h binomium quartum, quare h n binomium quartum atqui h z rationalis, linea itaque potens super superficiem z n maior, est quod linea b, est igitur linea b maior. Et hoc est quod demonstrare intendimus.	Verbi gratia: Sit linea maior a lineaque b ei commensurabilis. Dico itaque quia b quoque est linea maior. Sit enim linea g d rationalis, sitque superficies d h equalis quadrato linee a, superficies vero z n equalis quadrato linee b. Erit igitur ex LV^{a} g h binomium quartum. Erit quoque ex premissis propositionibus et ex hac propositione per se nota: que linee actu communicant et potentia, et ex I^{a} sexti et LVIII^{a} presentis linea n h binomium quartum. Linea igitur b que erat potens in superficiem z n erit ex $\mathrm{XLVIIII}^{a}$ linea maior. Quod oportebat ostendere.
X.63 Omnis linea communicans linee	X.61 Si qua linea potenti in

(8) See for an explanation of this phenomenon H.L.L.Busard, Über die Überlieferung der Elemente Euklids über die Länder des Nahen Ostens nach West-Europa. In: Historia Mathematica 3 (1976), 279-290.

potenti supra rationale et mediatum item erit supra rationale et mediatum.

Exempli gratia: Sit linea a potens supra rationale et mediatum lineaque b communicans linee a, dico itaque quia linea b potest item supra rationale et mediatum.
Rationis causa: Linea enim a potens supra rationale et mediatum et g d rationalis atque d h sicut quadratum ex a. Itaque g h binomium quintum, communicat autem linee h n. Quare h n binomium quintum, atqui z h rationalis, linea ergo potens super z n est linea potens supra rationale et mediatum estque b, erit igitur linea b potens supra rationale et mediatum. Et hoc est quod demonstrare intendimus.

rationale et mediale linee communicet: ipsa quoque in rationale et mediale posse probatur.

Manente eodem scemate et dispositione premissa ad hanc propositionem reflexa ex LVI^{a} et LVIII^{a} et L^{a} predicto modo argumentationem contexe.

X.64 Omnis linea communicans linee potenti supra duo mediata erit item potens supra duo mediata.

Exempli gratia: Sit linea a potens supra duo mediata lineaque b communicat linee a, dico itaque quia b potens supra duo mediata.
Rationis causa: Sit enim tedebir idem, patet itaque quia g h binomium sextum, est autem communicans linee h n. Quare h n binomium sextum atqui z h rationalis, linea igitur potens supra z n potest etiam supra duo mediata. Et hoc est quod demonstrare intendimus.

X.62 Omnis linea potenti in duo medialia communicans : est ipsa quoque in duo medialia potens.

Manente hic quoque eodem scemate et dispositione sicut predixi ex LVII^{a} et LVIII^{a} et LI^{a} predicto modo argumentaberis.

Consequently, my conclusion is, that Adelard I goes back to an al-Ḥaǧǧāǧ I and Adelard II to an al-Ḥaǧǧāǧ II version. In my above-mentioned article I have pointed out that Hermann lacks the propositions characteristic of the Isḥāq-Ṯābit version viz. I.45; VI.12; VIII.25 and 26; X.27 and 28. On the other hand, Hermann includes VIII.16 missing in the Arabic MSS Thurston 11 and Escorial 907, and he contracts the propositions VIII.11 and 12 into one proposition. At the end of book VIII Gerard says about this (also not present in the Arabic MSS Thurston 11 and Escurial 907): Quoniam in alio libro repperi quod dicitur in XI et XII theorematibus in uno tantum theoremate contineri ne aliquid nobis deesset curam hic ipsum theorema ponere. As Adelard I and II also have contracted these propositions and the proof given by Gerard is in full agreement with that of Adelard I, we must assume, that Gerard had found the proof with al-Ḥaǧǧāǧ I. If we now compare the translation of Hermann with Adelard's, we must conclude, that his translation is much more similar to Adelard I than to Adelard II, so Hermann also goes back to an al-Ḥaǧǧāǧ I version (9). For the filiation of Adelard I and Hermann J.E.Murdoch (10) has given some reasons:

1. Among all Latin versions, they alone carry the full six separate cases for III.35. This assertion is not entirely correct, because also Gerard in his first proof gives six cases. Very probably it is the proof of al-Ḥaǧǧāǧ I.

2. In a series of propositions (V.20-23) dealing with proportion, the Greek Euclid specifies only one (V.22) for "any number of magnitudes whatever", the others being stated merely for three magnitudes. Now all versions except Adelard I and Hermann, including Adelard II and al-Ḥaǧǧāǧ II, adopt the policy of stating

---

(9) For the relation between Adelard I and the Syriac fragment of book I published by G. Furlani see my article cited in (8).

(10) J.E.Murdoch, Euclid: Transmission of the Elements. In: Dictionary of Scientific Biography, Vol.IV (1971), 447.

all four propositions in general form. Hermann and Adelard I retain the "three magnitudes" version of the Greek for V.20, 21 and 23, but also substitute tres for quotlibet in V.22.
The translation of Gerard of Cremona contains the propositions characteristic of Isḥāq-T̲ābit, but this does not mean, that the translation contains an Isḥāq- T̲ābit version in its pure form. I have already indicated that his first proof of III.35 agrees with that of Adelard I and the same is valid for his first proofs of III.33, 36, 37; IV. 5, 8 and 15. Also the second proofs of X.68-70 agree with those of Adelard I (11), so I must assume that Ge-

---

(11) Compare the proofs of Gerard with those of Adelard I abovementioned: X.65 Invenitur etiam huius theorematis aliud exemplum et alia probatio et alia figura hoc modo:
Exempli causa: Sit linea maior a et sit linea b communicans ei, dico igitur quod etiam b est maior.
Probatio eius: Quoniam linea g d sit data rationalis et adiungatur ad g d superficies d e equalis quadrato linee a et superficies z h equalis quadrato linee b. Et quia linea a est maior et g d est rationalis et d e est equalis quadrato a, ergo linea g e est binomium quartum. Sed a communicat b ergo quadratum a communicat quadrato b. Sed g z et z h sunt equales duobus quadratis a et b, ergo g z communicat z h. Et g e communicat e h. Sed g e est binomium quartum, ergo e h est binomium quartum. Sed z e est rationalis, ergo linea potens super superficiem z h est maior. Sed b potest super eam, ergo linea b est maior. Et illud est quod demonstrare voluimus.

X.66 Huius quoque theorematis invenitur aliud exemplum et alia probatio et alia figura hoc modo:
Exempli causa: Sit linea a potens super rationale et mediale et linea b communicans linee a, dico igitur quod etiam linea b potest super rationale et mediale.
Probatio eius: Ut sit dispositio eius sicut est dispositio eius

rard or his Arabic progenitor has used both an al-Ḥaǧǧāǧ I and an Isḥāq-Ṯābit version. About the propositions IX.30 and 31 contained in all Latin translations (except Adelard I (?), from whom we do not possess book IX) we read with Gerard: Figuram que invenitur tricesima et figuram que est tricesima prima non inveni in aliqua ex scripturis grecis que reperiatur, sed inveni eas in libro arabico (12). This remark of Ṯābit refers very likely to an al-Ḥaǧǧāǧ I version. I have already pointed out, that Campanus of Novara like Adelard II had inserted the porisms into his enunciations, but not only that, he also adopted, mostly verbatim, the enunciations from Adelard II. Campanus is argueing twice against Adelard viz. in VII.12 annotatio, when he says: Volunt autem quidam secundam partem huius probare per 19 quinti; and in VIII.5 annotatio: nec est necessarium ut continuemus proportiones laterum (videlicet eam

---

que est ante eam, ergo a potest super rationale et mediale et g d est rationalis et d e est equalis quadrato a et g e est binomium quintum et ipsa est communicans e h. Ergo e h est binomium quintum. Sed z e est rationalis et linea que potest super z h est linea potens super rationale et mediale. Sed b potest super eam, ergo linea b potest super rationale et mediale. Et illud est quod demonstrare voluimus.

X.67 Hoc quoque theorema aliter probatur hoc modo scilicet: Exempli gratia: Sit linea a potens super duo medialia et linea b communicet linee a, dico igitur quod b potest super duo medialia.
Probatio eius: Ut sit dispositio eius sicut dispositio eius que est ante ipsam. Et similiter ostendam quod e h est binomium sextum et z e est rationalis. Ergo linea potens super z h est potens super duo medialia. Et illud est quod demonstrare voluimus.

(12) See for the Arabic text M. Klamroth, Über den arabischen Euklid. In: Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft 35 (1881), 279.

quae est *c* ad *e* est eam quae est *d* ad *f*) in minimis numeris repertis secundum doctrinam praecedentis: ut docent quidam. To the *quidam* as mentioned by Campanus, belongs no doubt Adelard, for the proofs of the propositions given by Campanus agree with those of the propositions II.5 and V.9 by Jordanus Nemorarius in his Arithmetica. Moreover, as to the proof of VII.12 Adelard refers to V.19. Campanus gives the proof of Adelard of VIII.5 in an *annotatio*. Normally, Campanus gives the proofs of Jordanus in his *annotationes*, e.g. the proof of Jordanus I.8 in VII.17 *annotatio*; of Jordanus II.26 in VII.20 *annotatio*; and of Jordanus IV.26 in IX.13 *aliter idem*. Prop. VII.34 of Campanus is contained in VII.33 of Adelard, but both proposition and porism of VII.34 and 35 of Campanus and their proofs Jordanus gives in III.23 and 24. The *additio* of Campanus to VII.1 agrees with Jordanus III.15, and the proof of Campanus IX.16 agrees with Jordanus IV.19 whereas the proof of Adelard of the same proposition (= Adelard IX.15) is contained in the *additiones* of Campanus. The enunciation of Campanus VII.3 is different from that of Jordanus III.17, because Campanus is speaking of *tres numeri* and Jordanus of *quotlibet*. In his addition to this proposition Campanus remarks that the same is also valid for more than three numbers. Moreover, the second part of Campanus' proof agrees with the proof of Jordanus and is different from the very succinct proof of Adelard (13).

In Table II I will give the propositions of the books VII-IX of Campanus with the corresponding ones of the Arithmetica of Jordanus, which does not mean that they are always in full agreement with another neither in the enunciations nor in the proofs. In case I did not find the proposition with Jordanus, I filled up the corresponding one of Adelard or Hermann. Therefore, the blank spaces which I leave, mean that I did not find a corresponding proposi-

---

(13) See about the relation between the Arithmetica of Jordanus Nemorarius and the Euclid-Edition of Campanus my article cited in (2).

tion with Adelard, Hermann or Jordanus.

As to the edition I will remark:

1. A peculiarity of the translator Hermann is that he used words which we do not meet elsewhere: in book II umbo instead of gnomon; in book X mutus instead of irrationalis, this word is the translation of ġair manṭiq which approximates the Greek word ἄλογος much more than the usual word aṣamm translated by Adelard with surdus; in XI.28 Hermann speaks of al-manxor (= al-manṣūr) which means prism. In Def.7 Hermann calls it corpus per diametron sectum and in XI.41 sectile instead of the usual serratile. It is this last term which he used mostly; also in book XI Hermann translated the word maḫrūṭ mustadīrat with piramis teres instead of piramis rotunda.
2. The proof of XI.37 agrees neither with the Greek one nor with the Adelard-Campanus ones. In the beginning of the proof Hermann does not take a point on the two elevated straight lines, but on one of the sides of the two equal plane angles. As the proof is very confused I suppose that there was something wrong with the manuscript which the copyist used.
3. In XI.39 we find the usual Arabic proof. It is the alternative proof found in the Greek MS numbered 18-19 of the Communal Library at Bologna which Heiberg calls b. From XI.38 (= Heiberg XI.36) inclusive to the end of book XII this manuscript appears to represent an entirely different recension (14). The same is also valid for the proof of XII.6: Any prism which has a triangular base is divided into three pyramids equal to one another which have triangular bases (15).

---

(14) T.L.Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, Dover Publ., Vol.3, p.359 and Vol. 1, p.49.

(15) T.L.Heath (14), Vol.3, p.395. See also J.L.Heiberg, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik, 29.Jahrgang (1884),6-14; C. Thaer, Euklid Die Elemente, Darmstadt (1962),470, and for the Arabic text M.Klamroth (12), 316.

4. The enunciation of XII.13: Given two circles about the same centre, to inscribe in the greater circle an equilateral polygon with an even number of sides which does not touch the lesser circle, is not correct, because Hermann, Adelard and Campanus left out the words "with an even number of sides", although the proof agrees with the Greek one and holds only good for an equilateral polygon with an even number of sides.
5. The following Arabic transliterations are to be found in book X, viz. in X.28 dulithmein for binomial and in X.29 dulmonsithatein al awwalein for first bimedial.

For a good understanding of the text of book X I will give a succinct survey of the contents.
The book opens with four definitions:

1. Those magnitudes are said to be commensurable which are measured by the same measure ($A \sigma B$), and those incommensurable which cannot have any common measure (A a B).
2. Straight lines are commensurable in square when the squares on them are measured by the same area ($A \delta\sigma B$), and incommensurable in square when the squares on them cannot possibly have any area as a common measure ($A \delta\alpha B$).
3. With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively, some in lenght only, and others in square also, with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, whether in lenght and in square or in square only, rational, but those which are incommensurable with it irrational.
4. And let the square on the assigned straight line be called rational and those areas which are commensurable with it rational, but those which are incommensurable with it irrational, and the straight lines which produce them irrational, that is, in case the areas are squares, the sides themselves, but in case they are any other rectilineal figures, the straight lines on which are described squares equal to them (16).

---

(16) T.L.Heath (14), Vol.3, p.10

In X.18 a medial straight line is defined: it is a mean proportional between two rational straight lines commensurable in square only ($\Gamma^2 = A.B$ with $A\,\delta\sigma\,B$). The area equal to the square of a medial straight line is a medial area.

The first hexad of propositions relating to compound irrational straight lines is given in X.28-33. The six compound irrational straight lines are formed by adding two parts, as the corresponding six in X.66-71 are formed by subtraction.

X.28: binomial $A + B$; A and B rational and $A\,\delta\sigma\,B$.

X.66: apotome $A - B$; A and B rational and $A\,\delta\sigma\,B$.

X.29: first bimedial $A + B$; A and B medial, $A\,\delta\sigma\,B$ containing a rational rectangle.

X.67: first apotome $A - B$; A and B medial, $A\,\delta\sigma\,B$ containing a rational rectangle.

X.30: second bimedial $A + B$; A and B medial, $A\,\delta\sigma\,B$ containing a medial rectangle.

X.68: second apotome $A - B$; A and B medial, $A\,\delta\sigma\,B$ containing a medial rectangle.

X.31 major $A + B$; $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ rational, $A.B$ medial.

X.69 minor $A - B$; $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ rational, $A.B$ medial.

X.32 "Side" of a rational plus a medial area $A + B$, $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ medial, $A.B$ rational.

X.70 Producing with a rational area a medial whole $A - B$, $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ medial, $A.B$ rational.

X.33 "Side" of the sum of two medial areas $A + B$, $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ medial, $A.B$ medial incommensurable with $A^2 + B^2$.

X.71 Producing with a medial area a medial whole $A - B$, $A\,\delta\alpha\,B$, $A^2 + B^2$ medial, $A.B$ medial incommensurable with $A^2 + B^2$.

In the definitions II resp. III the irrationals binomial resp. apotome have been classified according the behaviour of their terms with respect to a rational straight line P. In X.42-47 the square on the greater term A of the binomial is greater than the square on the smaller B by the square on a straight line Γ, in X.80-85 the square on the whole A is greater than the square on the annex B by the square on a straight line Γ.

We can have now:

a. $\Gamma \ \sigma \ A$

X.42, 80	A σ P: first binomial; first apotome.
X.43, 81	B σ P: second binomial; second apotome.
X.44, 82	A a P and B a P: third binomial; third apotome.

b. Γ a A

X.45, 83	A σ P: fourth binomial; fourth apotome.
X.46, 84	B σ P: fifth binomial; fifth apotome.
X.47, 85	A a P and B a P: sixth binomial; sixth apotome.

The relation between the six irrational straight lines in X.28 - 33 resp. X.66-71 with those described in X.42-47 resp. X.80-85 is formed in X.48-53 resp. X.86-91. In the hexad X.54-59 resp. 92-97 we have the solution of the converse problem of that of X.48 - 53 resp. X.86-91. We find the squares of the irrational straight lines of X.28-33 resp. X.66-71 and prove that they are respectively equal to the rectangles contained by a rational straight line and the first, second, third, fourth, fifth and sixth binomial, resp. apotome.

Finally, I compare in Table I the definitions and propositions of the Greek edition of Heiberg with those of Adelard II, Hermann, Gerard of Cremona and Campanus (17).

---

(17) See also my article cited in (2).

Table I

HEIBERG	ADELARD II	HERMANN	GERARD	CAMPANUS
Book X	Book X	Book X	Book X	Book X
Def. 1-4	Def. 1-4	Def. 1-4	Def.1-4	Def. 1-4
Prop. 1-6	Prop. 1-6	Prop. 1-6	Prop. 1-6	Prop. 1-6
Prop. 7-8	___	___	___	___
Prop. 9	Prop. 7	Prop. 7	Prop. 7	Prop. 7
Prop. 12	Prop. 8	Prop. 8	Prop. 10	Prop. 8
Prop. 15	Prop. 9	Prop. 9	Prop. 11	Prop. 9
Prop. 11	Prop. 10	Prop. 10	Prop. 8	Prop. 10
Prop. 10	Prop. 11	Prop. 11	Prop. 9	Prop. 11
Prop. 13	___	___	___	Prop.8 add.
Prop. 14	Prop. 12	Prop. 12	Prop. 12	Prop. 12
Prop. 16	___	___	___	Prop.9 add.
Prop. 17-20	Prop. 13-16	Prop. 13-16	Prop. 13-16	Prop. 13-16
Prop. 29	Prop.17 pars 1^{a}	___	Prop. 24	Prop. 17
Prop. 30	Prop.17 pars 2^{a}	Prop. 17	Prop. 25	Prop. 18
Prop. 21-23	Prop. 18-20	Prop. 18-20	Prop. 17-19	Prop. 19-21
Prop. 24	___	___	___	Prop.23 add.
Prop. 26	Prop. 21	Prop. 21	Prop. 20	Prop. 22
Prop. 25	Prop. 22	Prop. 22	Prop. 23	Prop. 23
Prop. 27-28	___	___	Prop. 21-22	___
Prop. 31	Prop. 23	Prop. 23	Prop. 26	Prop. 24
___	Prop.24 pars 1^{a}	___	Prop. 27	Prop. 25
Prop. 32	___	___	Prop. 28	___
___	Prop.24 pars 2^{a}	Prop. 24	Prop. 29	Prop. 26
Prop. 33-41	Prop.25-33	Prop. 25-33	Prop. 30-38	Prop. 27-35
___	___	___	___	Prop.36,prec. 1-2
Prop. 42-47	Prop. 34-39	Prop. 34-39	Prop.39-44	Prop. 36-41
Def.1	Def. 1	Def.1	Def. 1	Def. 1
Def. 2	Def. 2	___	Def. 2	Def. 2
Def. 3-4	Def. 3-4	Def. 3-4	Def. 3-4	Def. 3-4
Def.5	Def. 5	___	Def. 5	Def. 5

HEIBERG	ADELARD II	HERMANN	GERARD	CAMPANUS
Def. 6	Def. 6	Def.6	Def.6	Def.6
Prop. 48-72	Prop. 40-64	Prop. 40-64	Prop. 45-69	Prop.42-66
Explanation (18)	Prop. 65	Prop. 65	Prop.70(19)	Prop.67
Prop. 73-78	Prop. 66-71	Prop. 66-71	Prop. 71-76	Prop.68-73
___	___	___	___	Prop.74prec.1
Prop. 79-84	Prop. 72-77	Prop. 72-77	Prop. 77-82	Prop.74-79
Def. 1-6	Def. 1-6	Def. 1-6	Def. 1-6	Def. 1-6
Prop. 85-110	Prop. 78-103	Prop. 78-103	Prop.83-108	Prop.80-105
Prop. 111	Prop.104 + pars prima 105	Prop.104 + pars prima 105	Prop. 109	Prop.106 + pars prima 107
Prop. 112-114	___	___	___	___
Prop. 115	Prop. 105 pars 2^a	Prop. 105 pars 2^a	Prop. 109	Prop. 107 pars 2^a
Porism X.3	Porism X.3	Porism X.3	Porism X.3	Porism X.3
Porism X.4	___	___	___	___
Porism X.6	___	___	___	___
Porism X.9	___	___	___	___
Porism X.23	___	___	___	___
Book XI	Book XI	Book XI	Book XI	Book XI
Def.1-2	Def. 1	Def. 1	Def. 1	Def. 1
Def.3-4	Def. 2-3	Def. 2-3	Def. 2-3	Def. 2-3
Def.5-7	___	___	___	___
Def.8	Def. 4	Def. 4	Def. 4	Def. 4

---

(18) T.L.Heath (14), Vol.3, 157-158.

(19) Anaritius in his commentary on book X follows the numeration of the propositions of Gerard (See M.Curtze (7), 211), he also gives the propositions VIII.25 and 26 characteristic of Isḥāq-T̠ābit, so he was acquainted with the Isḥāq-T̠ābit edition. Therefore, it is very likely that he took over from this edition VI.12 which al-Ḥağğāğ, Adelard and Hermann do not contain.

HEIBERG	ADELARD II	HERMANN	GERARD	CAMPANUS
Def. 10	Def. 5	Def. 5	Def. 5	Def. 5
Def. 9	Def. 6	Def. 6	Def. 6	Def. 6
Def. 13-14	Def. 7-8	Def. 7-8	Def. 7-8	Def. 7-8
Def. 12	Def. 9	Def. 9	Def. 9	Def.9
Def. 15-17	—	—	—	—
Def. 18-20	Def. 10	Def. 10	Def. 10	Def. 10
Def. 21-23	Def. 11	Def. 11	Def. 11	Def. 11
Def. 11	Def. 12	Def. 12	Def. 12	Def. 12
Def. 24	Def. 13	Def. 13	Def. 13	Def. 13
Def. 25-28	—	—	—	—
Prop. 1-31	Prop. 1-31	Prop. 1-31	Prop. 1-31	Prop.1-31
Prop.31 pars 2[a]	Prop. 32	Prop. 32	Prop. 32	Prop. 32
Prop. 32	Prop. 33	Prop. 33	Prop. 33	Prop. 33
Prop. 34	Prop. 34	Prop. 34	Prop. 34	Prop. 34
Prop.34 pars 2[a]	Prop. 35	Prop. 35	Prop. 35	Prop. 35
Prop. 33	Prop. 36	Prop. 36	Prop. 36	Prop. 36
Prop. 35-39	Prop. 37-41	Prop. 37-41	Prop. 37-41	Prop.37-41
—	—	—	—	Prop.14 pars 2[a]
Porism XI.33	—	—	—	—
Porism XI.35	—	—	—	—
Book XII	Book XII	Book XII	Book XII	Book XII
Prop. 1-5	Prop. 1-5	Prop. 1-5	Prop. 1-5	Prop. 1-5
Prop. 6	—	—	—	Prop.6 add. 5[a]
Prop. 7	Prop. 6	Prop. 6	Prop. 6	Prop. 6
—	—	—	—	Prop. 6 add. 1[a] - 4[a]
Prop. 9	Prop. 7	Prop. 7	Prop. 7	Prop. 7
—	—	—	—	Prop.7 add. 1[a]
Prop. 8	Prop. 8	Prop. 8	Prop. 8	Prop. 8
—	—	—	—	Prop. 8 add. 1[a] - 5[a]

HEIBERG	ADELARD II	HERMANN	GERARD	CAMPANUS
Prop. 10	Prop. 9	Prop. 9	Prop. 9	Prop. 9
Prop. 12	Prop. 10	Prop. 10	Prop. 10	Prop. 10
—	—	—	—	Prop.10 add. 1^a
Prop. 11	Prop. 11	Prop. 11	Prop. 11	Prop. 11
Prop. 13	—	—	—	Prop.11 add. 1^a
Prop. 14	—	—	—	—
Prop. 15-18	Prop. 12-15	Prop. 12-15	Prop. 12-15	Prop. 12-15
Porism XII.7	—	—	—	—
Porism XII.8	—	—	—	—
Porism XII.17	Porism XII.14	Porism XII.14	Porism XII.14	Porism XII.14

Table II

CAMPANUS	JORDANUS	CAMPANUS	JORDANUS
VII. Def. 1	I. Def. 1	VII. Def. 21	II. Def. 9
VII. Def. 2	I. Def. 2	VII, Def. 22	
VII. Def. 3	I. Def. 3	VII, Def. 23	III. Def. 5
VII. Def. 4	I. Def. 4	VII. Pet. 1	I. Pet. 1
VII. Def. 5	III. Def. 1	VII. Pet. 2	I. Pet. 2
VII. Def. 6	III. Def. 2	VII. Pet. 3	I, Pet. 3
VII. Def. 7	III. Def. 4	VII. Pet. 4	I, Pet. 4
VII. Def. 8	III. Def. 3	VII. Comm.conc.1	I. Dign. 1
VII. Def. 9	I.Def.6 1^a pars	VII. Comm.conc.2	I, Dign. 3
VII. Def. 10	I.Def.6 2^a pars	VII. Comm.conc.3	I. Dign. 4
VII. Def. 11	I. Def. 7	VII. Comm.conc.4	I. Dign. 5
VII. Def. 12	I. Def. 8	VII. Comm.conc.5	I. Dign. 2
VII. Def. 13	I. Def. 9	VII. Comm.conc.6	I. Dign. 6
VII. Def. 14	I. Def. 10	VII, Comm.conc.7	I. Dign. 7
VII. Def. 15	I. Def. 12	VII. Comm.conc.8	
VII. Def. 16	I. Def. 13	VII. Comm.conc.9	
VII. Def. 17	II. Def. 2	VII, Comm.conc.10	I.12
VII. Def. 18	II. Def. 6	VII. 1	Adelard VII.1
VII. Def. 19	II. Def. 7	VII. 1 add.	III.15
VII. Def. 20	II. Def. 8	VII. 2	III.16

CAMPANUS	JORDANUS	CAMPANUS	JORDANUS
VII. 2 porism	III. 16	VII. 21 add. 1[a]	
VII. 3	III. 17	VII. 22	III. 18
VII. 3 add.	III. 17	VII. 22 add. 1[a]	
VII. 3 porism		VII. 22 add. 2[a]	
VII. 4	I. 1	VII. 23	III. 20
VII. 5	I. 4	VII. 24	III. 7
VII. 6	I. 5	VII. 25	III. 10
VII. 6 annot.	I. 6	VII. 26	III. 11
VII. 7	I. 21	VII. 27	III. 13
VII. 8	I. 22	VII. 28	III. 12
VII. 9	I. 27	VII. 29	III. 9
VII. 10	I. 28	VII. 29 annot.	
VII. 11		VII. 30	III. 2
VII. 12	II. 5	VII. 31	III. 3
VII. 12 annot.	Adelard VII.11	VII. 32	III. 1
VII. 13	II. 20	VII. 33	III. 4
VII. 14	II. 3	VII. 33 porism	III. 5
VII. 15	Adelard VII.14	VII. 34	III. 23
VII. 15 add.		VII. 34 porism	III. 23
VII. 15 add. 1[a]		VII. 34 add. 1[a]	Hermann VII.33
VII. 15 add. 2[a]	II. 6	VII. 34 add. 1[a] porism	
VII. 15 add. 3[a]			
VII. 15 add. 4[a]		VII. 35	III. 24
VII. 16	I. 7	VII. 35 porism	III. 24
VII. 17	Adelard VII.16	VII. 36	III. 25
VII. 17 annot.	I.8	VII. 36 porism	
VII. 18	II. 7	VII. 36 add.	
VII. 19	II. 8	VII. 36 add. 1[a]	Adelard VII. 34
VII. 19 annot.		VII. 36 add. 2[a]	Adelard VII. 35
VII. 19 add. 1[a]	II. 22	VII. 36 add. 3[a]	Adelard VII. 36
VII. 20	II. 25	VII. 37	Adelard VII. 37
VII. 20 annot.	II. 26	VII. 38	Adelard VII. 38
VII. 21	III. 19	VII. 39	III. 29

CAMPANUS	JORDANUS	CAMPANUS	JORDANUS
VII. 39 porism		VIII. 17	VI. 40
VII. 39 annot.		VIII. 18 pars 1^{a}	VI. 52
VII. 39 add. 1^{a}		VIII. 19	VI. 53
VII. 39 add. 2^{a}	Adelard VII.39	VIII. 20	VI. 10
VII. 39 add. 2^{a}		VIII. 21	VI. 11
annot.		VIII. 22	VI. 21
VIII. Def. 1	VI. Def. 1	VIII. 23	VI. 22
VIII. Def. 2	VI. Def. 2	VIII. 24	VI. 41
VIII. Def. 3	VI. Def. 3	VIII. 25	VI. 54
VIII. Def. 4	VI. Def. 4	IX. Def. 1	VII. Def. 1
VIII. Def. 5	VI. Def. 6	IX. Def. 2	VII. Def. 2
VIII. Def. 6	VI. Def. 7	IX. Def. 3	VII. Def. 3
VIII. 1	IV. 4	IX. Def. 4	VII. Def. 4
VIII. 2	IV. 6	IX. Def. 5	VII. Def. 5
VIII. 2 porism	VI. 1 + 2	IX. Def. 6	Adelard VII. Def.8
VIII. 3	IV. 5	IX. Def. 7	VII. Def. 8
VIII. 4	Adelard VIII.4	IX. Def. 8	VII. Def. 9
VIII. 5	V. 9	IX. Def. 9	VII. Def. 10
VIII. 5 annot.	Adelard VIII.5	IX. 1	VI. 43
VIII. 6	IV. 13 pars 1^{a}	IX. 2	VI. 44
VIII. 7	IV. 13 pars 2^{a}	IX. 2 porism	VI. 14
VIII. 8	Adelard VIII.8	IX. 3	Adelard IX.3
VIII. 8 annot.	IX. 61	IX. 4	VI. 16
VIII. 9	Adelard VIII. 9	IX. 5	Adelard IX. 5
VIII. 10	IV. 8	IX. 5 porism	VI. 17
VIII. 11	VI. 3 + 4	pars 1^{a}	
VIII. 12	VI. 5	IX. 6	Adelard IX. 6
VIII. 13	VI. 8	IX. 7	VI. 46
VIII. 14	VI. 9	IX. 8	VI. 28
VIII.15 pars 1^{a}	VI.19 pars 2^{a}	IX. 9	VI. 29
VIII.15 annot.	VI.20 pars 2^{a}	IX. 10	Adelard IX. 10
pars 1^{a}		IX. 11	IV. 27
VIII.16 pars 1^{a}	VI. 39	IX. 12	IV. 25

CAMPANUS	JORDANUS	CAMPANUS	JORDANUS
IX. 13	Adelard IX. 13	IX. 31	VII. 15
IX. 13 aliter idem	IV. 26	IX. 32	VII. 14
IX. 14	III. 28	IX. 33	VII. 16
IX. 15	IV. 18	IX. 34	VII. 17
IX. 16	IV. 19	IX. 35	VII. 29
IX. 16 add.	Adelard IX. 15	IX. 36	VII. 33
IX. 16 add. 1[a]	I. 9	IX. 37	VII. 37
IX. 16 add. 2[a]	I. 10	IX. 38	IV. 28
IX. 16 add. 3[a]	I. 11	IX. 39	VII. 60
IX. 16 add. 4[a]	I. 13		
IX. 16 add. 5[a]	I. 14		
IX. 16 add. 6[a]	I. 15		
IX. 16 add. 7[a]	I. 19		
IX. 16 add. 8[a]	I. 18		
IX. 16 add. 9[a]	I. 16		
IX. 16 add. 10[a]			
IX. 16 add. 11[a]			
IX. 16 add. 12[a]			
IX. 16 add. 13[a]			
IX. 17	IV. 21		
IX. 18	IV. 23		
IX. 19	II. 28		
IX. 20	II. 29		
IX. 21	III. 6		
IX. 22	VII. 1		
IX. 23	VII. 4		
IX. 24	VII. 5		
IX. 25	VII. 6		
IX. 26	VII. 7		
IX. 27	VII. 8		
IX. 28	VII. 9		
IX. 29	VII. 10		
IX. 30	VII. 11		

‹LIBER VII›

(Fol. 44^r) ‹ Definitiones › ‹ i › Unitas est qua dicitur omnis res una.

‹ ii › Numerus est multitudo ex unitatibus composita.

‹ iii › Par numerus est qui in duo equa dividitur.

‹ iv › Impar numerus est qui in duo equa dividi non potest additque supra parem (20) unitatem.

‹ v › Numerus pariter par est quem cuncti pares ‹ eum › numerantes paribus vicibus numerant.

‹ vi › Numerus pariter impar est quem cuncti pares ‹ eum › numerantes imparibus vicibus numerant.

‹ vii Numerus impariter par est quem cuncti impares eum numerantes imparibus vicibus numerant › .

‹ viii › Numerus primus dicitur qui sola unitate numeratur.

‹ ix › Numerus compositus dicitur quem numerus alius metitur.

‹ x › Numeri contra se primi dicuntur qui nullo numero excepta (21) sola unitate communiter numerantur.

‹ xi › Numeri ad invicem compositi dicuntur quos preter unitatem alius numerus eis communis numerat nullusque (22) eorum ad alium primus.

‹ xii › Numerus duci (23) in alium dicitur qui tociens eum multiplicat quociens in ipso est unitas.

‹ xiii › Productus vero dicitur qui ex eorum multiplicacione concrescit.

‹ xiv › Numerus quadratus dicitur qui ex ductu numeri in se ipsum producitur eumque duo numeri equales continent.

‹ xv › Numerus cubicus dicitur qui ex ductu numeri bis in se-

---

(20) parem] partem.

(21) excepta] accepto.

(22) nullusque] nulliusque.

(23) duci] dici.

metipsum producitur a tribus equalibus ‹ numeris › contentus.

‹ xvi › Numerus superficialis est qui a duobus numeris continetur.

‹ xvii › Numerus solidus est qui a tribus numeris continetur.

‹ xviii › Numerus perfectus est qui omnibus suis partibus quibus numeratur est equalis.

‹ xix › Numeri proporcionales sunt quorum primus in secundo tamquam tercius in quarto, aut tociens primus in secundo quociens tercius in quarto.

‹ xx › Numeri superficiales sive solidi similes sunt quorum latera proporcionalia.

‹ VII.1 › Omnium duorum inequalium numerorum si minor a maiore (fol.44^{v}) detrahatur donec minus eo supersit ac deinde ipsum reliquum de minore donec ipso minus relinquatur. Itemque a reliquo primo reliquum secundum quousque (24) eo minus supersit sicque in huiusmodi continua detractione nullus (25) fuerit reliquus qui ante relictum (26) numeret ‹ usque ad unitatem › eos duos numeros contra se primos esse necesse est.

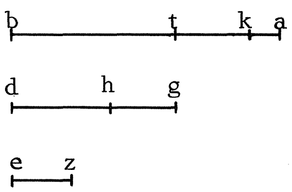

Fig.1

Ut si sint inequales numeri duo a b et g d detrahaturque g d ab a b donec a t supersit minus g d idemque versa vice de g d donec g h minus relinquatur a t, idemque iterum de a t quociens a k vicem unitatis obtinens postrema detractione excipiat. Dico a b et g d contra se primos existere nec esse communem numerum preter unitatem qui utrosque numeret. Sit tamen interim si possibile est eos

---

(24) quousque] quo versus.

(25) nullus] nullius.

(26) relictum] reliquum.

communem aliquem numerare qualis est e z. Si igitur e (27) z numerat g d, et eum qui est t b numerabit. Numerabat autem totum a b quapropter et eum qui est a t, hic autem eum qui est h d, eundem igitur et ille numerabit. Numerabat autem totum g d quapropter et eum qui est g h. Hic autem eum qui est t k, eundem igitur et ille numerabit. Numerabat autem totum a t, numerabit igitur et a k unitatem ut sit numerus infra unitatem subsistens propria antiquior origine. Quod cum planum sit, patet numeros inequales quorum detractio versus ad unitatem pervenit (nullum alium invenieris qui utrosque numeret) contra se primos existere.

⟨VII.2⟩ Datis duobus numeris ad invicem compositis, maximum numerum communem eos numerantem invenire docemus.

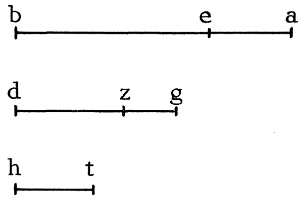

Fig.2

Nam ut sint duo numeri inequales neuterque alteri primus a b et g d; si minor maiorem numerat dum et se ipsum metiatur, eum esse maximum utrosque numerantem manifestum est. Qui si maiorem non numerat nec ei primus est, alium quemlibet utrique communem et maximum necesse est cuius invencione (28) detrahimus minorem de maiore, reliquumque de reliquo donec qui ante relictum numeret occurrat. Qua racione supradictum est g d videlicet de a b, reliquumque a e de g d de quo remanens g z si ante relictum a e numerat, dum id ante eum nulli alii contigerit: is erit maximus numerus communis utrosque numerans nec erit alius maior hoc istis communis, quod si cuiquam possibile est concedamus interim numero h t. Si igitur h t utrosque numerat, et eum qui est e b numerabit. Numerabat autem totum a b quapropter et eum qui est a e, hic autem eum qui est z d. Eundem igitur et ille numerabit. Numerabat autem totum g d, numerabit igitur et eum qui est g z: maior

(27) e] est.

(28) invencione] inventioni.

videlicet minorem. Quod cum facile constabit, non erit preter eum qui primus ante relictum numerans inventus est maximus (fol. 45^{r}) utrique communis.
Unde procedit quod omnis numerus duos numeros numerans numerabit et maximum utrosque numerantem.

⟨VII.3⟩ Datis tribus numeris ad invicem compositis, maximum numerum communem eos numerantem reperire intendimus.

Propositis enim tribus numeris inequalibus nulloque eorum alii primo a b et g d et e z; duorum communem maximum in primis adducimus h t videlicet eorum qui sunt a b et g d qui tercium e z aut numerabit equidem aut non. Atque si sit primum ut numeret, erit igitur is maximus communis qui omnes tres numeret. Cui si forte obviam (29) k l (et illis communis et hoc maior est) nitatur, dabimus lo-

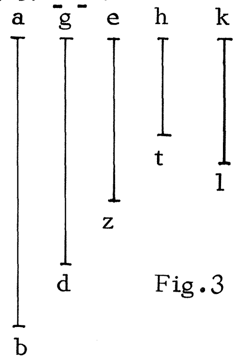

Fig.3

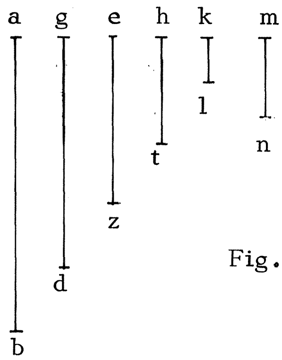

Fig.4

cum interim. Dum scilicet k l ex eo quidem a b et g d communiter numerat, et utrosque numerantem h t numerare consequatur quo maior esse voluit. Utique non leve incommodum contradictionis herror incurrat. Deinde h t ut maximus communis est a b et g d si e z non numerat, inveniemus alium maximum communem h t et e z. Sitque si maius k l, hic ergo k l cum maximus sit qui communiter numeret e z et h t sitque h t maximus communis a b et g d, erit k l maximus communis omnium trium nec alius hoc maior omnes tres numerans. Nam contra si forte laboret numerus

(29) obviam] obviactim.

n m, sustinemus. Donec ex eo quod omnes tres numeret ad id pertineatur ut et e z atque h t numerare oporteat (quorum primus communis reperitur k l) id ipsum ex debito postulabit. Quoniam ergo maius minori subsistere nature de facto prohibitum est, remanet k l maximus communis omnium trium.

⟨VII.4⟩ Omnium duorum inequalium numerorum, minor maioris aut pars est aut partes.

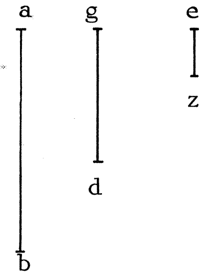

Fig.5

Verbi gracia: numerus g d eius qui est a b. Si enim ipsum numerat, est quidem ea pars eius. Si vero non numerat, erit equidem aut primus illi aut compositus. Si primus: postquam ⟨g d⟩ in unitates resolutus fuerit, quoniam unitas pars maioris (30) est, erit minor partes maioris. Si vero non sit illi primus: invento maximo qui utrosque numeret e z, ut g d per eundem divisus fuerit. Quia e z pars est a b equalisque unicuique omnium parcium g d, quot fuerint tot esse minorem maioris partes (31) necesse est.

⟨VII.5⟩ Inter quattuor numeros si quota primus secundi tota pars fuerit tercius quarti, erunt primus et tercius pariter accepti tota pars secundi et quarti similiter acceptorum quota primus secundi.

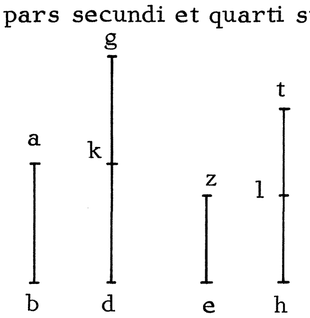

Fig.6

Ut cum quota pars fuerit numerus a b eius qui est g d, tota sit e z eius qui est h t. Dico similiter utrosque acceptos eadem habitudine (fol.45^v) utrisque pariter acceptis constare. Quod ita sumuntur cum tantus est a b in g d quantus est e z

(30) maioris] minoris.
(31) partes] partis.

in h t, d (32) g per numerum a b atque h t per e z diviserimus. Erit enim idem utriusque parcium numerus et quantitas ad utrumque. Est namque g k (33) equalis a b et h l equalis e z sic quoque k d equalis est a b et l t equalis est ⟨ e ⟩ z. Quantus est itaque g d ad a b tanti sunt g d et h t ad a b et e z; converso quoque quantus a b in g d tanti a b et e z in g d et h t (34). Quantus est igitur a b in g d tanti sunt minores ambo pariter accepti in maioribus simul aggregatis.

⟨VII.6⟩ Inter quattuor numeros si quote partes primus secundi tote fuerit tercius quarti, erunt primus et tercius pariter accepti tote secundi et quarti simul acceptorum quote primus secundi.

Ut si quote partes a b eius qui est g d, tote fuerit e z eius qui est h t, dicimus simul acceptos eundem parcium numerum metiri. Quod ex eo patet cum equali quantitate et numero stent hic enim qui est g d, ille h t, si per partes g d numerum a b et per partes h t eum qui est e z seruerimus. Eritque idem modus numeris e l et l z atque a k et k b. Quota est (35) igitur a k pars g d tota erunt a k et e l pariter accepti eorum qui sunt g d et h t simul acceptorum. Item quotus est k b eius qui est g d, totus l z eius qui est h t. Quotus ergo est k b numero g d tota pars erunt k b et l z pariter accepti numeris g d et h t simul aggregatis. Totus igitur a b quotas partes eius qui est g d sortitur, totas a b et e z pariter adunatos g d et h t simul acceptis constare necesse est.

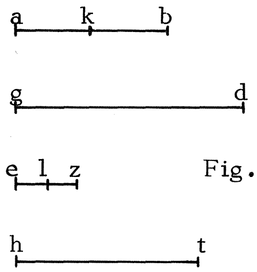

Fig.7

⟨VII.7⟩ Si fuerint duo numeri quorum alter pars alterius auferaturque ab utroque eorum eedem pars, erit reliquus pars reliqui

---

(32) d] si.
(33) k] z.
(34) t] l.
(35) est] est n.

quota totus tocius.

Pars est enim numerus a b eius qui g d designant. Si itaque tota pars ab utroque apud e et z recidatur, erit reliquorum tota eciam pars e b eius qui est z d. Si enim assumatur h g cui tota pars sit e b quota est a e numero g z, erit quotus a e numero g z tota pars a b eius qui est h z; fuit a b(36) tota pars g d; equales sunt igitur h z et g d. Si ergo commune medium g z exierit, remanebit h g equalis z d. Quotus igitur est e b numero h g, totum ei qui est z d esse necesse est. Fuit autem illi quota a e numero g z, totam igitur et eius qui est g (37) d partem obtinebit ut sit reliquus reliquo quotam totus tocius partem obtinebit, ut sit reliquus reliquo quotam totus tocius partem sortitur. (fol.46^r).

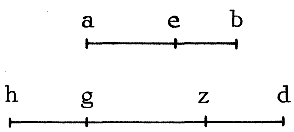

Fig.8

⟨VII.8⟩ Inter duos numeros (38) quorum alter partes alterius si ab utroque eorum ipse partes auferantur, erit reliquus partes reliqui quote totus tocius.

Est enim a b numerus partes numeri g d, primum igitur subtrahimus utrique eas ipsius partes ut quot partes quoteque sint a b eius qui est g d, tot ac tote sint a e eius qui est a b et g z eius qui est g d. Adinvenimus deinde h t numerum equalem a b, quem per partes g d primum dividimus pariterque a e per partes g z. Idem est ergo numerus parcium h k et k t atque a l et l e in omnibusque idem at quoniam maior est g d quam g z, maior erit k h quam a l. Sit ita-

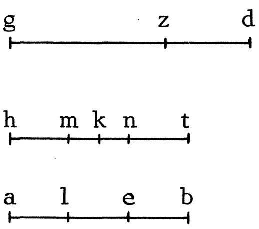

Fig.9

---

(36) a b] autem.

(37) g] h.

(38) numeros] minimos.

que h m equalis a l. Quota est igitur h k pars g d, tota est hm pars g z. Restat totam eciam partem esse reliquum m k reliqui z d. Item quota est k t pars g d, tota est l e pars g z eritque ita eciam k t maior quam l e. Sumatur itaque k n equalis l e. Quota est ergo k t pars g d, tota est k n pars g z. Sequitur totam eciam partem esse residuum n t residui z d. Coniunctis ergo quote (39) partes sunt totus h t tocius g d, totis totaque de utroque ablatis hinc h m et k n illum g z que remanent eodem numero et quantitate reliquo constare necesse est.

⟨VII.9⟩ Si fuerint iiii numeri quorum primus secundi quota pars est aut partes tercius quarti, alternatim quoque quota primus tercii tota pars aut partes erit secundus quarti.

Ut cum quotus est a b in g d totus sit e z in h t, erit enim eciam quotus fuit a b ei qui (40) est e z totum fore g d ei qui est h t. Cum igitur tociens habeat g d eum qui est a b, quociens h t eum qui est e z.

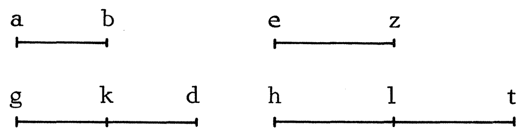

Fig.10

Si g d per a b et h t per e z diviserimus, quoniam idem utriusque partibus numerus parque modus est ut et totidem sint et quoque inter se equales, procedit quota pars est g k eius qui est h l tota sit k d pars vel partes l t. Quapropter et totum g d tocius h t totam partem vel partes esse necesse est. Est autemque pars g d equalis a b sicque h t parcium que equalis e z. Quotus igitur a b fuerit e z totam g d eius qui est h t partem vel partes sortiri necesse est.

⟨VII.10⟩ Si fuerint iiii^or numeri quorum primum secundi quote

---

(39) quote] quota.

(40) qui] que.

partes tercius quarti, alternatim quoque quote primus tercii tote partes aut pars erit secundus quarti.

Cum enim quote partes a b numerus eius qui g ‹d› ex totidem totisque eius qui est h t (fol.46^{v}) constet e z. Eruntque mutato quot partes et quote numerus a b eius qui est e z, tote ac totidem g d eius qui h t designant. Cum igitur tociens sit a b in g d, quociens e z in h t. Si a b per partes g d et e z per eas quas de h t contrahet diviserimus, quoniam numero eodem parique modo utroque constant. Quota fuerit a k pars e (41) l, totam similiter et totidem nu-

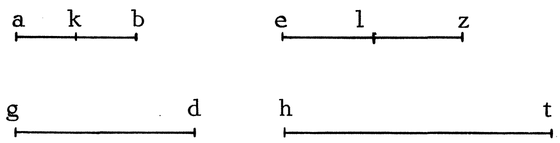

Fig.11

merum a b ei qui est e z constare necesse est. Est autem quota a k (42) pars g d, tota e l pars h t (43), quota est ergo a k eius qui est e l, totam g d numerum numero h t fore necesse est. Coniunctis ergo quot partes aut quota pars fuerit a b numeri e z totidem totumque numerum g d eius qui est h t partibus constare necesse est.

‹VII.11› Si de duobus numeris duo numeri in eorum proporcione detrahantur, erit proporcio reliqui ad reliquum quam tocius ad totum.

Resectis enim de a b et g d numeris e a et z g, in qua proporcione constat a b ac g d, dicimus in eadem que relinquuntur consistere. Quantus est enim a b in g d tantus est a ‹e› in z g, igitur quota pars est vel partes a b numeri g d, tota vel

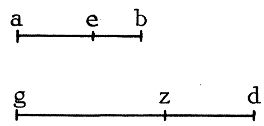

Fig.12

---

(41) e] est.

(42) k] h.

(43) h t] hit.

tot e a eius qui est z g. Quapropter et residuum residui totam aut tot partes esse necesse est. Erunt igitur in eadem proporcione.

⟨VII.12⟩ Duorum proporcionalium quantus fuerit unus antecedencium ad suum consequentem, tanti erunt omnes antecedentes adunati ad omnes consequentes simul aggregatos.

Cum enim quantus est a b ad g d tantus sit e z ad h t. Dico coniunctis et in eadem habitudine utrosque antecedentes ad utrosque consequentes existere. Nam si tantus est a b in g d quantus est ⟨e⟩ z in h t, erit nimirum quota pars vel partes a b numeri g d, tota vel tot e z⟨h⟩ t; coniunctis ergo tota vel totidem ambo minores utrorumque maiorum; erunt igitur eciam in eadem proporcione.

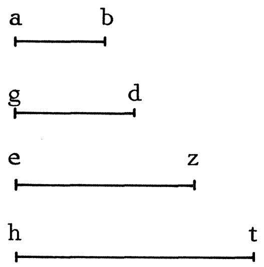

Fig.13

⟨VII.13⟩ Quattuor quilibet numeri proporcionales, alternatim quoque proporcionales erunt.

Est enim quantus a b ad g d tantus e z ad h t. Eruntque ita permutato quoque quantus a b ad e z tantus g d numero h t. Si enim quantus est a b in g d tantus e z in h t, quota pars vel partes fuerit(44) a b numeri g d tota vel totidem erit e z eius qui est h t, alternatim ergo quota pars vel partes fuerit a b numeri e z tota vel totidem g d (fol.47^r) eius qui est h t. Sunt igitur ita quoque in eadem proporcione.

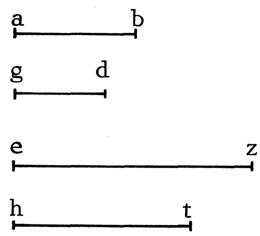

Fig.14

⟨VII.14⟩ Quotlibet numeros cum aliis totidem quorum quilibet

---

(44) fuerit] fuerint.

duo in proporcione duorum de prioribus constent, in equa proporcionalitate constare necesse est.

Nam si fuerit quantus a b ad g d tantus h t ad k l, quantusque g d (45) ad e z tantus k l ad m n, dicimus utrosque ‹in› equa eademque proporcionalitate constare. Cum enim quantus est a b ad g d

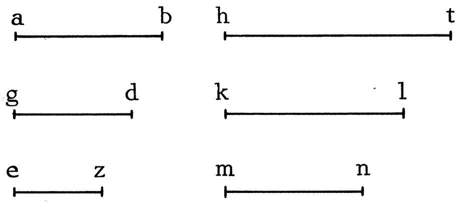

Fig.15

tantus fit h t ad k l, erit alternatim quoque quantus a b ad h t tantus g d ad k l. Item quantus g d ad e z tantus k l ad m n, erit alternatim quoque quantus g d ad k l tantus e z ad m n. Fuit autem tantus a b ad h t; quantus est igitur a b ad h t tantus e z ad n m; alternatim ergo quantus a b ad e z tantus erit h t ad m n.

‹VII.15› Si numeret unitas numerum aliquem quociens quilibet numerus alterum quemlibet, alternatim quoque quociens unitas tercium tociens secundus quartum numerabit.

Numerat enim unitas numerum a b quociens g d numerus eum qui est e z eritque alternatim quociens unitas in g d tociens a b in e z. Quod ita constabit: si numerum a b per unitates et e z per eum qui est g d

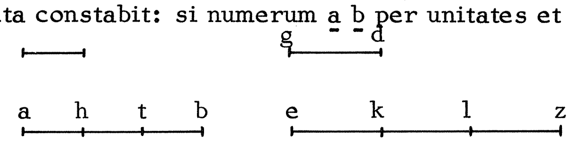

Fig.16

diviserimus, erit enim cum tociens sit unitas in a b quociens g d in e z, utrisque partibus idem numerus parque modus ut et totidem sint et utroque inter se equales. Quapropter quociens pars unius a h in

---

(45) d] a.

parte alterius e k sive h t in k l aut quilibet antecedens in suo consequenti tociens omnia antecedentia in unum collecta id est totum a b in omnibus consequentibus adunatis id est e z consistere necesse est. Est autem omnis pars a b numeri unitas omnisque eius qui est e z equalis g d qui cum totidem sint quociens fuit unitas in g d tercio tociens erit secundus in quarto.

⟨VII.16⟩ Duorum numerorum si alteruter in alterum ducatur, producti numeri equales erunt.

Ut si a b in g d numerum e z et g d in a b ductus eum qui est h t produxit, erit nimirum uterque equalis. Cum enim e z ex a b in g d ducto processerit, tociens numerabit g d numerum e z quociens unitas numerat a b, alternatim quoque quociens unitas numerat tercium g d, tociens secundus a b numerabit e z. Item cum ex g d in a b (fol.47^{v}) ducto h t processerit, quociens unitas in g d tociens erit a b in h t. Tantus est igitur a b in e z quantus in h t. Quapropter equales esse necesse est.

⟨VII.17⟩ Si unus numerus in duos ducatur, tantus erit productorum alter ad alterum quantus multiplicancium alter ad alterum.

Ut cum a b in e z idemque in g d ductus k l et h t produxerit, quantus fuerit g d ad e z tantus erit h t ad k l. Cum enim ex a b in e z ducto k l processerit, tociens erit e z in k l quociens unitas in a b. Item cum ex a b in g d ducto h t processerit, tociens erit g d in h t quociens unitas in a b. Quantus est igitur e z ad k l, tantus g d ad h t, alternatim ergo quantus g d ad e z tantus h t ad k l.

⟨VII.18⟩ Si duo numeri in unum ducantur, erit productorum tamquam (46) multiplicancium proporcio.

Ut cum ex a b et ex g d per e z producta fuerint h t et k l, que inter a b et g d eadem erit h t et k l proporcio. Nam ex a b in e z producitur h t idemque fit ex e z in a b. Item ex g d in e z produ-

---

(46) tamquam] eam quam.

citur k l idemque fit ex e z in g d. Quantus est igitur a b in h t tantus g d in k l, alternatim ergo quantus a b ad g d tantus h t ad k l.

⟨VII.19⟩ Inter quattuor numeros proporcionales quod ex ductu primi in ultimum et secundi in tercium producuntur equalia sunt. Quociensque hii ductus equales sunt, iiii^{or} numeros proporcionales esse necesse est.

Est enim quantus a b ad g d tantus e z ad h t fitque ex a b in h t numerus k l et ex g d in e z is qui est m n quos equales esse intendimus. Cuius argumento ducimus a b in e z fitque numerus c y, processit autem k l ex a b in h t. Quantus est igitur e z ad h t tantus erit c y ad k l. Quantus vero e z ad h t tantus fuit a b ad g d. Quantus igitur est a b ad g d tantus erit c y ad k l. Idem sicut ex a b in e z productus est c y, sic ex g d in e z processit m n. Quantus est igitur a b ad g d tantus c y ad m n. Fuit autem tantus ⟨ c y ⟩ ad k l. Equales sunt igitur m n et k l. Contra eam sit eos numeros (47) esse proporcionales. Producit enim a b ex e z et h t numeros c y et k l. Quapropter ut e z ad h t sic c y ad k l constare necesse est. Item a b et g d ex e z producunt c y et m n. Quapropter ut a b ad g d sic c y ad m n constet necesse est. Sunt autem k l et m n equales quamobrem quantus a b ad g d tantus erit e z ad h t.

(Fol.48^{r}) ⟨VII.20⟩ Omnis proporcionis numeri minimi numeros in eadem proporcione minor minorem maior maiorem equaliter numerant.

Ut cum in qua proporcione sunt a b et g d in eadem sint e z et h t ipsique minimi, dicimus quociens e z numerum a b tociens h t eum qui est g d numerabit. Si enim tota pars est huius (48) quota ille alterius equaliter nimirum eos numerabint. Sin autem partes sunt illorum, dividemus e z per partes a b et h t per partes g d quibus dum idem sit numerus et equalitatis modus, quantus fuit e k ad h l

---

(47) numeros] minimos.
(48) huius] $h^{i}h^{us}$.

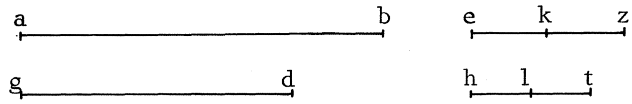

Fig.17

tantus erit k z ad l t sequitur et totum e z tantum esse ad totum h t. Iam igitur in ea proporcione e z et h t non erunt minimi. Quod cum minimi sint nec iam partes sequencium partes obtinere valeat, restat ut ex singulis illorum partibus consistant. Cum igitur eiusdem sint proporcionis equaliter eos numerabint.

⟨VII.21⟩ Omnis proporcionis numeri minimi sibi invicem primi sunt.

Sunt enim in quanta proporcione minimi numeri a b et g d eritque ita uterque alteri primus nec erit numerus communis utrosque numerans. Detur eum interim utrumque numerare, si possibile est nume-

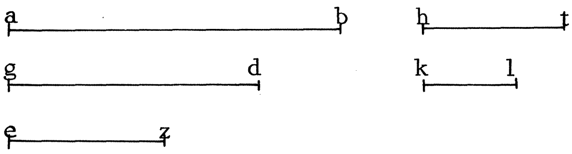

Fig.18

ro e z. Sit ergo quociens e z in g d tociens unitas in k l quocienscque idem e z in a b tot unitates in h t, producunt igitur k l et h t ex eo qui est e z numeros g d et a b. Quapropter ut h t ad k l sic a b ad g d constare necesse est. Nec igitur a b et g d in ea proporcione minimi sunt.

⟨VII.22⟩ Omnes numeri ad invicem primi in sua proporcione sunt minimi.

Si a b et g d contra se primi, eruntque ita in sua proporcione minimi. Si enim non sunt minimi, sint in eadem proporcione minimi e z et h t. Constet igitur quociens e z numerat a b tociens h t numerabit g d. Sit ergo quociens e z in a b sive h t in g d tot unitates in numero k l. Numerabit igitur k l eum qui est a b quociens unitas est in e z et numerum g d quot unitates sunt in h t. Est ergo k l communis numerus utrosque numerans nec igitur in ea proporcione primi erunt.

⟨VII.23⟩ Duorum numerorum qui ad invicem sint primi, si alterum quilibet alterius numeret eundem reliquo alteri primum esse necesse est.

Sunt enim ad invicem primi a b et g d quorum cum eum qui est a b numeret e z, erit inter e z et g d uterque alteri primus. Nam si non sint primi, sit communis utrosque numerans h t. Si itaque h t numerat e z atque e z eum qui est a b, eundem numerabit, et h t numerabat autem et g d. Si igitur unus utrosque numerat nec erunt primi.

(Fol.48[v]) ⟨VII.24⟩ Duorum numerorum qui ad alium quemlibet sint primi qui ex ductu alterius in alterum producitur numerus eidem alii primus est.

Sunt enim a b et g d primi ad e z sitque ex ductu alterius in alterum h t, dicimus itaque et h t ei qui est e z primum existere. Quod si ita non est sic utrosque numerat k l. Quociens igitur est k l in h t tot unitates numeret m n. Cum itaque m n in k l ductus fuerit, producet h t, processit autem h t ex a b in g d. Cum igitur equales sint ductus eorum et ipsos proporcionales esse necesse est. Ut quantus est a b ad k l tantus fit m n ad g d. Amplius k l numerat e z, sed e z primus est ad a b, igitur a b et k l ad invicem primi sunt. Qui vero primi in aliqua proporcione, et minimi. Qui minimi, eos qui in ea proporcione sunt minor minorem maior maiorem equaliter numerant. Numerabit ergo k l eum qui est g d, numerabat autem et e z. Nec igitur illos ad invicem primos esse patietur, sed est alter sic, restat e z et h t ad invicem primos existere.

⟨VII.25⟩ Duorum numerorum qui ad invicem sint primi quem alteruter in se ductus produxit numerum alteri primus erit.

Sunt enim a b et g d ad invicem primi. Quorum ex a b in se ducto procedit e z quem ei qui est g d primum esse intendimus. Quod ex eo constabit: si h t equalem adduximus a b. Cum enim a b et g d ad invicem primi sunt et h t equalis a b, erunt a b et h t ei qui est g d ambo primi. Producit autem a b ex h t eum qui est e z, igitur e z qui a b in se ductus procreavit numero g d primum esse necesse est.

⟨VII.26⟩ Duorum numerorum si uterque aliorum duum utrique primi fuerint, erunt quoque ductus utriusque partis ad invicem primi.

Sunt enim a b et g d uterque ad utrumque e z et h t primi generatque a b ex g d numerum k l atque e z ex h t numerum m n. Dicimus igitur et m n et k l ad invicem primos existere. Si enim a b ex g d producit k l illique ambo primi sint ad e z, erit eidem primus et k l eademque racione idem k l primus erit et ei qui est h t. Sic quoque si ex e z per h t procedit m n, quoniam ambo illi primi sunt ad k l, erit et m n primus eidem.

⟨VII.27⟩ Si duo numeri ad (49) invicem sunt primi, quos uterque in se ipsum ductus producunt similiter (fol.49^r) ad invicem erunt primi. Itemque si in utrumque productorum suus utriusque submultiplex ducatur, ad invicem primos producent. Eoque pacto infinite eorum extremitates constabunt.

Sunt enim a b et g d numeri ad invicem primi quorum a b ex se ipso numerum e z producit sicque g d eum qui est h t. Quoniam a b ex e z generavit k l sicque m n ex g d per h t processit, dicimus igitur quoniam ut a b ad g d sic e z ad h t atque k l ad m n omnes sunt primi. Cum enim a b ad g d ad invicem primi sint quem alteruter in se ductus generat reliquo primum esse necesse est. Sunt igitur ad invicem primi e z et g d qui cum ita sint primi, eadem et eos necessitas consequitur ut eodem pacto h t ad e z primus existat. Evenit igitur inter eos. Autem ut uterque superiorum utrique inferiorum sit primus, constat ergo et eos qui utrumque ex eis producuntur ad invicem esse primos.

---

(49) ad] ad un̄i ad.

⟨VII.28⟩ Cum fuerint duo numeri ad invicem primi, ex ambobus coacervatus ad utrumque erit primus. Quociensque ex duobus coacervatus ad utrumque fuerit primus, eos duos ad invicem primos esse necesse est.

Ut si a b et b g ad invicem sint primi totumque a g utrique eorum primum esse necesse est. Quibus si non sit primus, erit alterutri compositus, sit itaque communis d qui et (50) a g et b g tanquam composito ⟨s⟩ ad invicem numeret, qui si totum a g numeret, et a b numerat itaque pariter a b et b g nec igitur hii primi erunt. Qui quoniam primi sunt, restat ex eis coacervatum utrique primum existere, que causa sit et illos inter se primos esse. Qui si ad invicem primi non sunt, sit item d utrosque numerans, qui si eos numerat, numerabit et ex eis compositum qui quoniam eis primus est, id impossibile est. Quapropter et illi ad invicem primi erunt et hic ad utrosque.

⟨VII.29⟩ Omnem numerum compositum aliquis primus numerat.

Ut cum a numerum numerat b. Si is primus fuerit, artificio finem imponet. Qui si non sit primus, adducatur numerus e qui hoc ipsum numeret a quo et eum qui est numerari necesse est. Si ergo ille e primus est, erit is quoque artificii finis. Quod si nec hunc primum esse contingerit, numeret eundem illius (51) fiatque descensus huiusmodi quo versus ad aliquem primum perveniatur. Nec enim minuendo ad infinitum decrescit. Tandem igitur invento primo quem ex se compositum numerat is autem eum qui ex ipso componit pervenietur hoc ordine versus ad primo datum. Ut omne compositum numerum ab aliquo primo numerari plane intelligamus.

(Fol.49v) ⟨VII.30⟩ Omnis numerus aut primus est aut in primo numeratur.

Est enim omnis numerus aut primus quidem aut compositus constat-

---

(50) et] ē.

(51) illius] alius.

que omnem compositum a primo numerari.

⟨VII.31⟩ Omnis numerus primus ad omnem quem non numerat est primus.

Si enim ei quem non numerat, compositus est, erit alius quilibet qui utrosque numeret. Erit igitur numerus qui aliquem primum numerans a propria natura immotoque essencie statu impossibili quadam destructione transducat.

⟨VII.32⟩ Si numerum ex duobus numeris productum aliquis primus numeret, vel eciam primus alterutrum multiplicancium necessario numerabit.

Cum enim ex a b et g d processerit e z. Si h t eum numerans primus est, numerabit alterum illorum. Sitque ut non numeret a b, numerabit igitur eum qui est g d. Est autem h t primus nec numerans a b, igitur a b et h t ad invicem primi sunt. Assumatur deinde k l ex tot unitatibus consistens quociens est h t in e z, igitur h t in k l ductus producit e z qui dudum ex a b in g d ducto constitit. Cum ergo ductus eorum equales sint, eos iiii^{or} proporcionales esse necesse est, ut quantus est a b ad h t, tantus fit k l ad g d. Sunt autem a b et h t in ea proporcione primi quapropter et minimi, eos igitur qui in ea proporcione sunt, minor minorem et maior maiorem equaliter numerabunt, ut a b videlicet k l sic h t numerum g d. Eodemque pacto si numerum g d non numerat, et eum qui est a b numerare conveniret.

⟨VII.33⟩ Datis numeris in qualibet proporcione minimos eiusdem proporcionis invenire intendimus.

Propositis enim tribus numeris a; b; c in eadem quacumque proporcione. Si omnes tres ad invicem primi sunt, eosdem nimirum minimos esse necesse est. Qui si ad invicem compositi sunt, adducimus in primis maximum communem, omnes tres numerantem quem d notam designet. Quociens igitur numerus d ad unumquemque illorum numerat, tot unitates sint in tribus aliis e; f; g numeris ut ex quot unitatibus constat d, tociens e numeret a et f numerum b atque g eum qui est c, iuxta ordinem scilicet quo sese sequuntur. Erunt igitur hii tres in eadem superiorum proporcione. Hos itaque dicimus in ea proporcione minimos. Quibus si disceptacio obviam(52) tres alios eiusdem proporcionis adducat h; i; k minores his minimosque in ea proporcione contendemus (fol.50^{r}). Dabimus locum interim. Dic ergo si hii numeri in ea proporcione minimi sunt scimus quoniam equaliter superiores numerabunt, ut quociens h numerat a tociens i numerum b tociensque k eum qui est c. Assumamus itaque numerum quem nota l designet tot unitatibus collectum quociens unusquisque horum suum multiplicem de superioribus numerat, ut quot unitates continet numerus l tociens hii superiores illos quisque suum iuxta proporcionalitatis ordinem numerent. Igitur numerus l omnes tres superiores communiter numerabit. Itaque numerus l ductus in h producit numerum a qui dudum ex d in e ducto constitit. Cum igitur eorum ductus equales sint, eos iiii^{or} proporcionales esse necesse est, ut quantus est l ad d, tantus fit e ad h. Placuit autem h minorem esse quam e, igitur l maior erit quam d, qui cum omnes tres superiores, ut placet, numeret quorum d maximus communis primo repertus est, deinde erit communis numerus alius maxime eorundem communi maior. Quod cum alienum sit, restat in omni proporcionalitate eos esse minimos qui tociens superiores per ordinem numerant quot unitatibus maximus illorum communis collectus fuerit.

⟨VII.34⟩ Datis duobus numeris, numerum minimum ab eis numeratum invenire proponimus.

Datis enim a et g numeris, si minor maiorem, dum idem maior se ipsum, numerat, is erit utique minimus quem ambo numerent. Quod si minor non numerat, quoniam omnes numeri ad invicem aut primi sunt aut compositi, dicimus, si primi sunt, ex utroque in alterum ducto procreatum z minimum esse quem ambo numerent. Cui si numerus h in opposicionem veniens, pariter et ab illis numerari et

---

(52) obviam] obvians.

hoc maior esse contendat. Sint igitur quociens a numerat eum qui est h tot unitates in k numero quociensque g eundem h numerat ex tot unitatibus m colligatur. Idem igitur h tam ex a in k quam ex g (53) in m ductis procedit. Cum ergo ductus eorum equales sint eos iiii^{or} proporcionales esse necesse est. Ut quantus est a ad g tantus fit m ad k. Sunt autem a et g primi quapropter et minimi. Minimi vero in sua proporcione minor minorem, maior maiorem equaliter numerant. Numerat igitur a numerum m, produxit autem numerus g ex eo qui est a numerum z, idemque g ex eo qui est m numerum h, quamobrem ut a ad m sic z ad h constare necesse est. Numeravit autem dudum a numerum m, numerabit igitur et z eum qui est h maior minorem. Quod cum manifestum sit, demonstratum opinor quoniam si a et g primi sint, numerum z ex utroque productum minimum ab utroque numeratum esse necesse sit. Sin autem a et g compositi sunt, assumimus minimos eiusdem proporcionis k et m ut quantus est a ad g tantus fit m ad k. Pariter itaque (fol.50^{v}) tam ex a in k quam ex g in m ductis procedit numerus vel quem z designet. Dicimus itaque numerum z minimum esse quem ambo numerent. Nam et huic (54) si numerus h nota designatus qua supradictum est intencione opponatur, dic ergo si a et g minimum h numerant, fuit quociens a in h tot unitates in numero c quociensque g numerat h tot unitatibus numeri f congeratur. Idem itaque numerus h tam ex a in c quam ex g in f ducto procedit, quapropter eos iiii^{or} proporcionales esse necesse est. Ut quantus a ad g tantus fit f ad c, fuit autem quantus a ad g tantus m ad k (55), erit ergo quantus m ad k tantus f ad c. Sunt autem m et k in ea proporcione minimi ut igitur equaliter minor minorem maior maiorem numerant. Numerabit m eum qui est f, produxit autem g ex m numerum z et ex f eum qui est h, quapropter ut m ad f sic z ad h constare necesse est. Numerat autem m numerum f,

---

(53) g] g eundem h numerat ex tot unitatibus m colligatur. Idem igitur h tam ex a in k quam ex g.

(54) huic] hic.

(55) k] m.

numerabit igitur et z eum qui est h maior minorem. Impossibile est igitur a et g numeros minorem numero z numerare quamobrem eum minimum ab eis numeratum esse necesse est.

⟨VII.35⟩ Quociens duo numeri unum numerum numerant, minimus ab eis numeratus eundem numerabit.

Ut cum a et g numerent z k sitque minimus ab eis numeratus d, dico et d illum numerare. Quod si non numerat, necesse est ut saltem aliquam eius partem numeret quam c versus ⟨ k⟩ segreget. Ut itaque a et g (56) totum k z numerant, numerabunt et c k qui minor est quam

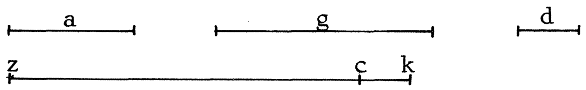

Fig.19

d. Nec igitur d minimus est ab illis numeratus, quare cum alter sit, necesse est a numero d totum z k numerari.

⟨VII.36⟩ Propositis tribus numeris minimum quem omnes numerent invenire docemus.

Propositis enim a et b et g adducimus in primis minimum a duobus numeratum ab a et b eum qui est h. Itaque si et tercius g videlicet eundem h numerat, is erit minimus, quem omnes numerent.
Qui si non fuerit minimus, conceditur interim l et hoc minor esse et ab illis tribus numerari. Numerant igitur a et b numerum l, a quibus minimus numeratus est h. Oportet igitur ut h numeret l, quamobrem l quam h minor esse non potest. Deinde si tercius scilicet g non numerat eum qui est h, adducemus minimum quem g et h numerant, sitque idem l. Cum igitur g et h numerent l et eum qui est h numerent a et b, necesse est l minimum esse quem omnes tres a; b; g videlicet numerent. Nam si idem ⟨ numerent⟩ quemlibet alium qualis est m contra nitens minus perspicax opinio adducatur, redarguetur ex eo quo-

---

(56) g] b.

niam si omnes tres eum numerant sitque h duorum minimus (fol.51^r) oportet ut et h eundem m numeret. Eundem igitur ambo h et g numerabunt quorum minimus dudum extitit numerus l quapropter et l(57) eundem m numerabit. Nec igitur m quam l minorem esse possibile est.

⟨VII.37⟩ Quociens numerus alium numerat, erit in numerato pars a numerante denominata.

Ut cum g numeret a, erit in a pars denominata a numerante g, quod ita sumitur: si quociens g (58) numerat a, ex tot unitatibus colligatur z, alternatim ergo quot unitates congerunt numerum g tociens z numerabit a. Que ergo pars est unitas numeri g, eadem pars est z eius qui est a. Est autem unitas omnis numeri pars ab ipso denominata. Si ergo quota est unitas in g tota pars sit z in a, cum g ab unitate in se denominatur (59), denominabit eciam z in a partem in numero quem numerat.

⟨VII.38⟩ Quotamcumque partem habet numerus, cum numerabit quicumque eam partem denominat.

Est enim in b numero quedam pars numerus d quam quicumque denominat ipsum necessario numerabit. Sit enim que pars est d numeri b, eadem unitas eius qui est z. Est itaque d pars b denominata a numero z. Quota ergo pars est unitas numeri z, tota pars est d numeri b. Quociens itaque numerat unitas z tociens d eum qui est b. Alternatim ergo quociens unitas d tociens z numerat b. Numerat autem unitas d quociens in ipso est quociensque unitas erit in d tociens z numerat b. Itaque z numerus cum b numeri eam partem que est d(60) denominet, et eum numerare inventus est.

⟨VII.39⟩ Propositis partibus quotiscumque numerum minimum eas

---

(57) et l] i k.
(58) g] g numerat g.
(59) denominatur] denominet.
(60) d] g.

continentem invenire intendimus.

Nam ut sint quotecumque partes b; d; z primum qui singulas denominant. Adducimus h; k; m qui si omnes numerent eum qui est e ab eis denominatas partes in ipso esse necesse est. Hic ergo si minimus fuerit qui omnes numerent, is plane minimus erit qui omnės illas partes contineat. Quia si numero f minori quam e eas partes continere opinio tribuat, ita raciocinari contra prom ‹p› tum est. Si enim eas partes continet f, numeri eas denominantes ipsum numerabunt. Estque minimus quod omnes tres numerant, quapropter f quam e minorem esse impossibile est. Relinquitur ergo quod denominantes minimum numerent, eundem minimum esse qui partes denominatas contineat.

‹LIBER VIII›

(Fol.51^{v}) ‹VIII.1› Numerorum quotlibet continue proporcionalitatis si duo extremi ad invicem primi fuerint, eos numeros in ea proporcione minimos esse necesse est.

Sequuntur enim sese proporcionaliter numeri quattuor a; b; g; d suntque extremi ad invicem primi, dicimus igitur eos $iiii^{or}$ in ea proporcione minimos existere. Si enim minores his alios disputetur in eadem proporcione constare posse quales sunt e; z; h; t, si eiusdem sunt proporcionis cum et totidem sint, consequens est ut quantus fuerit a ad d tantus fit e ad t. Sunt autem a et d ad invicem primi, quapropter in eadem proporcione minimi, quo vero minimi proporcionis sue numeros equaliter et ordine numerant. Numerabunt igitur a numerum e atque d eum qui est t, quapropter hos illis minores esse impossibile est. Relinquitur itaque quotcumque numeros continue proporcionalitatis quorum extremi ad invicem primi sint, in sua proporcione minimos existere.

‹VIII.2› Numeros continue proporcionalitatis in proporcione data minimos invenire proponimus.

At primum datam proporcionem in minimis collocamus numeris inter a et b, deinde cum inveniendi sint continue proporcionalitatis minimi numeri iiii^{or} in ea proporcione qua a et b comparantur, producet in primis a ex se ipso numerum g et ex b eum qui est d; sic quoque numerus b ex se eum qui est e, ex a numerum d, deinde numerus a ex g et d et e producet numeros z; h; t. Denique nota et b ex e eum qui est k. Dico igitur hos iiii^{or} continue proporcionalitatis minimos esse in ea proporcione que inter a et b primo data est. Cum enim a ex se numerum g et ex b eum, qui est d, producerit, quantus fuerit a ad b tantum g ad d fore necesse est. Item cum b ex a numerum d et ex se ipso eum qui est e produxerit, convenit ut quantus est ‹ a › ad b tantus fit d ad e; fuit autem tantus g ad d, quamobrem quantus g ad d tantus erit d ad e. Eritque ita continue (61) quedam proporcionalitatis in proporcione a ad b. Amplius numerus a ex duobus numeris g et d produxit z et h, quantus itaque est g ad d, tantus erit z ad h, fuit autem tantus a ad b quantus est igitur a ad b tantus (fol.52^{r}) erit z ad h. Item a numerus ex d et e produxit h et t quapropter ut d ad e sic h ad t constare necesse est. Erat autem sic a ad b utque a ad b sic z ad h. Consequens est igitur ut quantus est z ad h tantus fit h ad t, sunt ergo z et h et t continue proporcionalitatis in proporcione a ad b. Sic quoque duo numeri a et b ex numero e produxerunt t et k quamobrem ut a ad b sic t ad k constare necesse est, ut scilicet dudum z ad h atque h ad t constitit. Quantus est igitur z ad h et h ad t tantus erit t ad k continua proporcionalitate in ea proporcione que inter a et b primo data est. Sunt autem a et b ad invicem primi, quorum uterque in se ductus generavit g et e, unde et hos ad invicem primos esse convenit. Item a ex g produxit z atque b ex e procreavit k. Sunt itaque z et k ad invicem primi. Quoniam ergo continue proporcionalitatis numerorum extremi ad invicem primi sunt, eos numeros in ea proporcione minimos esse necesse est.

Unde procedit quia si fuerint iii^{es} numeri continue proporcionalitatis in sua proporcione minimi, duo extremi erunt quadrati; si fuerint iiii^{or}, duo extremi erunt cubici.

---

(61) continue] continua.

⟨VIII.3⟩ Quotcumque (62) numeri continue proporcionalitatis in sua proporcione minimi fuerint, duos extremos ad invicem primos esse necesse est.

Ut cum numeri iiii^{or} a; b; g; d continue proporcionalitatis in ea proporcione minimi sint, erunt extremi eorum ad invicem primi. Cuius demonstracio ⟨est⟩ : adducimus in primis duos minimos eiusdem proporcionis z et e eodemque artificio quo nuper usi sumus adducimus primum iij h; t; k tantumque alios quousque continue proporcionalitatis iiii^{or} minimos in ea proporcione deprehendamus l; m; n; c. Qui quoniam in ea proporcione minimi sunt, in qua primi iiii^{or} minimi sumpti sunt, ordine singulos singulis equales esse necesse est. Quapropter l et a sic c et d equales esse convenit. Sunt autem l et c ad invicem primi, sic igitur et a atque ⟨d⟩ ad invicem primos esse necesse est.

⟨VIII.4⟩ Proporcionibus quotlibet assignatis equales proporciones in numeris earum proporcionum continuo proporcionalibus invenire intendimus.

Primum itaque proponimus proporciones quascumque in minimis earum numeris inter a et b et inter g et d atque inter e et z. Inveniendis ergo his proporcionibus in proporcionalitate continua pariterque numeris earum minimis. Ante omnia investigabimus minimum, quem b et g numerant, numerum t; quociens itaque b numerat t tociens fit a in h quociensque g numerat t tociens fit d in k. (fol.52^{v}) His deprehensis si demum et e numerat k, fit quoque tociens z in l. Dico ergo eas proporciones continuatim dispositas in minimis earum numeris. Cum enim quociens est a in h tociens b in t quociensque g in t tociens d in k similiterque quociens e numerat k tociens z numerum l, consequens est ut que proporcio est inter a et b, ea fit inter h et t et que inter g et d, eandem servet t ad k, sic eciam que inter e et z, ea-

---

(62) Quotcumque] Quocumque.

dem constet inter k et l. Deinde si possibile est huiusmodi proporcionalitatem in minoribus his constare numeris, sunt minores m; n; c; y quibus hec proporcionalitas interim concedatur ut quantus est a ad b tantus fit m ad n sicque ceteri ut sese sequuntur. Dati sunt autem a et b ceterique in eis proporcionibus minimi. Minimi vero reliquos numerant, numerat itaque b numerum n eademque racione et g eundem numerabit. Est autem t minimus quem ambo numerant. Igitur et t numerabit eundem n, maior minorem. Quod enim facile constet, relinquitur quos h; t; k; l in ea proporcionalitate minimos esse, dum e videlicet numeret k. Quod si non numerat, aliud erit consilium. Inveniemus enim in primis minimum quem e et k numerent, numerum c, deinde quociens k numerat c tociens fit t in n atque h in m. Denique vero quociens e numerat c tociens fit z in y. Dico ergo in his numeris minimis eas proporciones continuatim dispositas. Cum enim tociens fit h in m quociens t in n, erit quantus h ad t tantus m ad n, fuit autem tantus a ad b, quapropter quantus est a ad b tantus erit m ad n eademque medii racione quantus g ad d tantus n ad c. Denique nota quociens e numerat c tociens z numerat y. Oportet ergo quantus est e ad z tantum esse c ad y. Deinde si minores hiis alii eandem proporcionalitatem contenderint quales sunt f; q; r; s. Quantus est a ad b tantus erit f ad q sicque ceteri ut sese sequuntur. Sunt autem a et b ceterique ut dictum est in eis proporcionibus minimi, qui vero minimi reliquos numerant. Hoc itaque pacto b et g numerabunt q. Numerabit igitur et t eundem q. Cum igitur in eadem proporcione sint, quantus fuerit t ad q tantus erit k ad r. Numerat autem t eum qui est q. Numerabit igitur et k numerum r. Oportet autem ut eundem numeret et e. Cum in ea proporcione minimus sit quia nota c minimus est quem ambo numerant, eundem r et c numerabit, nec igitur r quam c minorem esse possibile est. Relinquitur ergo proporciones a; b et g; d atque e; z in m; n; c; y minimis numeris continuatim esse dispositas.

⟨VIII.5⟩ Omnis numeri compositi ad alium compositum proporcio est que ex eorum laterum proporcionibus colligitur.

Compositi sunt enim a et b lateraque numeri a duo g et d, numerique b duo e et z, proporciones nota inter g et e atque (fol.53^{r}) d et z. Educamur itaque primum tres numeri minimi in proporcionibus g ad e atque d ad z notenturque h et t et k ut quantus est g ad e tantus fit h ad t quantusque d ad z tantus t ad k. Itaque proporcio g ad e geminata est ⟨cum⟩ proporcione d ad z eademque est proporcio h ad t cum proporcione t ad k geminata. Est autem hec trium geminata proporcio ea que inter primum et tercium. Est itaque proporcio inter h et k ea qua compositi numeri a et b comparantur ex eorum laterum proporcionibus collecta. Producit enim d ex duobus numeris g et e duos numeros a et l. Itemque numerus e ex duobus numeris d et z duos l et b, quapropter quantus g ad e tantus erit a ad l, quantus est d ad z tantus l ad b, fuit autem tantus h ad t et t ad k. Quamobrem quantus est h ad k tantum a ad b eque proporcionalitatis racio constituit.

⟨VIII.6⟩ Quotcumque numerorum continue proporcionalitatis si primus non numerat secundum, nullus numerabit ultimum.

Ut in numeris a; b; g; d; e quidem enim a non numerat b, consequens est nullum sequencium alterum ad tercium numerare. Dico igitur quia nec g numerabit e. Cuius argumentacio ⟨est⟩ : adducimus tres minimos eodem modo proporcionis continuo sese sequentes z; h; t quorum extremos ad invicem primos esse necesse est. Est igitur utrorumque et numerus idem et equalis proporcio. Convenit ergo ut quantus est z ad t tantus fit g ad e nec nota z numerat t, nec ergo g numerabit e, constat igitur quia nullus alterum numerat.

⟨VIII.7⟩ Continue proporcionalitatis quotlibet numerorum si primus ultimum numerat, idem ipse secundum numerabit.

Si enim, cum unius omnes sint proporcionis, primus et secundum non numerat, nullus (63) erit qui ultimum numeret, quem quia pri-

---

(63) nullus] nullius.

mus numerat, idem ipse eciam secundum necessario numerabit.

⟨VIII.8⟩ Inter duos numeros quotcumque numeri continua proporcionalitate ceciderint, totidem cadere (64) necesse est inter omnes duos in eadem proporcione consistentes.

Cadunt enim proporcionalitate continua inter a et b numeri duo g et d in una proporcione. Estque quantus a ad b tantus e ad z. Dico itaque totidem inter e et z una et continua proporcione intercidere oportere. Quod ita manifeste constabit, si sumpti fuerint numeri minimi in eadem proporcione h; t; k; l (fol.53^{v}) quorum extremos ad invicem primos esse necesse est. Qui cum totidem sint quot primo dati eiusdemque proporcionis, consequens est ut quantus h ad l tantus fit a ad b, tantus e ad z. Erit ergo quantus h ad l tantus e ad z, sed quoniam h et l primi sunt, erunt et minimi in ea proporcione. Minimi nota sue proporcionis numeros equaliter numerant. Quociens ergo h numerat e tociens l numerat z. Quociens igitur hii numerant illos tociens horum medii numerent m; n. Qua ergo proporcione consistit t et k inter h et l, eadem m et n inter e et z constare necesse est. Cum ergo iiii^{or} hii totidem illos ordine et equaliter numerent, erunt in qua proporcione h; t; k; l in eadem e; m; n; z in qua pridem a; g; d; b constiterunt. Sunt igitur a; g; d; b atque e; m; n; z et totidem numero atque in eadem proporcione. Quot ergo inter a et b quaque proporcione constiterunt, totidem inter e et z eadem proporcione continua proporcionalitate inventi sunt.

⟨VIII.9⟩ Inter duos numeros ad invicem primos quotcumque continua proporcionalitate ceciderint, totidem inter utrumque eorum et unitatem in una proporcione continua proporcionalitate cadere necesse est.

Primi sunt enim ad invicem numeri duo a et b caduntque inter eos duo continua proporcionalitate g et d. Dicimus itaque totidem ad

---

(64) cadere] eadem.

utrumque eorum ab unitate una proporcione continuari. Quod ut manifestum fiat, summimus primum minimos duos e et z in ea proporcione numeros, indeque tres educimus h; t; k atque inde alios donec totidem sint numero quot primo dati eiusdem proporcionis in ea proporcione minimi l; m; n; c. Produxit igitur e numerus ex se ipso numerum h quapropter tociens eum numerat, quociens in ipso est unitas, tanta est itaque unitas ad e quantus e ad h, deinde e ex h produxit l, tociens est itaque h ad l quociens unitas in e. Est ergo quanta unitas ad e tantus h ad l, fuit autem tantus e ad h quanta est igitur unitas ad e tantus est e ad h tantusque h ad l. Est autem l equalis a, est ergo quanta unitas ad e tantus e ad h tantusque h ad a. Eodem ordine parique modo quanta est unitas ad z, tantus z ad k tantusque demum k ad b. Manifestum est ergo quot numeri continua proporcionalitate inter a et b ad invicem primos intercidunt, totidem ab unitate ad utrumque eorum una proporcione continuari.

⟨VIII.10⟩ Si inter utrumque duum numerorum et unitatem quotlibet continua proporcionalitate ⟨ceciderint, ambobus numeris totidem continua proporcionalitate⟩ intercidere necesse est.

Ut est inter utrumque duum numerorum a et b (fol.54^{r}) atque unitatem bini intercidant, inde g et d, hinc e (65) et z, dico totidem inter ipsos a et b continuam ordinare proporcionalitatem. Est enim quociens unitas in g, tociens g in d tociensque d in a, producit enim g ex se ipso d et ex d numerum a. Quanta est igitur unitas in g, tantus g in d tantusque d in a. Eadem racione parique modo quanta unitas in e, tantus e in z tantusque z in b, deinde g ducatur in e fietque h. Cum itaque g ex se ipso d et ex e produxit h, convenit ut quantus est g ad e tantus fit d ad h. Similiter e cum ex se ipso z et ex g numerum h generet, consequens est ut quantus g ad e tantus fit h ad z. Est ergo que inter g et e, eadem inter d et h atque inter

---

(65) e] h.

h et z proporcio. Sequitur cum g ex d producat a atque e ex z generet b, si deinde sive g ex h et z sive e ex d et h producant numeros t et k, eos inter a et b continua proporcionalitate intercidere necesse est. Cum ergo bini inter unitatem et utrumque extremorum singulas proporcionalitates continuent, totidem inter eos continua proporcionalitate inventi sunt.

⟨VIII.11⟩ Inter numeros quadratos ea est proporcio qua latus unius ad latus alterius constat geminati. Nam inter cubicos ea que laterum utriusque ad invicem triplicata bitacrir.

Sunt enim quadrati numeri a et b, ⟨cubici⟩ vero g et d, latera autem e et z. Est itaque quadrati a et b proporcio ea que inter e et z bis assumpta, eadem ter accepta cubici ad invicem comparantur. Cum enim hii quadrati illique cubici sint si eorum latera sunt e et z scimus quoniam e ex se ipso quadratum a et ex a cubum g necessario producet, nec aliter z ex se ipso b et ex b eum qui est d, deinde e ex z generat ⟨ h⟩ . Quo facto sive e ex h et b sive z ex a et h producant numeros t; k medios inter g et d constare necesse est. Constat igitur in eadem omnes proporcione convenire utque est inter e et z, eadem fit inter a et h atque h et b eademque inter g; t et t; k et k; d. Est igitur que inter e et z eadem inter a et b geminata, eademque inter g ⟨et⟩ d ter accepta proporcio.

⟨VIII.12⟩ Continue proporcionalitatis quotlibet numerorum si quisque in se ipsum ducatur, productos sub proporcionalitate continua constare. Sique item de productis in quemque suum reducatur principium, inde quoque productos una proporcione continuari eodemque modo omnes hec ordine productos succedere necesse est.

Iungantur enim continua proporcionalitate numeri tres a; b; g qui cum omnes in se quisque ducti fuerint, producent nimirum a numerum d atque b numerum e denique g eum qui est z. Deindeque in hos ipsos (fol.54^{v}) illi reducti generabunt quidem a ex d numerum h atque b ex e numerum t demumque g ex z eum qui est k. Dico igitur quia singuli numerorum ordines, ut dispositi sint, in sua proporcione continuantur. Producit enim numerus a ex b quidem numerum l, ex l autem et e deinde numeros n et s, pro hoc b ex numero g producit m, ex m deinde et z numeros y et f. Cum igitur a ex duobus numeris ex se ipso scilicet et ex b producat d et l, sic quoque b ex a numerum l et ex se ipso generet e. Consequens est ut quantus a ad b tantus fit d ad l, tantus quoque l ad e. Continuati sunt igitur d et l et e in proporcione a ad b cui eadem est proporcio b ad g. Itemque quoniam b ex se ipso numerum e et ex g produxit m, sic quoque g ex b numerum m et ex se ipso genuit z, procedit ut quantus b ad g tantus fit e ad m tantus quoque m ad z. Sequuntur itaque se se continuo e et m et z in proporcione b ad g cuique eadem est que inter a et b totidemque numero sint d; l; e; quot e; m; z. Restat ut quantus fuerit d ad e tantus fit e ad z. Amplius a numerus ex duobus d et l produxit h et n. Quapropter ut d ad l sic h ad n constare necesse est ut pridem a et b constiterunt. Igitur quantus a ad b tantus erit h ad n eademque racione tunc eciam n ad s fore necesse est. Sed quoniam idem numeri a et b ambo ex numero e produxerunt s et t, oportet eciam ut quantus a ad b tantus fit s ad t, continuati sunt igitur h et n et s et t in proporcione a et b. Eodemque dum t et y et f et k continuantur in proporcione b et g cui quoniam eadem est proporcio a et b totidemque sunt numero h; n; s; t quot t; y; f; k restat ut quantus h ad t tantus fit t ad k; fuit autem quantus d ad e tantus e ad z. Manifestum est igitur ut hii numerorum ordines atque gradus singuli in suo genere una eademque proporcione.

⟨VIII.13⟩ Si numerus quadratus alium quadratum numerat, eius latus illius latus numerabit. Sicque latus unius alterius latus numerat, quadratus eciam quadratum numerabit.

Sunt enim quadrati numeri duo a et b eorumque latera g et d. Si ergo a numerat b, dico quoniam et g numerabit d. Cum enim a quadrati latus sit numerus g, idem g ex se ipso producit a (66). Sic quoque d ex se ipso generat b. Deinde g in d conficit numerum e. Ita ergo numerus g ex duobus numeris ex g videlicet et d producit duos a et e. Quapropter quantus g ad d tantus erit a ad e, sic quoque cum d ex g et ex se ipso producat e et b, erit item quantus g ad d tantus e ad b. Continuati sunt igitur in una proporcione a et e et b numeratque primus ultimum, ergo et secundum numerabit. Cum igitur a numeret e, quantusque a ad e tantus fit g ad d, numerabit et g eundem d. Monstratum ergo est si inter (fol.55^{r}) quadratos alter alterum numerat, et latus unius latus alterius numerare ⟨necesse est⟩. Quod converso quoque nihilominus sumitur. Cum enim a et b continuati fuerint in proporcione g; d. Si g numerat d, numerabit et a numerum e quapropter et b necessario numerabit.

⟨VIII.14⟩ Si numerus cubicus alium cubicum numerat, eius latus illius latus numerabit. Sicque latus unius latus alterius numerat, cubus eciam cubum numerabit.

Sunt enim a et b numeri cubici. Latera eorum g et d. Si itaque a numerat b, numerabit et g eum qui est d. Generat enim g ex se ipso numerum e et ex d numerum h sic quoque d ex g producit h et ex se ipso numerum z, continuati sunt igitur tres in proporcione g ad d. Amplius g ex e et h generat a et t quapropter ut e ad h sic a ad t constare necesse est ut pridem g ad d constitit. Eadem quoque racione ut g ad d sic eciam t ad k. Constabit ut igitur a ad t sic t ad k consistit. Deinde duo numeri g et d ex eo qui est z producunt k et b. Quantus est ergo g ad d tantus k ad b. Continuati sunt igitur omnes iiii^{or} in proporcione g et d numeratque primus ultimum, idem ergo et secundum numerabit. Cum ergo quantus a ad t tantus fit g ad d, numerabit et g eiusdem d. Monstratum est igitur si inter cubicos alter alterum numerat, et latus unius latus alterius numerare ⟨necesse est⟩. Quod converso quoque haut dissimili constat racione.

---

(66) a] a. Sic quoque d ex se ipso producet a.

Cum enim quantus g ad d tantus fit a ad t; si g numerat d oportet ut et a numeret t. Numerabit igitur et primus ultimum cum omnes continue sint proporcionalitatis.

⟨VIII.15⟩ Cum numerus quadratus alium quadratum non numerat, nec eius latus alterius latus numerabit. Sicque latus unius latus alterius non numerat, nec quadratus is quadratum illum numerabit.

Si enim unius latus alterius latus numerat, consequens est ut et quadratus is quadratum illum numeret quemque non numerat. Relinquitur ut nec latus unius latus alterius numeret. Eadem racione convincimus converso quoque si latus unius latus alterius non numerat ut nec quadratus is quadratum illum numeret. Simili speculacione in cubicis eciam utrumque huiusmodi conversionem consequimur.

⟨VIII.16⟩ Superficiales numeri duo si fuerint similes necesse est eis tercium (fol.55^{v}) continua proporcionalitate numerum interesse. Eritque proporcio unius ad alterum que unius lateris ad latus alterius se respiciens geminata.

Sunt enim superficiales numeri a et b similes lateraque a numeri g et d, numeri b latera e et z. Dicimus igitur quoniam inter a et b tercium continua proporcionalitate intercidere necesse est eritque a ad b proporcio que laterum eorum geminata. Ut enim g et d latera sunt a atque e et z latera b ipsique similes eritque proporcio inter g et e eadem inter d et z. Itaque d ex g quidem producit a, ex e vero numerum h. Sic eciam e (67) ex d generat h, ex z numerum b. Eruntque ita quantus g ad e tantus a ad h tantus erit h ad b. Inventus est igitur inter a et b numerus una et continua proporcione, extremorum autem a et b proporcio que inter a et h geminata, que autem inter a et h eadem est inter latera extremorum, igitur inter numeros superficiales similes qua latera eorum ad invicem constant proporcio geminata est.

---

(67) e] est.

⟨VIII.17⟩ Si duobus numeris tercius continua proporcionalitate intercidat, illi duo numeri superficiales sunt eciam similes.

Ut cum numeris a et b una proporcione intercidat g, erunt extremi superficiales et similes. Quod ut facile constet, sumantur eorumdem proporcionis minimi duo d et e eritque ut a ad g sive g ad b sic d ad e. Qui quoniam in ea proporcione minimi sunt, reliquos equaliter numerabunt ut quociens est d in a tociens e in g quociensque d in g tociens e in b. Sint igitur quociens d in a sive e in g tot unitates in z. Itaque d in z ductus producit a quapropter a superficialem esse necesse est. Sic quoque cum d et e numeros g et b equaliter numerent (68), sint quociens d in g sive e in b tot unitates in h, igitur e in h ductus producit b, quapropter b superficialem esse necesse est. Numerat autem d numerum g, quot unitates sunt in h, eundem numerat e quot unitates in z. Itaque sive d in h sive e in z ducatur, idem g proveniet. Cum igitur ductus eorum equales sint, eos quattuor proporcionales esse necesse est. Ut quantus z ad d tantus fit h ad e, sunt autem d et z latera a atque e et h latera b que cum proporcionalia sint, eos superficiales similes esse necesse est.

⟨VIII.18⟩ Solidi numeri duo si fuerint similes, necesse est eis duos continua proporcionalitate numeros interesse. Eritque proporcio (fol.56^{r}) similis ad similem quam lateris eius ad latus alterius sui respectus triplicata bitacrir.

Solidi sunt ut ac similes numeri duo a et b suntque latera a tria g; d; e, latera b tria z; h; t. Sunt itaque necessarii duo qui continuam ordinent proporcionalitatem inter a et b eritque proporcio extremorum que singulorum laterum eorum ter accepta. Sunt enim solidi laterumque proporcio quantus g ad z tantus d ad h tantusque e ad t. Itaque g ex d producit k atque z ex h generat l qui quoniam su-

---

(68) numerent] numeret.

perficiales similes sunt, necesse est eis tercium una intercidere proporcione numerum m in quem duo numeri ducti e et t conficiunt duos n et c, deinde numerus ex g per d progenitus k ductus in e producit a. Ex eodem e procreat m numerum n. Igitur quantus k ad m sive m ad l tantus erit a ad n. Fuit autem tantus g ad z et d ad h atque e ad t. Est ergo que inter latera eadem inter a et n proporcio. Item cum e et t ex m producant n et c erit item quantus e ad t tantus n ad c. Que vero inter e et t eadem est reliquorum laterum que quoniam inter a et n reperta est, erit quantus a ad n tantus n ad c. Item t ex l generavit b, idem ex m produxit c. Quantus est igitur l ad m tantus erit b (69) ad c (70). Est autem inter m et l que laterum proporcio. Quantus est igitur a ad n tantus n ad c tantusque c ad b, continuati sunt ergo hii iiii^{or} in proporcione laterum ad invicem duobus inter a et b interpositis eritque ita extremorum a et b que laterum proporcio triplicata. Est enim quantus a ad n tantus n ad c tantusque c ad b. Est igitur a ad b proporcio que inter a et n ter accepta. Que vero inter a et n in ea singula a latera singulis b lateribus conveniunt. Est igitur inter a et b que laterum eorum proporcio triplicata.

⟨VIII.19⟩ Duobus numeris si duo continua proporcionalitate interiacent, hii duo solidi sunt atque similes.

Ut cum inter a et b duo g et d una proporcione intercidant, dicimus extremos solidos esse et similes. Cuius argumento sumimus primum tres numeros in eorum iiii^{or} proporcione minimos e; z; h, quorum extremos ad invicem primos esse convenit. Estque tercius inter eos una proporcione locatus que causa sit eos duos superficiales esse et similes, latera ergo e numeri duo k et l numerique h duo m et n.

---

(69) b] c.
(70) c] b.

Cum vero et similes sint, e et h latera eorum proporcionalia esse constat ut quantus k ad m tantus fit l ad n. Sunt autem e; z; h in proporcione a ‹ad g et› g ad d (71) quantus a ad g atque g ad d (72) tantus e ad z atque z ad h. Sic ergo quantus a ad d tantus e ad h. Sunt autem e et h ad invicem primi, qui nota primi in sua proporcione minimi. Minimi autem sue proporcionis reliquos equaliter numerant: quociens e numerum a tociens h eum qui est d. Sint ergo quociens e numerat a tot unitates (fol.56^{v}) in t. Sicque et h numerabit d quociens unitas est in t. Igitur ut h multiplicatus per t reddit d sic e in t componit a, processit autem e ex ductu k in l. Cum itaque ductus k in l videlicet e per t multiplicatus cumulavit a, necesse est a solidum esse tribus lateribus k; l; t congestum. Deinde cum totidem sint numero e; z; h quot g; d; b eiusque proporcionis in quaque minimi sunt, e; h; numerabunt equaliter: ‹e› numerum g atque h eum qui est b. Sint ergo quociens h numerat b tot unitates in c quot igitur unitates sunt in c tociens et e numerabit g ut igitur h multiplicatus per c reddit b sic e numerus in eodem c componit g, processit autem h ex ductu m in n. Cum itaque ductus m in n videlicet h per c multiplicatus reddit b necesse est b solidum tribus constare lateribus m; n; c. Itaque numeri duo t et c ex eo qui est h produxerunt d et b que racio postulat ut quantus est d ad b tantus fit t ad c. Que vero inter d et b, eadem est reliquorum continua proporcio, eadem enim et e cum z atque z cum h conveniunt, qui quoniam superficiales similes sunt, eadem et inter latera eorum proporcio continua ut quantus est d ad b tantus fit k ad m atque l ad n in qua dudum t et c (73) constiterunt. Cum ergo inter a et b duo numeri continuam unam proporcionem ordinent, monstratum opinor extremos solidos esse et similes.

---

(71) d] b.

(72) d] d z.

(73) et c] a id.

⟨VIII.20⟩ Quotlibet (74) trium numerorum continue proporcionalium si primus fuerit quadratus, oportet eciam tercium esse quadratum.

Cum enim tres una sese proporcione sequuntur, extremos quibus tercius proporcionaliter interiacet, superficiales similes esse necesse est. Si ergo primus quadratus est, tercium non esse quadratum impossibile est.

⟨VIII.21⟩ Quotlibet iiii^{or} numerorum continue proporcionalium si primus fuerit cubicus, oportet eciam quartum esse cubicum.

Cum enim iiii^{or} una sibi proporcione succedunt, medii duo proporcionaliter intercidentes, extremos solidos atque similes esse demonstrat. Si ergo primus cubicus est, quartum esse cubicum inevitabile est.

⟨VIII.22⟩ Si duorum numerorum quibus sit proporcio que quadrati ad quadratum alteruter quadratus fuerit, et alterum quadratum esse convenit.

Ut si que inter g et d quadratos eadem sit inter a et b proporcio fueritque a quadratus, erit utique et b quadratus. Nam cum g et d quadrati sint, eos superficiales similes esse convenit, que causa sit tercium eis proporcionaliter (fol.57^{r}) intercidere oportere. Est autem quantus g ad d tantus a ad b igitur inter a et b tercius proporcionaliter intercidit. Que causa sit eos superficiales similes esse. Cum igitur unus quadratus sit, et alterum quadratum esse necesse est.

⟨VIII.23⟩ Si duorum numerorum quibus sit proporcio que cubici ad cubicum alteruter cubicus fuerit, alterum eciam cubicum necesse est.

---

(74) Quotlibet] Quolibet.

Ut si que inter g et d cubicos eadem sit inter a et b proporcio fueritque a cubicus, erit utique et b cubicus. Cum enim g et d solidi sint et similes, duos eis proporcionaliter intercidere necesse est. Est autem quantus g ad d tantus a ad b quapropter et eis duo proporcionaliter interiacent que racio est eos solidos esse et similes. Cum igitur unus cubicus sit, alterum quoque cubicum esse convenit.

⟨VIII.24⟩ Duorum superficialium similium proporcio est que quadrati ad quadratum.

Cum enim a et b superficiales sint, tercium eis continua interesse proporcionalitate necesse est. Sumantur itaque tres in eorum proporcione minimi quorum extremos d et z quadratos esse constat. Qui quoniam totidem prioribus eiusdemque proporcionis sunt, restat ut que inter d et z quadratos eadem inter a et b superficiales similes existat proporcio.

⟨VIII.25⟩ Duorum solidorum similium proporcio est que cubi ad cubum.

Si enim a et b solidi similes sunt, certum est eos duobus mediis continua necti proporcionalitate. Assumantur itaque iiii in eorum proporcione minimi quorum extremos h et t cubos esse. Dubium non est qui cum totidem sint prioribus eiusdem proporcionis. Consequens est ut que inter h et t cubicos eadem inter a et b solidos similes constet proporcio.

⟨LIBER IX⟩

⟨IX.1⟩ Duo quilibet numeri superficiales similes quem in invicem ducti producunt numerum quadratum esse ⟨necesse⟩ est.

Ut enim a et b superficiales similes sint si a per se ipsum multiplicatus ediderit d eum quadratum fieri dubium non est. Idem a si in b ductus produxit g, eum quoque quadratum esse necesse (fol.57^{v}) erit. Produxit enim a numerus ex duobus numeris: ex se ipso et ex b duos d et g quapropter quantus a ad b tantus erit d ad g. Sic igitur et inter d et g tercium proporcionaliter interesse necesse est. Extitit autem d quadratus. Cum itaque continue proporcionalitatis numerorum primus sit quadratus eorumque tercius, sit g, eundem quoque quadratum esse consequens est.

⟨IX.2⟩ Duo quilibet numeri si in invicem ducti quadratum producunt, superficiales sunt et similes.

Cum enim a ex se ipso d, ex b vero producat g quadratum (75) oportet ut quantus a ad b tantus fit d ad g. Si ergo tercius inter d et g proporcionaliter incidit, tercius quoque inter a et b continuam proporcionalitatem ordinabit, eos igitur superficiales similes esse necesse est.
Ex his itaque procedit: si quadratus quadratum multiplicat, quadratum producunt. Sique quadratus in quemlibet numerum ductus quadratum producit, illum esse quadratum. Cum vero ex ductu quadrati in quemlibet numerum productus quadratus non est, nec eum numerum esse quadratum. Si enim quadratus in numerum non quadratum ducatur, nec quadratum produci possibile est.

⟨IX.3⟩ Omnis cubicus numerus in se ipsum ductus cubicum producit.

Ut si a cubicus ex se ipso producat b, eum et cubicum esse intelligamus. Nam a cubici latus g ex se quidem ipso generat d, ex d vero producit a. Quot igitur unitates sunt in g tociens g numerat d tociensque d numerat a. Sunt ergo inter unitatem et a duo numeri continua proporcionalitate ordinati, deinde numerus a in se ductus producit b, quot ergo unitates numerant a tociens a numerat b unde quanta est unitas ad a tantum a ad b fore necesse est. Quot igitur inter unitatem et a una sibi proporcione succedunt, totidem inter

---

(75) quadratum] quadratus.

a et b continua proporcionalitas (76) exigit. Quoniam ergo inter a et b duo numeri continua proporcionalitate intercidunt, extremos solidos similes esse. Consequens est quorum cum a cubus sit, b cubicum non esse impossibile est.

⟨IX.4⟩ Si cubus in alium cubum ducatur, qui producitur cubus est.

Ut cum a cubus ex b cubo producat g, eum quoque cubum fore non ignoremus. Producit enim a ex se ipso numerum d, ex b vero eum qui est g. Quapropter ut a ad b sic d ad g constare convenit. Est igitur que inter a et b cubos, eadem inter d et g proporcio quorum cum d cubus sit, g cubum esse inevitabile est.

(Fol.58^{r}) ⟨IX.5⟩ Quociens numerus cubicus in alium ductus producit cubicus, in quem ductus est cubicum esse necesse est.

Ut si a cubicus ex b producat g cubicum, eciam b cubicum esse conveniat. Producit enim a ex se ipso d, ex b vero g, unde que inter d et g cubicos eadem inter a et b proporcio est. Est autem d cubicus igitur et b cubicum esse consequens est.
Ex his itaque procedit: si cubicus in alium ductus non producat cubicum, nec eum in quem ductus est cubicum esse. Sique cubicus in non cubicum ducatur, nec cubicum producere.

⟨IX.6⟩ Omnis numerus, qui in se ductus cubum producit, cubus est.

Ut cum a in se ductus b cubum pariat, eundem a cubicum esse constet. Nam a in se ductus b generat, idem in b ductus g cubum producit. Que ergo est inter g et b cubos, eadem est inter b et a proporcio quorum cum b cubicus sit, a cubicum esse constans est.

⟨IX.7⟩ Si numerus compositus in alium ducatur, numerum solidum produci necesse est.

---

(76) proporcionalitas] proporcionalitatis.

Utpote a compositus numerus cum ex b producat g, productum solidum esse. Cum enim a compositus sit, erit alter qui eum numeret sitque hic d. Quociens ergo d numerat a tot unitates habeat e sicque e multiplicatus per d conficit a, igitur a cum in b ductus producat g, productum solidum esse necesse est.

⟨IX.8⟩ Quotlibet numerorum ab unitate continue proporcionalium tercius ab unitate quadratus erit sicque deinceps singulis interiectis. Quartus autem ab unitate cubicus ac deinceps binis intermissis, septimus demum pariter quadratus et cubicus sicque deinceps quinis internumeratis.

Sit enim inter numeros ab unitate una proporcione continue sibi succedentibus, tercium d quadratum, quartum vero g cubicum, sicque deinceps hic quadratos hic cubicos subsequi. Proponimus ut in uno semper utrumque genus concurrat. Quociens enim unitas numerat a tociens a numerat b, numerat autem unitas a quociens in ipso est, sic igitur a in se ductus producit b. Est ergo b quadratus qui tercium ab unitate locum occupat. Deinde quantus b ad g tantus g est ad d. Cadit igitur inter b et d tercius continua proporcione una. Cum itaque b quadratus sit, d quoque quadratum (fol.58^{v}) esse necesse est, sicque deinceps. Sic quoque si quanta est unitas ad a tantus a ad b tantusque b ad g. Quociens unitas numerat a tociens a numerat b tociensque b eum qui est g. Sic igitur a ex se producit b, ex b vero g, igitur g cubicus est qui quartum ab unitate locum obtinet. Deinde quantus g ad d tantus d ad e tantusque e ad z. Cadunt ergo inter g et z duo continua proporcionalitate numeri. Estque g cubicus, erit igitur et z cubicus, sicque deinceps. Est ergo z pariter cubicus et quadratus qui ab unitate septimus extitit atque ad hunc modum.

⟨IX.9⟩ Quotlibet numeris ab unitate continua proporcionalitate dispositis si proximus post unitatem quadratus est, erunt omnes quadrati; si idem cubicus, erunt omnes cubici.

Ac primum quadratos tractamus, deinde cubicos prosequemur. Si enim inter huiusmodi numeros post unitatem primus quadratus est dum tercium quadratum esse constet quoniam quantus est a secundus ad b tercium tantus b ad g quartum, eundem eciam quadratum esse necesse est sicque deinceps. Deinde si primus post unitatem secundus in ordine cubicus est, erunt omnes cubici. Producit enim a primus ex se ipso b quia ergo a cubicus est, erit et b cubicus, g vero ut quartus ab unitate est, cubicum esse constat. Cum ergo quantus b ad g tantus fit g ad d sicque g cubicus, et d cubicum esse consequens est sicque deinceps.

⟨IX.10⟩ Quotlibet numeris ab unitate continua proporcionalitate dispositis si proximus post unitatem quadratus non est, nec ullus sequencium quadratus erit nisi tercius ab unitate atque deinceps singulis intermissis. Sicque idem post unitatem proximus cubicus non est, nec ullus (77) sequencium cubicus est nisi quartus ab unitate ac deinceps binis internumeratis.

Ac primum de quadratis disserimus, deinde cubicos tractabimus. Si enim alter convenit quam dictum est, concedatur interim, si possibile est, g quoque qui in ordine quartus est esse quadratum quantusque est g ad b tantus b ad a (fol.59^{r}). Cum ergo b ut in ordine tercius quadratus sit, et a quadratum esse necesse est. Si ⟨ a ⟩ post unitatem proximus est, quapropter id impossibile est. Deinde si nec de cubicis ut dictum est ita visum fuerit, sit interim et quivis alius, ut numerus e, cubicus quantusque est e ad g tantus g ad a. Estque g in se ipso cubicus, erit igitur et a cubicus. Quidem quale sit facile constat.

⟨IX.11⟩ Quotlibet numeris ab unitate continua proporcionalitate dispositis si aliquis primus ultimum numerat, eum quoque qui post unitatem proximus numerabit.

Sequentur enim ab unitate una sese proporcione numeri a; b; g; d, quorum postremum d. Si quis primus numerat ⟨ d ⟩ necesse est ut

---

(77) ullus] ullius.

idem a eciam numeret. Sit enim e primus qui d numeret qui si non numerat a, erunt a et e ad invicem primi. Quociens igitur e numerat d tot unitates (78) sint in z, igitur e multiplicatus per z producit d quem a in g ductus quidem edidit. Cum igitur eorum ductus equales sint, eos iiii^{or} proporcionales esse necesse est. Ut quantus est e ad a tantus fit g ad z. Sint autem a et e ad invicem primi quique primi in sua proporcione minimi. Qui vero minimi reliquos sue proporcionis equaliter numerant, igitur e numerat g. Sintque itidem (79) quociens e numerat g tot unitates in h. Sic ergo e in h ductus conficit g quem dudum a ex b produxit. Hinc igitur eos iiii^{or} proporcionales esse consequens est. Ut quantus e ad a tantus fit b ad h quia vero a et e ad invicem primi sunt equaliter reliquos numerabunt, igitur e numerat b. Sintque itidem quociens e numerat b tot unitates in t. Sic ergo e ductus in t conficit b quem pridem a ex se ipso produxit. Unde eos tres proporcionales esse necesse est. Ut quantus est e ad a tantus fit a ad t in qua proporcione si e et a minimi sunt, eius proporcionis reliquos equaliter numerabunt. Ut igitur a numerat t, quem alium inter eos numeros ita preter a numerabit e. Nec igitur ad invicem primos esse, imo sic ab e numerari a plane monstratum opinor.

⟨IX.12⟩ In numeris ab unitate continue proporcionalibus minor maiorem numerat, aliquo numero in ea proporcionalitate sumpto.

Ut enim sese proporcionaliter ab unitate sequuntur a; b; g; d; e. Sit de minoribus g qui de maioribus eum qui est e numeret. Dicimus igitur in eadem esse proporcionalitate numerum quo hic illum numerat. In qua enim proporcione sunt g; d; e in eadem ab unitate numeri ad eos dispositi sunt unitas et a et b ut (fol.59^{v}) omnes unam continuam ordinent proporcionalitatem qui cum totidem sint quanta est unitas ad b tantum fore g ad e constans est. Quociens

---

(78) unitates] unites.

(79) itidem] idem.

igitur unitas numerat b tociens g numerabit e. Numerat autem unitas b quociens in ipso est, igitur et g numerabit e quociens unitas est in b qui in ea proporcionalitate inventus est.

⟨IX.13⟩ Quotlibet numeris ab unitate una sese proporcione sequentibus si qui post unitatem proximus est primus fuerit, maximum eorum non numerabit numerus (80) nisi de illa proporcionalitate.

Sequuntur enim sese ab unitate continua proporcionalitate numeri a; b; g; d quorum a primus est. Dico ergo quia maximum eorum d nullus preter hos numerabit. Quod si posse videatur, sit e numeris alienus ab hac proporcionalitate cui d numerare interim concedatur. Dic ergo numerus e aut primus quidem est aut compositus. Si primus est, quoniam de numeris ab unitate continua proporcione succedentibus quicumque primus postremum numerat necesse est ab eodem et primum numerari, cum e primus numeret postremum d, oportet ut idem et a primum numeret. Est autem a primus quapropter id impossibile est nec igitur e primum esse possibile est. Cum ergo compositus sit, eum ab aliquo primo numerari necesse est, nec vero ab alio quam a possibile. Si enim possibile est, numeret eum k primus. Si ergo k numerat e atque e numerum d, consequens est ut et k numeret d. Si ergo k primus est qui postremum d numerat, idem et primum a necessario numerabit. Qui cum primus sit, id impossibile est nec ergo preter a primus erit qui numeret e. Numerat igitur a numerum e, numerus autem e eum qui est d. Quociens igitur e numerat d tot unitates colligat z. Sic ergo e multiplicatus per z generat d quem pridem a ex g produxit. Quorum ductus cum equales sint, eos quattuor proporcionales (81) esse convenit ut quantus est e ad a tantus fit g (82) ad z (83). Numerat autem a nu-

---

(80) numerus] numeris.
(81) proporcionales] principales.
(82) g] z.
(83) z] g.

merum e, igitur et z numerabit g. Quociens autem ab unitate numeri una sese proporcione sequuntur minor maiorem numerat, aliquo de ea proporcionalitate numero ⟨sumpto⟩ . Nec vero e quo z numerat d de ea proporcionalitate est, nec igitur z aliquem de illis numeris esse possibile est. Deinde quociens z numerat g tot unitates componant h. Eodem igitur ordine atque modo quo usi sumus constat quoniam ut a (84) numerat z (85) sic h numerabit b eademque de causa que data est nec h de eis numeris esse fas est. Sunt ergo quociens h (86) numerat ⟨ b ⟩ tot unitates in numero t. Est itaque h aut(fol. 60^{r}) primus quidem aut compositus. Primum quidem esse ea racio non patitur qua consequens est dum ⟨ h ⟩ numerat b si primus esset eum et a numerare. Cum ergo compositus sit, ab aliquo primo numerari necesse est quem preter a alium esse impossibile est. Si enim preter a primus esset qui numeraret h, idem et b numerare cogeretur qui dum primus esset et a necessario numeraret qui primus est. Non est ergo primus preter a qui numeret b, igitur a numerat h. Nec vero t equalem esse a fas est neque enim t numerat b numero eius proporcionalitatis sed numero h, qui non est equalis a. Nec igitur equalis t erit a, numerat autem h numerum b quociens unitas est in t, igitur h ductus in t producit b quem a in se ipsum ductus procreavit. Tantus ergo est a in se ductus quantus t in h. Igitur inter t et h medius a proporcionaliter intercidit ut quantus est a ad h tantus fit t ad a. Numerat autem a numerum h, igitur et t numerabit a qui quoniam primus est nec illi equalis, id impossibile est. Nec ergo possibile est numeris (87) ab unitate continua proporcionalitate dispositis quorum post unitatem proximus primus sit, maximum ab aliquo numerari ab ea proporcionalitate extraneo.

---

(84) a] z.

(85) z] g.

(86) h] b.

(87) numeris] numerus.

⟨IX.14⟩ Si propositus fuerit numerus minimus quem dati numeri primi numerent, eum preter illos alius primus non numerabit.

Ut si propositus numerus sit a minimus quem dati b; g; d numerent ipsique primi, non erit preter hos primus qui eum numeret. Qui si esse contendatur sit interim e primus qui ab his diversus eum numeret. Quociens igitur e numerat a tot unitates sint in z. Itaque e ductus in z producit a. Est autem si numerum ex duobus productum aliquis primus numerat, ab eodem alterum illorum numerari. Numerat autem b numerum a quique quoniam primus est alterutrum illorum numerabit. Qui cum e tanquam primum non numerat, relinquitur ut b numeret ⟨z⟩ . Eundem quoque g atque d eodem pacto numerabunt qui si minor est a id impossibile est, datus est enim minimum quem omnes numerent.

⟨IX.15⟩ Si fuerint tres numeri continue proporcionales in sua proporcione minimi, necesse est quoslibet duos (88) ex eis coacervatos (89) ad reliquum esse primos.

Sequentur enim sese proporcionaliter numeri tres a; b; g quorum quilibet duo adunati fuerit numerus reliquo primus. Cuius argumento sumimus duos in ea proporcione primos d e et e z, quoque uterque alteri (fol.60^{v}) primus constat, itaque quidem ex z e ⟨in se ipso⟩ procedit a atque e d ⟨in se ductus⟩ producit g. Nam z ⟨e⟩ in d ⟨e⟩ ductus generat b. Est igitur inter z e et e d uterque alteri primus, est et totus z d primus utrique. Est itaque uterque numerorum z d et z e ei qui est e d primus. Quociens vero duo numeri ad quemlibet alium primi fuerint, numerus quem alteruter in alterum ductus conficit eidem illi primus erit, igitur ex d z in z e productus numero e d primus est. Cum autem numerorum duorum uterque alteri primus est, quem alteruter in se ductus producit numerus reliquo primus est, quem itaque d e in se ductus producit, ex d z

---

(88) duos] quilibet duos.

(89) coacervatos] coacertos.

in z e producto primus erit. Est autem d z in z e ductus d e in e z et z e in se ductus equalis. Estque z e in se ductus quem numerus a ⟨designat⟩ atque z e in e d ductus quem numerus b ⟨designat⟩ nam et e d in se ductus erat is quem g designat. Est itaque totus a et b quem d z in z e ductus procreant, qui ductus quoniam primus

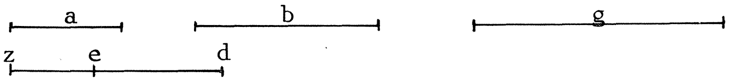

Fig.20

est e d in se ducto, constans est a et b simul acceptos primos esse reliquo. Quidem similiter ex altera parte sumitur ut eciam g et b coacervati reliquo primi existant. Restat et ut a et g simul aggregati ei qui est b primi existant. Est enim numerorum z e atque e d uterque et inter se alter alteri et ei qui est z d ipseque utrique (90) illorum primus. Quociens autem duo numeri ad alium quemlibet primi fuerint, quem alteruter in alterum ductus producit, numerus eidem illi primus erit. Quem igitur e z in e d ductus producit, numero d z primum esse necesse est. Cum vero numerorum duorum uterque alteri primus est, quem alteruter in se ductus producit reliquo primus erit, quem itaque z d ex se ipso produxit, numero quem z e in e d ductus ediderit primus est. Est autem d z in se ductus quantum e z et e d uterque in se atque e z in (91) e d bis ductus. Est ergo, quem e z et e d uterque in se atque z e in e d bis ductus producit, numerus ei, quem e d in e z ductus generat, primus. Cum itaque duplum detraxerimus, relinquitur, quem e z et e d uterque in se ductus generat, totum primum esse ei quem e d in e z ductus producit. Hic autem est b, ex illis vero processit a et g. Sunt igitur extremi quoque simul accepti reliquo primi.

⟨IX.16⟩ Si fuerint duo numeri ad invicem primi, quantus est primus eorum ad secundum tantum esse secundum ad tercium impossi-

---

(90) utrique] utrique utrique.

(91) e z in] e a z at.

bile est.

Ut cum a et b ad invicem sint primi, si possibile videatur tercium esse ad quem tantus sit b quantus ad b constat a, sit interim g. Cum igitur a et b ad invicem primi sint, in ea proporcione minimos esse convenit, qui vero minimi sue proporcionis reliquos (fol.61^{r}) equaliter numerant. Igitur a numerabit b, numerat autem omnis numerus et se ipsum, inventus est igitur qui utrosque numeret, qui quoniam ad invicem primi sunt, id impossibile est.

⟨IX.17⟩ Quotlibet numerorum continue proporcionalium si duo extremi ad invicem primi fuerint, quantus est primus ad secundum tantum esse ultimum ad quemlibet alium impossibile est.

Cum enim a; b; g proporcionalium extremi ad invicem fuerint primi, si quantus est a ad b (92) tantum g ad quemlibet alium existere posse videatur, conceditur interim d. Si ergo quantus a ad b tantus est g ad d, alternatim eciam quantus a ad g tantus erit b ad d. Sunt autem a et g ad invicem primi, quapropter et minimi itaque reliquos equaliter numerant (93), igitur a numerat b. Quotlibet vero numeris continua proporcionalitate ordinatis si primus secundum numerat, idem et ultimum numerabit, igitur a numerat b et g numeratque omnis numerus et se ipsum. Inventus est ergo communis qui hos tres numeret, qui quoniam ad invicem primi sunt, id impossibile est.

⟨IX.18⟩ Propositis duobus numeris an sit tercius eis proporcionalis sique fuerit, eundem ⟨invenire⟩ inquirimus.

Datis enim numeris a et b id primum animadvertendum est si ad invicem primi sunt. Tercium eis proporcionalem inveniri impossibile est. Qui si ad invicem primi non sunt, ductus b in se producat g. Si ergo a numerat g, concedetur quidem tercium illis existere posse proporcionalem, quem si non numerat, nec erit. Ac primum sit

---

(92) ad b] b ad.
(93) numerant] numerat.

ut numeret, quociens igitur a numerat g tot unitates habet d. Sic ergo a ex d producit g quem b ex se ipso generavit. Cum itaque ductus eorum equales sint, consequens est ut quantus a ad b tantus fit b ad d. Deinde si ex b productum non numerat a, proporcionalitatem illorum contenderis. Est igitur quantus a ad b tantus b ad d. Unde procedit ut tantum a in d quantus conficiat quantum b ex se ipso produxit. Produxit autem b ex se ipso numerum g, qui si ei quem a in d conficit equalis est, necesse est ab eodem a numerari g quem non numerat, quamobrem quem secundus generat si primus non numerat, eis aliquem proporcionalem esse impossibile est.

〈IX.19〉 Datis tribus numeris utrumne quartus eis proporcionalis quaque racione inveniendus sit investigamus.

Propositis enim tribus numeris a; b; g id primum est intuendum quoniam si duo extremi ad invicem primi fuerint, quartum eis proporcionalem inveniendi (fol.61^{v}) labor inefficax est. Qui si ad invicem primi non sunt, ductus b in g producat d quem si numerat a, quartum eis proporcionalem reperiri posse fatemur. Ac primum fit ut numeret. Quociens itaque numerat tot unitates colligat e. Sic igitur a ductus in e conficit d, quem b ex g produxit. Cum ergo ductus eorum equales sint, ipsi proporcionales erunt. Ut quantus est a ad b tantus fit g ad e (94) quartum videlicet eis proporcionalem. Ac vero si a non numerat d, nec illis proporcionalem quartum concedimus. Si enim contradictio id posse cuiquam attribuat, et erit interim e. Est ergo quantus a ad b tantus g ad e, tantum est igitur quem a in e ductus conficit, quantum b ex g producit. Producit autem d. Qui si equalis est ei quem a in e conficit, consequens est ab eodem a numerari d, quem non numerat quapropter id vacuum est.

〈IX.20〉 Assignatis quibuslibet numeris primis, primum aliquem ab eis diversum invenire intendimus.

Datis enim numeris primis a; b; g, assumimus primo numerum mi-

---

(94) e] d.

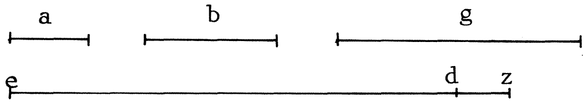

Fig.21

nimum quem omnes tres numerant, notis e d designatum, cui deinde addimus unitatem d z annotatam. Si ergo e z numerus primus est,is erit artificii finis. Qui si compositus est, numeret eum numerus primus quem h designet. Dico ergo numerum h primum esse a singulis datis diversum. Si enim illorum uni equalem est h, necesse est ut idem h numeret e d, numerat ac totum e z, numerabit igitur et reliquam eius partem que unitas est.

⟨IX.21⟩ Si quotlibet numeri pares coacerventur, totum ex eis collectum parem esse necesse est.

Si enim singuli, ut pares sunt, medium habent, et quod idem ponunt, medium habere convenit quapropter et parem esse consequens est.

⟨IX.22⟩ Si numeri impares numero pares coacerventur, totum ex eis collectum parem esse convenit.

Cum enim inter singulos eorum et pares singule intersint unitates si eedem eis unitates auferantur, remanebunt omnes numeri pares. Quibus si unitates detracte dum numero pares sunt, denuo addantur, totum collectum parem esse manifestum est.

⟨IX.23⟩ Si numeri impares ⟨numero impares⟩ coacerventur, totus ex eis collectus impar erit.

Nam si quemlibet unum detraxerimus, remanebunt impares numero pares, quos parem coacervare constans est. His si impar unus addatur, totus collectus impar erit. (fol.62^{r}).

⟨IX.24⟩ Pari numero si par detrahatur, par remanebit.

Cum enim parem numeri pares coacervent, quolibet detracto parem remanere constans est.

⟨IX.25⟩ Impari numero si numerus ⟨im⟩ par detrahatur, parem relinqui necesse est.

Nam si numero impari detrahatur unitas, par remanebit, cui si deinde par auferetur, parem relinqui constans est (95).

⟨IX.26⟩ Impari numero si par detrahatur, relinquitur impar.

Cum enim impari additur unitas, par efficitur de quo si deinde par auferatur, parem relinqui manifestum est. Demum itaque si cum hoc pari ablata fuerit unitas, ⟨im⟩ parem relinqui necesse est.

⟨IX.27⟩ Pari numero si detrahatur impar, remanebit impar.

Par siquidem de pari ablatus relinquit parem, cum hoc itaque si deinde unitas subtrahatur, imparem remanere consequens est.

⟨IX.28⟩ Numerus impar in numerum parem ductus parem producit.

Quem enim impar ex pari producit, is ex imparibus numero paribus coacervatus est, quem parem esse dudum constitit.

⟨IX.29⟩ Numerus impar in imparem ductus imparem producit.

Quem enim impar ex impari producit, ex imparibus numero imparibus coacervatur, quem imparem esse constans est (96).

⟨IX.30⟩ Quociens impar numerat parem, numero pari eum numerat.

Quod enim parem impar numerat, eum in aliquem numerum ductus producit, is autem aut par quidem erit aut impar. Imparem esse non

---

(95) est] est. Impari numero si numerus par detrahatur parem relinqui necesse est. Nam si numero impari detrahatur unitas pari remanebit cui si deinde par auferetur parem relinqui constans est.
(96) esse constans est] producit quem enim impar ex impari producit ex imparibus numero imparibus coacervatur quem imparem esse constans est.

patimur. Scimus enim impares numero impares imparem coacervare. Relinquitur ergo par quo impar numerus parem numerat.

⟨IX.31⟩ Quociens impar imparem (97) numerat, impari numero eum numerat.

Quod enim imparem impar numerat, eum ex aliquo numero produxit, qui si par est, scimus quoniam impares numero pares parem colligunt. Cum ergo imparem numeret, impari eum numerare necesse est.

(Fol.62^v) ⟨IX.32⟩ Si numerus impar metitur parem, eiusdem quoque dimidium metiri necesse est.

Impar siquidem, cum numerat parem, numero pari eum numerat, cuius medio quemcumque is impar numeraverit, autem quem toto numerabat, dimidium esse constans est.

⟨IX.33⟩ Numerus impar si cuilibet alii primus fuerit, eiusdem quoque duplo primus erit.

Nisi enim duplo quoque primus sit, erit numerus communis qui utrosque numeret imparem scilicet et duplum qui par est. Si ergo imparem numerat, ipse quoque impar est. Idem itaque si parem numerat, eius quoque dimidium metietur, numerum videlicet ad quem impar primus est. Unde consequens est numerum esse qui primos ad invicem numeret quod quidem impossibile est. Relinquitur cui numero quilibet impar primus fuerit, primum esse eiusdem duplo.

⟨IX.34⟩ Numeri a duobus dupli omnes sunt pariter pares.

Nam ut prima sit unitas, duo statim post ipsam eius duplus est, deinde si ab ipso et deinceps dupli continuatim succedant, omnes erunt pariter pares. Ex eo siquidem quod dupli sunt pares esse constans est, quod autem ab unitate continua proporcionalitate sese sequuntur, accidat non posse eos numerari ab ea proporcionalitate

---

(97) imparem] impares.

alieno numero nec nisi numero de eadem proporcionalitate, qui quoniam omnes pares sunt, necesse est quos pares paribus numerant omnes esse pariter pares.

⟨IX.35⟩ Similiter (98) numerus, cuius medietas est impar, est pariter impar.

Si enim pariter par esset, neque medium enim imparem esse possibile esset. Quod vero statim in prima particione impar (99) occurrit, pariter imparem esse manifestum est.

⟨IX.36⟩ Numerus a duobus non duplus cuius medietas non est impar, ⟨est impariter⟩ par.

Quod enim medietas eius non impar, pariter imparem eius prohibet. Nam quod a duobus non duplus, pariter parem esse non convenit.

⟨IX.37⟩ Numerorum continue proporcionalium si de secundo atque ultimo (100) equale primi dematur, quantum fuerit reliquum secundi ad primum tantum erit reliquum (fol.63^{r}) ultimi ad omnes precedentes simul aggregatos.

Sequuntur enim sese continua proporcionalitate numeri a b et g d et z h et t n, de quorum secundo atque ultimo cum ablata fuerint equalia primi e d et m n, dico quantus fuerit secundi reliquum g (101) e ad a b primum tantum fore m t residuum ultimi ad coacervatum ex cunctis precedentibus. Assumatur itaque primum n l (102) equale g d et k n e-

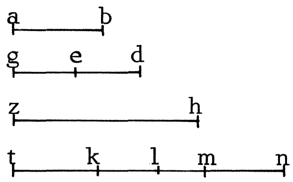

Fig.22

(98) Similiter] sin.
(99) particione impar] paritionem pardas.
(100) ultimo] ultimi.
(101) g] d.
(102) l] n.

quale z h. Cum igitur primo dati numeri et continua invicem succedant proporcione hique eis per ordinem equales, procedit ut quantus est t n ad k n tantus fit k n ad l n tantusque l n (103) ad m n. Deinde eadem de causa disiunctim quoque quantus fuerit t k ad k n tantus erit k l ad l n tantusque l m ad m n. In omni una proporcionalitate quantus est quilibet precedencium ad suum consequentem tantum esse totum ex cunctis precedentibus adunatum ad omnes consequentes simul aggregatos convenit. Quantus est igitur l m ad m n tantos esse t k et k l et l m coacervatos ad k n et l n et m n adunatos consequens est, id autem est totum m t sic constare ad k n et l n et m n. Est autem m n equalis a b et l n equalis g d et k n equalis z h. Cum ergo quantus est l m ad m n tantus fit g e ad a b, quantus est g e ad a b tantum esse ultimi reliquum t m ad z h et g d et a b omnes precedentes simul aggregatos plane demonstratum opinor.

⟨IX.38⟩ Continuatis ab unitate numeris duplis ut sunt II; IIII; VIII et deinceps si omnes simul cum unitate coacervati numerum primum reddiderint, qui ex tocius (104) coacervati in ultimum dispositorum ductu producitur, numerus perfectus est.

Succedunt enim ab unitate ordine continuo numeri dupli a; b; g; d, qui pariter cum unitate simul omnes aggregati colligunt e numerum primum, hic igitur ductus in d ultimum producerit numerum z h quem eiusmodi natum origine eaque productum racione perfectum esse proponimus. Ac primum quot dati sunt ab unitate dupli totidem coacervato ex omnibus e numero duplos eodem ordine subiungimus ut quot quaque racione sese sequuntur a; b; g; d, totidem eodemque pacto sibi succedant e et t k et l et m. Cum ergo et in numero pares eademque utrique racione cohereant, extremorum quoque eadem lex est ut quantus fuerit a ad d tantum e ad m fore necesse sit. Quantum igitur ex mediis in invicem ductis producitur (fol.63^{v}) tantum

---

(103) n] m.

(104) tocius] totus.

extremorum in se ductus generare consequens est. Produxit autem e ex d numerum z h, eundem igitur et a ex m producere constans est. Est autem a binarius, est igitur z h duplus m numeri. Sumptus(105) est autem m duplus numero l sicque deinceps ut dictum est versus ad e. Sunt igitur ab e versus ad z h quinque numeri una proporcione continuati. Accidit ergo ut si de secundo atque ultimo equalia primi demantur, quantum fuerit secundi reliquum ad primum tantum fore ultimi residuum ad coacervatum ex cunctis precedentibus. Cum ergo de utroque primi equalia k c et h y resecta fuerint, quantum fuerit t c secundi reliquum ad e primum tantum erit y z ultimi residuum ad omnes precedentes simul aggregatos. Quia vero totum t k duplum datum est e numero, cum equum eius ablatum sit k c, quod remanet c t eidem equum esse necesse est, ut igitur c t secundi reliquum equum est e primo, sic z y residuum ultimi cunctis precedentibus coacervatis equum esse constans est. Extitit autem numerus e pridem equalis cunctis ab unitate duplis numeris ad d cum ipsa pariter unitate simul aggregatis. Cum igitur e numerus equalitatem h y de z h resecti sortiatur sitque residuum eius omnibus interiacentibus ver-

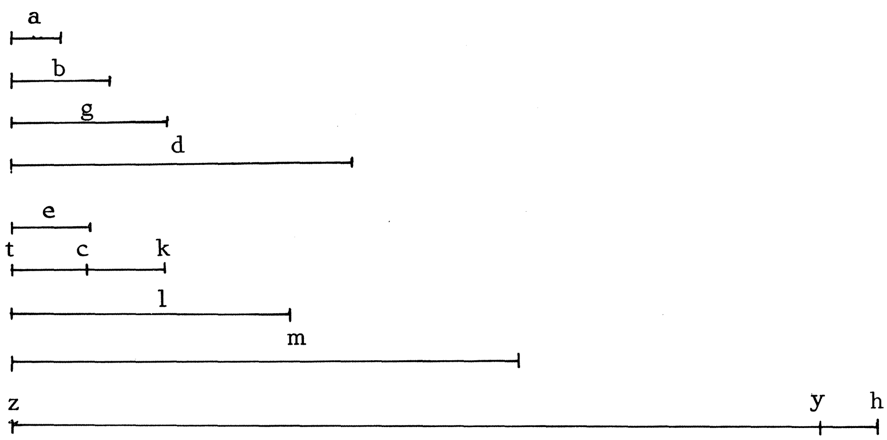

Fig.23

---

(105) Sumptus] Sumptus est autem n duplus m numeri. Sumptus.

sus ad m numerusque e cunctis ab d versus ad unitatem succedentibus cum ipsa pariter ‹unitate simul aggregatis› equalis, numerum z h cunctis partibus suis equalem perfectum esse demonstratum opinor. Incunctanter enim hunc numerum a numero preter hos, qui in ipso dispositi sunt, omnes alio numerari posse patetur. Verumtamen scilicet his ut assolet forte contradictionis error obveniet (106), dabimus locum interim. Esto namque numerus quilibet sicque maius n nota designatus qui ullum illorum (107) metiri frustra laboret. Dic ergo quociens n numeret z h tot unitates colligat f igitur n ductus in f producit z h quod dudum e ex d produxit. Si ergo ductus eorum equales sunt, eos proporcionales esse constans est ut quantus fuerit f ad e tantus fit d ad n conversoque quantus e ad f tantus fit n ad d. Non est autem n ullus eorum qui ab unitate proporcionaliter veniunt versus ad d quare nec n numerabit d numerum. Quantus autem n ad d tantus extitit e ad f nec igitur e numerabit f numerum. Est autem e natura primus, sunt igitur e et f ad invicem primi. Qui vero primi in sua proporcione minimi. Minimi vero proporcionis sue ceteros equaliter numerant. Igitur f numerat d. Quotlibet autem numeris ab unitate continua proporcionalitate ordinatis minor maiorem numero de ea proporcionalitate metitur. Est igitur f dispositorum ab unitate versus ad d uni alicui equalis sicque sumatur (108) f equalis b, quot ergo sunt numero ut sese sequuntur b; g; d, totidem sumantur ab e in eadem proporcione, e videlicet et t k atque l. Cum ergo numero sint pares eademque utrique nectantur proporcione, extremos quoque eodem pacto constare (fol.64^r) necesse est. Ut quantus est b ad d tantus fit e ad l, necesse est igitur quantus medii in invicem ducti generant tantum extremos ex se invicem producere ut quantum e in d ductus reddidit tantum b ex l producat. Fuit autem e in d ductus f in n ducto equalis. Erit igitur et b in l

(106) obveniet] obviet.

(107) ullum illorum] nullius illorum hc̄.

(108) sumatur] simatur.

ductus eidem f in n ducto equalis. Sic igitur et habitudo eorum eadem ut quantus est b ad f tantus fit n ad l, fuit autem f idem qui b. Erit igitur et n idem qui l. Primum autem sumptus est n nullius illorum qui in z h dispositi sunt que duo simul eidem inesse vel existimari absurdum est. Eum ergo numerum, cum totum in ipso dispositi omnes omnibus alienis reiectis perficiant, perfectum esse necesse est. Perfectus siquidem numerus cunctis partibus suis equalis individua natus origine eadem proporcione compactus nihil extraneum assumens nihil sui reliquens gemina proprie essencie plenitudine integer ad omnem rerum perfectionem aptissimus est. W'a delicah me aradene en nebeienne W'a hed horatu'.

⟨ LIBER X ⟩

⟨Definitiones⟩ ⟨i⟩ Quantitates quibus fuerit una quantitas communis eas numerans, dicentur communicantes. Quibus enim non est una communis quantitas eas metiens, dicuntur incommensurabiles.

⟨ii⟩ Linee in potentia communicantes sunt quarum superficies quadratas una communis superficies metitur. Linee incommensurabiles in potentia sunt quarum superficies quadratas una communis non numerat superficies. Que cum ita sint manifestum est quod omni linee proposite multe alie sunt incommensurabiles, quedam in longitudine tantum, quedam et in longitudine et in potentia.

⟨iii⟩ Omnis itaque data linea cum qua ratiocinemur vocetur rationalis lineeque ei communicantes rationales. Eidem vero incommensurabiles, dicentur mute.

⟨iv⟩ Omnis eciam quadrata superficies qua ratiocinemur dicenda rationalis. Superficiesque ei communicantes rationales. Eidem enim incommensurabiles superficies dicuntur irrationales sive mute. Latera demum que supra illa quadrata possunt, irrationalia.

⟨X.1⟩ Propositis inequalibus duabus quantitatibus si maiori (fol.64^{v}) dimidio magis detrahatur, itemque de reliquo magis dimidio ac deinceps ad hunc modum, necesse est ut tandem propositarum quantitatum minore minus relinquatur.

Datis enim quantitatibus duabus e videlicet ‹ et a d › atque a d maior est, si de a d apud g plus medio recidatur itemque de reliquo a g medio plus apud b sicque huiusmodi continuus fiat decensus, oportet tandem minus quam e relinqui sitque id si placet a b. Multiplicamus igitur e quo ad multiplicatio maior a ‹ c › crescat quam est a d, quam deinde z k notis designatam per e quantitatem quociens illi detractum apud h et t secamus. Tociens deinde et a b multiplicamus eamque multiplicatione l c annotatam per a b quantitatem quociens illa facta est apud m et n dividimus. Sunt itaque singule z k partes quantitati e singuleque eius que est l c ei quam a b notant equales. Est autem a b minor quam b g sicque b g minor quam g d. Est ergo g d maior quam c n sicque g b maior quam n m, cum igitur a b ei que est l m equalis sit erit nimirum totum a d toto c l maius. Maius autem factum est z k quam a d, maius erit ergo z k quam c l quarum partes et in numero totidem fuerint idemque quantitatis modus utrisque. Necesse est ut totum toti sic singulas antecedentis partes singulis consequentis partibus constare. Maior est igitur h z quam l m. Est autem l m equalis a b sicque z h equalis e. Est ergo propositarum quantitatum minore, ‹ plus quam › mediis de maiore continuo demptis, minus tandem relictum.

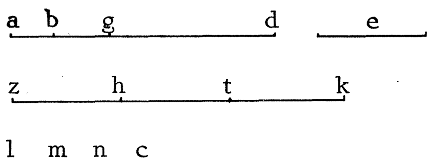

Fig.24

‹X.2› Inter quantitates duas inequales si maiori minoris equum detrahatur quoad minore minus fuerit ac deinde reliqui equale minori auferatur donec ipso minus restat ac rursus de reliquo primo equum reliqui secundi quoad usque et ipso minus relinquatur atque deinceps ad hunc modum nullumque in huiusmodi continuo descensu reliquum occurat (fol.65^r) quod ante relictum numeret, hee due quantitates sunt incommensurabiles.

Ut quantitatum a b et g d si huiusmodi succedant decrementa nec supersit quod ante relictum numeret, dico non esse quantitatem que

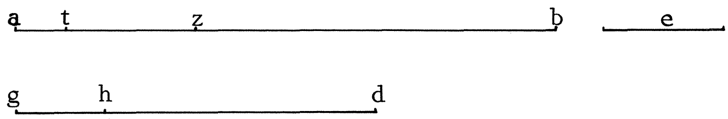

Fig.25

utramque metiatur. Quia tamen si possibile est, sit interim e communis utramque numerans. Cum itaque g d numeret b z, relinquitur minus z a que cum h d numeret, remanet minus g h atque hec cum t z metiatur, relinquitur minus a t. Necesse est tandem ut si ad hunc modum de a b continua fiat detractio, tandem inquam minus quam e relinqui sitque id, si maius, a t. Si ergo e communiter utramque numerat, numerabit b z, numerabat autem totum a b, numerabit igitur a z quapropter et h d que nota totum et g h quamobrem et t z, numerabat autem totum a z, numerabit igitur et a t maior minorem. Quod cum facile constet, restat eas quantitates esse incommensurabiles.

⟨X.3⟩ Datis quantitatibus duabus inequalibus communicantibus maximam quantitatem eas communiter numerantem invenire iubemur.

Propositis enim a b et g d si minor g d numerat eam que est a b dum et se ipsam metitur, ea quidem est maxima communiter utramque numerans. Quod si non numerat si minoris equum maiori detraxerimus donec minore minus supersit ac deinde reliqui equum de minore rursusque reliquum de reliquo sicque deinceps, quoniam communican-

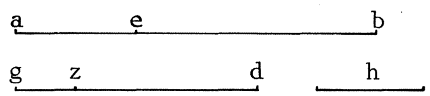

Fig.26

tes sunt necesse est tandem que ante relictum numeret quantitatem relinqui sitque hec si placet g z. Eam itaque dico maximam communem utramque numerantem. Quia enim g z ante relictum e a (109)

---

(109) a] k.

numerat, numerabit et z d, metitur autem et se ipsam, numerat ergo totam g d, quapropter et eam que est a e, numerabat autem b e, igitur et totam a b. Est itaque g z maxima utrique communis. Cui si forte alia qualis est h maior hac utramque numerans opponatur, dic ergo si h utramque numerat, numerabit a e sique totam et eam que b e, igitur et z d, numerabat totam g d, numerabit ergo et eam que est g z maior minorem quod quoniam planum est relinquitur g z maxima utramque numerans.
Unde procedit omnem quantitatem que duas quantitates numerat, maximam quoque numerare utramque numerantem.

⟨X.4⟩ Propositis quantitatibus inequalibus communicantibus (fol. 65^{v}) maximam communem eas numerantem invenire docemus.

Datis iii quantitatibus a; b; g communicantibus nec equalibus duarum in primis a scilicet et b maximam communem inveniemus sitque hec d que terciam si numerat, erit equidem maxima omnium communis. Cui si e quantitas alia et hac fortis si maior et illis communis obviet, consequetur equidem ut si a et b numerat quarum maxima communis reperta est d et eandem metiri oportere qua maior est. Quod si d terciam g non numerat, investigabimus maximam communem g et d quam e designare potest. Numerat igitur e quantitates g d, metitur autem d eas que sunt a et b, easdem ergo et e numerabit, hec igitur est maxima communis omnium. Si enim et hinc alia quelibet qualis est z contra nitatur, contradictio proiecta est. Nam si omnes numerat, et a b numerabit, igitur et eam que est d. Est autem e maxima communis g et d et eandem itaque z numerare comprobatur, quapropter maiorem esse impossibile est.

⟨X.5⟩ Omnium duarum quantitatum communicantium proporcio alterius ad alteram est quam numeri ad numerum.

Ut cum sint a et b communicantes, erit a ad b tamquam numerus ad numerum. Si enim communicantes sunt, communis eos una metitur quantitas, sit itaque g communis utrique. Deinde ergo numeret g quantitatem a numero unitatum d numeri numeretque b numero unitatum e. Quota ergo pars unitas numeri d tota est g quantitatis a quotaque unitas in e tota g in b. Quanta est ergo unitas ad d tanta g ad a. Converso itaque quanta d ad unitatem tanta est a ad g quantaque unitas ad e tanta g ad b, igitur et extremorum eadem est proporcio que numerorum videlicet et quantitatum communicantium.

⟨X.6⟩ Si fuerit proporcio quantitatum alterius ad alteram quam numeri ad numerum eas quantitates communicantes esse necesse est.

Ut sique g et d numerorum eadem sit a et b quantitatum proporcio eas esse communicantes. Quod ut facile constet designata primum unitate cedemus quantitatem a numero unitatum g numeri sitque singulariter parcium quantitas e deinde equum e tociens autem in quantitate z quot unitates sunt in numero d pariterque ita e communis utramque numerabit. Quota est ergo unitas in numero g tota pars est e in quantitate a converso itaque quantus g ad unitatem tanta est a ad e quantaque unitas ad d tanta e ad z. Que ergo est g ad d proporcio ea est a ad z fuit autem eadem (fol.66^r) a ad b, equales sunt ergo z et b suntque a et z communicantes igitur a et b communicantes esse necesse est.

⟨X.7⟩ Omnium duarum superficierum quadratarum quarum latera longitudine communicant, proporcio alterius ad alteram est quam numeri quadrati ad numerum quadratum. Sique superficiei quadrate ad superficiem quadratam proporcio fuerit que numeri quadrati ad numerum quadratum, erunt quoque latera earum longitudine communicantia. Si enim superficiei quadrate ad superficiem quadratam proporcio fuerit non que numeri quadrati ad numerum quadratum, latera earum longitudine incommensurabilia sunt.

Nam ut sint a et b linee communicantes, superficierum earum dum quadrate sint que numerorum quadratorum proporcio erit. Cum enim a et b communicantes sint, que numeri ad numerum earum est proporcio sintque hii numeri g et d, deinde g in se ductus producit e sicque d numerum z. Sunt igitur e et z numeri quadrati lateraque eorum g et d. Est autem a et b tetragonorum proporcio que laterum earum a et b proporcio geminata, sicque e et z proporcio que inter g et d bis accepta. Sunt ergo e et z numerorum atque a et b tetragonorum proporciones equales.

Constiterunt autem e et z numeri quadrati, igitur a superficiei quadrate ad b superficiem quadratam que numeri quadrati ad quadratum est proporcio, que causa sit et latera earum esse communicantia. Cum enim numerorum quadratorum proporcio sit que laterum eorum geminata sicque superficierum quadratarum que laterum earum bis accepta sintque numerorum latera g et d, superficierum a et b eritque g et d numerorum eadem a et b quantitatum proporcio igitur communicantes esse necesse est.

Restat ut si superficierum quadratarum non fuerit proporcic que numerorum quadratorum, nec earum latera esse longitudine communicantia. Si enim longitudine communicant, superficies earum quadratas quadratorum proporcione numerorum constare necesse est.

⟨X.8⟩ Si due quantitates uni communicant, ipsas quoque communicantes esse necesse est.

Ut cum a et b quantitates ei que est g communicent, inter se quoque communicantes erunt. Cum enim a et g communicent, erit earum proporcio que numeri ad numerum (fol.66^{v}) sitque ut d et e numerorum. Item cum g et b communicent qua numerus ad numerum proporcione constabunt sintque hii numeri z et h. Est ergo ⟨a⟩ et g ea d et e, qua g et b ea z et h proporcio. Asumamus itaque minimos numeros in horum proporcione continuo proporcionales utque est d ad e ea fit t et k, qua inter z et h eadem fit k ad l proporcio. Est ergo quantus a ad g tantus t ad k quantusque g ad b tantus k ad l, igitur et extremorum eadem est proporcio. Cum ergo qua numeri ad numerum ea fit a et b quantitatum proporcio, eas communicantes esse consequens est.

⟨X.9⟩ Si due quantitates communicantes fuerint, totum eciam ex eis compositum utrique earum communicabit. Sique totum utrique communicans fuerit, ipsas quoque communicantes esse necesse est.

Ut si a b et b g communicent, totum a g utrique communicans erit.

Nam cum a b et b ⟨g⟩ communi ⟨cantes⟩ essent, esto communis utramque numerans d. Quoniam itaque d utramque partem numerat, et totum utique numerabit, igitur totum utrique parti communicans esse consequens est. Qua causa sit et ipsas esse communicantes. Cum enim g a et a b communicent, sit item communis utramque numerans d. Quia totum a g ⟨et a b⟩ numerat, numerabit et b g igitur a b et b g communicantes esse necesse est.

⟨X.10⟩ Inter iiii^{or} quantitates proporcionales si prima secunde communicans fuerit, necesse est terciam quarte communicare. Si enim prima secunde incommensurabilis est, erit et tercia quarte incommensurabilis.

Ut si qua a et b eadem sit g et d proporcio sintque a et b communicantes, erunt et g d communicantes. Cum enim a et b communicent, erit proporcio earum que numeri ad numerum. Que vero inter a et b eadem est inter g et d, que ergo numeri ad numerum ea est g et d proporcio, igitur et eas communicantes esse necesse est. Contra quoque si a et b incommensurabiles sunt, et g d incommensurabiles esse consequitur. Cum enim a et b incommensurabiles sint, nec proporcio earum erit que numeri ad numerum. Est autem que a ad b eadem g et d proporcio, igitur nec g ad d qua numerus ad numerum proporcione constabit, quapropter et eas incommensurabiles esse necesse est.

⟨X.11⟩ Proposite linee duas incommensurabiles alteram in (fol. 67^{r}) longitudine tantum, alteram in longitudine et potentia invenire iubemur.

Ac primum a linea proposita designentur numeri duo b et g quorum proporcio non que numeri quadrati ad numerum quadratum, deinde que inter b et g, ea proporcione a tetragonus ad d tetragonum statuatur. Cum itaque b et g proporcio sit non que numeri quadrati ad numerum quadratum, d et a lineas longitudine tantum incommensurabiles esse constans est.
Assumantur deinde inter a et d tercia proporcionalis e. Erit ergo

que inter a et d lineas, ea inter a et e tetragonos proporcio, quapropter e et a potentia incommensurabiles esse consequens est.

⟨X.12⟩ Inter quatuor lineas proporcionales si prima tanto amplius potest secunda, quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine communicantis, necesse est terciam quoque tanto amplius posse quarta, quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine communicantis.

Nam si prima tanto potentior est secunda quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine incommensurabilis, erit et tercia tanto potentior quarta quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine incommensurabilis.

Sunt enim proporcionales linee quatuor, que a ad b eadem g ad d proporcio. Si igitur a supra b sive communicantis sibi sive incommensurabilis linee quadrato potuerit, poterit et g supra d eodem modo ad ipsum statute linee quadrato. Cuius argumento statuimus a tetragonum pariter b et e tetragonis equalem sicque g quadratum sumimus d et z quadratis, potest itaque a supra b tetragono e linee sicque g supra d linee z quadrato. Cum igitur que a ad b ea fit g ad d, proporcio que fuerit e et b tetragonorum pariter ad tetragonum b, eadem erit z et d quadratorum simul ad quadratum d, igitur disiunctim eciam qua e tetragonus ad eum qui est b, eadem z ad d quadratum proporcione constare necesse est. Converso quoque nihilominus qua b ad e, eadem d ad z, igitur et extremorum eadem est proporcio, que inter a et e, eadem inter g et z. Sive ergo e linea ei que est a longitudine communicet sive incommensurabilis sit, eodem modo z ad g consistere necesse est. Sive ergo a supra b communicantis sibi longitudine linee sive incommensurabilis tetragono possit, consequens est g supra d eiusdem ad se habitudinis linee posse quadrato (fol.67^{v}).

⟨X.13⟩ Inter inequales lineas duas si longiori superficies apposita tetragoni brevioris quadranti equalis cui ad complementum linee quadrata superficies desit, ipsa lineam in geminas partes communicantes dividit, necesse est longiorem quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine communicantis, tanto breviore amplius posse.

Converso quoque si duarum inequalium linearum longiori quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine communicantis tanto supra breviorem potenti superficies tetragoni brevioris linee quadranti equalis apponatur cui ad complementum linee quadrata superficies desit, ipsam lineam in geminas partes communicantes dividere necesse est.

Sunt enim inequales linee due a et b g, brevior a, apponimus itaque longiori superficiem b d in d g equalem quadranti a linee tetragoni cui ad complementum b g deest superficies quadrata d g linee sintque primum b d et d g communicantes. Dico itaque b g tanto a plus posse quantus est tetragonus linee cuiusdam ipsi longitudine communicantis. Quod ut plane constet,fiat e d equalis d g. Cum itaque b d in d g quadranti a tetragoni equalis sit, erit in a tetragono b d et d g quater repetita, sit itaque b e tetragonus utrique communis. Sunt igitur a et e b tetragoni pariter equales b d in d g quater atque b e quadrato, sed b d in d g quater ipseque b e tetragonus simul tocius b g linee quadrato equalia sunt. Sic igitur et a atque e b tetragoni pariter b g quadrato equales sunt. Potest ergo b g supra a quantum est e b linee quadratum. Sunt autem b d et d g communicantes, igitur et b g utrique communicat. Sed quoniam e d equalis est d g, erit et ei que est g e communicans b g. Itaque converso quoque g b ei que est b e communicantem esse (fol.68^r) necesse est.

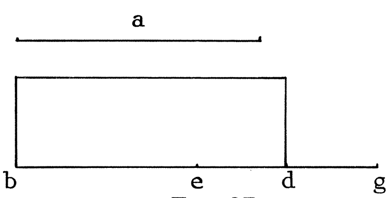

Fig.27

Potest itaque b g supra a quadrato linee sibi communicantis. Que causa sit et partes eius b d atque d g necessario esse communicantes. Est enim b g communicans e g atque e g ei que est (110) d g,

---

(110) est] cum.

igitur disiunctim et b d et d g communicantes esse consequens est.

⟨X.14⟩ Inter inequales lineas duas si longiori superficies apposita tetragoni brevioris quadranti equalis cui ad finem linee quadratum desit, ipsa lineam in duas partes incommensurabiles dividit, necesse est longiorem quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine incommensurabilis, tanto breviore amplius posse.
Converso quoque si duarum inequalium linearum longiori quantum est quadratum alicuius linee ipsi longitudine incommensurabilis tantum supra breviorem potenti superficies tetragoni brevioris linee quadranti equalis apponatur cui ad finem linee tetragonus desit, ipsam lineam in duas partes incommensurabiles dividere necesse est.

Inequales interea sunt linee due a et b g, brevior a, apponimus itaque longiori superficiem b d in d g equalem quadranti a linee tetragoni cui ad complementum b g deest tetragonus d g linee ac primo sint b d et d g longitudine incommensurabiles. Dico itaque lineam b g quantus est tetragonus linee cuiusdam ipsi longitudine incommensurabilis tantum supra a posse. Primum enim e d ei que est d g adequata (111) recteque, ut ante, b g linee potentia supra a tetragonum quantum est b e quadratum data consequenter ei que est b g linea b e longitudine incommensurabilis est. Si enim b e communicans est b g, necessario quoque b d et d g longitudine communicabunt. Quod quoniam non est, nec illud esse possibile est.
Potest itaque b g supra a quadrato linee cuiusdam ipsi longitudine incommensurabilis (fol.68^{v}). Que causa sit ipsas linee partes b d et d g longitudine esse incommensurabiles. Si non, necesse erit longiorem quadrato linee ipsi longitudine communicantis supra breviorem posse.

⟨X.15⟩ Omnis superficies rectangula duabus lineis longitudine

---

(111) adequata] adequato.

rationalibus contenta rationalis est.

Continetur enim lineis longitudine rationalibus superficies b g, dico ergo quia rationalis est. Cuius argumento constituimus supra a b tetragonum b d. Cum igitur a b rationalis sit, et b d rationalem esse consequens est. Est autem a g longitudine communicans a b estque a b equalis a d, igitur a g et a d longitudine communicant. Sic itaque b d et b g communicantes esse necesse est cumque b d rationalis, igitur et b g rationalem esse manifestum est.

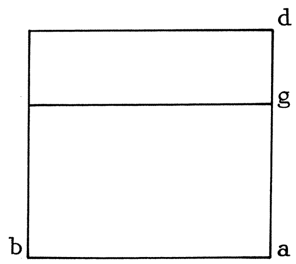

Fig.28

⟨X.16⟩ Cum apposita fuerit linee longitudine rationali superficies rectangula rationalis, erit latus secundum longitudine rationale priorique linee longitudine communicans.

Ut cum a b longitudine rationali adiuncta sit b g superficies rectangula rationalis, dico et a g latus rationale priorique communicans. Atque et huius evidentie constituimus supra a b tetragonum b d quem rationalem esse constans est. Data autem est et b g rationalis, sunt itaque b d et b (112) g communicantes. Est autem que inter d b et b g proporcio eadem inter d a et a g. Itaque d a et a g longitudine communicant. Sed a d equalis a b, igitur a g ei que est a b longitudine communicat cumque a b rationalis, igitur et a g rationalem esse consequens est.

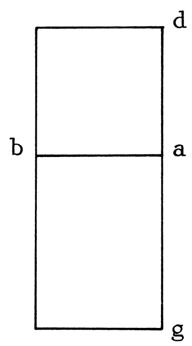

Fig.29

⟨X.17⟩ Lineas duas potentia tantum rationales communicantes

---

(112) b] d.

quarum longior quantus est tetragonus alicuius linee ipsi longitudine incommensurabilis tanto breviore amplius possit inveniri opus est.

Ac primum data a b linea longitudine rationali supra ipsam semicirculum a g b circinamus. Quo facto signamus numeros duos d e et e z eo videlicet pacto ut d z ad neutrum ea consistat proporcione qua numerus quadratus ad numerum quadratum (fol.69^{r}). Que vero inter d z et e z proporcio fuerit, eadem statuatur tetragonus a b ad tetragonum b g, deinde ergo b g et g a lineas producimus. Cum igitur tetragonorum a b et b g ea est proporcio que d z et e z numerorum eas longitudine incommensurabiles esse consequens est, communicant autem potentia estque a b longitudine rationalis, sed b g potentia tantum. Sunt igitur a b et b g potentia tantum rationales communicantes. Item quoniam que proporcio inter d z et e z ea est inter a b et b g tetragonos, converso quoque que inter z d et e d, eadem erit inter a b et a g tetragonos, quapropter a b et a g longitudine incommensurabiles esse constans est. Potest autem a b supra b g tetragono linee a g. Invente sunt igitur linee quas invenire propositum erat.

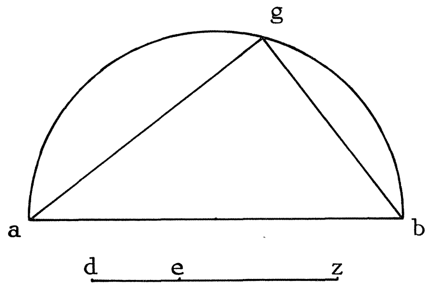

Fig.30

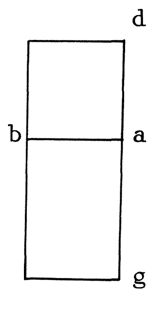

Fig.31

⟨X.18⟩ Omnis superficies duabus contenta lineis potentia tantum rationalibus communicantibus irrationalis est vel muta vocaturque medialis, linea quoque supra eam potens similiter muta vocaturque utraque medialis.

Continetur enim b g superficies lineis duabus a b et a g potentia tantum rationalibus communicantibus. Dico itaque mutam lineamque supra eam potentem eodem modo eodemque nomine medialem. Hic quoque ad propositi fidem supra a b tetragono b d constituto, quem rationalem esse dubium non est. Cum a b ei que est a g longitudine incommensurabilis sit sitque a d equalis a b, erit et a d ei que est a g longitudine incommensurabilis. Sic igitur et superficies b d et b g incommensurabiles erunt estque b d rationalis, relinquitur itaque b g irrationalis sicque altera supra eam potens muta vocaturque utraque medialis.

⟨X.19⟩ Cum apposita (113) fuerit linee longitudine rationali superficies equalis tetragono medialis (114) , erit secundum latus potentia tantum rationale priorique linee longitudine incommensurabile.

Ac primum datis lineis a mediali, b g rationali ubi a tetragono equalis superficies d g linee b g apposita fuerit, erit b d secundum latus potentia tantum rationale priorique linee longitudine incommensurabile. Cuius ⟨argumento⟩ componatur alia superficies equalis a tetragono duabus contenta lineis potentia tantum rationalibus (fol.69^{v}) communicantibus. Cum itaque tetragonus a utrique equalis sit, ipsas quoque superficies equales esse necesse est. Estque unius angulus e alterius angulo b equalis. Est igitur que proporcio e z ad b g, eadem d b ad e h, est autem e z ei que est g b potentia communicans, itaque d b ei que est e h potentia communicat. Fiet autem e h ei que est e z longitudine incommensurabilis, itaque superficies e z in e h incommensurabilis cum quadrato e h, superficies vero e z in e h equalis est b g in b d superficiei. Est

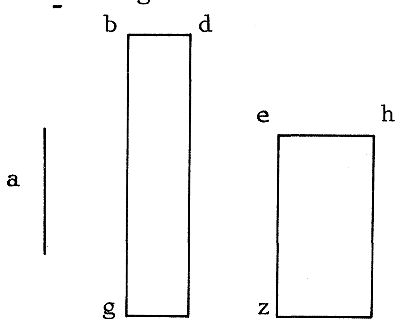

Fig.32

(113) apposita] opposita.
(114) medialis] mediali.

itaque superficies b g in b d tetragono b d incommensurabilis. Si ergo b d ei que est b g longitudine incommensurabilis est, est itaque b d potentia rationalis priorique linee longitudine incommensurabilis.

⟨X.20⟩ Omnis linea mediali communicans medialis est.

Ut cum b linea ei que est a mediali communicet, ipsam quoque medialem esse consequatur. Date siquidem linee g d rationali apponimus superficiem d e tetragono a equalem cuius secundum latus g e, deinde nihilominus e z linee adiungimus superficiem z h equalem b tetragono cuius secundum latus e h. Quoniam igitur a medialis et g d rationalis estque d e tetragono a equalis, erit g e potentia tantum rationalis ei que est g d longitudine incommensurabilis, hinc igitur et e h constat potentia rationalem ei que est e z longitudine esse incommensurabilem. Sunt igitur e z et e h potentia tantum rationales communicantes, est igitur et z h superficies et linea b supra eam potens medialis.

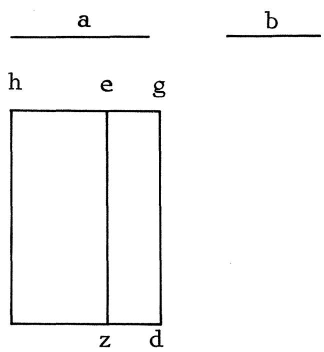

Fig.33

⟨X.21⟩ Additamentum medialis super medialem mutum.

Si enim rationale esse convenit, addit a b superficies medialis supra a medialem superficie rationali quam b notat. Apponatur itaque g d linee rationali d e superficies ei que est a b equalis cuius secundum latus g e, quo facto ubi de superficie d e equum a resectum fuerit, equalia relinqui constans est. Si ergo b rationalis est, et e h rationalem esse necesse est, que cum apposita sit z h linee, latus e z rationalem esse consequens est. Sunt autem a b, a mediales equalesque eis que sunt d e, d z quapropter et d e, d z mediales sunt que cum g d rationali apposite sint, erunt secunda latera e g,

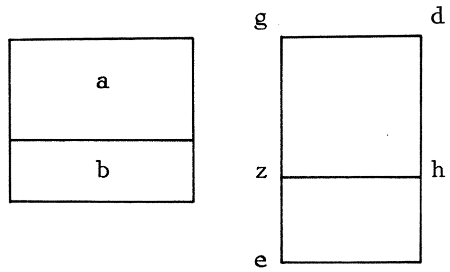

Fig.34

g z potentia tantum rationalia. Item a medialis, b rationalis, igitur incommensurabiles sunt, Sic ergo et g h, h e incommensurabiles erunt. Unde et g z ei que est z e incommensurabilis est. Itaque superficies g z in e z tetragono e z incommensurabilis. Verumtamen g z in e z communicans est duplo g z in e z, sicque g z tetragonus z e tetragono communicans. Duplum vero g z in e z utrisque tetragonis e z et g z incommensurabile (fol.70^r). Itaque simul omnibus acceptis erit totus e g tetragonus utrisque tetragonis e z, z g incommensurabilis, hii vero tetragoni rationales sunt, itaque g e tetragonus irrationalis. Quod cum g e dudum potentia rationalis extiterit, falsum est. Relinquitur ergo quod medialis supra medialem addit irrationalem.

⟨ X.22 ⟩ Omnis superficies duabus medialibus contenta lineis potentia tantum communicantibus aut rationalis est aut medialis.

Ut superficiem a b cum linee mediales a b et b g componant inter rationale et mediale alterutrum efficiant necesse est. Cuius demonstrationi componimus supra a b et b g tetragonos a d et e g, deinde z h linee rationali apponimus superficies tres t h equalem a d atque k l ei que est a g demumque m n tetragono g e. Cum igitur a b et b g mediales potentiaque tantum communicantes sint, erunt h t et m n mediales communicantes que cum h z rationali apposite sunt, utriusque latus t z, n l potentia tantum rationale alterique longitudine communicans est. Est itaque superficies t z in l n rationalis. Amplius d b equalis est b a sicque g b equalis b e. Est

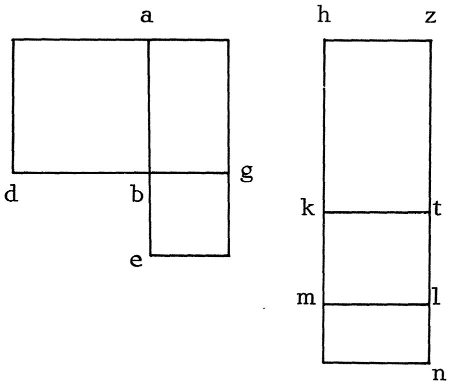

Fig.35

ergo que proporcio d b ad b g, eadem a b ad b e. Unde eciam que d a ad a g eadem sit a g ad g e proporcio consequens est. In eadem igitur et equales hiis superficies proporcione constare necesse est. Unde quoniam z t ad t l eadem t l ad l n proporcione consistere manifestum est, igitur t z in l n superficies t l tetragono equalis est. Cum itaque superficies t z in l n rationalis sit, t l potentia rationalem esse necesse est. Estque t k rationalis, est ergo t l ei que est t k longitudine aut communicans quidem aut incommensurabilis. Si ergo commensurabilis, erit t m rationalis, si incommensurabilis, erit t m medialis que quoniam equalis est a g equidem aut rationalem aut medialem esse manifestum est.

⟨X.23⟩ Mediales lineas duas potentia tantum communicantes superficiem rationalem continentes quarum longior quantus est (115) tetragonus linee ipsi longitudine communicantis tanto breviore amplius possit invenire propositum est.

Ac primum signatis lineis duabus potentia tantum rationalibus communicantibus a, b quarum a supra b longitudine sibi communicantis linee tetragono possit, inter duas terciam proporcionalem medio (fol.70^{v}) locamus, quam ubi g notaverit, sumpto g; b; d similiter

---

(115) est] cum.

continuo proporcionales, dico ergo g, d lineas esse quas invenire propositum erat. Cum enim a, b potentia tantum rationales communicantes sint, a in b superficies medialis est equalis tetragono g, est itaque g medialis. Item g; b; d proporcionales ut que est g ad b, eadem sit b ad d proporcio, alternatim ergo que proporcio est a ad b, eadem erit g ad d. Sunt autem a et b potentia tantum communicantes potestque a supra b tetragono linee longitudine sibi communicantis. Sic igitur et d ei que est g potentia tantum communicat sicque g supra d longitudine sibi communicantis linee tetragono poterit estque g medialis, igitur et d medialem esse consequens est. Amplius g tetragonus rationalis est, sic ergo g in d superficiem rationalem esse necesse est ut g, d lineas mediales potentia tantum communicantes certa inter sese quantitate distantes superficiem rationalem continere manifestum sit.

⟨X.24⟩ Mediales lineas duas potentia tantum communicantes superficiem medialem continentes quarum longior quantus est tetragonus linee ipsi longitudine incommensurabilis tanto breviore amplius possit invenire logice exigit.

Ac primum item lineis tribus potentia tantum rationalibus communicantibus a; b; g signatis potentiaque a supra g incommensurabilis sibi linee tetragono data, inter a et b terciam proporcionalem medio locamus. Qua d annotata, que proporcio est a ad g eadem d ad e conferimus. Sunt itaque d et e linee quas investigamus. Cum enim proporcionales sint, ut a quam g ita d tetragono linee sibi incommensurabilis magis quam e posse necesse est. Deinde quoniam a et b potentia tantum rationales communicantes sunt et est a in b superficies medialis d tetragono equalis, quapropter d medialis est. Itemque a ad g eadem est d ad e proporcio suntque a et g potentia communicantes, sic igitur d et e potentia communicant estque d medialis, igitur et e medialem esse consequens est. Amplius que proporcio est a ad g eadem d ad e, alternatim ergo que proporcio fuit a ad d eadem est g ad e, fuit autem que inter a et d eadem est d et b qua ergo est d ad b eadem nimirum g ad e proporcione constat.

Est itaque d in e equalis b in g estque b in g medialis, igitur d in e medialem esse necesse est. Sunt itaque d et e mediales potentia tantum communicantes certa discrete differentia (fol.71^r) medialem superficiem continentes (116).

⟨X.25⟩ Lineas duas potentialiter incommensurabiles superficiem medialem continentes quarum quadrata simul accepta rationale conficiant invenire necessarium est.

Primum itaque signatis videlicet lineis duabus potentia tantum rationalibus communicantibus a b, ⟨b⟩ g potentiaque a b quantus est tetragonus linee ipsi longitudine incommensurabilis b g potentie prelata, supra a b semicirculum a d b ducimus, lineam vero b g ad punctum e per medium dividimus. Deinde linee a b apponimus superficiem equalem b e linee quadrato ex a z in z b compositam pariterque a b bipartita a puncto z consurget perpendicularis versus ad d ad circumferentie contactum proveniens, demum igitur a puncto d ad ter-

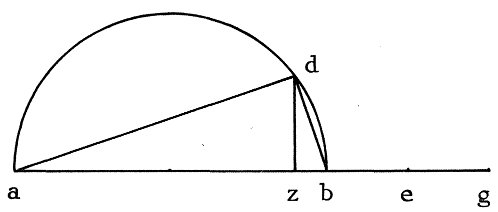

Fig.36

minos a, b due corde producte proposito sufficiant. Nam cum a b supra b g ipsi longitudine incommensurabilis linee quadrato possit pariterque b g tetragoni quadrans superficiei a z in z b equalis sit, a z et z b longitudine incommensurabiles esse necesse est. Triangulorum autem ex similitudine constat ut que proporcio est inter a z et z b eadem fit inter a d et d b tetragonos quapropter eos incom-

(116) continentes] continentem.

mensurabiles esse consequens est. Item cum tetragonus b e superficiei a z in z b equalis sit atque a z in z b equa d z quadrato, tam tetragonos quam lineas ipsas e b et d z equales esse necesse est. Amplius a b et b g potentia tantum rationales communicantes sunt estque b e dimidium b g, sunt itaque a b et b e similiter potentia tantum rationales communicantes. Est igitur a b in b e superficies medialis atque b e equalis z d, sic ergo a b in b e superficies medialis atque b e equalis z d. Sic ergo a b in d z superficiem medialem conficiat necesse est. Cum vero iuxta proporcionalitatis ordinem a b in d z equam esse a d in d b constans sit, erit nimirum et a d in d b medialis. Denique vero quoniam a b potentia rationalis data est, a b tetragonum rationalem esse convenit, qui cum equalis sit utrisque a d et d b tetragonis pariter acceptis, eosdem simul sumptos rationale quiddam esse consequens est. Invente sunt igitur a d et d b linee potentia incommensurabiles medialem superficiem continentes earumque tetragoni simul accepti rationale.

⟨X.26⟩ Lineas duas potentialiter incommensura ⟨biles⟩ superficiem rationalem continentes quarum quadrata simul accepta mediale conficiant (fol.71^{v}) invenire iubemur.

Similiter itaque primum item lineis duabus medialibus potentia tantum communicantibus que rationalem superficiem contineant, a b g designatis potentiaque a b ipsi longitudine incommensurabilis linee quadrato supra g b potentiam data, ea recta qua superius executi sumus. Hoc quoque propositum indagabimus industria ut lineas a d b quales intendimus assequamur. Constat enim ex supra datis a d et d b potentia fieri incommensurabiles estque superficies a b in b g rationalis. Sic igitur a b in b e quoque rationalis est sicque b e equalis d z atque a b in d z equalis a d in d b, est igitur a d in d b rationalis. Demumque tetragonus a b medialis eis qui sunt a d et d b pariter acceptis equalis est, igitur et eos simul sumptos mediale quiddam esse necesse est quas lineas potentia incommensurabiles rationalem continere superficiem monstravimus.

⟨X.27⟩ Lineas duas potentialiter incommensurabiles medialem superficiem continentes quarum tetragoni pariter accepti mediale alterius in alteram superficiei duplo sint incommensurabile invenire intendimus.

Atque huius quoque nihilominus artificii eadem fere que superiorum est ratio, nam et similiter notatis primum a b g lineis duabus medialibus potentia communicantibus que medialem superficiem contineant, eadem eciam quantitate a b potentiam tetragoni linee ipsi longitudine incommensurabilis supra b g vim efferimus solitoque deinde cetera prosequimur usu ut a d b lineas quales proposite sunt demum assequamur. Constat enim ex eis que supradicta sunt et lineas a d b potentia incommensurabiles medialem continere superficiem et earum tetragonos pariter acceptos medialem conficere (117) figuram, quam alterius in alteram superficiei duplo incommensurabilem esse demonstracioni solum superest quod deinceps assumimus. Date sunt enim a b g longitudine incommensurabiles cumque ita a b e quoque longitudine similiter incommensurabiles ⟨sint⟩ , est igitur a b tetragonus a b in b e superficiei sicque et duplo eius incommensurabilis. Tetragonum autem a b scimus a d b tetragonis simul acceptis equalem necnon superficies a b in b e superficiei a d in d b equalis est, utrorumque igitur et dupla equalia sunt. Sunt igitur a d b tetragoni pariter accepti mediale duplo a d in d b superficiei incommensurabile. Que cum potentialiter incommensurabiles medialem superficiem continere demonstrate sint, artificio finem imponunt.

⟨X.28⟩ Quociens due linee potentia tantum rationales communicantes directe iunguntur, totam lineam mutam fieri necesse est qua dulithmein id est binomium vocatur.

Iunguntur enim directe linee due a b g potentia tantum rationales communicantes. Dico itaque a g mutam dicendumque binomium. Nam

---

(117) conficere] officii.

cum a b g potentia tantum rationales communicantes sint, a b in b g superficiei duplum mediale esse consequens, tetragoni autem a b g pariter ambo rationales, igitur a b in b g superficiei duplo incommensurabiles, aggregatis itaque simul omnibus erit tocius a g tetragonus a b g tetragonis incommensurabilis, illi autem rationales. Relinquitur ergo a g tetragonus irrationalis quapropter et a g lineam mutam esse necesse est cuius nomen, ut dictum est, binomium.

⟨X.29⟩ Quociens mediales linee due potentia tantum communicantes superficiem rationalem continentes directe iunguntur, tota linea muta est vocaturque dulmonsithatein al awwalein qualis nos bimediale primum dicere possumus.

Iunguntur enim directe mediales linee due potentia tantum communicantes que rationalem superficiem contineant a b g, dico igitur a b mutam bimediale primum. Sunt interea a b g tetragoni pariter ambo mediales, duplum autem a b in b g superficiei rationale, hinc itaque duplo eos tetragonos incommensurabiles esse constans est. Simul igitur acceptis omnibus tocius a g tetragonum a b in b g superficiei duplo incommensurabilem esse necesse est, id autem duplüm rationale. Relinquitur ergo a g et tetragonus irrationalis quapropter et lineam a g mutam esse consequens est bimediale primum nominatum.

⟨X.30⟩ Quociens mediales linee due potentia tantum communicantes superficiem medialem continentes directe iunguntur, tota linea est muta vocaturque bimediale secundum.

Iunguntur enim directe mediales linee due a b g potentia tantum communicantes que superficiem medialem contineant. Dico igitur a g mutam bimediale secundum. Cuius argumento (fol.72^{v}) date d e linee rationali apponimus superficiem e z equalem ambobus a b g tetragonis cuius latus d z, necnon et h t superficiem duplo a b in b g superficiei equalem. Cum igitur et a ⟨b⟩ et b g tetragoni mediales et a b in b g duplum mediale sit, utramque superficiem medialem esse constans est. Quod tamen d e rationali apposite sint, laterum

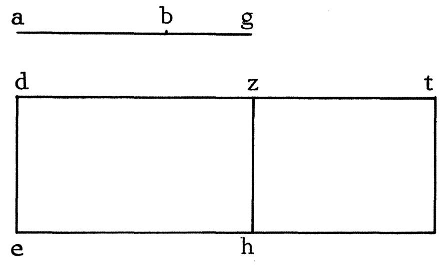

Fig.37

d z et z t utrumque potentia tantum rationale linee d e longitudine incommensurabile esse consequens est. Sunt autem et a b g longitudine incommensurabiles. Est igitur a b tetragonus a b in b g superficiei incommensurabilis. Que cum duplo suo communicans sit, ut is tetragonus pariter utrique, id duplum eis tetragonis incommensurabile esse necesse est. Quibus quoniam h d et h t superficies equales date sunt, erunt hee quoque superficies incommensurabiles. Sic igitur et d z, z t longitudine incommensurabiles esse consequens est, quas potentia rationales esse dudum constitit. Sunt ergo d z t linee due potentia tantum rationales communicantes. Quapropter totam d t mutam esse necesse est, fuit autem d e rationalis, tota ergo e t superficies muta est, igitur et lineam a g supra eam superficiem potentem mutam esse manifestum est.

⟨X.31⟩ Quociens linee due potentialiter incommensurabiles medialem superficiem continentes quarum tetragoni pariter accepti rationale directe iunguntur, tota linea muta est diciturque maior.

Iunguntur enim directe potentia incommensurabiles medialem continentes quarum quadrata simul rationale linee due a b g dico itaque a g mutam cui nomen maior. Si enim a b in b g medialis est, tetragoni autem a b g pariter accepti rationale, duplum a b in b g eis tetragonis simul incommensurabilem esse consequens est. Simul igitur omnibus acceptis tocius a g tetragonum a b g tetragonis in unum iunctis incommensurabilem esse necesse est. Qui cum sint rationale, relinquitur a g tetragonus irrationalis. Quapropter et lineam a g mutam esse manifestum est que maior appellatur.

⟨X.32⟩ Quociens linee due potentialiter incommensurabiles superficiem rationalem continentes quarum tetragoni pariter accepti (fol.73[r]) mediale directe iunguntur, tota linea muta est diciturque potens supra rationale et mediale.

Iunguntur enim potentia directe incommensurabiles rationalem continentes quarum quadrata simul mediale linee due a b g, dico itaque a g mutam supra rationale et mediale potentem. Cum enim a b in b g rationalis sit, tetragoni autem a b g simul accepti mediale, eos tetragonos pariter duplo a b in b g incommensurabiles esse consequens est. Aggregatis igitur utrisque tocius a g tetragonum a b in b g duplo incommensurabilem esse necesse est, id itaque duplum quoniam rationale est, relinquitur a g quam tetragonus irrationalis tam linea muta cui nomen supra rationale et mediale potens.

⟨X.33⟩ Quociens linee due potentialiter incommensurabiles medialem superficiem continentes quarum tetragoni in unum accepti mediale alterius in alteram duplo superficiei (118) incommensurabile directe iunguntur, tota linea muta est notaturque potens supra duo medialia.

Iunguntur enim directe potentia incommensurabiles medialem continentes quarum quadrata simul mediale alterius in alteram duplo incommensurabile linee due a b g, dico igitur a g mutam supra duo

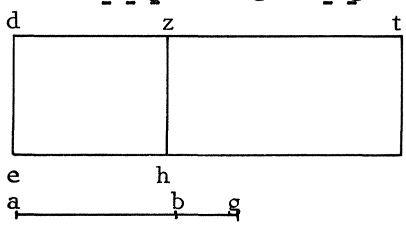

Fig.38

(118) superficiei] fit.

medialia potentem. Cuius demonstrationi date d e linee rationali apponimus superficiem e z ambobus a b g tetragonis equalem cuius secundum latus d z necnon et z t superficiem equalem a b in b g superficiei duplo. Quoniam igitur a b g tetragoni simul mediale sicque a b in b g duplum mediale est, utramque superficiem medialem esse manifestum est. Que cum d e rationali apposite sint, laterum d z et z t utrumque potentia tantum rationale linee d e longitudine incommensurabilem esse consequens est. Deinde quoniam a b g tetragoni simul a b in b g duplo incommensurabiles sunt hiique tetragoni pariter superficiei d h, duplum autem ei que est h t equale, ipse quoque superficies incommensurabiles erunt ut necessario et d z, z t longitudine incommensurabiles sunt quas potentia rationales esse pridem constitit. Cum igitur d z t linee due potentia tantum rationales communicantes sint, totam d t mutam esse constans est. Data vero est d e rationalis, est igitur e t superficies muta, potest autem supra e t superficiem a g linea. Iam igitur lineam mutam esse necesse est cui nomen potens supra duo medialia (fol.73^{v}).

⟨X.34⟩ Binomium in alias lineas infra terminum earum ex quibus iunctum est dividi non potest.

Ut cum a b linea binomium in eas lineas unde iuncta est apud g divisa sit, in alias ⟨inequales⟩ harum infra terminum dividi impossibile est. Si enim possibile est, dividatur apud d ut itaque linee due

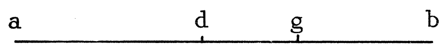

Fig.39

a g b potentia tantum rationales communicantes sunt estque a b in b g sicque et duplum eius mediale, erit similiter superficiei a d in d b duplum mediale. Est autem a b tetragonus pariter a g b tetragonis cum a g in g b duplo equalis. Equalis eciam nihilominus a d b tetragonis simul cum a d in d b duplo. Sunt igitur et ipsi inter se idem a g b tetragoni cum a g in g b duplo, duplo a d in d b et a d b tetragonis equales. Est ergo tetragonorum differentia ei quod inter dupla est additamento equalis. Tetragonorum autem alterius partis supra alteros quoniam utrique rationales sunt additamentum rationale, igitur et duplorum differentia rationalis est. Quod cum utrumque mediale sit, falsum est nec igitur binomium in alias qua tantum iunctum est sub earum termino lineas dividi potest.

⟨X.35⟩ Bimediale primum non nisi in suas mediales lineas dividitur.

Ut cum a b linea bimediale primum apud g in suas mediales divisa sit, in alias inequales harum infra terminum dividi non potest. Si enim possibile est, dividatur apud d. Constat igitur tetragonorum a g b atque a d b differentiam equalem esse ei que inter a g in g b atque a d in d b duplum est. Differentia est autem duplorum alterius supra alterum cum utrumque rationale sit, additamentum rationale, est igitur et tetragonorum differentia rationalis quidem quod quoniam utrique mediales sunt, falsum est. Nec ergo bimediale primum nisi in suas mediales dividi potest.

⟨X.36⟩ Bimediale secundum non nisi in suas mediales dividitur.

Ut cum a b linea bimediale secundum apud g in suas mediales divisa sit, in alias mediales sub harum termino dividi non potest. Si enim possibile est, dividatur apud d. Date igitur ad rei fidem e z linee rationali apponimus z h superficiem a g b tetragonis pariter equalem, necnon t k equalem a g in g b duplo. Eritque ita tota z k equalis a b tetragono. Si ergo tetragonorum a d b pariter equum

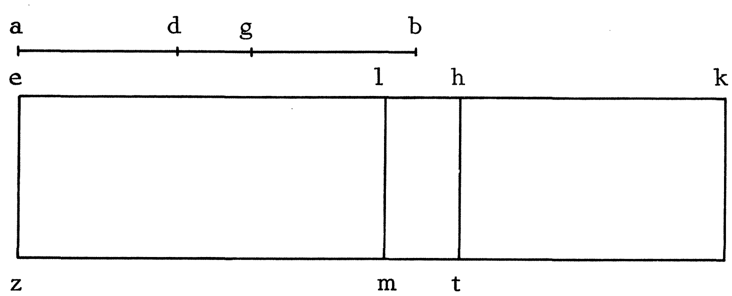

Fig.40

z l reciderimus, dupli a d in d b equum m k relinqui necesse est. Sunt autem a g b tetragoni ambo pariter mediale. Mediale quoque nihilominus a g in g b duplum, que cum e t et t k superficiebus equalia sint, ipsas quoque superficies mediales esse necesse est. (fol.74^{r}) Que quoniam e z rationali apposite sunt, laterum e h et h k utrumque potentia tantum rationale linee e z longitudine incommensurabilem esse consequens est. Deinde quoniam a g longitudine g b incommensurabilis est acciditque ita que proporcio est inter a g et g b eadem a g tetragonum ad a g in g b superficiem constare, eundem tetragonum ei superficiei incommensurabilem esse necesse est. Nec vero a g tetragonus a g b tetragonis pariter cum ambo communicantes sint, nec a g in g b superficies duplo suo incommensurabilis est. Sunt igitur a g b tetragoni pariter a g in g b duplo incommensurabiles. Quibus quoniam e t, t k superficies equales sunt, ipsas eciam incommensurabiles esse constans est. Unde et latera e h, h k longitudine incommensurabilia esse consequens est. Cum igitur e h k linee due potentia tantum rationales commensurabiles sint, e k linea binomium est que apud h in lineas unde iungitur divisa est. Eadem quoque ratione monstrare possumus eodem modo et apud l eandem dividi ut binomium et in alias lineas quam ex quibus iunctum est sub earum termino dividi contingat. Quod quoniam impossibile est nec bimediale secundum nisi in suas mediales dividi patitur.

⟨ X.37 ⟩ Linea maior in alias lineas earum infra terminum ex quibus iuncta est dividi non potest.

Ut cum a b linea maior in eas lineas unde iuncta est apud g divisa sit, in alias sub harum termino dividi impossibile est. Si enim possibile est, dividatur apud d. Constat igitur inter a g in g b atque a d in d b dupla alterius supra alterum additamento, tetragonorum autem cum utrique rationales sint, differentia rationalis est, igitur et duplorum differentiam rationalem esse convenit. Quod cum utrumque mediale sit, minime convenit. Nec ergo linea maior in alias quam ⟨ ex quibus ⟩ iuncta est in earum termino ⟨ dividi potest ⟩.

⟨ X.38 ⟩ Linea supra rationale et mediale potens in alias lineas quam ex quibus iuncta est earum sub termino dividi non potest.

Potest interea a b linea supra rationale et mediale que cum in eas unde iuncta est apud g divisa sit, in alias sub harum termino dividi non petitur. Si enim possibile est, dividatur apud d. Constat itaque tetragonorum a g b simul atque a d b pariter equalem esse differentiam ei que est a g in g b atque a d in d b duplorum alterius supra alterum additamento quod (fol.74^{v}) cum rationale sit, ipsa siquidem rationalia sunt et differentiam tetragonorum rationalem esse convenit. Cui quod hii mediales sunt, contra est nec ergo linea supra rationale et mediale potens in alias quam unde iuncta est earum sub termino dividi potest.

⟨X.39⟩ Linea supra duo medialia potens in alias lineas quam ex quibus iuncta est earum infra terminum non dividatur.

Potest enim a b linea supra duo medialia que cum apud g in lineas unde iuncta est divisa sit, in alias harum sub termino dividi impossibile est. Si enim possibile est, dividatur apud d. Date igitur ad

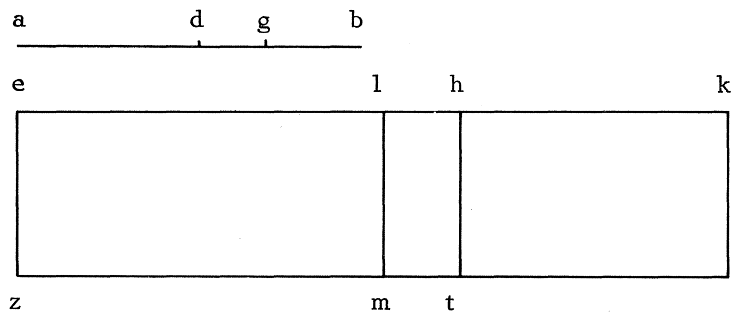

Fig.41

propositi fidem e z linee rationali apponimus z h superficiem tetragonis a g b pariter equalem necnon et t k duplo a g in g b equalem eritque itaque z k toti a b tetragono equalis. Unde si tetragonorum a d b pariter equum z l reciderimus, dupli a d in d b equum m k relinqui necesse est. Quoniam itaque tam a g b tetragoni simul quam a g in g b duplum mediale est, his eciam equales e t k superficies mediales esse consequens est. Que cum e z rationali apposite sint, laterum e h k utrumque potentia tantum rationale z e linee longitudine incommensurabile est. Amplius cum a g b tetragonis pariter a g in g b duplum incommensurabile sit, his eciam equales e t k superficies incommensurabiles esse necesse est. Sic ergo et e h k incommensurabiles sunt. Que dum potentia tantum rationales extiterint, ex eis iunctam e k lineam binomium esse constans est. Que licet apud l in lineas potentia tantum rationales communicantes divisa sit, earundem tamen infra terminum et in alias dividi eadem ratione monstrare possumus. Quod quoniam impossibile est, nec linea supra duo medialia potens in alias quam unde iuncta est earum sub termino dividi patitur.

⟨Definitiones⟩ ⟨i⟩ Binomii si pars longior augmento tetragoni linee ipsi longiori longitudine communicantis breviore potentior sit, eademque longior date linee rationali longitudine communicet, dicitur binomium primum.

⟨ii Si vero brevior posite rationali communicet in longitudine, dicetur binomium secundum⟩ .

⟨iii⟩ Quod si utraque pars (119) date rationali (fol.75^{r}) longitudine incommensurabilis est, appellatur binomium tercium.

⟨iv⟩ Item si longior quantus est tetragonus linee cuiusquam ipsi longiori longitudine ⟨in⟩ communicantis tanto breviore amplius possit, dum eadem longior date linee rationali longitudine communicat, nuncupatur binomium quartum (120).

⟨v Si vero brevior posite rationali communicet in longitudine, binomium quintum nominatur⟩ .

⟨vi⟩ Nam si utraque portionum date linee rationali longitudine incommensurabilis est, id erit binomium sextum.

⟨X.40⟩ Binomium itaque primum invenire iubemus.

Datis interea primum lineis duabus longitudine rationalibus a et b g

(119) utraque pars] brevior.

(120) quartum] quintum.

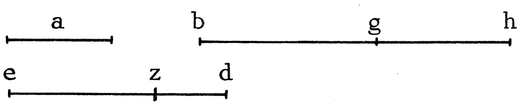

Fig.42

quadratos numeros duos d e, d z notis signamus verumtamen ne e z quadratus sit. Deinde que proporcio est inter d e et e z eadem si tetragonus b g ad tetragonum g h statuatur, b h binomium primum esse profitemur. Si enim inter d e et e z proporcio non que numeri quadrati ad numerum quadratum, sic itaque nec b g tetragonus ad g h tetragonum numeri quadrati ad numerum quadratum proporcione constabit. Sunt itaque b g h longitudine incommensurabiles potentia communicantes, extiterunt autem et potentia tantum rationales, est ergo b h binomium. Amplius quoniam que proporcio est d e ad e z, eadem est b g tetragoni ad g h tetragonum, cum d e supra e z addat, et b g tetragonus supra g h tetragonum addere comprobatur. Sit itaque id additamentum tetragonus linee t, converso igitur que proporcio est inter d e et d z, eadem inter b g et t tetragonos. Sunt autem d e et d z numeri quadrati quapropter b g et t longitudine communicantes sunt, eius tetragono b g portio longior g h breviore amplius potest. Est ergo b h binomium primum.

⟨X.41⟩ Binomium secundum invenire intendimus.

Primum enim item datis lineis duabus longitudine rationalibus a et b g. Similiter quadratos numeros duos d e, d z notamus ne tamen e z quadratus sit. Que igitur proporcio est inter d e et e z, ea e-

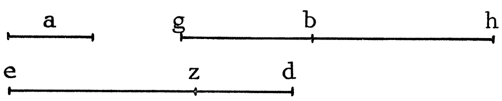

Fig.43

ciam tetragonus h b ad tetragonum b g constiterit. Eadem recte ratione quam superius usi sumus h g binomium esse constabit. Eodem quoque modo h b longioris potentia tetragono linee ipsi longitudine communicantis supra b g potentiam elata cum b g portio brevior date a rationali longitudine communicet, h g binomium secundum esse manifestum est.

⟨X.42⟩ Binomium tercium invenire ordo postulat.

Data siquidem a linea rationali (fol.75^{v}) quadratos numeros duos g b et b d signamus ne vero d g quadratus sit, deinde numerum alium e nota designet cuius proporcio ad neutrum numerorum g b, g d quam numeri quadrati ad quadratum. Qua ergo proporcione b g ad numerum e constat, eadem tetragonus z h ad a tetragonum constiterit,

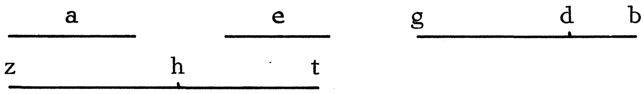

Fig.44

quaque numerus e ad g d, eadem tetragonus a ad tetragonum h t statuatur. Extremorum eciam que b ⟨g⟩ et g d numerorum eadem erit z h ad h t tetragonum proporcio. Dicimus itaque z t binomium tercium. Si enim qua b g ad e numerum ea est z h et a tetragonorum proporcio atque b g et e numerorum non que proporcio quadratorum, lineas a et z h longitudine incommensurabiles potentia communicantes esse constans est. Simili ratione eandem a cum h t longitudine incommensurabilem potentia communicantem esse constans est. Cum ergo qua b g ad g d numerum, eadem z h tetragonus ad h t tetragonum constet, lineas z h et h t potentia tantum rationales communicantes esse necesse est. Est itaque h t binomium. Eadem deinde ratione qua supra data constiterunt ut z h portio longior sibi longitudine communicantis linee tetragono quam h t amplius posse comprobata fuerit cumque utraque date a linee rationali longitudine incommensurabilis sit, h t binomium tercium esse demonstratum est.

⟨X.43⟩ Binomium quartum invenire locus exigit.

Datis enim et hic ut modus est lineis duabus longitudine rationalibus communicantibus a et b g, duos item numeros d z et e z notis signamus ut numerus d e ad neutrum numerorum d z, e z ea proporcione consistat qua numerus quadratus ad quadratum. Qua vero d e ad e z proporcione constat, eadem b g tetragonus ad g h tetragonum statuatur solitoque deinde b h binomium comprobetur. Sitque b g amplius

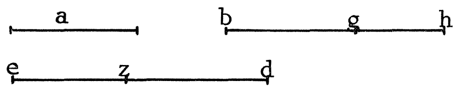

Fig.45

quam g h tetragono linee t potens. Quoniam ergo que proporcio est d e ad e z numerum, eadem b g tetragoni ad g h tetragonum, converso eciam que proporcio est e d ad d z numerum, eadem b g tetragonum tetragono t constare necesse est, proporcio vero e d ad d z non que numeri quadrati ad numerum quadratum, est ergo t linea b g longitudine incommensurabilis estque b g portio (121) longior date a rationali longitudine communicans, est ergo b h binomium quartum.

⟨X.44⟩ Binomium quintum invenire opus est.

Nam primum item datis lineis duabus longitudine rationalibus a et b g numerisque duobus d z e quorum neutro d e numerus quadratorum proporcione consistat. Queque fuerit inter d e et e z eadem

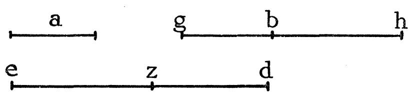

Fig.46

consistant h b et b g tetragoni ut h g lineam binomium (fol.76^{r}) esse facile constet. Dataque statim ut ante h b potentia ipsi incommensurabilis linee tetragono supra b g potentiam, cum b g portio brevior date a rationali communicet, h g (122) binomium quintum esse comprobatum est.

⟨X.45⟩ Binomium sextum demum invenire necessarium est.

Data siquidem ut consuevimus in primis a linea rationali duos itidem numeros d z e notis signamus ad quorum neutrum d e quadrati numeri proporcione consistat. Deinde numerum alium t nota secrevimus

---

(121) portio] proporcio.
(122) g] b.

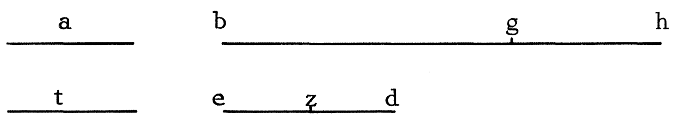

Fig.47

neutro numerorum d e, z e numeri quadrati proporcione conferentes. Quo facto si qua proporcione d e ad numerum t, ea b g tetragonus ad a tetragonum constiterit, quaque t numerus ad e z eadem a tetragonus ad g h tetragonum statuatur. Extremorum eciam eandem proporcionem esse necesse est ut b h ea recte qua in tercio usi sumus ratione binomium esse constet. Sicque deinde b g supra g h incommensurabilis sibi linee tetragono posse prospecto, cum portionum utraque date a linee rationali incommensurabilis sit, b h lineam binomium sextum esse liquido constet.

⟨X.46⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali ac binomio primo contentam potens binomium est.

Continetur enim b g superficies a b rationali binomioque primo a g. Que itaque supra b g potuerit, linea binomium est. Cuius argumento dividimus a g lineam in suas connominales ad punctum d pariterque d g per medium apud e secamus. Deinde d e tetragonum a z in z d superficiei equalem statuimus, statimque z d e notas cum punctis h t k lineis equidistantibus a b continuamus. Quibus perfectis a h superficiem m l tetragono atque d h quadrato l n equales constituimus. Demumque totum m n diametri tetragonum perficimus. His ita constitutis que proporcio est m l ad l n eadem est m c ad c y queque m l ad l n eadem y f ad f n que vero m c ad c y eadem est m l ad l y queque y f ad f n eadem est y l ad l n que ergo proporcio est inter

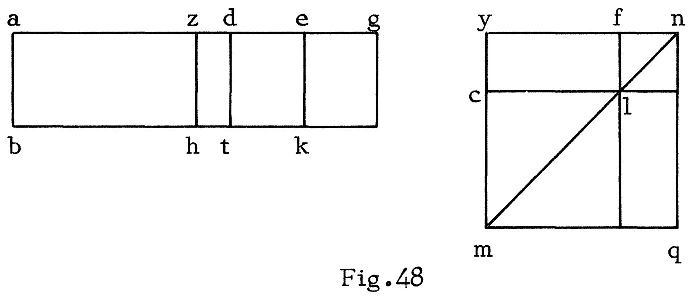

Fig.48

m l et l y eadem nimirum est inter l y et l n. Est igitur inter m l et l n tetragonos tercia superficies l y proporcionalis. Amplius a z in z d equalis data est d e tetragono, est ergo que proporcio a z ad d e, eadem d e ad d z sicque ordine eodem que inter a h et e t eadem inter e t et t z. Cum igitur a h superficies tetragono m l sicque d h quadrato l n equales sint, medias e t et l y equales esse necesse est. Est autem d k equalis k g (fol.76^{v}) sicque l y equalis l q. Sunt igitur k g et l q equales. Sic ergo tota b g superficies toti m n tetragono equalis est. Quem cum y n linea ex se ipsa conficiat, eam lineam supra b g superficiem posse demonstratum ⟨esse⟩ opinor. Restat ut eadem binomium est. Complemus quod hinc facile sumi potest. Cum enim a z in z d equalis sit d e tetragono, partes a z d longitudine communicantes esse necesse est. Eritque ita a d tam d z et z a quam a b rationali longitudine communicans. Sunt igitur a h et h d rationales, que cum equales sint l m n tetragonis linearum y f n eas lineas potentia rationales communicantes esse consequens est. Amplius a d g longitudine incommensurabiles sunt nec vero ⟨d⟩ z linee a d nec d g ei que est d e incommensurabilis est. Sunt igitur d z; d e incommensurabiles. Quapropter nec e t; t z communicantes esse possunt ut necessario et equales his l y (123); l n communicantes esse recusent. Quamobrem et y f n incommensurabiles sint. Sunt ergo y f n potentia tantum rationales communicantes unde lineam y n binomium esse liquido constet.

⟨X.47⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali ac binomio secundo contentam potens bimediale primum est.

Continetur enim b g superficies a b rationali binomioque secundo a g. Erit itaque supra b g potens bimediale primum. Ex eorum interea que supra data sunt ratione et hic facile ad id proveniemus ut y n lineam supra b g posse liquido constet. Deinde quidem cum a d utrique partium a z d longitudine communicet, ipsa potentia tantum rationalis

---

(123) y] k.

a b longitudine incommensurabilis, utramque superficiem a h et h d medialem esse manifestum est. Eedem cum equales sint m l n tetragonis linearum y f n, easdem lineas mediales potentia communicantes esse consequens est quas, nec aliunde quam supra datum est, longitudine incommensurabiles esse metuamus. Amplius quoniam d g longitudine communicat d e necnon t d rationali, t e superficies rationalis est equalis y l ex y f in f n composite, est igitur y n supra b g potens bimediale primum.

⟨X.48⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali ac binomio tercio contentam potens bimediale (fol.77^r) secundum est.

Continetur enim superficies g b rationali a b binomioque tercio a g, erit itaque potens supra b g bimediale secundum. Primum enim ut supra datum est y n supra b g posse constabit. Deinde y f n mediales esse potentia tantum communicantes quas medialem continere superficiem suam seorsum postulat demonstratione. Est enim d e longitudine communicans d g, sed d g potentia tantum rationalis d t rationali longitudine incommensurabilis, est itaque t e superficies medialis superficiei y l ex y f in f n conducte equalis. Est igitur y n supra b g potens bimediale secundum.

⟨X.49⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali ac binomio quarto contentam potens maior est.

Continetur enim superficies b g rationali a b quartoque binomio a g, erit itaque supra b g potens linea maior. Constituta siquidem primum ut mos est y n supra b g potentia ex eo quod a g binomium quartum est a z d longitudine incommensurabiles sunt. Sic igitur et superficies a h, h d incommensurabiles erunt que cum equales sint m l n tetragonis eorum lineas y f n potentia incommensurabiles esse consequens est, quas ex antedatis medialem superficiem continere metuamur. Restat itaque cum a d rationalis sit a b longitudine communicans, totam b d superficiem esse rationalem. Eruntque ita et m l n tetragoni simul accepti rationale, est igitur y n supra b g potens linea maior.

⟨X.50⟩ Omnis linea que supra superficiem linea rationali ac binomio quinto contentam potest potens est supra rationale et mediale.

Continetur enim b g superficies a b rationali quintoque binomio a g que ergo supra b g potuerit potens est supra rationale et mediale. Data siquidem primum ⟨supra⟩ b g ut consuevimus y n potentia (124) ex supradatis in primis occurrunt y f n potentia incommensurabiles. Deinde quod d g rationalis communicans d e eandem d e rationali d t longitudine communicantem reddens, t e superficiem rationalem esse declarat l y ex y f in f n congeste equalem. Postremum est quod cum a d potentia tantum rationalis a b longitudine incommensurabilis sit, b d superficies medialis est equalis m l n tetragonis y f n linearum (fol.77^{v}) pariter acceptis, igitur y n, quoniam supra b g potest, potens est supra rationale et mediale.

⟨X.51⟩ Omnis linea que supra superficiem linea rationali ac binomio sexto contentam potest potens est supra duo medialia.

Continetur enim b g superficies rationali a b binomioque sexto a g que ergo supra b g potuerit potens est supra duo medialia. Ante omnia siquidem memorato lineam y n posse b g superficiem, ordine statim reminiscendum est y f n potentia incommensurabiles superficiem medialem continere, earum quoque tetragonos pariter acceptos mediale, quod ut y f in f n duplo incommensurabile sit solum demonstrationi superest, hinc itaque facile sumi potest. Cum enim a d g longitudine incommensurabiles sint, et a t, t g superficies incommensurabiles erunt. Fuit autem a t superficies y f n tetragonis pariter acceptis equalis, equalis eciam t g superficiei y f in f n duplo. Quoniam igitur y n supra b g potest potens est supra duo medialia.

⟨X.52⟩ Si linee longitudine rationali superficies binomii tetragono equalis apponitur, secundum latus binomium primum est.

Ut cum g d linee rationali d e superficies binomii a b tetragono equalis apposita sit, erit secundum latus g e binomium primum. Cuius de-

(124) potentia] potentie.

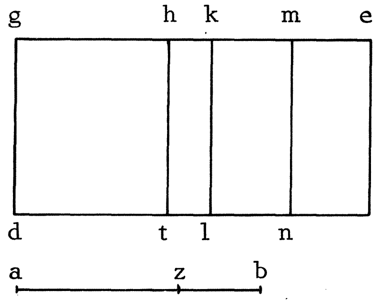

Fig.49

monstrationi a b lineam binomium partimur in suas connominales ad punctum z, deinde a z tetragono superficiem d h atque z b quadrato eam que est t k equales constituimus, postremo a z in z b duplo equalem l e superficiem componimus, lineamque e k apud m per medium secantes simul m n lineam rectam perducimus ut l m et n e superficies basium equalitatem reddant. Quoniam igitur a z b tetragoni simul ambo rationale sunt, d k superficiem rationalem esse declarant que cum g d rationali apposita sit, g k secundum latus longitudine rationale g d rationali longitudine communicat. Est autem a z in z b et superficies et duplum eius mediale quapropter et l e medialis est. Que quoniam k l rationali apposita est, k e secundum latus potentia tantum rationale g d rationali longitudine incommensurabilis est. Sunt ergo g k e linee due potentia tantum rationales communicantes quare g k longior g d rationali longitudine communicans est. Amplius que proporcio est inter a z et z b, eandem a z tetragoni ad a z in z b superficiem eandemque eius superficiei (fol. 78^{r}) ad z b tetragonum esse necesse est. Sunt igitur et equales his superficies in eadem proporcione ut que est g t ad l m eadem fit m l ad k t eruntque res et bases earum eodem ordine proporcionales ut qua g h ad k m eadem m k ad k h proporcione constat, est ergo g h in h k superficies m k tetragono equalis, ut igitur inter g k e inequales lineas duas (brevioris tetragoni quadranti equalis superficies longiori apposita tetragono infra subsistens eam in partes communicantes dividit, tam enim g h k quam superficies earum, tetragoni quibus equales sunt, communicantes reddunt) g k amplius quam k e tetragono linee longitudine sibi communicantis posse constans est. Est itaque g e binomium primum.

⟨X.53⟩ Si linee rationali superficies bimedialis primi tetragono equalis apponatur, secundum latus binomium secundum est.

Apposita siquidem est g d rationali superficies d e equalis a b linee bimedialis primi tetragono fuit itaque secundum latus g e binomium secundum. Cuius argumento cunctis ea serie qua supra datum est dispositis quoniam a z b tetragoni pariter ambo mediale sunt, erit eciam d k medialis que cum apposita sit g d rationali, secundum latus g k potentia tantum rationale linee g d longitudine incommensurabile est, est autem a z in z b et superficies et duplum eius rationale (125), sic igitur et l e rationalis est, que quoniam k l rationali apposita est, secundum latus e k rationale linee g d longitudine sibi communicans est constatque ita lineas g k e longitudine esse incommensurabiles. Est ergo g e binomium. Constat autem, ut ante datum est, g k longiorem quantus est tetragonus linee longitudine sibi communicantis tanto e k amplius posse, fuit eciam k e longitudine g d communicans. Est ergo g e binomium secundum.

⟨X.54⟩ Si linee rationali superficies bimedialis secundi tetragono equalis apponatur, secundum latus binomium tercium est.

Ut cum g d rationali d e superficies a b linee bimedialis secundi tetragono equalis apposita sit, dico g e secundum latus binomium tercium. Ordinatis interea ut ante cunctis primum occurrit iuxta supradictorum rationem g k e binomii utramque potentia tantum rationalem g d rationali longitudine esse incommensurabilem, est autem et a z incommensurabilis z b quapropter utrosque a z b tetragonos pariter a z in z b duplo incommensurabilem esse consequens est. Sic igitur et g l, l e (fol.78^v) superficies sicque bases earum g k e longitudine

---

(125) rationale] rōne.

incommensurabiles sunt, quas potentia rationales pridem constitit. Cum itaque g e binomium, sed nec alio quam supra datum est modo hic quoque perspici potest g k longitudine sibi communicantis linee tetragono plus k e posse estque utraque portionum g d rationali longitudine incommensurabilis, est ergo g e binomium tercium.

⟨ X.55 ⟩ Si linee rationali superficies linee maioris tetragono equalis apponitur, secundum latus binomium quartum est.

Apposita namque est g d rationali d e superficies a b linee maioris tetragono equalis eritque ita g e binomium quartum. Dispositis interea ut mos est omnibus id primo evidenter videtur quoniam a z b tetragoni pariter ambo rationale sunt, d k rationalem esse que g d rationali apposita g k rationalem g d longitudine communicantem reddit. Solitoque deinde k e pertractata g e binomium esse liquido constet. Sed quoniam a z b tetragoni incommensurabiles sunt, ut d h, h l superficies sic earum bases g h k incommensurabiles esse consequens est. Estque g h in h k superficies m k tetragono equalis.Cum itaque g k rationali g d communicans quantus est tetragonus linee longitudine sibi incommensurabilis tanto k e potentior existat, g e binomium quartum esse manifestum est.

⟨X.56⟩ Si linee rationali superficies linee supra rationale et mediale potentis tetragono equalis apponitur, secundum latus binomium quintum est.

Apponitur enim g d rationali d e superficies a b supra rationale et mediale potentis tetragono equalis, erit itaque g e binomium quintum. Comparatis interea ordine cunctis g e binomium esse constiterit simulque g k tetragono linee longitudine sibi incommensurabilis supra k e posse. Quoniam ut a z in z b duplum sic et l e superficies rationalis k l rationali apposita k e rationali g d communicantem reddit, g e binomium quintum esse nec dubitari existat.

⟨X.57⟩ Si linee rationali superficies linee supra duo medialia potentis tetragono equalis apponitur, secundum latus binomium sextum est.

Apposita siquidem est g d rationali d e superficies a b supra duomedialia (fol.79^{r}) potentis tetragono equalis. Dicimus itaque g e binomium (126) sextum. Pretractatis interea ceteris quoniam tam a z b tetragoni simul quam a z in z b duplum mediale est, his eciam eque superficies mediales rationalibus apposite lineis secunda latera g k e potentia tantum rationalia et g d rationali utrumque longitudine incommensurabilem reddunt. Sic igitur et g e binomio comprobato sicque g k potentia, quantus est tetragonus linee longitudine sibi incommensurabilis, supra k e vim elata, g e binomium sextum esse demonstratum opinor.

⟨X.58⟩ Omnis linea binomio communicans eiusdem speciei atque termini binomium est.

Ut cum a b linee binomio g d communicet, ipsam eciam in eadem specie terminoque binomium esse necesse est. Cuius argumento partimur a b lineam apud e in suas lineas, deinde qua proporcione a b ad g d constat, in eadem a e ad g z constiterit, residuum eciam b e

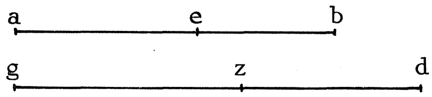

Fig.50

reliquo d z eadem proporcione respondere necesse est, ut igitur a b communicans est g d, sic a e compari sue g z sicque e b conproporcionali sibi z d communicantes esse convenit. Sunt autem a e b potentia tantum rationales communicantes, sic igitur et g z d potentia tantum rationales communicantes esse consequens est. Cum vero que proporcio fuerit a e ad g z, eadem e b ad z d, alternatim eciam nihilominus que proporcio fuerit a e ad e b, eadem g z ad z d constare certum ⟨est⟩ . Quantum igitur a e supra e b addiderit,

---

(126) binomium] bimediale.

tantum g z supra z d adde. Omnino cogitur ut necessario si a e linee longitudine sibi communicantis tetragono magis quam e b potuerit, et g z communicantis sibi linee tetragono magis quam z d possit sicque a e linee rationali communicans fuerit, eciam g z rationali communicans sit. Ut utrumque iam binomium primum esse constet. Nihilominus si e b rationali communicat, nec z d rationali incommensurabilis sit eritque ita utrumque binomium secundum. Sic quoque si utraque a b portionum linee rationali incommensurabilis sit, neutra g d portionum linee rationali communicans esse patiatur, quod utrumque sub binomii tercii specie communicat terminoque cohercet. Eadem ratione qua quoque si a e potentia tetragono linee sibi incommensurabilis e b tantum superet, ad eundem modum g z incommensurabilis sibi linee tetragono amplius quam z d possit, ut item utralibet alterius portionum linee rationali sive neutra communicet, alterius portiones eadem in parte sive neutram pariter linee rationali communicantem esse necesse sit, ut (fol.79^{v}) prior ratione reliquorum trium ordo pari modo sumatur.

⟨X.59⟩ Omnis linea bimediali communicans in eadem specie et termino bimedialis est.

Communicat enim g d linea bimediali a b, unde in eadem specie et termino bimedialem esse convenit. Quod hinc facile constabit scilicet a b in suas lineas divisa que proporcio (127) est a b ad g d, eadem e a ad g z consistat, unde et residuorum eandem esse proporcionem necesse sit. Cum enim g d communicans sit a b singulas utriusque portiones conproporcionali sibi communicans esse conse-

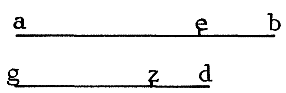

Fig.51

(127) proporcio] que portio.

quens est. Sunt autem a b mediales potentia tantum communicantes, sic igitur et g d mediales potentia tantum communicantes esse convenit. Cum vero que proporcio est a e ad g z, eadem fit e b ad z d, alternatim eciam que proporcio fuerit a e ad e b, eadem erit g z ad z d, que vero a e ad e b, eadem a e tetragoni ad a e in e b superficiem, queque g z ad z d eadem est g z tetragoni ad g z in z d superficiem. Que ergo proporcio est a e tetragoni ad a e in e b superficiem, eadem est g z tetragoni ad g z in z d superficiem. Ut ergo tetragonus a e tetragono g z communicans est, sic a e in e b superficies g z in z d superficiei communicans esse comprobatur. Sive ergo a e in e b rationalis sive medialis sit, infra eundem terminum g z in z d coherceri necesse est, ut utrumque eiusdem speciei bimediale esse liquido constet.

⟨X.60⟩ Omnis linea linee maiori communicans maior est.

Est enim a linea maior cui b communicat et eam itaque maiorem esse dicimus. Cuius demonstrationi date g d linee rationali apponimus d e superficiem equalem a tetragono necnon et z h tetragono b equalem. Quoniam itaque d e superficies linee maioris tetragono equalis rationali apposita est, secundum latus g e binomium quartum est. Ut autem a b communicantes sunt, sic et tetragoni earum et eis equales superficies earumque bases g e z communicantes esse convenit,

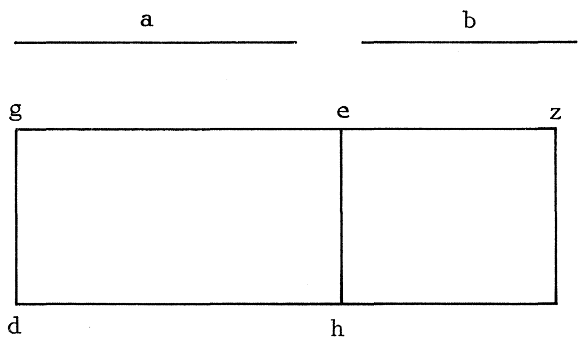

Fig.52

estque g e binomium quartum quapropter et e z binomium quartum esse necesse est. Que quoniam cum g d (128) rationali superficiem b tetragono equalem continet, b lineam maiorem esse constans est.

⟨X.61⟩ Omnis linea linee supra rationale et mediale potenti communicans potens est supra rationale et mediale.

Ut cum supra rationale et mediale (fol.80^r) potenti a communicans sit b, erit ipsa potens supra rationale et mediale. Cuius argumento singulis ut ante compositis cum a potens sit supra rationale et mediale, eius tetragono equalis d e superficies g d rationali apposita, secundum latus g e binomium quintum esse manifestat, cui e z communicans nihilominus binomium quintum. Quoniam cum e h rationali superficiem b tetragono equalem continet, b linea potens est supra rationale et mediale.

⟨X.62⟩ Omnis linea linee supra duo medialia potenti communicans, potens est supra duo medialia.

Ut supra duo medialia potenti a communicans b, similiter potens fit supra duo medialia quidem eademque superiorum est ratio g e z binomia sexta comprobantur eodem ordine ad eundem modum plane constituit.

⟨X.63⟩ Si continuate fuerint superficies quarum altera rationalis, altera medialis, linea supra totam superficiem potens una de quatuor mutis fit necesse est: aut binomium videlicet aut bimediale primum aut maior aut supra rationale et mediale potens.

Ut cum a b superficies quarum a rationalis, b medialis iuncte fuerint, supra totum potens aut binomium erit aut bimediale primum aut maior aut potens supra rationale et mediale. Cuius argumento date g d linee rationali apponimus d e superficiem equalem a necnon et z h equalem b. Quoniam igitur a rationalis est, d e quoque rationa-

---

(128) g d] e e z.

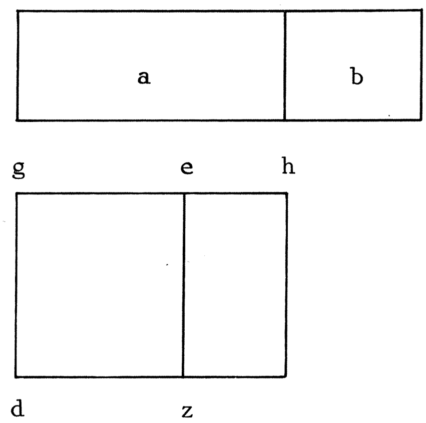

Fig.53

lis rationali apposita g e rationalem g d rationali longitudine communicantem reddit. Cum vero b medialis sit, z h quoque medialis rationali apposita e h potentia tantum rationalem g d longitudine incommensurabilem reddit. Ut igitur a b incommensurabiles sunt, sic g z, z h sicque g e h longitudine incommensurabiles esse consequens est. Sunt ergo g e h potentia tantum rationales communicantes ut g h binomium esse liquido constet. Potest itaque g e supra e h tetragono linee longitudine quidem aut communicantis sibi aut incommensurabilis. Si ergo communicantis, dum ipsa rationali g d communicans sit, g h binomium primum esse demonstrat. Estque g d rationalis, itaque (fol.80^{v}) linea supra d h potens binomium est. Nam si non g e, sed e h date rationali communicat, g h binomium secundum erit. Sicque dum g d rationalis est, supra d h potens bimediale primum est. Si ergo incommensurabilis sibi linee tetragono g e amplius quam e h potuerit, dum item ipsa g e date rationali communicet, g h binomium quartum esse declarat. Cumque g d rationalis sit, supra d h potens est linea maior. Nam si minor portio rationali communicat, g h binomium quintum efficit, ut cum g d rationalis sit que supra d h linea potuerit, potens fit supra rationale et mediale. Data vero est d h superficiebus a b pariter equalis. Cum igitur continuate fuerint, supra totum potentem de quatuor mutis esse constans est.

⟨X.64⟩ Si continuate fuerint superficies due mediales incommensurabiles, linea supra totam superficiem potens aut bimediale secundum est aut supra duo medialia potens.

Ut cum a et b superficies incommensurabiles quarum utraque medialis iuncte fuerint, supra totum potens alterutrum inter bimediale secundum et eam que supra duo medialia potest sit necesse est. Cuius demonstrationi data g d linea rationali cetera supradictorum modo ea ratione ordinabimus ut g z superficies ei que est a atque z h superficiei b equales proveniant. Quoniam igitur utraque superficierum a b medialis est, superficierum et g z, z h nihilominus utraque medialis rationali apposita laterum g e h utrumque potentia rationale ei que est g d longitudine incommensurabile reddit. Ut autem a b incommensurabiles sint, sic g z, z h sicque g e h longitudine incommensurabiles esse necesse est quas cum potentia rationales esse constiterit, potentia tantum rationales communicantes esse manifestum est ut g h binomium esse liquido constet. Potest itaque g e plus quam e h tetragono linee longitudine quidem aut communicantis sibi aut incommensurabilis. Si ergo communicantis dum utraque rationali g d incommensurabilis est, g h binomium tercium constituunt, cumque g d rationalis sit que supra d h potuerit bimediale secundum est. Si vero incommensurabilis, dum item utraque date rationali incommensurabilis sit, g h binomium sextum conficiunt ut cum g d rationalis sit, que supra d h potuerit potens sit supra duo medialia. Data vero est d h superficiebus a b pariter equalia. Si ergo continuate fuerint que supra totum (fol.81^{r}) potuerit aut bimediale secundum est aut potens supra duo medialia.

⟨X.65⟩ Neque (129) binomium nec ulla sequentium mutarum infra terminum aut speciem linee medialis est autem aliqua cuiusquam alterius.

---

(129) Neque] seque.

Cum enim medialis linee tetragono superficies equalis linee rationali apponitur, secundum latus potentia rationale redditur. Cum vero binomii tetragono equalis superficies rationali apponitur linee, secundum latus binomium efficitur, atque ad hunc modum cuiuslibet aliarum tetragono superficiem equalem si rationali apposuerimus linee, secundum latus eius ordinis provenire necesse est. Iamque ita converso quoque nihilominus qua ‹ h › actenus usi sumus ratione per omnia sumi potest.

‹ X.66 › Cum linea de linea reciditur si fuerint ambe potentia tantum rationales communicantes, reliqua linea muta est vocaturque residuum.

Reciditur enim de a b linea b g fuerintque ambe potentia tantum rationales communicantes, sic a b in b g superficiem sicque et duplum eius mediale esse consequens est. Sunt autem a b et b g tetragoni pariter ambo rationales duplo a b in b g incommensurabiles, converso itaque nihilominus a b et b g tetragoni pariter ambo tetragono g a incommensurabiles sunt. Qui cum rationales sint, relinquitur a g tetragonus irrationalis quapropter et linea muta que residuum vocatur.

‹ X.67 › Cum linea de linea resecatur si fuerint ambe mediales potentia tantum communicantes superficiem rationalem continentes, reliqua linea muta est cui nomen residuum medialis primi.

Resecatur enim de a b linea b g que cum ambe mediales potentia tantum communicantes rationalem contineant superficiem, dicimus a g mutam cui nomen, ut dicimus, est residuum medialis primi. Si enim a b et b g tetragoni simul ambo mediales sunt, eis a b in b g duplum rationale incommensurabile est. Disiunctis igitur erit et a g tetragonus eis duplo incommensurabilis quidem quoniam rationale est, relinquitur is tetragonus irrationalis quapropter et linea muta (fol.81^v) cui nomen residuum medialis primi.

‹ X.68 › Cum linea de linea detrahatur si fuerint ambe mediales potentia tantum communicantes superficiem medialem continentes, reliqua linea muta est diciturque residuum medialis secundi.

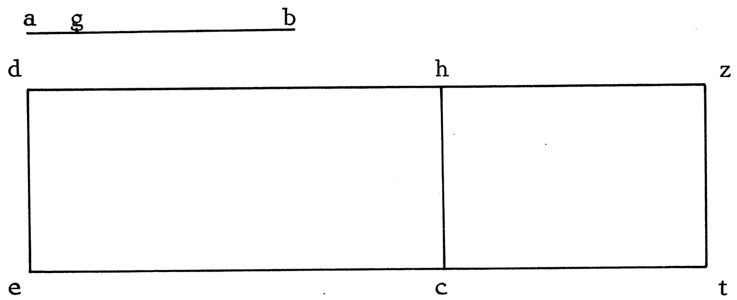

Fig. 54

Detrahitur enim de a b linea g b que si ambe mediales potentia tantum communicantes mediale contineant, dico g a mutam residuum medialis secundi. Cuius constitutioni date d e rationali apponimus superficiem e z tetragonis a b g simul ambobus equalem cuius secundum latus d z de qua si t h equalem a b in b g duplo secuerimus, tetragono g a equalem c d relinqui necesse est. Quoniam igitur a b g tetragoni ambo mediales sicque et duplum a b in b g mediale est, his eciam equales superficies e z, z c mediales linee rationali apposite laterum d z, z h utrumque potentia rationale linee d e longitudine incommensurabile reddunt. Est autem a b longitudine incommensurabilis b g que vero proporcio est a b ad b g eadem est a b tetragoni ad a b in b g superficiem, is ergo tetragonus ei superficiei incommensurabilis est. Nec vero is tetragonus ambobus nec ea superficies duplo suo incommensurabilis, ut igitur ambo simul a b et b g tetragoni a b in b g duplo sic et equales eis superficies et earum latera d z, z h lineas incommensurabiles esse consequens est quas potentia rationales esse dudum constitit. Cum ergo d z, z h potentia tantum rationales communicantes sint, reliquam d h mutam esse constans est. Data vero est d e rationalis, igitur e h superficies quam continent muta est quapropter et linea g a supra eam potens muta residuum medialis secundi.

⟨X.69⟩ Cum linea de linea resecatur si fuerint ambe potentia incommensurabiles medialem superficiem continentes earumque tetragoni pariter ambo rationale, reliqua linea muta est notaturque minor.

Resecatur enim de a b linea b g sintque ambe potentia incommensurabiles mediale continentes earumque tetragoni simul ambo rationale, dico igitur a g mutam que minor notatur. Quod enim tetragoni rationale, duplum (fol.82^{r}) vero mediale est, incommensurabilia esse constans est. Converso igitur idem tetragoni simul autem g a tetragono incommensurabile sunt, qui cum rationale sint, relinquitur a g quam tetragonus irrationalis tam linea muta que minor notatur.

⟨ X.70 ⟩ Cum linea de linea reciditur si fuerint ambe potentia incommensurabiles rationalem superficiem continentes earumque tetragoni simul ambo mediale, reliqua linea muta est cui nomen iuncta est rationali totum mediale faciens.

Reciditur enim de a b linea b g fuerintque ambe potentia incommensurabiles rationale continentes earumque tetragoni simul ambo mediale dicimus itaque g a mutam cui nomen rationali iuncta totum efficiens mediale. Cum enim tetragoni mediale, duplum vero rationale sit, disiunctis eciam g a tetragonum irrationalem sicque et lineam mutam esse necesse est cui nomen, ut dictum est, iuncta rationali totum mediale faciens.

⟨ X.71⟩ Cum linea de linea detrahitur si fuerint ambe potentialiter incommensurabiles medialem superficiem continentes earumque tetragoni simul ambo mediale alterius in alteram duplo incommensurabile, reliqua linea muta est diciturque iuncta mediali totum efficiens mediale.

Detrahitur enim de a b linea b g sintque ambe potentialiter incommensurabiles mediale continentes earumque tetragoni mediale alterius in alteram duplo incommensurabiles, est itaque g a muta que iuncta mediali totum mediale faciens appellatur. Cuius constitutioni date d e rationali apponimus e z superficiem equalem ambobus a b g tetragonis de qua cum duplo a b in b g superficies t h equalis secta fuerit, a g tetragono e h equalem relinqui necesse est. Cum ergo tam tetragoni ambo quam superficiei duplum medialia sint, superficies quoque e z (fol.82^{v}) z c mediales rationali apposite laterum d z, z h utrumque potentia rationale d e longitudine incommensurabile reddunt. Ut autem tetragoni ambo superficiei duplo incommensurabiles sunt, sic equales eis e z, z c superficies sicque latera earum lineas d z, z h longitudine incommensurabiles esse constans est. Sunt ergo potentia tantum rationales communicantes quapropter d h muta est, sed d e rationalis ut igitur e h superficies sic et supra eam potens a g linea muta est cui nomen ut dictum est.

⟨X.72⟩ Coniungitur residuo ‹nulla› linea nisi una tantum ‹ut sint ambe› sub termino ‹earum que erant› ante divisionem.

Iungitur enim a b residuo linea b g sub termino ante separationem. Dico ergo non posse cum alia sub eodem termino iungi. Quod si possibile est, iungatur d b. Scimus igitur quantum a g b tetragoni simul supra a g in g b duplum addiderint, tantum a d b tetragonos pariter

Fig.55

supra a d in d b duplum addere. Alternatim ergo quantum sunt a g b tetragoni simul a d b tetragonis pariter maius tanto est a g in g b duplum a d in d b duplo amplius ut utrisque differentie eadem sit quantitas. Cum itaque tetragonorum differentia rationalis sit, utrique siquidem rationale sunt et duplorum differentiam rationalem esse necesse est. Que cum medialia sint, id impossibile est. Nec ergo residuo nisi una tantum linea sub termino ante separationem iungitur.

⟨X.73⟩ Neque residuo medialis primi nisi una tantum linea sub earum termino iungitur.

Ut cum a b residuo medialis primi sub indivisorum termino iuncta sit b g, sub eodem cum alia iungi non potest. Iungatur enim si possibile est. Constat igitur, ut supradatum est, tetragonorum differentiam mediale inequam fieri duplorum alterius supra alterum additamento rationali. Quod quoniam impossibile est, nec residuo medialis primi nisi una tantum linea sub termino ante sectionem iungitur.

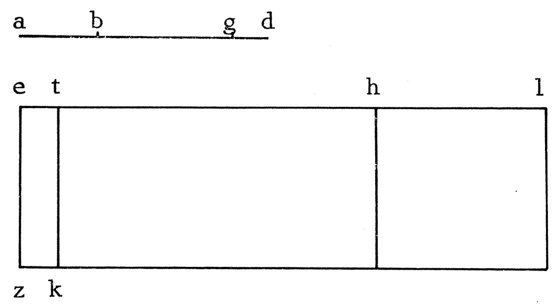

Fig.56

⟨ X.74⟩ Denique residuo medialis secundi nisi una tantum linea sub earum termino iungitur.

Iuncta siquidem est a b residuo medialis secundi sub indivisorum termino linea b g. Dicimus igitur aliam sub eodem iungi non posse. Si enim possibile est, iungatur d b date, date igitur ad propositi fidem e z linee rationali apponimus superficiem z h ambobus a b g tetragonis equalem de qua cum a g in g b dupli equalem k h secrevimus, a b tetragono (fol.83^r) t z equalem relinqui necesse est. Sit deinde z l equalis a d b tetragonis. Cum igitur a b tetragono t z equalis extiterit, duplo a d in d b superficiem k l equam esse necesse est. Quoniam ergo tam a g b tetragoni simul ambo quam a g in g b duplum mediale est, his eciam equales superficies z h, k h mediales linee rationali apposite laterum e h, t h utrumque potentia rationale e z longitudine incommensurabile reddunt. Ut autem a g et g b linee longitudine incommensurabiles sunt, sic earum tetragonos simul ambos earundem superficiei duplo incommensurabiles esse consequens est. Sic igitur et equales eis superficies sicque latera earum e h, t h lineas longitudine incommensurabiles esse necesse est. Que cum potentia tantum rationales communicantes sint, e t residuum esse constans est cui linea t h sub termino suo iuncta sit. Eadem tamen ratione eidem et t l eodem modo iungi monstrare possumus, quod impossibile est. Nec residuo medialis secundi nisi una tantum linea sub earum termino iungitur.

⟨ X.75 ⟩ Neque linee minori nisi una tantum linea sub indivisorum termino iungitur.

Est enim a b linea minor iuncta b g sub termino ante separationem, dico itaque sub eodem aliam iungi non posse. Quod si possibile est, iungatur b d. Cum igitur tetragonorum a g b simul atque a d b pariter acceptorum differentia rationalis sit, duplorum eciam utriusque superficierum differentiam, que medialis est, rationalem esse convenit. Nec ergo linee minori nisi una tantum linea sub earum ante separationem termino iungitur.

⟨ X.76 ⟩ Neque linee que rationali iuncta totum efficit mediale nisi una tantum linea sub earum termino iungitur.

Ut cum a b iuncte rationali totum mediale facienti sub termino suo iuncta sit b g, aliam sub eodem iungi impossibile est. Si enim possibile est, iungatur b d. Constat igitur, ut antedatum est, cum dupli a g in g b duplique a d in d b differentia rationalis sit, et tetragonorum utriusque partis differentiam que medialis est rationalem esse. Nec ergo linee que rationali iuncta totum mediale facit nisi una tantum sub earum termino iungitur.

⟨ X.77 ⟩ Neque linee que mediali iuncta totum mediale facit nisi una tantum earum infra terminum iungitur.

Ut cum a b linee iuncte mediali (fol.83^v) totum mediale facienti linea b g sub earum termino iuncta sit, aliam sub eodem iungi impossibile est. Quod si posse videatur, sit interim alia qualis b d, date igitur ad rei fidem linee rationali e z apponimus z h superficiem equalem a g b tetragonis quarum superficiei duplo equa k h secreta a b tetragono t z equam relinqui necesse est. De eadem a d b tetragonis z l adequata, cum a b tetragono z t equalis sit, a d in d b duplo k l equam relinqui constans est. Deinde supradictorum ordine ceteris executis ubi e t residuum conprobatum fuerit, ipsique t h sub indivisorum termino iunctum. Si eidem et t l eodem pacto iungi quod factum facile est monstravimus, impossibilitate quadam arguimus fateri linee que mediali iuncta totum mediale facit nisi unam earum sub termino iungi.

⟨Definitiones⟩ ⟨i⟩ Assignatis lineis duabus altera rationali altera residuo adiectaque deinde residuo linea qualibet si compositum totum tetragono linee longitudine sibi communicantis adiecta linea potentius fuerit dum idem compositum assignate rationali longitudine communicet, quod propositum est residuum primum nominatur.

⟨ii⟩ Si enim adiecta linea date rationali communicet, dicetur residuum secundum.

⟨iii⟩ Quod si utraque proposite rationali incommensurabilis fuerit, vocabitur residuum tercium.

⟨iv⟩ Cum autem compositum totum tetragono linee longitudine sibi incommensurabilis adiecta linea potentius fuerit, dum idem compositum date rationali longitudine communicet, quod propositum est nuncupatur residuum quartum.

⟨v⟩ Si enim quod adiectum est linee rationali longitudine communicat, quod propositum appellatur residuum quintum.

⟨vi⟩ Quod si utrumque proposite rationali incommensurabile fuerit, residuum sextum nominabitur.

⟨X.78⟩ Residuum itaque primum invenire iubemur.

Designatis enim lineis duabus longitudine rationalibus communicantibus a et b g notamus numeros duos quadratos d e, d z verum ne e z quadratus sit, deinde que proporcio est d e numeri ad z e non qua-

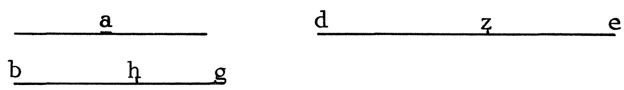

Fig.57

dratum si eadem b g tetragonus ad g h tetragonum constiterit, lineas b g, g h longitudine incommensurabiles potentia tantum (fol.84^{r}) rationales communicantes esse manifestum est. Est itaque b h residuum iunctaque ei linea g h quidem ergo restat b g videlicet tetragono linee longitudine sibi communicantis amplius quam g h posse ea recte ratiocinatione qua in binomiis usi sumus concepto dum eadem b g date rationali longitudine communicet b h residuum primum esse constans est.

⟨X.79⟩ Residuum secundum invenire intendimus.

Datis siquidem lineis duabus longitudine rationalibus communicantibus a et g b numerisque duobus quadratis d e, d z dum taxat ne e z quadratus sit, que proporcio est d e numeri ad e z non quadratum eadem b g tetragonus ad ⟨g⟩ h tetragonum statuetur. Deinde ergo ceteris, ut docuimus, pertractatis dum eadem g h date rationali longitudine communicet, b h residuum secundum est.

⟨X.80⟩ Residuum tercium invenire opus est.

Proposita siquidem a linea rationali datisque numeris duabus quadratis d e, z d ne saltim e z quadratus sit. Assignamus alium numerum t ad neutrum numerorum d e, z e ea proporcione que numeri quadrati ad quadratum. Que vero proporcio est d e ad numerum t eadem

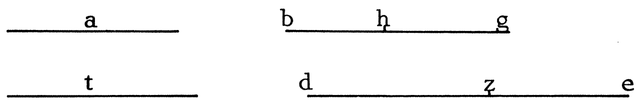

Fig.58

statuetur b g tetragonus ad a tetragonum queque est numeri t ad e z eadem confertur a tetragonus g h tetragono. Et extremorum igitur que est d e numeri ad e z non quadratum, eandem b g et g h tetragonorum esse necesse est. Ut dum b g et g h lineas potentia tantum rationales communicantes assignate a rationali utramque longitudine incommensurabiles esse constet, ceteris ut docti sumus assecutis b h residuum tercium esse manifestum sit.

⟨X.81⟩ Residuum quartum invenire locus exigit.

Designatis enim lineis duabus longitudine rationalibus communicantibus a et b g numerisque duobus d z, z e ut numerus d e ad neutrum d z, z e quadratorum proporcione consistat, que fuerit d e numeri ad e z non quadratum proporcio, eadem b g tetragonus g h tetragono locabitur. Potest itaque b g tetragono linee longitudine sibi incommensurabilis amplius quam g h que cum pariter date rationali longitudine communicet, b h residuum quartum esse constans est.

⟨ X.82⟩ Residuum quintum invenire ordo postulat.

Datis siquidem, ut mos est, lineis duabus longitudine rationalibus communicantibus a et g h numerisque duobus d z, z e atque d e ad neutrum d z, z e proporcione quadratorum. Si que est d e ad e z eadem inter b g et g h tetragonos proporcio constiterit dum g h date rationali longitudine communicet, b h cui adiecta est residuum quintum esse demonstrat (fol.84^{v}).

⟨ X.83⟩ Residuum sextum demum invenire necessarium est.

Primum enim sic consuevimus data a linea rationali datisque numeris duobus d e, z e ut d e ad neutrum d z, z e quadratorum proporcione consistat, adducimus alium numerum t neutro d e, z e quadratorum proporcione conferentes. Equa deinde proporcionalitate que d e numeri ad t non quadratum, proporcio est eadem b g tetragoni a tetragono queque t non quadrati ad e z numerum eadem a tetragonum g h tetragono ordine comparamus. Cum itaque b g et g h potentia tantum rationales communicantes certa quantitate discrete utraque date rationali longitudine incommensurabiles sint, b h residuum sextum esse demonstratum opinor.

⟨ X.84⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo primo contentam potens residuum est.

Continetur enim b g superficies linea rationali a b residuoque primo a g que itaque supra eam potuerit linea residuum est. Cuius demonstrationi adiungimus a g residuo primo g d lineam quam extra vim

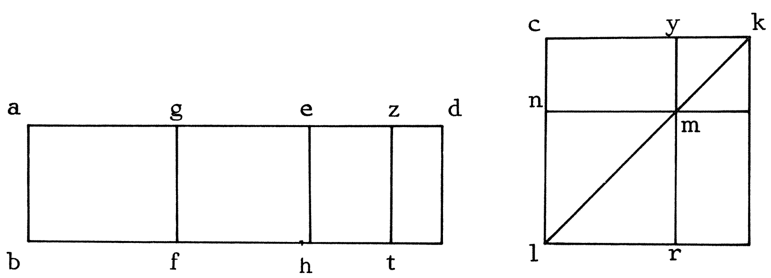

Fig.59

et terminum indivisorum iungi impossibile est. Deinde g d ad punctum e per medium secta apponimus longiori superficiem a z in z d equalem e d tetragono cui ad linee finem tetragonus desit simulque e h et z t lineis ad equidistanciam a b perductis totam b d superficiem consummamus. Deinde b z superficiei equalem l k tetragonum constituamus pariterque m k equalem t d circa diametron k l segregamus simul atque figure lineaciones perficimus. Cum enim a z in z d equalis sit e d tetragono, linee tres a z videlicet et e d atque z d continuo proporcionales sunt. Quapropter et superficies earum qua b z ad d h eadem h d ad t ‹d› proporcione constare necesse est. Ut autem inter b z et t d sic inter equales eis l k et m k tercia k r proporcionalis est. Est igitur k r equalis d h quapropter et k n equalem esse g h consequens est. Evenit igitur ut umbonis tocius n k simulque m k tetragoni superficies f d equalitatem sortiatur. Segregatis igitur equalibus m k et t d totum umbonem g t superficiei equum relinqui necesse est. Datus autem est l k tetragonus b z superficiei equalis. Relinquitur ergo m l tetragonus equalis superficiei b g. Gignit autem m l tetragonum c y linea, potest ergo c y linea supra b g superficiem. His ita constitutis deinde quoniam a z et z d longitudine communicantes sunt, et toti a d utraque longitudine communicabit. Est autem a d rationalis siquidem a b rationali longitudine communicans. Sunt igitur a z d longitudine rationales. (fol.85^r) Quapropter et b z atque t d rationales esse convenit quibus cum k l et m k tetragoni c k et k y linearum equales sint, c k y lineas potentia rationales communicantes esse consequens est. Amplius a d g longitudine incommensurabiles sunt, sed z d communicans a d nec e d incommensurabilis g d. Sunt igitur e d et d z longitudine incommensurabiles. Quapropter et h d atque t d sicque et equales eis n k et m k incommensurabiles. Unde et lineas c k y longitudine incommensurabiles potentia tantum rationales communicantes sicque c y lineam que supra b g potest residuum esse liquido constet.

‹X.85› Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo secundo contentam potens residuum mediale primum est.

Ut cum b g superficiem rationalis a b secundumque residuum a g contineant que supra eam potuerit, linea residuum mediale primum est. Cuius evidentie cunctis ut ante comparatis primum c y supra b g potens supradata indagine invenitur. Deinde cum a d utrique partium a z d communicans a b rationali longitudine incommensurabilis sit, superficies b z et t d mediales communicantes sunt. Quibus quoniam l k et m k linearum c k y tetragoni equales sunt, apparet c k y lineas mediales esse potentia communicantes quas ex antedatis longitudine incommensurabiles nuntiari possimus. Amplius g d siquidem a b longitudine communicans rationalis. Quapropter et h d rationalis cui equalis est n k ex c k in k y congesta. Est igitur c y residuum mediale primum.

⟨X.86⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo tercio contentam potens residuum mediale secundum est.

Ut qua supra b g rationali a b ⟨et⟩ residuo tercio a g contentam potens residuum mediale secundum sit. Constat enim c y posse supra b g sumimusque ut ante c k y mediales potentia tantum communicantes. Deinde cum g d potentia tantum rationalis a b longitudine incommensurabilis sit, d h superficies medialis est. Cui quoniam equalis est n k ex c k in k y composita linea c y residuum mediale secundum est.

⟨X.87⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo (fol.85^{v}) quarto contentam potens minor est.

Continetur enim b g superficies a b rationali quartoque residuo g a, que ergo supra eam potuerit, linea minor est. Inventa siquidem c y supra b g potente quoniam a z et z d longitudine incommensurabiles sunt, erunt et b z atque d t superficies incommensurabiles que quia c k y linearum tetragonis equales sunt, eas lineas potentia incommensurabiles esse constans est. Cum autem d g potentia tantum rationalis a b longitudine incommensurabilis e d communicans sit, d h medialis est equalis c k in k y superficiei. Est autem a d siquidem ⟨c k y tetragonis simul⟩ acceptis equalis sicut c y lineam minorem esse manifestum est.

⟨X.88⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo quinto contentam potens iuncta rationali totum mediale faciens est.

Utque supra b g rationali a b quintoque residuo g a contentam potest, fit que iuncta rationali totum faciat mediale. Sumpto siquidem c y supra b g posse lineasque c k y potentia incommensurabiles ex eo quod g d longitudine communicans a b rationalis est atque d h equalis n k, superficies c k in k y rationalis est. Deinde quod a d potentia tantum rationalis a b longitudine incommensurabilis est, b d medialem efficit. Que quoniam c k y tetragonis simul acceptis equalis, est c (130) y linea iuncta rationali totum mediale faciens.

⟨X.89⟩ Omnis linea supra superficiem linea rationali atque residuo sexto contentam potens iuncta mediali totum mediale faciens est.

Continetur enim b g superficies a b rationali sextoque residuo g a. Qua ergo supra eam potuerit estque iuncta mediali totum mediale faciens. Ordinatis interea supradatorum ratione primo c y supra b g posse deinde c k y potentia incommensurabiles medialem continere simulque utriusque tetragonis mediali constituto solum id mediale alterius in alteram superficiei duplo incommensurabile esse demonstrationi superest. Quod hinc facile constituitur: cum enim a d g longitudine incommensurabiles sint, b d atque f d superficies incommensurabiles sunt quarum quoniam f d supra c k in k y, altera vero tetragonis earum equalis est, c y linea iuncta mediali totum mediale faciens conprobata est. (fol.86^r)

⟨X.90⟩ Si linee rationali superficies residui tetragono equalis apponitur, secundum latus residuum primum est.

Est enim a b linea residuum, cuius tetragono equalis d e superficies g d rationali apposita secundum latus residuum primum con-~~sti~~tuit. Cuius argumento adiungimus a b residuo lineam b z fue-

---

(130) c] cum.

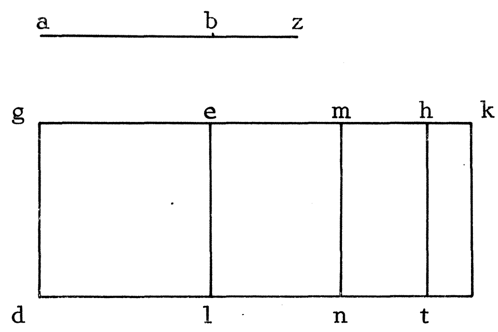

Fig.60

rintque a z b linee sub termino ante separationem. Deinde a z tetragono superficiem d h sicque z b quadrato eamque est t k equales constituimus. Cum vero d e tetragono a b equalis extiterit, a z in z b duplo equam l k relinqui necesse est, deinde k e ad punctum m per medium secta lineaque m n ad equidistanciam g d producta erit utraque medietas inter n k et n e superficiei a z in z b equalis. Cum igitur a z b tetragoni pariter ambo rationales sint, equalis eis d k rationalis est. Cum itaque g d rationalis sit, erit et g k rationalis g d longitudine communicans. Est autem a z in z b et ipsa et duplum eius mediale, medialis est igitur et l k que rationali apposita secundum latus e k potentia rationale ‹g› d longitudine incommensurabile reddit. Cum igitur g k e potentia tantum rationales communicantes sint, g e residuum esse demonstratum est. Deinde quoniam que proporcio est a z ad z b, eadem est a z tetragoni ad a z in z b superficiem eademque eius superficiei ad b z tetragonum, et equales eis superficies eadem proporcione continuantur, utque proporcio est d h ad n k eadem sit n k ad t k. Sunt igitur et latera earum hoc ordine proporcionalia. Que g h videlicet ad m k, eadem m k ad k h proporcio. Tantum est ergo g h in h k quantus m k tetragonus. Amplius quoniam a z tetragonus b z tetragono communicans est, equales d h et t k superficies lineas g h k longitudine communicantes reddunt. Potest ergo g k tetragono linee longitudine sibi communicantis amplius quam e k. Cum ergo g k date rationali g d longitudine communicans sit, g e residuum primum.

⟨X.91⟩ Si linee rationali superficies residui medialis primi tetragono equalis apponitur secundum latus residuum secundum est.

Est g d rationali d e superficies a b residui medialis primi tetragono equalis apposita, dico itaque g e residuum secundum. Cuius demonstrationi cunctis ut ante dispositis quoniam a z b tetragoni pariter ambo mediales, equalis eis d k latus g k potentia rationale date g d longitudine incommensurabile reddit. Cum autem a z in z b et ipsa et duplum eius rationale sit, equalis ei k l superficies latus e k rationale (fol.86^{v}) date g d longitudine communicans tribuit. Cum itaque g k tetragono linee longitudine sibi communicantis e k potentior sit ambeque potentia tantum rationales communicantes, g e residuum secundum esse manifestum est.

⟨X.92⟩ Si linee rationali superficies residui medialis secundi tetragono equalis apponitur, secundum latus residuum tercium est.

Ut cum g d rationali d e superficies a b residui medialis secundi tetragono equalis apposita sit, dicimus g e residuum tercium. Cum enim tam a z b tetragoni pariter ambo quam a z in z b duplum mediale sint, equales eis d k et l k mediales sunt, sed g d rationalis, laterum itaque g k e utrumque potentia rationale g d longitudine incommensurabile est. Est autem a z tetragonus a z in z b superficiei incommensurabilis, sed nec is tetragonus ambobus pariter nec ea superficies duplo suo incommensurabilis. Sunt ergo tam hii tetragoni simul ei duplo quam equales eis d k et l k superficies inter sese incommensurabiles. Sunt itaque linee g k e potentia tantum rationales communicantes. Ceteris igitur ut ante sumptis g e residuum tercium est.

⟨X.93⟩ Si linee rationali superficies linee minoris tetragono equalis apponitur, secundum latus residuum quartum est.

Est enim a b linea minor cuius tetragono equalis d e apposita est g d rationali, est itaque g e residuum quartum. Ex eo siquidem quod a z b tetragoni pariter ambo rationale, equalis eis d k dum et g d rationalis sit g k rationalem g d longitudine communicantem reddit. Quia autem a z in z b et ipsa et duplum est eius mediale, equalis ei k l rationali apposita k e potentia rationalem g d longitudine incommensurabilem efficit. Eruntque ita g k e potentia tantum rationales communicantes. Cum autem a z et z b tetragoni incommensurabiles sint, d h quoque et t k incommensurabiles esse consequens est. Unde cum g h k incommensurabiles sitque g h in h k equalis m k in se ipsam, g k tetragono linee longitudine sibi incommensurabilis amplius quam e k posse conprobatum est. Est ergo g e residuum quartum.

⟨X.94⟩ Si linee rationali superficies iuncte rationali totum mediale facientis tetragono equalis apponitur, secundum latus residuum (fol.87^r) quintum est.

Est enim a b linea que iuncta rationali totum mediale faciat, eius tetragono equalis d e rationali g d apposita g e latus residuum quintum constituit. Constituto siquidem ut mos est g e residuo cum e k rationali g d longitudine communicet eademque g k tetragono linee longitudine sibi incommensurabilis amplius possit, g e residuum quintum est.

⟨X.95⟩ Si linee rationali superficies iuncte mediali totum mediale facientis tetragono equalis apponitur, secundum latus residuum sextum est.

Apposita siquidem est g d rationali d e superficies a b iuncte mediali totum mediale facientis tetragono equalis, dico itaque g e residuum sextum. Ut enim a z b linearum et tetragoni simul ambo et superficiei duplum mediale alterumque alteri incommensurabile, sic eis equales d k et l k mediales incommensurabiles. Cum et g d rationalis sit, lineas g k e rationali g d utramque longitudine incommensurabiles ipsasque inter sese potentia tantum rationales communicantes reddunt. Et que restant igitur ut ante sumptis, g e residuum sextum esse constans est.

⟨X.96⟩ Omnis linea residuo communicans in eadem specie et termino residuum est.

Est enim a b residuo communicans g d, et eam itaque dico in eadem specie residuum. Cuius argumento adiungimus a b residuo lineam b e fiuntque a e b linee sub termino ante separationem. Deinde que proporcio est a b ad g d eadem si b e ad d z constiterit eadem e-

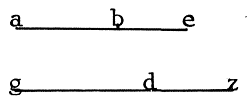

Fig.61

ciam a e ad g z constare necesse est. Est autem a b communicans g d, sic igitur et a e atque e b conproporcionalibus sibi g z et z d communicantes esse consequens est. Sunt autem a e b potentia tantum rationales communicantes. Est itaque g d residuum. Cum vero que proporcio est a e ad g z eadem b e ad d z, alternatim et que proporcio est a e ad e b eadem g z ad z d. Sive ergo a e amplius quam e b tetragono linee communicantis sibi possit sive incommensurabilis, eiusdem ad se habitudinis linee tetragono g z amplius quam d z posse necesse est, ut necessario utralibet illarum aut neutra date rationali longitudine communicet et harum in eadem parte aut neutram simul date rationali communicare oporteat. Sicque residuo cuilibet communicantem lineam in eadem specie et termino residuum esse liquido constet. (fol.87^{v})

⟨X.97⟩ Omnis linea residuo mediali communicans in eadem specie et termino residuum mediale est.

Ut g d cum a b residuo mediali communicet, ipsa quoque in eadem specie et termino residuum mediale fit. Comparatis enim ut ante cunctis quoniam que proporcio est a b ad g d eadem a e ad g z atque b e ad d z, cum g d communicans sit a b ceteris, ut proporcionales sunt, communicantes esse necesse est. Sunt autem a e b mediales potentia tantum communicantes, est itaque g d residuum mediale. Cum autem et alternatim que proporcio est a e ad e b eadem fit g z ad z d qua proporcione a e tetragonus ad a e in e b superficiem constiterit, eadem g z tetragonum ad g z in z d superficiem constare necesse est. Alternatim ergo que tetragonorum fuerit, eandem inter superficies proporcionem esse consequens est. Cum itaque tetragoni communicantes sint, et superficies communicantes esse constans est, ut necessario sive rationalis sit altera sive medialis et alteram in eo genere constare oporteat sicque residuis medialibus (131) utralibet linea communicans fuerit in eadem specie et termino pariter existere liquido constet.

⟨X.98⟩ Omnis linea linee minori communicans minor est.

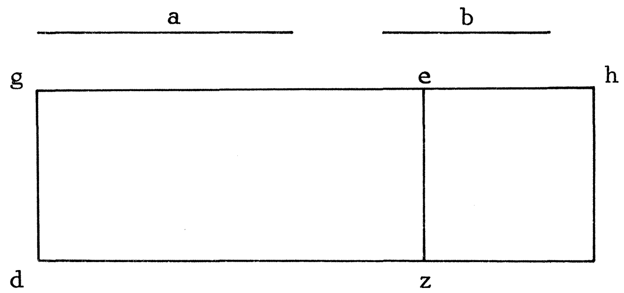

Fig.62

Ut cum b linea communicans sit a minori, et ipsa minor fit. Quod ut plane constet date g d linee rationali apponimus d e superficiem equam a tetragono necnon z h equalem b quadrato. Eritque ita secundum latus g e residuum quartum ipsique communicans e h. Quapropter et id residuum quartum esse constet. Cum igitur superficies z h linea rationali quartoque residuo contenta b tetragono equalis sit, b lineam minorem esse manifestum est.

⟨X.99⟩ Omnis linea iuncta rationali totum mediale facienti communicans, ipsa quoque iuncta rationali totum mediale facit.

---

(131) residuis medialibus] residuorum medialium medialium.

Est enim a linea que iuncta rationali totum mediale facit cui cum b communicet, ipsa quoque iuncta rationali totum mediale faciens. Dispositis interea ut ante cunctis quoniam g e residuum quintum provenit, e h quoque residuum quintum fieri postulat. Cum itaque z h superficies b tetragono equalis sit, b iuncta rationali totum mediale facit.

⟨X.100⟩ Omnis linea iuncte mediali totum mediale facienti (fol. 88^r) communicans, iuncta mediali totum mediale faciens est.

Ut cum b communicans sit a coniuncta mediali totum mediale faciat, ipsa quoque iuncta mediali totum mediale faciens est. Quia enim g e residuum sextum sit, causa est e h quoque residuum sextum fieri. Unde cum z h superficies tetragono b equalis sit, b iuncta mediali totum mediale faciens est.

⟨X.101⟩ Si de superficie rationali superficies medialis resecatur, linea que supra reliquam superficiem potuerit aut residuum est aut minor.

Est enim superficies a b rationalis de qua cum b medialis segregata fuerit, linea supra a potens inter residuum et minorem alterutrum fit necesse est. Cuius constitutioni date g d rationali apponimus d e superficiem equalem a b de qua cum e h equalis b secreta fuerit, d z equa a relinqui necesse est. Cum igitur a b rationalis sit dataque et g d rationalis, linea g e rationalis date g d longitudine communicans est. Quia vero b medialis est, e h quoque

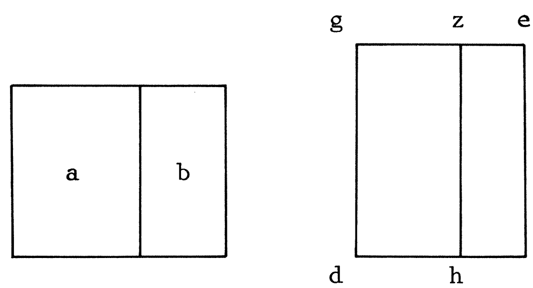

Fig.63

medialis lineam e z potentia rationalem g d longitudine incommensurabilem reddit. Quod autem d e rationalis, e h medialis est, lineas g e z longitudine incommensurabiles efficit. Item itaque potentia tantum rationales communicantes. Est ergo g z residuum, potest autem g e tetragono linee quidem aut communicantis sibi aut incommensurabilis amplius quam e z. Si ergo communicantis, e z residuum primum est. Si vero incommensurabilis, residuum quartum. Quod si primum est, linea que supra d z potuerit residuum est. Si vero quartum, supra d z potens linea minor est. Cum itaque d z equalis sit a, linea supra a potens inter residuum et minorem alterutrum sit necesse est.

⟨X.102⟩ Si de superficie mediali superficies rationalis resecatur, linea que supra reliquam superficiem potuerit aut residuum mediale primum est aut iuncta rationali totum mediale faciens.

Ut de a b mediali b rationalis secreta, linea supra a potens inter residuum mediale primum et iunctam rationali totum medialem facientem alterutrum est. Dispositis enim ut ante cunctis conprobatoque g z residuo, cum z e date rationali g d longitudine communicet quoniam g e tetragono linee longitudine quidem aut (fol.88^{v}) communicantis sibi aut incommensurabilis amplius quam e z potest, g z residuum aut secundum est aut quintum. Cum igitur d z equalis sit a linea que supra a potuerit aut residuum mediale primum est aut iuncta rationali totum mediale faciens.

⟨X.103⟩ Si de superficie mediali superficies medialis resecatur fueritque reliqua toti incommensurabilis lineaque supra eam potuerit aut residuum mediale secundum est aut coniuncta mediali totum mediale facit.

Ut de a b mediali b segregata supra a potens alterutrum est inter residuum mediale secundum et eam que iuncta mediali totum mediale facit. Conprobatis siquidem ut ante ceteris discretaque ut supradatum est g e supra z e potentia, cum utraque date g d rationali longitudine incommensurabilis sit, g z residuum aut ⟨tercium⟩

est aut sextum. Cum ergo d z equalis sit a, linea que supra a potuerit aut residuum mediale secundum est aut iuncta mediali totum mediale faciens.

⟨X.104⟩ ⟨Ne⟩ que linea residuum neque sequentium mutarum ulla, infra terminum aut speciem alterius est.

Cum enim residui tetragono superficies equa linee rationali apponitur, fit secundum latus residuum primum sicque sequentium mutarum cuiuslibet tetragono superficies equa linee rationali apponitur, secundum latus in eo termino et ordine consistere necesse est, quod uni quinque suo in loco prescripsimus licetque ita tum ex superficiebus latera tum ex lateribus superficies mutua inde convertendo lineares singulos suos infra terminos in certa lege cohercere (132).

Nec vero residuum binomium est.

Ut cum sit a residuum, dico non esse binomium. Date siquidem b g rationali apponatur superficies equalis a residui tetragono sitque secundum latus b d residuum primum. Iungatur itaque d e quam extra terminum indivisorum iungi impossibilem est. Sunt ergo b d e potentia tantum rationales communicantes atque b e longitudine communicans b g. Sit autem idem a et binomium interim cuius tetragono equalis d g superficies b g rationali apposita est (fol.89r) sitque secundum latus b d binomium primum, dividatur itaque apud z in suas connominales eruntque b z d potentia tantum rationales communicantes atque b z longitudine communicans b g. Disiunctis igitur ut e b sic e z rationali z b longitudine communicans est. Sunt igitur e z et z d potentia tantum rationales communicantes unde et d e residuum esse conveniat quod mi-

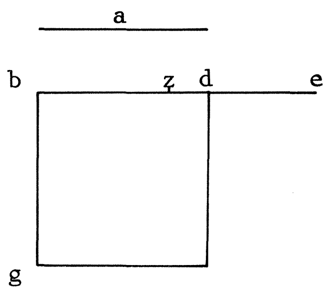

Fig.64

(132) cohercere] thoñcere.

nime convenit nec ergo residuum binomium est.

⟨X.105⟩ Et nec residuum sic neque sequentium mutarum ulla binomium aut de sequentibus mutis aliqua est.

Cum enim aut binomii (133) aut cuiusquam sequentium mutarum tetragono superficies equa linee rationali apponitur, secundum latus eius ordinis binomium esse necesse est. Cum itaque residuum et binomium diversa sunt, nec residuum neque sequentium mutarum ulla binomium aut de sequentibus mutis aliqua est.
Nam neque mutarum medialium, que infinite (134) sunt, ulla sub termino aut specie precedentium sive subsequentium alicuius est. Designatis siquidem a b mediali atque g rationali esto g in a b muta medialis quapropter et b d ut tetragonus irrationalis fit linea muta. Dico itaque neutram in alterius incidere terminum. Cum enim g in a b tetragono d b equalis, alterius (135) quidem superficiei latus secundum est alteram (136) supra superficiem potens. Eodem pacto si g in b d superficies tetragono d e equalis statuta fuerit, neque earum medialium alteram in alterius incidere terminum possibile (137) est. Eademque ratio per infinita licet ad eundem finem perducit.

⟨LIBER XI⟩

⟨Definitiones⟩ ⟨i⟩ Corpus est quod longitudinem, latitudinem et altitudinem habet, cuius termini superficies.

⟨ii⟩ Linea supra superficiem erecta dicitur que cum singulis lineis sibi conterminalibus in (fol.89^{v}) ea superficie expansis angulos rectos continet diciturque linea hec ei superficiei perpendicu-

---

(133) binomii] residui.
(134) infinite] minime.
(135) alterius] altera.
(136) alteram] altera.
(137) possibile] impossibile.

laris.

⟨iii⟩ Superficies autem supra superficiem erecta dicitur cum linee que communis illarum est terminus due perpendiculares superstant fiuntque circa eam lineam in utraque superficie recti anguli.

⟨iv⟩ Superficies equidistantes sunt que licet in infinitum trahantur neutra supra alteram cadet.

⟨v⟩ Equa corpora sunt quorum terminales superficies numero ac quantitate equales.

⟨vi⟩ Similia corpora sunt que similibus superficiebus numeroque equalibus continentur.

⟨vii⟩ Corpus per diametron sectum dicitur quod quinque superficies continent quarum tres equidistancium laterum, due vero triangule.

⟨viii⟩ Spera est: quociens sumpto semicirculo lineaque diametri fixa arcus ipse donec ad locum suum redeat circumducitur idque est corpus globosum, idemque spere quam eius semicirculo centrum.

⟨ix⟩ Piramis laterata est figura solida cuius superficies ab una relique ad unum punctum erecte conveniunt.

⟨x⟩ Piramis teres est: quociens dato triangulo rectangulo atque alterutro laterum angulum rectum continentium fixo triangulus ipse donec ad locum unde (138) cepit redeat circumducitur. Si ergo latus fixum lateri circumducto equum fuerit, erit figura rectangula; si longius acutiangula; si brevius obtusiangula. Axis autem figure: latus fixum, basis figure: circulus, diciturque figura hec piramis columne teretis.

⟨xi⟩ Figura solida rotunda extremitatum equalium est: quociens adhibita equidistancium superficie rectangula atque alterutro laterum angulum rectum continentium fixo ipsa superficies donec ad locum primum redeat circumducitur cuius bases duo circuli estque huius figure columpna teres.

⟨xii⟩ Angulus solidus: est quem plures quam duo plani continent anguli qui haut in una superficie ad unum tantum punctum coeunt.

---

(138) unde] unum.

⟨xiii⟩ Figure corporee sive rotunde extremitatum equalium sive piramides earum id est teretes (139) similes sunt quarum axes ad diametros suarum basium in eadem proporcione.

⟨XI.1⟩ Linee partem in alto, partem esse in plano impossibile est.

Si enim possibile est, esto a b g linee pars b g in alto, pars a b in plano. Producimus itaque lineam a b usque ad d fiuntque linee due a b d scilicet et a b g. Evenit igitur a b lineam duabus lineis b d et b g directe iungi quod impossibile est. Nec linee partem in plano, partem in alto esse possibile est.

⟨XI.2⟩ Omnes due linee quarum altera secat alteram in eadem (fol.90^{r}) superficie site sunt. Nam et omnem triangulum in una superficie totum esse necesse est.

Secat enim a b linea d g lineam ad punctum e, dico igitur eas lineas in eadem superficie sitas. Continuet enim in lineis d e b puncta duo linea recta z h eritque ita et e z h triangulus in una superficie totus. Nam si trianguli pars in alto, pars in plano fuerit et lineis z e h idem incommodum accedere necesse est. Est itaque triangulus in una totus superficie. In qua vero triangulus, in eadem site sunt et z e h linee. Nisi igitur in eadem et a b atque g d linee sint, earumdem partes in alto, partes esse in plano continget.

⟨XI.3⟩ Omnium duarum superficierum que sese invicem secant, sectio communis est linea.

Secant enim sese invicem superficies due a d b g atque e z h t quarum sectio communis k l, dico ergo k l lineam. Nam si convenit duas esse lineas, continuet k l puncta per a g superficiem linea k m l atque per z h superficiem linea k n l. Sunt igitur hee due linee equales earumque termini idem. Quod quoniam minime convenit, relinquitur superficierum sese invicem secantium communis

(139) teretes] terreteres.

sectio linea.

⟨XI.4⟩ Si super communem terminum linearum duarum sese invicem attingentium linea rectis steterit angulis, eam et earum superficiei rectis angulis superstare necesse est.

Exempli gracia: lineis g d et e z sese invicem attingentibus ad commune contactum punctum b rectis utrique erecta est angulis a b linea, dicimus igitur eam et superficiei g d z e rectis superstare angulis. Cuius demonstrationi primo linearum coniunctionibus e b scilicet ei

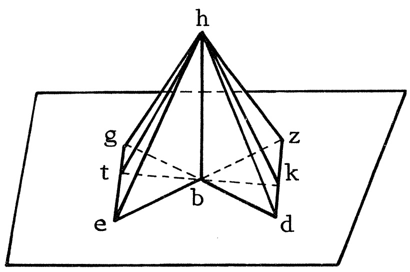

Fig.65

que est b z atque g b ei que est b d adequatis simulque rectis lineis d cum z et e cum g continuatis designatum in a b linea punctum h applicabit cum notis e g d z. Exibit deinde a puncto b in utramque partem linea quo ad equidistantes lineas ad opposita puncta t et k (fol. 90^{v}) attingat applicabitque statim h cum t et k pariterque g cum t sicque cum d k sique placuerit similiter et ab alterius linee terminis ad eadem puncta equidistantes linee due produci possunt hac itaque racione figure lineationibus adaptatis. Quoniam e b equalis est b z lineeque z e linea b h rectis superstat angulis bases eciam e h et h z equales esse necesse est. Eodem pacto quoniam b g equalis est b d lineeque g d linea b h rectis angulis superstat, bases eciam g h et h d equales esse consequens est. Extiterunt autem et e g atque d z equales. Sunt itaque linee due g h, g e lineis duabus h d, d z ut sese respiciunt equales quarum et bases e h atque h z equas esse dudum constitit. Est igitur angulus e g h angulo h d z equalis. Ut autem d k et t g equidistantes atque g h ei que est h d sicque g t ei que est d k equales sint, erunt linee due h g et g t lineis duabus h d et d k ut sese respiciunt equales. Extitit autem et angulus h g t angulo h d k equalis. Sunt igitur et bases h t et h k equales, est autem latus t h equum h k sed b h communis. Cum igitur h b t equales sint h b k atque h t ei que est h k angulum h b t angulo h b k equum esse necesse est. Quociens vero linea linee superstans duos utrinque angulos equales reddit utrumque rectum esse constans est. Sunt igitur ad punctum b supra t k circa b h lineam utrinque recti anguli. Stat itaque b h supra t k rectis angulis atque huius rationibus b h linea cunctis supra eam superficiem expansis lineis sibi conterminalibus rectis angulis insistere comprobatur, quapropter et superficiei g d z e rectis eam angulis superstare manifestum est.

〈XI.5〉 Si linea supra communem terminum trium linearum sese contingentium recto steterit angulo: tres lineas in eadem superficie coherceri necesse est.

Stat enim angulo recto linea b a supra lineas sese contingentes b g, b d, b e, dico igitur omnes in una contineri superficie. Quod si minus videat, esto b d in alto. Que itaque de superficie a b, d b linea deducta fuerit commune medium in superficiem b g, b e incidere necesse est. Sitque huiusmodi linea b z. Est igitur angulus a b z rectus. Rectus est autem datus eciam a b d. Si ergo in eadem superficie sunt a b et b d dum angulorum duum quos notavimus uterque rectus sit, maius minori equum esse necesse est. Quod quoniam aliter est, linee tres quibus linea ortogonaliter superstat in eadem superficie relinquuntur. (fol. 91^r)

〈XI.6〉 Cum erecte fuerint linee due rectis angulis supra unam superficiem, lineas duas equidistantes esse necesse est.

Statute 〈sunt〉 enim rectis angulis linee due a b, g d supra collocatam superficiem quandam que causa sit eas esse equidistantes. Cuius argumento applicabitque b cum d linea supra collocatam superficiem statimque supra d 〈b〉 lineam a puncto d recto consurget angulo linea d e que et cum d g rectum constituat angulum necesse est. Segregemus igitur equales lineas duas d h, b z appli-

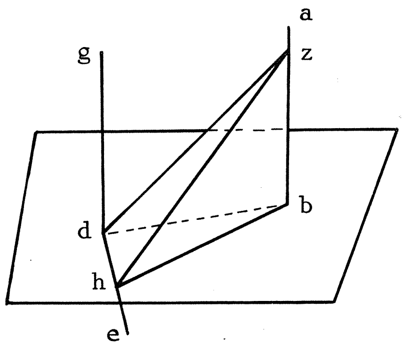

Fig.66

cabitque z cum d atque h cum z et b. Quo facto quoniam d h et z b equales sunt, communis autem d b erunt latera duo d h, d b lateribus b d, b z equalia estque angulus z b d rectus angulo b d h equalis. Quapropter et bases b h, d z equas esse necesse est. Sunt itaque latera duo z d h lateribus h b z ut sese respiciunt equalia quibus eadem utrinque basis h z, est igitur angulus z d h angulo h b z equalis, sed h b z rectus, rectus est igitur et h d z. Stat ergo d e linea commune medium angulo recto supra communem terminum trium linearum d b, d z, d g sese contingentium. Quapropter in eadem superficie sunt ut in qua d b et d g in eadem sit et d z. In qua vero d b et d z in eadem est et b z. Sunt itaque b a et d g supra unam hanc superficiem, supra quas b d linea cadens que duos intrinsecos angulos duobus rectis adequat, eas lineas equidistantes esse declarat.

⟨XI.7⟩ Linea que puncta duo supra equidistantes lineas duas designata continuat, in eadem est superficie qua hee due equidistantes.

Ut in equidistantibus lineis duabus a b, g d annotata puncta duo z e que linea continuat in earumdem sit superficie. Si enim aliter esse convenit, esto linea hec puncta continuans in alto qualis est e h z. Cum igitur hec linea erecta fuit, eductum commune medium in a b g d superficiem incidere necesse est, sitque huiusmodi linea z e. Evenit igitur ut linearum e z et e h z quibus idem sunt termini altera secet alteram. Nec ergo lineam que ab equidistantibus puncta duo continuat in alia superficie esse possibile est.

⟨XI.8⟩ Inter equidistantes lineas duas si alterutra supra aliquam (fol.91^{v}) superficiem rectis steterit angulis, necesse est et alteram eidem superficiei rectis insistere angulis.

Ut cum a b et g d equidistantium a b superficiei cuidam rectis insistat angulis, eidem et g d ortogonaliter instat. Cuius constitutioni applicabit b cum d linea supra collocatam superficiem statimque supra b d superficiem a puncto d recto consurget angulo linea d e. Segregemus igitur equales lineas duas d h, b z applicabitque z cum d atque h cum z et b. Quo facto quoniam d h et z b equales sunt, com-

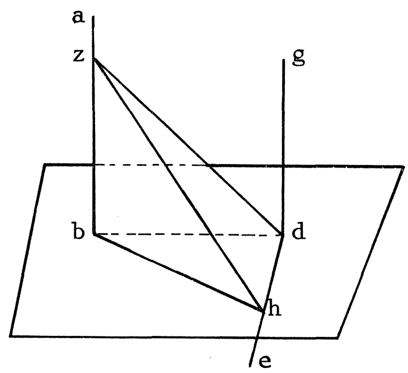

Fig.67

munis autem d b erunt latera duo h d b lateribus d b z equalia. Estque z b d angulus rectus recto angulo h d b equalis. Quapropter et bases b h, d z equas esse necesse est. Sunt itaque latera duo d h, d z lateribus b z, b h ut sese respiciunt equalia quibus quoniam eadem utrinque basis h z angulum h b z angulo z d h equum esse consequens est, sed h b z rectus, rectus est igitur et h d z. Stat ergo d e linea commune medium angulo recto supra lineas duas que sese contingunt d b, d z. In quarum superficie locata fuerit et g d, et eidem itaque d e similiter ortogonaliter insistat necesse est. Constat autem et g d supra d b recto angulo. Sic igitur g d supra d b atque supra d h ortogonaliter constat ut g d lineam superficiei b d rectis insistere angulis manifestum sit.

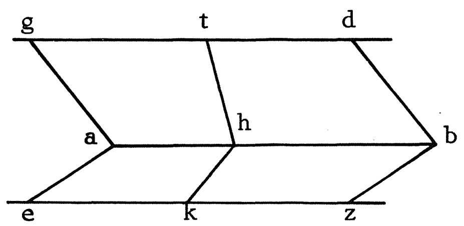

Fig.68

⟨XI.9⟩ Linee que uni equidistant nec in una superficie, ipse quoque equidistantes sunt.

Equidistant enim g d et e z linee due ei que est a b eruntque ita et inter sese licet non in una superficie equidistantes. Designato siquidem in a b linea puncto h educemus lineam ortogonaliter h t supra g d b a superficiem pariterque h k rectis similiter angulis supra b a z e superficiem. Stat igitur a b linea rectis angulis supra communem terminum linearum t h k h sese contingentium. Sic ergo et superficiei t h atque h k ortogonaliter habet insistere. Cui vero superficiei b a rectis insistat angulis, eidem hinc e z illinc g d rectis similiter angulis insistere necesse est. Cum autem linee due supra unam superficiem rectis consistunt angulis, equidistantes sunt. Que igitur uni equidistant et inter sese invicem equidistare habent.

⟨XI.10⟩ Si linee due se invicem ad angulum quemlibet contingentes lineis duabus ad alium sese similiter attingentibus (fol.92^r) nec in una superficie equidistantes sunt, eos angulos equales esse necesse est.

Ut a b g se invicem contingentes d e z similiter sese attingentibus licet in diversis superficiebus equidistantes angulos suos coequant. Cuius demonstracioni redigimus primum ad equalitatem lineas a b g atque d e z, applicabit deinde a cum d atque b cum e sicque g cum z demumque a cum g et d cum z. Quoniam igitur a b et d e equidistantes atque equales sunt, erunt et a d atque b e similiter equidistantes equales. Eodem ordine b e et g z equidistanter adequatis quoniam que uni alicui equidistant nec in una sunt superficie et inter sese equidistare constat a d et g z equidistantes equales reperiuntur. Ut itaque duo latera a b g duobus lateribus d e z ut sese respiciunt equalia sunt, equalis eciam basis a g basi d z angulum a b g angulo d e z nimirum equalem esse manifestum est.

⟨XI.11⟩ Ab assignato in aere puncto supra datam superficiem perpendicularem deducimus.

Data siquidem superficie qualibet in ea primum extendimus utcumque rectam lineam b g supra quam ab assignato puncto a demittimus perpendicularem a d sicque ab eodem puncto a supra lineam d e perpendicularis a z producta proposito satisfaciat. Cuius evidentie exibit a puncto z in utramque partem ad equidistantiam b g linea t h. Quoniam itaque b g supra communem terminum linearum sese contingentium d a, d e rectis constituta est angulis, et superficiei d a d e ortogonaliter habet insistere. Cui quoniam t h equidistans est, ipsa quoque eidem superficiei rectis insistit angulis. Pridem autem a z rectis angulis d e linee supervenit. Eadem igitur a z et linee t h ortogonaliter insistat necesse est. Stat igitur a z rectis angulis supra communem terminum sese contingentium d e, t h linearum, quapropter et earum superficiei rectis insistens angulis propositum absolvere videtur.

⟨XI.12⟩ Ab assignato in proposita superficie puncto lineam rectis angulis elevamus.

Proposita siquidem superficie qualibet cum ab assignato in ea puncto a perpendicularis erigenda fuerit, a demonstrato primum in aere puncto b ad eam superficiem perpendicularem demittimus b g. Ad cuius equidistantiam cum ab a puncto linea d a sublevata fuerit, proposito satisfactum opinor. Quia enim a d equidistat b g atque b g date superficiei ortogonaliter (fol.92^{v}) insistit, eidem et a d a cuius puncto quodam elevata est rectis insistat angulis necesse est.

⟨XI.13⟩ Duas lineas ad punctum unum supra quamlibet superficiem ortogonaliter stare impossibile est.

Si enim possibile est, esto ut a puncto a in proposita superficie qualibet due linee b a, g a rectis consurgunt angulis. Subtendimus igitur in superficie data communem terminum lineam d e. Si itaque d a b atque b a e anguli duo recti sunt, quoniam d a b atque b a e equales sunt, g a e et g a d maius minori equum esse consequens est.

⟨XI.14⟩ Si una linea assignatis duabus superficiebus ortogonaliter insistit, ille due superficies si utroque protrahantur ex nulla parte concurrunt.

Stat enim a b linea supra duas superficies e z, g d rectis angulis, dicimus igitur eas superficies quocumque protrahantur ex nulla parte coire posse. Quod si minus videtur, esto interius eas aliqua ex parte convenire possibile, erit itaque concursus earum terminus commune medium. Sitque linea k l, signatum igitur in linea k l qua inciderit punctum m applicabit rectis lineis cum a et b eritque ita quemadmodum commune medium k l linea sic concursus punctum in ea designatum supra utramque superficiem. Quoniam itaque linea que supra superficiem quamlibet erecta est cum omnibus lineis in ea superficie sibi conterminalibus rectos angulos continet, in triangulo m a b duos angulos apud b et a rectos esse necesse est. Quod quoniam impossibile est, nec eas superficies aliqua ex parte coire possibile est.

⟨XI.15⟩ Si due linee contingentes duabus lineis contingentibus equidistantes nec in una superficie fuerint, eis lineis contente superficies due licet undique protrahantur ex nulla parte coibunt.

Exempli gracia: a b g linee due contingentes lineis duabus d e z contingentibus equidistantes sunt nec in una superficie (fol.93^r) dico igitur et earum superficies equidistantes. Cuius argumento descendet a puncto b in superficiem d e z linea perpendicularis b h ad punctum h supra eam superficiem ortogonaliter consistens, deinde a puncto h exibit h t linea equidistans d e lineaque h k ad equidistantiam e z. Quoniam igitur linee que uni equidistant nec in una superficie sunt inter sese quoque sunt equidistantes, h t et a b equidistantes esse consequens est. Eademque ratio b g et h k equidistare comprobat. Cum itaque b a et h t in se equidistent, supra eas cadens b h duos intrinsecos angulos duobus rectis equos efficiat necesse est. Rectus autem est b h t, rectus est igitur et a b h eademque ratio h b g quoque rectum esse demonstrat. Stat igitur h b linea rectis angulis supra communem terminum a b g linearum sese contingentium. Quapropter et earum superficiei rectis angulis insistere necesse habet que pridem superficiei d e z rectis institit angulis. Quoniam ergo superficies due quibus una linea ortogonaliter insistit equidistantes sunt, has superficies equidistare demonstratum opinor.

⟨XI.16⟩ Si superficies una duas superficies equidistantes secat, communes earum sectiones equidistantes sunt.

Secat enim equidistantes superficies duas a b, h t superficies una m k l n quarum sectiones communes m k et n l, dicimus igitur m k et l n equidistantes. Si enim equidistantes non sunt, conveniant ad punctum c ut igitur k c linea sic punctum c supra a b superficiem utque l c linea sic idem c supra t h quoque superficiem esse necesse est. Nec igitur hee superficies equidistantes sunt. Que quoniam equidistantes sunt, nec communes earum sectiones aliqua ex parte coire possibile est.

⟨XI.17⟩ Equidistantes superficies plures si duas rectas lineas secant, porciones linearum proporcionales sunt.

Verbi gracia: tres equidistantes superficies e h, m l, c y duas rectas lineas a b et g d ad puncta a, r, b et g, s, d secant, dico igitur que proporcio fuerit a r ad r b eadem est g s ad s d. Cuius constitutioni applicabit a cum g, g cum b, b cum d simulque r cum t atque t cum s. Quo facto quoniam e h et m l equidistantes superficies duas una que (fol.93^{v}) est g t r a secat, communes sectiones equidistantes sunt. Sic itaque g a equidistat r t. Item quoniam equidistantes superficies duas m l et c y una que est t s b d secat, nihilominus sectiones communes equidistantes sunt sicque t s equidistat b d. Cum igitur in triangulo a b g linea r t duo latera reliquo equidistans secat, erit nimirum que proporcio g t ad t b eadem a r ad r b.

⟨ XI.18⟩ Si supra assignatam superficiem linea rectis steterit angulis: omnis superficies ab ea linea quorsumlibet educta supra eam superficiem similiter erecta est ⟨ortogonaliter⟩ .

Stat enim a b linea supra quandam superficiem ortogonaliter, dico igitur omnem superficiem supra a b constitutam eidem superficiei rectis angulis insistere. Educatur interea ex a b linea quorsumlibet superficies incidetque in assignatam superficiem lineam communem medium sitque g d. Assignato ergo in g d quacumque puncto e consurget ortogonaliter e z linea in superficie a b g d ut igitur angulorum a b e atque z e b uterque rectus est. Linea g d supra lineas a b et e z cadens duos intrinsecos angulos duobus rectis adequat. Sunt ergo hee due linee equidistantes quarum quoniam a b superficiei cuidam ortogonaliter insistit, et e z eidem ortogonaliter insistere necesse est. Sicque omnis linea ab g d rectis educta angulis in superficie a b g d assignate superficiei ortogonaliter habet insistere quod est a b superficiem quamlibet ei superficiei rectis superstare angulis.

⟨ XI.19⟩ Si due superficies supra quandam superficiem ⟨ ortogonaliter⟩ erecte se invicem secant, communis earum sectio ad superficiem (140) perpendicularis est.

Secant enim sese invicem superficies due b d et t h que quoniam superficiei cuidam ortogonaliter insistunt, et earum sectio communis k l ei superficiei rectis insistat angulis necesse est. Quod

---

(140) ad superficiem] ex superficiei.

si aliter est, educimus ab l puncto qua sese intercipiunt lineam ortogonaliter l m in superficie t h aliamque l n rectis similiter angulis in superficie b d quarum utramque ei superficiei ortogonaliter insistere necesse est. Sunt igitur ab uno puncto supra quandam superficiem due linee rectis angulis educte. Quod quoniam impossibile est, relinquitur superficierum que supra quandam superficiem ⟨ortogonaliter⟩ erecte sese secant sectio (fol.94^r) communis illi perpendicularis.

⟨XI.20⟩ Si tres anguli superficiales angulum solidum contineant, illorum trium quique duo reliquo sunt maius.

Ut cum tres anguli superficiales a b g et g b d atque a b d unum solidum contineant, quique duo reliquo maius sunt. Nam si equales sunt, quoslibet duos reliquo maius esse nec dubitari potest. Qui si inequales sunt, esto a b d maximus. Educimus igitur ab a b linee puncto b lineam b e equali angulo qui est a b g, deinde b z atque b h

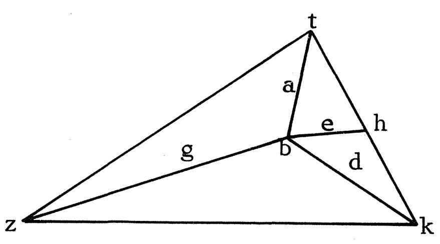

Fig.69

ad equalitatem resectis exibit ab h puncto in utramque partem in superficie a b d linea k t applicabitque t cum z et z cum k. Cum itaque b h, b z equales sint, communis autem b t, erunt latera duo b h, b t lateribus b t, b z equalia angulique his lateribus contenti equales, est igitur et basis t h basi t z equalis. Unde z k maiorem quam h k esse consequens est. Cum itaque b z, b h equales sint, communis autem b k, erunt latera duo b h, b k lateribus b k, b z equalia, basis autem z k basi h k maior est, igitur angulus z b k angulo k b h maior, anguli vero h b t et t b z equales. Sic igitur anguli a b g et g b d angulo a b d maius sunt.

⟨XI.21⟩ Omnis angulus solidus iiii^{or} rectis angulis minor est.

Continetur enim solidus quidam angulus superficialibus angulis e b h et e b z atque z b h (141), deinde in superficie e z h qua incidit designatum t punctum applicabit cum e et z et h. Ut igitur anguli duo e z b et b z h angulo e z h angulique z h b et b h e angulo e h z angulique h e b et b e z angulo h e z bini quique reliquo tercio maius sunt, et reliqui tres ad punctum b coadunati reliquis tribus a puncto t diductis minores sunt. Hii vero tres qui ad punctum t conveniunt iiii^{or} rectis equi sunt. Quoniam igitur hii qui apud b sunt angulum solidum conficiunt cum est solidum angulum iiii^{or} rectis minorem esse manifestum est.

⟨XI.22⟩ Si tres anguli superficiales quorum quique duo reliquo maiores (142) sunt cunctis sibi invicem equis lineis continentur:de tribus basibus earum linea terminos continuantibus triangulum constitui possibile est.

Continentur enim tres anguli superficiales quorum quique duo reliquo sunt maius cunctis sibi invicem equalibus lineis a b g et h t k atque d e z. (fol.94^{v}) Cum ergo sua cuique subtenta fuerit, basis a g videlicet et h k atque d z, ex eis inquam triangulum constitui

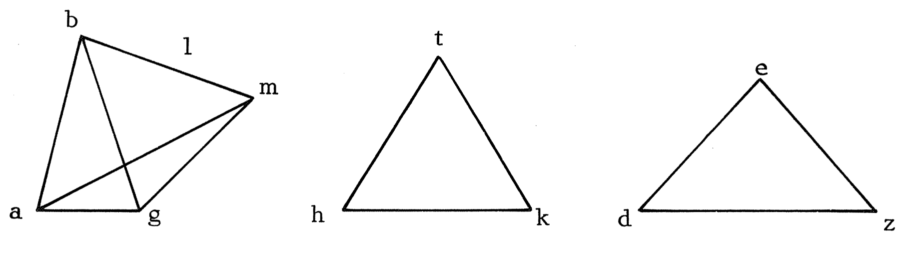

Fig.70

(141) h] cum z.
(142) maiores] mamus.

non est impossibile. Quod ut manifestum fiat, educimus ab g b linee puncto b lineam b l equali angulo ei qui est h t k statimque de linea b l equum h t resecantes b m constituamus m cum g et a. Quoniam itaque latera duo g b m lateribus h t k ut sese respiciunt equa sunt angulique eis contenti equales et bases m g atque h k equas esse necesse est. Extiterunt autem anguli a b g et h t k angulo d e z maius estque g b m equalis h t k, est igitur angulus a b m angulo d e z maior. Cum itaque latera duo a b m lateribus d e z equa sint, angulus autem a b m angulo d e z maior, basim m a basi d z maiorem esse consequens est. Sunt autem a g m maius quam m a, itaque vel multo maius quam d z sed g m equalis h k, nec igitur ex tribus a g et h k atque d z lineis triangulum constitui impossibile est.

⟨XI.23⟩ Propositis tribus angulis superficialibus quorum quique duo reliquo sint maius, ex equalibus eis solidum angulum constituimus. Unde constans sit eos tres iiii rectis esse minores.

Ac primum datis superficialibus angulis tribus iiii^{or} rectis minoribus quorum quique duo reliquo sunt maius b a g et d e z atque h t k cunctisque statim eos angulos continentibus lineis ad equalitatem resectis suam cuique basim subtendimus ex quarum equalibus m l n triangulum componimus ea ratione ut m l basi b g atque l n linee d z sicque m n ei que est h k equalitate respondeant. Cum deinde triangulum ambiet circulus m l n centrum c applicabit eisdem l m n notis dico igitur c l minorem esse quam a b. Si enim minor non est, aut maior equidem erit aut equalis. Ponatur itaque primum equalis. Si enim l c equalis est a b quoniam m c equalis est l c atque a b equalis a g, erunt latera duo m c l lateribus a b, a g ut sese respiciunt equalia. Estque et basis basi equalis, est ergo angulus b a g angulo m c l equalis eademque ratione reliqui duo reliquis duobus adequantur ut necesse sit datis angulis tribus tres angulos apud c convenientes equales sunt. Constat autem tres apud c angulos iiii^{or} rectis esse equales. Oportet igitur et tres propositos

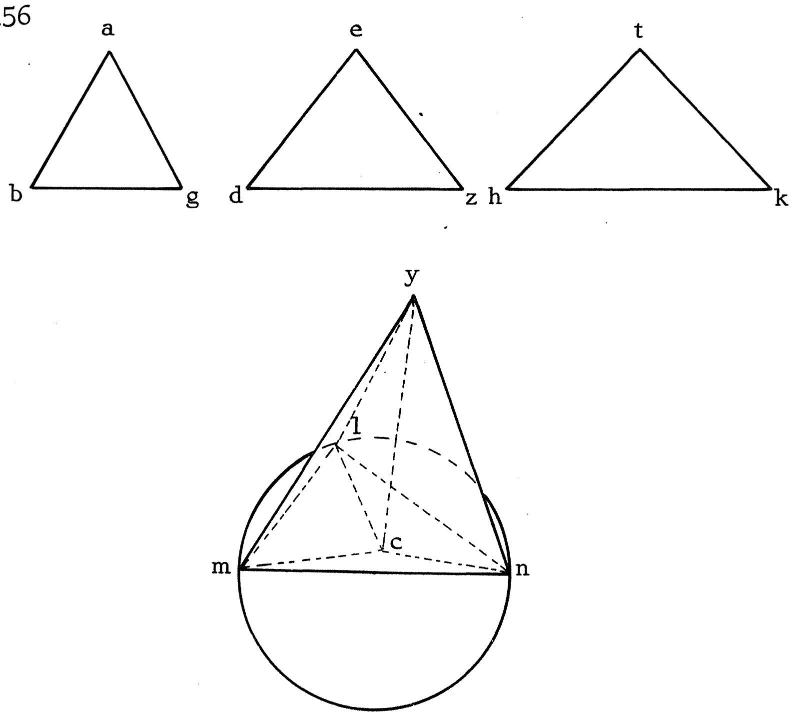

Fig.71

equales esse iiii^{or} rectis qui quoniam iiii^{or} rectis minores (143) sunt, id falsum est. Sin autem maior est l c quam a b, erit c m maior quam a g, basis vero b g basi m l equalis. Maior est ergo b a g angulus quam l c m eademque reliqui duo reliquis duobus ratione comparantur ut necesse sit propositos (fol.95^{r}) tres angulos tribus angulis apud c maiores existere. Qui quoniam iiii^{or} rectis equales sunt, datos tres angulos iiii^{or} rectis maiores esse consequens est, ut quibus minores dati sunt maiores inveniantur. Cum ergo c l neque maior est a b nec equalis, minorem esse constans est. Quantum igitur a b in se ducta equalis l c et c y in se ductis quarum ductus que eius trianguli recto angulo opposita est equiperat l y. Equales sunt igitur a b et l y eodemque pacto y m et a g

---

(143) minores] dati.

equales fiunt. Sunt itaque latera duo y m, y l lateribus g a b ut sese respiciunt equalia basisque m l basi b g equalis. Est igitur angulus m y l angulo b a g equalis. Sic igitur et reliquis duobus apud y residuis propositorum trium adequatis angulus solidus datis tribus superficialibus iiii^{or} rectis minoribus quorum quique duo reliquo sunt maius equalis compositus est.

⟨XI.24⟩ Si superficiebus equidistantibus solidum continetur, opposite superficies eius equales sunt omnes et equidistantes.

Continetur enim solidum quoddam a b superficiebus equidistantibus g a d e aliaque z h t b tercia z g e b quarta h a d t quinta z g a h sexta b e d t. Cuius oppositas superficies equidistantes equales esse proponimus. Secat enim equidistantes superficies duas g z e b atque a h d t superficies a h g z quarum communes sectiones a h

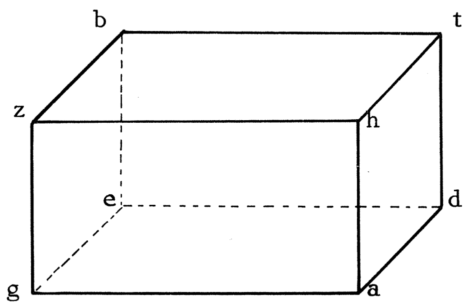

Fig.72

et g z equidistantes esse consequens est. Item equidistantes superficies duas a d g e atque z h t b secat superficies a h g z quarum communes sectiones a g et z h equidistantes esse constans est. Qua igitur a g et h z equidistantes comprobate sunt, eadem ratio a d et h t equidistandi necessitatem imponit. Quoniam ergo contingentes linee due contingentibus duabus equidistantes nec in una superficie angulos equos continent, angulum g a d angulo z h t equum esse necesse est. Cum itaque latera duo g a d lateribus z h t ut sese respiciunt equalia sunt angulique eis contenti equales, procedit totam h z b t toti a g d e equam existere. Eadem itaque ratio superficiem a h d t opposite sibi g z b e eademque reliquam relique ut opposite sunt et equidistantes probat (144) et equales.

⟨XI.25⟩ Si solidum equidistantium superficierum superficies quedam per oppositos terminos secat, diversorum corporum (fol. 95^v) alterius ad alterum erit que basis ad basim proporcio.

Secat enim solidum quoddam equidistantium superficierum a b superficies g d z e per oppositarum terminos superficierum ad punctum g et e, dico itaque diversorum corporum hinc a g illinc e beam esse proporcionem qua basis alterius a e d k ad alterius basim m e d n constiterit. Cuius argumento producetur m a linea directe in utramque partem versus ad c et y. Quo facto de e c linea sumetur

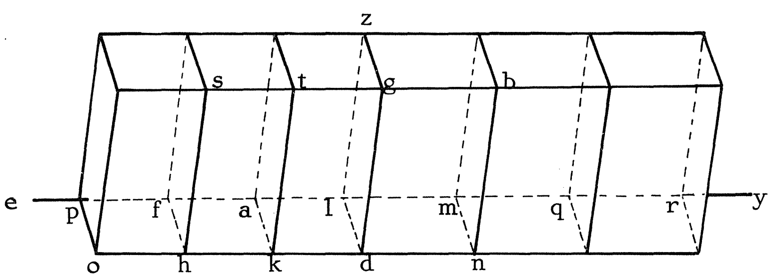

Fig.73

equum e a quociens placuerit notatisque porcionibus a f et f p, in altera parte nihilominus de e y linea quot placuerit sumemus equalia m e quibus m q et q r designatis. A singulis demum utrinque sectis lineis priorum altitudinis equidistantium laterum elevate superficies totidem corporum equidistantium superficierum basesque divisorum, utrique sue partis singula sumuntur equalia. Ut igitur a f et f p equalia sunt a e, sic superficies supra eas constitute p f h o atque f a h k superficiei d k e a fiunt equales sicque solida earum p s itaque f t et inter se et a g corpori sunt equalia. Quanta est igitur tocius p t basis ad corporis a g basim tantum necesse est ipsum p t ad corpus a g consistere. Eadem ratione in parte al-

---

(144) probat] ba$\overset{a}{c}$.

tera singulis pertractatis quanta fuerit tocius r b solidi basis ad basim corporis e b tantum consequens est ipsum r b ad corpus e b consistere. Sunt igitur a g corporis eiusque basis eque multipliciones equis e b corporis eiusque basis multiplicionibus pariter vel equales quidem vel equaliter inequales. Unde quantitates ipsas proporcionales esse necesse est ut a g et g m corporum que superficies quedam per oppositos integri terminos dirimit qua bases eorum ad invicem constant ea sit proporcio.

⟨XI.26⟩ Angulo solido proposito eiusque lineis assignatis de equalibus eis lineis ad datum punctum date linee solidum angulum equalem componimus.

Proposito siquidem angulo solido assignatisque lineis eius d g, d e, d z, si de equalibus eis lineis ad datum punctum a date linee b a equalem solidum angulum constituere iubeamur, a designato primum in e d linea qua inciderit puncto h deducetur perpendicularis in g d z superficiem rectis eidem apud t punctum angulis insistens, deinde nihilominus in g d linea qua inciderit punctum k annotatum applicabit notis h et t idemque t cum d continuabitur. Quo facto ad a b linee punctum a equum g d t constituemus angulum m a b statimque de a b linea equum d k resecamus f a sicque de m a equam t d lineam

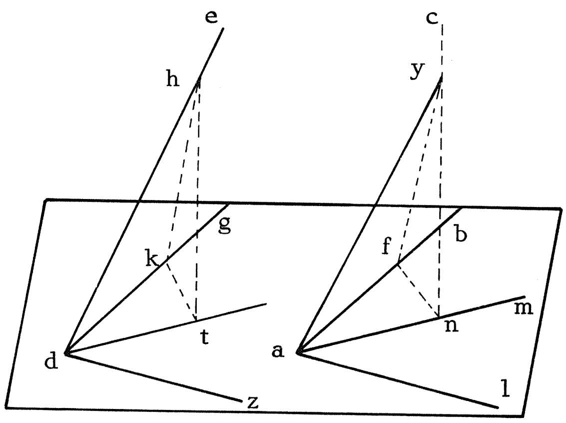

Fig.74

(fol.96^r) n a, deinde a puncto n rectis educetur angulis supra l a b superficiem linea n c de qua cum equum t h secuimus n y applicabit y notis a et f sicque f cum n continuabitur. Quoniam itaque latera duo f a, n a lateribus d k, d t ut sese respiciunt equalia sunt angulique eis contenti equales et basim f n basi t k equam esse necesse est. Extitit autem n y equalis t h, sunt itaque latera duo n f, n y lateribus t k, t h ut sese respiciunt equalia angulusque f n y rectus angulo k t h recto equalis. Sunt igitur et bases f y, k h equales, fuit autem latus n a equum t d sicque n y equum t h angulique y n a atque d t h recti, sunt ergo bases quoque y a, d h equales. Sunt itaque latera duo f a y oppositis sibi lateribus k d h equalia quoque et bases f y, k h equales, equalis est et angulus f a y angulo k d h. His hoc pacto coequatis eodem artificio similique ratione angulus y a l angulo h d z sicque b a l ei qui est g d z adequari possunt ut cunctis partibus coequatis totum toti fit equale.

⟨XI.27⟩ Proposito solido superficierum supra datam rectam lineam simile corpus constituimus.

Assignato siquidem equidistantium superficierum solido g d supra datam a b lineam simile corpus componere. Componimus in primis ad date b a linee punctum a solidum angulum solido equalem ut angulorum superficialium eos continentium angulus t a b angulo e g z atque b a k ei qui est z g h sicque t a k equalis fit e g h. Id quoque nihilominus curandum ut linearum eos angulos conducentium quanta fuerit g z ad a b tanta fit h g ad a k tantaque e g ad a t sicque solidum equidistantium superficierum l a consumabitur. Cum igitur quanta est a t ad e g tanta fit a b ad g z evenit latera equos angulos continentia aut oppositos ad invicem esse proporcionalia. Est

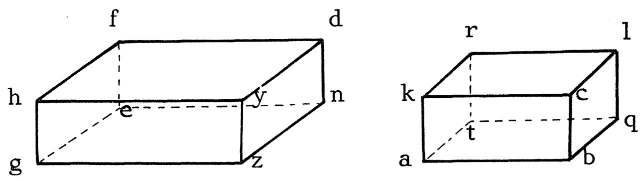

Fig.75

itaque superficies a b t q superficiei g z n e conformale similis. Item quoniam quanta est a t ad e g tanta a k ad g h, erunt similiter et hec latera ut equos angulos continent proporcionalia ut et superficiem t a k r superficiei g h f e similem esse consequens sit. Eodemque ordine atque ratione superficies a k b c superficiei g h y z similis conprobatur. Quoniam itaque solidorum equidistantium superficierum opposite superficies equidistantes et equales sunt, erunt et relique reliquis ut sese respiciunt similes, unde et solida ipsa constet esse similia.

⟨XI.28⟩ Si superficies aliqua solidum superficierum equidistantium (fol.96^{v}) per oppositarum eius superficierum duarum diametra secat, per equalia secare necesse est.

Secat enim superficies quedam d e g z solidum equidistantium superficierum a b per oppositarum eius superficierum a g d t atque b e z h diametra alterius g d alterius e z, dicimus itaque per equalia secare. Cum enim a g d t superficiei diametros sit d g, duos altrinsecus triangulos a g d atque t g d equales esse necesse est. Similiter e b z h superficiei diametros e z altrinsecus constantes triangulos duos b e z atque h e z equales reddit. Est autem et superficies a h g z superficiei d e t b sicque a h d e opposite sibi t b g z equalis. Assumatur itaque d e g z ut media est communis utrinque. Erit igitur al manxor id est per diametron sectum, quod nos sectile necessitatis causa nominare possimus, triangulos duos a g d atque h z e tresque equidistantium laterum superficies a h g z scilicet et a h d e atque d e g z continens, sectili duos similiter triangulos b e z et t g d tresque equidistantium superficies d e t b videlicet et t b z g atque d e g z continenti cunctis partibus coequatis totum toti equale.

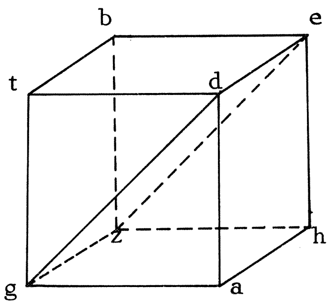

Fig.76

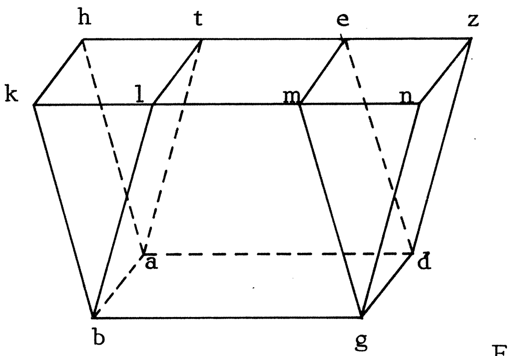

Fig.77

⟨XI.29⟩ Omnia solida superficierum equidistantium supra basim eandem eque altitudinis super lineam unam equalia sunt.

Nam ut sint corpora duo superficierum equidistantium b e et b z supra eandem basim a b g d eiusdem altitudinis super lineam unam h z, k n dico ea corpora esse equalia. Cum enim superficierum equidistantium sint laterum ⟨ latera⟩ h e et t z, utrumque lateri d a equum esse constans est. Eiecto itaque communi medio e t extrema t h et e z equa relinqui necesse est. Est itaque triangulus a h t equalis e z d triangulo. Est autem equidistantium superficies h k t l opposite sibi superficiei m n e z equalis fitque similiter triangulus b l k equalis g m n triangulo eodemque modo superficies a h b k superficiei d e g m sicque a b t l opposite sibi d z g n equalis. Est itaque sectile triangulos duos b k l et a h t tresque medias equidistantium superficies continens sectili duos g m n atque d e z triangulos cum mediis tribus equidistantium superficiebus continenti equale. Assumpto ergo ut medium est cuius basis a b g d altitudo t l m e solido utrimque communi constabit plane comparatione habita b e, b z corpora esse equalia.

⟨XI.30⟩ Omnia solida superficierum equidistantium supra (fol. 97^{r}) basim eandem eque altitudinis nec super unam lineam equalia sunt.

Ut cum sint solida duo superficierum equidistantium b e et b z supra basim eandem a b g d eiusdem altitudinis nec super unam lineam

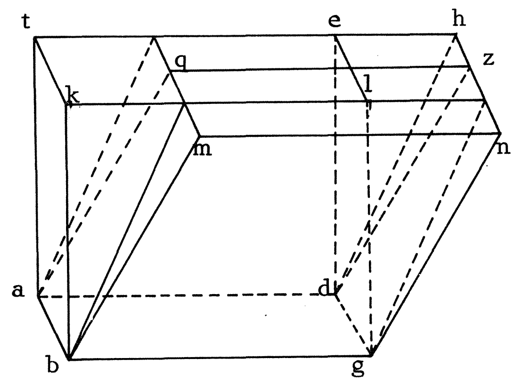

Fig.78

dico tamen equalia. Hinc interea plane sumitur quod cum corpora duo superficierum equidistantium b e et b h supra basim eandem a b g d eque altitudinis super lineam unam t e, k l collocati sint, equa esse necesse est. Nec aliter item corpora duo superficierum equidistantium b z et b h quoniam supra basim eandem a b g d eque altitudinis super unam lineam q z, m n constituta sunt, equa esse consequens est. Est ergo corporum b e et b z utrumque solido b h equale, constat autem que uni equa sunt ipsa esse equalia. Sunt itaque solida b e et b z supra basim eandem eque altitudinis licet nec unam super lineam equalia.

⟨XI.31⟩ Omnia solida superficierum equidistantium supra bases equas constituta eque altitudinis quorum linee angulares basibus ortogonaliter insistunt, equalia sunt.

Ut duorum corporum equidistantium superficierum eiusdem altitudinis b k et z l supra bases equas a b g d et e z h t consistentium quoniam angulares linee basibus ortogonaliter insistunt, ipsa equalia esse necesse est. Cuius demonstrationi producimus z h lineam versus ad s de qua equum b g resecantes h c, supra eandem h c ad punctum h componimus angulum equalem a b g quem cum c h contineat linea ab h (145) producta h f equalis a b. Producta deinde ab f ad equidistantiam h c linea f r superficierum equidistantium cor-

---

(145) h] t.

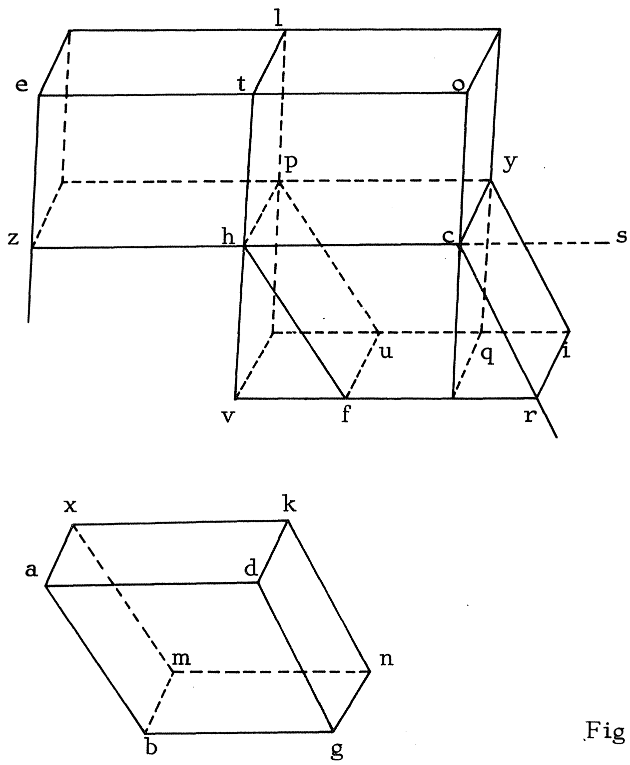

Fig.79

pora h i et h q atque p o (146) non sine industria consummabimus. Quoniam itaque latera duo c h et h f lateribus a b et b g ut sese respiciunt equalia sunt angulique eis contenti equales, erit tota a b g d superficies toti h f r c superficiei equalis. Item quoniam p h equalis est b m, erunt latera duo c h et h p lateribus b g, b m ut sese respiciunt equalia angulusque c h p rectus angulo g b m recto equalis. Est itaque superficies h p c y superficiei b g m n equalis, sic igitur et superficie p h f u superficiei b m x a coequata quoniam equidistantium superficierum solida superficies oppositas omnes habent equales, totum i(147) h toti b k equum esse necesse est. Cum autem h i (148) et h q duo corpora superfi-

---

(146) p o] q f.
(147) i] r.
(148) i] r.

cierum equidistantium supra basim eandem p h c y eque altitudinis super unam lineam q i, r (149) v consistant (fol.97^{v}) ipsa quoque equalia esse constans est. Eritque ita et b k equum h q. Deinde cum basis h f r c basi a b g (150) d equalis sit cui equalis data est basis e z h t et ipsas inter se e z h t videlicet atque h f r c bases equas esse consequens est. Erit igitur quanta basis e z h t ad basim t h c o tanta ad eandem basis h c v(151). Sed quanta basis e z h t ad basim t h c o tantum est solidum z l ad solidum p o (152). Quantaque basis h c v (153) ad basim t h c o tantum est corpus q (154) h ad corpus p o (155). Est ergo quantum q h ad p o (156) tantum z l ad p o (157). Constat autem i h equum h q, eidem igitur equum est et z l, unde b k et z l solida equalia esse manifestum est.

⟨XI.32⟩ Omnia solida superficierum equidistantium supra bases equas eque alta quorum angulares linee basibus non ortogonaliter insistunt equalia sunt.

Ut corpora duo superficierum equidistantium b k et z l supra bases equas alterius a b g d alterius e z g t eque altitudinis licet nec angulares linee basibus ortogonaliter insistant equa tamen esse proponimus. Cuius argumento educimus ex angularibus l m n k punctis supra quandam superficiem perpendiculares iiii^{or} l s, m y, n f, k q ortogonaliter eidem incidentes superficiei ad angularia puncta s, y, f, q sicque solidum k y perficiemus. Similiter ex c, r, l, x punctis supra quandam superficiem iiii^{or} educimus perpendicula-

---

(149) r] l.
(150) g] c.
(151) c v] f r c.
(152) p o] h q.
(153) c v] f r c.
(154) q] i.
(155) p o] h q.
(156) q h ad p o] i h ad h q.
(157) p o] h q.

res r p, c h, x v, l o incidentes ei ad puncta p h v o sicque solidum l h consumamus. Quoniam igitur basis a b g d basi e z g t equalis est omnisque superficierum equidistantium solidi opposite superficies omnes equales, erit et l m n k equalis c r l x supra quas bases quoniam k y et l h superficierum equidistantium corpora eque altitudinis ortogonaliter collocata sunt, equalia esse necesse est. Cum vero k y et b k similiter equidistantium superficierum corpora supra basim eandem l m n k eque eciam alta nec super unam lineam consistant, ipsa equa esse consequens est. Eademque ratione z x adequatur l h. Quoniam igitur k y et l h equa sunt, b k et z x equalia esse manifestum est.

⟨XI.33⟩ Omnium solidorum equidistantium superficierum eque altitudinis alterius ad alterum est quam basis ad basim proporcio.

Exempli gracia: duorum corporum b k et z l que equidistantium superficierum eiusdemque pariter altitudinis sunt proporcio est qua basis alterius e z h t ad alterius basim a b g d constiterit. Cuius constitutioni apponimus g d m n (fol.98^r) superficiem equam e z h

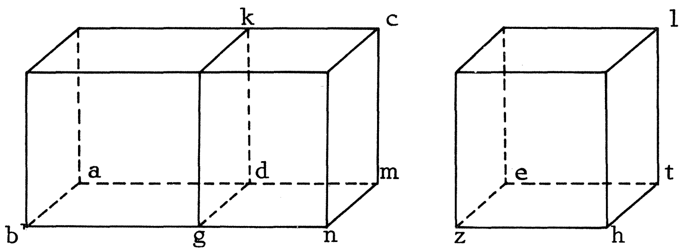

Fig.80

t supra quam construimus solidum equidistantium superficierum g c ut corpus b c superficies g k secet. Quoniam igitur quando solidum equidistantium superficierum superficies aliqua per oppositos eius terminos secat divisorum corporum alterius ad alterum que basis ad basim est proporcio, procedit equidem ut qua basis g d m n ad basim a b g d constiterit eam esse g c corporis ad solidum b k proporcionem. Ut autem basis e z h t basi g d m n (158) equalis est sic et z l corpus g c solido coequatur, est ergo qua basis e z h t ad basim a b g d ea z l corporis ad b k solidum proporcio.

⟨XI.34⟩ Omnium solidorum equidistantium superficierum quorum altitudines supra bases ortogonaliter elevate sunt si equalia sunt, altitudines basibus mutkefie sunt id est mutue proporcionis; quociensque solidorum equidistantium superficierum quorum altitudines supra bases rectis consurgunt angulis altitudines basibus mutue fuerint, ipsa solida equalia esse necesse est.

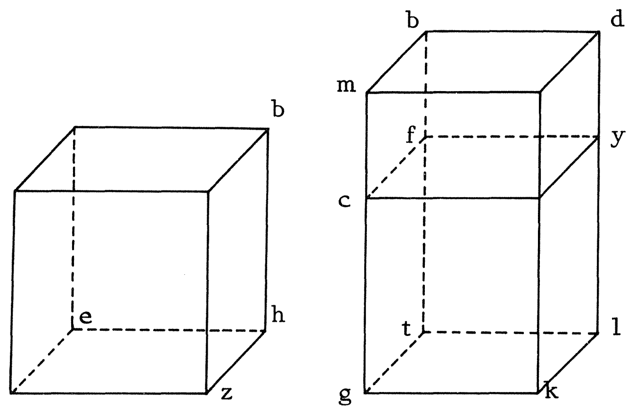

Fig.81

Sunt enim solida duo superficierum equidistantium a b et g d quorum altitudines supra bases rectis existunt angulis equalia, dico itaque bases eorum altitudinibus mutuas ut quanta fuerit a b solidi basis e a z h ad corporis g d basim t g k l tanta fit g d solidi altitudo g m ad corporis a b altitudinem a n. Dum enim ipsa corpora equalia sunt si et altitudines amborum equales fuerint, necesse est et bases equas existere eritque ita palam quanta huius basis ad basim illius tanta illius altitudo ad huius altitudinem. Si vero inequa-

(158) g d m n] a b g d.

les sunt altitudines, de longiori g m equum a n resecamus g c sicque solidum g y consumamus. Cum quidem eque alta sint a et g y, erit quanta basis e a z h ad basim t g k l tantum a b corpus ad solidum g y estque a b corpus equum g d, est ergo quanta basis e z ad basim t k tantum d g solidum ad corpus g y. Est autem quanta basis g t b m ad basim g t f c tantum g d corpus ad solidum g y, tanta vero superficies t g b m ad superficiem t g c f quanta est linea g m ad lineam g c, fuit autem g c equalis a n. Est ergo quanta basis e z ad basim t k tanta g m ad n a. Sunt igitur a b et g d corporum bases altitudinibus mutue.

Unde eadem corpora dum similiter altitudines ipsorum a basibus ortogonaliter (fol.98^{v}) consurgant equalia esse convertitur. Cum enim quanta basis e z ad basim t k tanta sit g m ad a n sitque a n equalis g c, erit quanta basis e z ad basim t k tanta g m ad g c. Quanta vero g m ad g c tanta basis t g b m ad basim t g c f quantaque t g b m ad t g c f tantum est corpus d g ad solidum g y. Est igitur quanta basis e z ad basim t k tantum d g corpus ad g y. Fuit autem tantum a b ad g y. Quoniam igitur a et g d ad unum eiusdem sunt proporcionis equalia esse necesse est.

〈XI.35〉 Omnium solidorum equidistantium superficierum si equalia sunt, bases altitudinibus mutue fiunt sicque bases altitudinibus mutue fuerint, ipsa equalia esse convertitur.

Ut duorum corporum equidistantium superficierum a b et g d quoniam equalia sunt, bases altitudinibus mutue fiunt ut quanta basis e a z h ad basim t g k l tanta fit altitudo g e ad altitudinem a n. Cuius argumento educimus ex angularibus m n c b punctis in superficiem quandam perpendiculares iiii^{or} m y, n f, c q, b r sicque solidum f b perficimus. Similiter ex punctis f e x d in superficiem quandam perpendiculares iiii^{or} educimus f h, e p, x b, d u sicque d p corpus consumamus. Quoniam ita solida duo b f et a b supra basim unam b m n c eque altitudinis nec super unam lineam consistunt, equalia sunt eademque ratio d p et d g coequat. Est igitur f b equum d p, equalium vero corporum equidistantium su-

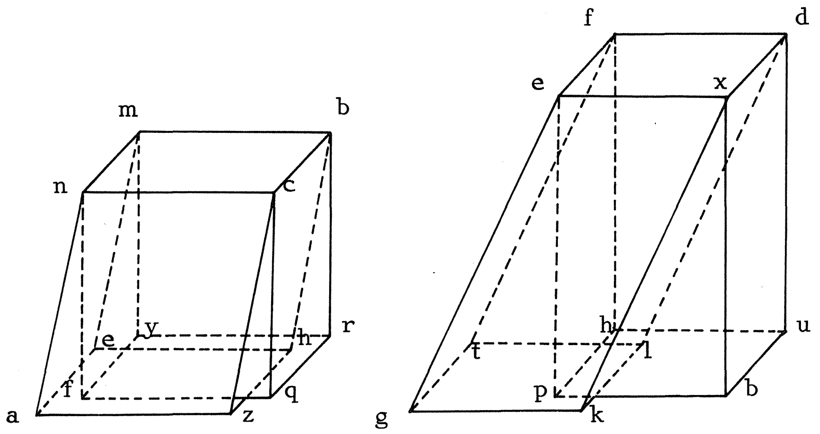

Fig.82

perficierum quorum altitudines basibus ortogonaliter insistunt bases altitudinibus mutue sunt. Est ergo quanta basis m c ad basim f x tanta d p corporis altitudo ad altitudinem solidi b f, est autem b f et a b corporum equa altitudo sicque solidi d g et d p altitudo eadem, est igitur quanta basis m c ad basim f x tanta g d corporis altitudo ad altitudinem a b. Est vero basis m n c b basi e a z h equalis et nihilominus basis f e x d basi t g k l. Sunt igitur a b et g d corporum bases altitudinibus mutue.

Unde eadem corpora equalia esse convertitur. Cum enim quanta basis e a z h ad basim t g k l tanta fit g d corporis altitudo ad a b solidi altitudinem, basis autem e a z h basi m n c b basisque t g k l basi f e x d equalis sicque d p corporis altitudo solidi g d altitudini atque b f altitudo altitudini a b equalis. Erit equidem quanta basis m c ad basim f x tanta d p (fol.99^r) altitudo ad f b altitudinem. Cum autem corporum equidistantium superficierum quorum altitudines basibus ortogonaliter insistunt bases altitudinibus mutue sunt, ea corpora equalia effici constans sit: corpora d p et b f equa esse necesse est. Est autem d p equum g d quoniam supra basim eandem eque altitudinis nec super unam existunt lineam. Eademque ratione b f equum a b. Quoniam igitur a b et g d equalibus equa sunt et si-

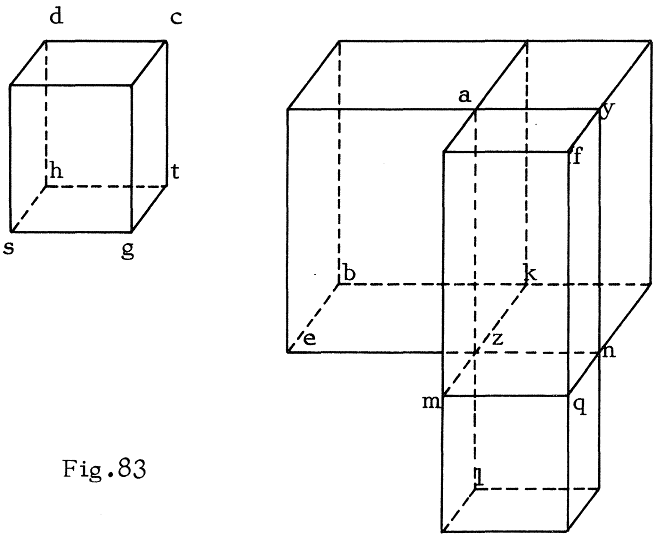

Fig.83

bi invicem equalia esse necesse est.

⟨XI.36⟩ Omnium solidorum similium equidistantium superficierum alterius ad alterum est que sui lateris ad alterius latus proporcio triplicata.

Sunt enim similia corpora duo superficierum equidistantium a b et g d, dico itaque solidi a b ad simile sibi solidum g d proporcionem qua b a corporis latus e z ad sui relativum latus alterius h t constat triplicatam. Cuius argumento producimus ex a z et k z et e z lineas z l quidem equalem c t et z m equam g t atque z n coequam h t sicque solida tria k y, z f, l q superficierum equidistantium consumamus. Quoniam igitur que proporcio est e z ad h t eadem k z ad g t eademque a z ad c t, eciam ad equales eis eandem harum proporcionem esse necesse est utque proporcio fuerit e z ad z n eadem fit k z ad z m eademque a z ad z l, constat autem qua e z ad z n eadem a b corpus ad solidum k y proporcione constare. Qua vero k z ad z m eadem k y ad z f quaque a z ad z l eadem f z ad l q. Est igitur que b a corporis ad solidum k y eadem k y ad f z eademque f z ad l q una proporcio. Constat ergo proporcionem a b corporis ad solidum l q proporcioni a b ad k y triplicatam. Constitit autem a b proporcio ad k y qua e z ad z n constat, estque z n equalis h t. Est igitur a b corporis ad solidum l q ei qua e z latus ad h t constat proporcio triplicata. Amplius quoniam latera duo l z et z m lateribus t c, t g ut sese respiciunt equalia sunt angulique eis contenti equales, tota g c superficies toti l m superficiei equalis est. Item quoniam latera duo z m, z n lateribus t g, t h ut sese respiciunt equalia sunt angulique eis contenti equales, superficiem t s superficiei z q equam esse consequens est. Similiter t d superficie superficiei l n coequata totum g d corpus toti l q solido equum esse necesse est. Est igitur a b corporis ad utrumque una eademque proporcio.

⟨XI.37⟩ Si equales fuerint anguli duo plani a quibus due recte in aerem (fol.99^{v}) elevantur linee cum lineis subiacentibus singulos singulis ut sese respiciunt equos angulos continentes atque in illis lineis qua inciderint duo puncta signentur a quibus due perpendiculares ad subiacentium laterum superficies demittantur, a punctis autem qua perpendiculares in superficies inciderint ad eosdem planos angulos due recte deducantur linee: duos angulos ab his duabus lineis atque lineis elevatis continentur equas esse necesse est.

Positis enim in plano duobus angulis equalibus a b g et d e z consurgent ab eis in aerem ypotenuse due b h et e t binis altrinsecus angulis apud e et b ut oppositi sunt equalibus in quibus lineis qua placuerit signatis punctis duobus k et l ab eisdem punctis in superficies a b g et d e z perpendiculares due demittentur locisque qua in eas superficies incident notis m et n designatis continuabitur m cum b et n cum e, dico igitur angulos duos m b k et n e l equales. Cuius constitutioni resecamus b q equum e c sitque in opposito c in altera parte r atque in opposito q in altera parte f. Deinde a puncto c exibit perpendicularis in n e lineam ad punctum y pariterque a puncto y perpendicularis alia in punctum r sicque a puncto m perpendiculares due in puncta q et f applicabitque statim k

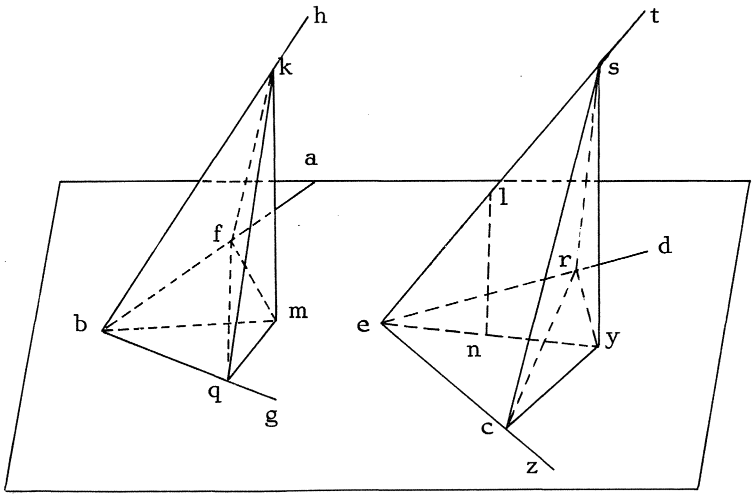

Fig.84

punctis q et f. Continuabitur eciam q cum f sicque c cum r atque y cum opposito sibi s continuato applicabit idem s notis c et r. Omnibus quidem perfectis quoniam b k in se ducta equalis est b m et m k utrique in se ductis sicque b m ducta equalis b q et q m, erit b k in se ducta equalis b q et q m atque m k cuilibet in se ducto. Sed q k ducta q m et m k equatur. Est ergo b k in se ducta equalis b q et q k utrique in se ductis. Unde angulum b q k rectum esse necesse est. Eadem ratione b f k recto constituto quoniam ad eundem modum angulos e c s atque e r s rectos esse simili ratione constare potest, erit angulus b q (159) k angulo s c (160) e equalis, fuit autem c (161) e s equalis q (162) b k factumque c (163) e latus e-

(159) q] f.
(160) c] r.
(161) c] r.
(162) q] f.
(163) c] r.

quum q (164) b, est (165) itaque totus c(166) s e triangulus toti b k q (167) triangulo angulis atque lateribus ut sese respiciunt equalis latus s e videlicet equum b k atque c (168) s equale q (169) k.(fol. 100^{r}) Sunt itaque anguli duo e r s et r e s angulis b f k et f b k ut sese respiciunt equales et probatum est e s latus equum b k (170), est igitur et basis r (171) s basi f (172) k equalis ‹ et latus b f equale lateri e r› . Item latera duo r e c lateribus f b q equalia angulique eis contenti equales, est igitur et basis r c basi f q ceterique anguli ceteris ut oppositi sunt equales. Amplius quoniam b q m et e c y recti sicque e r y atque b f m recti sunt deque ipsis utrinque supra bases r c et f q equales anguli resecti eos qui relinquuntur r c y et f q m sicque c r y et q f m equales esse necesse est. Est itaque c r y triangulus m f q triangulo basisque m f basi r y equalis. Extitit autem et r s equalis f k estque r s in se ducta equalis y s et y r utrique in se ductis sicque f k lateribus m k et m f ‹ in se› ductis equatur. Cum itaque r s equa sit f k atque r y equalis f m, et s y equam m k esse necesse est. Deinde quoniam e y ducta equalis est e r et r y sicque b m ducta b f et f m equalis, equales autem e r y linee eis que sunt b f m, erunt et ipse b m atque e y linee equales. Cum itaque latera duo b k et b m lateribus e s et e y ut sese respiciunt equalia sint basisque m k basi y s equa, angulos l e n et m b k equos esse demonstratum opinor.

---

(164) q] f.
(165) est] sunt.
(166) c] r.
(167) q] f.
(168) c] r.
(169) q] f.
(170) anguli duo ..... b k] latera duo e s et e c lateribus b k et b q ut sese respiciunt equalia angulique eis contenti pridem equales.
(171) r] c.
(172) f] q.

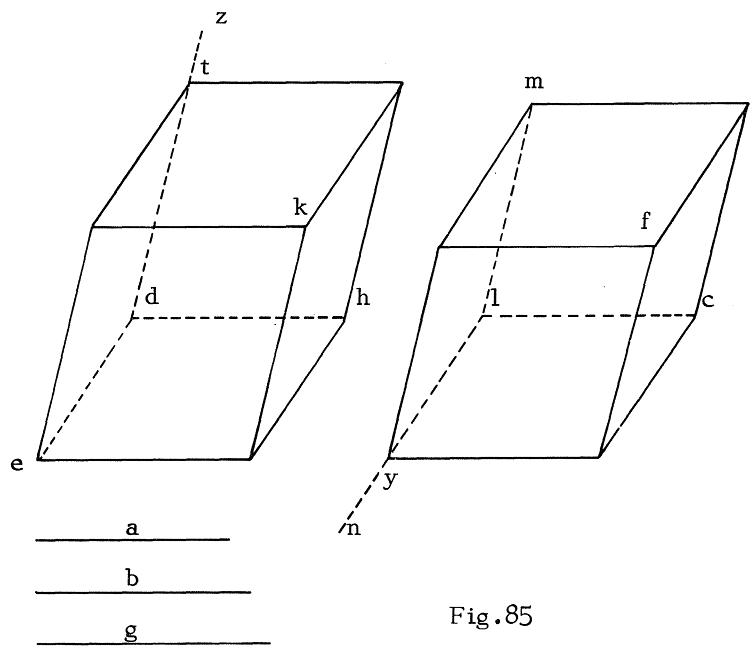

Fig.85

⟨XI.38⟩ Omne solidum tribus lineis proporcionalibus contentum equum est solido quod lateribus medie linee equalibus continetur, dum et anguli amborum invicem sint equales.

Positis enim tribus lineis continuo proporcionalibus a b g ut quanta fuerit a ad b tanta sit b ad g dico solidum quod ex his tribus constructum fuerit equum esse corpori cunctis medie linee lateribus equis contento dum pariter unius anguli alterius angulis fuerint equales. Cuius argumento ponetur e d linea equalis a ad cuius punctum d componentur utcumque anguli tres ex tribus lineis equis [anguli] solidi lateribus d e videlicet et d h atque d z de quibus ut d e primum equalis data est a sic d h linee b atque d t ei que est g adequatis solidum d k perficimus. Posita deinde equa b medie linea l m ad punctum eius l componimus angulum solidum solido apud d conducto equalem. Hoc superficialium angulorum ordine ut t d e equalis sit n l m atque t d h angulo c l m reliquusque reliquo sint equales de quorum lineis ut m l primum equalis data est b sic c l et y l (173) eidem adequatis solidum l f consumamus. Quo facto quoniam quanta est a ad b tanta b ad g estque a equalis e d lineeque b equales y l et m l sicque g equalis t d, erit nimirum quanta e d ad l m tanta l y ad d t ut latera equos angulos continentia mutkefia id est mutue proporcionis ipsas superficies e t scilicet et y m equales reddant. Deinde quoniam ex superficialibus angulis duobus equis e d t atque y l m ypotenusis (174) duabus (175) in aerem elevatis (176) cum subiacentibus lineis angulos (fol.100^v) utrinque singulos singulis ut sese respiciunt equos continentibus simul et ipsis equis (177) d h videlicet et l c consequitur perpendiculares a punctis earum h et c in subiectas e t et y m superficies equas demitti, corporibus d k et l f eadem est altitudo. Cum igitur equidistantium superficierum corpora supra bases equas eque alta constet esse equalia, d k et l f equalia conprobata sunt.

⟨XI.39⟩ Si fuerint quotlibet linee proporcionales, solida eciam earum equidistantium superficierum atque similium conformia proporcionalia esse necesse est. Sique solida superficierum equidistantium atque similium conformia proporcionalia fuerint, linee quoque quarum solida sunt, proporcionales erunt.

Positis enim proporcionalibus lineis a b et g d et e z atque h t constructisque supra singulas solidis equidistantium superficierum atque similium conformibus a k et g l et e m atque h n ut linee proporcionales sunt, sic earum solida proporcionalia esse proponimus. Cuius demonstrationi disponimus quaternas utrinque lineas continuo proporcionales ut quanta est hinc a b ad g d tanta fit g d ad c tantaque c ad y, illinc autem quanta e z ad h t tanta fit h t ad f

---

(173) l] k l.
(174) ypotenusis] ypoten.
(175) duabus] duas.
(176) elevatis] elevatas.
(177) ipsis equis] ipsas equas.

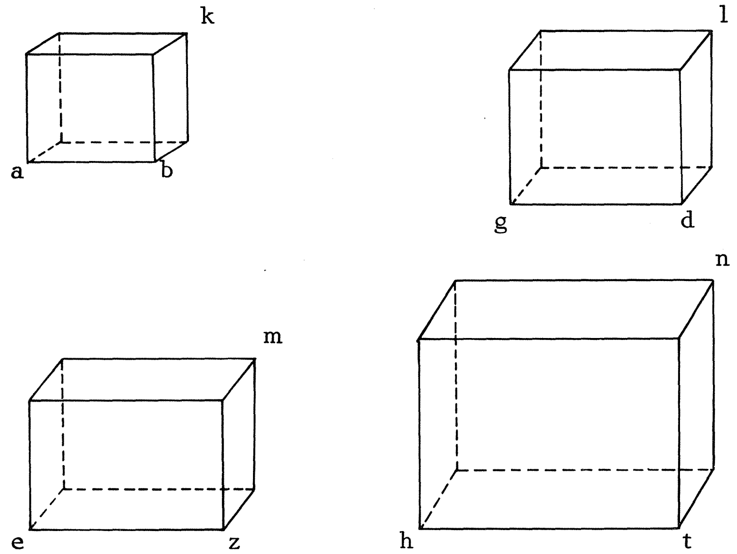

Fig.86

tantaque f ad q. Quoniam igitur quanta est a b ad g d tanta e z ad h t, quanta fuerit a b ad y tanta erit e z ad q, sed quanta a b ad y tantum est corpus a k ad solidum g l quantumque e z ad q tantum e m ad h n esse necesse est. Est igitur quantum a k ad g l tantum e m ad h n.

Unde et lineas quarum solida sunt proporcionales esse convertitur. Si enim non quanta est a b ad g d tanta e z ad h t. Esto saltim tanta ad aliam quandam lineam r s. Cum igitur quanta est a b ad g d tanta fit e z ad r s si supra r s equidistantium superficierum atque similium illis conforme constructum fuerit c r, erit quantum a k ad g l tantum e m ad r c. Quoniam igitur eadem est m e proporcio ad r c et h n, ipsa equalia esse necesse est. Cumque pariter et conformia sint, erit eciam r s equalis h t. Est ergo que a b ad g d eadem e z ad h t una proporcio.

⟨XI.40⟩ Omnis cubi superficierum oppositarum lateribus per medium sectis si a punctis sectionum superficies sese (fol.101^{r})

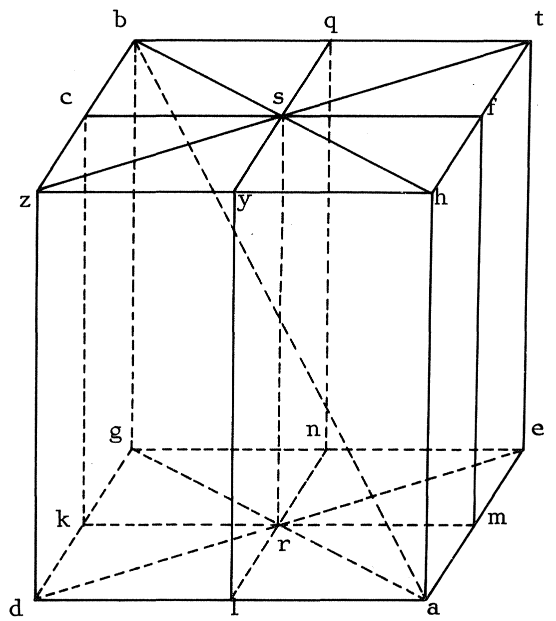

Fig.87

invicem cubumque secantes exierint, communis earum sectio diametra cubi per medium secat, versaque vice sectionem diametros per equalia dividit.

Exempli gracia: cubi cuius data oppositarum superficierum g d a e atque b z h t latera per equalia dividuntur puncta k l m n atque c y f q dico igitur communi earum sectione s r cubi diametron a b per equalia versaque vice diametro sectionem per medium secari. Cuius argumento continuabitur g cum r et r cum a atque b cum s et s cum h. Quoniam itaque g e equalis est a d dimidiumque g e linea g n dimidium a d linea l a, erit l a equalis g n, sed et n r similiter equalis r l. Sunt itaque latera duo g n r lateribus r l a ut sese respiciunt equalia angulique eis contenti equales quapropter et basis g r basi r a equalis ceterique anguli ceteris ut sese respiciunt. Sic igitur g r n equalis est l r a quibus assumpto participe n r a erunt anguli duo g r n et n r a angulis duobus n r a et a r l equales, sed anguli l r a et a r n duobus rectis equales sunt. Cum itaque a linee n r puncto r linee g r et r a in diversas recte partes duos circa se angulos duobus rectis equos contineant, g a lineam supra unam esse superficiem necesse est. Eodem pacto b s et s h coequatis totaque b h supra unam superficiem constituta quoniam linearum a h et g b utraque equalis est e t eidemque equidistans nec in una superficie, erunt ipse quoque inter se equales et equidistantes. Sunt igitur et a g atque b h equales equidistantes quarum r s linea media continuat. Est igitur r b equalis s a, unde cubi diametron superficierum sectione conversoque diametro sectionem per equalia secari constans sit.

⟨XI.41⟩ Omnia corpora sectilia eque alta quorum alterius basi triangule alterius basis equidistantium laterum dupla fuerit: equa esse necesse est.

Ut cum sectilium duorum eque altorum alterius a b g d e z basis quadrangula b g d e dupla sit alterius h t k l m n basi triangule k l n, ea sectilia equa esse proponimus. Quod ut plane constet, perficietur utriusque integrum equidistantium superficierum quorum bases equales fiunt nec ipsa eandem excedunt altitudinem. Quod igitur equidistantium superficierum corpora supra equas bases eque alta equalia esse constat, et eorum dimidia que sectilia sunt equa esse consequens est. (fol.101^{v})

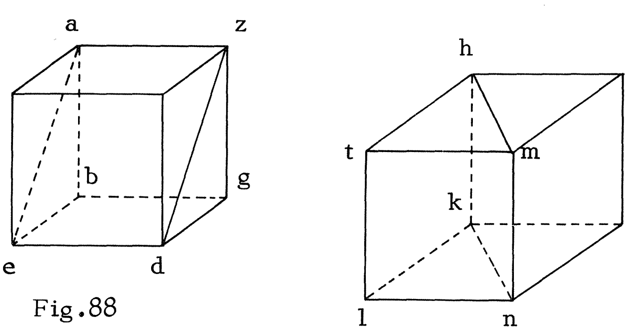

Fig.88

⟨ LIBER XII ⟩

⟨ XII.1 ⟩ Multi angule superficies similes si inter circulos descripte fuerint, proporcio alterius ad alteram esse ‹ quam › proporcio quadratorum que ex diametris circulorum proveniunt.

Exempli gracia: in circulis duobus a d et h l describimus multi angulas superficies duas similes, in hoc a b g d e, in illo h t k l m eritque alterius ad alteram proporcio que quadrati b z diametri ad quadratum quod t n diametros producit. Cuius demonstrationi continuamus b cum e et a cum z sicque t cum m et h cum n. Quo facto quoniam quantum est latus b a ad latus a e tantum est t h ad h m angulique his lateribus proporcionalibus contenti equales, erit totus a b e triangulus toti h t m triangulo similis. Eritque ita angulus a e b angulo h m t equalis, unde et angulos a z b atque h n t equales esse consequens est. Constat autem et angulos b a z atque t h n ut recti sunt esse equales. Sunt igitur triangulorum a z b et h t n et anguli ut sese respiciunt equales et latera equos angulos continentia proporcionalia ut quantum est latus b z ad latus b a tantum fit t n ad t h. Alternatim ergo quantum fuerit b z ad t n tantum b a ad t h. Est autem que b z linee ad t n lineam ea b z tetragoni ad t n quadratum proporcio geminata, sic eciam que a b lateris ad latus

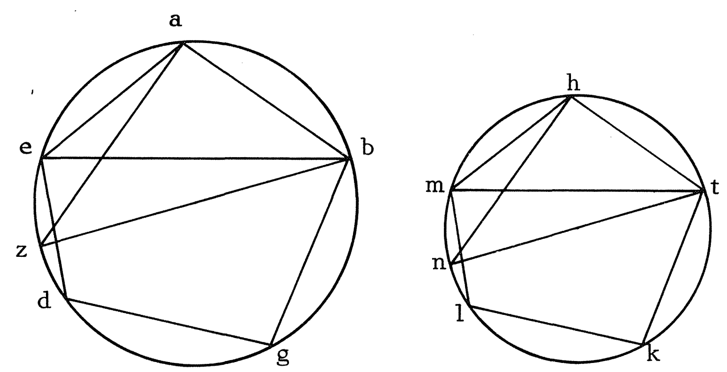

Fig.89

t h ea superficiei multi angule a b g d e ad multi angulam similem h t k l m proporcio duplicata. Est igitur harum superficierum proporcio que tetragonorum quos diametra circulorum producunt.

⟨XII.2⟩ Omnium circulorum proporcio alterius ad alterum est ⟨tamquam⟩ proporcio quadratorum que ex diametris eorum proveniunt.

Ut cum sint circuli duo a g atque e h alteriusque diametros b d alterius z t dicimus qua b d tetragonus ad quadratum t z constiterit eam esse proporcionem a g circuli ad circulum e h. Si enim aliter est, necesse est saltem horum proporcione quadratorum circulum a g ad superficiem aut maiorem quidem aut minorem e h circulo constare sitque prius ad minorem qualis est c qua quanto maior est e h circulus tanta (fol.102^{r}) sit p superficies ut c et p simul equales sint e h circulo. Describimus igitur in e h circulo e z h t superficiem quam e h circuli dimidio maiorem esse necesse est. Dividimus deinde per equalia circuli porciones e z h t e ad puncta k l m n arcuumque cordas perducimus ut constans sit unumquemque triangulorum maiorem esse dimidio sue porcionis circuli quod cum continuo fecerimus necesse est tandem de e h circulo minus quam p relinqui sitque id minus extremitas circuli qua perducte corde resecant, unde multi angulam superficiem eis cordis contentam maiorem quam c relinqui consequens est. Quo facto eiusdem modi lineacionibus a g circulum peraramus. His quidem perfectis quoniam que proporcio est b d quadrati ad tetragonum t z eadem a g circuli ad superficiem c, erit nimirum que proporcio a g ad c eadem multi angule superficiei in a g descripte ad multi angulam e h circuli. Alternatim ergo qua proporcione a g circulus ad multi angulam in se contentam constiterit, eadem c superficiem ad e h circuli multi angulam constare necesse est. Cum itaque circulus a g multi angula in se contenta maior sit et c superficiem multi angula e h circuli maiorem esse consequens est qua minor extitit. Nec igitur a g circulum ad minorem e h circulo superficiem quadratorum b d et t z proporcione constare possibile est. Sed neque ad

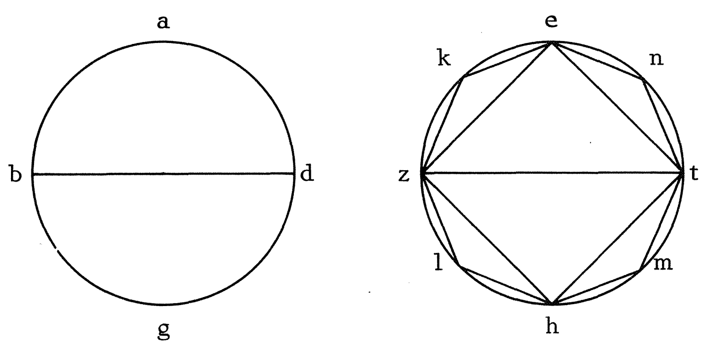

Fig.90

maiorem. Si enim possibile est, esto interim c superficies maior e h circulo ad quam a g circulus b d et t z quadratorum proporcione constet. Si ergo que quadrati z t ad tetragonum d b eandem esse necesse est superficiei c ad a g circulum. Dum itaque minor est e h circulus quam superficies c si qua c ad a g eadem proporcione circulus e h ad aliam quamlibet superficiem conferatur eam utique superficiem a g circulo minorem esse constans est. Est igitur que proporcio t z quadrati ad tetragonum b d eadem e h circuli ad superficiem minorem a g circulo. Quod quoniam impossibile est, restat circulorum esse proporcionem quam tetragonorum quos eorum diametra producunt.

⟨XII.3⟩ Omnis piramis cuius basis triangula dividi potest in equas duas piramides sibi invicem maiorique similes simulque in equa duo sectilia pariter accepta dimidio piramidis maiora.

Cuius constitutioni date piramidis cui basis triangula a b g, vertex punctum d, sex eius latera per equalia secamus ad puncta e z h t k l, applicabit statim punctum z notis e h t k simulque h punctis e l sicque t eis que sunt k l. Quo facto quoniam a z equalis est z d atque d t equalis t b reliquum latus a b linee t z equidistare necesse est. Item quoniam a z equalis est z d atque a e equalis e b reliquum (fol.102^{v}) latus b d linee e z equidistare consequens est. Est igitur e z b t superficies laterum equidistantium cuius opposita latera

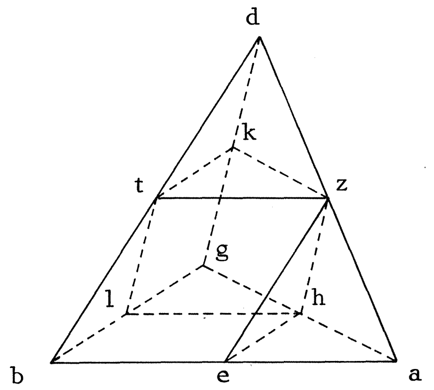

Fig.91

e b scilicet ei quod est t z reliquumque reliquo equalia esse constans est. Cum autem a e equalis sit e b atque d t equalis t b, erit eciam a e equalis t z sicque e z equalis t d. Quoniam ergo et a z equalis extitit z d totus a e z triangulus toti z d t triangulo tam equalis quam similis est. Eadem ratione triangulus a z h triangulo z d k ut conformis et equalis invenitur. Siquidem linee due t d k sese contingentes lineis duabus e z h sese contingentibus equidistantes nec in eadem superficie sunt, angulos equales continere oportet. Extiterunt autem et eadem latera t d k scilicet lateribus e z h ut sese respiciunt equalia. Eademque ratio angulos t z k et e a h coequat quos cum equa latera contineant subiectis bases e h et t k equas esse consequens est. Eritque ita triangulus a e h triangulo z t k sicque z e h triangulus d t k triangulo ut consimilis et equalis. Est ergo tota piramis cuius basis a e h vertex z toti piramidi basis z t k vertex d conformis et equalis. Est autem piramis z k t d piramidi a b g d similis. Eidem igitur et piramidem a e h z similem esse necesse est. Sunt ergo de piramide a b g d due piramides et sibi invicem et toti similes resecte de qua pariter et equa duo sectilia tocius dimidio maiora dispartiri restat. Est enim b l equalis l g atque b g equidistans e h. Sic igitur equidistantium laterum b l e h superficies triangulo l g h dupla est. Constat autem quociens suorum sectilium eque altitudinis alterius basi triangule alterius basis quadrangula dupla fuerit, equa esse sectilia. Est ergo sectile triangulis duobus b t l et e h z mediisque tribus equidistantium laterum superficiebus contentum equale sectili triangulis duobus g h l et k t z mediisque tribus equidistantium superficiebus contento. Divisa est ergo piramis a b g d in equas duas piramides et sibi invicem et toti similes simulque in equa duo sectilia piramidis dimidio maiora.

⟨ XII.4 ⟩ Quociens due piramides eque alte quarum bases triangule in binas singule piramides equas sibi invicem ac toti similes binaque equa sectilia dividuntur, proporcio basis unius ad basim alterius eritque proporcio duorum sectilium unius ad duo sectilia alterius.

Dividuntur enim due piramides eque altitudinis (fol.103^r) quarum bases triangule a b g et m n c vertices d et y in binas equas piramides sibi invicem ac toti similes binaque equa sectilia, dico igitur proporcionem basis a b g ad basim m n c que duorum a b g d piramidis sectilium ad duo m n c y piramidis sectilia. Quia enim a b g trianguli latus a b linee h l reliqua duo secanti equidistans est, triangulum a b g triangulo h l g similem reddit. Est ergo a b g trianguli ad h l g triangulum que lateris b g ad latus l g proporcio geminata. Similiter m n c trianguli ad triangulum t p c que lateris n c ad latus p c proporcio duplicata. Est igitur que proporcio a b g ad h l g ea-

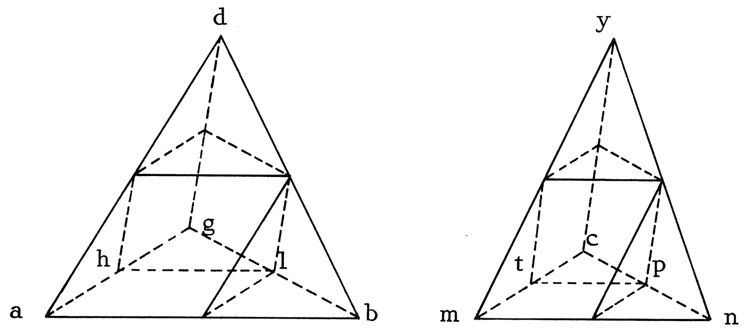

Fig.92

dem m n c ad t p c. Alternatim ergo que proporcio est a b g ad m n c eadem h l g ad t p c. Est autem que proporcio h l g ad t p c eadem sectilium quibus hii trianguli bases sunt. Constat itaque piramidis a b g d basis ad alterius basim proporcione cuiusdam sectilis a b g d piramidis ad quoddam alterius sectile. Est autem sectili cuius basis h l g equale alterum in a b g d piramide sectile sicque ei cuius basis t p c alterum in m n c y piramide. Esse vero solet que proporcio unius antecedentium ad suum consequens eadem omnium antecedentium ad omnia consequentia. Est igitur harum piramidum basis unius ad basim alterius que duorum unius sectilium ad duo alterius sectilia proporcio.

⟨XII.5⟩ Omnium piramidum eque altitudinis quibus bases triangule alterius ad alteram est quam basis ad basim proporcio.

Exempli gracia: piramidum duarum quibus bases triangule a b g d atque m n c y qua basium earum proporcione proponimus. Si enim aliter est, necesse est saltem harum proporcione basium a b g d piramidem ad corpus aliquod aut maius quidem m n c y piramide aut minus constare. Sitque primum ad minus quale est solidum p. Quo quanto maior est piramis tantum sit corpus h. Resecamus igitur de piramide m n c y equa duo sectilia equasque duas piramides maiori similes. Quod cum continuo fecerimus necesse est tandem h solido minus relinqui. Sitque id minus piramides due eque maiori similes, unde equa sectilia duo in eadem piramide maiora esse quam p consequens est. Similiter igitur et altera piramide secta quoniam que proporcio est basis a b g ad basim m n c eadem a b g d piramidis ad corpus p, que vero basis unius ad basim alterius eadem duorum unius sectilium ad duo alterius sectilia, alternatim eciam que proporcio fuerit a b g d piramidis ad duo sectilia in se contenta (fol.103^{v}) eadem solidi p ad duo sectilia alterius piramidis. Est a b g d piramis sectilibus in se contentis maior, sic igitur et solidum p alterius piramidis sectilibus maius est quibus minus extitit. Nec ergo possibile est a b g d piramidem ad solidum minus altera basium suarum proporcione constare. Sed neque ad maius. Si enim possibile est, esto interim p maius m n c y piramide ad quod altera basium suarum proporcione constet. Quoniam que proporcio est basis a b g ad basim m n c eadem a b g d piramidis ad solidum p. Converso eciam que proporcio est m n c ad a b g eadem solidi p ad a b g d piramidem. In qua proporcione si altera piramis ad quodlibet aliud corpus comparetur, id altera minus esse necesse est. Quod quoniam impossibile est, relinquitur harum piramidum que basis ad basim proporcio.

⟨XII.6⟩ Omne sectile cui basis triangula divisibile est in tres equas piramides bases triangulas habentes.

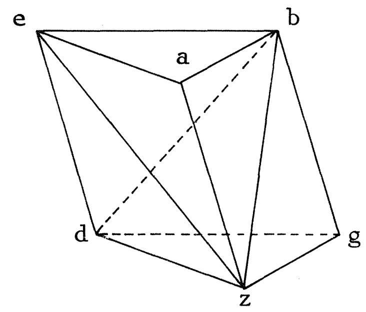

Fig.93

Datur enim sectile a b g d e cui basis triangula g z d. Quod ut in equas tres piramides basium triangularum dividere convenerit deducemus diametro b d applicabitque punctum z notis b et e. Dicimus itaque: sectile in tres piramides equales proposuimus divisum. Quia enim b d linea laterum equidistantium superficiei b g d e diametros est, duos altrinsecus triangulos b g d et b e d equos reddat necesse est. Qui cum duarum piramidum eque altitudinis quibus idem vertex z bases sint, eas piramides equas esse constans est. Item quoniam equidistantium laterum superficiei d z e a diametros z e duos altrinsecus triangulos a e z et e d z equos reddit, piramides duas supra eas bases constitutas quibus idem vertex b equales esse necesse est. Est igitur sectile basis triangule in equas tres piramides basium triangularum divisum.

⟨XII.7⟩ Piramides basium triangularum si fuerint equales, earum bases altitudinibus suis mutuas; sique bases altitudinibus mutue fuerint, piramides equas esse necesse est.

Ut due piramides quarum bases trianguli duo a b g et e z h verticesque d t si equales sunt, dicimus que proporcio fuerit basis a b g ad basim e z h eadem altitudinis t z ad altitudinem b d. Cuius argumen-

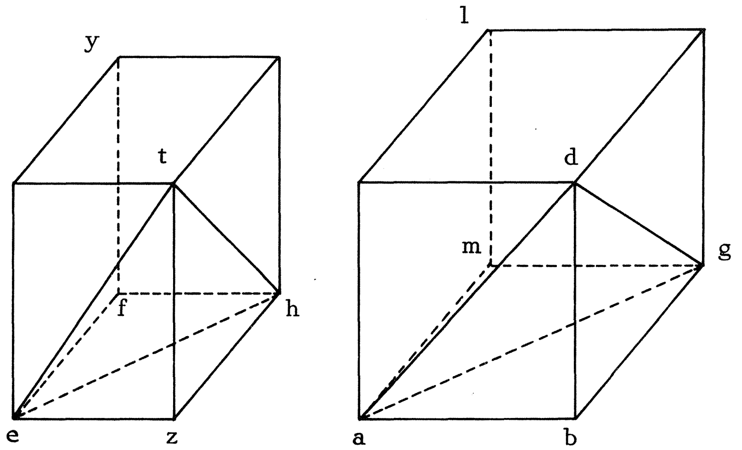

Fig.94

to consumamus solida (fol.104^{r}) superficierum equidistantium b d m l et z t f y. Cum itaque piramis a b g d piramidi e z h t equa sit alterique b l corpus, alteri z y sexcuplum, et ipsa solida equa esse constans est. Constat autem corporum equidistantium superficierum si equalia fuerint, bases altitudinibus esse mutuas. Est ergo que proporcio basis b m ad basim z f eadem fit altitudinis t z ad altitudinem b d. Que vero b m ad f z eadem nimirum est proporcio a b g trianguli ad e z h, eadem quoque b l solidi que a b g d piramidis eademque z y corporis que piramidis e z h t altitudo. Sunt itaque dum equales sint piramides bases earum altitudinibus mutue. Unde et ipsas equas esse convertitur. Quod enim que proporcio est a b g basis ad e z h eadem altitudinis t z ad altitudinem b d, erit eadem eciam basis b m ad basim f z. Cum ergo quam harum piramidum eedem horum corporum equidistantium altitudines sint, et eorum bases altitudinibus suis mutuas esse convenit. Constat autem si corporum equidistantium superficierum bases altitudinibus mutue fuerint, ipsa esse equalia. Equa sunt igitur solida b l et y z, estque alterius a b g d piramis, alterius e z h t sextans et ipsas itaque piramides equas esse manifestum est.

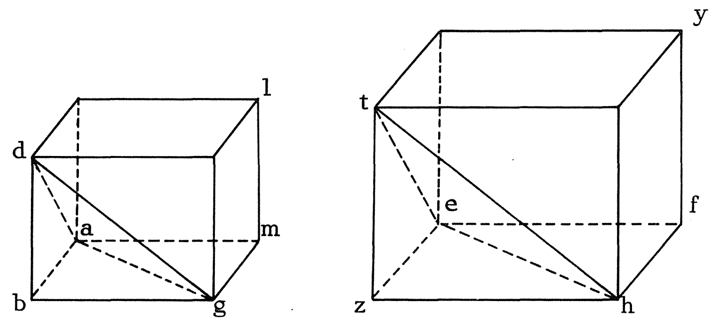

Fig.95

⟨ XII.8 ⟩ Omnium piramidum similium quibus bases triangule proporcio alterius ad alteram est que lateris ad latus sui respectus proporcio triplicata.

Ut duarum piramidum cuius bases triangule a b g et e z h vertices d et t si anguli tres circa b tribus apud z per ordinem ut sese respiciunt equales fuerint lateraque equos angulos continentia proporcionalia, dicimus alterius ad alteram ei qua b g latus ad h z constat proporcionalem triplicatam. Cuius argumento consumamus equidistantium corpora b m l et z f y. Quoniam igitur que proporcio est g b ad a b eadem h z ad e z queque g b ad b d eadem h z ad t z sicque reliquorum eadem. Constat equidistantium superficies tres b m et a d atque d g tribus alterius solidi sui quemque respectus esse similes. Omnis autem equidistantium superficierum solidi opposite superficies equales sunt, totum itaque b l toti y z simile est. Similium autem corporum equidistantium superficierum que lateris ad latus sui respectus proporcio triplicata est. Constat quoque piramidem a b g corporis b l sicque alteram alterius sextantem existere, igitur et piramidum que lateris ad latus proporcio est triplicata.

⟨ XII.9 ⟩ Omnis columpna teres piramidi sue tripla est.

Stant enim supra circulum a b g d columna et piramis eiusdem altitudinis dico igitur columnam piramidi triplam. Si enim aliter est, erit piramis triente columne quidem aut maior aut minor. Sitque primum minor quantitate corporis k. Describimus igitur in circulo

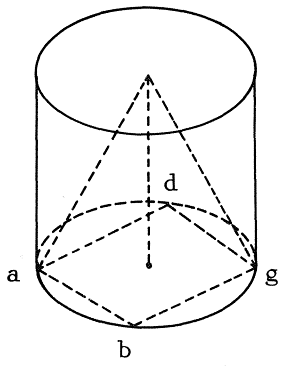

Fig.96

quadratum eiusdem notis designatum a b g d supra quas construimus sectile eque altum columne quod dimidio columne maius provenire necesse est. Deinde circuli porcionibus a b g d a ad puncta e z h t per equalia sectis arcuum cordas perducimus sicque supra singulos triangulos eque alta columne sectilia elevamus quorum quodque sua columne porcione dimidia maius fieri oportet. Quod cum continuo fecerimus, de columpna tandem minus solido k relinqui necesse est. Sitque id minus extremitas columne quam perducte corde segregant. Illud igitur sectile quod supra basim multi angulam circumductis cordis contentam eque altum columne constat maius triplo piramidis teretis remanere consequens est. Idem cum sectile piramidis eque alte cui eadem basis multi angula triplo equum est, maior est itaque piramis cui basis multi angula eque alta continente se piramide cuius basis circulus. Quod quoniam falsum est, piramidem teretem columne sue triente minorem esse impossibile est. Sed neque maiorem. Si enim possibile est, esto interim solidum k cuius quantitate piramis trientem columne superet. At et huius argumento, ut ante, supra descriptum in circulo quadratum construimus piramidem eque altam piramidi tereti cuius dimidio maiorem provenire necesse est. Similiter eciam porcionibus circuli sectis cordisque arcuum perductis supra singulos triangulos piramides eque altas tereti construimus quarum quamque sua piramidis porcione dimidia maiorem fieri oportet. Quod cum continuo fecerimus, necesse est tandem de piramide tereti minus k solido relinqui. Sitque id minus extremitas piramidis teretis quam perducte corde segregant. Eam itaque piramidem que supra basim multi angulam circumductis cordis tereti eque alta consistit, triente columne maiorem remanere consequens est. Eadem tamen piramis sectilis eque alti supra eandem multi angulam basim consistentis triens est. Maius est igitur sectile supra multi angulam basim consistens eque alta continente se columna supra circulum elevata. Quod impossibile esse manifestum est.

⟨XII.10⟩ Omnis piramidis columpneque teretis, quibus idem circulus basis idemque axis, ad similes sibi piramidem columpnamque teretem, quibus idem item circulus basis idemque axis, proporcio (fol.105^{r}) est que basis diametri ad basis diametron proporcio triplicata.

Est enim circulus a b g d basis teretis cuiusdam columne piramidisque teretis quibus idem axis k l sicque circulus e z h t basis alterius columpne cuiusdam atque piramidis quibus eciam idem axis m n, circulorum vero diametra b d et z t suntque columpna et piramis a b g d k l columne et piramidi e z h t m n similes, dico igitur harum ad illas proporcionem qua b d ad z t constat proporcione triplicata. Si enim aliter est, erit a b g d k l piramidis b d ad z t proporcio triplicata ad corpus aliquod e z h t n m piramide aut maius quidem aut minus. Sitque primum ad minus quale est solidum a. Describimus igitur in e z h t circulo tetragonum eisdem notis designatum supra quem construimus piramidem eque altam tereti cuius dimidio maiorem provenire necesse est. Sectis deinde circuli porcionibus per equalia ad puncta c y f q arcuumque cordis perductis supra singulos triangulos elevamus piramides eque altas tereti quarum quamque sua teretis porcione dimidia maiorem fieri oportet. Quod cum continuo fecerimus, necesse est tandem de tota piramide tereti relinqui minus ea differencia qua piramis ipsa teres corpus a superat sitque id minus extremitas piramidis perductis cordis segregata. Eam itaque piramidem tereti eque altam cuius basis multi angula circumductis cordis contenta maiorem a solido removere consequens est. Cuius basi multi angule similem multi angulam in a b g d circulo describentes supra eandem basim construimus eque altam tereti piramidem. Eruntque ita hec due piramides ut supra multi angulas bases consistunt, et supra triangulas bases constitute. Suntque hii trianguli l r b et n c z dum videlicet k cum r et m continuatum fuerit cum c. Quoniam igitur teretes piramides teretesque columne similes sunt,

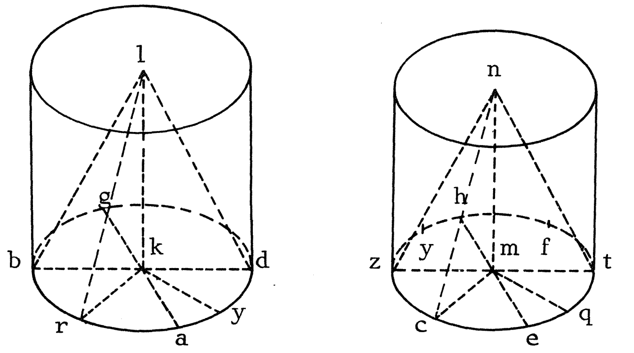

Fig.97

eritque axium proporcio eadem inter basium diametra, proporcio videlicet que k l ad b d eadem m n ad z t. Similiter ergo que proporcio fuerit l k ad b k eadem m n ad z m. Sunt itaque bina duum triangulorum latera angulos ambientia rectos proporcionalia, unde et reliqua eorum latera proporcionalia esse necesse est. Ut que proporcio est l k ad l b eadem fit m n ad n z. Alternatim ergo que l k ad m n eadem l b ad n z. Item que proporcio est l k ad r k eadem n m ad m c que latera cum rectos duos angulos ambiant, et reliqua ex eis triangulis proporcionalia esse consequens est, ut que proporcio est l k ad m n ea fit l r ad n c que dudum extitit l b ad n z. Est igitur que proporcio l b ad n z eadem l r ad n c. Item que proporcio b k ad k r eadem z m ad m c que latera cum dimidios duos rectos ambiant angulos, et reliqua triangulorum latera (fol.105^{v}) proporcionalia esse necesse est ut que proporcio est b k ad z m eadem fit b r ad z c que dudum reliquorum extitit proporcio. Omnium igitur horum triangulorum et latera proporcionalia et anguli ut sese respiciunt equales sunt. Est itaque piramis cui basis triangula b k r vertex l piramidi cui basis triangula z m c vertex n similis. Similium autem piramidum quibus bases triangule que lateris ad latus proporcio triplicata est. Est ergo piramidis b k r l ad piramidem c z m n que lateris b k ad z m proporcio triplicata. Est autem que b k ad z m eadem b d ad z t proporcio. Sic igitur harum piramidum que b d ad z t proporcio triplicata est. Ad hunc itaque modum cetere per girum piramides supra bases triangulas a k r et a k y eisque supra bases c m e et e m q consistunt sicque cetere ceteris per ordinem ad eosdem vertices l et n concurrentes triplicata b d ad z t proporcione respondent. Hac itaque ratione et tote piramides ipse supra multi angulas bases collocate quarum vertices l et n triplicata b d et z t ad invicem proporcione conferunt. Est igitur que proporcio piramidis teretis a b g d k l ad corpus a eadem piramidis multi angule cui vertex l ad piramidem multi angulam cui vertex ⟨ n. Alternatim ergo que proporcio piramidis teretis a b g d k l ad piramidem multi angulam cui vertex⟩ l eadem corporis a ad multi angulam cui vertex ⟨ n⟩ . Cum ergo teres contenta in se multi angula maior sit, et a corpus altera multi angula maius esse consequens est quam minus extitit. Nec ergo piramis teres a b g d k l proporcione b d ad z t triplicata ad corpus tereti piramide e z h t n m minus constare possibile est. Sed neque ad maius. Si enim possibile est, esto interim corpus a maius e z h t m n piramide ad quod a b g d k l piramis b d, z t proporcione triplicata constat. Converso igitur cum ea proporcione triplicata corpus a constet ad piramidem a b g d k l si piramis e z h t m n ad aliud quodlibet ea proporcione conseratur, id altera piramide minus existat necesse est, quod ante improbatum est. Nec igitur huius piramidis ad corpus maius illa huiusmodi proporcione esse possibile est. Relinquitur ergo piramidum similium quibus bases circulares que inter basium diametra proporcio triplicata quibus columne sue triple sunt.

⟨XII.11⟩ Omnis piramidis columneque teretis quibus idem circulus basis idemque axis ad piramidem columnamque teretem quibus item idem circulus basis idemque axis eque sibi altitudinis (fol.106^r) proporcio est que basis ad basim.

Est enim circulus a b g d basis teretis columne cuiusdam teretisque piramidis quibus idem axis k l sicque circulus e t h z basis alterius

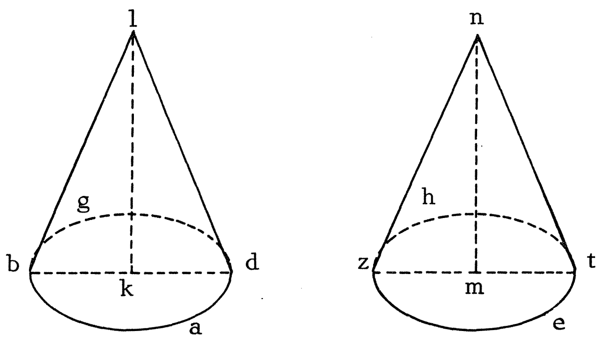

Fig.98

columne teretis et piramidis quibus similiter idem axis m n equa illis altitudine, basium vero diametra b d et t z dico igitur que proporcio est circuli a b g d ad circulum e t h z eam esse piramidis a b g d k l ad piramidem e t h z m n. Si enim aliter est, necesse est saltem ad corpus aliquod aut maius aut minus ea constare proporcione. Sitque primum ad minus quale est corpus a. Describimus igitur in e t h z circulo tetragonum eisdem notis designatum supra quem construimus piramidem eque altam tereti cuius dimidio maiorem provenire necesse est. Circulique porcionibus ad puncta c y f q per equalia sectis arcuum cordas perducimus pariterque supra singulos triangulos piramides tereti eque altas elevamus quarum quamque sua teretis porcione dimidia maiorem fieri oportet. Quod cum continuo fecerimus, necesse est tandem de piramide tereti relinqui minus ea differencia qua teres ipsa piramis corpus a superat. Sitque id minus extremitas teretis perductis cordis segregata. Eam itaque piramidem cuius basis multi angula circumductis cordis contenta eque altam tereti maiorem a solido remanere consequens est. Cuius basi multi angule ‹multi angulam› similem in a b g d circulo describentes supra eam basim construimus similiter piramidem eque altam eius circuli tereti cui vertex l. Quoniam igitur que proporcio tetragoni b d ad tetragonum t z eadem est circuli a b g d ad circulum e t h z eademque multi angule superficiei huius ad multi angulam illius, erit equidem que proporcio circuli ad circulum eadem multi angularum in eis superficierum. Que vero circulorum ea teretis a b g d l ad corpus a multi angularum ea piramidum altitudinis eque supra eas consistentium. Est igitur que proporcio teretis a b g l ad corpus a eadem piramidis multi angule cui vertex l ad multi angulam piramidem cui vertex n. Alternatim ergo que teretis a b g d l ad multi angulam cui vertex l eadem a corporis ad multi angulam cui vertex n. Est autem teres a b g d l in se contenta multi angula maior, maius est igitur corpus a multi angula cui vertex n qua minus extitit. Nec ergo piramidem a b g d l ad minus e t h z n piramide corpus basium suarum proporcione constare possibile est. Sed neque ad maius. Si enim possibile est, esto interim corpus a maius e t h z n piramide ad quod altera basium suarum proporcione comparetur. Converso igitur duum horum proporcione circulorum a corpus ad teretem a b g d l piramidem constat. Si altera teres eadem proporcione ad aliud quodlibet solidum conseratur, id altera minus esse necesse est, cui iam contradictum est. Est igitur harum piramidum que basium suarum (fol.106^{v}) proporcio quibus columne sue triple sunt.

⟨XII.12⟩ Omnis piramis columpnaque teres quibus idem circulus basis idemque axis si equales fuerint alii piramidi tereti alii columpne quibus idem item circulus basis idemque axis, bases earum altitudinibus suis mutue sunt. Sique bases altitudinibus mutue fuerint, ipsas equas esse necesse est.

Stant enim ille teretes piramis et columna supra circulum b g quibus idem axis k l quibus affines alie teretes piramis et columna supra circulum h t quibus idem axis m n, si equales fuerint, erit equidem que proporcio circuli b g ad circulum h t eadem altitudinis m n ad altitudinem k l. Si enim eque sunt altitudines dum piramides eque sint, et bases equas esse necesse est. Quod converso quoque ita constare oportet: sint enim altitudines eque quoniam igitur piramidum eque altitudinis que basium earum est proporcio si piramides

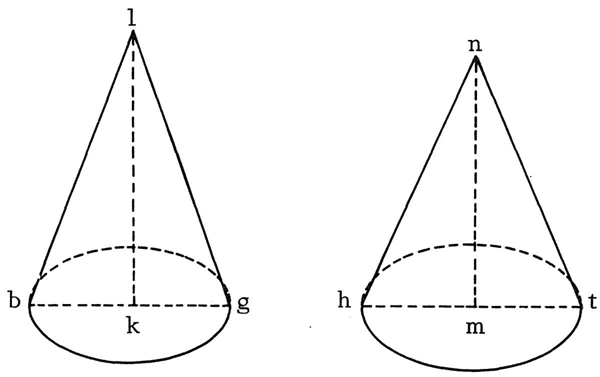

Fig.99

eque fuerint, bases eciam equas esse consequens est sicque bases eque sunt. Nisi et altitudines eque fuerint, non erit que basis ad basim piramidum proporcio quapropter nec equales erunt. Sin autem inequales fuerint alterutre, nisi quanto huius altitudo illius altitudinem superat tanto recte illius basis huius basi augeat, alterutri piramidum incrementum relinqui necesse est. Que quoniam equales sunt, id impossibile est. Sunt igitur huiusmodi piramidum si equales fuerint bases altitudinibus mutue.

Unde et ipse equales esse convertitur. Dum enim que proporcio est huius basis ad basim illius et bases eque fuerint sicque et altitudines equas esse convenit. Nisi piramides eciam eque sint, non erit piramidum eque altitudinis que basis ad basim proporcio. Quod incommodum converso quoque dum altitudines eque sint, sic enim et bases equas esse oportet, piramidum equalitatis contradictionem consequitur. Nam si inequales sint alterutre, quoniam quota fuerit huius basis illius basi totam illius altitudinem huius altitudini esse constat equipensata commutatione piramides ipsas coequari necesse est.

⟨XII.13⟩ Datis circulis duobus circa idem centrum in maiori de-

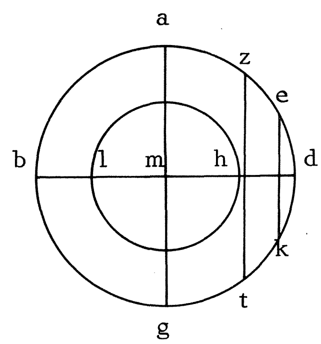

Fig. 100

scribimus superficiem multi angulam equalium laterum (fol.107[r])
que minorem nullatenus attingat.

Verbi gracia: circulis a b g d et l h circa centrum m inflexis primo diametra eorum rectis sese angulis intercipienda perducimus a g scilicet et b d statimque a puncto h supra diametron b d perpendicularem que minorem attingat ad maioris circumferenciam elevamus. Que ubi ad punctum z arcum a d per medium secuerit, eiusdem dimidium d z ad notam e per medium secabitur cui equo d k assumpto corda e k perducetur pariterque et z in rectum perducetur versus ad t. Hac itaque ratione profitemur in maiore describi posse superficiem multi angulam equalium alterum minorem minime tangentium. Est enim d z equalis d t sicque d k equalis d e. Sic igitur et e z equum t k relinqui necesse. Unde t z et e k equidistantes esse manifestum est. Cum ergo t z minorem circulum non attingat, multo minus eum e k contingere possibile est.

⟨XII.14⟩ Propositis speris duabus idem centrum ambientibus in maiore describimus solidum multarum basium quod minoris planiciem nullatenus attingat.

Datis enim et duarum centrum idem ambientium sperarum quasi planisperis id est superficiebus quas circuli sperarum tanquam umbones ambiant per medium sese ortogonaliter secantibus globo sperico sua cum planicie undique versum intellecto a b g d videlicet et e t h z circa idem centrum k quarum diametra a g et t z, primum in

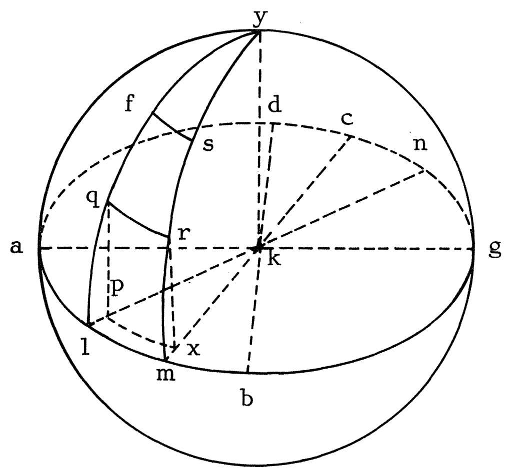

Fig.101

maiore circulo describimus multi angulam superficiem minorem circulum nullatenus attingentem de cuius lateribus corde b m videlicet et m l atque l a. Quo facto a punctis m et l producimus rectas lineas versus ad k indeque directe versus ad c et n. Deinde superficie circuli a b g d a puncto k rectis elevamus angulis lineam versus ad contactum planiciei maioris spere ad punctum y statimque y cum m et l sicque cum c et n rectis lineis continuamus pariterque in utroque quadrante m y et l y ternas cordas singulas m l equales perducimus l q videlicet et q f atque f y sicque m r et r s atque s y deinde a punctis q et r educimus perpendiculares duas in superficiem circuli a b g d supra communem terminum incidentes ad puncta p et x sicque ipsa puncta p cum x et q cum r atque f cum s rectis lineis continuamus. Quoniam igitur equalia sunt diametra l k n et m k c a quibus l q et m r equales corde perducte sunt demissas (fol.107^v) ab eis in communem terminum perpendiculares q p et r x equales esse necesse est. Sicque x m equalis erit p l cum vero tota m k equa sit toti k l et reliquas p k et k x equas esse constans est. Est igitur p x equidistans l m cumque p q et r x equales extiterint et equidistantes, erit eadem p x equidistans et equalis r q, unde l m et r q equidistare necesse est. Est igitur ut l m q r quadrilaterum in una superficie sic r s f q in una nec aliter y s f triangulus. Est autem m l ut ea que est p x sic eque ei r q longior. Cum ergo l m minorem speram non attingat, eam nec r q nec s f attingere possibile est ut ergo nec quadrilaterum utrumlibet, quelibet enim in una totum est superficie, sic nec triangulum eadem de causa minorem speram contingere fas est. Hoc artificio si ad hunc modum per singulos spere quadrantes utamur, consequemur equidem perfectionem solidi multarum basium a maiore spera contenti minorem nullatenus attingentis.

Sequitur si in minore spera consimile constructum fuerit corpus, similis ad simile qua diametros maioris ad minoris diametron constiterit proporcio triplicata. Est enim piramidis cui basis quadrangula m l q r (178), vertex k (179) ad similem sibi minoris spere piramidem que dimidii diametri maioris ad dimidium diametrum minoris proporcio triplicata. Que vero dimidii ad dimidium ea totius ad totum. Est igitur eius piramidis ad similem sibi minoris piramidem proporcio que diametri maioris ad diametrum minoris triplicata. Eadem est ergo singularum maioris per girum ad consimiles sibi singulas minoris per ordinem unde et totius ex his congesti solidi ad totum ex illis compositum eandem esse proporcionem consequens est.

⟨ XII.15 ⟩ Omnium sperarum que diametrorum suorum proporcio triplicata est.

Verbi gracia: spere a b g d ad speram e z h t que b d diametri ad diametron t z proporcio triplicata. Si enim aliter est, erit eius ad aliam saltem quamlibet speram eiusmodi proporcio maiorem equidem illa vel minorem sitque primum ad minorem qualis est a. Describimus igitur in e z h spera circa idem centrum aliam k l m n pariter-

---

(178) q r] p x.
(179) k] y.

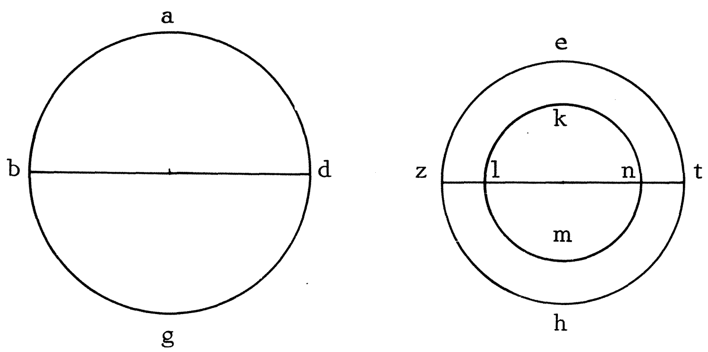

Fig.102

que solida similia duo multarum basium in speris a b g d atque e z h t quorum qua diametra sperarum constant proporcione triplicata esse necesse est. Est igitur que proporcio a b g d ad speram a eadem solidi multarum basium maioris spere ad solidum multarum minoris. Alternatim ergo que proporcio fuerit spere a b g d ad solidum in se contentum, eadem est a spere ad solidum in e z h t contentum. Estque a b g d solido quidem in se contento maior, maior est igitur et a spera solido e z h t quod speram k l m n continet equalem a. Nec igitur a b g d (fol.108^{r}) speram ad minorem e z h t triplicata diametrorum suorum proporcione constare possibile est. Sed neque ad maiorem. Si enim possibile est, esto interim maior illa ad quam hec diametrorum suorum proporcione triplicata comparetur. Si ergo que proporcio diametri b d ad diametrum t z eadem a b g d spere ad speram a triplicata est, erit eadem solidi multarum basium a b g d ad simile sibi e z h t. Converso ergo que solidi e z h t ad solidum alterius eadem est a spere ad speram a b g d. In hac igitur proporcione itaque si spera e z h t alii cuilibet spere conseratur eam altera minorem esse necesse est. Cui quoniam contradictum est, relinquitur sperarum que diametrorum suorum proporcio triplicata.

OTHER TITLES IN THE SERIES MATHEMATICAL CENTRE TRACTS

A leaflet containing an order-form and abstracts of all publications mentioned below is available at the Mathematisch Centrum, Tweede Boerhaavestraat 49, Amsterdam-1005, The Netherlands. Orders should be sent to the same address.

MCT 1 T. VAN DER WALT, *Fixed and almost fixed points*, 1963. ISBN 90 6196 002 9.

MCT 2 A.R. BLOEMENA, *Sampling from a graph*, 1964. ISBN 90 6196 003 7.

MCT 3 G. DE LEVE, *Generalized Markovian decision processes, part I: Model and method*, 1964. ISBN 90 6196 004 5.

MCT 4 G. DE LEVE, *Generalized Markovian decision processes, part II: Probabilistic background*, 1964. ISBN 90 6196 006 1.

MCT 5 G. DE LEVE, H.C. TIJMS & P.J. WEEDA, *Generalized Markovian decision processes, Applications*, 1970. ISBN 90 6196 051 7.

MCT 6 M.A. MAURICE, *Compact ordered spaces*, 1964. ISBN 90 6196 006 1.

MCT 7 W.R. VAN ZWET, *Convex transformations of random variables*, 1964. ISBN 90 6196 007 X.

MCT 8 J.A. ZONNEVELD, *Automatic numerical integration*, 1964. ISBN 90 6196 008 8.

MCT 9 P.C. BAAYEN, *Universal morphisms*, 1964. ISBN 90 6196 009 6.

MCT 10 E.M. DE JAGER, *Applications of distributions in mathematical physics*, 1964. ISBN 90 6196 010 X.

MCT 11 A.B. PAALMAN-DE MIRANDA, *Topological semigroups*, 1964. ISBN 90 6196 011 8.

MCT 12 J.A.TH.M. VAN BERCKEL, H. BRANDT CORSTIUS, R.J. MOKKEN & A. VAN WIJNGAARDEN, *Formal properties of newspaper Dutch*, 1965. ISBN 90 6196 013 4.

MCT 13 H.A. LAUWERIER, *Asymptotic expansions*, 1966, out of print; replaced by MCT 54.

MCT 14 H.A. LAUWERIER, *Calculus of variations in mathematical physics*, 1966. ISBN 90 6196 020 7.

MCT 15 R. DOORNBOS, *Slippage tests*, 1966. ISBN 90 6196 021 5.

MCT 16 J.W. DE BAKKER, *Formal definition of programming languages with an application to the definition of ALGOL 60*, 1967. ISBN 90 6196 022 3.

MCT 17 R.P. VAN DE RIET, *Formula manipulation in ALGOL 60, part 1*, 1968. ISBN 90 6196 025 8.

MCT 18 R.P. VAN DE RIET, *Formula manipulation in ALGOL 60, part 2*, 1968. ISBN 90 6196 038 X.

MCT 19 J. VAN DER SLOT, *Some properties related to compactness*, 1968. ISBN 90 6196 026 6.

MCT 20 P.J. VAN DER HOUWEN, *Finite difference methods for solving partial differential equations*, 1968. ISBN 90 6196 027 4.

MCT 21 E. WATTEL, *The compactness operator in set theory and topology*, 1968. ISBN 90 6196 028 2.

MCT 22 T.J. DEKKER, *ALGOL 60 procedures in numerical algebra, part 1*, 1968. ISBN 90 6196 029 0.

MCT 23 T.J. DEKKER & W. HOFFMANN, *ALGOL 60 procedures in numerical algebra, part 2*, 1968. ISBN 90 6196 030 4.

MCT 24 J.W. DE BAKKER, *Recursive procedures*, 1971. ISBN 90 6196 060 6.

MCT 25 E.R. PAERL, *Representations of the Lorentz group and projective geometry*, 1969. ISBN 90 6196 039 8.

MCT 26 EUROPEAN MEETING 1968, *Selected statistical papers, part I*, 1968. ISBN 90 6196 031 2.

MCT 27 EUROPEAN MEETING 1968, *Selected statistical papers, part II*, 1969. ISBN 90 6196 040 1.

MCT 28 J. OOSTERHOFF, *Combination of one-sided statistical tests*, 1969. ISBN 90 6196 041 X.

MCT 29 J. VERHOEFF, *Error detecting decimal codes*, 1969. ISBN 90 6196 042 8.

MCT 30 H. BRANDT CORSTIUS, *Excercises in computational linguistics*, 1970. ISBN 90 6196 052 5.

MCT 31 W. MOLENAAR, *Approximations to the Poisson, binomial and hypergeometric distribution functions*, 1970. ISBN 90 6196 053 3.

MCT 32 L. DE HAAN, *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*, 1970. ISBN 90 6196 054 1.

MCT 33 F.W. STEUTEL, *Preservation of infinite divisibility under mixing and related topics*, 1970. ISBN 90 6196 061 4.

MCT 34 I. JUHÁSZ, A. VERBEEK & N.S. KROONENBERG, *Cardinal functions in topology*, 1971. ISBN 90 6196 062 2.

MCT 35 M.H. VAN EMDEN, *An analysis of complexity*, 1971. ISBN 90 6196 063 0.

MCT 36 J. GRASMAN, *On the birth of boundary layers*, 1971. ISBN 90 6196 064 9.

MCT 37 J.W. DE BAKKER, G.A. BLAAUW, A.J.W. DUIJVESTIJN, E.W. DIJKSTRA, P.J. VAN DER HOUWEN, G.A.M. KAMSTEEG-KEMPER, F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, W.L. VAN DER POEL, J.P. SCHAAP-KRUSEMAN, M.V. WILKES & G. ZOUTENDIJK, *MC-25 Informatica Symposium*, 1971. ISBN 90 6196 065 7.

MCT 38 W.A. VERLOREN VAN THEMAAT, *Automatic analysis of Dutch compound words*, 1971. ISBN 90 6196 073 8.

MCT 39 H. BAVINCK, *Jacobi series and approximation*, 1972. ISBN 90 6196 074 6.

MCT 40 H.C. TIJMS, *Analysis of (s,S) inventory models*, 1972. ISBN 90 6196 075 4.

MCT 41 A. VERBEEK, *Superextensions of topological spaces*, 1972. ISBN 90 6196 076 2.

MCT 42 W. VERVAAT, *Success epochs in Bernoulli trials (with applications in number theory)*, 1972. ISBN 90 6196 077 0.

MCT 43 F.H. RUYMGAART, *Asymptotic theory of rank tests for independence*, 1973. ISBN 90 6196 081 9.

MCT 44 H. BART, *Meromorphic operator valued functions*, 1973. ISBN 90 6196 082 7.

MCT 45 A.A. BALKEMA, *Monotone transformations and limit laws*, 1973. ISBN 90 6196 083 5.

MCT 46 R.P. VAN DE RIET, *ABC ALGOL, A portable language for formula manipulation systems, part 1: The language*, 1973. ISBN 90 6196 084 3.

MCT 47 R.P. VAN DE RIET, *ABC ALGOL A portable language for formula manipulation systems part 2: The compiler*, 1973. ISBN 90 6196 085 1.

MCT 48 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, P.J.W. TEN HAGEN & H.L. OUDSHOORN, *In ALGOL 60 compiler in ALGOL 60, Text of the MC-compiler for the EL-X8*, 1973. ISBN 90 6196 086 X.

MCT 49 H. KOK, *Connected orderable spaces*, 1974. ISBN 90 6196 088 6.

MCT 50 A. VAN WIJNGAARDEN, B.J. MAILLOUX, J.E.L. PECK, C.H.A. KOSTER, M. SINTZOFF, C.H. LINDSEY, L.G.L.T. MEERTENS & R.G. FISKER (eds.), *Revised report on the algorithmic language ALGOL 68*. ISBN 90 6196 089 4.

MCT 51 A. HORDIJK, *Dynamic programming and Markov potential theory*, 1974. ISBN 90 6196 095 9.

MCT 52 P.C. BAAYEN (ed.), *Topological structures*, 1974. ISBN 90 6196 096 7.

MCT 53 M.J. FABER, *Metrizability in generalized ordered spaces*, 1974. ISBN 90 6196 097 5.

MCT 54 H.A. LAUWERIER, *Asymptotic analysis, part 1*, 1974. ISBN 90 6196 098 3.

MCT 55 M. HALL JR. & J.H. VAN LINT (eds.), *Combinatorics, part 1: Theory of designs finite geometry and coding theory*, 1974. ISBN 90 6196 099 1.

MCT 56 M. HALL JR. & J.H. VAN LINT (eds.), *Combinatorics, part 2: Graph theory; foundations, partitions and combinatorial geometry*, 1974. ISBN 90 6196 100 9.

MCT 57 M. HALL JR. & J.H. VAN LINT (eds.), *Combinatorics, part 3: Combinatorial group theory*, 1974. ISBN 90 6196 101 7.

MCT 58 W. ALBERS, *Asymptotic expansions and the deficiency concept in statistics*, 1975. ISBN 90 6196 102 5.

MCT 59 J.L. MIJNHEER, *Sample path properties of stable processes*, 1975. ISBN 90 6196 107 6.

MCT 60 F. GÖBEL, *Queueing models involving buffers*, 1975. ISBN 90 6196 108 4.

* MCT 61 P. VAN EMDE BOAS, *Abstract resource-bound classes, part 1*. ISBN 90 6196 109 2.

* MCT 62 P. VAN EMDE BOAS, *Abstract resource-bound classes, part 2*. ISBN 90 6196 110 6.

MCT 63 J.W. DE BAKKER (ed.), *Foundations of computer science*, 1975. ISBN 90 6196 111 4.

MCT 64 W.J. DE SCHIPPER, *Symmetrics closed categories*, 1975. ISBN 90 6196 112 2.

MCT 65 J. DE VRIES, *Topological transformation groups 1 A categorical approach*, 1975. ISBN 90 6196 113 0.

* MCT 66 H.G.J. PIJLS, *Locally convex algebras in spectral theory and eigenfunction expansions*. ISBN 90 6196 114 9.

* MCT 67 H.A. LAUWERIER, *Asymptotic analysis, part 2.* ISBN 90 6196 119 X.

* MCT 68 P.P.N. DE GROEN, *Singularly perturbed differential operators of second order.* ISBN 90 6196 120 3.

* MCT 69 J.K. LENSTRA, *Sequencing by enumerative methods.* ISBN 90 6196 125 4.

MCT 70 W.P. DE ROEVER JR., *Recursive program schemes: semantics and proof theory*, 1976. ISBN 90 6196 127 0.

* MCT 71 J.A.E.E. VAN NUNEN, *Contracting Markov decision processes*, 1976. ISBN 90 6196 129 7.

* MCT 72 J.K.M. JANSEN, *Simple periodic and nonperiodic lamé functions and their applications in the theory of conical waveguides.* ISBN 90 6196 130 0.

* MCT 73 D.M.R. LEIVANT, *Absoluteness of intuitionistic logic.* ISBN 90 6196 122 x.

* MCT 74 H.J.J. TE RIELE, *A theoretical and computational study of generalized aliquot sequences.* ISBN 90 6196 131 9.

* MCT 75 A.E. BROUWER, *Treelike spaces and related connected topological spaces.* ISBN 90 6196 132 7.

* MCT 76 M. REM., *Assocons and the closure statement.* ISBN 90 6196 135 1.

* MCT 77

* MCT 78

* MCT 79 M.C.A. VAN ZUIJLEN, *Empirical distributions and rankstatistics*, 1977. ISBN 90 6196 145 9.

* MCT 80 P.W. HEMKER, *A numerical study of stiff two-point boundary problems*, 1977. ISBN 90 6196 146 7.

MCT 81 K.R. APT & J.W. DE BAKKER (eds), *Foundations of computer science II*, part I, 1976. ISBN 90 6196 140 8.

MCT 82 K.R. APT & J.W. DE BAKKER (eds), *Foundations of computer science II*, part II, 1976. ISBN 90 6196 141 6.

* MCT 83 L.S. VAN BENTEM JUTTING, *Checking Landau's "Grundlagen" in the automath system*, 1977. ISBN 90 6196 147 5.

An asterik before the number means "to appear".