

### Correctievel Syllabus Vakantiecursus 1998

bladz. 13; regel 12 van onderen:

$$\text{lees: } ax = by; xy = b^2; x^2 \pm xy = ay^2; x^2 = ay,$$

bladz. 14; regel 19 van onderen:

$$\text{lees: } a : x_1 = x_1 : x_2 = \dots = x_n : b,$$





## **CWI Syllabi**

### **Managing Editors**

M. Hazewinkel (CWI, Amsterdam)  
J.W. Klop (CWI, Amsterdam)  
J.M. Schumacher (CWI, Amsterdam)  
N.M. Temme (CWI, Amsterdam)

### **Executive Editor**

M. Bakker (CWI Amsterdam, e-mail: [Miente.Bakker@cw.nl](mailto:Miente.Bakker@cw.nl))

### **Editorial Board**

W. Albers (Enschede)  
K.R. Apt (Amsterdam)  
M.S. Keane (Amsterdam)  
J.K. Lenstra (Eindhoven)  
P.W.H. Lemmens (Utrecht)  
M. van der Put (Groningen)  
A.J. van der Schaft (Enschede)  
H.J. Sips (Delft, Amsterdam)  
M.N. Spijker (Leiden)  
H.C. Tijms (Amsterdam)

### **CWI**

P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands  
Telephone + 31 - 20 592 9333  
Telefax + 31 - 20 592 4199  
WWW page <http://www.cwi.nl>

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Vakantiecursus 1998  
Meetkunde, oud en nieuw

ISBN 90 6196 478 4  
NUGI-code: 811

Copyright ©1998, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam  
Printed in the Netherlands

## Inhoud

Ten Geleide	i
A.W. GROOTENDORST	
Analytische Meetkunde: het begin	1
A.W. GROOTENDORST	
De vlakke meetkunde terug op school	27
J.C. VAN DE CRAATS	
Voronoi-diagrammen	59
J.M. AARTS	
Eindige meetkunde	73
A.J. VAN ZANTEN	
Perspectief	93
A. VERWEIJ	
Polytopen	129
J.H.M. STEENBRINK	
Meetkunde, niet-euclidisch en toch waar	143
F. VAN DER BLIJ	
Medewerkers aan de Vacantiecursus 1998	167





## Ten Geleide

Nu de Meetkunde weer 'terug' is in het VWO, althans in het profiel Natuur en Techniek, lijkt het een goede gedachte dit jaar de Vacantiecursus geheel aan dit onderwerp te wijden. Maar eigenlijk is er geen bijzondere reden nodig om weer eens naar de Meetkunde te kijken. Meetkunde is immers altijd al voor vele middelbare scholieren een boeiend en vooral uitdagend vak geweest, al was het alleen maar vanwege de sport het juiste 'hulplijntje' te vinden. Naar mijn mening was er (althans vóór de Mammoetwet van 1968) een belangrijke reden om wiskunde te gaan studeren: men werd geboeid door de meetkunde. Toen stond het direct toepasbare nog niet zo sterk op de voorgrond en behoefde men niet uit te leggen wat men boeiend vond aan de negenpuntscircel, laat staan dat men het maatschappelijk belang daarvan moest verdedigen. Maar nu eerst een zeer globaal overzicht van datgene wat de cursus te bieden heeft.

In de eerste voordracht krijgt het gebruikelijke historische aspect van de cursus zijn plaats met een lezing van ondergetekende over de ontwikkelingen die geleid hebben tot het ontstaan van de Analytische Meetkunde en de 'codificatie' daarvan in het werk van onze Raadpensionaris Johan de Witt.

Van direct belang voor het onderwijs is de lezing van *Prof. dr. J. van de Craats*. Hierin wordt allereerst een nieuwe axiomatiek voor de Euclidische Meetkunde ontwikkeld die twee voordelen heeft: met behoud van de meetkundige intuïtie wordt een 'waterdicht' axiomastelsel aangeboden dat zonder bezwaar op de scholen gepresenteerd kan worden, terwijl daarnaast dit Euclidische vlak geïdentificeerd kan worden met het vlak waarin we grafieken tekenen.

De volgende voordracht, door *Prof. dr. J.M. Aarts*, is eveneens van direct belang voor toepassing op school: hierin wordt uitgebreid ingegaan op een stuk leerstof van het VWO: de Voronoï-diagrammen. Uiteraard worden daarbij uitlopers behandeld die wellicht de schoolstof overstijgen, maar natuurlijk boeiend zijn voor de docent.

*Dr. A.J. van Zanten* stelt in de vierde voordracht de eindige meetkunde aan de orde, een onderwerp dat bij velen iets minder bekend is. Zoals het woord al suggereert, gaat het hierbij om een meetkunde waarin men slechts over eindig veel punten en lijnen beschikt. De basis van de redeneringen wordt gevormd door het eerste en het vijfde axioma van Euclides. Enig abstractievermogen kan van pas komen.

De vijfde lezing, die van *drs. A. Verweij*, is gewijd aan het onderwerp Perspectief, een al oud onderdeel van de wiskunde. Vele interessante toepassingen

in kunst en techniek zullen de revue passeren, waarbij drs. Verweij kan putten uit haar ervaringen met bouwkundestudenten.

*Prof.dr. J. H. M. Steenbrink* stelt het onderwerp 'Polytoop' aan de orde. Hierbij moet men onder een polytoop een meetkundige figuur verstaan die begrensd wordt door lijnen, vlakken of, in de vier- en hogerdimensionale ruimte, door hypervlakken. Onze vlakke veelhoeken en driedimensionale veelvlakken zijn daarvan speciale gevallen. De bekende vijf regelmatige veelvlakken trokken al in de Griekse Oudheid de aandacht. Interessant is natuurlijk de vraag hoe eigenschappen van drie- dimensionale veelvlakken vertaald moeten worden in hogere dimensies. Natuurlijk is zo'n onderwerp prachtig voor 'iets extra's' in de klas.

Zoals gebruikelijk, is tussen de zesde en de zevende voordracht plaats ingeruimd voor zelfwerkzaamheid. Opgaven met betrekking tot verschillende van de lezingen worden daarbij aan de deelnemers ter oefening voorgelegd.

De slotvoordracht wordt gehouden door *Prof. dr. F. van der Blij: niet-euclidische meetkunde*, een onderwerp dat al sinds het begin van de 18e-eeuw in de belangstelling staat. Het is voor iedereen leerzaam te ontdekken 'dat het ook anders kan'. Ook hier worden eisen gesteld aan het abstractievermogen, maar het is de moeite waard!

Als noviteit zal dit jaar in de pauzen de film *Not-knot* vertoond worden. Hierover het volgende: de classificatie van geknoopte touwen vereist diepgaand wiskundig onderzoek. Een bekend voorbeeld vindt men in de zogenaamde Borromeïsche ringen, d.w.z. drie ringen die zó met elkaar verbonden zijn dat, als men er één van losmaakt, de andere twee ook van elkaar gescheiden zijn. Symbool van de eenheid in de familie Borromeus! Bij deze klassificatie blijkt de hyperbolische meetkunde een rol te spelen. Dit wordt in fraaie beelden getoond.

Het geheel overziende krijgt men de indruk dat het ook dit jaar een boeiende cursus zal worden. Wanneer men daarbij dan ook weer vele oude bekenden en geïnteresseerde nieuwe deelnemers ontmoet, dan stelt dat weer een tweetal genoeglijke dagen in het vooruitzicht, want 'onze' cursus heeft toch altijd iets feestelijks.

Dit voorwoord zou niet volledig zijn als daaraan woorden van dank zouden ontbreken aan het adres van allen die zo intens meegewerkt hebben aan de voorbereiding van deze vacatiecursus. In de eerste plaats is daar dr. M. Bakker, die het geheel gecoördineerd heeft en ook inhoudelijk deelgenomen heeft aan de totstandkoming van deze syllabus. Hij kon daarbij rekenen op de steun van de dames Simone Panka en Josi Foe. De heer Tobias Baanders verzorgde ook nu weer vele fraaie figuren en gaf vorm aan de omslag van de brochure. Evenals in andere jaren was de materialisatie van deze syllabus in de vertrouwde handen van de heren Jan Schipper en Jos van der Werf. Veel dank ook aan het CWI en de TU Eindhoven niet alleen voor de geboden gastvrijheid, maar ook voor de verzorging van de technische bijstand en van de maaltijden.

Allen hartelijk dank!

A.W. Grootendorst

## Analytische Meetkunde: het begin

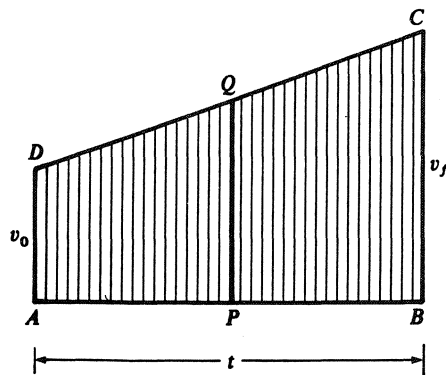
A.W. Grootendorst  
*Aarbeistraat 11*  
*2564 TM Den Haag*

Wanneer in een gesprek de oorsprong van de analytische meetkunde aan de orde komt, vallen onmiddellijk de namen van Pierre de Fermat (1601–1665) en René Descartes (1596–1650). De bronnen van hun inspiratie liggen echter in een verder verleden: de Griekse Oudheid met namen als Euclides, Apollonius, Pappus. De hulpmiddelen die hun bovendien impliciet werden aangereikt en die hun prestaties definitief mogelijk maakten, dateren mede uit de latere Middeleeuwen en de Renaissance: Nicole d'Oresme (ca. 1320–1380) en François Viète (1540 – 1603). Over het samenspel van deze krachten gaat het in deze bijdrage aan de vacantiecursus 1998. In dit artikel is een aantal bekende zaken bijeengezet, die in grote lijnen de ontwikkeling van de analytische meetkunde tot in de 17e eeuw schetsen. Hierbij zijn de étapes in deze ontwikkeling gegroepeerd rond enkele hoofdfiguren.

1. Expliciet gebruik van grafieken –hetgeen echter zeker nog geen analytische meetkunde was– treffen we aan bij de Middeleeuwse Franse geestelijke, tevens wiskundige, astronoom en econoom, Nicole d'Oresme (ca. 1320–1380). De overwegingen die hem daarbij leidden zijn in principe pogingen tot kwantificering van het begrip verandering, een begrip dat de Grieken al vanaf Heraclitus (ca. 500 v.C.) beziggehouden had en dat door Aristoteles (384–322) in detail geanalyseerd was. D'Oresme baseerde zich daarbij op de theorie die in Oxford aan het Merton College was ontwikkeld. Daar zag men in dat de dingen kwaliteiten konden hebben, als 'warm zijn', 'zwaar zijn', 'bewegen'. Aan die kwaliteit (forma) kende men een zekere mate van intensiteit (intensio, latitudo) toe; deze komt overeen met wat wij temperatuur en dichtheid in een punt, resp. snelheid op een bepaald moment zouden noemen. Deze intensiteit behoeft niet in elk punt of op elk tijdstip dezelfde te zijn.



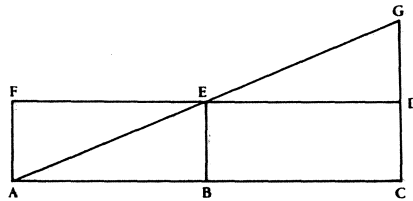
Nicole d'Oresme



FIGUUR 1.

Nicole d'Oresme, verbonden aan de Parijse Universiteit, nam deze gedachten over, maar voegde daaraan iets unieks toe (o.a. in zijn *Tractatus de Latitudinibus Formarum*). Het vernieuwende van d'Oresme was dat hij een en ander grafisch voorstelde. Een concreet voorbeeld: wanneer een staaf in een horizontaal vlak om een van zijn punten ronddraait, dan kan men bij ieder punt van de staaf de lineaire snelheid daarvan voorstellen door loodrecht op deze staaf een lijnstuk uit te zetten, dat de grootte van deze lineaire snelheid in dit punt weergeeft (alle lijnstukken coplanair). Analoog kan men bij een staaf van variabele dichtheid of temperatuur een bijbehorende grafiek tekenen.

Iets abstracter is de situatie waarbij men van een bewegend voorwerp de snel-



FIGUUR 2.

heid uitzet tegen de tijd; wat zoëven een staaf was is nu een tijdsinterval (zie afb. 1) Men onderscheidde daarbij op de gebruikelijke wijze constante snelheid, eenparig versnelde beweging en andere snelheidsverdelingen. Hierbij zij opgemerkt dat men een intuïtieve, niet-sluitende definitie van snelheid hanteerde. In genoemde voorbeelden werden de lengte van de staaf en van het tijdsinterval de uitgebreidheid (*extensio*, *longitudo*) van de kwaliteit genoemd, de verticale lijnstukken stelden de intensiteit of *latitudo* voor. De termen *longitudo* en *latitudo* zijn waarschijnlijk ontleend aan de geografie.

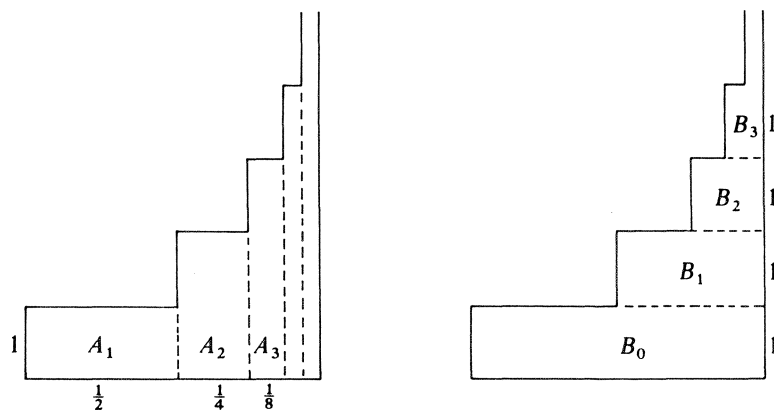
De oppervlakte ‘onder’ de grafiek werd de kwantiteit (*quantitas*) van de betreffende kwaliteit genoemd. Men zag deze oppervlakte als de ‘som’ van alle betrokken lijnstukken en ging ervan uit dat deze kwantiteit in de genoemde voorbeelden respectievelijk de totale hoeveelheid warmte, het gewicht en de afgelegde weg voorstelde. In Oxford was men al gekomen tot de zogenaamde ‘Merton Rule’, die zegt dat bij een eenparig versnelde beweging de weg die in een gegeven tijdsinterval wordt afgelegd, gelijk is aan de weg die in dezelfde tijd wordt afgelegd door een voorwerp dat eenparig beweegt met de gemiddelde snelheid over dit tijdsinterval. D’Oresme kon deze regel ‘bewijzen’ door op te merken dat in een grafiek, zoals afb. 2, de oppervlakten *ACDF* en *ACG* gelijk zijn.

Ook is een andere Merton Rule duidelijk, nl. dat in geval van afb. 2 de weg die in de tweede helft van de tijd wordt afgelegd, driemaal zo groot is als die gedurende de eerste helft. D’Oresme breidde dit probleem uit tot een beweging waarbij een voorwerp gedurende de eerste helft van de tijd beweegt met constante snelheid  $v$ , vervolgens gedurende  $1/4$  van de tijd met snelheid  $2v$ , daarna gedurende  $1/8$  van de tijd met snelheid  $3v$  etc.; dit leidde grafisch tot de conclusie:

$$1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \dots n/2^n \dots = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 \dots = 2.$$

(zie afb. 3)

D’Oresme is ook degene die voor het eerst de divergentie van de harmonische reeks aantoonde. Met nadruk zij vermeld dat de discussies over deze onderwerpen uitsluitend verbaal gevoerd werden en absoluut niet begeleid werden door



FIGUUR 3.

experimenten! Overigens werd Galilei (1564–1642) door het werk van d'Oresme sterk beïnvloed, maar hij voerde als eerste wèl experimenten uit. Ook zij opgemerkt dat d'Oresme zijn beschouwingen voorzichtig uitbreidde tot intensiteiten die van twee kwaliteiten afhankelijk zijn (*qualitates superficiales*).

Tenslotte dit: het werk van D'Oresme is, zoals gezegd, nog geen analytische meetkunde: hij komt niet tot de vergelijking van een kromme, daartoe ontbrak hem een toereikend meetkundig en vooral algebraïsch apparaat. Ook was hij niet zozeer geïnteresseerd in de betrokken kromme zelf, alswel in de oppervlakte daaronder. Daarbij kwam dat zijn abscis-as begrensd was en zonder vast beginpunt. Opvallend is dat Johan de Witt in zijn *Elementa Curvarum Linearum, Liber Secundus*, (waarover later) de onbegrensdheid en een vast beginpunt bij herhaling noemt:

*Laat het punt A het vaste beginpunt zijn van x en laten we veronderstellen dat deze x zich vanaf A onbegrensd uitstrekt naar E.*

Hierbij neemt hij aan dat *E* onbegrensd kan opschuiven.

2. Voor een dieper inzicht in de ontwikkeling van de analytische meetkunde moeten we ingaan op het werk van François Viète (1540–1603), wiens *In Artem Analyticen Isagoge* (Inleiding in de Wetenschap van de Analyse), hierbij van fundamenteel belang was; het boek verscheen in 1591 in Tours. Het begrip analyse, tegenover synthese, als bewijsmethode, was al sinds Plato (427–347) bekend. Pappus (300–350) geeft in zijn *Collectio* een omschrijving van beide methoden: bij de *synthetische* methode voor het bewijzen van een stelling gaan we uit van een juiste stelling en leiden de te bewijzen stelling daaruit af via een keten van logische gevolgtrekkingen.



François Viète

Bij het toepassen van de *analytische* methode voor het bewijzen van een stelling gaan we ervan uit dat deze stelling juist is en leiden daaruit stap voor stap een conclusie af. Is deze onjuist, dan was de stelling waarvan we uitgingen ook onjuist. Is de conclusie echter juist, dan moeten we, formeel via de synthetische methode terugredenerend, vanuit deze conclusie, de juistheid van de te bewijzen stelling aantonen. Dit onderdeel van de bewijsgang, de *compositio* genoemd, werd vaak weggelaten of afgedaan met de mededeling 'dat het gemakkelijk is'.

Analoog gaan we te werk wanneer het niet gaat om het bewijs van een stelling, maar om het vinden van een grootheid –een getal bijvoorbeeld of een lijnstuk– die aan zekere eisen voldoet. Bij de analytische methode gaan we er dan vanuit dat we de gezochte grootheid kennen die aan al aan deze eisen voldoet en trekken ook in dit geval conclusies totdat we een waarde voor de grootheid daaruit hebben afgeleid, maar ook dan moeten we weer terug! Deze twee gevallen, stelling te bewijzen of grootheid te vinden, hadden al in de Oudheid afzonderlijke namen: in het geval van een stelling sprak men van de theoretische analyse of zètetische analyse (zeteticus, van  $\zeta\eta\tau\epsilon\omega = z\grave{e}te\acute{o} = \text{zoeken}$ ); in het tweede geval sprak men van problematische analyse; deze werd ook poristische analyse genoemd (poristicus, van  $\pi\omicron\rho\iota\zeta\omega = \text{porizo} = \text{verschaffen}$ ). Aan deze klassieke onderscheiding ontleen *synthetische* meetkunde en *analytische* meetkunde hun naam. Viète bracht nog een verfijning aan: hij onderscheidde de concrete afleiding van de gezochte grootheid uit de vergelijking, de exegetische analyse (exegeticus, van  $\epsilon\chi\eta\gamma\eta\sigma\iota = \text{ex\`e}g\grave{e}sis = \text{uitleg}$ ).

In het algemeen noemde hij de analyse:

*Doctrina bene inveniendi in Mathematicis, d.w.z.  
De leer om op de juiste wijze ontdekkingen te doen in de wiskunde.*

Allereerst zette Viète een belangrijke stap vooruit door het consequent invoeren van letternotatie in de rekenkunde, waardoor deze tot algebra kon worden. Van enige symbolische notatie in de rekenkunde was al sprake bij Diophantus (ca. 250 n.C.); bij hem spreekt van gesyncopeerde notatie.

Bombelli (1526–1572) had al een voorzet gegeven. Zelf sprak Viète over *logistica specioso* in tegenstelling tot de *logistica numerosa*, d.w.z. letteralgebra versus rekenkunde met concrete cijfers.

Tot dan had men zich beperkt tot vergelijkingen met één vaste onbekende en met uitsluitend concrete getallen als coëfficiënten. Viète voerde klinkers als *A* en *E* in voor de onbekenden en medeklinkers als *B*, *D*, *Z* voor de bekende grootheden en dat konden zowel getallen als lijnstukken zijn. Alle letters waren hoofdletters. Voor machten van deze grootheden had hij een verbale omschrijving die zijn meetkundige gedachten duidelijk verraadt. Bovendien was de notatie daarvan verschillend voor bekende en onbekende grootheden. Zo omschreef hij de 2e, 3e, 4e machten van bekende grootheden resp. met planum, solidum, plano-planum, maar die van onbekende grootheden met quadratum, cubus, quadrato-quadratum.

Zo schreef hij *B.A quad + C planum.A = D solido*, waar wij –in het voetspoor van Descartes– schrijven:  $bx^2 + c^2x = d^3$ . De meetkundige interpretatie van Viète vereiste natuurlijk homogeniteit van de vergelijking en dat had ook zijn nadelen. Descartes zou daar later van afstappen.

De notatie van Viète was daarom zo belangrijk omdat hij nu in staat was om in algemene termen over een vergelijking van bijvoorbeeld de derde of vierde graad te spreken en niet langer over concrete voorbeelden. (De *Recognitione Aequationum*, 1593). Een belangrijke toepassing lag in het vertalen van een meetkundig probleem naar de algebra. Viète stelde voor de gezochte grootte een algebraïsche vergelijking op, loste deze daarna op en construeerde tenslotte de oplossing.

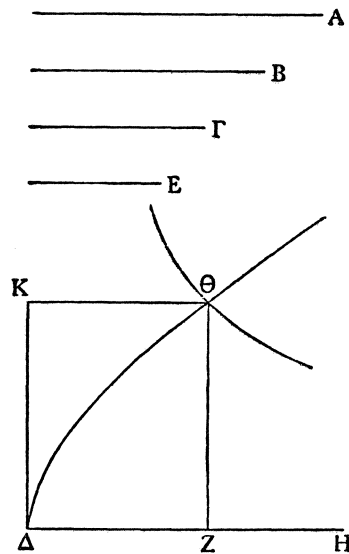
Een zeer eenvoudig voorbeeld: construeer een rechthoek als de oppervlakte gegeven is en de verhouding van de zijden.

Bij Euclides (*El.* VI, 25) vinden we hoe men louter verbaal een oplossing d.m.v. aanpassing van oppervlakken kan aangeven. Bij hem is de oppervlakte dan gegeven als een vierkant en de verhouding van de zijden als die bij een gegeven rechthoek. Voor details wordt de lezer verwezen naar de in de literatuurlijst genoemde *Caleidoscoop van de Wiskunde*.

Viète stelt (in onze notatie) de oppervlakte op  $a^2$ , de verhouding van de zijden op  $p : q$ . Wanneer men nu een zijde  $x$  noemt, dan geldt  $p : q = x : xq/p$ . De andere zijde is dus  $xq/p$  en er geldt dus  $a^2 = qx^2/p$ , waaruit  $x$  met passer en liniaal te construeren is.

Nu kon Viète wel een derde- of vierdegraadsvergelijking algebraïsch oplossen,





FIGUUR 4.

maar voor de constructie van de wortels met passer en liniaal zag men geen kans; eerst in 1837 zou P. L. Wantzel bewijzen dat dit inderdaad in het algemeen onmogelijk is.

Viète stelde daarom het gebruik van andere instrumenten voor en ging niet over tot de methoden die Menaechmus (ca. 350 v. C.) hanteerde, bijvoorbeeld bij de constructie van de beide middelevenredigen  $x$  en  $y$  tussen  $a$  en  $b$ , d.w.z. de grootheden  $x$  en  $y$  die voldoen aan  $a : x = x : y = y : b$ .

Hiervoor geldt  $x^2 = ay$  en  $y^2 = bx$ , maar ook  $xy = ab$ . Eenvoudig ziet men in dat  $x$  voldoet aan  $x^3 = a^2b$ . Menaechmus loste deze vergelijking grafisch op door twee van de door hem ontdekte kegelsneden onderling te snijden. Uiteraard waren deze meetkundig en nog niet analytisch gedefinieerd.

Wij zouden zeggen: de parabolen  $x^2 = ay$  met  $y^2 = bx$  of de hyperbool  $xy = ab$  met  $y^2 = bx$  of met  $x^2 = ay$  (zie afb. 4). Hieruit blijkt dat Viète nog niet is toegekomen aan de analytische meetkunde in de stricte zin van het woord. Hij tekende, behalve cirkel en rechte lijn, geen krommen en gebruikte geen coördinatenstelsel. De belangrijkste blokkade op de weg naar de analytische meetkunde was echter het feit dat bij hem de onbekenden nog vaste onbekenden waren en *geen lopende variabelen*.

Wel komt hem de verdienste toe de algebra als krachtig hulpmiddel bij het oplossen van meetkundige problemen geïntroduceerd te hebben.

De methoden die Euclides gebruikte om vierkantsvergelijkingen op te lossen en allerlei algebraïsche identiteiten te bewijzen met behulp van aanpassing van oppervlakken bleven daarnaast nog lang in gebruik en werden ook nog door Johan de Witt (1623–1672) gehanteerd in zijn *Elementa Curvarum Linearum* (zie aldaar).

Men zou eerder geneigd zijn bij Viète te spreken van een ‘algebraïsche’ meetkunde.

3. In verband met het vervolg van het verhaal moeten we aandacht schenken aan het begrip *locus* (Grieks: *τοπος*). Een goed Nederlands woord hiervoor is *plaats* en tot 1968 mochten we hiervoor nog zeggen *meetkundige plaats*: een puntverzameling die alle punten bevat met een zekere eigenschap en geen andere punten herbergt.

Het begrip stamt uit de Griekse Oudheid. Proclus van Byzantium (410–485) schrijft in zijn Euclidescommentaar:

*Ik noem een plaats (τοπος, locus) de ligging van een lijn of een oppervlak met een en dezelfde eigenschap. Sommige locusproblemen spelen zich af op lijnen en andere op oppervlakken.*

Bij de loci op lijnen kende hij vlakke plaatsen (loci plani) t.w. rechte lijn en cirkel naast ruimtelijke plaatsen (loci solidi). Aan de constructie van deze laatste komt een oppervlak te pas. Voorbeelden daarvan zijn de kegelsneden en (bij Proclus) de spiralen op een cilinder.

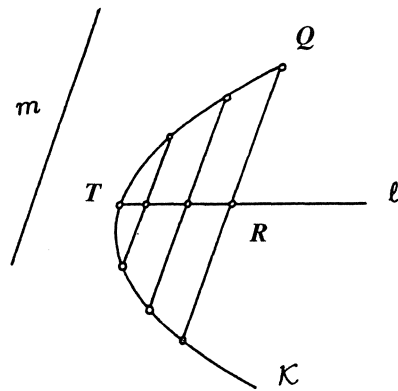
Een derde soort wordt gevormd door de lineaire plaatsen (loci lineares) d.w.z. alle andere vlakke krommen, zoals de quadratrix, de kissoïde, de conchoïde etc., algemeen: de ‘hogere’ krommen.

Euclides schreef een –thans verloren– werk dat bekend is onder de Latijnse titel *Loci ad Superficiem* (plaatsen op een oppervlak). Hierbij is het niet duidelijk of het gaat om krommen op oppervlakken of om (delen van) oppervlakken zelf als plaatsen.

Een analoge indeling hanteerde men m.b.t. meetkundige vraagstukken; de aard van de krommen (loci) die men bij de oplossing te hulp riep, was daarbij bepalend en men sprak dienovereenkomstig van vlakke, ruimtelijke en lineaire problemen.

De genoemde kegelsneden (zoals gezegd, ontdekt door Menaechmus) zijn door Apollonius van Perga (ca. 250–ca. 200) gedefinieerd als doorsnede van een (niet noodzakelijk rechte) cirkelkegel met een plat vlak. Uit deze definitie leidde hij voor elk van de drie typen een karakteristieke eigenschap (symptoma) af.

In de vacancie cursus 1995 heeft dr. Hogendijk daaraan een boeiend betoog gewijd. Voor ons doel, de analytische meetkunde, haal ik hier één zaak in



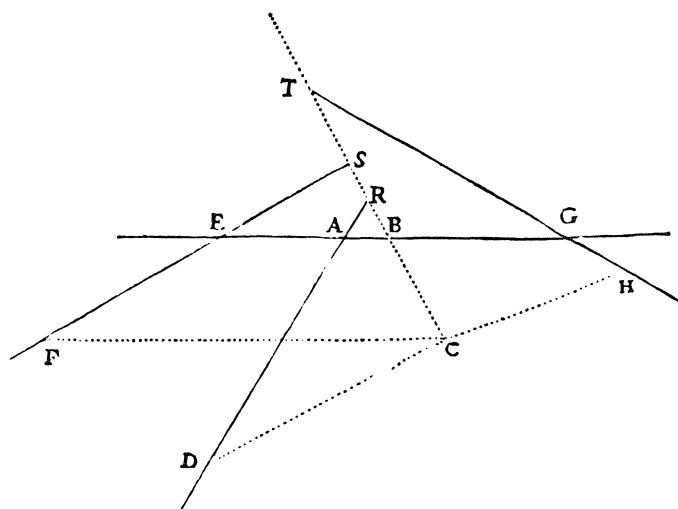
FIGUUR 5.

het bijzonder naar voren en wel de karakteristieke eigenschap van de parabool (zie afb. 5). Deze kromme heeft als symptoma de eigenschap dat bij iedere vooraf gegeven richting een lijn hoort, de bijbehorende middellijn, die weer de eigenschap heeft dat deze alle koorden halveert die in de gegeven richting verlopen.

Deze karakteristieke eigenschap van de parabool, af te leiden uit de situatie in de ruimte, is nu dat voor een willekeurig punt  $Q$  op de kromme geldt:  $QR^2 = p \cdot TR$ . Hierin is  $T$  het snijpunt van de middellijn met de kromme, de bijbehorende top;  $QR$  loopt in de gegeven richting en  $p$  is een lijnstuk dat afhangt van de betreffende middellijn en de bijbehorende parameter of latus rectum wordt genoemd. Dit is een puur meetkundige eigenschap en men moet hierin nog geen analytische meetkunde zien, omdat de kromme zelf deze middellijn inbrengt en niet wordt beschreven op de middellijn als vooraf gegeven abscis-as met  $T$  als oorsprong en  $TR$  en  $QR$  als coördinaten. Wel correspondeert deze eigenschap met de ons bekende topvergelijking van de parabool. Voor ellips en hyperbool gelden analoge eigenschappen, die eveneens met de topvergelijkingen corresponderen.

Een ander zeer bekend voorbeeld uit de Oudheid is wel de locus van drie, vier of meer lijnen, het zogenaamde probleem van Pappus. In moderne taal en algemeen weergegeven, gaat het om het volgende: laat van een aantal lijnen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  ( $n \geq 3$ ) de ligging gegeven zijn. Men kan dan vanuit een zeker punt  $P$  lijnstukken  $PS_1, PS_2, \dots, PS_n$  trekken waarbij  $S_i$  op  $l_i$  ligt en  $PS_i$  een voorgeschreven hoek  $\alpha_i$  maakt met  $l_i$ . Verder is een positieve breuk  $r$  gegeven.

Men vraagt nu naar de locus van de punten  $P$  met de volgende eigenschap: Indien  $n$  even ( $\geq 4$ ) is, zeg  $2m$ , dan geldt



FIGUUR 6.

$$P_1.P_2...P_m/P_{m+1}.P_{m+2}...P_n = r$$

en indien  $n$  oneven ( $\geq 3$ ) is, zeg  $n = 2m - 1$ , dan geldt

$$P_1.P_2...P_m/P_{m+1}.P_{m+2}...P_n.a = r.$$

Hierbij is  $a$  een gegeven positief getal (lijnstuk).

Afbeelding 6 licht dit toe. Deze tekening is afkomstig uit de *Géométrie* van Descartes en het gaat daar om de situatie van het probleem van Pappus voor vier lijnen. De vier lijnen zijn  $EAG$ ,  $TGH$ ,  $RAD$  en  $SEF$ .  $C$  is het punt waarom het gaat en de lijnstukken  $CB$ ,  $CH$ ,  $CD$  en  $CF$  moeten, bij Descartes, voldoen aan de eis  $CB.CH = CD.CF$ ; hij neemt dus  $r$  gelijk aan 1. Pappus beschouwde in eerste instantie de gevallen  $n = 5$  en  $n = 6$ , want dan –zegt hij– kunnen de genoemde producten geïnterpreteerd worden als inhouden van rechthoekige blokken en hij merkt daarbij op dat sommige ‘moderne’ schrijvers ook grotere waarden van  $n$  toelaten en in dit geval de quotiënten interpreteren als producten van verhoudingen. In deze gevallen hadden de genoemde producten immers geen meetkundige betekenis.

4. Wanneer men analytische meetkunde omschrijft als de bestudering van loci met behulp van algebra en een geschikt gekozen coördinatenstelsel, dan ontbrak het na Viète nog aan twee componenten: loci en een coördinatenstelsel.

Fermat (1601–1665) en Descartes (1596–1650) zouden onafhankelijk van elkaar en elk op zijn eigen wijze deze aanvullingen leveren. Beiden ontleenden hun inspiratie aan de Griekse Oudheid.



*Fermat*

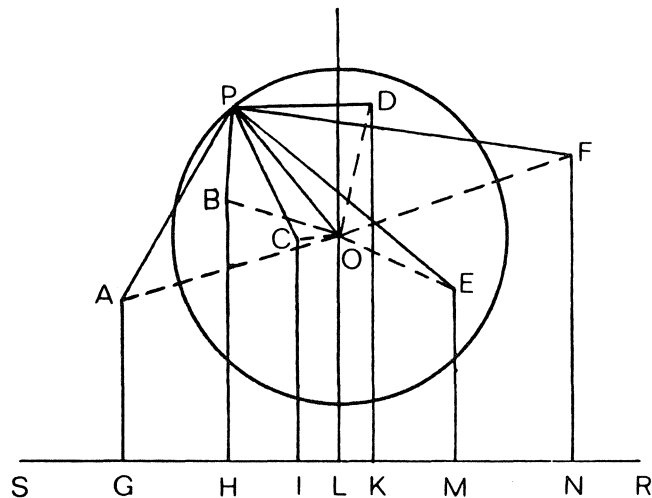
Fermat

In de Middeleeuwen was de belangstelling voor de wiskunde in de Griekse Oudheid nagenoeg tot het nulpunt gedaald, maar in de 16e eeuw bloeide deze weer op. Een direct gevolg was dat men zich waagde aan de reconstructie van geschriften die weliswaar verloren gegaan waren, maar waarvan men het bestaan en een schets van de inhoud kende via commentaren daarop en vooral ook uit het verzamelwerk van Pappus, de *Collectio Mathematica*. Dit werk was in 1588 door Commandinus vertaald uit het Grieks in het Latijn. Aanvankelijk richtte de aandacht zich vooral op de reconstructie van het werk van Apollonius van Perga. Fermat verzorgde een reconstructie van diens *Vlakke Plaatsen (Loci Plani)* en dit bracht hem tot zijn creatie van de analytische meetkunde, die hij uiteenzette in zijn beroemde *Inleiding tot vlakke en ruimtelijke plaatsen (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge)*, een geschrift uit 1629 dat, met een appendix, slechts 11 pagina's telt.

Eén stelling uit de reconstructie van de Loci Plani is vermoedelijk van beslissende invloed geweest voor Fermat en wel deze:

*Indien vanuit een aantal gegeven punten (in het platte vlak) lijnstukken getrokken worden naar een punt en indien de som van de kwadraten van deze lijnstukken gelijk is aan een gegeven oppervlakte, dan ligt het punt op de omtrek van een cirkel waarvan de positie vast ligt.*

In afb.7 zijn  $A, B, C, D, E, F$  de gegeven punten. Het bewijs van Fermat is uiteraard nog puur meetkundig en berust daarop dat hij een rechte  $SR$  kiest zodanig dat de gegeven punten alle aan dezelfde kant daarvan liggen. Vanuit deze punten laat hij hierop loodlijnen neer ( $AG, BH, CI, DK, EM$  en  $FN$ ). Het punt  $L$  op  $SR$  is zodanig gekozen dat  $GL = (GH + GI + GK + GM + GN)/6$ .



FIGUUR 7.

In  $L$  wordt een loodlijn  $LO$  opgericht zó dat  $LO = (AG + BH + CI + DK + EM + FN)/7$ .

De cirkel met  $O$  als middelpunt en met een te berekenen straal, blijkt dan de gezochte plaats te zijn.

Het belangrijke van de oplossing van dit probleem is dat hier zoiets als een abscis-as ( $SR$ ) met een oorsprong ( $G$ ), optreedt en de gegeven punten elk een abscis ( $GH$  etc.) en een ordinaat ( $AG$  etc.) krijgen.

Deze gedachte is fundamenteel en wordt door Fermat in zijn *Isagoge* consequent toegepast, waarbij hij zich bedient van de eerder genoemde notaties van Viète.

In dit werk gaat hij uit van een gegeven vergelijking tussen de (als lijnstukken veronderstelde) abscis en ordinaat van de punten, uitgaande van een abscislijn en een oorsprong daarop en onderzoekt dan de aard van de kromme (locus) die door deze vergelijking wordt voorgesteld.

Een ordinaat-as (wij zouden zeggen een  $y$ -as) ontbreekt nog; deze zou eerst later worden ingevoerd door Claude Rabuel, die in 1730 een commentaar op de *Géométrie* van Descartes uitgaf.

De derde zin van de *Isagoge* legt de visie van Fermat duidelijk vast:

*Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica et simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.*

Vertaald:

*Wanneer in de uiteindelijke vergelijking twee onbekende grootheden voorkomen, dan is er sprake van een locus en het uiteinde van een van deze grootheden beschrijft daarbij een lijn, recht of gebogen; de rechte lijn is enig in zijn soort en eenvoudig, de gebogen lijn heeft oneindig veel variaties: een cirkel, een parabool, een hyperbool, een ellips etc.*

Hierin zit eigenlijk alles wat nog ontbrak: een locus voorgesteld door een vergelijking in twee variabelen, vastgelegd t.o.v. een abscis-as met vaste oorsprong.

De kerngedachte van Fermat is dat hij in eerste instantie uitgaat van een vergelijking tussen twee variabelen, vastgelegd t.o.v. een abscis-as met een vaste oorsprong en dat hij daaruit de eigenschappen van de betreffende kromme afleidt en niet omgekeerd (zoals Descartes), uitgaande van vooraf gegeven eigenschappen van een kromme, de vergelijking van deze kromme opstelt, al had een probleem van dit karakter hem geïnspireerd. Hierbij zij nog opgemerkt dat Fermat zich beperkt tot punten rechts van de oorsprong en boven de as; wij zouden zeggen dat hij zich beperkte tot het eerste kwadrant.

In zijn *Isagoge* stelt hij systematisch de volgende typen vergelijkingen aan de orde (hier gegeven in moderne notatie):

$$ax = by; xy = b^2; x^2xy = ay^2; x^2 = ay;$$

$$b^2 - x^2 = y^2; b^2 - x^2 = ay^2; b^2 + x^2 = ay^2.$$

Uiteraard behandelt hij  $x^2 = ay$  en  $y^2 = ax$  als aparte gevallen.

Een vergelijking als  $b^2 - x^2 = ay^2$  die bij ons inhomogeen is, wordt bij hem geïntroduceerd als volgt: *laat*

$$B^2 - A^2 \text{ een gegeven verhouding hebben tot } E^2$$

en dat betekent voor hem toch weer een homogene vergelijking, die wij zouden schrijven als

$$(b^2 - x^2) : y^2 = p : q.$$

Tot slot behandelt hij ook een vergelijking met een 'gemengde' term, *difficillima omnium aequalitatum*, de moeilijkste van alle vergelijkingen en wel die waarbij

$$B^2 - 2A^2 \text{ gelijk is aan } 2AE + E^2, \text{ voor ons dus } b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2.$$

Hij behandelt dit geval door de abscis-as te draaien over een hoek van  $-45$  graden (uiteraard anders geformuleerd, namelijk via een gelijkbenige rechthoekige driehoek) en leidt uit de voorgaande voorbeelden af dat het hier om een ellips gaat en merkt zonder motivering op, dat de overige gevallen met gemengde termen analoog behandeld kunnen worden.

Overigens zegt hij vaak in dit stuk *dat de overige gevallen op dezelfde manier (non dissimili modo) behandeld kunnen worden.*

In de appendix behandelt hij, zeer in het kort, voorbeelden van hogere machtsvergelijkingen. We lichten er één uit dat kenmerkend is voor zijn inventiviteit.

Het gaat om  $x^4 + b^3x + c^2x^2 = d^4$ , dus, zegt hij,  $x^4 = d^4 - b^3x - c^2x^2$ . Nu voert hij een nieuwe variabele  $y$  in door beide leden gelijk te stellen  $c^2y^2$ , dus  $x^4 = c^2y^2$  en  $d^4 - b^3x - c^2x^2 = c^2y^2$ . De betreffende waarde voor  $x$  is dus de abscis van het snijpunt van de parabool met vergelijking  $x^2 = cy$  en de cirkel met vergelijking  $(d^4 - b^3x - c^2x^2)/c^2 = y^2$ .

Een soortgelijke methode past hij toe bij het bepalen van meerdere middelevenredigen tussen twee grootheden  $a$  en  $b$ .

We zagen al hoe de Grieken met behulp van kegelsneden de beide middelevenredigen tussen  $a$  en  $b$  konden bepalen.

Wanneer het om  $n$  middelevenredigen gaat, dus  $a : x^1 = x^1 : x^2 = \dots = x^n : b$ , dan rekent men eenvoudig na dat  $x^1$  voldoet aan  $x^{n+1} = a^n b$ .

In het geval  $n = 6$ , dus  $x^7 = a^6 b$ , stelt hij  $x^7 = a^6 b = x^4 y^2 b$  en dan geldt  $x^3 = y^2 b$  en  $x^4 y^2 = a^6$ . Men moet dus slechts de *derdegraadskrommen*  $x^3 = by^2$  en  $x^2 y = a^3$  met elkaar snijden.

Tot slot merken we nog op dat Fermat veel van zijn technieken uit de analytische meetkunde toegepast heeft bij zijn aanzetten tot de infinitesimaalrekening in zijn *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam, etc.* van 1637.

Hierin bepaalde hij o.a. de raaklijn aan een kromme op een manier die eenvoudiger is dan die waarop Descartes dit deed. Ook introduceerde hij daarin de gegeneraliseerde parabolen en hyperbolen  $y = x^n$  en  $y = x^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), waarvan we zojuist een toepassing zagen.

5. Zoals we zagen heeft Fermat reeds in 1629 met zijn *Isagoge* de grondslag gelegd voor de analytische meetkunde, maar doordat hij zijn vondsten in hoofdzaak schriftelijk ter kennis bracht van zijn mathematische vrienden in Parijs – meestal via Pater Marin Mersenne (1588–1648) – en doordat zijn werk eerst in 1679 in gedrukte vorm verscheen, trok hij minder de aandacht dan degene aan aan wie men het eerst denkt als schepper van de analytische meetkunde: René Descartes (1596–1650), die 1637 met zijn *Géométrie* de aandacht van de wiskundige wereld trok.





René Descartes

DISCOURS  
DE LA METHODE  
Pour bien conduire la raison, & chercher  
la verité dans les sciences.  
PLUS  
LA DIOPTRIQUE.  
LES METEORES.  
ET  
LA GEOMETRIE.  
*Qui sont des essais de cete METHODE.*



A LEYDE  
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.  
C I D I D C XXXVII.  
*Avec Privilège.*

Titelblad van *Discours*

Dit werk verscheen als appendix op de *Discours de la Méthode pour bien conduire sa Raison et chercher la Vérité dans les Sciences*.

Het boek verscheen in Leiden, het titelblad vermeldt geen naam, maar het was alom bekend wie de auteur was.

Uitgangspunt en doelstelling waren bij Fermat en Descartes totaal verschillend, maar hun resultaten waren in essentie gelijk.

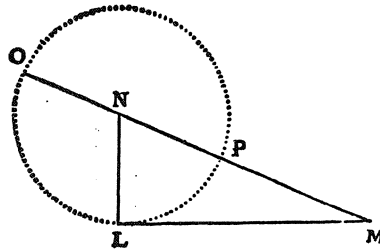
Het doel van Fermat was –geïnspireerd door zijn lectuur van de Griekse mathematiëci en zijn reconstructiepogingen van hun geschriften, alsook door het bestuderen van Viète– de loci te onderzoeken met behulp van Viète's algebra.

Descartes daarentegen had weinig respect voor de Griekse Oudheid, maar wel belangstelling voor een bepaald probleem daaruit: de constructie van de wortels van algebraïsche vergelijkingen. Dit zou hij eveneens doen met behulp van de algebra van Viète, maar dan met zijn eigen notatie: de eerste letters,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ..., van het alfabet voor bekende grootheden, de laatste,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ..., voor de onbekenden en met exponenten om de machten aan te geven.

Een eenvoudig voorbeeld van zo'n constructie vinden we in de *Géométrie* (bldz. 302), een vraagstuk dat lange tijd in meetkundeboeken voor de H.B.S. (waar men geen analytische meetkunde kreeg) figureerde. Het gaat om de vergelijking  $z^2 = az + b^2$  (zie afb. 8). Stelt men de straal  $NL$  van de cirkel met middelpunt  $N$  op  $a/2$ , de lengte van de raaklijn  $LM$  op  $b$ , dan ziet men onmiddellijk dat  $MO = a/2 + \sqrt{a^2/4 + b^2}$ .

Com-  
ment ils  
se resol-  
uent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue ayse-  
ment. Car si l'ay par exemple



$z^2 \propto az + bb$   
ie fais le triangle rectan-  
gle N L M, dont le co-  
sté L M est esgal à  $b$  ra-  
cine quarrée de la quan-  
tité connue  $bb$ , & l'au-  
tre L N est  $\frac{1}{2}a$ , la moi-  
tié de l'autre quantité

connue, qui estoit multipliée par  $z$  que ie suppose estre la  
ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce tri-  
angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L,  
la toute OM est  $z$  la ligne cherchée. Et elle s'exprime  
en cete forte

FIGUUR 8.

Descartes stelt dan zonder meer vast dat dit lijnstuk de onbekende  $z$  is.

Over de andere (negatieve) wortel spreekt hij niet. Elders noemt hij een negatieve wortel *racine fausse*. Wel zegt hij dat het ook anders kan; wellicht dacht hij aan de machtstelling (voor het punt  $M$ ), waaruit direct blijkt dat  $MO$  juist aan deze vergelijking voldoet, immers  $ML^2 = MP \cdot MO$ , dus  $b^2 = (MO - a) \cdot MO$  en dus  $MO^2 = MO \cdot a + b^2$ .

Terloops zij opgemerkt dat Descartes formeel afstand nam van de eis van homogeniteit van de algebraïsche vormen. Zo liet hij wel toe:  $a^2b^2 - b$ , maar zei dat men dit ook kon zien als een derdegraadsvorm, door 1 in te voegen; er geldt dan namelijk  $a^2b^2 - b = a^2b^2/1 - 1^2b$  !!

Hoewel hij, zoals gezegd, weinig op had met de Griekse Oudheid heeft het probleem van Pappus hem gebracht tot de invoering van de analytische meetkunde, d.w.z. 'algebraïsche' meetkunde met coördinaten.

In par.3, afb. 6 is de situatie getekend van het probleem van Pappus voor vier lijnen. De vier lijnen zijn, zoals eerder gezegd,  $EAG$ ,  $TGH$ ,  $RAD$  en  $SEF$ ;  $C$  is het punt waarom het gaat en de lijnstukken  $CB$ ,  $CH$ ,  $CD$  en  $CF$  moeten, bij Descartes, voldoen aan de eis  $CB \cdot CH = CD \cdot CF$  omdat hij 1 (zie par.3) gelijk aan 1 neemt.

Om nu de lengten van deze lijnstukken uit te rekenen, neemt Descartes  $EAG$  als abscis-as en  $A$  als oorsprong; vervolgens stelt hij  $AB$  op  $x$  en  $BC$  op  $y$ .

Hierdoor is  $C$  vastgelegd t.o.v. het gekozen coördinatenstelsel.

Met een regel die in feite de sinusregel is, drukt hij de gezochte lijnstukken uit in  $x$  en  $y$ . Hierbij onderscheidt hij zorgvuldig de mogelijke onderlinge liggingen van de punten op een rechte, bijv. of  $B$  tussen  $C$  en  $R$  ligt, dan wel  $R$  tussen  $C$  en  $B$ . Het blijkt dan eenvoudig dat de betrokken lijnstukken lineaire functies van  $x$  en  $y$  zijn. De gestelde eis leidt dan tot een kwadratische vergelijking in  $x$  en  $y$  en daarmee is zijn analytische meetkunde gecreëerd!

Dat deze methode van abscis -as en  $x$ - en  $y$ - coördinaten algemeen geldig is, drukt hij uit in de zin die wel tot de belangrijkste uit de wiskundeliteratuur behoort

*Je ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont necessairement quelque rapport a tous les points d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, et tous par une mesme.*

Vertaald:

*Ik kan het niet beter zeggen dan dat alle punten die men meetkundig kan noemen, d.w.z. die precies en nauwkeurig gemeten kunnen worden, noodzakelijkerwijze een zekere betrekking hebben tot alle punten van een rechte, welke betrekking voor alle punten dezelfde is.*

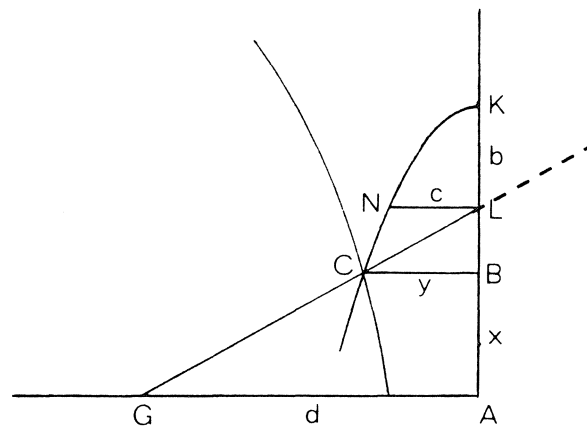
Hiermee geeft Descartes aan dat de abscis en ordinaat van alle punten op een kromme voldoen aan één en dezelfde vergelijking. Het gaat dus niet langer om vergelijkingen met slechts één onbekende, zoals bij Viète, maar om vergelijkingen in twee variabele grootheden.

Toch zijn deze bij Descartes geen doel, maar blijven zij hulpmiddelen bij het oplossen van vergelijkingen met één onbekende.

Hierbij moet worden opgemerkt dat voor Descartes de vergelijking van een kromme nog niet de existentie daarvan garandeerde. Daarvoor moest een constructie met passer en liniaal aangegeven worden of een constructie langs kinematische weg.

In feite was hij meer geïnteresseerd in de constructie dan in de vergelijking van een kromme.

Tot de voor Descartes aanvaardbare kinematische constructies behoorde o.a. de bekende tuinmansconstructie van een ellips, maar bijvoorbeeld ook die waarbij een kromme langs een lijn, loodrecht op de  $x$ -as, voortgeschoven wordt door een draaiende rechte en waarbij het snijpunt van de kromme met deze rechte een nieuwe kromme genereert. In afb. 9 is als voorbeeld voor de schuivende



FIGUUR 9.

kromme de parabool  $CNK$  gekozen en als draaiende rechte de lijn  $GCL$  die om  $G$  ronddraait. Het lijnstuk  $KL$  behoudt de constante waarde  $b$ , zodat bij het ronddraaien van  $GCL$  de parabool langs de verticale lijn wordt voortgeschoven. Het variabele snijpunt  $C$  van de parabool met de rechte genereert dan een nieuwe, voor Descartes acceptabele, kromme.

Dit leidde Descartes tot een nieuwe classificatie van krommen: een genererende met als afstammeling de gegeneerde. Hij maakte als het ware een stamboom van krommen en vermoedde een relatie tussen de graad van de genererende kromme en die van de gegeneerde. Helaas vergiste hij zich daarbij. Hij zag dat het aanvankelijk in de volgende generatie ging om krommen van een of twee graden hoger en zei, extrapolerende, te snel: *& ainsi des autres a l'infini*.

Dit probleem is uitvoerig behandeld door prof. Bos in zijn bijdrage aan de vacatiecursus 1989.

Descartes onderzoekt uitgebreid de tweedegraadslocus die ontstaat bij zijn behandeling van het probleem van Pappus, maar hij gaat niet over tot een iets algemenere behandeling van tweedegraadskrommen zoals Fermat dat deed. Misschien hangt dit samen met het feit dat hij zich niet blind staarde op de kegel-sneden maar een open oog had voor het nieuwere: krommen van hogere graad. Deze komen op natuurlijke wijze aan de orde als hij het probleem van Pappus voor vijf of meer lijnen bespreekt. In die zin is hij dan ook meer een vernieuwer dan Fermat.

Later zou Jan de Witt in zijn *Elementa Curvarum Linearum Liber II* een nagenoeg volledig overzicht van alle tweedegraadskrommen geven.

Het uiteindelijke doel van Descartes blijkt uit de inhoud van het derde en laatste boek van de *Géométrie*, met de veelzeggende titel *De la construction des Problèmes, qui sont solides ou plusque Solides* en dat geheel gewijd is aan het grafisch oplossen van hogere-machtsvergelijkingen, in het bijzonder die van de derde en vierde graad. Het is in feite een ‘algebraboek’.

De toevoeging *plusque Solides* slaat op vergelijkingen die slechts opgelost kunnen worden door krommen van een graad hoger dan twee onderling te snijden. Loci solidi zijn immers slechts kegelsneden.

In het kader van de Problèmes solides toont hij o.a. aan dat vergelijkingen van de graad drie of vier altijd kunnen worden opgelost men behulp van kegelsneden in combinatie met cirkels en rechte lijnen.

Een enkel voorbeeld (Boek III, p. 397, 398), maar in onze notatie: de vergelijking  $x^3 = px + q$  kan worden opgelost door de cirkel  $x^2 + y^2 = qx + (p+1)y = 0$  te snijden met de parabool  $y = x^2$ , hetgeen eenvoudig blijkt door eliminatie van  $y$ .

Later zou René de Sluse (1622–1685) dit probleem uitputtend behandelen; daarop komen wij nog terug. Opmerkelijk is dat Descartes zonder bewijs ervan uitgaat dat de bekende klassieke problemen (trisectie van de hoek, verdubbeling van de kubus en kwadratuur van de cirkel) niet met passer en liniaal zijn op te lossen.

Zoals eerder vermeld, zou dit eerst in 1837 worden aangetoond door P.L. Wantzel.

Met dit derde boek van de *Géométrie* zijn we eigenlijk al buiten de analytische meetkunde geraakt. Hierbij herhalen we dat het Descartes feitelijk meer te doen was om het constructief oplossen van vergelijkingen en minder om de analytische meetkunde als zodanig.

6. Fermat en Descartes hebben dus, onafhankelijk van elkaar, de grondslagen gelegd voor de analytische meetkunde. Toch is de naam van Descartes daaraan blijvend verbonden en is die van Fermat in deze context op de achtergrond geraakt. Men kan daarvoor een verklaring aanvoeren:

Fermat had al in zijn brieven van 1629 de inhoud van de *Isagoge* wereldkundig gemaakt, maar daarmee bereikte hij –de bescheiden en geïsoleerd werkende jurist in Toulouse– slechts via deze brieven een kleine kring van geestverwanten in Parijs. Met zijn bescheiden karakter had hij daar vrede mee: voor hem gaf het oplossen van en probleem voldoende vreugde. Eerst vijftig jaren later, in 1679, verscheen zijn werk in druk.

Descartes, de man die een groot deel van Europa bereisde en minder bescheiden was dan Fermat, maakte zijn werk in 1637 in gedrukte vorm wereldkundig. Daarmeee overschaduwde hij de prestatie van Fermat en daardoor bleef de

naam van Descartes onverbrekkelijk verbonden aan de analytische meetkunde. Daarom zullen we in deze slotparagraaf aandacht geven aan de receptie van het werk van Descartes en de daaruit voortvloeiende verbreiding, die aanvankelijk maar moeizaam verliep.

Om te beginnen werd het werk van Descartes met gemengde gevoelens ontvangen. In de eerste plaats waren daar de tegenstanders die zich liever hielden aan de oude, synthetische meetkunde van de Grieken, maar ook de geïnteresseerde lezers van het boek hadden het er moeilijk mee: het was onsystematisch ingericht en moeilijk te doorgronden.

Misschien was dit opzet. Zo schrijft hij op pagina 301:

*Mais ie ne m'aresté point à expliquer cecy plus en détail, à cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'utilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale, qu' on puisse tirer de cete science.*

Vertaald:

*Maar ik houd me er niet mee op dit meer in bijzonderheden uit te leggen, omdat ik u dan het genoeg zou ontnemen het zelf te ontdekken en uw geest te ontwikkelen door u hierop te oefenen, hetgeen naar mijn mening het voor naamste is dat men aan deze wetenschap kan ontlennen.*

Bovendien was het in het Frans geschreven en niet in de Lingua Franca van de geleerde wereld: het Latijn.

Het is de verdienste van Franciscus van Schooten Jr. (1615–1660) dat hij aan beide bezwaren tegemoet kwam.

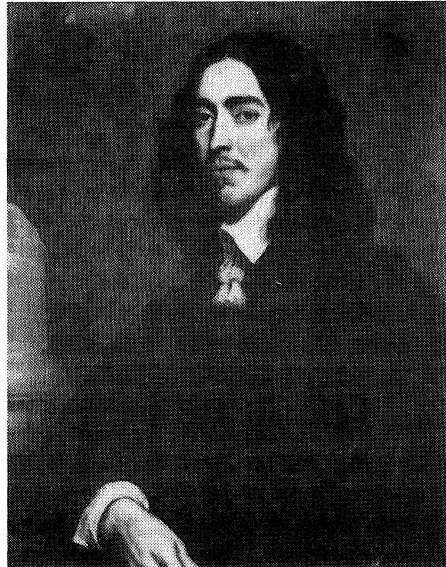
In 1649 verscheen de eerste druk van zijn *Géométrie, à Renato Des Cartes Anno 1637 gallice edita, nunc autem... in Linguam Latinam versa, etc.* Dit werk bevat de volledige vertaling in het Latijn, een uitgebreid verklarend commentaar door Van Schooten en de al eerder verschenen *Notae Breves* van De Beaune. Van Schooten bracht zijn enthousiasme over op zijn leerlingen waaronder Bartholinus, Van Heuraet, Hudde, Christiaan Huygens en vooral ook de latere Raadpensionaris Johan de Witt.

Mede geïnspireerd door het succes van deze geannoteerde uitgave bereidde Van Schooten een tweede druk voor die in twee delen verscheen; het eerste deel in 1659, het tweede deel in 1661, na zijn plotselinge dood op 29 mei 1660. Dit deel werd bezorgd door zijn halfbroer Pieter (1634–1679).

Beide delen bevatten belangrijke bijdragen van genoemde leerlingen. Hiervoor zij de lezer verwezen naar de Vacantiecursus 1995 en naar de inleiding tot de



Franciscus van Schooten jr.



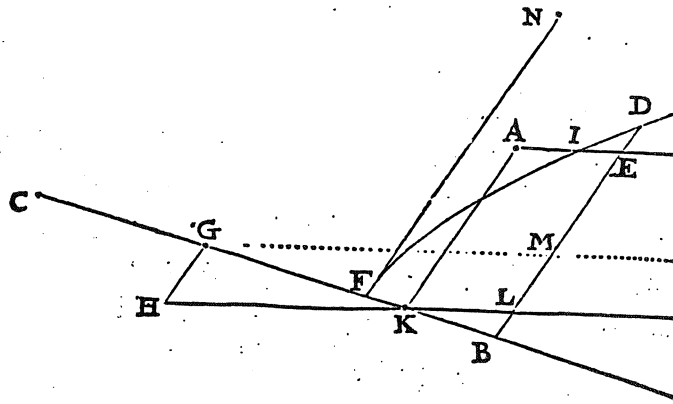
Jan de Witt

(in de literatuurlijst genoemde) vertaling van de belangrijkste bijdrage aan dit tweede deel, namelijk de *Elementa Curvarum Linearum, Liber Primus & Liber Secundus* van de hand van Johan de Witt.

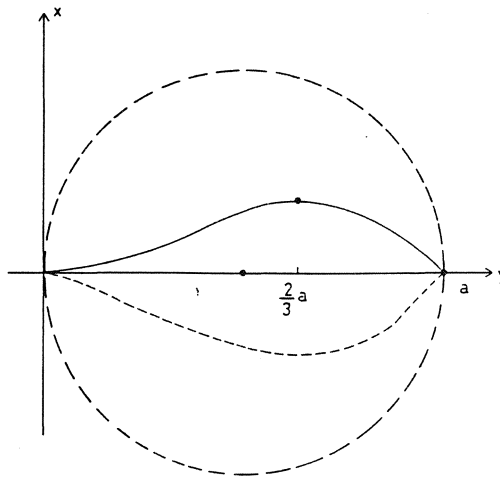
Deze had dit werk in essentie al in 1649 voltooid, maar eerst in 1656 de definitieve vorm daarvan vastgesteld. In die tussentijd werd hij geroepen tot hoge ambten, die een zwaar beslag legden op zijn beschikbare tijd: eerst Pensionaris van Dordrecht en vanaf 1653 Raadpensionaris van Holland. Bij het persklaar maken van dit werk ondervond hij veel steun van zijn vriend en leermeester, de zojuist genoemde Van Schooten.

In het eerste deel, *Liber Primus*, gaat De Witt synthetisch te werk. Daarin geeft hij zuiver planimetrische definities van de kegelsneden, *zonder enig ruimtelijk lichaam daarbij te betrekken (absque ulla solida consideratione)*. Hij brengt de kegelsneden kinematisch voort, d.w.z. door middel van draaiende hoeken en schuivende lijnen resp. draaiende lijnen en schuivende hoeken, toont aan dat zij de overeenkomstige eigenschappen (symptomata) hebben, waarmee Apollonius ze gekarakteriseerd had. Uit deze, zijn eigen, definities leidt hij dan allerlei eigenschappen af.

Het tweede deel kan met recht het eerste leerboek van de analytische meetkunde genoemd worden. Johan de Witt kiest bij elk probleem een abscis-as, een vaste oorsprong daarop en een vaste hoek waaronder de ordinaten (lijnstukken) worden uitgezet. Ook bij hem ontbreekt de  $y$ -as nog en ook hij beperkt zich tot één helft van de abscis-as; wij zouden zeggen: hij laat alleen positieve  $x$ -waarden toe; incidenteel worden ordinaten in negatieve richting uitgezet (zie



FIGUUR 10.



FIGUUR 11.

afb. 10). Systematisch worden alle tweede-gradskrommen behandeld en zorgvuldig geclassificeerd.

Karakteristiek voor zijn werkwijze is dat hij uitgaat van een vergelijking tussen de abscis en ordinaat (de  $x$  en de  $y$ ) van elk punt van de kromme en daaruit afleidt welk soort kegelsnede (volgens zijn definitie daarvan) aan de orde is. Dit staat in tegenstelling tot de nog te bespreken werkwijze van Wallis, die de vergelijking als definitie beschouwt.



Van de *Geometria* verschenen nagenoeg ongewijzigde herdrukken in 1683 en 1695. Als leerboek werd het werk van Johan de Witt eerst in 1710 opgevolgd door dat van Christian Wolff (1679–1754).

In Engeland werden de ideeën van Descartes gretig opgepakt door John Wallis (1616–1703). Deze verzorgde niet, zoals Van Schooten, een uitgave van de *Géométrie* en ook geen commentaar daarop; hij ging -in de lijn van Descartes- zelfstandig te werk. In 1655 verscheen zijn *Tractatus de sectionibus conicis* waarin de kegelsneden geheel algebraïsch gedefinieerd en behandeld werden.

Hij ging daarbij uit van de kenmerkende eigenschappen van de kegelsneden, zoals Apollonius die meetkundig had afgeleid. Eerder zagen wij al wat het symptoma voor de parabool is en ook dat de formulering daarvan bij Apollonius nog geen analytische meetkunde inhield.

Wallis zette nu de beslissende stap door een middellijn van de parabool als abscis-as te nemen en de ordinaten uit te zetten in de daaraan toegevoegde richting. In plaats van  $x$  en  $y$  hanteert hij bij de parabool daarvoor letters  $d$  en  $p$ , zodat op grond van het symptoma bij Apollonius de vergelijking daarvan bij Wallis wordt:  $p^2 = ld$  ( $l$  van latus rectum, hetgeen een ander woord is voor parameter).

Bij de ellips en hyperbool kiest hij voor  $x$  en  $y$  de letters  $d$  en  $e$ , resp.  $d$  en  $h$ .

De vergelijkingen daarvan blijken dan te zijn  $e^2 = ld - ld^2/t$ , resp.  $h^2 = ld + ld^2/t$ , waarbij  $t$  staat voor de lengte van de hoofdas. Dit zijn dus de bekende topvergelijkingen, die de namen van de krommen ten duidelijkste illustreren.

Vanaf dit moment vergeet Wallis het meetkundige verleden van de krommen en beschouwt hij deze vergelijkingen als hun definities, waaruit hij vervolgens algebraïsch hun eigenschappen afleidt. Opgemerkt zij dat hij de eerste was die systematische negatieve coördinaten gebruikte.

De resultaten die hij bereikte paste hij –evenals Fermat– toe bij zijn studie van de infinitesimaalrekening, neergelegd in zijn *Arithmetica infinitorum*.

Helaas vond hij weinig respons bij zijn Engelse collegae, omdat die meer op hadden met de vertrouwde synthetische meetkunde en mede doordat hij zich in Frankrijk vijanden maakte, was aanvankelijk het effect van zijn gedachten op dit gebied gering, zowel in Engeland alsook op het vaste land van Europa.

Een vergelijking met het werk van Johan de Witt ligt voor de hand en er is wel eens gesuggereerd dat De Witt beïnvloed zou zijn door Wallis. Dit is niet erg aannemelijk: we zagen hierboven dat De Witt zijn werk al in principe in 1649 voltooid had. Ook zagen we dat van beiden de uitgangspunten principieel verschillend zijn. Bovendien kwam Wallis niet tot een classificatie van kegelsneden zoals Johan de Witt die uitvoerde.

Van de verbroeders van de ideeën van Descartes vermelden we verder de eerder genoemde René de Sluse (1622–1685) die in zijn *Mesolabum, seu, etc.*, van 1659 de constructie van de wortels van veel algebraïsche vergelijkingen uitvoerde d.m.v. snijding van kegelsneden onderling en ook met andere mechanische hulpmiddelen.

Hij bewees de stelling dat voor iedere derde- of vierdegraadsvergelijking, bij gegeven kegelsnede, een cirkel gevonden kan worden die door snijding met deze kegelsnede de oplossingen geeft. Interessant is hierbij te vermelden dat in de *Mathematical Intelligencer* (Vol. 19, nr. 2, 1997) een artikel van Videla voorkomt waarin dit probleem met de Galois-theorie wordt aangepakt.

Een interessante bijdrage gaf De Sluse aan de analytische meetkunde door de introductie van nieuwe krommen, de zogenaamde ‘parels van Sluse’.

Deze werden door hem in eerste instantie meetkundig gedefinieerd, maar later in een vergelijking vastgelegd. In feite gaat het om generalisaties van de cirkelvergelijking, zoals Fermat de parabool en de hyperbool generaliseerde.

Deze krommen hebben als algemene vergelijking:  $b^{n+t-m}x^m = y^n(a-x)^t$ , met natuurlijke  $m, n, t$ . Een voorbeeld:  $a^2x = y^2(a-y)$  (zie afb.11, waarin, zoals Sluse deed, de kromme ‘symmetrisch is gemaakt’). Hiermee trad hij buiten de beperkte kring van de kegelsneden.

Tot de latere commentatoren behoren o.a. La Hire (1640–1718), die enige systematiek aanbracht in de terminologie van de analytische meetkunde en in zijn *Les lieux géométriques* van 1679 als eerste de vergelijking van een oppervlak opstelde; zijn voorbeeld was gedefinieerd als de locus van de punten in de ruimte die aan een zekere, eenvoudige eis voldoen. Fermat en Descartes hadden slechts vage toespelingen gemaakt op driedimensionale analytische meetkunde.

De eerste systematische behandeling van de analytische meetkunde in drie dimensies is van de hand van Antoine Parent (1666–1716) die in 1700 een verhandeling daarover aanbood aan de Académie des Sciences.

Tot slot noemen we nog Jacques Ozonam (1640–1717) die in 1687 een werk schreef, geordend volgens een indeling die gebruikelijk was geworden en dat nog lang zou blijven nl. eerst aandacht voor de kegelsneden, dan meetkundige plaatsen en tenslotte constructies van de wortels van algebraïsche vergelijkingen.

Tegen die tijd was echter de belangstelling voor de analytische meetkunde – althans voorlopig – zeer afgenomen ten gunste van de belangstelling voor de opkomende differentiaal- en integraalrekening: Leibniz met zijn *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* van 1684 (een geschrift van slechts zes pagina’s!) en Newton met zijn *Principia* van 1687.

Op dit punt zullen we dan ook *Het begin van de analytische meetkunde* beëindigen.

De geïnteresseerde lezer die de analytische meetkunde in zijn verdere ontwikkeling wil volgen, wordt verwezen naar het boek van Boyer dat in de literatuurlijst voorkomt. Dit werk wordt ook aanbevolen voor de hier behandelde periode.

Ook twee deeltjes van Ivor Thomas worden zeer aanbevolen aan degenen die wel eens willen zien hoe de Grieken nu precies hun problemen formuleerden. Thomas geeft een bloemlezing van Griekse teksten, geflankeerd door een betrouwbare vertaling in het Engels.

#### LITERATUUR

1. BOS, H.J.M. Descartes en het begin van de Analytische Meetkunde. In: *Vacantiecursus 1989, Wiskunde in de Gouden Eeuw*. CWI-Syllabus 25. Amsterdam, 1989.
2. BOYER, C.B. *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. New York, 1956.
3. COOLIDGE, J.L.
  - *The Mathematics of Great Amateurs*. New York, 1963.
  - *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces*. Oxford, 1945.
  - *A History of Geometric Methods*. New York, 1954.
4. DESCARTES, RENÉ
  - *Oeuvres de Descartes*, ed. CH. ADAMS ET P. TANNERY, Vol. VI, Paris, 1902.
  - *Oeuvres Philosophiques*, ed. F. ALQUIÉ. Paris, 1963, 1967, 1973.
  - *The Geometry of René Descartes*, translated from the French and Latin by DAVID EUGENE SMITH and MARIA L. LATHAM. New York, 1954.
  - *Geometrie*, Deutsch herausgegeben von LUDWIG SCHLESINGER. Darmstadt, 1969.
5. DIJKSTERHUIS, E.J. *De Elementen van Euclides I & II*. Groningen, 1930.
6. EDWARDS JR, C.H. *The Historical Development of the Calculus*. New York, 1979.
7. FLADT, K. *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Grades*. Stuttgart, 1963.
8. GEER, P. VAN. Johan de Witt als wiskundige. *Nieuw Archief voor Wiskunde (2)* XI, (1915), pp. 98–126.
9. GILLESPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography* (VIII Vol.). New York, 1981.
10. GROOTENDORST, A.W. De Meetkundige Algebra bij Euclides. In: *Vacantiecursus 1991, Meetkundige Structuren*. CWI-Syllabus 28. Amsterdam 1991.
11. GROOTENDORST, A.W. De ‘Kegelsneden’ bij Johan de Witt. In: *Vacantiecursus 1995, Kegelsneden en Kwadratische Vormen*. CWI-Syllabus 40. Amsterdam 1995.

12. GROOTENDORST, A.W., VAN ZANTEN A.J. ET AL. *Caleidoscoop van de Wiskunde*. Delft, D.U.P. 1995.
13. GROOTENDORST A.W. *Jan de Witt Elementa Curvarum Linearum – Liber Primus, Tekst, Vertaling, Inleiding, commentaar*. Amsterdam 1997.
14. HEATH, SIR TH.L.
  - *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary by SIR THOMAS L. HEATH, Vol. I-III. New York, 1956.
  - *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*. Cambridge, 1961.
  - *A History of Greek Mathematics*, Vol. I & II. Oxford, 1965.
15. HOFMANN, J.E. *Frans van Schooten der Jüngere*. Wiesbaden, 1962.
16. HOGENDIJK, J.P. Kegelsneden in de Griekse Oudheid. In: *Vacantie cursus 1995, Kegelsneden en Kwadratische Vormen*. CWI-Syllabus 40. Amsterdam, 1995.
17. KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, 1972.
18. LINDBERG, DAVID C. *The Beginnings of Western Science* Chicago, 1992.
19. MAANEN, J.A. VAN *Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands*. Utrecht, 1987.
20. MAHONEY, M.S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*. New Jersey, 1973.
21. SCOTT, J.F.
  - *The Mathematical Work of John Wallis, D.D., F.R.S. (1616-1670)*. London 1938.
  - *The Scientific Work of René Descartes*. London, 1976.
22. STECK, M. *Proklos Diadochus (410-485); Kommentar zum Ersten Buch von Euklids "Elementen"*. Halle, 1945.
23. THAER, C. *Euklid, die Elemente; Buch I-XIII*. Herausgegeben und ins Deutsche Übersetzt von Clemens Thaer. Darmstadt, 1962.
24. THOMAS IVOR. *Greek Mathematical Works with an English Translation I & II*. (Loeb Serie). London, 1967.
25. VER EECKE, PAUL. *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Oeuvres traduites pour la première fois du Grec en Français*. Bruges, 1928.
26. WAERDEN, B.L. VAN DER. *Ontwakende Wetenschap*. Groningen, 1950.

## De vlakke meetkunde terug op school

J. van de Craats

KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda

e-mail: jcr@euronet.nl

### 1. INLEIDING

In de Inleiding van zijn boek *De logische grondslagen der Euklidische meetkunde* uit 1937 bracht B.L. van der Waerden de kloof ter sprake die er destijds bestond ‘... tussen de analytische, projectieve, differentiaal- en hogere meetkunde enerzijds, die de student aan de universiteit leert, en de elementaire, axiomatisch opgebouwde, euclidische meetkunde, die hij als leraar later op school moet onderwijzen.’ Met dit boek, de uitwerking van een collegereeks uit 1930/31 aan de Groningse universiteit, wilde Van der Waerden die kloof overbruggen. Hij richtte zich dus tot de universitaire wiskundestudenten die het leraarschap ambiëerden, en in die tijd was dat nog de overgrote meerderheid. Maar de situatie is sindsdien ingrijpend veranderd, niet alleen op het gebied van de beroepskeuzemogelijkheden voor wiskundestudenten, maar ook op het vlak van de schoolwiskunde. De axiomatische behandeling van de vlakke meetkunde in de klas behoort reeds lang tot het verleden, en we hebben zelfs een periode gehad waarin de meetkunde vrijwel volledig van het schooltoneel verdwenen was.

Toch is het interessant dat Van der Waerdens citaat duidelijk maakt dat de euclidische, axiomatische behandeling van de vlakke meetkunde ook toen al niet meer behoorde tot de hoofdstroom van de wiskunde, en dat er dus in feite een einde was gekomen aan een tijdperk van meer dan twintig eeuwen waarin deze opbouw als het fundament van de wiskunde zelf was gezien. Een behandeling op school van de grondslagen van de meetkunde volgens de axiomatische methode miste dus ook toen al een groot deel van haar wiskundige bestaansgrond, en dat heeft waarschijnlijk in niet geringe mate bijgedragen aan de teloorgang van de schoolmeetkunde. Een teloorgang die dan ook niet door invloeden van buitenaf, maar vooral vanuit de wiskunde zelf is teweeggebracht. Pas later is men zich gaan realiseren dat met het afschaffen van de euclidische meetkunde ook de oefeningen in redeneren en bewijzen waren verdwenen, en dat daarmee toch een belangrijk vormend onderdeel van het onderwijs in de knel was geraakt. Daarnaast bleek dat een totaal gebrek aan meetkundige ervaring en inzicht toch wel een probleem vormde, niet alleen bij de wiskundestudie, maar ook bij een aantal technische studierichtingen. De ‘aanschouwelijke’ meetkunde die thans in de onderbouw en in het wiskundeprogramma van havo B een belangrijke rol speelt, vormt daarop een zinvol antwoord, maar redeneren en bewijzen spelen in die meetkunde eigenlijk geen enkele rol. Hoe zou het ook kunnen? Er zijn geen fundamentele waarop men bouwen kan en er zijn geen spelregels waaraan men

zich te houden heeft. Het gaat er voornamelijk om meetkundige eigenschappen van ruimtelijke figuren op te sporen en er af en toe wat aan te rekenen.

In het nieuwe vwo-profiel Natuur en Techniek is een domein Vlakke Meetkunde ter grootte van 60 uur opgenomen met redeneren en bewijzen als expliciete leerdoelen. Toch is het niet de bedoeling om de oude axiomatische euclidische meetkunde weer terug te halen. De argumenten tegen een dergelijke opbouw zijn namelijk nog onverkort geldig. De twee belangrijkste zijn:

1. De axiomatische opbouw plaatst de vlakke meetkunde in een geïsoleerde positie ten opzichte van de rest van de wiskunde en de toepassingen van de wiskunde in de natuurwetenschappen. Zo is er geen natuurlijke band met de analyse, waarin men grafieken tekent in een coördinatenvlak en oppervlakten van vlakdelen berekent met behulp van de integraalrekening. Evenmin liggen er directe verbindingen met de lineaire algebra en de fascinerende meetkunde van fractals, vreemde attractoren en de Mandelbrot- en Juliaverzamelingen.
2. Een strikt logische axiomatische opbouw van de stof verloopt uiterst moeizaam; men moet een lange weg vol voetangels en klemmen afleggen, waarbij in het begin veel energie gestoken moet worden in het bewijzen van ‘vanzelfsprekende’ stellingen. Op school is deze aanpak volstrekt onhaalbaar. Ook vroeger werden daarom allerlei fundamentele kwesties onder het vloerkleed geveegd in de hoop dat de leerlingen er geen kritische vragen over zouden stellen.

### 1.1. Zijn de axioma's consistent?

Daar komt nog iets bij. Zoals bij elk axiomatisch gedefinieerd systeem in de wiskunde, kan de vraag naar de consistentie van de axioma's uiteindelijk niet genegeerd worden: is het uitgesloten dat een keten van logische gevolgtrekkingen uit de axioma's tot een tegenspraak leidt? Deze vraag wordt in de wiskunde altijd beantwoord door een *model* te geven, dat wil zeggen een bekende wiskundige structuur die aan de axioma's voldoet. Zou het nieuwe axiomastelsel inconsistent zijn, dan zou die structuur ook niet als wiskundig object kunnen bestaan. Consistentie is dus relatief: als men aanneemt dat zo'n bekende structuur op een consistente basis rust, kan men concluderen dat het nieuwe axiomastelsel, waar die bekende structuur een realisering van is, evenmin tot tegenspraken kan leiden. Op deze manier worden nieuwe axiomatische structuren ingepast in het grote bouwwerk van de wiskunde. Het gevoel van zekerheid dat de meeste wiskundigen koesteren, berust daarbij op het besef dat men aan de gehele wiskunde op die manier een gemeenschappelijk fundament kan geven. Zo'n fundament is bijvoorbeeld de verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel. Bij een axiomatische fundering van de euclidische vlakke meetkunde kan men als model de  $\mathbb{R}^2$  nemen, waarbij men dan op de bekende wijze punten, lijnen, afstanden, hoeken, etc., definieert. Daarbij moeten de axioma's zoals Euclides die formuleerde, worden aangevuld op een manier die bijvoorbeeld door Hilbert is aangegeven, of op een daarmee equivalente wijze. Ook het geciteerde boek van Van der Waerden bevat zo'n volledig axiomastelsel. Zowel Hilbert als Van der Waerden sluiten hun opbouw inderdaad af met een beschrijving van  $\mathbb{R}^2$  als model om de consistentie van hun axioma's te rechtvaardigen.

### 1.2. De euclidische ruimte als reële vectorruimte

De axiomatisch gedefinieerde euclidische meetkunde onderscheidt zich van de meeste andere axiomatisch gedefinieerde wiskundige structuren door het feit dat alle modellen ervan equivalent zijn. Anders gezegd, elk model van de euclidische vlakke meetkunde is isomorf met de  $\mathbb{R}^2$  die voorzien is van het standaardinproduct. Het daarom niet van wezenlijk belang op welke wijze men het euclidische vlak definieert, via axioma's of via een aanpak waarbij de  $\mathbb{R}^2$  centraal staat. Het uiteindelijke resultaat is hetzelfde, alleen de weg waarlangs het wordt bereikt, verschilt. De keuze die men maakt voor een bepaalde presentatie kan door allerlei motieven worden ingegeven. Men kan bijvoorbeeld uit historische interesse kiezen voor een axiomatische behandeling, of omdat men de draagwijdte en de onderlinge afhankelijkheid van bepaalde axioma's wil onderzoeken. Tegen zo'n aanpak op school zijn hierboven echter al doorslaggevende bezwaren aangevoerd.

Bij de 'koninklijke weg' die in de wiskunde thans gebruikelijk is, neemt men de verzameling  $\mathbb{R}$  van de reële getallen als uitgangspunt, waarna men een  $n$ -dimensionale *euclidische ruimte* definieert als een  $n$ -dimensionale reële vectorruimte voorzien van een inwendig product. Omdat bewezen kan worden dat elke  $n$ -dimensionale euclidische ruimte isomorf is met  $\mathbb{R}^n$  voorzien van het standaardinproduct  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , kan men zich bij het in kaart brengen van de euclidische meetkunde tot dit laatste geval beperken. Bij de vlakke euclidische meetkunde is  $\mathbb{R}^2$  met het standaardinproduct dan het uitgangspunt. Punten, lijnen, afstanden, hoeken en alle verdere meetkundige begrippen kunnen binnen dit kader netjes worden gedefinieerd.

Hoewel ook een dergelijke opbouw van de euclidische vlakke meetkunde op school niet volledig gerealiseerd kan worden – pas bij een wiskundestudie op de universiteit of de lerarenopleiding kunnen alle details hiervan worden ingevuld – kan men toch wel een aanpak kiezen die hier goed op voorbereidt. In feite past zo'n benaderingswijze ook uitstekend bij de intuïtieve en aanschouwelijke manier waarop thans in de basisvorming de meetkunde wordt verkend. Daarbij werkt men immers ook vrijelijk met coördinaten (meestal in de vorm van ruitjespapier) wanneer dit van pas komt. Wil men in de bovenbouw bij de verdere exploratie van de vlakke meetkunde ook de aspecten redeneren en bewijzen tot hun recht laten komen, dan moet men echter zorgen voor een stevig fundament van intuïtief duidelijke uitgangspunten waarvan de kenner weet dat ze met enige wiskundige techniek volledig te rechtvaardigen zijn. Je zou die uitgangspunten *basisstellingen* kunnen noemen. Ze zullen, anders dan de verdere stellingen die in het domein Vlakke Meetkunde ter sprake komen, in de klas niet worden bewezen. Bij de hieronder gepresenteerde opzet, die gebruik maakt van slechts één basisstelling, hoeft de leraar een geïnteresseerde leerling echter niet met een kluitje het riet in te sturen, want zoals we zullen zien is het bewijs van die basisstelling ook voor vwo-ers met enig doorzettingsvermogen best te volgen.

Voordat we een schets geven van zo'n behandeling van de vlakke meetkunde in de bovenbouw, wijden we eerst nog enige woorden aan het spanningsveld tussen de meetkunde en de wereld om ons heen, en aan het voortraject, de

meetkunde in de onderbouw.

### 1.3. De meetkunde en de werkelijkheid

De werkelijkheid vormt de inspiratiebron van de wiskunde, ook bij de meetkunde. In reële situaties waarin we behoefte hebben aan het toepassen van de vlakke euclidische meetkunde (uit respect voor Euclides blijven we deze meetkunde naar hem noemen, ook al kiezen we voor een andere opbouw) is er altijd sprake van *punten*, *lijnen* en *afstanden* in een *vlak*. In werkelijkheid zijn dat onvolmaakte objecten en grootheden: een vlak is nooit volmaakt vlak, punten en lijnen hebben altijd een zekere dikte, lijnen zijn nooit volmaakt recht, afstanden zijn nooit volmaakt nauwkeurig te meten. Zoals dat ook altijd in de fysica gebeurt, gebruiken we een geïdealiseerd model om toch greep op die werkelijkheid te krijgen. Daarin hebben punten geen afmetingen, hebben lijnen geen dikte, strekken lijnen zich onbegrensd naar twee kanten uit, hebben lijnstukken een welbepaalde lengte, geldt de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken, etc. En daarin kunnen we overal waar we maar willen een *rechthoekig coördinatenstelsel* kiezen.

Die keuzevrijheid zal de belangrijkste pijler zijn van de opbouw die ons voor ogen staat. Maar eerst brengen we een aantal meetkundige begrippen in herinnering waarvan de leerling zich in de onderbouw reeds een intuïtief beeld moet hebben gevormd. Het gaat dan om zaken als punten, lijnen, halve lijnen, hoeken, lijnstukken, evenwijdige lijnen, loodlijnen, gelijkbenige driehoeken, gelijkzijdige driehoeken, trapezia, parallellogrammen, ruiten, rechthoeken en vierkanten, de afstand tussen twee punten, de afstand van een punt tot een lijn en de elementaire eigenschappen van de cirkel.

Daarnaast zal de leerling in de onderbouw ook reeds vertrouwd zijn gemaakt met translaties, lijnspiegelingen en rotaties. Voor de intuïtieve begripsvorming kan men daarbij tegenwoordig dankbaar gebruik maken van het *kopieerapparaat* en *transparanten*. Translaties, lijnspiegelingen en rotaties kan men duidelijk maken door figuren op een transparant te kopiëren en met de transparant daadwerkelijk deze bewegingen uit te voeren; bij lijnspiegelingen moet de transparant dan om de spiegelas worden omgeklapt. De vrije keuze van coördinaten kan men illustreren door een transparant waarop een rechthoekig coördinatenstelsel in de vorm van een assenkruis met een bijbehorend vierkantenrooster is aangebracht, op een willekeurige plaats op het tekenvlak te leggen. Bij het werken met coördinaten zal de leerling ook al hebben kennisgemaakt met de *vergelijkingen* waarmee lijnen en cirkels kunnen worden beschreven.

Ook de begrippen congruentie en gelijkvormigheid kunnen met transparanten worden verklaard: twee figuren  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathcal{F}_2$  heten *congruent* als men  $\mathcal{F}_1$ , gekopieerd op een transparant, zó op  $\mathcal{F}_2$  kan leggen dat het beeld van  $\mathcal{F}_1$  volledig met  $\mathcal{F}_2$  samenvalt. Daarbij mag men de transparant ook omklappen; in dat geval spreekt men van een *indirecte* of gespiegelde congruentie. Wanneer men de transparant eerst moet vergroten of verkleinen om te bewerkstelligen dat het beeld van  $\mathcal{F}_1$  met  $\mathcal{F}_2$  samenvalt, is er sprake van *gelijkvormige figuren*. Bij congruente figuren zijn overeenkomstige afstanden en hoeken gelijk, bij gelijkvormige figuren zijn overeenkomstige hoeken gelijk en overeenkomstige



verhoudingen van afstanden.

## 2. COORDINATENSTELSELS

In aansluiting op de hierboven beschreven intuïtieve begripsvorming in de meetkunde van de onderbouw gaan we uit van een ‘euclidisch vlak’, dat wil zeggen een door de werkelijkheid geïnspireerd wiskundig model waarin sprake is van ‘punten’, ‘lijnen’ en ‘afstanden’ (tussen puntenparen), en waarin we een zekere vrijheid hebben in het kiezen van (rechthoekige) *coördinaten*. Hoe ver die vrijheid strekt, zullen we zo dadelijk duidelijk maken, maar eerst preciseren we wat we verstaan onder het kiezen van zo’n coördinatenstelsel.

**DEFINITIE 2.1 (TOEGELATEN COORDINATEN)** *Onder het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in een euclidische vlak verstaan we het aanbrengen van een één-aan-één-correspondentie tussen de punten van het vlak en de elementen van  $\mathbb{R}^2$ . Het element  $(x, y)$  van  $\mathbb{R}^2$  dat behoort bij het punt  $P$  noemen we het coördinatenpaar, of ook wel kortweg de coördinaten van  $P$ . We eisen dat deze correspondentie voldoet aan de volgende voorwaarden:*

1. *Elke lijn van het vlak worden gegeven door een vergelijking van de vorm  $ax + by + c = 0$  waarin  $a$  en  $b$  niet beide 0 zijn.*
2. *De afstand  $d(P_1, P_2)$  tussen twee punten  $P_1$  en  $P_2$  met coördinaten  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$  is gelijk aan  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .*

Een coördinatenstelsel dat aan deze voorwaarden voldoet, zullen we in het vervolg een *toegelaten coördinatenstelsel* noemen.

Dat het überhaupt mogelijk is om in een euclidisch vlak zo’n coördinatenstelsel te kiezen, zou men zelfs op kunnen vatten als de *definitie* van een euclidisch vlak: een wiskundige structuur waarin ‘punten’, ‘lijnen’ en ‘afstanden’ gedefinieerd zijn, heet een *euclidisch vlak* als daarin zo’n toegelaten coördinatenstelsel kan worden gekozen. De  $\mathbb{R}^2$  zelf is een voorbeeld van zo’n structuur. Maar deze overwegingen behoeven natuurlijk niet op school verteld te worden. Daar is het euclidische vlak een idealisatie van het papier waarop de figuren getekend worden. Het kiezen van coördinaten kan, zoals gezegd, geïllustreerd worden door een transparant met daarop een rechthoekig coördinatenrooster over het tekenpapier te leggen. Daarbij staan we ook toe dat de transparant eerst omgeklapt wordt zodat de ‘achterkant’ boven komt te liggen. Anders gezegd, we laten zowel coördinatenstelsels toe waarbij het draaien rond de oorsprong over 90 graden van de positieve  $x$ -as naar de positieve  $y$ -as met de klok mee geschiedt, als coördinatenstelsels waarbij dit tegen de klok in gebeurt.

### 2.1. Coördinatentransformaties

Direct duidelijk is dat men uit één toegelaten coördinatenstelsel op oneindig veel manieren andere stelsels kan maken. Bijvoorbeeld door een translatie, dat wil zeggen dat men voor vaste  $p$  en  $q$  nieuwe coördinaten  $(x', y')$  definieert door

$$\begin{aligned}x' &= x - p \\y' &= y - q\end{aligned}$$

Ook dat nieuwe stelsel is een toegelaten coördinatenstelsel. De oorsprong  $(x', y') = (0, 0)$  in het nieuwe stelsel had in het oude stelsel de coördinaten  $(x, y) = (p, q)$ . De lijn die in het oude stelsel als vergelijking

$$ax + by + c = 0$$

had, krijgt nu de vergelijking  $a(x' + p) + b(y' + q) + c = 0$ , dat wil zeggen

$$ax' + by' + (c + ap + bq) = 0.$$

Dit is inderdaad weer een vergelijking van de vorm die in voorwaarde (1) van definitie 2.1 geëist wordt. Aan de afstand verandert niets, want

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}.$$

Een ander voorbeeld van zo'n *coördinatentransformatie*, dat wil zeggen de overgang op een ander toegelaten coördinatenstelsel, is

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Hierbij wordt het coördinatenstelsel als het ware omgeklapt om de  $y$ -as. We noemen dit ook wel het *spiegelen* van het coördinatenstelsel in de  $y$ -as. Evenzo kan men het stelsel spiegelen in de  $x$ -as

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

of puntspiegelen in de oorsprong:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Bij die laatste coördinatentransformatie hoeft de transparant niet omgeklapt te worden, want puntspiegelen in de oorsprong is hetzelfde als het draaien over een halve slag rond de oorsprong.

Het is overigens van belang op te merken dat bij coördinatentransformaties de figuren in het vlak zelf niet getransformeerd worden: slechts hun coördinaten veranderen. Iets beeldender uitgedrukt: slechts de transparant waarop het coördinatenstelsel getekend staat, wordt verplaatst, niet de onderliggende meetkundige figuren. Dat we voor coördinatentransformaties toch ook termen als translatie, rotatie, spiegeling, etc., gebruiken, zou verwarring kunnen geven als men zich hiervan niet bewust is.

## 2.2. De basisstelling

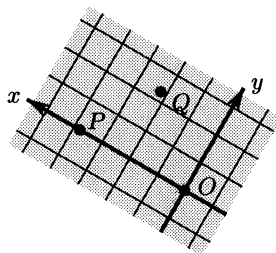
De mogelijkheden voor coördinatentransformaties zijn met het bovenstaande nog lang niet uitgeput: spiegelingen in andere lijnen, rotaties over willekeurige hoeken en combinaties van zulke transformaties kunnen ook gebruikt worden. Alleen worden de vergelijkingen waardoor die transformaties gegeven worden,

dan in het algemeen ingewikkelder, en dus ook de bewijzen dat het daarbij inderdaad om toegelaten coördinatenstelsels gaat. Op school kan men het onderzoek naar de verschillende mogelijkheden kortsluiten door de volgende basisstelling zonder bewijs te accepteren. Wij geven er hier wel een bewijs van. Een intuïtieve motivering van de geldigheid van de basisstelling zal in de klas geen problemen geven. Het grote belang van deze stelling is dat die ons in staat stelt om bij een meetkundig probleem een coördinatenstelsel te kiezen dat zo goed mogelijk aansluit bij de specifieke situatie.

**STELLING 2.1 (BASISSTELLING)** *In het euclidische vlak kan men bij elk drietal punten  $O$ ,  $P$  en  $Q$  die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat*

1. *het punt  $O$  de coördinaten  $(0, 0)$  heeft,*
2. *het punt  $P$  de coördinaten  $(p, 0)$  heeft voor zekere  $p > 0$ ,*
3. *het punt  $Q$  de coördinaten  $(q_1, q_2)$  heeft voor zekere  $q_1$  en  $q_2$  met  $q_2 > 0$ .*

Bij een intuïtieve motivering hiervan neme men een transparant met daarop een coördinatenstelsel. De oorsprong daarvan wordt op  $O$  gelegd en de positieve  $x$ -as langs de halve lijn  $OP$ . Blijkt  $Q$  dan in het bovenhalfvlak te liggen, dan is ook aan (3) voldaan. Zo niet dan klapt men de transparant om de lijn  $OP$  om (zie figuur 1).



FIGUUR 1. De coördinatenkeuze van de basisstelling.

**BEWIJS** van de basisstelling:

We gaan ervan uit dat in het euclidische vlak reeds een toegelaten coördinatenstelsel aanwezig is. We hebben een euclidisch vlak immers gedefinieerd als een wiskundige structuur met punten, lijnen en afstanden die de eigenschap heeft dat men daarin zo'n toegelaten coördinatenstelsel kan kiezen.

1. (*Existentie*).

Stel dat in het oorspronkelijke coördinatenstelsel geldt  $O = (a_1, a_2)$ ,  $P = (b_1, b_2)$  en  $Q = (c_1, c_2)$ . Pas dan eerst de volgende coördinatentransformatie toe

$$x' = x - a_1, \quad y' = y - a_2.$$

Hierdoor gaat  $O$  over in de oorsprong, terwijl  $P$  en  $Q$  nu de coördinaten

$$P = (b_1 - a_1, b_2 - a_2), \quad Q = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

krijgen. Noem  $p = d(O, P) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ .

De coördinatentransformatie

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{b_1 - a_1}{p} x' + \frac{b_2 - a_2}{p} y' \\ y'' &= -\frac{b_2 - a_2}{p} x' + \frac{b_1 - a_1}{p} y' \end{aligned}$$

levert een nieuw coördinatenstelsel waarin  $P = (p, 0)$  en nog steeds  $O = (0, 0)$ . Men verifieert gemakkelijk dat ook dit een *toegelaten* stelsel is (de ervaren lezer herkent in de coëfficiënten cosinussen en sinussen, en in de transformatie een draaiing om  $O$ ). Inderdaad gaan lineaire vergelijkingen over in lineaire vergelijkingen, en door uitschrijven kan men controleren dat afstanden niet veranderen:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x''_1 - x''_2)^2 + (y''_1 - y''_2)^2} &= \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Wanneer in het laatste coördinatenstelsel de tweede coördinaat van  $Q$  positief is, is dit reeds het gezochte stelsel. In het andere geval moeten we nog een spiegeling in de  $x$ -as toepassen.

## 2. (Uniciteit).

Stel dat er twee toegelaten coördinatenstelsels zijn met de gewenste eigenschappen. De coördinaten van een punt  $X$  in die stelsels zullen we aangeven met  $(x_1, x_2)$ , resp.  $(x'_1, x'_2)$ . In beide stelsels heeft  $O$  de coördinaten  $(0, 0)$ . Ook de coördinaten van  $P$  zijn in beide stelsels gelijk, want  $p > 0$ ,  $p' > 0$  en  $p^2 = d(O, P)^2 = p'^2$ . Voor een willekeurig punt  $X$  geldt nu

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1'^2 + x_2'^2 \quad (= d(O, X)^2) \\ (x_1 - p)^2 + x_2^2 &= (x_1' - p)^2 + x_2'^2 \quad (= d(P, X)^2) \end{aligned}$$

en dit geeft na uitwerken  $x_1 = x_1'$  en  $x_2 = \pm x_2'$ . Neemt men  $X = Q$ , dan geldt  $q_2 > 0$  en  $q'_2 > 0$ , dus  $q_2 = q'_2$ . Zou nu voor zekere  $X \neq Q$  gelden dat  $x_2 = -x_2'$  dan is enerzijds

$$d(X, Q)^2 = (x_1 - q_1)^2 + (x_2 - q_2)^2$$

en anderzijds

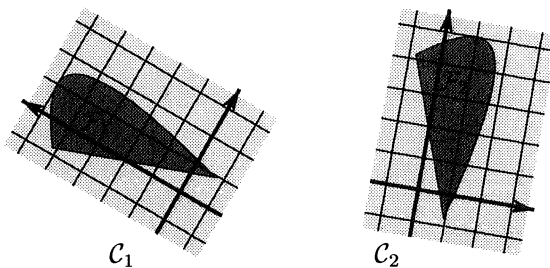
$$d(X, Q)^2 = (x_1' - q_1')^2 + (x_2' - q_2')^2 = (x_1 - q_1)^2 + (-x_2 - q_2)^2.$$

Hieruit volgt dat  $x_2 = 0$ . In alle gevallen geldt dus  $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$ .  $\square$

## Congruente figuren

Hierboven hebben we al uitgelegd hoe de begrippen congruentie en gelijkvormigheid in de klas met behulp van transparanten duidelijk gemaakt kunnen worden. We kunnen het begrip congruentie ook als volgt in termen van toegelaten coördinatenstelsels beschrijven.

DEFINITIE 2.2 Twee figuren  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathcal{F}_2$  heten congruent wanneer het mogelijk is twee toegelaten coördinatenstelsels te kiezen zo, dat  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathcal{F}_2$  daarin op dezelfde wijze worden beschreven, dat wil zeggen dat er met elk punt  $P_1$  in  $\mathcal{F}_1$  een punt  $P_2$  in  $\mathcal{F}_2$  correspondeert zo dat de coördinaten van  $P_1$  in het ene stelsel gelijk zijn aan die van  $P_2$  in het andere stelsel (zie ook figuur 2).



FIGUUR 2. Coördinatenstelsels en congruente figuren.

### Opgaven

We gaan ervan uit dat in het euclidische vlak een toegelaten coördinatenstelsel aanwezig is. De coördinaten in dat stelsel worden aangegeven met  $(x, y)$ .

2.1. Bewijs dat elk van de volgende coördinatentransformaties weer een toegelaten coördinatenstelsel geeft. Beschrijf ook in woorden op welke wijze de transparant met het coördinatenstelsel bij deze coördinatentransformatie moet worden verplaatst.

- $x' = y, \quad y' = x.$
- $x' = -y, \quad y' = x.$
- $x' = 2 - x, \quad y' = y.$
- $x' = 2 - x, \quad y' = 2 - y.$
- $x' = x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}, \quad y' = -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}.$

2.2. Bewijs dat er door de volgende coördinatentransformaties *geen* toegelaten coördinatenstelsels ontstaan.

- $x' = x + y, \quad y' = -x + y.$
- $x' = x + y, \quad y' = y.$
- $x' = 2x, \quad y' = 2y.$
- $x' = 2x, \quad y' = \frac{1}{2}y.$

2.3. Laat gegeven zijn een lijn  $\ell$  en een punt  $P$  niet op  $\ell$ .

- a. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin  $\ell$  de vergelijking  $y = 0$  heeft en  $P$  de coördinaten  $(0, p)$  voor zekere  $p > 0$ .
- b. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin  $P$  de coördinaten  $(0, 0)$  heeft en  $\ell$  gegeven wordt door de vergelijking  $y = a$  voor zekere  $a > 0$ .
- c. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin  $\ell$  de vergelijking  $x = 0$  heeft en  $P$  de coördinaten  $(p, 0)$  voor zekere  $p > 0$ .

### 3. EEN SCHETS VAN DE OPBOUW VAN DE MEETKUNDE

Uitgaande van de Basisstelling en het hierboven nader gepreciseerde congruentiebeprijp is het eenvoudig om de vlakke meetkunde van de onderbouw onduubbelzinnig te grondvesten. De vrijheid bij het kiezen van een geschikt coördinatenstelsel is daarbij zo'n krachtig hulpmiddel, dat het nauwelijks nodig is methoden uit de vectormetkunde of de lineaire algebra te hulp te roepen. Zo is het bijvoorbeeld niet nodig om te werken met parametervoorstellingen of inwendige producten; de afstandsdefinitie is eigenlijk het enige wat gebruikt wordt. Men kan dus heel snel de aanwezige voorkennis recapituleren en nader preciseren, waarna direct nieuwe, onverwachte meetkundige resultaten kunnen worden afgeleid en bewezen. We zullen nu een dergelijke opbouw schetsen.

#### 3.1. Lijnen

Ook in de door ons gekozen opbouw van de meetkunde ontkomen we niet aan een nadere precisering van een aantal 'vanzelfsprekende' begrijpen en eigenschappen. Omdat het hierbij gaat om zaken waarmee iedere leerling al op een intuïtieve manier kennis heeft gemaakt, kunnen we ons beperken tot een beknopte en wiskundig elegante samenvatting. Voor de gevorderde leerling is de belangrijkste boodschap dat het inderdaad mogelijk is om al die begrijpen en eigenschappen onduubbelzinnig en logisch sluitend vanuit de basis, dat wil zeggen de structuur van de reële getallen en de hierboven vermelde basisstelling, op te bouwen.

**STELLING 3.1** *Twee verschillende lijnen hebben ten hoogste één gemeenschappelijk punt.*

**BEWIJS.**

Als de twee lijnen  $\ell_1$  en  $\ell_2$  gegeven worden door de vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{en} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

dan hebben ze een gemeenschappelijk punt dan en slechts dan als hun vergelijkingen een gemeenschappelijke oplossing  $(x, y)$  hebben. Wanneer  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  is, is er precies één snijpunt. Wanneer  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  is er of geen snijpunt, of de beide linkerleden zijn op een factor na gelijk. In dat laatste geval vallen de twee lijnen samen.  $\square$

Als er inderdaad zo'n *snijpunt* is, spreekt men over *snijdende* lijnen, en anders over *evenwijdige*, of ook wel over *parallele* lijnen.

STELLING 3.2 *Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.*

BEWIJS.

Er is hoogstens één zo'n lijn op grond van de vorige stelling. Dat er ook altijd zo'n lijn bestaat, ziet men door op te merken dat als de twee punten in een zeker toegelaten coördinatenstelsel gegeven worden door  $(x_1, y_1)$ , resp.  $(x_2, y_2)$ , de lijn met vergelijking

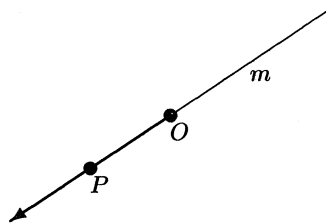
$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

door die punten gaat. □

Twee verschillende punten  $O$  en  $P$  bepalen een *lijnstuk*  $OP$ , bestaande uit alle punten  $Q$  op de lijn door  $O$  en  $P$  waarvoor geldt  $d(O, Q) + d(Q, P) = d(O, P)$ . De punten  $O$  en  $P$  heten de *eindpunten* van het lijnstuk.

De *lengte* van een lijnstuk is de afstand van de beide eindpunten. Lijnstukken met dezelfde lengte zijn congruent. Men spreekt bij congruente lijnstukken ook wel, enigszins slordig, van *gelijke* lijnstukken.

Een punt  $O$  op een lijn  $m$  verdeelt die lijn in twee *halve lijnen*, beide met *eindpunt*  $O$ . Zo'n halve lijn geven we vaak aan door twee punten ervan te noemen: het eindpunt en een ander punt, in deze volgorde. Zo is in figuur 3 de halve lijn  $OP$  met eindpunt  $O$  getekend.



FIGUUR 3. De halve lijn  $OP$  met eindpunt  $O$ .

STELLING 3.3 *Als een punt  $P$  niet op een lijn  $m$  ligt, is er precies één lijn door  $P$  evenwijdig aan  $m$ .*

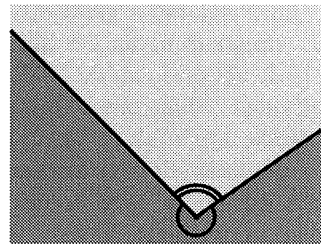
BEWIJS.

Kies toegelaten coördinaten zo, dat  $m$  gegeven wordt door  $y = 0$ . Als in dit stelsel  $P = (p, q)$  dan heeft elke lijn door het punt  $P$  een vergelijking van de vorm  $a(x - p) + b(y - q) = 0$ , en alleen als  $a = 0$  heeft zo'n lijn geen punt gemeen met  $y = 0$ . De enige lijn door  $P$  evenwijdig aan  $y = 0$  is dus de lijn  $y = q$ . □

### 3.2. Hoeken

Ook in deze paragraaf komen uitsluitend 'vanzelfsprekende' begrippen en eigenschappen aan de orde. We beginnen met een precisering van het begrip 'hoek'.

DEFINITIE 3.1 *Een hoek is een deel van het vlak dat begrensd wordt door twee halve lijnen met hetzelfde eindpunt. Dat punt heet het hoekpunt, en de halve lijnen heten de benen van de hoek. Als de benen niet samenvallen, begrenzen ze twee vlakdelen, en dus ook twee hoeken; men noemt die hoeken complementair (zie figuur 4). Vormen de benen samen een volledige lijn, dan zijn de twee complementaire hoeken congruent; zo'n hoek heet dan een gestrekte hoek. Is dat niet het geval, dan bevat precies één van beide hoeken een gestrekte hoek. Die hoek noemt men dan een inspringende hoek.*



FIGUUR 4. Complementaire hoeken.

Twee elkaar snijdende lijnen verdelen het vlak in vier hoeken met hun snijpunt als gemeenschappelijk hoekpunt. Hoeken die daarbij naast elkaar liggen, vormen samen een gestrekte hoek. Hoeken die tegenover elkaar liggen, zijn congruent (zie ook opgave 3.2.1).

DEFINITIE 3.2 *Zijn bij twee elkaar snijdende lijnen alle vier de hoeken congruent, dan zegt men dat de lijnen elkaar loodrecht snijden. De hoeken noemt men dan recht.*

*Elke hoek die niet recht is, maar die wel bevat is in een rechte hoek, heet een scherpe hoek.*

*Elke hoek die niet recht of scherp is, maar die wel bevat is in een gestrekte hoek, heet een stompe hoek*

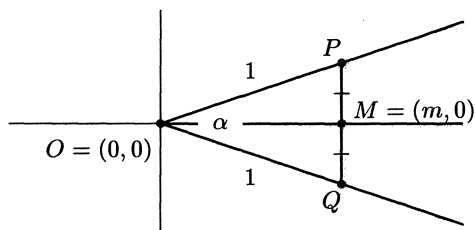
*Elke hoek die een gestrekte hoek bevat, heet een inspringende hoek.*

In figuur 4 zien we een stompe hoek en een inspringende hoek.

### Bissectrices

Laat een niet-inspringende, niet-gestrekte hoek  $\alpha$  gegeven zijn met hoekpunt  $O$ . Kies punten  $P$  en  $Q$  op de benen, op elk been één, beide met afstand 1 tot  $O$ , en laat  $M$  het midden zijn van het lijnstuk  $PQ$ . Op grond van de Basisstelling is er dan precies één toegelaten coördinatenstelsel waarin  $O = (0, 0)$ ,  $M = (m, 0)$  met  $m > 0$  en  $P = (p_1, p_2)$  met  $p_2 > 0$ . Stel  $Q = (q_1, q_2)$ . Omdat  $M$  het midden is van  $PQ$ , moet gelden dat  $p_2 + q_2 = 0$ , dus  $q_2 = -p_2$ . Omdat  $p_1 + q_1 = 2m$  en  $p_1^2 + p_2^2 = q_1^2 + q_2^2 = 1$  volgt hieruit  $p_1 = q_1 = m$ . De coördinaten van  $P$  en  $Q$  zijn dus resp.  $(m, p_2)$  en  $(m, -p_2)$  (zie figuur 5).



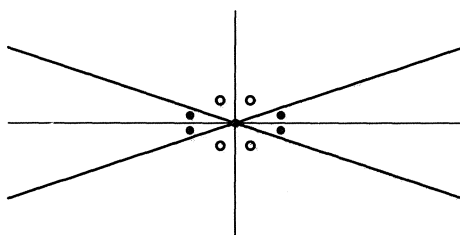
FIGUUR 5. De bissectrice  $OM$  van hoek  $\alpha$ .

DEFINITIE 3.3 *Met de bovenstaande notaties heet de halve lijn  $OM$  de bissectrice (ook wel: deellijn) van hoek  $\alpha$ .*

De bissectrice verdeelt hoek  $\alpha$  in twee congruente delen. Het verlengde van de bissectrice verdeelt de complementaire hoek in twee congruente delen. Bij een gestrekte hoek verdeelt de lijn door het hoekpunt loodrecht op de benen de hoek in twee congruente delen. Voor elke hoek kan men dus op deze manier de bissectrice definiëren als de halve lijn binnen de hoek die de hoek in twee congruente delen verdeelt.

STELLING 3.4 *Bij twee elkaar snijdende lijnen snijden de bissectrices van de vier hoeken elkaar loodrecht.*

BEWIJS. zie figuur 6.

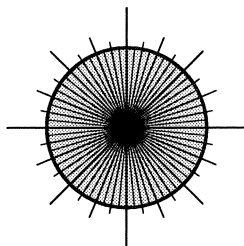


FIGUUR 6. De bissectrices snijden elkaar loodrecht

### Hoekmeting

De coördinaatassen vormen vier rechte hoeken die de eenheidscirkel in vier congruente delen verdelen. Elk van die rechte hoeken kan door de bissectrice in twee congruente delen worden verdeeld, die op hun beurt weer kunnen worden gehalveerd, etc. Zie figuur 7. Op die manier ontstaat op de eenheidscirkel een binaire schaalverdeling waarmee men een willekeurige hoek met de oorsprong als hoekpunt kan meten, dat wil zeggen dat men de grootte ervan met een reëel getal kan uitdrukken in een gekozen hoekeenheid. Kiest men die eenheid zo dat de gestrekte hoek de getalswaarde 180 krijgt, dan ontstaat de traditionele

hoekmeting in graden. Neemt men voor de gestrekte hoek de numerieke waarde  $\pi$ , dan krijgt men de in de wiskunde meer gebruikelijke hoekmeting in radialen, die de extra eigenschap heeft dat de hoekgrootte samenvalt met de lengte van de cirkelboog die de hoek op de eenheidscirkel uitsnijdt.

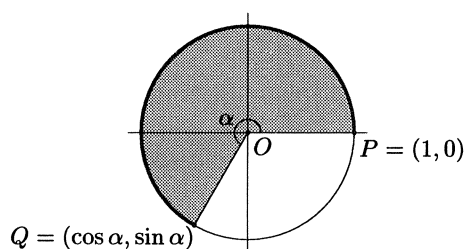


FIGUUR 7. Binaire schaalverdeling op de eenheidscirkel door voortgezette hoekhalveringen.

Er geldt algemeen: twee hoeken zijn congruent dan en slechts dan als hun hoekmaten gelijk zijn. In plaats van congruente hoeken zegt men ook vaak (enigszins slordig): *gelijke* hoeken.

### Sinus, cosinus en tangens

Laat een willekeurige hoek  $\alpha$  met hoekpunt  $O$  gegeven zijn. Kies punten  $P$  en  $Q$  op de benen met een afstand 1 tot  $O$ , en kies toegelaten coördinaten zo dat  $O = (0, 0)$ ,  $P = (1, 0)$  en  $Q = (q_1, q_2)$  met  $q_2 > 0$  bij een scherpe, rechte of stompe hoek, en  $q_2 < 0$  bij een inspringende hoek. De coördinaten  $q_1$  en  $q_2$  van  $Q$  noemt men dan de *cosinus*, resp. de *sinus* van die hoek. Notatie:  $\cos \alpha$  en  $\sin \alpha$ , dus  $Q = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Zie figuur 8.



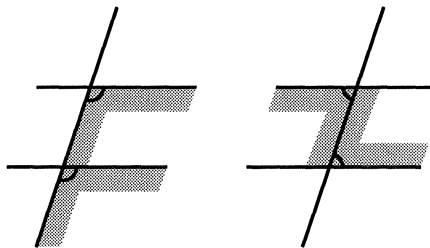
FIGUUR 8. De cosinus en de sinus van een hoek.

Door de hoek te meten in radialen worden de sinus en de cosinus functies met domein  $[0, 2\pi]$  en bereik  $[0, 1]$ , en door ze periodiek voort te zetten verkrijgt men de uit de analyse bekende functies  $\alpha \rightarrow \cos \alpha$  en  $\alpha \rightarrow \sin \alpha$ , beide met domein  $\mathbb{R}$  en bereik  $[-1, 1]$ .

Voor  $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$  ( $k$  geheel) definieert men de *tangens* van  $\alpha$ , met notatie  $\tan \alpha$ , door  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ .

### F-hoeken en Z-hoeken

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, ontstaan er bij de twee snijpunten allerlei paren hoeken waarvan men met behulp van een translatie of een puntspiegeling van een geschikt gekozen toegelaten coördinatenstelsel gemakkelijk kan bewijzen dat ze congruent zijn (zie opgave 3.2.2). Naar analogie van de situatie bij de hoofdletters F en Z spreekt men dan van congruente *F-hoeken* en congruente *Z-hoeken* (zie figuur 9).



FIGUUR 9. F-hoeken en Z-hoeken.

### Opgaven

3.2.1. Bewijs dat bij twee elkaar snijdende lijnen overstaande hoeken congruent zijn.

3.2.2. Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn. Bewijs dat corresponderende F-hoeken en corresponderende Z-hoeken congruent zijn.

3.2.3. Hoeveel paren F-hoeken en Z-hoeken zijn er wanneer twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn?

3.2.4. Gegeven is een punt  $P$  met coördinaten  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Bewijs dat er een positief getal  $r$  en een hoek  $\alpha$  met  $0 \leq \alpha < 2\pi$  bestaan zo, dat  $x = r \cos \alpha$  en  $y = r \sin \alpha$ . Bepaal  $r$  en  $\alpha$  voor de volgende punten:

$(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(0, -2)$  en  $(2, -2)$ .

### 3.3. Driehoeken

STELLING 3.5 (COSINUSREGEL) Voor elk drietal verschillende punten  $O$ ,  $P$  en  $Q$  geldt

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2 - 2d(O, P)d(O, Q) \cos \angle POQ.$$

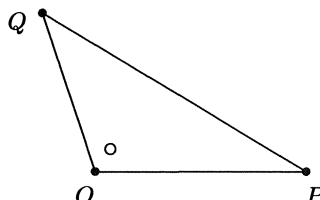
BEWIJS.

Kies coördinaten  $O = (0, 0)$ ,  $P = (p, 0)$  en  $Q = (q_1, q_2)$  met  $p > 0$ ,  $q_2 \geq 0$ . Dan is

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= (p - q_1)^2 + (0 - q_2)^2 = p^2 + q_1^2 + q_2^2 - 2pq_1 \\ &= d(O, P)^2 + d(O, Q)^2 - 2d(O, P)d(O, Q) \cos \angle POQ. \end{aligned}$$

□

Als  $\angle POQ$  recht is, is de cosinus 0, en dan ontstaat hieruit de bekende **Stelling van Pythagoras**.



FIGUUR 10. De cosinusregel en de driehoeksongelijkheid.

**STELLING 3.6 (DRIEHOEKSONGELIJKHEID)** *Voor elk drietal verschillende punten  $O$ ,  $P$  en  $Q$  geldt*

$$d(P, Q) \leq d(O, P) + d(O, Q),$$

*met gelijkheid d.e.s.d. als  $O$  op het lijnstuk  $PQ$  ligt.*

**BEWIJS.**

Schrijf de cosinusregel als

$$d(P, Q)^2 = (d(O, P) + d(O, Q))^2 - 2d(O, P)d(O, Q)(1 + \cos \angle POQ).$$

Hieruit volgt de driehoeksongelijkheid direct, met gelijkheid dan en slechts dan als  $\cos \angle POQ = -1$ , dat wil zeggen als  $O$  op het lijnstuk  $PQ$  ligt. □

**STELLING 3.7 (OMGEKEERDE STELLING VAN PYTHAGORAS)** *Als voor drie verschillende punten  $O$ ,  $P$  en  $Q$  geldt  $d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2$  dan is  $\angle POQ$  recht.*

**BEWIJS.**

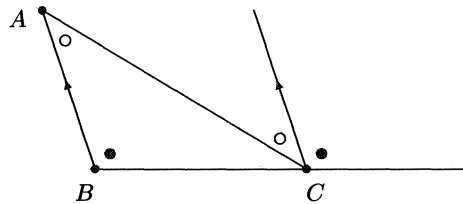
Uit de cosinusregel volgt  $\cos \angle POQ = 0$ , dus inderdaad is dan  $\angle POQ = \pi/2$ .

□

Drie punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , niet op één lijn, vormen tezamen een *driehoek*  $ABC$  met *hoekpunten*  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en *zijden*  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Soms bedoelt men met de zijden slechts de lijnstukken, soms ook de hele lijnen. Ook gebruikt men  $AB$  vaak voor de lengte van de zijde  $AB$ , etc. Men geeft de zijden ook wel met kleine letters aan:  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ , en ook dan geldt dat soms het lijnstuk, soms de gehele lijn, en soms ook de lengte van het lijnstuk bedoeld wordt. Uit de context zal echter steeds duidelijk zijn wat de precieze betekenis is.

Wanneer men voor de zijden van een driehoek de gehele lijnen neemt, ontstaan in elk hoekpunt vier hoeken, die twee aan twee congruent zijn. De hoek waar de driehoek in ligt, noemt men de *binnenhoek*, of kortweg de *hoek* van dat hoekpunt, de twee hoeken die in dat hoekpunt samen met de binnenhoek een

gestrekte hoek vormen, noemt men de bijbehorende *buitenhoeken*. Een halve lijn vanuit een hoekpunt evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde verdeelt de betreffende buitenhoek in twee delen. Het ene deel vormt een paar F-hoeken met een van de twee tegenoverliggende binnenhoeken van de driehoek, het andere deel vormt een paar Z-hoeken met de andere tegenoverliggende binnenhoek (zie figuur 11). Daarmee is bewezen:



FIGUUR 11. De buitenhoekstelling.

STELLING 3.8 (BUITENHOEKSTELLING) *Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de binnenhoeken van de beide andere hoekpunten.*

En tevens ook:

STELLING 3.9 (SOM VAN DE HOEKEN VAN EEN DRIEHOEK) *De hoeken van een driehoek vormen samen een gestrekte hoek. Anders gezegd: de som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan  $\pi$  radialen.*

STELLING 3.10 (F-HOEKEN OF Z-HOEKEN, OMGEKEERD) *Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn, en twee F-hoeken of twee Z-hoeken zijn gelijk, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.*

BEWIJS.

Zouden de lijnen elkaar snijden, dan zou er een driehoek ontstaan met twee hoeken die samen reeds  $\pi$  radialen zijn.  $\square$

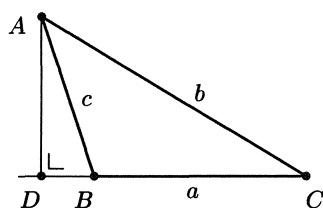
DEFINITIE 3.4 *Een driehoek heet scherphoekig wanneer alle hoeken scherp zijn, rechthoekig wanneer één hoek recht is, en stomphoekig wanneer één hoek stomp is.*

STELLING 3.11 (SINUSREGEL) *In een driehoek ABC geldt*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

BEWIJS. Laat vanuit A de loodlijn AD neer op de (eventueel verlengde) zijde BC, dan is

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AD/c}{AD/b} = \frac{b}{c}$$



FIGUUR 12. De sinusregel.

etc. □

**STELLING 3.12** *Een driehoek is gelijkbenig dan en slechts dan wanneer er twee hoeken gelijk zijn.*

**BEWIJS.**

Merk eerst op: als  $0 < \angle A + \angle B < \pi$  dan geldt  $\angle A = \angle B \iff \sin A = \sin B$ . Pas vervolgens de sinusregel toe. □

Gevolg:

Een driehoek is gelijkzijdig dan en slechts dan als alle hoeken gelijk zijn (en dus gelijk zijn aan  $\pi/3$  radialen).

### Opgaven

3.3.1. Hieronder zijn telkens drie getallen  $a$ ,  $b$  en  $c$  gegeven. Onderzoek in welke gevallen er een driehoek met zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  bestaat. Bepaal in dat geval ook wat voor soort driehoek (scherphoekig, rechthoekig, stomphoekig) het is.

- a.  $a = 2, b = 3, c = 4$ .
- b.  $a = 2, b = 3, c = 5$ .
- c.  $a = 1, b = 3, c = \pi$ .
- d.  $a = 315, b = 1972, c = 1997$ .
- e.  $a = 315, b = 1972, c = 1998$ .
- f.  $a = 4601, b = 4800, c = 6649$ .

3.3.2. Wat is de som van de hoeken van een regelmatige  $n$ -hoek ( $n > 3$ )? En hoe groot is dus elke hoek van een regelmatige  $n$ -hoek?

3.3.3. Bewijs: in elke driehoek  $ABC$  geldt:

$$BC \leq CA \leq AB \iff \angle A \geq \angle B \geq \angle C.$$

3.3.4. Bewijs: als voor de driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  en  $\angle A = \angle A'$ , dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZHZ).

3.3.5. Bewijs: als voor de driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat  $AB = A'B'$ ,  $\angle A = \angle A'$  en  $\angle C = \angle C'$ , dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZHH).

3.3.6. Bewijs: als voor de driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat  $AB = A'B'$ ,  $\angle A = \angle A'$  en  $\angle B = \angle B'$ , dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk HZH).

3.3.7. Toon aan dat het volgende 'congruentiekenmerk' *niet* correct is: als voor de driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  en  $\angle B = \angle B'$ , dan zijn die driehoeken congruent.

3.3.8. Voor twee driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat de hoeken  $B$  en  $B'$  recht zijn, dat  $AB = A'B'$  en dat  $AC = A'C'$ . Bewijs dat  $ABC$  en  $A'B'C'$  congruent zijn.

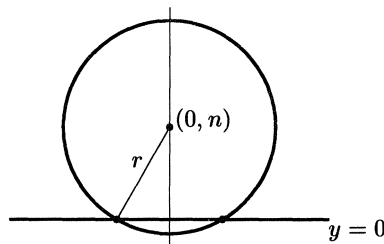
### 3.4. Cirkels

De *cirkel* met *middelpunt*  $M$  en *straal*  $r$  ( $r > 0$ ) bestaat uit alle punten die een afstand  $r$  tot  $M$  hebben. Een lijnstuk dat twee punten van de cirkel verbindt, heet een *koorde*. Een koorde die door het middelpunt gaat, heet een *middellijn*, of ook wel *diameter* van de cirkel. De eindpunten van een diameter noemt men *diametrale punten*.

Punten met een afstand kleiner dan  $r$  tot  $M$  liggen *binnen* de cirkel, punten met een afstand groter dan  $r$  tot  $M$  liggen *buiten* de cirkel. De cirkel met middelpunt  $M = (m, n)$  en straal  $r$  wordt gegeven door de vergelijking

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

STELLING 3.13 Een cirkel en een lijn hebben twee, een of geen punten gemeen.



FIGUUR 13. De snijpunten van een cirkel en een lijn

BEWIJS.

Kies het coördinatenstelsel zo, dat de gegeven lijn de  $x$ -as wordt, en het middelpunt van de gegeven cirkel op de positieve  $y$ -as komt te liggen. Dan moeten we voor het bepalen van de snijpunten het volgende stelsel oplossen

$$\begin{aligned} x^2 + (y - n)^2 &= r^2 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

De oplossingen zijn  $(\pm\sqrt{r^2 - n^2}, 0)$  mits  $r \geq n$ .  $\square$   
 Hebben een lijn en een cirkel slechts één punt gemeen, dan noemt men de lijn een *raaklijn*, en het gemeenschappelijke punt het *raakpunt*.

STELLING 3.14 *De loodlijn op de raaklijn in het raakpunt gaat door het middelpunt van de cirkel.*

BEWIJS.

Zie het bewijs van de vorige stelling. Het raakpunt is dan  $(0, 0)$ .  $\square$

STELLING 3.15 *Twee verschillende cirkels hebben twee, een of geen punten gemeen. Zijn er twee snijpunten, dan liggen die gespiegeld ten opzichte van de verbindingslijn van de beide middelpunten.*

Is er één gemeenschappelijk punt, dan spreekt men over *rakende* cirkels. De raaklijnen aan de twee cirkels in dit punt, het *raakpunt*, vallen dan samen. Het raakpunt ligt op de verbindingslijn van de twee middelpunten, en de gemeenschappelijke raaklijn staat daar loodrecht op. Ligt een van de middelpunten binnen de andere cirkel, dan spreekt men over *inwendig rakende cirkels*, ligt elk middelpunt buiten de andere cirkel, dan spreekt men over *uitwendig rakende cirkels*.

BEWIJS van stelling 3.14

Kies toegelaten coördinaten zo, dat de cirkels gegeven worden door

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{en} \quad (x - m)^2 + y^2 = R^2$$

met  $m > 0$ . Eventuele snijpunten  $(x_s, y_s)$  moeten dan voldoen aan de vergelijking

$$2x_s m - m^2 = r^2 - R^2$$

hetgeen, teruggesubstitueerd in bijvoorbeeld  $x^2 + y^2 = r^2$ , leidt tot

$$y_s^2 = r^2 - \frac{(r^2 - R^2 + m^2)^2}{4m^2}.$$

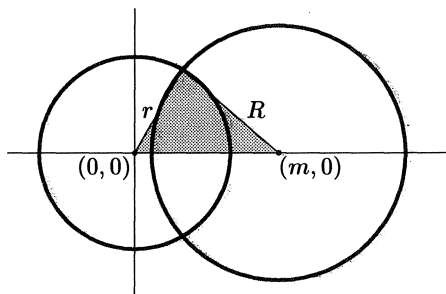
Dit geeft inderdaad nul, een of twee oplossingen, en daarmee even zovele snijpunten, die symmetrisch liggen ten opzichte van de  $x$ -as, de verbindingslijn van de beide middelpunten. Is er één gemeenschappelijk punt, dan moet het op de  $x$ -as liggen, en dan is de gemeenschappelijke raaklijn de verticale lijn door dat punt.  $\square$

Terzijde merken we voor de liefhebbers van elegant rekenwerk op, dat de laatste vergelijking ook geschreven kan worden als

$$y_s^2 = \frac{(R + r + m)(R + r - m)(R - r + m)(-R + r + m)}{4m^2}.$$

Omdat  $R$ ,  $r$  en  $m$  positief zijn, is de eerste van de vier factoren in de teller positief, en kan er van de andere drie hoogstens één negatief zijn. In dat geval zijn de cirkels dus *disjunct*. Als een van de drie factoren nul is, raken de cirkels elkaar; inwendig als  $r = R + m$  of  $R = r + m$ , en uitwendig als  $m = r + R$ . Er





FIGUUR 14. De snijpunten van twee cirkels

zijn twee verschillende snijpunten dan en slechts dan als alle factoren positief zijn. Merk op dat het positief zijn van de laatste drie factoren in het geval van twee snijpunten equivalent is met de drie vormen van de *driehoeksongelijkheid*, toegepast op de grijze driehoek in figuur 14. Daarmee hebben we *en passant* dus een alternatief bewijs voor de driehoeksongelijkheid gekregen.

Een ander resultaat dat nu voor het oprapen ligt, is de formule voor de oppervlakte  $O$  van een driehoek met zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Bekijk daartoe opnieuw in figuur 14 de grijze driehoek die gevormd wordt door de beide middelpunten en het snijpunt in het bovenhalfvlak. Noem  $a = R$ ,  $b = r$  en  $c = m$ . Dit zijn de zijden van de driehoek, en de hoogte is  $h = y_s$ . De oppervlakte, halve hoogte maal basis, is dan  $O = \frac{1}{2}h \cdot c$ . Hieruit volgt met behulp van de boven afgeleide formule voor  $y_s$

$$O^2 = \frac{1}{4}h^2c^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}.$$

Met de notatie  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$  wordt dit de **Formule van Heron**:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

### Opgaven

3.4.1. Bewijs: als voor de driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  geldt dat  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  en  $CA = C'A'$ , dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZZZ).

3.4.2. De hoekpunten van een regelmatige  $n$ -hoek ( $n \geq 3$ ) liggen op een cirkel met straal 1. Bereken de lengte van de zijden.

3.4.3. De zijden van een regelmatige  $n$ -hoek ( $n \geq 3$ ) raken een cirkel met straal 1. Bereken de lengte van de zijden.

3.4.4. Verifieer de formules voor  $y_s^2$ .

3.4.5. Bereken de oppervlakte van de driehoeken van opgave 3.3.1.(a), (b), (d) en (f).

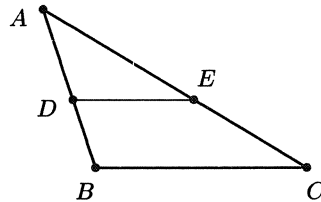
### 3.5. Bijzondere lijnen en punten in een driehoek

STELLING 3.16 Als  $ABC$  een driehoek is met  $D$  en  $E$  op de (eventueel verlengde) zijden  $AB$  resp.  $AC$ , dan geldt:

$DE$  is evenwijdig met  $BC$  dan en slechts dan als  $AD : DB = AE : EC$  (we werken daarbij met van teken voorziene verhoudingen van gerichte lijnstukken).

BEWIJS.

Kies coördinaten zo, dat  $BC$  de lijn  $y = a$  is, en  $A = (0, 0)$ . Dan is dus  $B = (b, a)$  en  $C = (c, a)$  voor zekere  $b$  en  $c$  en  $D = (\lambda b, \lambda a)$  en  $E = (\mu c, \mu a)$  voor zekere  $\lambda$  en  $\mu$ . Hieruit volgt dat  $DE$  evenwijdig is met  $BC$  dan en slechts dan als  $\lambda = \mu$ .  $\square$



FIGUUR 15. Evenredige verdelingen en evenwijdige lijnen.

STELLING 3.17 Als  $ABC$  een driehoek is met  $D$  en  $E$  op de (eventueel verlengde) zijden  $AB$  resp.  $AC$ , en als  $DE$  evenwijdig is met  $BC$ , dan geldt:

$$AD : AB = AE : AC = DE : BC.$$

BEWIJS.

Kies coördinaten als boven, etc.  $\square$

### Zwaartelijnen en het zwaartepunt

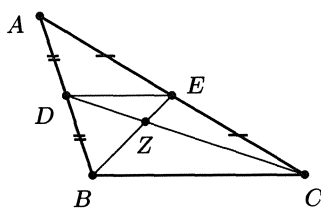
DEFINITIE 3.5 Een zwaartelijn is een lijn die een hoekpunt van de driehoek verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde.

STELLING 3.18 (ZWAARTELIJNENSTELLING) De zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt, het zwaartepunt. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding  $2 : 1$ .

BEWIJS.

Laat  $ABC$  de driehoek zijn, en stel  $D$  en  $E$  zijn de middens van resp.  $AB$  en  $AC$ , en  $Z$  is het snijpunt van de zwaartelijnen  $BE$  en  $CD$  (zie figuur 16). Volgens stelling 3.16 zijn  $BC$  en  $DE$  dan evenwijdig, en volgens stelling 3.17 is  $DE = \frac{1}{2}BC$ . Opnieuw volgens stelling 3.17 is nu  $ZB : ZE = ZC : ZD = BC : ED = 2 : 1$ .

Het punt  $Z$  verdeelt dus reeds twee zwaartelijnen in de verhouding  $2 : 1$ . Bijgevolg moet  $Z$  ook op de derde zwaartelijn liggen en ook dat lijnstuk in de verhouding  $2 : 1$  verdelen.  $\square$



FIGUUR 16. Bij het bewijs van de zwaartelijnenstelling

### Middelloodlijnen

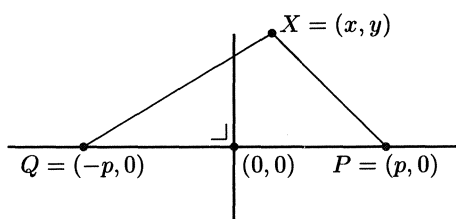
**DEFINITIE 3.6** De middelloodlijn van een lijnstuk  $PQ$  is de lijn door het midden van  $PQ$  loodrecht op  $PQ$ .

**STELLING 3.19** De middelloodlijn van een lijnstuk  $PQ$  is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot  $P$  en  $Q$ .

**BEWIJS.**

Kies toegelaten coördinaten zo dat  $P = (p, 0)$  en  $Q = (-p, 0)$ . Dan is de middelloodlijn van  $PQ$  dus de lijn  $x = 0$ , en inderdaad geldt voor elk punt  $X = (x, y)$

$$d(X, P) = d(X, Q) \iff (x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2 + y^2 \iff x = 0.$$



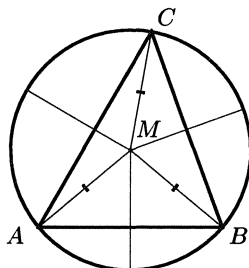
FIGUUR 17. De middelloodlijn

□

### De omgeschreven cirkel

Laat bij een driehoek  $ABC$  het punt  $M$  het snijpunt zijn van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $BC$ , dan geldt  $d(A, M) = d(B, M) = d(C, M)$ , dus  $M$  ligt ook op de middelloodlijn van  $CA$  (stelling 3.19). Bijgevolg gaan die drie middelloodlijnen door één punt, dat gelijke afstanden heeft tot de drie hoekpunten. Het is dus het middelpunt van de (uniek bepaalde) cirkel die door  $A$ ,  $B$  en  $C$  gaat. Deze cirkel heet de *omgeschreven cirkel* van driehoek  $ABC$  (zie figuur 18). We hebben dus bewezen:

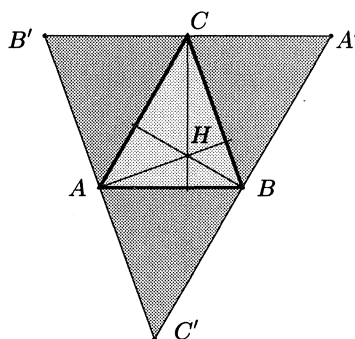
STELLING 3.20 *Bij elke driehoek gaan de middelloodlijnen van de zijden door één punt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel.*



FIGUUR 18. De middelloodlijnen en de omgeschreven cirkel van een driehoek.

### Hoogtelijnen en het hoogtepunt

DEFINITIE 3.7 *Een hoogtelijn is een lijn door een hoekpunt van de driehoek loodrecht op de (eventueel verlengde) overstaande zijde.*



FIGUUR 19. De hoogtelijnen zijn de middelloodlijnen van een driehoek met twee maal zo lange zijden.

STELLING 3.21 *De drie (eventueel verlengde) hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het hoogtepunt van de driehoek.*

BEWIJS.

Laat  $ABC$  de driehoek zijn, en  $A'B'C'$  de driehoek die gevormd wordt door lijnen te trekken door de hoekpunten van driehoek  $ABC$  evenwijdig aan de tegenoverliggende zijden (zie figuur 19). De punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn dan de middens van de zijden van driehoek  $A'B'C'$ , en de hoogtelijnen van driehoek  $ABC$  zijn daarom de middelloodlijnen van driehoek  $A'B'C'$ . We weten al dat die door één punt gaan (stelling 3.19).  $\square$

Merk op dat het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek altijd binnen de driehoek ligt, dat het hoogtepunt van een rechthoekige driehoek in het hoekpunt van de rechte hoek ligt, en dat het hoogtepunt van een stomphoekige driehoek buiten de driehoek ligt.

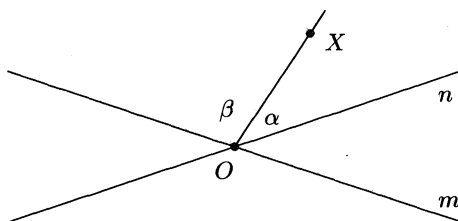
### Bissectrices, ingeschreven en aangeschreven cirkels

**STELLING 3.22** *Laat twee elkaar snijdende lijnen  $n$  en  $m$  gegeven zijn. Dan wordt de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot  $n$  en  $m$  gevormd door de bissectrices van  $n$  en  $m$ .*

**BEWIJS.**

Laat  $O$  het snijpunt zijn van  $n$  en  $m$  en stel dat  $X$  een willekeurig punt ongelijk aan  $O$  is. Laat  $\alpha$  een van de hoeken zijn tussen de halve lijn  $OX$  en de lijn  $n$ , en  $\beta$  een van de hoeken tussen  $OX$  en  $m$ . Kies deze hoeken zo, dat ze samen gelijk zijn aan een van de vier hoeken tussen  $n$  en  $m$  (zie figuur 20).

Dan geldt: de afstand van  $X$  tot  $n$  is gelijk aan  $OX \sin \alpha$  en de afstand van  $X$  tot  $m$  is gelijk aan  $OX \sin \beta$ . Deze afstanden zijn gelijk dan en slechts dan als  $\sin \alpha = \sin \beta$ , en omdat  $0 < \alpha + \beta < \pi$  is dit equivalent met  $\alpha = \beta$ .  $\square$



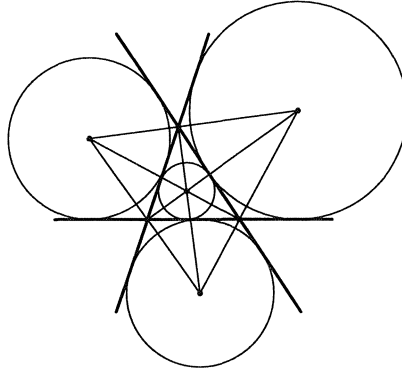
FIGUUR 20. De hoeken  $\alpha$  en  $\beta$ .

Laat nu een driehoek  $ABC$  gegeven zijn. Onder de bissectrices van een hoekpunt verstaat men de tot gehele lijnen verlengde bissectrices van de eveneens tot gehele lijnen verlengde zijden van de driehoek die in dat hoekpunt samenkomen. De *binnenbissectrice* is de bissectrice die het inwendige van de driehoek doorsnijdt; de *buitenbissectrice* is de andere.

Het snijpunt van twee bissectrices van verschillende hoeken ligt even ver van alle drie de zijden van de driehoek, dus ligt het op grond van de vorige stelling ook op één van de twee bissectrices van de derde hoek. Twee binnenbissectrices snijden elkaar altijd binnen de driehoek, dus hun snijpunt ligt dan ook op de derde binnenbissectrice. Het is het middelpunt van de *ingeschreven cirkel*, de cirkel binnen driehoek  $ABC$  die de drie zijden raakt.

Bij twee buitenbissectrices ligt het snijpunt op de binnenbissectrice van de derde hoek. Het snijpunt is dan het middelpunt van een *aangeschreven cirkel*. Daarvan zijn er drie, één tegenover elk hoekpunt (zie figuur 21). We hebben hiermee de volgende stelling bewezen.

STELLING 3.23 *De binnen- en buitenbissectrices van een driehoek snijden elkaar in vier punten, de middelpunten van de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels. Elk van die cirkels raakt elk van de (eventueel verlengde) zijden van de driehoek.*



FIGUUR 21. Bissectrices en in- en aangeschreven cirkels.

#### Opgaven

3.5.1. Laat  $AD$  de binnenbissectrice zijn van hoek  $A$  in driehoek  $ABC$ , waarbij  $D$  op  $BC$  ligt. Bewijs:  $BD : DC = AB : AC$ .

(Dit resultaat staat bekend als de *bissectricestelling*.) Aanwijzing: bepaal op het verlengde van  $AD$  het punt  $E$  waarvoor  $CE$  evenwijdig is met  $AB$ .

3.5.2. Formuleer en bewijs een analoge stelling voor de buitenbissectrice.

3.5.3. In driehoek  $ABC$  vallen het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel samen. Bewijs dat  $ABC$  gelijkzijdig is.

3.5.4. Driehoek  $ABC$  heeft twee zwaartelijnen van gelijke lengte. Bewijs dat  $ABC$  gelijkbenig is.

3.5.5. Driehoek  $ABC$  heeft twee hoogtelijnen van gelijke lengte. Bewijs dat  $ABC$  gelijkbenig is.

3.5.6. In driehoek  $ABC$  is  $H$  het hoogtepunt. Wat is het hoogtepunt van driehoek  $ABH$ ?

3.5.7. Stel dat de ingeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  een straal  $r$  heeft. Bewijs dat de oppervlakte van  $ABC$  gelijk is aan  $\frac{1}{2}r(a + b + c)$ .

3.5.8. Stel dat de aangeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  tegenover hoekpunt  $A$  een straal  $r_a$  heeft. Bewijs dat de oppervlakte van  $ABC$  gelijk is aan  $\frac{1}{2}r_a(-a + b + c)$ .

3.5.9. De stralen van de ingeschreven en de aangeschreven cirkels van een driehoek  $ABC$  noemt men resp.  $r$ ,  $r_a$ ,  $r_b$  en  $r_c$ . Bewijs:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

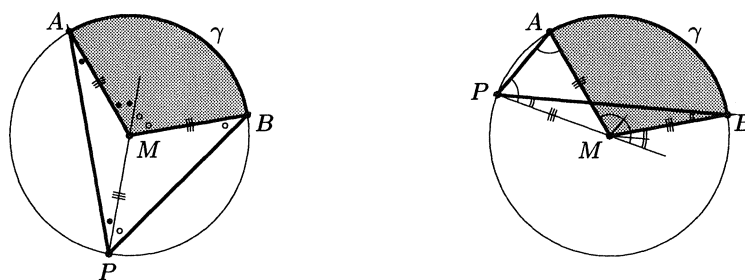
3.5.10. Bewijs: de zes stukken waarin de zwaartelijnen een driehoek verdelen, hebben dezelfde oppervlakte.

3.5.11. In een niet-gelijkzijdige driehoek  $ABC$  is  $O$  het middelpunt van de omschreven cirkel,  $R$  de straal van die cirkel, en  $Z$  het zwaartepunt.  $K$  is het punt op de halve lijn  $OZ$  waarvoor geldt dat  $KZ = 2 \cdot ZO$ . De middelpunten van de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  noemt men resp.  $M_a$ ,  $M_b$  en  $M_c$  en de voetpunten van de hoogtelijnen op deze zijden noemt men  $H_a$ ,  $H_b$  en  $H_c$ .

- Bewijs dat  $AK$  evenwijdig is aan  $OM_a$  (of met  $OM_a$  samenvalt).
- Concludeer dat  $K$  op de hoogtelijn uit  $A$  ligt, en dus ook op de hoogtelijnen uit  $B$  en  $C$ , met andere woorden dat  $K$  het **hoogtepunt** is van driehoek  $ABC$ . (Dit is dus een alternatief bewijs van de stelling dat de hoogtelijnen door één punt gaan!)
- Concludeer ook dat bij elke driehoek het hoogtepunt  $H$ , het zwaartepunt  $Z$  en het middelpunt van de omschreven cirkel  $O$  op één lijn liggen, en wel zo, dat  $HZ : ZO = 2 : 1$ .  
(Deze lijn staat bekend als de *rechte van Euler*.)
- Het midden van het lijnstuk  $HO$  noemt men  $N$ . Bewijs dat de zes punten  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ,  $H_a$ ,  $H_b$  en  $H_c$  en de middens van  $HA$ ,  $HB$  en  $HC$  samen op één cirkel liggen, en dat de straal van die cirkel gelijk is aan  $\frac{1}{2}R$ .  
(Deze cirkel staat bekend als de *negenpunts*cirkel.)  
Aanwijzing: maak gebruik van de puntvermenigvuldiging met centrum  $Z$  en factor  $-\frac{1}{2}$  en de puntvermenigvuldiging met centrum  $H$  en factor  $\frac{1}{2}$ .

3.5.12. De middelpunten van de aangeschreven cirkels van driehoek  $ABC$  noemt men resp.  $I_a$ ,  $I_b$  en  $I_c$ . Wat is het hoogtepunt van driehoek  $I_aI_bI_c$ ?

### 3.6. Verdere cirkeleigenschappen



FIGUUR 22. Omtrekshoek en middelpuntshoek.

Laten  $A$  en  $B$  twee verschillende punten op een cirkel met middelpunt  $M$  zijn, en stel dat  $\gamma$  een van de twee cirkelbogen is met eindpunten  $A$  en  $B$ . Beschouw voor een punt  $P$  op de cirkel dat niet op de boog  $\gamma$  ligt, de hoek met benen  $PA$  en  $PB$  die boog  $\gamma$  bevat. Men noemt die hoek de bij  $P$  en  $\gamma$  behorende

*omtrekshoek*. De hoek met benen  $MA$  en  $MB$  die boog  $\gamma$  bevat, heet de bij die boog behorende *middelpuntshoek*.

STELLING 3.24 *Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.*

BEWIJS.

Laat in de notatie als boven  $\angle P$  de omtrekshoek, en  $\angle M$  de bijbehorende middelpuntshoek zijn. We onderscheiden twee gevallen

1.  $M$  ligt binnen  $\angle P$ . Dan is op grond van de buitenhoekstelling en stelling 3.12

$$\angle M = 2\angle APM + 2\angle BPM = 2\angle P.$$

2.  $M$  ligt niet binnen  $\angle P$ . Stel, zonder beperking van de algemeenheid, dat  $AM$  en  $PB$  elkaar snijden. Dan is op grond van dezelfde stellingen

$$\angle M = 2\angle APM - 2\angle BPM = 2\angle P.$$

□

Neemt men als middelpuntshoek een gestrekte hoek, dan is de bijbehorende omtrekshoek dus recht. Dit resultaat staat bekend als de **Stelling van Thales**.

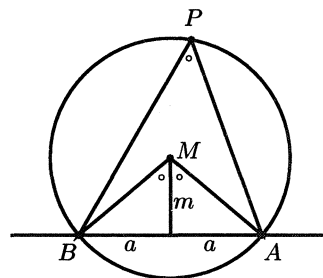
DEFINITIE 3.8 *Een vierhoek  $ABCD$  heet een koordenvierhoek wanneer de vier hoekpunten op een cirkel liggen (en de zijden dus opvolgende koorden van die cirkel zijn).*

STELLING 3.25 (KOORDENVIERHOEKSTELLING) *In een koordenvierhoek is de som van elk paar overstaande hoeken gelijk aan  $\pi$  radialen (180 graden).*

BEWIJS.

De bijbehorende middelpuntshoeken zijn samen  $2\pi$ .

□



FIGUUR 23. Bij het bewijs van de omgekeerde koordenvierhoekstelling.

STELLING 3.26 (OMGEKEERDE KOORDENVIERHOEKSTELLING) 1. *Liggen  $P$  en  $Q$  aan dezelfde kant van een lijn  $AB$  en geldt  $0 < \angle APB = \angle AQB < \pi$ , dan liggen  $A, B, P$  en  $Q$  op een cirkel.*

2. *Liggen  $P$  en  $Q$  aan verschillende kanten van een lijn  $AB$  en geldt  $\angle APB + \angle AQB = \pi$ , dan is  $APBQ$  een koordenvierhoek.*



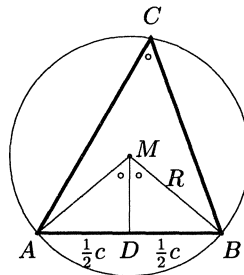
BEWIJS.

1. Kies coördinaten met  $A = (a, 0)$ ,  $B = (-a, 0)$ ,  $a > 0$ , en  $P$  en  $Q$  in het bovenhalfvlak, d.w.z.  $y$ -coördinaat positief. Noem  $\alpha = \angle APB = \angle AQB$  en laat  $M = (0, m)$  het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABP$ . Dan is (zie figuur 23)  $m$  het getal waarvoor

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{m}{a}.$$

Wanneer men op zo'n zelfde manier van driehoek  $ABQ$  de omgeschreven cirkel met middelpunt  $M' = (0, m')$  bepaalt, ontstaat net zo'n vergelijking voor  $m'$ , met daarin dezelfde  $a$  en  $\alpha$ . Bijgevolg geldt  $m = m'$ , en dus vallen de beide cirkels samen.

2. Kies een punt  $P'$  op de omcirkel van driehoek  $ABQ$  aan de andere kant van  $AB$  dan  $Q$ . Volgens Stelling 3.24 is dan  $\angle P' = \pi - \angle Q = \angle P$ , en volgens het juist bewezen deel 1 van deze stelling ligt  $P$  ook op deze cirkel.  $\square$



FIGUUR 24. De uitgebreide sinusregel.

STELLING 3.27 (UITGEBREIDE SINUSREGEL) *Als  $R$  de straal is van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  dan geldt*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

BEWIJS.

Laat  $M$  het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel en  $D$  het midden van  $AB$  (zie figuur 24). Dan is

$$\sin C = \sin \frac{1}{2} \angle AMB = \sin \angle AMD = \frac{AD}{AM} = \frac{\frac{1}{2}c}{R}.$$

Dit kan worden herleid tot de laatste gelijkheid van de stelling; de andere twee bewijst men net zo.  $\square$

### Opgaven

3.6.1. Laat  $R$  de straal zijn van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$ .

Bewijs dat de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan  $\frac{abc}{4R}$ .

3.6.2. Gegeven zijn een lijnstuk  $AB$ , een lijn  $\ell$  loodrecht op  $AB$  die  $AB$  niet snijdt, en een variabel punt  $P$  op  $\ell$ . Voor welke posities van  $P$  is  $\angle APB$  minimaal?

3.6.3. De voetpunten van de hoogtelijnen van de scherphoekige driehoek  $ABC$  noemt men  $D$ ,  $E$  en  $F$  (met  $D$  op  $BC$ , etc.). Bewijs dat het hoogtepunt  $H$  van driehoek  $ABC$  samenvalt met het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek  $DEF$ .

3.6.4. Onderzoek de situatie die ontstaat als in opgave 3.6.3 driehoek  $ABC$  rechthoekig of stomphoekig is.

3.6.5. Vanuit een punt  $P$  op de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  laat men loodlijnen  $PD$ ,  $PE$  en  $PF$  neer op de (indien nodig, verlengde) zijden van de driehoek,  $D$  op  $BC$ , etc. Bewijs dat  $D$ ,  $E$  en  $F$  op één lijn liggen (dit is de zg. *rechte van Wallace* die bij het punt  $P$  behoort).

#### *Nawoord*

In het voorafgaande konden we, door ruimtegebrek gedwongen, niet alle onderwerpen uit de klassieke vlakke meetkunde de revue laten passeren. Zo hebben we bijvoorbeeld nauwelijks aandacht geschonken aan het begrip gelijkvormigheid, het begrip oppervlakte of aan de speciale eigenschappen van bijzondere vierhoeken zoals parallellogrammen, trapezia, vliegers, ruiten, rechthoeken en vierkanten. Het zal echter duidelijk zijn dat men die zaken op school, mits de tijd het toelaat, in dezelfde geest kan behandelen.

Daarnaast kan de exploratie van de euclidische vlakke meetkunde nog in tal van richtingen worden uitgebreid. De Vakontwikkelgroep heeft bijvoorbeeld gekozen voor het onderwerp Voronoi-diagrammen, maar men zou ook andere wegen kunnen bewandelen. Ik geef hieronder nog vier aantrekkelijke themagebieden die zeker binnen het bereik van de schoolmeetkunde vallen.

1. Voortgezette driehoeksmetkunde. Bijvoorbeeld de stelling van Ceva, de hypocycloïde van Steiner als omhullende van de rechten van Wallace, de stelling van Morley.

2. Extremaalproblemen. Bijvoorbeeld het probleem van Fagnano: vind punten  $U$ ,  $V$ ,  $W$  op de zijden  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  van een gegeven driehoek  $ABC$  zo, dat driehoek  $UVW$  minimale omtrek heeft. Of het probleem van Fermat: vind het punt  $P$  binnen driehoek  $ABC$  waarvoor de som  $AP + BP + CP$  minimaal is.

3. Transformatiemeetkunde. De classificatie van alle isometrieën van het vlak; het bewijs dat elke isometrie te schrijven is als de opeenvolging van hoogstens drie lijnspegelingen en dat daarom iedere isometrie een lijnspegeling, een translatie, een rotatie of een glijspegeling is. Eventueel kan hier ook de classificatie van de gelijkvormigheidstransformaties van het vlak aan worden toegevoegd.

4. De classificatie van de symmetrieën van vlakke figuren en patronen. Dit kan tevens fungeren als een meetkundige inleiding in de voor de toepassingen van de wiskunde zo belangrijke *groepentheorie*.

Wat de bovenstaande presentatie vooral duidelijk heeft willen maken, is dat het mogelijk is om de vlakke meetkunde in de bovenbouw van het vwo op een zo-

danige wijze te behandelen dat leerlingen niet het gevoel krijgen dat het geven van bewijzen een hobby van de leraar is, die naar willekeur of in samenspraak met de klas vaststelt waar je vanuit mag gaan, en wat je daar dan vervolgens uit af moet leiden. Bij de voorgestelde opzet zullen leerlingen ook vanaf het begin beseffen dat meetkundige eigenschappen geen eigenschappen van de werkelijkheid zijn, maar eigenschappen van een model van de werkelijkheid. Daarbij zal ook direct duidelijk zijn wat de betekenis is van definities, stellingen en bewijzen, juist omdat de fundamenteën van het wiskundige model helder zijn. We hebben bovendien gezien dat in deze opzet de bewijzen van alle stellingen (misschien met uitzondering van de basisstelling) uitermate kort, elegant en doorzichtig zijn. De meeste bewijzen vergen slechts een paar regels tekst; het langste bewijs, dat van stelling 3.26, telt twaalf regels, maar die stelling bestaat dan ook uit twee delen. Naar believen kunnen leerlingen details die hen nog niet helemaal duidelijk zijn, verder invullen. Nergens hoeft een beroep te worden gedaan op vage intuïties of op autoriteit. Dit alles maakt zo'n behandeling uitermate geschikt voor schoolgebruik.



## Voronoi-diagrammen

J.M. Aarts

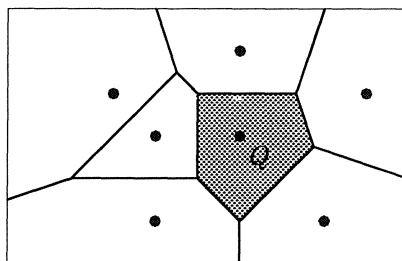
TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4, 2628 CD Delft  
e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl

In de omschrijving van de leerstof van het domein Vlakke Meetkunde voor het nieuwe VWO-programma worden Voronoi-diagrammen genoemd. Ze bieden niet alleen de gelegenheid tot oefening met de elementaire leerstof [1], maar ze zijn ook het natuurlijke uitgangspunt voor de bespreking van interessante toepassingen (conflictlijnen, kegelsneden) [2]. Na een korte opsomming van de belangrijkste begrippen bespreken we reconstructieproblemen, Voronoi-diagrammen van roosters, iso-lijnen en kegelsneden. We besluiten met een korte beschouwing van kwadratische vormen; dit onderwerp houdt verband met het werk van VORONOI.

### 1. VORONOI-DIAGRAMMEN

Beschouw een eindige verzameling  $E$  van punten in het vlak. Laat  $Q$  een punt van  $E$  zijn. De *Voronoi-cel*  $V(Q)$  van  $Q$  is de verzameling van alle punten van het vlak met de eigenschap dat zij niet verder van  $Q$  liggen dan van enig ander punt van  $E$ , zie figuur 1. In formule:

$$V(Q) = \{ X : d(X, Q) \leq d(X, R) \text{ voor alle } R \text{ uit } E \text{ met } R \neq Q \}.$$



FIGUUR 1. De Voronoi-cel van  $Q$

Hoe vind je de Voronoi-cel van  $Q$ ? Bij ieder punt  $R \in E$  met  $R \neq Q$  tekenen we de middelloodlijn van  $RQ$  en bij de middelloodlijn bepalen we het halfvlak  $H_R$

dat  $Q$  bevat; de doorsnede van alle zo verkregen halfvlakken is de Voronoï-cel van  $Q$ . Een Voronoï-cel is dus een convexe verzameling; het verbindingslijn-stuk van elk tweetal punten van de cel ligt geheel binnen de cel. We zeggen dat twee verschillende Voronoï-cellen *aan elkaar grenzen* of *buren zijn* indien hun doorsnede meer dan één punt bevat; de doorsnede wordt in dat geval de *grens* van de cellen genoemd. De grens van de Voronoï-cellen van  $P$  en  $Q$  is een lijnstuk, dat bevat is in de middelloodlijn van  $PQ$ . De grenzen van een Voronoï-cel vormen tezamen een lijnentrek; deze lijnentrek noemen we de *rand* van de cel. Een punt dat tot verschillende grenzen behoort noemen we een *hoekpunt*. De grenzen van alle cellen vormen tezamen het *Voronoï-diagram* bij de verzameling  $E$ . De punten van  $E$  worden de *centra* van het Voronoï-diagram genoemd.

In een recent nummer van *Scientific American* [4] worden werken van de Londens kunstenaar JONATHAN CALLAN in verband gebracht met Voronoï-diagrammen. Stel je voor dat figuur 1 getekend is op de bodem van een rechthoekige bak. Op de plaatsen van de centra worden gaten geboord in de bodem. Nu wordt de bak gelijkmatig gevuld met cement. Nadat een deel van het cement door de gaten is weggelopen, ontstaat er een soort maanlandschap met kraters en bergkammen. Door de vochtigheid van de lucht verhardt het cement en ontstaat er een kunstwerk. Bij ieder centrum is een krater ontstaan in de vorm van een (omgekeerde) kegel; het centrum is de top van de kegel. Omdat het cement wegloopt naar het dichtsbijzijnde centrum liggen de bergkammen precies boven de grenzen van het Voronoï-diagram.

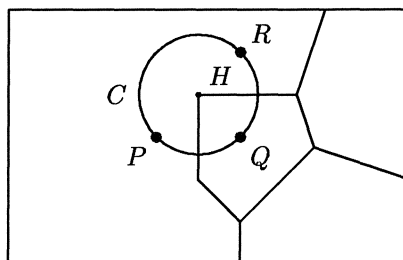
Uit de definities kan met weinig moeite de volgende stelling bewezen worden.

**STELLING 1** *Als de lijn  $l$  het verlengde is van de grens van de cellen met centra  $P$  en  $Q$ , dan gaan  $P$  en  $Q$  in elkaar over door spiegeling in de lijn  $l$ .*

De afleiding van de volgende stelling is iets subtieler.

**STELLING 2** *Ieder hoekpunt  $H$  van een Voronoï-diagram behoort tot drie of meer verschillende cellen; de centra van deze cellen liggen alle op één cirkel met middelpunt  $H$ .*

**BEWIJS.** Het hoekpunt  $H$  behoort per definitie tot tenminste twee verschillende grenzen. Laat, in figuur 2,  $H$  een hoekpunt zijn dat behoort tot de grens van de cellen met centra  $P$  en  $Q$ . Deze grens is een deelverzameling van de middelloodlijn van  $PQ$ . Behalve tot de grens van de cellen van  $P$  en  $Q$  behoort  $H$  nog tot een tweede grens. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat de hoek tussen de twee grenzen verder geen grens bevat met  $H$  als eindpunt. De punten  $P$  en  $Q$  liggen op eenzelfde cirkel  $C$  met middelpunt  $H$ . Men kan nagaan dat binnen de cirkel geen centra kunnen liggen (anders zou de plaats van  $H$  niet kloppen). Uit de definitie van cellen volgt dat er nog een centrum  $R$  moet zijn; dit wordt gevonden door spiegeling van  $Q$  in de tweede grens. Het centrum  $R$  ligt op de cirkel  $C$ . Omdat er binnen de cirkel geen centra liggen, moet er minstens één grens zijn die  $R$  en  $P$  scheidt. Ook deze grens heeft  $H$  als eindpunt. Dus komen in  $H$  drie of meer grenzen samen.



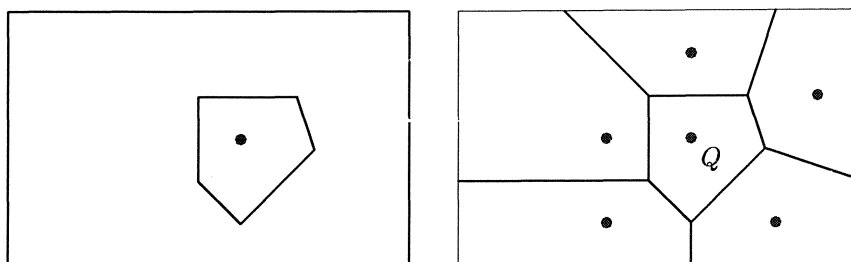
FIGUUR 2. De grenzen in een hoekpunt

## 2. RECONSTRUCTIEPROBLEMEN

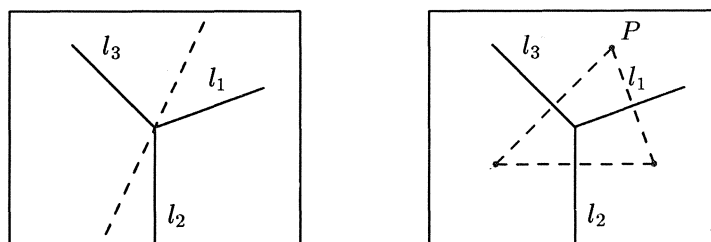
Een geliefd voorbeeld van een Voronoi-diagram betreft hunebedden. Op de kaart van een deel van de provincie Drente tekent men de plaatsen waar zich groepjes hunebedden bevinden. Zo'n groepje hunebedden wijst erop dat op die plaats vroeger een nederzetting is geweest. Het Voronoi-diagram met deze plaatsen als centra geeft een indeling van het gebied; de cellen kunnen een indicatie geven van de mogelijke invloedssfeer van de nederzettingen. Verschillende invloedssferen kunnen vaak onderscheiden worden aan de hand van gevonden voorwerpen. Dit geeft informatie over de grenzen van het Voronoi-diagram. In de praktijk leidt dit vaak tot onvolledige diagrammen. Het is nu de kunst om de onvolledige diagrammen aan te vullen tot Voronoi-diagrammen: dit noemen we het reconstructieprobleem. Eerst een voorbeeld.

**VOORBEELD 3** Binnen het linker kader van figuur 3 is een figuur getekend waarvan gegeven is dat hij een deel is van een Voronoi-diagram. Kun je het Voronoi-diagram vinden? In de rechter figuur staat een oplossing van het reconstructieprobleem. Op grond van de eigenschappen van Voronoi-diagrammen zien we dat er in ieder geval vijf centra en vijf grenzen moeten worden toegevoegd. Merk op dat ook figuur 1 een oplossing biedt van het reconstructieprobleem; de oplossing van het reconstructieprobleem is niet uniek.

Een meer algemeen reconstructieprobleem betreft het vinden van de centra bij een gegeven Voronoi-diagram. We bespreken hier het eenvoudigste geval. In figuur 4 is links een deel getekend van een Voronoi-diagram, namelijk de omgeving van een hoekpunt. De grenzen die in het hoekpunt samenkomen noemen we  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$ . De vraag is nu: kunnen we achterhalen waar de centra zouden moeten liggen? In de rechter figuur is een analyse gemaakt. Stel dat we wisten waar een centrum lag, zeg  $P$ . We gaan het punt  $P$  spiegelen, achtereenvolgens in de lijnen  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$ . Omdat  $P$  een centrum is, zijn de beelden onder de spiegeling het ook. Als we  $P$  spiegelen, eerst in  $l_1$ , dan in  $l_2$  en tenslotte in  $l_3$ , komen we weer in  $P$  uit. Nu is het effect van de spiegeling



FIGUUR 3. Reconstructie (rechts) vanuit een gegeven figuur (links)



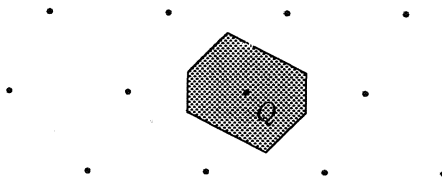
FIGUUR 4. Waar zijn de centra?

in  $l_1$  gevolgd door die in  $l_2$  gelijk aan een draaiing rechtsom over tweemaal de hoek tussen  $l_1$  en  $l_2$ . Trek nu de lijn  $l_4$  (in de linker figuur gestippeld) zó dat de scherpe hoek tussen  $l_4$  en  $l_3$  in grootte en oriëntatie gelijk is aan de scherpe hoek tussen  $l_1$  en  $l_2$ . In plaats van te spiegelen, eerst in  $l_1$  en dan in  $l_2$ , kunnen we dus ook spiegelen, eerst in  $l_4$ , dan in  $l_3$ . Hieruit volgt dat spiegelen, eerst in  $l_1$  dan in  $l_2$  en tenslotte in  $l_3$ , hetzelfde effect heeft als spiegelen in  $l_4$ . Maar dan moet  $P$  op  $l_4$  liggen. Om de positie van  $P$  nader te bepalen is meer informatie over het Voronoï-diagram nodig.

### 3. ROOSTERS

Men kan de theorie van de Voronoï-diagrammen in verschillende richtingen uitbreiden. Allereerst kan men de in paragraaf 1 genoemde begrippen op dezelfde wijze definiëren voor een rooster van punten in het vlak, zie figuur 5, en meer in het algemeen voor iedere verzameling  $E$  met de eigenschap dat elke cirkelschijf (hoe groot dan ook) maar eindig veel punten van  $E$  bevat. We brengen





FIGUUR 5. Een rooster met een Voronoi-cel

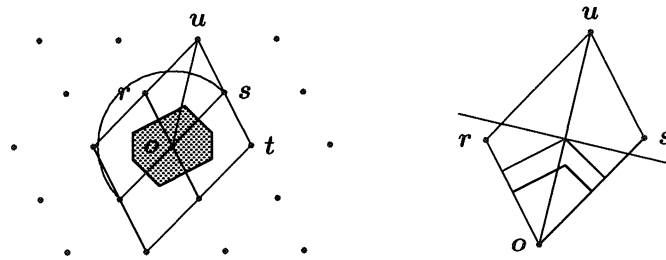
in herinnering wat een rooster in het vlak is. Een verzameling  $E$  in het vlak heet een *rooster* indien er translatievectoren  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$  bestaan met verschillende dragers zó dat voor ieder punt  $P$  uit  $E$  geldt

$$E = \{ \mathcal{T}_1^n \circ \mathcal{T}_2^m(P) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \}.$$

Zij nu  $E$  een rooster. Het is niet moeilijk om in te zien dat de Voronoi-cellen van het rooster onderling congruent zijn; zij kunnen door translaties in elkaar worden overgevoerd. We zullen eerst bekijken hoe de Voronoi-cel van een rooster eruit ziet.

**STELLING 4**  $Q$  is een punt van een rooster. Dan wordt de Voronoi-cel van  $Q$  begrensd door een zeshoek of een rechthoek die puntsymmetrisch zijn ten opzichte van het spiegelpunt  $Q$ .

**BEWIJS.** Eerst iets over de notatie: kleine vette letters duiden zowel punten van het vlak als (plaats)vectoren aan. Het rooster is puntsymmetrisch; ieder roosterpunt kan gebruikt worden als spiegelpunt. Dit ziet men direct met behulp van coördinaten. Hieruit volgt onmiddellijk dat de Voronoi-cel van  $Q$  puntsymmetrisch is ten opzichte van  $Q$ . We brengen een coördinatenstelsel aan in  $Q = \mathbf{o}$ , zie figuur 6, links. Zij  $\mathbf{r}$  een roosterpunt zó dat  $\|\mathbf{r}\|$  minimaal is; m.a.w.  $\mathbf{r}$  wordt zo dicht mogelijk bij  $\mathbf{o}$  gekozen. Laat  $\mathbf{s}$  een roosterpunt zijn dat niet op de drager van  $\mathbf{r}$  ligt met de eigenschap dat  $\|\mathbf{s}\|$  minimaal is. Het punt  $\mathbf{s}$  ligt afgezien van de punten op de drager van  $\mathbf{r}$  op de kleinste mogelijke afstand van  $\mathbf{o}$ . Dan liggen binnen het parallellogram opgespannen door  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  geen roosterpunten meer. Dit bewijst men als volgt uit het ongerijmde. Neem aan dat het roosterpunt  $\mathbf{x}$  binnen het parallellogram ligt. In verband met de keuze van  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  moet  $\mathbf{x}$  buiten of op de cirkel met straal  $\|\mathbf{s}\|$  om  $\mathbf{o}$  liggen; de afstand van  $\mathbf{x}$  tot  $\mathbf{u}$  is dan kleiner dan  $\|\mathbf{r}\|$ . (Bij het bewijs van deze bewering gebruikt men dat  $\|\mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{s}\|$ .) Dus  $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| < \|\mathbf{r}\|$ . Omdat  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{u}$  roosterpunten zijn, is  $\mathbf{x} - \mathbf{u}$  het ook. Dit is in tegenspraak met de keuze van  $\mathbf{r}$ . We nemen nu eerst aan dat de hoek  $\mathbf{ros}$  scherp is. Enig gepuzzel laat zien dat de Voronoi-cel van  $Q = \mathbf{o}$  begrensd wordt door een lijnentrek die gevormd wordt door



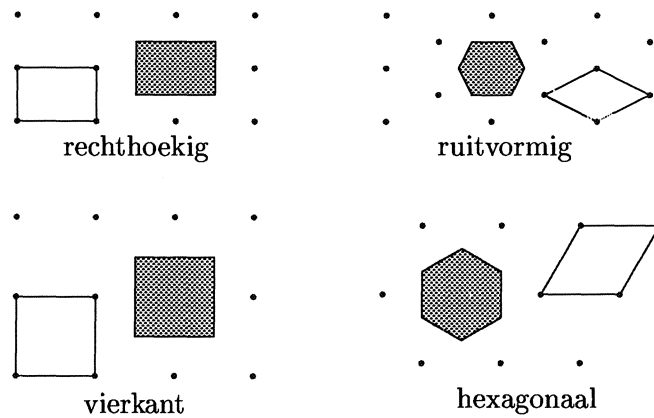
FIGUUR 6. De constructie van de Voronoï-cel

lijnstukken die liggen op de middelloodlijnen van achtereenvolgens  $ro$ ,  $so$ ,  $to$ ,  $(-r)o$ ,  $(-s)o$ ,  $(-t)o$ . De punten binnen deze lijnentrek liggen dichter bij  $o$  dan bij  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $-r$ ,  $-s$ , of  $-t$ . Om deze bewering te staven moet men ook nagaan dat de overige roosterpunten geen invloed hebben op de vorm van de Voronoï-cel hebben. Als voorbeeld nemen we het roosterpunt  $u$ . In figuur 6, rechts, is het parallellogram  $osur$  uitvergroot getekend. Verder ziet men in de figuur de middelloodlijn van  $uo$  en de loodlijnen vanuit het midden van  $ou$  op de lijnstukken  $or$  en  $os$ . Uit de onderlinge positie van deze lijnen kan men zien dat  $u$  geen invloed heeft op de vorm van de cel.

In het geval dat de hoek  $ros$  recht is wordt de Voronoï-cel een rechthoek; zie bijvoorbeeld de linker tekeningen in figuur 7.

Het parallellogram  $osur$  dat wij in het bovenstaand bewijs hebben ingevoerd zullen we een *basisparallellogram* van het rooster noemen. Het is nuttig om ook nog te kijken naar roosters waarbij de basisparallellogrammen een meer regelmatige vorm hebben. Deze roosters zijn afgebeeld in figuur 7; hier volgt een verklaring van de bij de roosters geplaatste adjectiva. Bij het rechthoekig rooster en het vierkante rooster is het basisparallellogram een rechthoek respectievelijk een vierkant. Bij het ruitvormig rooster is weliswaar het basisparallellogram *geen* ruit, maar het rooster kan worden gegenereerd door twee translaties waarvan de translatievectoren gelijke lengte hebben en dus een ruit opspannen. De Voronoï-cel is een niet-regelmatige zeshoek. Bij het hexagonale rooster is het basisparallellogram een bijzondere ruit, namelijk met de eigenschap dat de ruit de vereniging is van twee gelijkzijdige driehoeken. Het woord "hexagonaal" verwijst naar de vorm van de Voronoï-cel, een regelmatige zeshoek.

We stippen hier even aan hoe Voronoï-cellen gebruikt kunnen worden bij de studie van periodieke vlakvullingen. We noemen een deelverzameling  $D$  van het vlak een *periodieke vlakvulling* indien er translaties  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$  bestaan zó dat de translatievectoren van  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$  verschillende dragers hebben en de verzameling van alle translaties die  $D$  op zichzelf afbeelden gelijk is aan  $\{\mathcal{T}_1^n \circ$

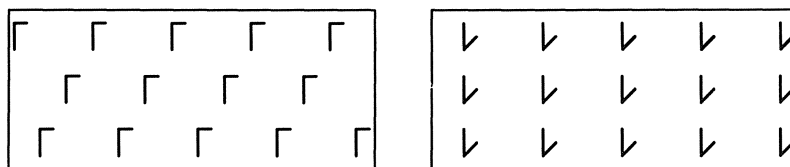


FIGUUR 7. Roosters met nog meer regelmaat

$\mathcal{T}_2^m : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ . We noemen  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$  genererende translaties van  $D$ . Periodieke vlakvullingen zie je heel vaak; denk maar aan betegeling van wanden of behangpapier.

We stellen ons nu de vraag hoeveel essentieel verschillende, periodieke vlakvullingen er zijn. Het volgend voorbeeld geeft een idee waar het om gaat.

VOORBEELD 5 Zij  $D$  één van de twee vlakvullingen in figuur 8. De *isometriegroep* van  $D$  is de verzameling van alle isometrieën die  $D$  op zichzelf afbeelden. Uit de tekeningen zien we dat de isometrieën alle translaties zijn. De groep van alle translaties van  $D$  is isomorf met  $\mathbb{Z}^2$ . Beide figuren hebben dezelfde isometriegroep. Daarom zeggen we dat de figuren hetzelfde type hebben. Op



FIGUUR 8. Vlakvullingen van hetzelfde type

grond hiervan zeggen we dat de twee vlakvullingen hetzelfde type hebben.

Dit voorbeeld was in zoverre eenvoudig dat alle erin voorkomende isometrieën translaties waren. In het algemeen zijn er naast translaties ook rotaties, spiegelingen en glijspiegelingen; translaties en rotaties zijn oriëntatie-bewarend, terwijl spiegelingen en glijspiegelingen oriëntatie-omkerend zijn. We zeggen nu dat twee periodieke vlakvullingen  $D_1$  en  $D_2$  hetzelfde type hebben indien er een isomorfisme is van de isometriegroep van  $D_1$  naar de isometriegroep van  $D_2$  waarbij de oriëntatie-bewarende isometrieën van  $D_1$  worden afgebeeld op de oriëntatie-bewarende isometrieën van  $D_2$ . Als periodieke vlakvullingen niet hetzelfde type hebben dan noemen we ze *essentieel verschillend*.

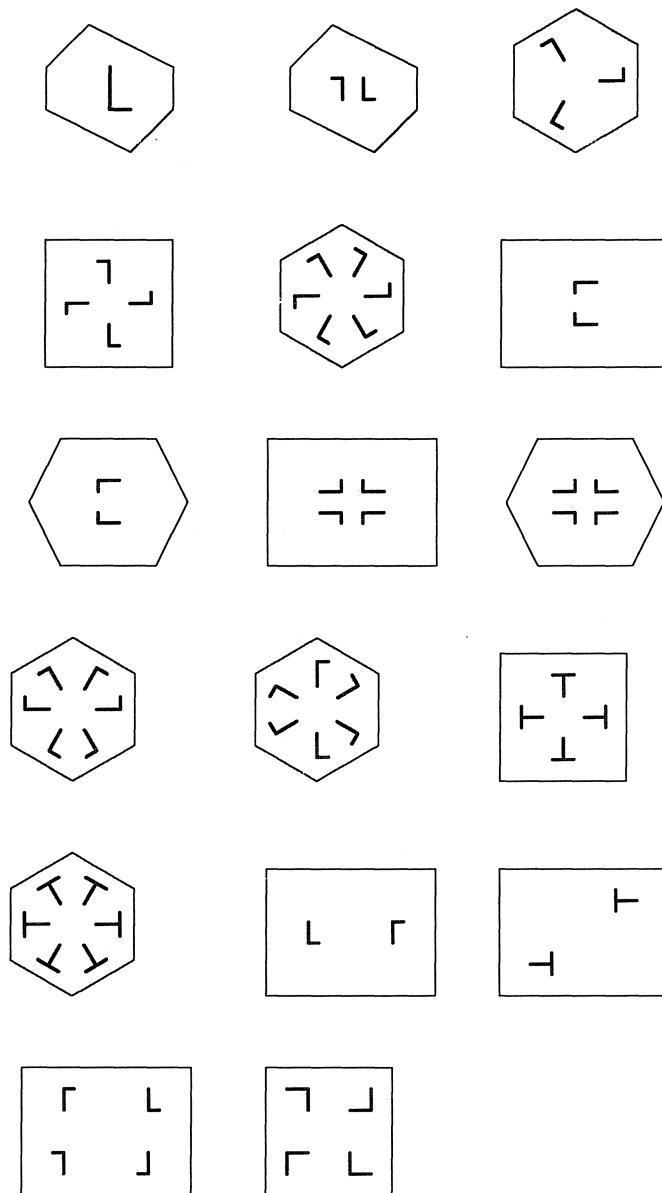
Laat nu  $D$  een periodieke vlakvulling zijn met genererende translaties  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}_2$ . We definiëren bij  $D$  een rooster: kies eerst een punt  $P$  in het vlak; de verzameling  $\{ \mathcal{T}_1^n \circ \mathcal{T}_2^m(P) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \}$  heet het *rooster* van  $P$ . We merken nu op dat de Voronoï-cellen van het rooster van  $P$  het vlak overdekken; zie figuur 10. Omdat de Voronoï-cellen van het rooster onderling congruent zijn, is het voor het ontwerpen van een periodieke vlakvulling voldoende om een motief voor één Voronoï-cel te maken. De Voronoï-cellen geven door hun symmetrie een indicatie van de mogelijke symmetrieën van het motief. Het blijkt dat er 17 essentieel verschillende vlakvullingen zijn. In figuur 9 zijn 17 Voronoï-cellen met motieven getekend. Door met elk van de cellen het vlak te betegelen ontstaan 17 essentieel verschillende periodieke vlakvullingen.

Er is geen reden om alleen roosters in het vlak te beschouwen. De theorie van de ruimtelijke roosters is van groot belang voor de kristallografie; in dit verband worden de Voronoï-cellen ook wel genoemd naar Wigner en Seitz. Een interessant voorbeeld van een ruimtelijk Voronoï-diagram wordt besproken in [3]. In het artikel [4] wordt verteld dat astronomen recent ontdekt hebben dat de verdeling van materie in het heelal gemodelleerd kan worden met ruimtelijke Voronoï-diagrammen. De meeste materie bevindt zich op de grensvlakken van het diagram. Het heelal lijkt op een enorm bubbelbad. Men spreekt wel van het Voronoï-schuim-model.

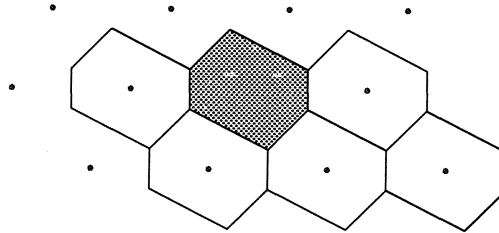
#### 4. ISO-AFSTANDSLIJNEN

Een andere uitbreiding van de Voronoï-diagrammen wordt verkregen door in plaats van een eindige puntverzameling  $E$  een eindige verzameling van gesloten verzamelingen bekijken; zie bijvoorbeeld figuur 11, waarin de verzamelingen met dikke lijnen zijn aangegeven. Het Voronoï-diagram bestaat nu uit vier sierlijk gekrulde lijnen. De gekrulde lijnen worden wel eens conflictlijnen genoemd. Dit hangt natuurlijk samen met het feit dat het bij vele toepassingen ook inderdaad om conflictlijnen gaat.

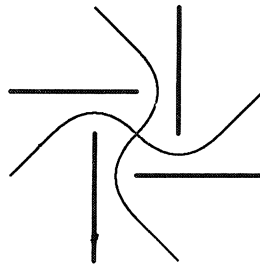
Maar er zijn ook vreedzame toepassingen: de kegelsneden kunnen op een elegante manier geïntroduceerd worden als conflictlijnen. We beginnen met de parabool. Gegeven zijn een lijn  $l$ , de *richtlijn*, en een punt  $F$ , het *brandpunt*. We maken nu het Voronoï-diagram met als centra de richtlijn en het brandpunt. Het Voronoï-diagram bestaat uit precies één grens, de *parabool*, zie figuur 12. In de figuur, rechts, is de constructie van de raaklijn in  $X$  aan de parabool



FIGUUR 9. 17 tegels voor periodieke vlakvullingen



FIGUUR 10. Betegelen met Voronoï-cellen



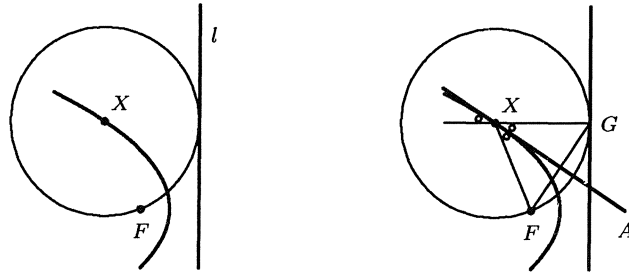
FIGUUR 11. Het Voronoï-diagram (dun getekend)

getekend. Het voetpunt van de loodlijn op de richtlijn vanuit  $X$  noemen we  $G$ . Dan is  $d(X, F) = d(X, G)$ , dus  $\triangle GXF$  is gelijkbenig. Daarom is de lijn  $XA$ , de bissectrice van  $\angle FXG$ , ook middelloodlijn van  $FG$ . Hieruit volgt met weinig moeite dat ieder van  $X$  verschillend punt  $Y$  van de lijn  $XA$  niet op de parabool ligt. Er geldt namelijk

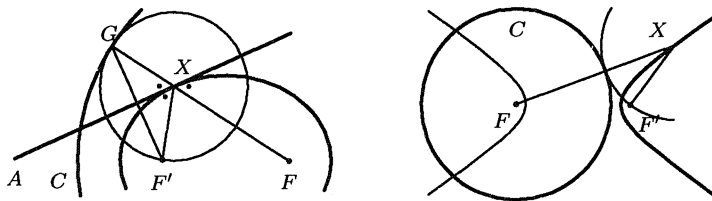
$$d(Y, F) = d(Y, G) > d(Y, l).$$

De lijn  $XA$  heeft dus precies één punt met de parabool gemeen. Daaruit volgt dat  $XA$  de raaklijn is in  $X$  aan de parabool. Tevens zien we uit de figuur de bekende spiegeleigenschap van de parabool.

Wat zojuist over de parabool is verteld, bevat misschien weinig nieuws. Interessant is echter dat analoge eigenschappen ook gelden voor de ellips en hyperbool en dat deze eigenschappen op bijna dezelfde wijze kunnen worden afgeleid. We kijken eerst naar de ellips, figuur 13, links. Gegeven zijn een cirkel  $C$ , de *richtcirkel*, met middelpunt  $F$  en straal  $r$ , en een punt  $F'$ , het brandpunt. Het



FIGUUR 12. De parabool als conflictlijn (links); de raaklijnconstructie (rechts)



FIGUUR 13. De ellips (links) en de hyperbool (rechts) als conflictlijnen

Voronoi-diagram met als centra de richtcirkel en het brandpunt  $F'$  bestaat uit één grens, de *ellips*. Uit de figuur lezen we meteen af: voor ieder punt  $X$  van de ellips geldt

$$d(X, F') + d(X, F) = r.$$

Heel vaak wordt de ellips door deze eigenschap gedefinieerd. Uit de figuur kunnen we ook de bekende spiegeleigenschap van de ellips aflezen: stralen vanuit het brandpunt  $F'$  worden door de ellips teruggekaatst naar het middelpunt  $F$  van de richtcirkel. Door spiegeling van de figuur in de middelloodlijn van  $FF'$  zien we dat we in de constructie van de ellips de rollen van  $F$  en  $F'$  kunnen verwisselen (bij een andere richtcirkel); daarom noemen we ook  $F$  een brandpunt van de ellips.

In figuur 13, rechts, is de rechtertak van de hyperbool de conflictlijn bij de centra: het brandpunt  $F'$  en de richtcirkel  $C$  met straal  $r$ , die het andere

brandpunt  $F$  als middelpunt heeft. Uit de figuur lezen we af: voor ieder punt  $X$  van de rechters tak van de hyperbool geldt

$$d(X, F) - d(X, F') = r.$$

Door rolverwisseling van  $F$  en  $F'$  vinden we de linkertak van de hyperbool.

## 5. KWADRATISCHE VORMEN

De algemene  $n$ -dimensionale roosters worden bestudeerd in de getallentheorie in verband met kwadratische vormen in  $n$  veranderlijken met gehele coëfficiënten. Het oorspronkelijke werk van VORONOÏ had betrekking op de theorie van de  $n$ -dimensionale roosters. Omdat ook DIRICHLET aan deze problemen werkte worden de Voronoï-cellen ook wel Dirichlet-cellen genoemd.

In deze paragraaf zullen we dit toelichten aan de hand van één eenvoudig voorbeeld. We zoeken **gehele getallen**  $x$  en  $y$  die voldoen aan de vergelijking

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 = 1. \quad (1)$$

Misschien vind je de oplossingen heel snel door invullen. We laten zien hoe de oplossingen op systematische wijze gevonden kunnen worden. Waarom worden vergelijkingen van dit type bestudeerd?

In de school van PYTHAGORAS bestond grote belangstelling van geheeltallige oplossingen van de vergelijking  $x^2 + y^2 = z^2$ . De drietallen  $(x, y, z)$  van gehele getallen die aan deze vergelijking voldoen zijn met eenvoudige formules te beschrijven en worden *Pythagorische drietallen* genoemd. Zij hangen ten nauwste samen met de Stelling van PYTHAGORAS. Later bestudeerde DIOPHANTOS vergelijkingen van het type  $x^2 + y^2 = z^3$ . DIOPHANTOS zocht geheeltallige oplossingen; daarom worden vergelijkingen waarbij men geheeltallige oplossingen vraagt ook nu nog *Diophantische vergelijkingen* genoemd. FERMAT onderzocht Diophantische vergelijkingen van het type  $x^2 + y^2 = p$ , waarin  $p$  een priemgetal is (en nog vele andere vergelijkingen!) Later hebben EULER en LAGRANGE dit onderzoek uitgebreid naar de studie van Diophantische vergelijkingen van de vorm  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = n$ , waarin  $A, B, C$  geheel, en  $n$  geheel en positief; verder is de vorm  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  positief definitief, dat wil zeggen, voor alle  $x$  en  $y$ , niet beide 0, is de vorm positief.

GAUSS ontdekte het verband tussen positief definitieve vormen en wat we nu inwendige producten noemen. Om dit verband uit te leggen keren we terug naar vergelijking 1. Kies vectoren  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  in het vlak zó dat  $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{2}$  en de positieve hoek  $\vartheta$  tussen de vectoren voldoet aan  $\cos \vartheta = 3/\sqrt{10}$ . Beschouwt men meer algemeen de positief definitieve vorm  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , dan wordt de laatste formule  $\cos \vartheta = B/\sqrt{AC}$ ; dat hierdoor een hoek gedefinieerd is, hangt ten nauwste samen met het feit dat de vorm positief definitief is. Als nu  $x$  en  $y$  gehele getallen zijn, dan vinden we

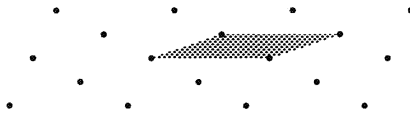
$$\begin{aligned} \|\mathbf{xp} + \mathbf{yq}\|^2 &= (\mathbf{xp} + \mathbf{yq}) \cdot (\mathbf{xp} + \mathbf{yq}) \\ &= 5x^2 + 6xy + 2y^2 \end{aligned}$$



De vector  $x\mathbf{p} + y\mathbf{q}$  is de plaatsvector van een punt in het rooster

$$E = \{ n\mathbf{p} + m\mathbf{q} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \},$$

en de zojuist gevonden formule leert ons dat het kwadraat van de norm van  $x\mathbf{p} + y\mathbf{q}$  een geheel getal is. De oorspronkelijke vergelijking kunnen we nu als volgt formuleren: zijn er roosterpunten in  $E$  met norm 1? Omdat het kwadraat van de norm van een punt uit  $E$  altijd een geheel getal is, is het voldoende om te laten zien dat er roosterpunten zijn met norm kleiner dan  $\sqrt{2}$ . Het



basisparallelogram opgespannen door  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  heeft oppervlakte 1. Beschouwt men meer algemeen de positief definitieve vorm  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , dan vindt men voor de oppervlakte  $\sqrt{AC - B^2}$ . In paragraaf 3 hebben we het Voronoi-diagram van zo'n rooster bestudeerd. De Voronoi-cellen zijn zeshoeken; de oppervlakte van zo'n Voronoi-cel moet gelijk zijn aan de oppervlakte van het basisparallelogram, dus gelijk aan 1. De Voronoi-cellen zijn zeshoeken met de eigenschap dat overstaande zijden parallel zijn; de afstand tussen overstaande zijden is gelijk aan een afstand tussen roosterpunten. De vraag is nu: hoe groot kan de afstand zijn tussen twee overstaande zijden van een Voronoi-cel? De minimale afstand is maximaal als de zeshoek regelmatig is. Noemen we de afstand tussen overstaande zijden van een regelmatige zeshoek  $a$ , dan vinden we voor de oppervlakte van de zeshoek  $a^2\sqrt{3}/2$ . Door dit gelijk aan 1 te stellen, vinden we voor het maximum van de minimale afstand  $\sqrt{2/\sqrt{3}}$  en dit is kleiner dan  $\sqrt{2}$ . De conclusie is dat vergelijking 1 inderdaad een oplossing heeft. Bekijken we nogmaals het rooster dan zien we ook snel de oplossing.

#### LITERATUUR

- [1] *Afstanden, grenzen & gebieden*, Voortgezette Meetkunde, deel 1, Nieuwe wiskunde tweede fase, Profiel N&T, Freudenthal instituut
- [2] *Conflictlijnen en Spiegels*, Voortgezette Meetkunde, deel 3, Nieuwe wiskunde tweede fase, Profiel N&T, Freudenthal instituut
- [3] JAN SMIT en LEON VAN DEN BROEK, *Envelop met inhoud (2)*, Euclides **72** (7), 263–265
- [4] IAN STEWART, *Cementing Relationships*, Scientific American, May 1998, 78–79



## Eindige Meetkunde

A.J. van Zanten

TU Delft, Faculteit ITS, Mekelweg 4, 2628 CD Delft

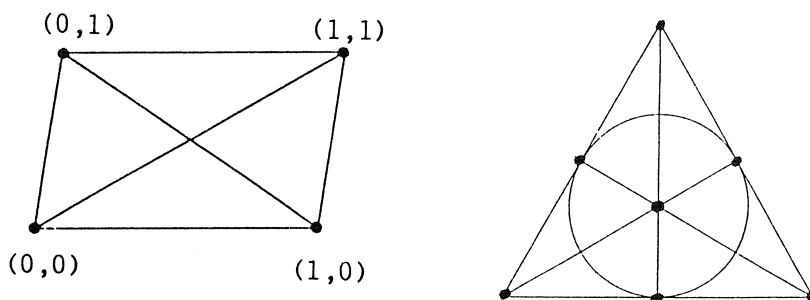
### 1. INLEIDING

Zoals bekend wordt de meetkunde zoals die nu reeds meer dan 2000 jaar onderwezen wordt op (middelbare) scholen de Euclidische meetkunde genoemd. Euclides trad op als een soort redakteur die alle destijds bekende meetkunde-kennis verzamelde en in een logische volgorde rangschikte. Hij ging uit van 5 postulaten die niet bewezen werden en waarvan we hier alleen het eerste en het vijfde vermelden, omdat de overige drie in onze voordracht geen rol zullen spelen.

1. Door elk tweetal punten kan precies één rechte lijn getrokken worden.
5. Door een punt buiten een rechte lijn gaat precies één andere rechte lijn parallel aan de gegeven lijn.

Voor al het vijfde postulaat heeft de wiskunde-gemoederen eeuwenlang bezig gehouden. Tot +1830 probeerde men het te bewijzen uitgaande van de eerste vier, hetgeen niet lukte. In de jaren daarna liet men het postulaat soms weg of men veranderde de inhoud, hetgeen aanleiding gaf tot andere meetkonden. Zulke niet-Euclidische meetkonden lijken op het eerste gezicht "onnatuurlijk", omdat sommige van hun eigenschappen intuïtief als onjuist worden ervaren. Echter moet men dan wel bedenken dat het Euclidische vlak zelf een forse abstraktie is. Waar immers in het heelal vindt men een model van een zich naar alle kanten uitstrekking plat vlak? Integendeel, een boloppervlak is veel "natuurlijker". Als we afspreken dat op een dergelijk oppervlak de grote bolcirkels de "lijnen" zijn, dan snijden twee lijnen elkaar altijd in precies één punt. Parallele lijnen bestaan niet in dit model.

In de 17-de eeuw ontstond de Cartesische of analytische meetkunde. Punten worden voorgesteld door reële getallenparen  $(x, y)$  en een (rechte) lijn  $l$  wordt gedefinieerd door een lineaire vergelijking  $ax + by = c$ , voor vaste  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Een lijn  $l' (\neq l)$  vastgelegd door  $a'x + b'y = c'$  heeft precies één punt gemeen met  $l$ , als  $ab' \neq ba'$ . Neemt men een punt buiten  $l$ , dan is het duidelijk dat er precies één lijn door gaat parallel aan  $l$ , met vergelijking  $ax + by = d (\neq c)$ . Aldus is het koördinatenvlak  $\mathbb{R}^2$  een *model* voor het Euclidische vlak. Bij het verifiëren van de twee postulaten maakt men gebruik van de in  $\mathbb{R}$  gedefinieerde bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen door getallen  $\neq 0$ . Wanneer men zich dit realiseert dient zich onmiddellijk een ander model aan van het Euclidische vlak en wel het rationale koördinatenvlak  $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \mid$



FIGUUR 1.

$x, y \in \mathbb{Q}$ . Zowel  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{Q}^2$  zijn voorbeelden van een *affien vlak*, dat algemeen wordt gedefinieerd als bestaande uit een puntenverzameling  $P$  en een familie  $L$  van deelverzamelingen van  $P$ , de lijnenverzameling, zodanig dat de elementen van  $P$  en  $L$  aan postulaten 1 en 5 voldoen. Met de voorbeelden  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{Q}^2$  voor ogen, komt men nu al gauw op het idee om het coördinatenvlak  $\mathbb{F}^2$  te beschouwen, waarbij  $\mathbb{F}$  een of ander eindig getallenlichaam is, waarin dus de eerder genoemde elementaire bewerkingen ook mogelijk zijn. Het resultaat is een eindige meetkunde, of preciezer, een eindig affien vlak. Hieronder (links) is de meest eenvoudige eindige meetkunde afgebeeld, die men analoog aan  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{Q}^2$ , met  $(GF(2))^2$  zou kunnen aanduiden. Hier is  $GF(2)$  het getallenlichaam bestaande uit de getallen 0 en 1, waarmee men rekt modulo 2. Gangbaarder is echter om te spreken over de affiene meetkunde  $AG(2, 2)$ . De eerste 2 slaat op het feit dat de vektorruimte die er aan ten grondslag ligt dimensie 2 heeft. De tweede 2 slaat op  $GF(2)$ . Algemeener bestaan er affiene meetkunden  $AG(m, q)$ , waarbij  $q$  een macht van een priemgetal is. Eindige meetkunden met  $m > 2$  zullen we hier echter niet aanvoeren. Evenmin zullen we  $q$ -waarden beschouwen anders dan de eerste macht van een priemgetal.

Met nadruk wijzen we erop dat de enige punten in  $AG(2, 2)$  de door een dikke stip aangegeven punten zijn. Elke lijn bevat dus precies twee punten. In totaal bevat de meetkunde  $AG(2, 2)$  vier punten en zes lijnen. De lijn door  $(0, 0)$  en  $(1, 1)$  correspondeert met de vergelijking  $x + y = 0$ , en de lijn door  $(0, 1)$  en  $(1, 0)$  met  $x + y = 1$ . Deze lijnen zijn dus parallel! Het zal nu duidelijk zijn dat  $AG(2, 2)$  3 paren parallelle lijnen bevat.

Voegt men in het Euclidische vlak aan elke bundel parallelle lijnen een oneigenlijk punt toe, waarin die lijnen geacht worden elkaar te snijden, dan krijgt men, zoals bekend, het gewone *projektieve vlak*. Alle oneigenlijke punten liggen daarin op een nieuwe lijn, de oneigenlijke rechte. In plaats van postulaat 5 heeft men nu de voor een projektief vlak karakteristieke eigenschap dat elk tweetal lijnen precies één punt gemeen heeft. Iets dergelijks kan men doen met eindige affiene vlakken. Het affiene vlak  $AG(2, 2)$  gaat aldus over in een projektief vlak met 7 punten en 7 lijnen, het zogenaamde Fano vlak (zie fig. 1). Men duidt deze meetkunde wel aan met  $PG(2, 2)$ . De lezer wordt aangemoedigd om

alvast na te gaan hoe de rechter figuur uit de linker ontstaat.

In de voordracht gaan we in op een aantal voor de hand liggende vragen, zoals welke eindige affiene en projectieve vlakken er mogelijk zijn, hoeveel punten en lijnen ze bevatten, etc., en, eventueel, bekijken we een generalisatie van het eindige projectieve vlak, namelijk het symmetrische design.

## 2. AFFIENE VLAKKEN

We herhalen nog eens de definitie van een affien vlak uit de Inleiding in een iets uitgebreidere vorm.

### DEFINITIE

*Een affien vlak is een geordend paar  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ , waarin  $\mathcal{P}$  een niet-lege verzameling elementen is die punten worden genoemd, en waarin  $\mathcal{L}$  een niet-lege familie van deelverzamelingen van  $\mathcal{P}$  is, lijnen geheten, die voldoen aan de volgende drie eigenschappen:*

- A. Als  $P$  en  $Q$  verschillende punten zijn, dan is er precies één lijn  $l$  zodanig dat  $P \in l$  en  $Q \in l$ . (We schrijven  $l(P, Q)$ .)*
- B. Als  $P$  een punt is niet op  $l$  gelegen, dan is er precies één lijn  $m$  zodanig dat  $P \in m$  en  $l \cap m = \emptyset$ . (We schrijven  $l \parallel m$  en we zeggen dat  $l$  en  $m$  parallel zijn.)*
- C. Er zijn tenminste twee lijnen en elke lijn bevat tenminste twee punten.*

Het derde axioma voorkomt het bestaan van triviale "meetkunden" die uit één enkel punt of één enkele lijn bestaan. Een stelsel axioma's is *konsistent* zodra er een *voorbeeld*, ook wel *model* geheten, bestaat dat voldoet aan alle axioma's. Zo'n model toont dan aan dat het stelsel kontradiktievrij is. In de Inleiding bespraken we reeds een aantal modellen, eindige zowel als oneindige, van een affien vlak. Zoals we opmerkten bestaat het kleinste affiene vlak  $AG(2, 2)$  uit vier punten en zes lijnen. We hadden dit vlak analytisch, met behulp van vergelijkingen, ingevoerd. We kunnen het ook synthetisch beschrijven, zoals het volgende voorbeeld laat zien.

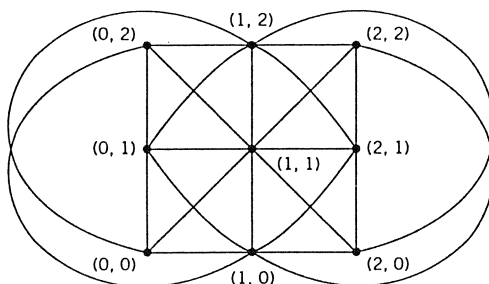
### VOORBEELD 1

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{A, B, C, D\}, \\ \mathcal{L} &= \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.\end{aligned}$$

Door te stellen  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (0, 1)$  en  $D = (1, 1)$  vinden we het verband met  $AG(2, 2)$ . Men zegt wel dat de linkerfiguur in fig. 1 de koördinatisering is van de meetkunde van Voorbeeld 1.

We geven nog een voorbeeld van een affien vlak.

### VOORBEELD 2



FIGUUR 2.

De puntenverzameling bevat negen punten:

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}.$$

De lijnenverzameling  $\mathcal{L}$  bestaat uit de volgende twaalf deelverzamelingen:

$$\begin{array}{cccc} \{A, B, C\} & \{A, E, I\} & \{A, D, G\} & \{C, E, G\} \\ \{D, E, F\} & \{B, F, G\} & \{B, E, H\} & \{B, D, I\} \\ \{G, H, I\} & \{C, D, H\} & \{C, F, I\} & \{A, F, H\} \end{array}$$

Fig. 2 toont een koördinatisering van dit affiene vlak.

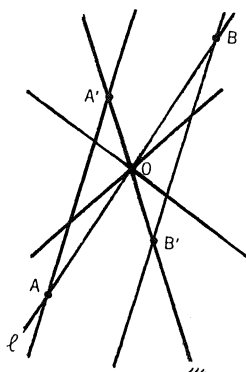
De elementen van  $\mathcal{P}$  zijn nu geïdentificeerd met paren getallen uit het getallenlichaam  $GF(3)$ . Dit bestaat uit de getallen 0, 1 en 2, waarmee men rekt mod 3. In het bijzonder heeft men de volgende identifikatie:  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (2, 0)$ ,  $D = (0, 1)$ ,  $E = (1, 1)$ ,  $F = (2, 1)$ ,  $G = (0, 2)$ ,  $H = (1, 2)$ ,  $I = (2, 2)$ . Elke lijn bevat precies drie punten en door elk punt gaan vier lijnen. Analoog aan de affiene vlakken  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{Q}^2$  en  $(GF(2))^2$  kan met de koördinatisering van de meetkunde uit Voorbeeld 2 met  $(GF(3))^2$  aanduiden. Gangbaarder is echter de notatie  $AG(2, 3)$ . De lijnen kan men vinden door het oplossen van vergelijkingen  $ax + by = c$ , in  $GF(3)$ . Zo heeft  $x + 2y = 2$  als oplossingen voor  $(x, y)$  de paren  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$  en  $(1, 2)$ . Merk verder op dat er vier verzamelingen parallelle lijnen zijn, met drie lijnen elk. Zo'n verzameling noemen we een parallelle bundel.

De eigenschappen van de meetkunde uit Voorbeeld 2 zijn karakteristiek voor affiene vlakken. Ze zijn een gevolg van een algemene stelling die we nu zullen bewijzen.

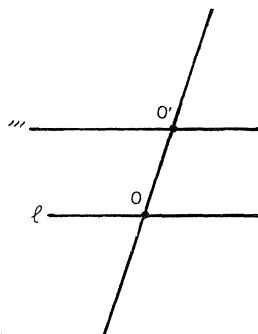
#### STELLING 2.1

*Zijn  $l$  en  $m$  twee verschillende lijnen in een affien vlak, dan is er een één-één duidige (bijektieve) afbeelding tussen de punten van  $l$  en die van  $m$ .*

BEWIJS



FIGUUR 3.



- (i) Stel  $l \cap m = \{O\}$ ,  $O \in \mathcal{P}$ . Kies  $A \in l$  en  $A' \in m$ , beide  $\neq O$ . Voor elk punt  $B \in l$ ,  $B \neq A, O$ , is er een lijn  $k$  door  $B$  evenwijdig aan  $l(A, A')$ . De lijn  $k$  kan niet evenwijdig zijn aan  $m$  en dus snijdt  $k$  de lijn  $m$  in een punt  $B'$ . We definiëren de afbeelding  $f$  die  $l$  op  $m$  afbeeldt door  $f(O) = O$ ,  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  voor alle  $B \neq A, O$ . Het is gemakkelijk in te zien dat  $f$  bijkettief is.
- (ii) Stel  $l \cap m = \emptyset$ . Kies  $O \in l$  en  $O' \in m$ . Nu geldt  $l \cap l(O, O') = O$ , en dus is er volgens (i) een bijkettieve afbeelding  $f$  tussen  $l$  en  $l(O, O')$ . Soortgelijk is er een bijkettieve afbeelding  $g$  tussen  $l(O, O')$  en  $m$ . De samengestelde functie  $g \circ f$  is dus een bijkettieve afbeelding tussen  $l$  en  $m$ .  $\square$

Uit Stelling 2.1 volgt onmiddellijk dat alle lijnen in een eindig affien vlak evenveel - zeg  $n$  - punten bevatten. Dit getal  $n$  heet de *orde* van het vlak. Een aantal andere gevolgen van Stelling 2.1 vatten we samen in Stelling 2.2.

#### STELLING 2.2

Laat  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  een affien vlak van orde  $n$  zijn, dan geldt:

- (i)  $\mathcal{P}$  bevat  $n^2$  punten;
- (ii) door elk punt gaan  $n + 1$  lijnen;
- (iii) elke evenwijdige bundel bevat  $n$  lijnen;
- (iv) het totale aantal lijnen is  $n(n + 1)$ ;
- (v) er zijn  $n + 1$  bundels evenwijdige lijnen.

We bewijzen alleen (i). De andere onderdelen van Stelling 2.2 worden met soortgelijke argumenten bewezen.

#### BEWIJS VAN (I)

Stel  $l = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  is een lijn en  $B \notin l$ . Laat verder  $m_1$  de lijn  $l(A_1, B)$  zijn en laat  $m_i$  de lijn zijn door  $A_i$  evenwijdig aan  $m_1$ , voor  $2 \leq i \leq n$ . De

lijnen  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , bevatten samen  $n^2$  punten. Als  $P$  een punt is uit  $\mathcal{P}$ , dan is ofwel  $P \in m_1$  of  $P \notin m_1$ . In het laatste geval is er een lijn  $k$  door  $P$  evenwijdig aan  $m_1$ , die  $l$  in één van de punten  $A_2, A_3, \dots, A_n$  zal snijden. Dus is  $k = m_i$  voor een zekere  $i$ . Elk punt  $P \in \mathcal{P}$  ligt dus op een van de lijnen van de bundel  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ .  $\square$

Een voor de hand liggende vraag is voor welke waarden van  $n$  er eindige affiene vlakken van orde  $n$  bestaan. Het antwoord hierop is niet bekend. Zoals we gezien hebben bestaan er affiene vlakken voor  $n = 2$  en  $n = 3$  en wel  $AG(2, 2)$  en  $AG(2, 3)$ . Omdat er bij elk priemgetal  $p$  een getallenlichaam  $GF(p)$  bestaat, zal er ook een koördinatenvlak  $(GF(p))^2$  bestaan en dus een affien vlak  $AG(2, p)$  van orde  $p$ . Nog algemener bestaat er een lichaam  $GF(q)$ , als  $q = p^r$ , voor  $p$  priem en  $r \in \mathbb{Z}^+$ . Dus is er een affien vlak  $AG(2, q)$  van orde  $q$ . Met nadruk wijzen we er hier op dat voor een zekere waarde van  $n$  er verschillende (niet isomorfe) affiene vlakken van die orde kunnen bestaan.

### 3. PROJEKTIEVE VLAKKEN

In de Inleiding bespraken we reeds de mogelijkheid van meetkunden waarin het parallellenaxioma niet geldt en waarin elke twee lijnen precies één punt gemeen hebben. Omdat alle lijnen in zo'n *projektieve meetkunde* dezelfde rol spelen, is een dergelijke structuur vanuit wiskundig oogpunt in zekere zin interessanter dan een affiene meetkunde. We geven eerst een precieze definitie van een *projektief vlak*.

#### DEFINITIE

*Een projektief vlak is een geordend paar  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ , waarin  $\mathcal{P}'$  een niet-lege verzameling elementen is, punten geheten, en waarin  $\mathcal{L}'$  een niet-lege familie van deelverzamelingen van  $\mathcal{P}'$  is, lijnen geheten, die voldoen aan de volgende eigenschappen:*

- A) *Als  $P$  en  $Q$  verschillende punten zijn, dan is er precies één lijn  $l$  zodanig dat  $P \in l$  en  $Q \in l$ . (We schrijven  $l(P, Q)$ .)*
- B) *Als  $l$  en  $m$  twee verschillende lijnen zijn, dan is er precies één punt  $P$ , zodanig dat  $P \in l$  en  $P \in m$ .*
- C) *Er zijn tenminste twee lijnen en elke lijn bevat tenminste drie punten.*

Ga na dat men in plaats van B) ook kan eisen dat elk tweetal verschillende lijnen een niet-lege doorsnede hebben. Het zal direkt opvallen dat A) en B) elkaars *duale* zijn in de zin dat ze in elkaar overgaan als men "punt" door "lijn" en "lijn" door "punt" vervangt. Bovendien is het eenvoudig aan te tonen dat een projektief vlak tenminste drie lijnen bevat en dat elk punt bevat wordt in tenminste drie lijnen. De volledige definitie van projektief vlak blijkt dus zelfduaal te zijn in bovengenoemde zin. Bijgevolg zal bij elke eigenschap in een projektief vlak een *duale eigenschap* horen die men verkrijgt door de woorden "punt" en "lijn" te verwisselen, alsmede duale begrippen als "ligt op" en "gaat



door” of ”collineair” (op één lijn liggen) en ”concurrent” (door één punt gaat). Heeft men een eigenschap bewezen, dan krijgt men de duale eigenschap er dus gratis bij.

Het kleinste projectieve vlak is het Fano vlak uit de Inleiding. Men kan dit ontstaan denken door aan elke parallelle bundel lijnen van het affiene vlak  $AG(2, 2)$  een nieuw oneigenlijk of ”oneindig” punt toe te voegen. Tevens voegt men een ”oneindige” lijn toe waarop alle oneindige punten liggen. Deze uitbreiding kan men voor elk affien vlak bewerkstelligen. Aangezien een affien vlak van orde  $n$  in totaal  $n^2$  punten bezit en  $n + 1$  bundels parallelle lijnen, heeft het korresponderende projectieve vlak  $n^2 + n + 1$  punten. Men zegt dan dat het projectieve vlak van orde  $n$  is. Het totale aantal lijnen in dit projectieve vlak bedraagt ook  $n^2 + n + 1$ , namelijk de  $n(n + 1)$  lijnen uit het affiene vlak en de oneindige lijn. De gelijkheid van het aantal punten en het aantal lijnen is een aspekt van het dualiteitsprincipe. Voorts liggen er op elke lijn  $n + 1$  punten en gaan er door elk punt  $n + 1$  lijnen.

De uitbreidingskonstruktie van hierboven kan ook worden omgedraaid. Verwijdert men uit een projectief vlak van orde  $n$  een lijn en ook alle punten die op die lijn liggen, dan krijgt men een affien vlak van orde  $n$ . Iets preciezer, laat  $l_\infty$  de geselecteerde lijn zijn. We definiëren bij elke lijn  $l \in \mathcal{L}'$ ,  $l \neq l_\infty$  een verzameling  $l_0 = \{P \mid P \in l, P \notin l_\infty\}$ . Voeren we nu in  $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{P}' \mid P \notin l_\infty\}$  en  $\mathcal{L} = \{l_0\}$ , dan vormt het paar  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  een affien vlak. Via deze konstrukties is de vraag naar het bestaan van een projectief vlak van orde  $n$  dus equivalent met de analoge vraag voor een affien vlak van orde  $n$ . Het is niet bekend of er affiene of projectieve vlakken bestaan die niet van priemmacht-orde zijn. Voor orde 6 en voor orde 10 is bewezen dat dergelijke vlakken *niet* bestaan. Voor  $n = 6$  was dit al lang bekend. Voor  $n = 10$  is het niet-bestaan pas in 1989 bewezen door middel van een computer-zoekprogramma. Voorts geldt voor een projectief vlak van zekere orde  $n$ , als het bestaat, dat dit niet uniek hoeft te zijn, zoals we ook reeds ten aanzien van affiene vlakken opmerkten. Zo bestaat er slechts één projectief vlak van orde  $n$  voor  $n = 2, 3, 4, 5, 7$  en 8 en wel de uitbreiding van  $AG(2, n)$  voor de betreffende  $n$ -waarde, die we met  $PG(2, n)$  aanduiden. In het algemeen bestaan er dus projectieve vlakken  $PG(2, q)$  als  $q$  een priemmacht is. Echter, voor  $n = 9$  zijn er vier verschillende (niet-isomorfe) projectieve vlakken bekend. Behalve  $PG(2, 9)$  is er nog een zelfduaal projectief vlak van orde 9 en bovendien twee vlakken die de duale van elkaar zijn.

#### 4. ORTHOGONALE LATIJNSE VIERKANTEN

Een *latijns vierkant* van orde  $n$  is een  $n \times n$ -matrix waarvan de elementen uit  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  komen en waarvan elke rij en elke kolom een permutatie is van  $0, 1, \dots, n - 1$ .

#### VOORBEELD 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

De matrices  $A$  en  $B$  zijn beide latijnse vierkanten van orde 5.

Een latijns vierkant gaat over in een *equivalent* latijns vierkant door één van de volgende operaties toe te passen:

- A) transponeren;
- B) permuteren van de rijen;
- C) permuteren van de kolommen;
- D) de getallen  $0, 1, \dots, n-1$  onderling permuteren.

Twee latijnse vierkanten  $A$  en  $B$  heten orthogonaal als alle  $n^2$  paren matrixelementen  $(a_{ik}, b_{ik})$ ,  $1 \leq i, k \leq n$ , verschillend zijn. De matrices  $A$  en  $B$  in Voorbeeld 3 zijn orthogonaal. Men spreekt van een *orthogonaal stelsel* latijnse vierkanten als elk tweetal vierkanten van dat stelsel orthogonaal is.

**STELLING 4.1** *Een orthogonaal stelsel latijnse vierkanten van orde  $n$  bevat hoogstens  $n-1$  vierkanten*

**BEWIJS**

Door operatie  $D$  toe te passen op de  $k$  vierkanten  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$  van het stelsel brengen we ze in standaardvorm, dat wil zeggen dat de eerste rij van elk vierkant gelijk is aan  $0, 1, \dots, n-1$ . Om het konstruktievoorschrift zo eenvoudig mogelijk te formuleren, nummeren we de rijen en kolommen van een  $n \times n$ -matrix met  $0, 1, \dots, n-1$ . Beschouw nu  $a_{1,0}^{(i)}$  voor  $i = 1, 2, \dots, k$ . Al deze matrixelementen moeten verschillend zijn, daar de paren  $(0, 0), (1, 1), \dots, (n-1, n-1)$  al voorkomen vanwege de standaardvorm der matrices. Bovendien geldt  $a_{1,0}^{(i)} \neq 1$ . Dus moet  $k \leq n-2$  zijn.  $\square$

Een orthogonaal stelsel bestaande uit  $n-1$  latijnse vierkanten heet *volledig*. Als  $n$  een priemmacht is, dan bestaat er een konstruktie voor zo'n volledig stelsel, die gebaseerd is op het eindige lichaam  $GF(n)$ . Laat  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  de elementen van  $GF(n)$  zijn in een of andere volgorde met  $f_0 = 0$ . De konstruktieregel luidt als volgt

$$a_{j,k}^{(i)} = m \iff f_i f_j + f_k = f_m,$$

voor  $1 \leq i \leq n-1$ . De matrices  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}$  vormen nu een volledig orthogonaal stelsel in standaardvorm. We bewijzen deze uitspraak niet, maar geven een voorbeeld.

**VOORBEELD 4**

De elementen van  $GF(5)$  zijn 0, 1, 2, 3, 4. Toepassen van het voorschrift geeft bijvoorbeeld  $a_{3,1}^{(2)} = 2$ , omdat  $f_2 f_3 + f_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 2 = f_2$ . Het volledige resultaat luidt:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Er zijn geen volledige stelsels van orde  $n$  bekend als  $n$  géén priemmacht is. Wel is aangetoond dat er voor elke  $n > 2$ , behalve voor  $n = 6$ , een orthogonaal paar bestaat. We merken op dat als  $n$  een priemmacht is er kennelijk een volledig orthogonaal stelsel latijnse vierkanten bestaat volgens bovenstaande constructie, terwijl voor dezelfde  $n$ -waarden er een affien (en projectief) vlak bestaat van die orde.

#### STELLING 4.2

*Voor  $n \geq 2$  bestaat er een affien vlak van orde  $n$  dan en slechts dan als er een volledig orthogonaal stelsel latijnse vierkanten bestaat van orde  $n$ .*

#### BEWIJS

We zullen laten zien hoe een affien vlak van orde  $n$  een latijns vierkant van orde  $n$  bepaalt. Laat  $\Gamma$  en  $\Gamma'$  twee van de  $n + 1$  bundels van evenwijdige lijnen zijn. De lijnen in  $\Gamma$  geven we aan met  $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$  en die van  $\Gamma'$  met  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ . Elk punt  $P$  van het affiene vlak kan nu gelabeld worden met het paar  $(i, j)$ , als  $P \in l_i \cap k_j$ . Er zijn nog  $n - 1$  bundels van evenwijdige lijnen over. We geven ze aan met  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ . In elke bundel  $\Gamma_k$  nummeren we de lijnen weer met  $0, 1, \dots, n - 1$ . Bij  $\Gamma_k$  hoort nu als volgt een latijns vierkant  $A^{(k)}$ . Het element  $a_{i,j}^{(k)}$  is gelijk aan  $m$  als  $P := (i, j)$  op de  $m$ -de lijn van  $\Gamma_k$  ligt. Stel  $a_{i,j}^{(k)} = a_{i,h}^{(k)}$ . In dat geval zouden de punten  $(i, j)$  en  $(i, h)$  op dezelfde lijn  $m \in \Gamma_k$  liggen. Echter zou dan  $m = l_i$  zijn. Tegenspraak. Alle elementen van de  $i$ -de rij van  $A^{(k)}$  zijn dus verschillend,  $0 \leq i \leq n - 1$ . Analoog blijkt dat de elementen in een willekeurige kolom van  $A^{(k)}$  alle verschillend zijn. Dus  $A^{(k)}$  is een latijns vierkant voor  $0 \leq k \leq n - 1$ .

Stel vervolgens  $(a_{i,j}^{(k_1)}, a_{i,j}^{(k_2)}) = (a_{p,q}^{(k_1)}, a_{p,q}^{(k_2)})$ . Dan zouden de punten  $(i, j)$  en  $(p, q)$  op dezelfde lijn liggen van  $\Gamma_{k_1}$  en ook op dezelfde lijn van  $\Gamma_{k_2}$ . Omdat twee verschillende punten precies één lijn vastleggen is dit niet mogelijk. De vierkanten  $A^{(k_1)}$  en  $A^{(k_2)}$  zijn dus orthogonaal, voor alle  $k_1$  en  $k_2$  met  $0 \leq k_1, k_2 \leq n - 1, k_1 \neq k_2$ . Dus vormen  $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(n-1)}$  een volledig orthogonaal stelsel latijnse vierkanten.

De redenering kan ook worden omgedraaid, om aan te tonen dat zo'n stelsel aanleiding geeft tot een affien vlak van orde  $n$ .  $\square$

Omdat een affien vlak van orde 10 niet bestaat, is er ook geen stelsel van 9 orthogonale latijnse vierkanten van orde 10. In 1959 is er voor het eerst een paar orthogonale latijnse vierkanten van orde 10 gekonstrueerd. Het is op dit ogenblik zelfs onbekend of er wel een drietal orthogonale latijnse vierkanten van orde 10 bestaan.

Zoals we al eerder opmerkten, zijn er geen affiene vlakken bekend die niet van priemmacht-orde zijn. Wel zijn er *noodzakelijke* voorwaarden bekend voor het bestaan van affiene vlakken. Een zeer bekende voorwaarde is die welke bekend staat als het Theorema van Bruck-Ryser.

STELLING 4.3

*Als  $n$  te schrijven is als  $4k + 1$  of  $4k + 2$ , voor één of ander natuurlijk getal  $k$ , dan is er geen affien vlak van orde  $n$ , tenzij  $n$  de som is van twee kwadraten.*

Een direkt gevolg is dat er geen affien vlak is van orde 6 of 21. Het niet-bestaan van een affien vlak van orde 10 wordt er echter niet mee aangetoond, daar  $10 = 3^2 + 1^2$ .

## 5. STELLINGEN IN EINDIGE PROJEKTIEVE VLAKKEN

In affiene en projectieve vlakken ontbreken een aantal elementen die typisch zijn voor de Euclidische meetkunde, zoals afstand, hoek, kongruentie, gelijkvormigheid, etc. Stellingen betrekking hebbend op affiene of projectieve vlakken zullen daarom altijd te maken hebben met incidenties van punten en lijnen, het enige begrip dat in de definitie-eigenschappen een rol speelt. We zullen hiervan enkele voorbeelden geven en beperken ons daarbij tot projectieve (eindige) vlakken. In affiene vlakken, waar vaak soortgelijke eigenschappen gelden, moet met altijd onderscheid maken tussen parallelle en niet-parallelle lijnen, hetgeen het formuleren van de stellingen moeizamer maakt.

Laat  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$  een eindig projectief vlak zijn. Laat voorts  $\mathcal{I}'$  de verzameling incidenties zijn gevormd door de paren punten en lijnen die incident zijn:

$$\mathcal{I}' = \{(P, l) \mid P \in \mathcal{P}', l \in \mathcal{L}', P \in l\}.$$

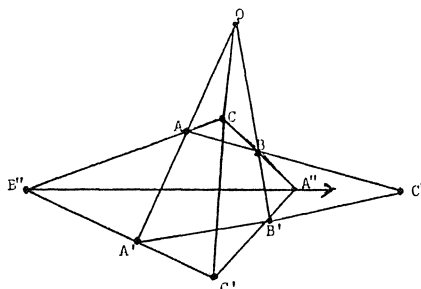
We definiëren nu een *figuur* als een tripel  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, \mathcal{I}_0)$  met  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}'$  en  $\mathcal{I}_0 = (\mathcal{P}_0 \times \mathcal{L}_0) \cap \mathcal{I}'$ .

De punten van een figuur nummeren we als  $P_1, P_2, \dots, P_k$  en de lijnen als  $l_1, l_2, \dots, l_m$ .

De *incidentiematrix* van een figuur is een  $m \times k$ -matrix  $A$  waarvoor geldt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } (P_j, l_i) \in \mathcal{I}_0 \\ 0, & \text{als } (P_j, l_i) \notin \mathcal{I}_0. \end{cases}$$

Vanzelfsprekend kan het gehele projectieve vlak worden voorgesteld door een incidentiematrix van  $n^2 + n + 1$  rijen en kolommen, als  $n$  de orde is van het vlak. Een figuur heet *gesloten* als op elke lijn minstens drie punten liggen en



FIGUUR 4.

door elk punt minstens drie lijnen gaan. De achter liggende gedachte hier is dat een lijn van een figuur die twee of minder punten van die figuur bevat niets "bijzonders" van die figuur laat zien. Immers, door twee punten gaat altijd precies één lijn en die lijn kan wel of niet tot de figuur behoren.

We zullen in Sectie 6 een stelling voor eindige projectieve vlakken afleiden die aansluit op de bekende stelling van Desargues die geldig is in het klassieke projectieve vlak  $\overline{E}_2$ .

#### STELLING 5.1 (Desargues)

*Zijn twee driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  centraal perspectief, dan zijn ze ook axiaal perspectief.*

of anders gezegd, gaan  $AA'$ ,  $BB'$  en  $CC'$  door één punt  $O$ , dan liggen  $A''$ ,  $B''$  en  $C''$  op één lijn (zie fig. 4). In het klassieke projectieve vlak is dit een gesloten figuur, een zogenaamde  $(10_3, 10_3)$ -konfiguratie, omdat elke lijn van de figuur 3 punten bevat van de figuur en door elk punt 3 lijnen gaan.

De stelling is een voorbeeld van een *sluitingsstelling*. In de bijbehorende incidentiematrix is elk der 30 enen een gevolg van alle overige elementen.

In een eindig projectief vlak geldt de stelling van Desargues niet zonder meer. Wel geldt altijd de volgende eigenschap.

#### STELLING 5.2 (Ostrom)

*In elk eindig projectief vlak met grondtal  $n$  komt minstens één desargues-konfiguratie voor als  $n > 2$  is.*

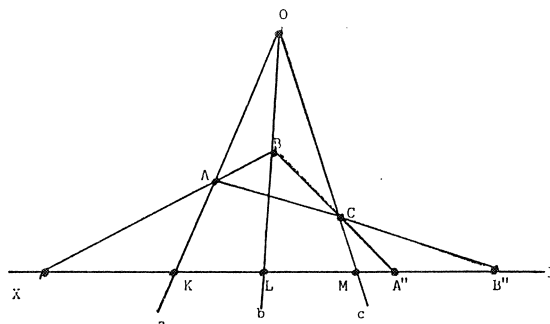
#### BEWIJS

Voor  $n = 3$  en  $n = 4$  geldt de stelling van Desargues (zie Sectie 6).

We nemen aan  $n \geq 5$ . Elke lijn bevat dan minstens 6 punten.

Kies een punt  $O$  en een lijn  $l$  niet door  $O$ . Kies verder 3 lijnen  $a, b$  en  $c$  door  $O$  die  $l$  snijden in respectievelijk  $K, L$  en  $M$ . Kies verder  $A''$  en  $B''$  op  $l$ , zodanig dat  $K, L, M, A''$  en  $B''$  verschillende punten zijn.

Kies verder nog een variabel punt  $A$  op  $a$ . Omdat  $A \neq B''$  is, er een eenduidig bepaalde lijn  $l(A, B'')$ . Daar  $l(A, B'') \neq c$  is, bestaat er een eenduidig bepaald



FIGUUR 5.

snijpunt  $C$  met  $c$ . Wegens  $C \neq A''$  is er ook een eenduidig bepaalde lijn  $l(C, A'')$ . Deze lijn verschilt van  $b$  en bepaalt dus eenduidig een snijpunt  $B$ . Als  $A$  en  $B$  samenvallen, dan is  $A = B = O$  en bepalen  $A$  en  $B$  géén lijn. Daarom sluiten we  $A = O$  uit, waarmee de lijn  $l(A, B)$  eenduidig is vastgelegd. Als  $l(A, B) = l$ , dan is  $A = K$  en  $B = L$  en wordt er geen snijpunt bepaald door  $l(A, B)$  en  $l$ . We sluiten daarom ook  $A = K$  uit, hetgeen aanleiding geeft tot het snijpunt  $X'$ . Dus hebben we voor alle  $n - 1$  punten van  $a$ ,  $\neq O$  en  $\neq K$ , een eenduidig punt  $X$  van  $l$  vastgelegd. We schrijven  $X = \varphi(A)$ .

Stel  $X = K$  voor één of andere  $A$ . Dan volgt achtereenvolgens  $B = O$ ,  $C = O$  en dus  $O$ ,  $A$  en  $B''$  collineair. Tegenspraak.

Stel  $X = L$ . Dan volgt  $B = L$ ,  $C = M$ , en dus  $M$ ,  $A$  en  $B''$  op één lijn. Tegenspraak.

Stel  $X = B''$ . Dan volgt  $A, B, C, B''$  en  $A''$  op één lijn. Tegenspraak.

Op  $l$  komen dus hoogstens  $n - 2$  punten in aanmerking als beeld van de afbeelding  $\varphi$ . Omdat er  $n - 1$  originelen zijn, liggen op  $a$  dus zeker twee verschillende punten  $A$  en  $A'$  met hetzelfde beeldpunt  $X$ . Dit geeft aanleiding tot een Desargues-konfiguratie.  $\square$

We merken nog op dat in verband met de vrijheid van keuze van achtereenvolgens  $O, l, a, b, c, A'', B''$  er meer dan één Desargues-konfiguratie zal optreden. Men kan met niet al te veel moeite afleiden dat er minstens  $2n^2(n^2 + n + 1) \binom{n+1}{5}$  van dergelijke figuren bestaan in een projectief vlak van orde  $n$ .

De volgende eigenschap die we gaan bewijzen gaat over *collineaties*. Een collineatie van een projectief vlak  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$  is een isomorfe afbeelding van dit vlak op zichzelf. Dit betekent dat er een bijektieve afbeelding  $\varphi : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$  bestaat, zodanig dat als  $A \in l(B, C)$ , dan  $\varphi(A) \in l(\varphi(B), \varphi(C))$ . Kort gezegd, de afbeelding  $\varphi$  beeldt lijnen af op lijnen. In  $\overline{E}^2$  is elke rotatie, elke translatie en elke spiegeling een collineatie. Een punt  $A$  heet *dekpunt* van  $\varphi$  als geldt  $\varphi(A) = A$ . Een lijn  $l$  heet *deklijn* van  $\varphi$  als geldt  $\varphi(l) = l$ .

### STELLING 5.3. (Baer)

*Elke collineatie van een projectief vlak heeft evenveel dekpunten als deklijnen.*

BEWIJS

Stel  $n$  is de orde van het vlak en  $\varphi$  is een collineatie. Laat verder  $d_\varphi$  het aantal dekpunten van  $\varphi$  zijn en  $d'_\varphi$  het aantal deklijnen. De verzameling  $V_\varphi$  bestaat uit de paren  $(A, l)$ , waarbij  $A \in l$  en  $A \in \varphi(l)$ . Duaal definiëren we  $W_\varphi$  als de verzameling paren  $(A, l)$ , waarbij  $A \in l$  en  $\varphi(A) \in l$ . Daar  $\varphi$  een bijektieve afbeelding is, bestaat  $\varphi^{-1}$  en is ook een bijektieve afbeelding en een collineatie. We duiden  $\varphi^{-1}$  gemakshalve aan met  $\psi$ . Er geldt dan  $d_\psi = d_\varphi$ ,  $d'_\psi = d'_\varphi$ ,  $W_\psi = V_\varphi$  en  $V_\psi = W_\varphi$ .

We zullen nu  $|V_\varphi|$  berekenen. Is  $l$  een deklijn, dan is  $(A, l) \in V_\varphi$  dan en slechts dan als  $A \in l$ . Omdat op  $l$  precies  $n + 1$  punten liggen, leveren de deklijnen van  $\varphi$  een bijdrage  $(n + 1)d'_\varphi$  aan  $V_\varphi$ . Is  $l$  géén deklijn, dan hebben  $l$  en  $\varphi(l)$  precies één punt  $A$  gemeen. Zo'n punt  $A$  ligt in  $V_\varphi$ . De totale bijdrage van de niet-deklijnen tot  $V_\varphi$  is dus  $n^2 + n + 1 - d'_\varphi$ . Dus hebben we

$$|V_\varphi| = n^2 + n + 1 + nd'_\varphi.$$

Duaal geldt

$$|W_\varphi| = n^2 + n + 1 + nd_\varphi.$$

Voor de inverse afbeelding  $\psi$  geldt

$$|W_\psi| = n^2 + n + 1 + nd_\psi.$$

Uit  $|V_\varphi| = |W_\psi|$  volgt nu  $d_\psi = d'_\varphi$ . Vanzelfsprekend is ook  $d_\psi = d_\varphi$ , waarmee de Stelling bewezen is.  $\square$

## 6. DE PROJEKTIEVE VLAKKEN $PG(2, q)$

Zoals we eerder aantoonde levert elk affien vlak  $AG(2, q)$  een projectief vlak  $PG(2, q)$  via het proces van projectieve afsluiting. We zullen deze projectieve vlakken nu op een iets andere manier realiseren. We beginnen met de driedimensionale vektorruimte  $V(3; GF(q))$  waarbij de scalaires de elementen zijn van het eindige lichaam  $GF(q)$ . Korthedshalve noemen we deze ruimte  $V_q$ . We definiëren nu als punten de ééndimensionale deelruimten van  $V_q$  en als lijnen de tweedimensionale deelruimten. Het is vrij eenvoudig om te verifiëren dat deze punten en lijnen voldoen aan de axioma's van een projectief vlak. Aldus hebben we het projectieve vlak  $PG(2, q)$  gekregen zonder over oneindige punten te hebben gesproken. Dit model staat bekend als het *schovenmodel*. Het grote voordeel ervan is dat we er in kunnen "rekenen" via de vektorruimte  $V_q$ . Een punt  $A$  bijvoorbeeld wordt voorgesteld door de lineaire deelruimte  $\{\underline{x} \mid \underline{x} = \alpha \underline{a}, \alpha \in GF(q), \underline{a} \neq \underline{0}\}$ , kortweg  $\underline{x} = \alpha \underline{a}$ . Enigszins slordig wordt  $A$  wel voorgesteld door  $\alpha \underline{a}$ , waarbij  $\alpha$  een willekeurig vast element  $\neq 0$  uit  $GF(q)$  is. De vektoren  $\alpha \underline{a}$  en  $\alpha' \underline{a}$ ,  $\alpha, \alpha' \neq 0$ , representeren dus hetzelfde punt  $A$ . Twee verschillende punten  $A$  en  $B$  worden voorgesteld door  $\underline{x} = \alpha \underline{a}$  respectievelijk  $\underline{x} = \beta \underline{b}$ , met  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  onafhankelijke vektoren. Er is precies één tweedimensionale deelruimte die beide ééndimensionale deelruimten bevat namelijk  $\{\underline{x} \mid \underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}, \lambda, \mu \in GF(q)\}$ , ofwel  $\underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ . Anders gezegd, de twee verschillende punten  $A$  en  $B$  zijn incident met precies één lijn.

Ook kunnen we nu punten voorstellen door tripels getallen uit  $GF(q)$ , via de keuze van een basis in  $V_q$ . Als  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  een basis is van  $V_q$ , dan is elke vektor

$\underline{x} \in V_q$  te schrijven als  $\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \underline{e}_i \equiv x^i \underline{e}_i$  (Einsteinconventie). Kolomvectoren  $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)^T (\neq \underline{0})$  en  $\underline{y} = (y^1, y^2, y^3)^T (\neq \underline{0})$  heten equivalent als er een  $\lambda \in GF(q)$  bestaat met  $x^i = \lambda y^i$ , voor  $i = 1, 2, 3$ . Deze equivalentierelatie brengt in  $V_q \setminus \{0\}$  een klassenindeling voort. Als  $\underline{0}$  wordt toegevoegd aan alle klassen zijn de klassen juist de eendimensionale deelruimten van  $V_q$  die we als de punten van  $PG(2, q)$  gedefinieerd hebben. *Elk* tripel uit een equivalentieklasse bepaalt eenduidig een punt van het projectieve vlak. We spreken van *puntkoördinaten*.

Een tweedimensionale deelruimte van  $V_q$  kan gegeven worden door een vergelijking

$$l_1 x^1 + l_2 x^2 + l_3 x^3 = 0,$$

ofwel door  $l_i x^i = 0$  met  $(l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0)$ . De vergelijking  $m_i x^i = 0$  stelt dezelfde deelruimte voor als  $m_i = \lambda l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , en  $\lambda \neq 0$ . We krijgen zo opnieuw een klassenindeling van equivalente tripels, *lijnkoördinaten* geheten, daar elk tripel uit een zekere klasse dezelfde, bij die klasse behorende lijn uit  $PG(2, q)$  definieert. Incidentie van een punt  $\underline{p} = (p^1, p^2, p^3)^T$  en een lijn  $\underline{l} = (l_1, l_2, l_3)$  wordt nu gekarakteriseerd door

$$l_i p^i = 0.$$

Kortom, we krijgen zo de mogelijkheid van een *analytische*, eindige, projectieve meetkunde.

We zullen nu analytisch bewijzen dat de stelling van Desargues geldt in elk projectief vlak van het type  $PG(2, q)$ . We verwijzen opnieuw naar fig. 4.

#### BEWIJS

Omdat  $P$  op  $l(A, A')$  ligt, kunnen we voor een representerende vektor van  $P$  schrijven  $\underline{p} = \alpha \underline{a} + \alpha' \underline{a}'$ . Bedenk hierbij dat de getallen  $\alpha$  en  $\alpha'$  vastliggen tot op een gemeenschappelijke skalar  $\lambda \in GF(q)$ . Door als representant van  $A$   $\alpha \underline{a}$  te nemen en van  $A'$  analoog  $\alpha' \underline{a}'$  kunnen we evengoed schrijven  $\underline{p} = \underline{a} + \underline{a}'$  (*normeren* van de koördinaten van  $A$  en  $A'$ ). Door geschikte normering van de koördinaten van  $B$  en  $B'$  en die van  $C$  en  $C'$  kunnen we bereiken dat tevens geldt  $\underline{p} = \underline{b} + \underline{b}'$  en  $\underline{p} = \underline{c} + \underline{c}'$ . Dus dan is  $\underline{b} + \underline{b}' = \underline{c} + \underline{c}'$  ofwel  $\underline{b} - \underline{c} = \underline{c}' - \underline{b}'$ . In de laatste gelijkheid staat links een punt van  $l(B, C)$  en rechts een punt van  $l(B', C')$ . Dit moet dus het snijpunt  $X$  van deze lijnen zijn, gerepresenteerd door  $\underline{x} = \underline{b} - \underline{c}$ . Evenzo blijkt  $\underline{y} = \underline{c} - \underline{a}$  en  $\underline{z} = \underline{a} - \underline{b}$  representanten te zijn van  $Y$  (snijpunt van  $l(A, C)$  en  $l(A', C')$ ) respectievelijk  $Z$  (snijpunt van  $l(A, B)$  en  $l(A', B')$ ).

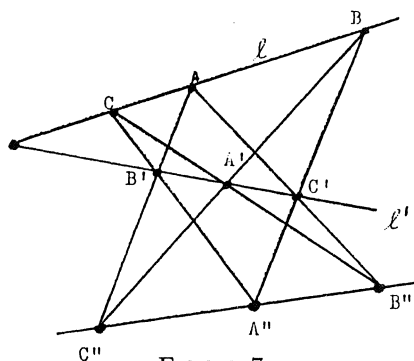
Omdat  $\underline{x} + \underline{y} = \underline{z} = \underline{b} - \underline{c} + \underline{c} - \underline{a} + \underline{a} - \underline{b} = \underline{0}$ , zijn  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  en  $\underline{z}$  afhankelijk en liggen in één vlak. Dus  $X, Y$  en  $Z$  zijn collineair.  $\square$

We benadrukken nog eens dat we de stelling van Desargues nu bewezen hebben voor alle projectieve vlakken  $PG(2, q)$ . Voor andere projectieve vlakken *hoeft* deze stelling niet te gelden. Men spreekt van *desarguïsche* en van *niet-desarguïsche* projectieve vlakken. Zo bestaan er voor  $n = 9$  naast het desarguïsche vlak  $PG(2, 9)$  tenminste drie niet-desarguïsche projectieve vlakken. Het omgekeerde van de stelling van Desargues geldt eveneens.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGUUR 6.



FIGUUR 7.

## STELLING 6.1

Als twee driehoeken in  $PG(2, q)$  axiaal perspectief zijn, zijn ze ook centraal perspectief.

Het bewijs wordt geleverd door in de stelling van Desargues de woorden punt en lijn te verwisselen evenals de woorden concurrent en collineair. In feite is de omgekeerde stelling de duale van de stelling van Desargues zelf. Vervangen we de stelling van Desargues en zijn omgekeerde door de uitspraak "Twee driehoeken in  $PG(2, q)$  zijn centraal perspectief dan en slechts dan als ze axiaal perspectief zijn", dan hebben we een voorbeeld van een *zelfduale* stelling. Zoals al eerder werd gezegd doet deze stelling uitspraak over het bestaan van een  $(10_3, 10_3)$ -konfiguratie. De bijbehorende incidentiematrix staat in fig. 6. Hierbij zijn de punten gekozen in de volgorde  $P, A, B, C, A', B', C', X, Y, Z$  en de lijnen in de volgorde  $XYZ, BCX, ACY, ABZ, B'C'X, A'C'Y, A'B'Z, PAA', PBB', PCC'$ .

Elk van de 30 incidenties is een gevolg van de overige 29. Het symmetrisch zijn van de incidentiematrix is voldoende om het zelfduale karakter van de stelling te demonstreren.

Een tweede stelling die we analytisch bewijzen is de stelling van Pappos.

## STELLING 6.2 (Pappos)

Als van een zeshoek de hoekpunten om en om op een lijn  $l$  en een lijn  $l'$  liggen, dan zijn de snijpunten van overstaande zijden collineair.

BEWIJS

Laat  $AB'CA'BC'$  de zeshoek zijn (zie fig. 7), met  $A, B$  en  $C$  op  $l$  en  $A', B', C'$  op  $l'$ . We definiëren de snijpunten van overstaande zijden als  $A'' = l(B', C) \cap l(B, C')$ ,  $B'' = l(C', A) \cap l(C, A')$  en  $C'' = l(A', B) \cap l(A, B')$ . Het snijpunt  $O_1$  van  $l$  en  $l'$  stellen we voor door  $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ . Verder kiezen we een punt  $O_2$  op  $l$  voorgesteld door  $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)^T$  en een punt  $O_3$  op  $l'$  voorgesteld door  $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ .

Daar  $A \neq O_1$  is, kunnen we  $A$  voorstellen door  $\underline{a} = (a, 1, 0)^T$ . Evenzo wordt  $B$  gerepresenteerd door  $\underline{b} = (b, 1, 0)^T$  en  $C$  door  $\underline{c} = (c, 1, 0)^T$ . Daar  $A' \neq O_1$  kunnen we  $A'$  voorstellen door  $\underline{a}' = (a', 0, 1)^T$ ,  $B'$  door  $\underline{b}' = (b', 0, 1)^T$  en  $C'$  door  $\underline{c}' = (c', 0, 1)^T$ . De lijnen  $l(B, C')$  en  $l(B', C)$  hebben lijncoördinaten  $(1, -b, -c')^T$  respectievelijk  $(1, -c, -b')^T$ . Het snijpunt  $A''$  van deze twee lijnen wordt dus voorgesteld door  $\underline{a}'' = (bb' - cc', b' - c', b - c)^T$ . Analoog is  $\underline{b}'' = (cc' - aa', c' - a', c - a)^T$  en  $\underline{c}'' = (aa' - bb', a' - b', a - b)^T$ . Voor de laatste drie vektoren geldt

$$\begin{vmatrix} bb' - cc' & cc' - aa' & aa' - bb' \\ b' - c' & c' - a' & a' - b' \\ b - c & c - a & a - b \end{vmatrix} = 0,$$

en dus zijn  $A''$ ,  $B''$  en  $C''$  collineair.  $\square$

Kombineren we de stelling van Pappos met zijn omgekeerde dan ontstaat weer een zelfduale stelling. We noteren de beschouwde zeshoek als  $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$  waarbij tegenoverelkaar liggende punten boven elkaar staan. Duaal hiermee is de zeszijde  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ , waarin  $a, b, c, a', b', c'$  respectievelijk de lijnen zijn  $ABC$ ,  $AB''C'$ ,  $AC''B'$  (lijnen door  $A$ ),  $A'B'C'$ ,  $A'BC''$ ,  $A'B''C$  (lijnen door  $A'$ ). Er geldt dan  $a \cap b' = B'$ ,  $a' \cap b = C'$ ,  $a \cap c' = C$  en  $a' \cap c = B'$ . Volgens de duale stelling van Pappos gaan nu de lijnen  $l(B, C')$ ,  $l(B', C)$  en  $l(B'', C'')$  door één punt, m.a.w.  $A''$  ligt op  $l(B'', C'')$ . Hieruit blijkt de bedoelde zelfdualiteit. De stelling hoort bij een  $(9_3, 9_3)$ -konfiguratie en geldt in elk projectief vlak  $PG(2, q)$  met voldoende punten en lijnen.

## 7. KEGELSNEDEN

In de vorige sectie werden punten en lijnen van  $PG(2, q)$  voorgesteld door tripels getallen uit  $GF(q)$  ofwel door vektoren uit  $V(3, GF(q))$ . Dit stelde ons in staat analytisch om te gaan met deze projectieve vlakken. In feite is dit een generalisatie van het projectief afsluiten van het affiene vlak  $E_2$ . Een punt  $(x_1, x_2)$  uit dit vlak wordt voorgesteld door  $(x_1, x_2, 1)$  of door elk veelvoud  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda)$ , met  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Met andere woorden, de eendimensionale deelruimten van  $V(2, \mathbb{R})$  representeren de punten van  $E_2$ . In dit model gaat de kwadratische vergelijking  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ , die in  $E_2$  een cirkel met straal  $r$  definieert, over in de homogene kwadratische vergelijking  $x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_3^2 = 0$ .

Algemener definieert  $a^2x_1^2 + b^2x_2^2 - c^2x_3^2 = 0$  een ellips in  $E_2$ , terwijl de homogene kwadratische vergelijking  $\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_ix_k$ , met  $a_{ik} = a_{ki} \in \mathbb{R}$ , in zijn meest algemene vorm een kegelsnede vastlegt.

Vanzelfsprekend heeft men ook dit generaliseerd voor eindige projectieve vlakken, zoals  $PG(2, q)$ . Men definieert een kegelsnede in  $PG(2, q)$  als de verzameling punten  $P$  waarvan de coördinaten voldoen aan de homogene kwadratische vergelijking

$$a_{ik}x^i x^k = 0.$$

In verband met het homogene karakter van de vergelijking is het direct duidelijk dat het voldoen van de coördinaten van een punt  $P$  onafhankelijk is van de representant uit de klasse van coördinatentripels van  $P$ . In het klassieke projectieve vlak kan het gebeuren dat er geen enkel tripel  $\neq (0, 0, 0)$  aan een gegeven vergelijking voldoet. De betreffende kegelsnede heet dan *nuldelig*. In  $PG(2, q)$  zijn géén nuldelige kegelsneden. We bewijzen deze eigenschap niet. Voor ons gemak schrijven we de vergelijking nog eens voluit

$$Q(x) = a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + a_{12}(x^1x^2) + a_{13}(x^1x^3) + a_{23}(x^2x^3).$$

Als  $Q$  het produkt is van twee- eventueel identieke -lineaire vormen, dan is de kegelsnede *ontaard* en bestaat uit een *paar snijdende lijnen* of een *dubbellijn*. Als  $Q$  irreducibel is, dan definieert hij een *niet-ontaarde kegelsnede*. In het projectieve vlak maakt men géén onderscheid tussen ellipsen, parabolen en hyperbolen. In  $E_2$  maakt men dit onderscheid door middel van het aantal snijpunten met de *öneigenlijke rechte*". In een projectief vlak ontbreekt zo'n speciale rechte.

We zullen ons nu bezighouden met de vraag door hoeveel punten een kegelsnede wordt bepaald in  $PG(2, q)$ . Elk vijftal punten zodanig dat er minstens vier op een rechte lijn  $l$  liggen, liggen op *elke* ontaarde kegelsnede die  $l$  bevat. Echter, elk vijftal punten, zodanig dat géén vier ervan op een rechte lijn liggen bepaalt eenduidig een kegelsnede. Om dit aan te tonen bewijzen we eerst een hulpstelling. (Voor het gemak maken we in het nu volgende in de notatie geen onderscheid tussen rij- en kolomvectoren.)

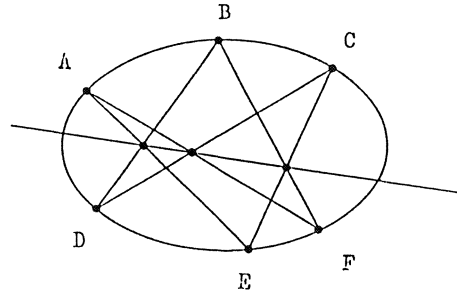
LEMMA 7.1

Als  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  en  $(e^1, e^2, e^3)$  vijf verschillende punten van  $PG(2, q)$  representeren, dan zijn tenminste twee van de volgende drie determinanten ongelijk aan 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^1e^2 & e^1e^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^1e^2 & e^2e^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^1e^3 & e^2e^3 \end{vmatrix}.$$

BEWIJS

Stel dat de eerste twee determinanten gelijk zijn aan 0. Dan is dus  $e^1e^2 = e^1e^3$  en  $e^1e^2 = e^2e^3$ . Als  $e^1 = 0$ , dan is of  $e^2 = 0$  of  $e^3 = 0$ . Dan zijn dus alle drie determinanten 0 en  $\underline{e}$  stelt hetzelfde punt voor als  $(0, 1, 0)$  of  $(0, 0, 1)$ . Tegenspraak.



FIGUUR 8.

Stel  $e^1 \neq 0$  en  $e^2 = e^3$ . Omdat  $\underline{e}$  en  $(1,0,0)$  verschillende punten voorstellen, moet  $e^2 \neq 0$  zijn. Echter impliceert dit  $e^1 = e^3 = e^2$  en dus is  $\underline{e} = \lambda(1, 1, 1)$ . Tegenspraak.  $\square$

#### STELLING 7.2

Laat  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$  en  $\underline{e}$  vijf verschillende punten representeren van  $PG(2, q)$ , zodanig dat niet vier ervan collineair zijn. Dan bestaat er precies één kegelsnede waar ze alle op liggen.

#### BEWIJS

- (i) Stel drie punten, zeg  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  en  $\underline{c}$ , liggen op een lijn  $l$ . De punten  $\underline{d}$  en  $\underline{e}$  bepalen eenduidig een lijn  $k (\neq l)$ . Het paar lijnen  $\{k, l\}$  vormt een ontaarde kegelsnede.
- (ii) Stel er is niet een drietal punten collineair. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we de vijf punten koördinatiseren als  $\underline{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\underline{b} = (0, 1, 0)$ ,  $\underline{c} = (0, 0, 1)$ ,  $\underline{d} = (1, 1, 1)$  en  $\underline{e} = (e^1, e^2, e^3)$ . Substitutie van  $\underline{a}, \underline{b}$  en  $\underline{c}$  in  $Q$  geeft  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ . Substitutie van  $\underline{d}$  geeft  $a_{12} + a_{23} + a_{13} = 0$ . Substitueren we nu  $\underline{e}$ , dan krijgen we  $a_{12}e^1e^2 + a_{23}e^2e^3 + a_{13}e^1e^3 = 0$ . Kiezen we  $a_{23} = 1$  (normering van  $Q$ ), dan krijgen we het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} = -1, \\ e^1e^2a_{12} + e^1e^3a_{13} = -e^2e^3. \end{cases}$$

Zonder beperking der algemeenheid mogen we nu, op grond van Lemma 7.1 aannemen dat

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^1e^2 & e^1e^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dus heeft het stelsel vergelijkingen een eenduidige oplossing.  $\square$

Een  $n$ -tal punten in een projectief vlak heet *vrijgeleg* als het geen collineair drietal bevat. Hiervoor bewijzen we de volgende stelling.

#### STELLING 7.3 (Pascal)

Zes vrij gelegen punten liggen dan en slechts dan op een kegelsnede als de snijpunten van overstaande zijden (diagonaalpunten) van een zeshoek met deze punten als hoekpunten collineair zijn.

## BEWIJS

Laat de zes vrijgelegen punten zijn  $A, B, C, D, E, F$ . Ze vormen de zeshoek  $\begin{pmatrix} A & B & C \\ F & E & D \end{pmatrix}$  (zie fig. 8). Laat  $A, B$  en  $C$  gerepresenteerd worden door respectievelijk  $\underline{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\underline{b} = (0, 1, 0)$  en  $\underline{c} = (0, 0, 1)$ . ( $ABC$  is met deze keuze de zogenaamde *fundamentealdriehoek*).

De drie punten  $D, E$  en  $F$  liggen dan en slechts dan op een omgeschreven kegelsnede van de fundamentealdriehoek als er drie getallen  $a_{12}, a_{13}, a_{23}$  bestaan, niet alle nul, en zodanig dat de coördinaten van  $D, E$  en  $F$  voldoen aan de vergelijking  $a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{23}x^2x^3 = 0$  (zie bewijs van Stelling 7.2). Wanneer  $D, E$  en  $F$  gerepresenteerd worden door respectievelijk  $\underline{d} = (d^1, d^2, d^3)$ ,  $\underline{e} = (e^1, e^2, e^3)$  en  $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$ , dan is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor:

$$\begin{vmatrix} d^1d^2 & d^1d^3 & d^2d^3 \\ e^1e^2 & e^1e^3 & e^2e^3 \\ f^1f^2 & f^1f^3 & f^2f^3 \end{vmatrix} = 0.$$

De lijnen  $l(B, F)$  en  $l(C, E)$  hebben lijncoördinaten  $(-f^3, 0, f^1)$  respectievelijk  $(e^2, -e^1, 0)$ . Het snijpunt  $X$  van deze twee lijnen heeft coördinaten  $(e^1f^1, e^2f^1, e^1f^3)$ . Analoog vinden we voor het snijpunt  $Y = l(C, D) \cap l(A, F)$  het coördinaten-tripel  $(d^1f^2, d^2f^2, d^2f^3)$  en voor  $Z = l(A, E) \cap l(B, D)$  het tripel  $(d^1e^3, d^3e^2, d^3e^3)$ . De drie diagonaalpunten  $X, Y$  en  $Z$  zijn collineair dan en slechts dan als

$$\begin{vmatrix} e^1f^1 & d^1f^2 & d^1e^3 \\ e^2f^1 & d^2f^2 & d^3e^2 \\ e^1f^3 & d^2f^3 & d^3e^3 \end{vmatrix} = 0.$$

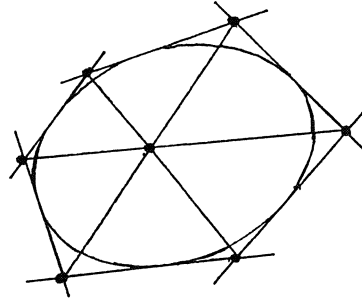
We vermenigvuldigen de rijen van deze laatste determinant achtereenvolgens met  $d^2d^3$ ,  $e^1e^3$  en  $f^1f^2$ , en delen dan de kolommen respectievelijk door  $e^1f^1$ ,  $d^2f^2$  en  $d^3e^3$ . (Ga na dat uit de voorwaarden van de stelling volgt dat geen van deze laatste drie getallen gelijk is aan 0). Het resultaat is een determinant die, tot op een permutatie van de kolommen na, gelijk is aan de eerste determinant in het bewijs. Hiermee is het bewijs geleverd.  $\square$

Strikt genomen staat slechts het eerste deel van deze stelling bekend als de stelling van Pascal:

*De diagonaalpunten van een in een niet-ontaarde kegelsnede beschreven enkelvoudige zeshoek zijn collineair.*

Het tweede deel is dan het omgekeerde van de stelling van Pascal. Ga ook na dat Stelling 7.3 opgevat kan worden als een generalisatie van de stelling van Pappos.

Om de stelling van Pascal te dualiseren hebben we het duale nodig van het begrip "kegelsnede". In feite definieert een homogene kwadratische vergelijking



FIGUUR 9.

$a_{ik}x^i x^k = 0$  een *puntenkegelsnede*. Duaal hiermee is een *lijnenkegelsnede* vastgelegd door een vergelijking  $b^{ik}y_i y_k = 0$ , waarbij  $y_1, y_2$  en  $y_3$  lijncoördinaten zijn. De lijnen die hierdoor bepaald worden kan men opvatten als de raaklijnen aan de bedoelde kegelsnede. Met het dualiteitsprincipe volgt nu uit de stelling van Pascal een uitspraak die bekend staat als de stelling van De Brianchon.

STELLING 7.4 (De Brianchon)

*De diagonalen van een om een niet-ontaarde kegelsnede beschreven enkelvoudige zeszijde zijn concurrent.*

#### LITERATUUR

- [1] L.M. BATTEN, *Combinatorics of Finite Geometries*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [2] M.K. BENNET, *Affine and Projective Geometry*, New York: Wiley and Sons, 1995.
- [3] N.L. BIGGS AND A.T. WHITE, *Permutation Groups and Combinatorial Structures*, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- [4] H.S.M. COXETER, *Projective Geometry*, New York: Springer Verlag, 1987.

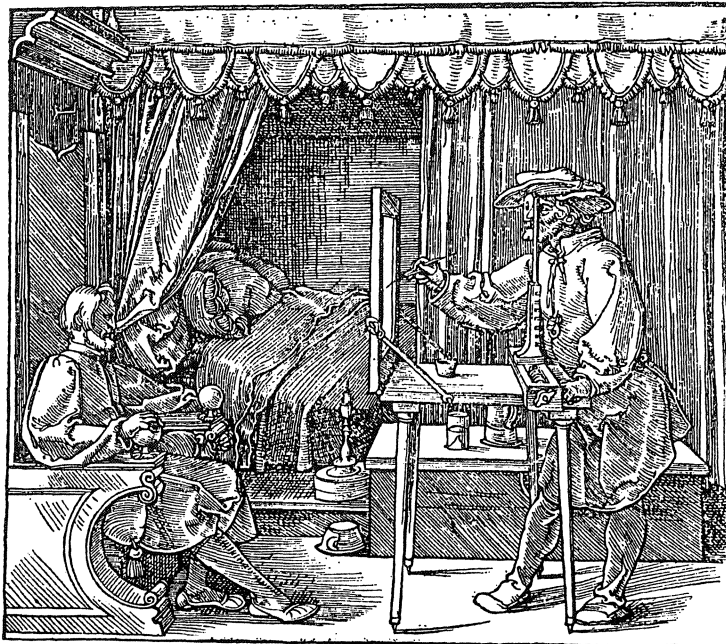
## Perspectief

Agnes Verweij

TU Delft, Faculteit ITS, Mekelweg 4, 2628 CD Delft  
e-mail: A.Verweij@twi.tudelft.nl

### 1. DE BEGINSLEN VAN PERSPECTIEF

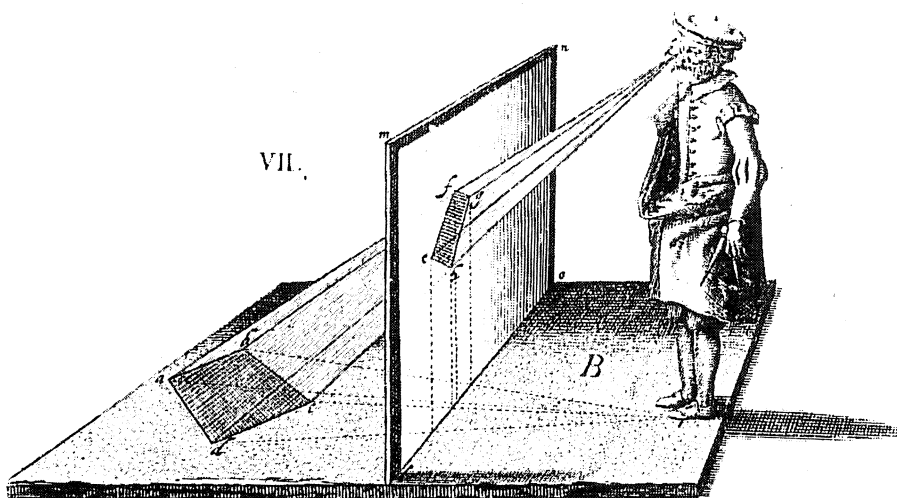
De onderstaande houtsnede maakte Albrecht Dürer (1471-1528) voor zijn boek *Underweysung der Messung* (1525), het eerste Noord-Europese leerboek over perspectief. De figuur laat zien dat (lineair) perspectief gebaseerd is op het bepalen van de snijpunten van wat momenteel in de onderbouw van onze middelebare scholen *kijklijnen* genoemd worden met een vlak tekenvenster of *tafereel*. Het in beeld te brengen object is op een horizontaal *grondvlak* geplaatst, terwijl het tafereel verticaal gehouden wordt.



FIGUUR 1. Uit: ALBRECHT DÜRER, *Underweysung der Messung*, 1525.

Dürer was ook bekend met eigenschappen van perspectief die gebruikt kunnen worden om het tekenen van met name meetkundige figuren in perspectief te vergemakkelijken. Illustraties van deze eigenschappen zien we dan ook al in

de oudste Nederlandstalige literatuur over perspectief, die voor een belangrijk deel aan het werk van Dürer ontleend is. Zie bijvoorbeeld figuur 2, met een tekening van Hendrick Hondius (1573–1649) uit zijn *Grondige onderrichtinge in de optica ofte perspective konste* (1647). In deze tekening gaat het onder andere om de eigenschap dat rechte lijnen in perspectief recht zijn, zodat slechts vier kijklijnen nodig zijn om het perspectiefbeeld van een vierhoek te bepalen.



FIGUUR 2. Uit: HENDRICK HONDIUS, *Grondige onderrichtinge in de optica ofte perspective konste*, 1647.

## 2. PERSPECTIVISCHE VERTEKENING

Dürer en Hondius illustreerden hun uitleg van de beginselen van perspectief met figuren die op hun beurt ook in perspectief getekend zijn. Zij gingen er kennelijk van uit dat wie hun leerboeken bestudeerde weliswaar onderricht nodig had in het tekenen of schilderen in perspectief, maar niet in het kijken naar en interpreteren van perspectief.

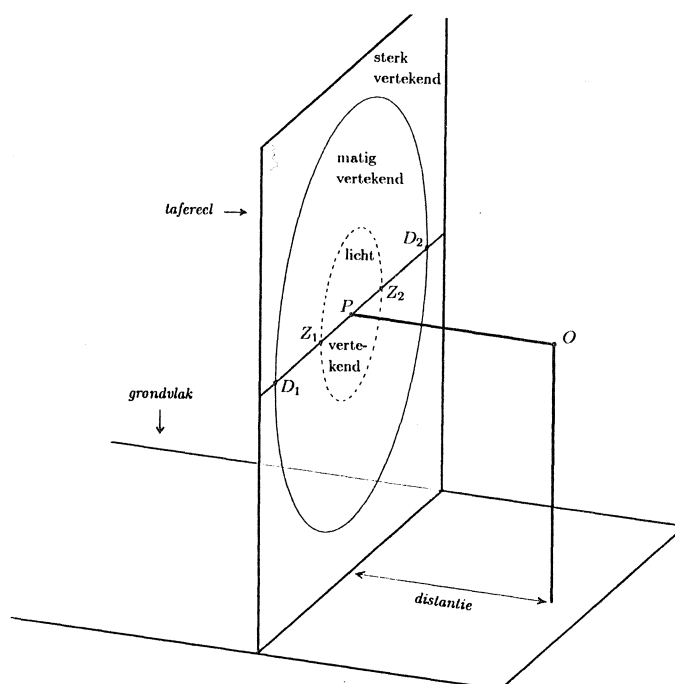
Opvallend is dat Hondius het zijn publiek wat dit laatste betreft minder gemakkelijk heeft gemaakt dan Dürer. Hondius' illustraties vertonen namelijk nogal wat perspectivische vertekening. Dit betekent dat sommige onderdelen onnatuurlijk ogen als niet op de 'juiste' manier naar de figuur gekeken wordt. In het geval van figuur 2 geldt dit vooral voor het gedeelte linksonder, waar de vierhoek op het grondvlak van de afgebeelde tekenaar ligt. Dat deze vierhoek bij benadering een rechthoek voorstelt waarvan de zijden zich verhouden als 1 : 2 valt niet gemakkelijk in te zien als we geen aandacht aan de manier van kijken besteden.

De juiste manier is: met één oog kijken, zo dat de eigen kijklijnen dezelfde stand ten opzichte van het vlak van de tekening hebben als de overeenkomstige kijklijnen van de tekenaar ten opzichte van zijn tafereel hadden. Voor figuur 2



betekent dit dat met het oog circa 13.5 cm vanaf het papier ter hoogte van het einde van de vijfde tekstregel boven de figuur, dus schuin van bovenaf, tegen de tekening aan gekeken zou moeten worden, heel anders dan men gewoonlijk - met één oog - een illustratie in een boek bekijkt. Immers, meestal houdt men zo'n illustratie op leesafstand, dat is voor de meeste mensen circa 35 cm, en liefst zo dat de kijklijn naar het centrum van de figuur loodrecht op het papier staat. Ideaal is als perspectieffiguren zo gemaakt en geplaatst zijn dat de 'juiste' manier van kijken niet veel van de 'natuurlijke' manier verschilt. Zou de in figuur 2 afgebeelde tekenaar aan een boekillustratie werken, dan wordt dit ideaal zeker niet bereikt. Dat is wel het geval als zijn tekening bedoeld is om ongeveer 75 cm onder ooghoogte gehangen te worden aan een wand waar men van een afstand van ongeveer 1 meter tegenaan kijkt.

Weet een tekenaar niet hoe zijn figuur bekeken zal gaan worden, dan kan sterke perspectivische vertekening beter vermeden worden. In hedendaagse leerboeken over perspectief wordt als vuistregel hiervoor gegeven dat de figuur dan zeker binnen de *distantiecirkel*, maar liefst ook nog binnen de *zightcirkel* van de tekenaar moet liggen.



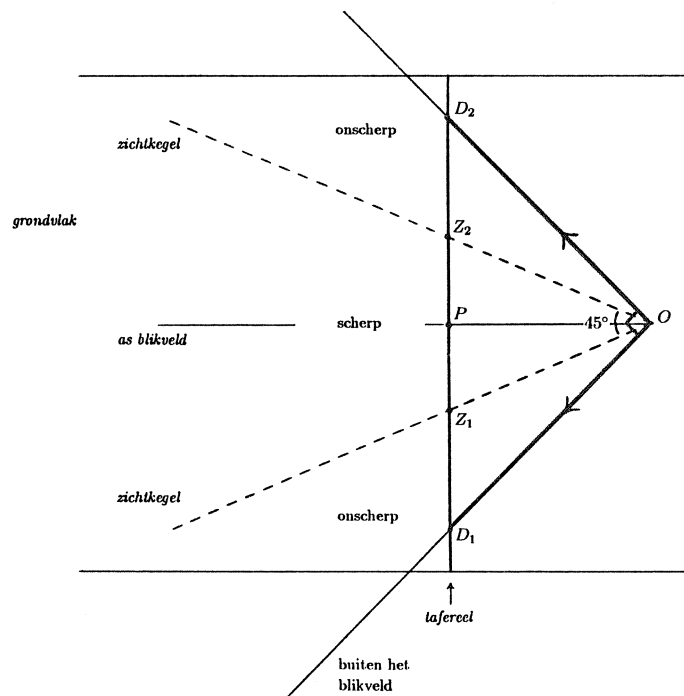
FIGUUR 3. Oog  $O$ , horizontaal grondvlak en verticaal tafereel met oogpunt  $P$ , distantiecirkel ——— en zightcirkel - - -

De distantiecirkel en de zightcirkel hebben beide als middelpunt het *oogpunt*, dat is de doorsnede van het tafereel met de kijklijn van de tekenaar die loodrecht op het tafereel staat. De distantiecirkel wordt zo genoemd omdat de straal

gelijk is aan de *distantie*, dat is de afstand van het oog van de tekenaar tot zijn tafereel. Als straal van de zichtcirkel nemen we twee vijfde deel van de distantie (al wordt hiervoor ook weleens de helft of vier vijfde deel van de distantie genomen). Binnen de zichtcirkel is de perspectivische vertekening zo klein dat het voor een met perspectiefbeelden vertrouwde kijker niet de moeite loont naar het juiste gezichtspunt te zoeken. Tussen de zichtcirkel en de distantiecirkel wordt de vertekening over het algemeen nog net acceptabel gevonden, maar buiten de distantiecirkel wordt deze als hinderlijk ervaren. Zie figuur 3.

Merk op dat deze figuur niet in perspectief, maar in de zogenaamde ingenieursprojectie is getekend. Dit geldt ook voor de overige door ons voor dit artikel getekende afbeeldingen van ruimtelijke objecten.

De distantiecirkel en de zichtcirkel spelen ook nog een andere rol, die dezelfde vuistregel rechtvaardigt. Voor de zichtcirkel is het deze rol waaraan de cirkel zijn naam ontleent. De kijklijnen vanuit één oog vormen ongeveer het binnengebied van een kegel met een tophoek van  $90^\circ$ . Scherp ziet men daarbij alleen wat niet heel dichtbij is en bovendien binnen de kleinere *zichtkegel* valt. Zie figuur 4.



FIGUUR 4. Bovenaanzicht van de situatie van figuur 3, met kijklijnen die het blikveld ——— en de zichtkegel - - -

Voor de tophoek van de zichtkegel houden wij circa  $45^\circ$  aan (hoewel ook

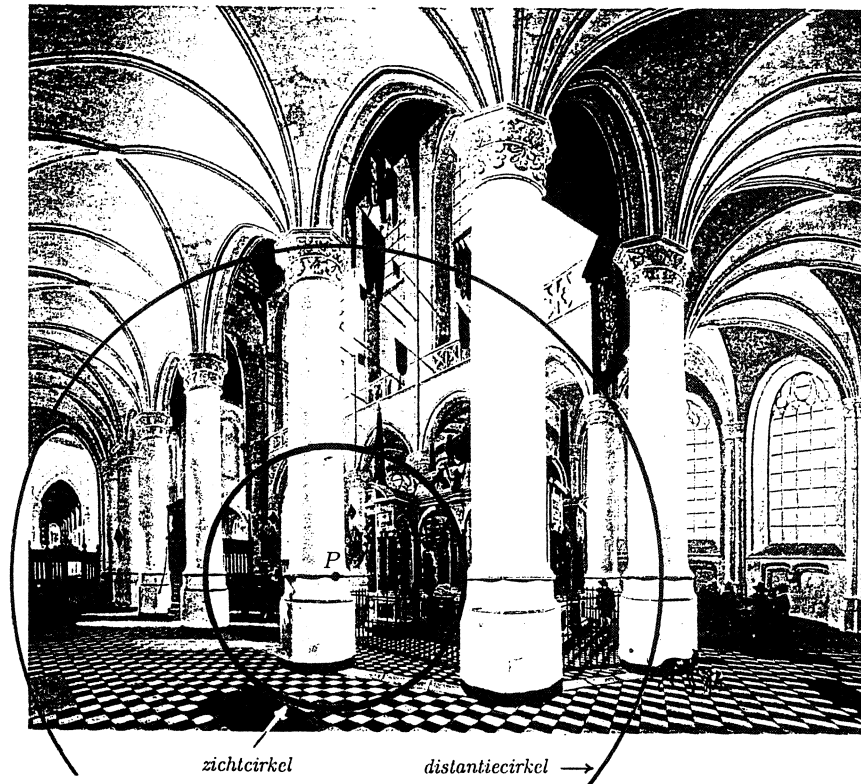
weleens  $52^\circ$  of  $60^\circ$  genomen wordt). De tekenaar die bij vaste distantie het (ene) oog voortdurend gericht houdt op het oogpunt van zijn tekenvenster, kan dus zeker geen beeldpunten buiten de distantiecirkel op het tafereel bepalen. Zo werkend, snijdt zijn zichtkegel het tafereel volgens de zichtcirkel die we hierboven al zijn tegengekomen. Immers,  $\tan 22.5^\circ \approx 0.4$  (en bij de genoemde andere keuzes voor de tophoek van de zichtkegel en de straal van de zichtcirkel:  $\tan 26^\circ \approx 0.5$  en  $\tan 30^\circ \approx 0.6$ ). Bij het werken aan het gedeelte van de figuur tussen de distantiecirkel en de zichtcirkel zal de tekenaar dus om goed te kunnen zien zijn oog toch iets moeten draaien, in het uiterste geval tot de as van zijn blikveld de zichtcirkel snijdt.

Houdt de tekenaar zich aan de vuistregel, dan betekent dit voor wie het resultaat bekijkt niet alleen dat de perspectivische vertekening licht tot matig is. Ook is het zo dat de beschouwer, als hij (toch) het juiste gezichtspunt inneemt, met het (ene) oog gericht op het oogpunt de afbeelding in z'n geheel kan overzien. Om alle onderdelen scherp te zien, hoeft dan hoogstens het oog, maar niet het hoofd, bewogen te worden.

Met deze manier van kijken kan niet altijd volstaan worden als het gaat om werken van zeventiende-eeuwse Nederlandse schilders. Met name de architectuurschilders onder hen beperkten zich soms niet tot het gebied binnen de distantiecirkel. Zij wilden weleens veel meer van de door hen gefantaseerde of werkelijk bestaande bouwwerken laten zien dan wat zij vanuit een 'natuurlijk' standpunt ten opzichte van hun object binnen één blikveld konden vangen. In deze gevallen vertonen de schilderijen aan de randen zeer sterke perspectivische vertekening. Dan levert het de beschouwer van het schilderij beduidend meer kijkplezier op als hij het perspectivisch juiste standpunt inneemt en vervolgens net zo in het rond kijkt als de schilder in zijn fantasie of in werkelijkheid heeft gedaan, inclusief de nodige draaiingen van oog én hoofd.

Zie bijvoorbeeld figuur 5 met een sterk verkleinde zwart-wit kopie van het schilderij dat Gerard Houckgeest (ca.1600–1661) in 1651 van de kooromgang van de Nieuwe Kerk te Delft maakte en waarin wij het oogpunt  $P$ , de distantiecirkel en de zichtcirkel hebben getekend. Vooral van de tegelvloer is de vertekening buiten de distantiecirkel opvallend. Om hiervan geen hinder te hebben, zouden we dus met één oog naar de figuur moeten kijken vanaf het punt  $O$  dat op de loodlijn door  $P$  op het vlak van tekening ligt zo dat  $|OP|$  gelijk is aan de distantie. Op de schaal van deze kopie is de distantie echter slechts 4.5 cm, wat te klein is om welk deel van de figuur dan ook scherp te kunnen zien. Dit probleem kan opgelost worden door een vergroting van de figuur te maken of - beter - door het originele schilderij in het Mauritshuis in Den Haag te gaan bekijken. Op de schaal van het origineel, dat 77.5 cm hoog en 65.5 cm breed is, is de distantie circa 29.5 cm. Met het oog op deze afstand van het oogpunt de blik steeds weer op een ander deel van het schilderij richtend, krijgt men een heel realistische indruk van de situatie in de kerk.

In het vervolg van dit artikel wordt besproken hoe in gevallen als dit het oogpunt en de distantie - en daarmee het juiste gezichtspunt - uit de perspectieffiguur afgeleid kunnen worden. Hieronder besteden we eerst aandacht aan



FIGUUR 5. Gerard Houckgeest, *Kooromgang van de Nieuwe Kerk te Delft*, 1651, (Den Haag, Mauritshuis). Oogpunt *P*, distantiecirkel en zichtcirkel toegevoegd.

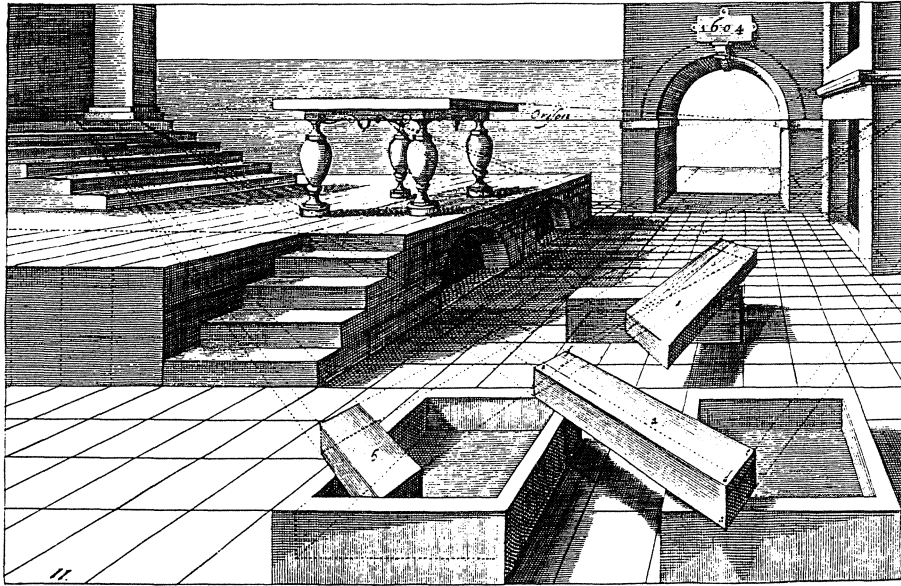
de hierbij benodigde eigenschappen van perspectief.

### 3. VERDWIJNPUNTEN

Eigenschappen van perspectief kunnen gebruikt worden om tekeningen die met een tekenvenster gemaakt zijn, te controleren. Ze zijn echter van veel meer belang als men een perspectieftekening wil maken zonder het object werkelijk door een tekenvenster te bekijken, bijvoorbeeld omdat het om een (nog) niet bestaand object gaat. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de voorbeelden in Hondius' leerboek, evenals die in het iets eerder verschenen, door Hondius uitgegeven, tweedelige handboek *Perspective* (1604/1605) van Hans Vredeman de Vries (1527–1606), uitsluitend fantasie-objecten betreffen. Zie bijvoorbeeld de kopie van afbeelding 11 uit het eerste deel van *Perspective* in figuur 6.

Eigenschappen die Dürer, Vredeman de Vries en Hondius kenden en aan de hand van voorbeelden in hun boeken demonstreerden, zijn onder andere dat lijnen die evenwijdig aan het tafereel zijn evenwijdig met zichzelf worden

afgebeeld, dat de perspectief verhoudingen op deze lijnen bewaart, dat dit voor lijnen die het tafereel snijden niet het geval is, dat lijnen die niet evenwijdig zijn met het tafereel in de perspectieffiguur *verdwijnpunten* hebben en dat de verdwijnpunten van onderling evenwijdige lijnen samenvallen. Daarbij gebruiken zij met name verdwijnpunten van horizontale lijnen, die alle op de *horizon* - dat is de horizontale lijn door het oogpunt in het tafereel - liggen.



FIGUUR 6. Uit: HANS VREDEMAN DE VRIES, *Perspective*, 1604/1605.

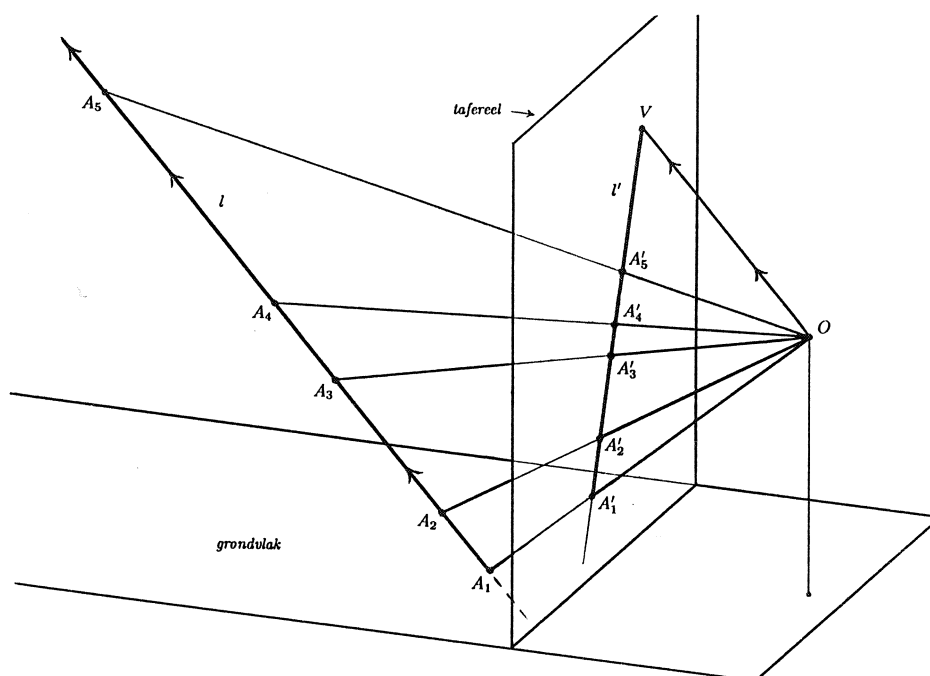
Uit figuur 6 blijkt dat Vredeman de Vries heeft gedacht dat ook niet-horizontale lijnen verdwijnpunten op de horizon kunnen hebben. Bij zijn constructies heeft hij kennelijk niet alleen te pas, maar ook weleens te onpas gebruik gemaakt van onbegrepen regels. Zowel voor het zonder tekenvenster maken als voor het interpreteren van een perspectieftekening is een goed begrip van de betekenis van verdwijnpunten cruciaal. In beide gevallen is het goed als men zich altijd weer het ontstaan van de figuur met behulp van een tekenvenster voorstelt.

In de situatie van een perspectieftekenaar met zijn tafereel kan het verdwijnpunt van een lijn als volgt gedefinieerd worden. Zij  $l$  een lijn die niet evenwijdig is met het tafereel. Het verdwijnpunt van  $l$  is de limiet van de rij beeldpunten  $A'_n$  op het tafereel van een rij punten  $A_n$  op  $l$  die - achter het tafereel - naar het oneindige nadert. Uit deze definitie volgt onmiddellijk de eigenschap van verdwijnpunten die we in dit artikel vaak zullen gebruiken. Zie ook figuur 7.

**EIGENSCHAP.** *Het verdwijnpunt van een lijn  $l$  is het snijpunt van het tafereel met de kijklijn van de tekenaar die evenwijdig is met  $l$ .*

Het is deze eigenschap die de reeds genoemde eigenschappen van verdwijnpunten

punten als direct gevolg heeft en die de misvatting van Vredeman de Vries ten aanzien van de rol van de perspectivische horizon duidelijk maakt.



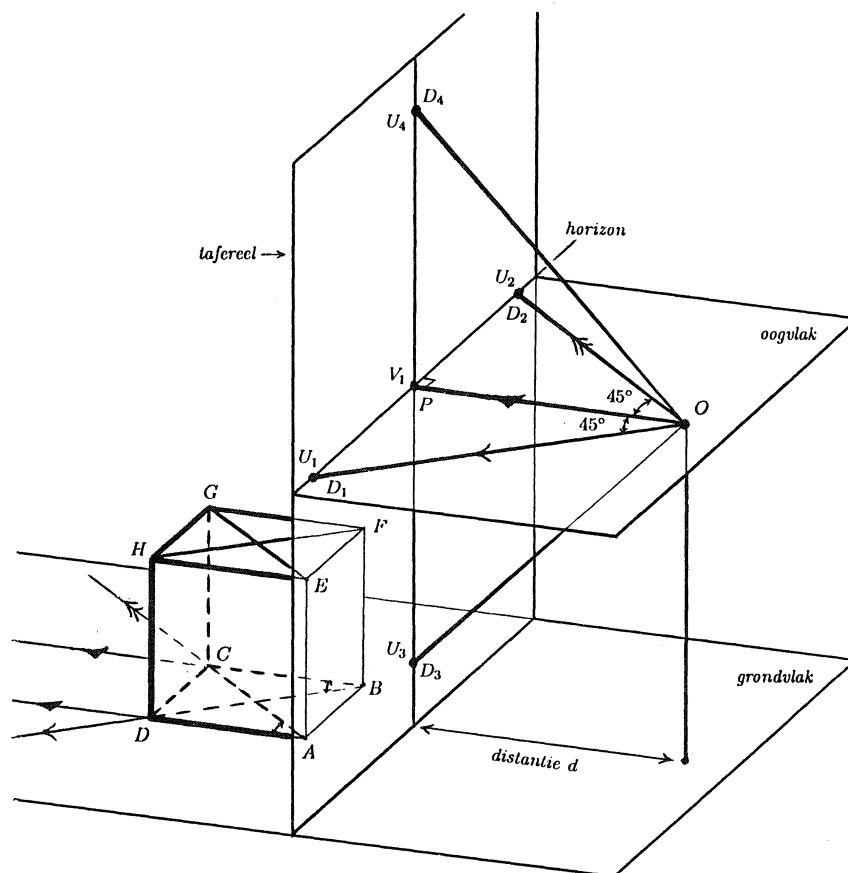
FIGUUR 7.  $V$  is het verdwijnpunt van lijn  $l$ ,  $OV$  is evenwijdig met  $l$ .

In dit artikel zullen we de eigenschap vooral gebruiken om op basis van verdwijnpunten van lijnen waarvan we de werkelijke richting ten opzichte van het tafereel kennen, de positie van het oog van de tekenaar ten opzichte van het tafereel - gekarakteriseerd door oogpunt en distantie - te bepalen. Daarna kan, als de perspectieffiguur goed gemaakt is, met behulp van dezelfde eigenschap de werkelijke richting bepaald worden van alle andere afgebeelde lijnen waarvan het verdwijnpunt in de tekening gevonden kan worden.

#### 4. EENPUNTS PERSPECTIEF

De figuren 1, 2 en 6 zijn voorbeelden van eenpunts of centraal perspectief. *Eenpunts*, omdat in het af te beelden object drie onderling loodrechte hoofd-richtingen te herkennen zijn waarvan er slechts één een verdwijnpunt heeft. *Centraal*, omdat dit verdwijnpunt het oogpunt en daarmee het natuurlijke centrum van de tekening is. In de Nederlandse schilderkunst van de zeventiende eeuw is meestal voor deze methode van perspectief gekozen.

Voordat we naar voorbeelden van eenpunts perspectief in de schilderkunst gaan kijken, zullen we enkele eigenschappen bespreken aan de hand van het meest eenvoudige ruimtelijke object dat aan deze projectiemethode onderworpen kan worden: de kubus. Figuur 8 laat een situatie zien waarin een kubus



FIGUUR 8. Eenpunts perspectief:  $d = |OP| = |PU_1| = |PU_2|$ .

$ABCD.EFGH$  met behulp van een tekenraam in eenpunts perspectief getekend zal gaan worden. Alleen de lijnen waarop de ribben  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$  en  $FG$  liggen, hebben een verdwijnpunt:  $V_1$ , dat in dit geval samenvalt met het oogpunt  $P$ .

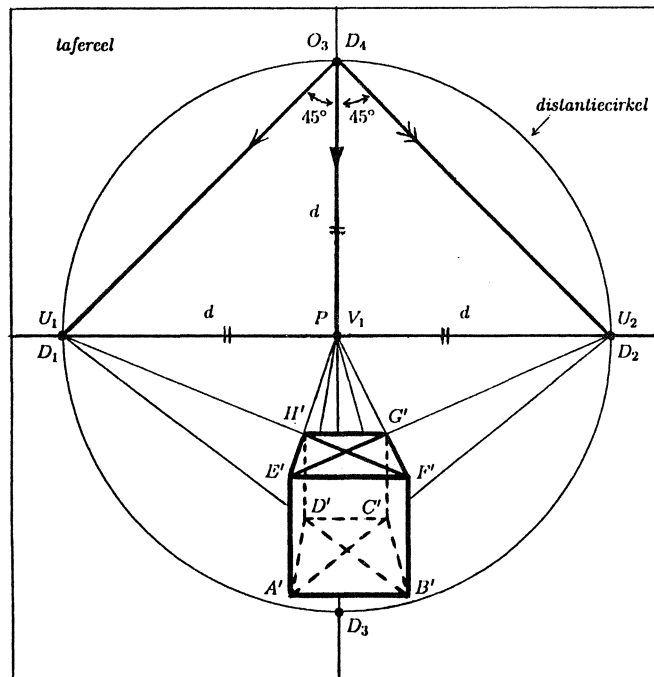
In de figuur zijn ook de diagonalen van grond- en bovenzvlak van de kubus getekend en de kijklijnen vanuit het oog  $O$  naar hun verdwijnpunten  $U_1$  en  $U_2$ . Deze kijklijnen zijn evenwijdig met respectievelijk  $BD$  en  $AC$ .  $OU_1$  en  $OU_2$  zijn dus horizontaal en staan loodrecht op elkaar, terwijl zij hoeken van  $45^\circ$  met de centrale kijklijn  $OP$  maken. Hieruit volgt dat  $U_1$  en  $U_2$  - evenals het oogpunt  $P$  - punten zijn van de horizon, dat hun afstand tot  $P$  gelijk is aan de afstand  $d = |OP|$  en dat zij dus samenvallen met de horizontale distantiepunten  $D_1$  en  $D_2$ , dat zijn de snijpunten van de distantiecirkel in het tafereel met de horizon.

Voor de volledigheid zijn ook de kijklijnen getekend naar de verdwijnpunten  $U_3$  en  $U_4$  van de diagonalen van de verticale zijvlakken  $ADHE$  en  $BCGF$ . Het zal duidelijk zijn dat  $U_3$  en  $U_4$  op de centrale verticaal, dat is de verticale lijn

door het oogpunt  $P$  in het tafereel, liggen op afstand  $d$  van  $P$  verwijderd.  $U_3$  en  $U_4$  vallen dus samen met de *verticale distantiepunten*  $D_3$  en  $D_4$ .

Overigens is de samenhang van  $|PU_1|$  en  $|PU_2|$  met de distantie door Vredeman de Vries niet opgemerkt. Hij leidde de afstanden van  $U_1$  en  $U_2$  tot  $P$  door constructie uit de ooghoogte af. Hierdoor werden  $|PU_1|$  en  $|PU_2|$  ongeveer gelijk aan de ooghoogte, die echter onafhankelijk van de ooghoogte gekozen kan worden. De punten  $U_3$  en  $U_4$  gebruikten Vredeman de Vries en de meeste van zijn tijdgenoten niet.

Om de relatie tussen de kijklijnen naar de genoemde punten op de horizon en de perspectieffiguur in het tafereel beter zichtbaar te maken, passen we op het *oogvlak*, dat is het vlak door  $O$  en de horizon, een rotatie over  $90^\circ$  om de horizon toe. Omdat de perspectieffiguur in de situatie van figuur 8 onder de horizon ligt, kiezen we de rotatierichting zo dat het beeldpunt  $O_3$  van  $O$  boven de horizon in het tafereel ligt.  $O_3$  valt dan samen met het verticale distantiepunt  $D_4$ . Zie figuur 9.



FIGUUR 9. Vooraanzicht tafereel met kubus in eenpunts perspectief, de distantiecirkel en geroteerd oogvlak; distantie  $d = |O_3P| = |PU_1| = |PU_2|$ .

Uit deze figuur kan afgeleid worden hoe bijvoorbeeld bij gegeven horizon en lijnstukken  $A'B'$  en  $A'D'$  de constructie van de kubus in perspectief verder verloopt. Als hierbij gebruikt wordt dat  $A'B'F'E'$  en  $C'D'H'G'$  vierkant zijn, kunnen de punten  $U_3$  en  $U_4$  buiten beschouwing blijven. Het gaat ons in dit artikel niet zozeer om het construeren van perspectief als wel om uit gege-



ven perspectieffiguren bijzonderheden af te leiden, te beginnen met het juiste gezichtspunt. Uit figuur 9 kan ook opgemaakt worden hoe uit een gegeven eenpunts perspectiefafbeelding van een kubus achtereenvolgens het oogpunt, de horizontale distantiepunten, eventueel  $O_3$ , en de distantie afgeleid kunnen worden. Daarmee is dan de plaats van het juiste gezichtspunt  $O$  bepaald.

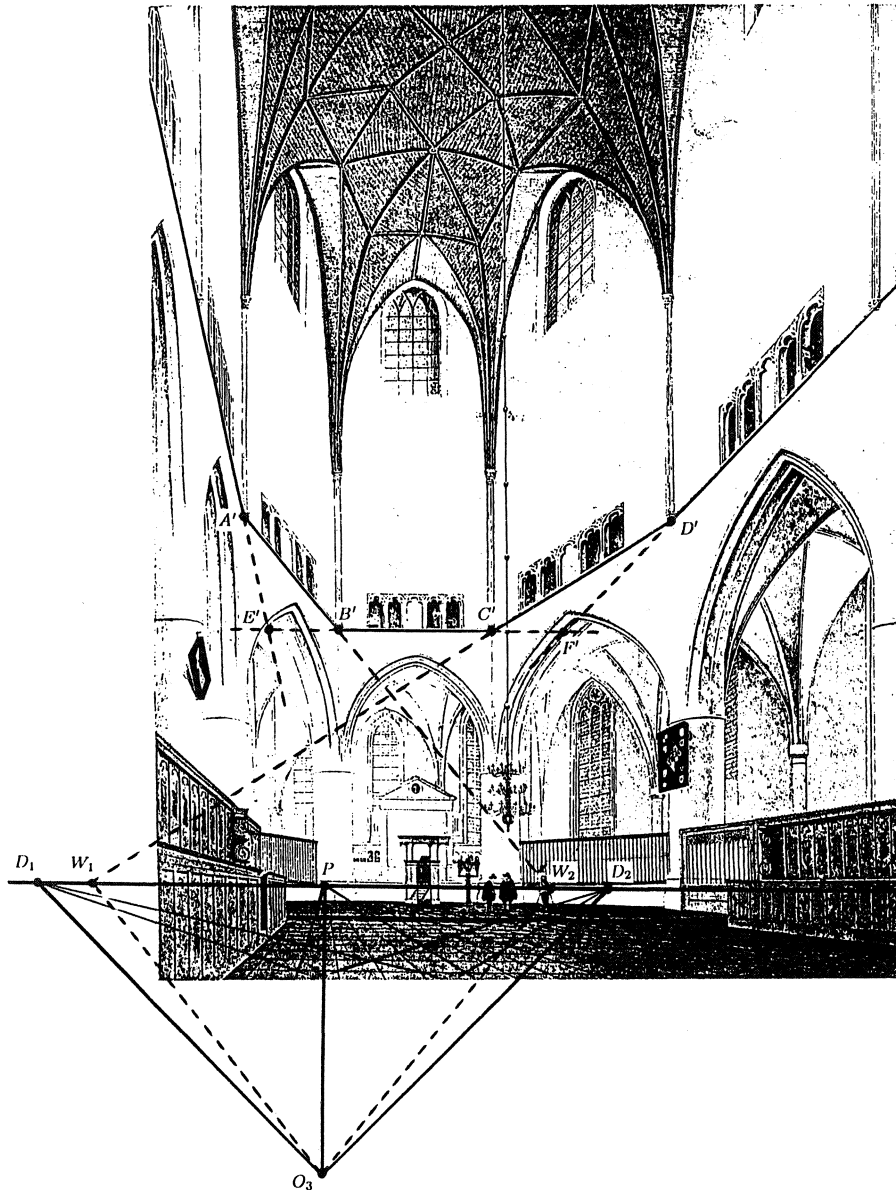
De methode blijft gelijk als we in een tekening, een schilderij of een foto in eenpunts perspectief geen afbeelding van een kubus, maar wel enkele vierhoeken zien waarvan we weten of mogen aannemen dat zij het beeld zijn van (niet noodzakelijk even grote) horizontale vierkanten waarvan twee zijden evenwijdig aan het tafereel zijn. In de werken van zeventiende-eeuwse Nederlandse kunstenaars gaat het in zo'n geval vaak om vloertegels. De aanname dat deze vierkant zijn, is dan meestal gerechtvaardigd omdat we weten dat een horizontaal vierkantenrooster graag gebruikt werd als hulpmiddel voor het bepalen van de juiste hoogte en vooral de diepte van de in eenpunts perspectief afgebeelde objecten.

We zullen deze methode nu toepassen op een werk van de bekende Haarlemse architectuurschilder Pieter Jansz. Saenredam (1597–1665), waarin zo'n tegelvloer te zien is. Vervolgens zullen we laten zien hoe de resultaten gebruikt kunnen worden om iets meer te weten te komen over de relatie tussen de figuur en de situatie die hierin is afgebeeld.

Onze keuze voor deze schilder in dit verband is geen toevallige. Saenredam schilderde uitsluitend bestaande gebouwen, vaak kerken en van die kerken meestal een deel van het interieur, altijd in eenpunts perspectief. Voor ons is nu van belang dat we weten dat hij daarbij heel zorgvuldig en met kennis van zaken te werk ging. Hij gebruikte geen tekenvenster, maar maakte ter plekke alleen een schets 'op het oog'. Later maakte hij dan, op basis van opmetingen in de kerk die vastgelegd waren in plattegronden, een constructietekening die dezelfde afmetingen had als het te beschilderen paneel. Daarbij ging hij uit van een standpunt dat overeenkwam met dat van de schets, zodat hij deze kon gebruiken ter controle van zijn constructies. De belangrijkste lijnen van de constructietekening nam hij over op het paneel en dan pas begon hij te schilderen. Voor een beschrijving van de constructiemethode die Saenredam het meest gebruikte, verwijzen we naar [8]. De schilderijen van Saenredam zijn in elk geval perspectivisch juist voor zover het de vloer van de kerk en de rechtlijnige verticale elementen betreft. Dit maakt dat we de hierboven bedoelde methode voor het bepalen van oogpunt en distantie zonder voorbehoud op zijn werk kunnen toepassen.

Zie nu figuur 10 met een kopie van Saenredams schilderij van het koor van de Sint-Bavokerk te Haarlem (1660), waarin wij enkele lijnen en punten hebben geaccentueerd of toegevoegd. Uit de figuur blijkt hoe we, gebruik makend van zijden en diagonalen van afgebeelde vloertegels, het oogpunt  $P$  en de horizontale distantiepunten  $D_1$  en  $D_2$  bepaald hebben. De afstand van  $D_1$  en  $D_2$  tot  $P$  blijkt nu 3.8 cm te zijn en dit is dus - in de schaal van de kopie - de distantie. Merk op hoe klein de distantie is in verhouding tot de afmetingen van de figuur.

Ook de lengte van  $O_3P$  is 3.8 cm en op basis hiervan hebben we  $O_3$ , nu

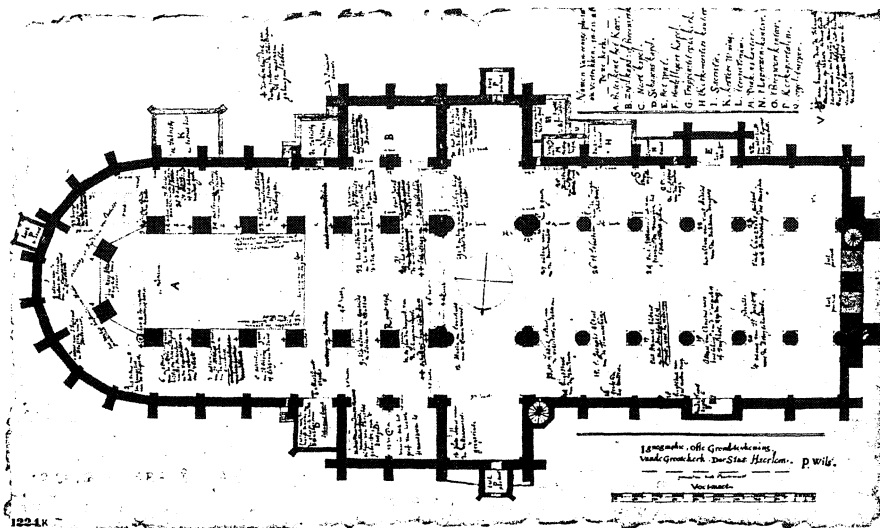


FIGUUR 10. Pieter Saenredam, *Het koor van de Sint-Bavokerk, van west naar oost*, 1660, (Worcester Art Museum, Massachusetts). Hulplijnen toegevoegd.

onder de horizon, en de omlaag gedraaide kijklijnen naar  $P$ ,  $D_1$  en  $D_2$  getekend.

Nu gaan we onderzoeken in hoeverre Saenredam in dit schilderij de hoeken tussen de muren boven de achterste bogen van het koor perspectivisch juist heeft afgebeeld. Uit een plattegrond van de Sint Bavo die gemaakt is door de

landmeter en wiskundige Pieter Wils (overl. ca. 1647), blijkt dat de grootte van de bedoelde hoeken circa  $117^\circ$  is. Zie figuur 11. Een gedrukte versie van de plattegrond is opgenomen in *Beschryvinge der stad Haerlem* (1628) van Ampzing, speciaal "voor die genen die de selvige in eniger manieren perspectijvelijk willen afteykenen". Voor dit boek maakte Saenredam in 1627 een interieurtekening van de Sint Bavo in perspectief. Toen heeft hij misschien nog niet, maar later bij de voorbereidingen van zijn schilderijen zeker wél van Wils' plattegrond én van diens perspectivische kennis geprofiteerd. We mogen dan ook aannemen dat hij op dat moment wist dat voor de originelen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  van de in figuur 10 door ons als  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  en  $D'$  aangeduide punten geldt:  $\angle ABC = \angle BCD \approx 117^\circ$ , wellicht door hem afgerond op  $120^\circ$ .



FIGUUR 11. Pieter Wils, *Plattegrond van de Sint-Bavokerk*, 1628, (Haarlem, Gemeente-archief).

In figuur 10 is lijn  $B'C'$  evenwijdig met de horizon, dus als Saenredam met een tekenvenster gewerkt zou hebben, zou de originele lijn  $BC$  evenwijdig geweest zijn met de horizon in het tafereel. De horizontale lijnen  $AB$  en  $CD$  zouden in die situatie elk een hoek van circa  $117^\circ - 90^\circ = 27^\circ$  met de richting loodrecht op het tafereel gemaakt hebben. Uit de in paragraaf 3 genoemde eigenschap volgt nu dat de verdwijnpunten  $W_2$  en  $W_1$  van  $AB$  en  $CD$  respectievelijk rechts en links van het oogpunt  $P$  op de horizon liggen zo dat  $\angle W_1OP = \angle W_2OP \approx 27^\circ$  en dus ook  $\angle W_1O_3P = \angle W_2O_3P \approx 27^\circ$ , eventueel afgerond op  $30^\circ$ . De verlengden van de lijnstukken  $A'B'$  en  $C'B'$  in figuur 10 snijden de horizon echter in punten  $W_2$  en  $W_1$  waarvoor geldt  $\angle W_1O_3P = \angle W_2O_3P \approx 39^\circ$ , zodat deze punten in de figuur 0.9 tot 1.1 cm verder van  $P$  af liggen dan op grond van de bovengenoemde redenering verwacht mag worden. Op de schaal van het schilderij, dat 70.5 cm hoog en 54.5 cm breed is, is dit verschil zelfs 5 tot 6 cm.

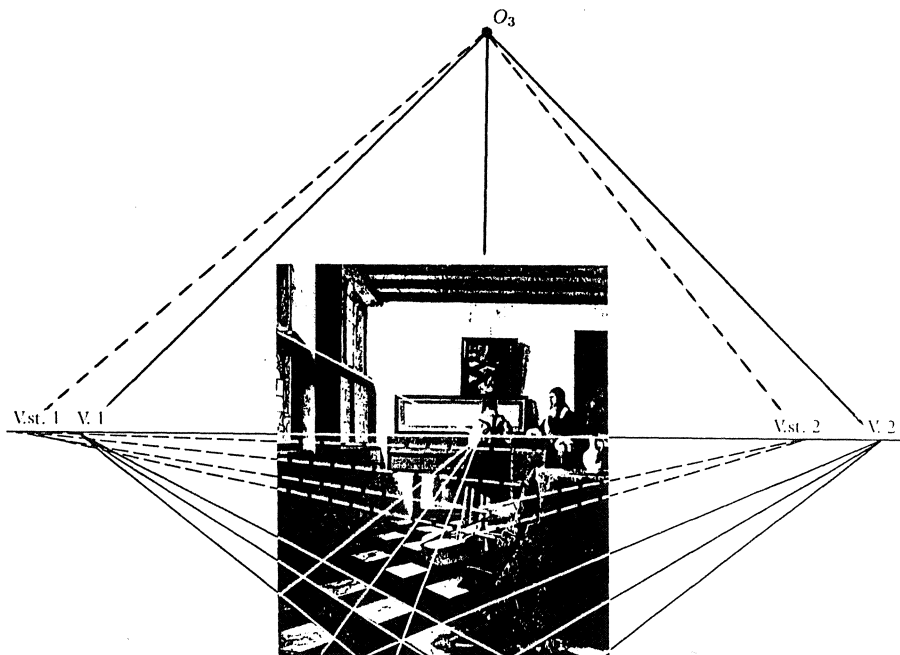
De verhouding tussen  $|E'B'|$ ,  $|B'C'|$  en  $|C'F'|$  in figuur 10 is wél redelijk in overeenstemming met de gegevens van de plattegrond. Immers, hieruit kunnen we afleiden dat  $AB$  en  $CD$  bijna even lang zijn als  $BC$ , zodat hun loodrechte projecties  $EB$  en  $CF$  op lijn  $BC$  beide bijna  $|\cos 117^\circ|$  of  $|\cos 120^\circ|$  en dus bijna 0.5 maal zo groot zijn als  $|BC|$ . En omdat lijn  $BC$  evenwijdig is met het tafereel, blijft deze verhouding bij de perspectiefafbeelding bewaard. Het gesignaleerde probleem met de verdwijnpunten van  $AB$  en  $CD$  zou dus opgelost kunnen worden door bij vaste  $E'$ ,  $B'$ ,  $C'$  en  $F'$  de punten  $A'$  en  $D'$  zo langs de lijnen  $PE'$  en  $PF'$  verplaatsen dat de verlengden van  $A'B'$  en  $D'C'$  in figuur 10 de horizon 0.9 tot 1.1 cm dicht bij  $P$  snijden dan nu het geval is. Dan zouden de lijnstukken  $A'B'$  en  $C'B'$  echter relatief veel in lengte toenemen. Waarschijnlijk heeft Saenredam deze sterke perspectivische vertekening willen voorkomen en daarom de ver van het oogpunt gelegen gedeelten van zijn constructie steeds meer 'gecorrigeerd' op basis van zijn in de kerk gemaakte schets.

Natuurlijk kan hiertegen ingebracht worden dat de aanname over de vorm van de vloertegels onjuist kan zijn. De figuur bevat echter inconsistenties die hierdoor niet verklaard kunnen worden. Zie bijvoorbeeld manier waarop Saenredam de horizontale begrenzingen van de ruitjes in de hoog boven  $AB$  en  $CD$  gelegen ramen heeft afgebeeld. De verlengden hiervan snijden de horizon in punten die nóg verder dan  $W_2$  en  $W_1$ , en bovendien niet alle evenveel verder, van het oogpunt  $P$  verwijderd zijn. Overigens heeft Saenredam in dit schilderij de hoogte van de muurdelen tussen de kleine poortjes boven  $AB$ ,  $BC$  en  $CD$  en de hoge ramen (bewust?) overdreven. Wat dit betreft is de afbeelding die Escher van het koor van de Sint Bavo maakte en die we in dit artikel ook zullen bespreken, beter in overeenstemming met de werkelijkheid. Zie figuur 19.

Soms zien we in een figuur in eenpunts perspectief vierkante vloertegels die *diagonaal gelegd* zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval in alle werken van de Delftse genre-schilder Johannes Vermeer (1632–1675) waarin een interieur met tegelvloer afgebeeld is. Ook dan zijn het oogpunt, de horizontale distantiepunten en de distantie gemakkelijk te bepalen. Zie bijvoorbeeld figuur 12 met een kopie van het *perspectiefdiagram* van het schilderij *De muzikles* (1662–1664) uit de catalogus van de grote Vermeer-tentoonstelling die in 1996 in het Mauritshuis in Den Haag te zien was. Aan dit diagram hebben wij  $O_3$  en enkele over  $90^\circ$  om de horizon omhoog gedraaide kijklijnen toegevoegd. Het verdwijnpunt van de diagonalen van de vloertegels (in de figuur niet benoemd) is nu het oogpunt  $P$ , de verdwijnpunten  $V_1$  en  $V_2$  van de zijden van de tegels vallen samen met de horizontale distantiepunten. De distantie  $d$  is dus gelijk aan  $\frac{1}{2} |V_1V_2|$ , dat is op deze schaal 5.3 cm, en op deze afstand hebben we  $O_3$  van het oogpunt gekozen.

Duidelijk is dat de afbeelding bijna helemaal binnen de zichtcirkel met straal  $0.4 \cdot d$  (niet getekend) ligt, zodat de perspectivische vertekening zwak is.

In de catalogus is het perspectiefdiagram bedoeld als illustratie van de precisie waarmee Vermeer de voorwerpen in zijn interieurs in perspectief afgebeeld zou hebben. De in de figuur aangegeven punten  $Vst_1$  en  $Vst_2$  zijn de verdwijnpunten van kenmerkende horizontale lijnen van een net niet diagonaal

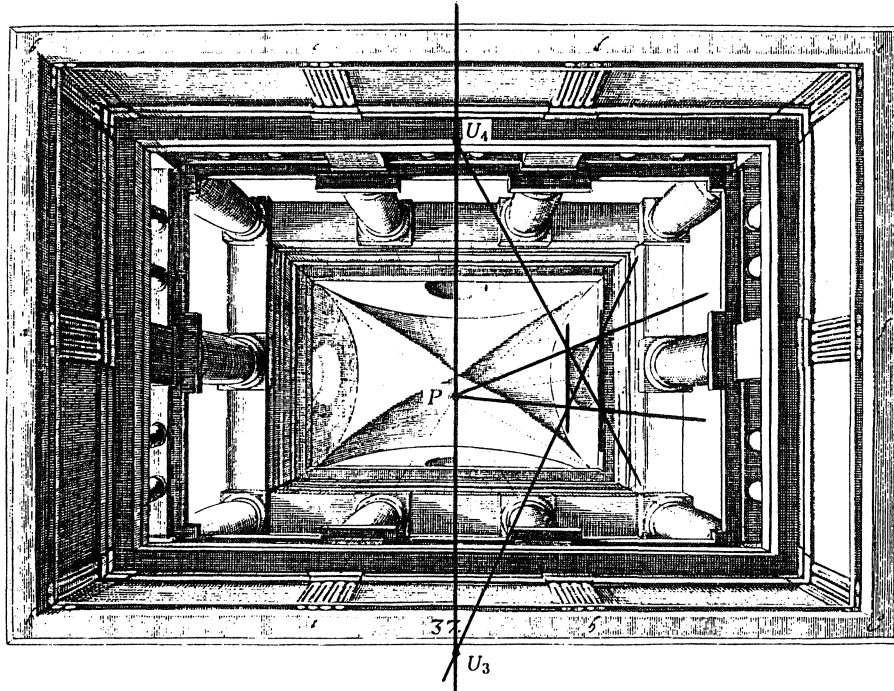


FIGUUR 12. Perspectiefdiagram van: Johannes Vermeer, *De muzikles*, 1662–1664. Punt  $O_3$  en omhoog gedraaide kijklijnen toegevoegd.

geplaatste stoel. In de begeleidende tekst wordt gesteld dat Vermeer om een perspectiefisch juist resultaat te krijgen de punten  $Vst_1$  en  $Vst_2$  nauwkeurig op gelijke afstanden links van de punten  $V_1$  en  $V_2$  gekozen heeft. Nu blijkt dit laatste niet uit de figuur: de afstand tussen  $Vst_1$  en  $V_1$  is hier duidelijk kleiner dan de afstand tussen  $Vst_2$  en  $V_2$ . Maar vanuit de distantiepunten naar eenzelfde kant gelijke lijnstukken afpassen, heeft in dit verband ook geen zin. Immers, deze lijnstukken corresponderen dan zeker niet met gelijke hoeken tussen de kijklijnen naar hun eindpunten. En om deze hoeken gaat het juist. Of voor het betreffende schilderij nu geldt  $|Vst_1V_1| < |Vst_2V_2|$  zoals figuur 12 laat zien, of toch  $|Vst_1V_1| = |Vst_2V_2|$  zoals de tekst van de catalogus vermeldt, in beide gevallen is hoek  $Vst_1O_3V_1$  kleiner dan hoek  $Vst_2O_3V_2$ . Hieruit volgt:  $\angle Vst_1O_3Vst_2 < \angle V_1O_3V_2$ , zodat  $\angle Vst_1O_3Vst_2 < 90^\circ$  en ook  $\angle Vst_1OVst_2 < 90^\circ$ . Met behulp van de in paragraaf 3 behandelde eigenschap volgt hieruit dat de lijnen waarvan  $Vst_1$  en  $Vst_2$  de verdwijnpunten zijn, niet loodrecht op elkaar staan. Dit zou betekenen dat de zitting van de afgebeelde stoel niet rechthoekig is, wat gezien het type (zeventiende-eeuwse) stoel niet juist kan zijn. Het perspectiefdiagram van figuur 12 kan kloppend gemaakt worden door, op deze schaal,  $Vst_1$  4.5 mm naar links of  $Vst_2$  3 mm naar rechts te verplaatsen zodat hoek  $Vst_1O_3Vst_2$  recht wordt.

## 5. EENPUNTS PERSPECTIEF MET HORIZONTAAL TAFEREEL

Hoewel bij behandeling van de beginselen van perspectief altijd gesproken wordt over een verticaal tekenvenster en een op een horizontaal grondvlak geplaatst object, spelen de richtingen van tafereel en grondvlak ten opzichte van het aardoppervlak geen wezenlijke rol. Hetzelfde geldt als het gaat om bijzonderheden van eenpunts perspectief. Van belang is dan alleen dat het af te beelden object drie onderling loodrechte hoofdrichtingen heeft waarvan er slechts één een verdwijnpunt heeft. Het tafereel moet dus - hoe de stand van het object ten opzichte van het aardoppervlak ook is - loodrecht op een van de drie hoofdrichtingen, het doet er niet toe welke, geplaatst worden. Bij bouwwerken met horizontale vloer en verticale muren is er dan precies één alternatief voor het gebruikelijke verticale tafereel: een horizontaal tafereel. Afbeeldingen die met zo'n tafereel gemaakt lijken te zijn, komen al in de oudste perspectiefboeken voor. Zie bijvoorbeeld figuur 13.

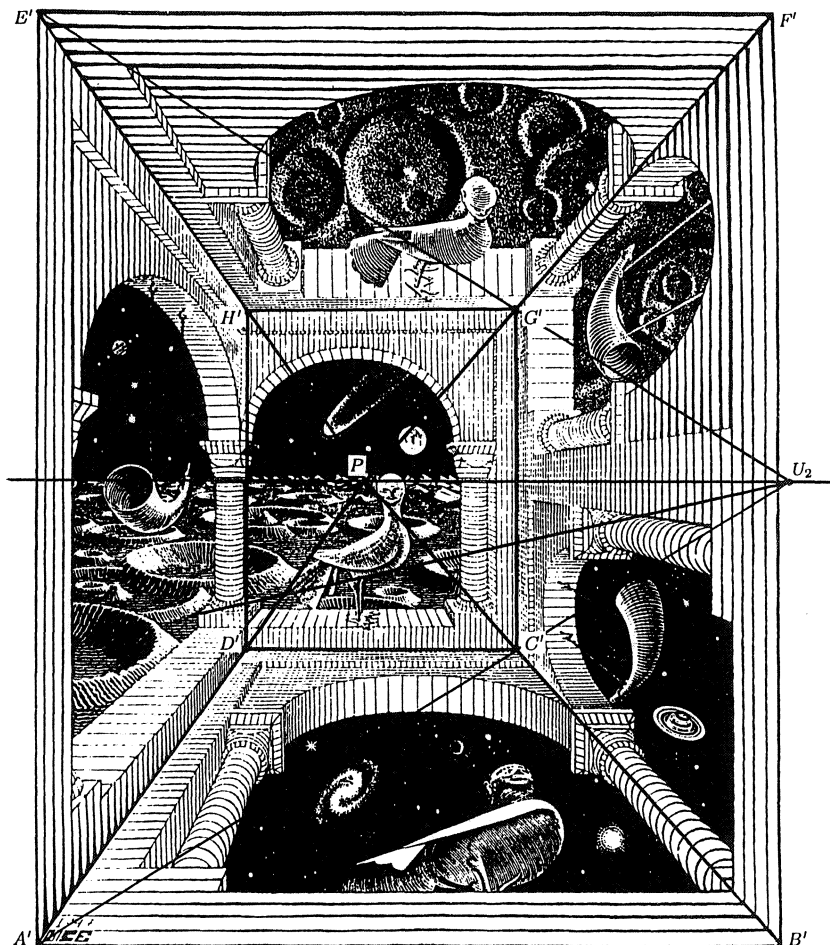


FIGUUR 13. Uit: HANS VREDEMAN DE VRIES, *Perspective*, 1604/1605. Hulplijnen toegevoegd.

Aan deze verkleining van afbeelding 37 uit deel I van *Perspective* van Vredeman de Vries hebben we enkele lijnen en punten toegevoegd. Het centrale verdwijnpunt, tevens oogpunt  $P$ , ligt in het beeld van het plafond. De enige aanknopingspunten voor het bepalen van de distantie zijn hier de ronde raampjes bovenin. Nemen we aan dat deze verticaal en cirkelvormig zijn, dan zijn de door ons in de figuur aangegeven verdwijnpunten  $U_3$  en  $U_4$  van de diagonalen

van een omgeschreven vierkant van zo'n raampje tevens distantiepunten. De distantie is dan gelijk aan de afstand van deze punten tot  $P$ , hier circa 3.4 cm.

Heel mooi wordt de onafhankelijkheid van de stand van het geheel van object en tafereel ten opzichte van de omgeving gedemonstreerd in de houtgravure in eenpunts perspectief *Andere wereld* (1947) van M.C. Escher (1898–1972).



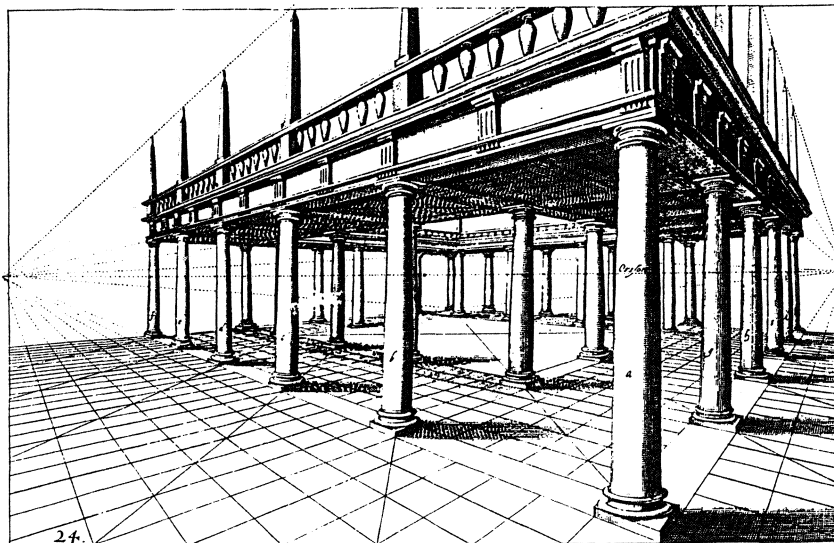
FIGUUR 14. M.C. Escher, *Andere Wereld*, 1947. Hulplijnen toegevoegd.

Figuur 14 geeft een verkleinde zwart-wit kopie van deze prent waarin wij enkele lijnen geaccentueerd en punten benoemd hebben. Zonder ons te bekommeren om horizontaal, verticaal, onder en boven, kunnen we oogpunt en distantie bepalen. Het oogpunt  $P$  is het snijpunt van de lijnen  $A'D'$ ,  $B'C'$ ,  $F'G'$  en  $E'H'$ . Gezien de grote gelijkheid tussen de vrijstaande pilaren nemen we aan dat de 'boven'- en de 'onder'-zijde van de voet van de pilaar bij  $D$  dezelfde vorm hebben als die van de pilaar bij  $G$ : vierkant. Het in de figuur

aangegeven verdwijnpunt  $U_2$  van een diagonaal van de 'boven'-zijde van het voetstuk bij  $D$  is dan distantiepunt en de distantie is gelijk aan  $|U_2P|$ , op deze schaal 5.6 cm. Nu krijgen we informatie over de vorm van het afgebeelde bouwwerk cadeau. De verlengden van  $A'C'$  en  $E'G'$  blijken namelijk ook door  $U_2$  te gaan, dus  $ABCD$  en  $EFGH$  zijn vierkant en de rechthoeken  $ADHE$  en  $EFGH$  zijn congruent met  $DCGH$ . We moeten hierbij wel aantekenen dat we op basis van een diagonaal van de 'onder'-zijde van hetzelfde voetstuk een ander resultaat gevonden zouden hebben. Escher is in de details van de prent niet erg precies geweest.

#### 6. TWEEPUNTS PERSPECTIEF

In de Nederlandse schilderkunst komt vanaf het midden van de zeventiende eeuw, vooral onder architectuurschilders, naast eenpunts perspectief ook een vorm van tweepunts perspectief voor die we *diagonaal tweepunts perspectief* zullen noemen. Voor de constructie hiervan is niet meer kennis nodig dan voor eenpunts perspectief, terwijl wel een levendiger effect bereikt wordt. Zie bijvoorbeeld het schilderij van Houckgeest dat in figuur 5 is afgebeeld. Wellicht ontleende men het idee voor dit type perspectief onder andere aan afbeelding 24 uit het eerste deel van *Perspective* van Vredeman de Vries, zie figuur 15.



FIGUUR 15. Uit: HANS VREDEMAN DE VRIES, *Perspective*, 1604/1605.

De vierkante vloertegels liggen net als in de interieurs van Vermeer 'diagonaal' ten opzichte van het tafereel, maar nu maken ook de belangrijkste horizontale lijnen van het bouwwerk zelf hoeken van  $45^\circ$  met het tafereel. Dat deze lijnen twee verdwijnpunten hebben terwijl de verticale lijnen van het gebouw nog steeds geen verdwijnpunt hebben, maakt dat niet meer van eenpunts perspectief maar van tweepunts perspectief gesproken wordt. Het oogpunt is



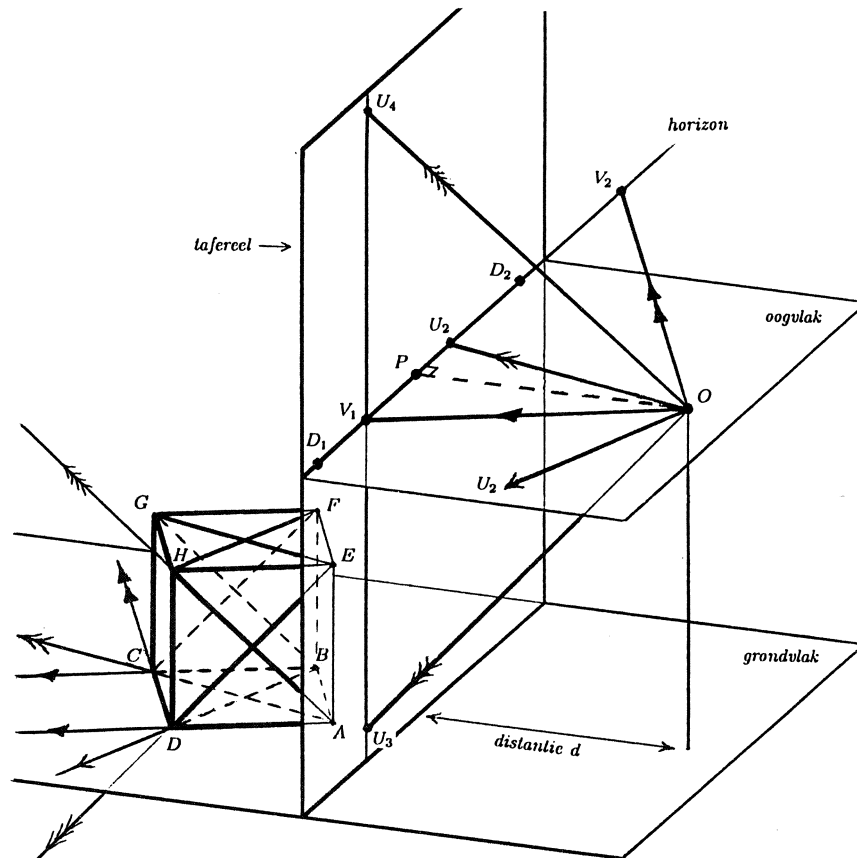
bij diagonaal tweepunts perspectief geen verdwijnpunt van een hoofdrichting van het bouwwerk, maar wel - net als bij eenpunts perspectief met diagonaal gelegde vierkante tegels - verdwijnpunt van diagonalen van vloertegels. Het bepalen van de distantie verloopt bij diagonaal tweepunts perspectief precies zo als aan de hand van figuur 12 voor *De muzieklles* van Vermeer gedemonstreerd is.

Bij de analyse van dit laatste schilderij ging het uiteindelijk om de perspectief van een net niet diagonaal in het interieur geplaatste stoel, dus om *niet-diagonaal tweepunts perspectief binnen een omgeving in eenpunts perspectief*. Het probleem van Vermeer was om, terwijl oogpunt en distantie al vastgelegd waren, de juiste plaats te bepalen van de twee verdwijnpunten van de onderling loodrechte horizontale hoofdrichtingen van de stoel. Hoewel hij geen precieze oplossing gevonden heeft, ziet zijn stoel er heel veel beter uit dan de scheef ten opzichte van de hoofd- en diagonale richtingen liggende balken van Vredeman de Vries in figuur 6. Aan het eind van paragraaf 4 hebben we laten zien hoe in zo'n geval met behulp van het punt  $O_3$  wél een perspectivisch geheel juist resultaat bereikt kan worden. Een andere methode maakt gebruik van de eerste van de eigenschappen van tweepunts perspectief die we hieronder zullen bespreken.

Bij onze bespreking van eigenschappen van tweepunts perspectief kiezen we, evenals we voor eenpunts perspectief gedaan hebben, een kubus  $ABCD.EFGH$  als object. Figuur 16 toont een situatie waarin de op een horizontaal grondvlak geplaatste kubus met behulp van een verticaal tekenvenster in tweepunts perspectief afgebeeld zal gaan worden. Het verdwijnpunt van  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$ , en  $FG$  noemen we weer  $V_1$ , maar nu hebben de lijnen  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  en  $GH$  ook een verdwijnpunt:  $V_2$ . De kijklijnen vanuit het oog  $O$  naar  $V_1$  en  $V_2$  zijn evenwijdig met respectievelijk  $AD$  en  $AB$ ; ze zijn dus horizontaal en staan loodrecht op elkaar. De kijklijn  $OP$  naar het oogpunt op de horizon is nu hoogtelijn op de hypothenusa van de rechthoekige driehoek  $V_1OV_2$  en uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $V_1PO$  en  $OPV_2$  volgt:  $|V_1P| : |PO| = |OP| : |PV_2|$ . Als de distantie  $d$  genoemd wordt, geldt dus:  $V_1$  en  $V_2$  liggen aan verschillende kanten van  $P$  en  $d^2 = |OP|^2 = |PV_1| * |PV_2|$ . Het is deze eigenschap die het mogelijk maakt om, als oogpunt en distantie bekend zijn en van twee onderling loodrechte horizontale richtingen één verdwijnpunt vastgelegd is, de plaats van het andere verdwijnpunt door meten en berekenen te bepalen zonder  $O_3$  te tekenen.

Meer nog dan in een eigenschap die toegepast kan worden op tweepunts perspectief binnen eenpunts perspectief, zijn we geïnteresseerd in eigenschappen die het construeren en interpreteren van zelfstandig niet-diagonaal tweepunts perspectief mogelijk maken. Hiervoor is het nodig dat we ook de diagonalen van de grensvlakken van de kubus in onze beschouwing betrekken.

In figuur 16 zijn de diagonalen van grond- en bovenzvlak van de kubus getekend en de kijklijn vanuit het oog  $O$  naar het verdwijnpunt  $U_2$  van  $AC$  en  $EG$  op de horizon. Het verdwijnpunt  $U_1$  van  $BD$  en  $FH$  valt te ver buiten het



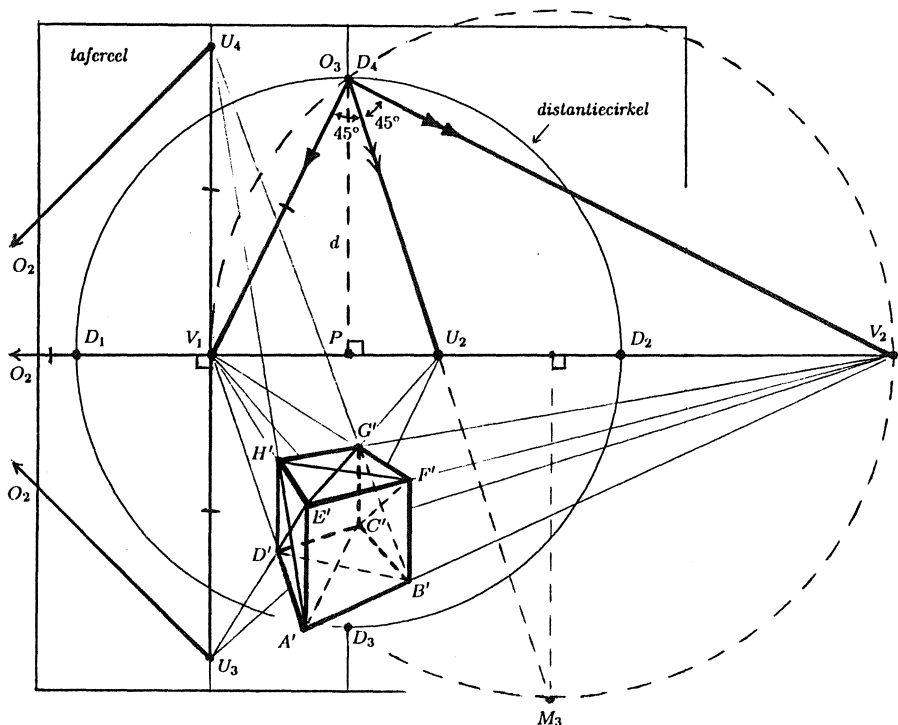
FIGUUR 16. Tweepunts perspectief:  $d^2 = |OP|^2 = |PV_1| * |PV_2|$ .

tafereel.  $OU_2$  is evenwijdig met  $AC$  en  $EG$  en maakt dus hoeken van  $45^\circ$  met  $OV_1$  en  $OV_2$ , die evenwijdig zijn met zijden van grond- en bovenvlak van de kubus.  $OU_2$  is dus bissectrice van de rechte hoek met hoekpunt  $O$  van driehoek  $V_1OV_2$ .

Ten slotte zijn ook de kijklijnen naar de verdwijnpunten  $U_3$  en  $U_4$  van de diagonalen van de zijvlakken  $ADHE$  en  $BCGF$  getekend. Deze lijnen liggen, evenals de horizontale kijklijn naar het verdwijnpunt  $V_1$  van  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$ , en  $FG$ , in het vlak door  $O$  evenwijdig met de verticale vlakken  $ADHE$  en  $BCGF$ . De punten  $U_3$  en  $U_4$  liggen dus samen met  $V_1$  op de snijlijn van dit verticale vlak met het verticale tafereel, die dan ook verticaal is. Verder maken  $OU_3$  en  $OU_4$  met  $OV_1$  even grote hoeken als  $ED$  en  $AH$  met  $AD$  en  $EH$  maken en dat zijn hoeken van  $45^\circ$ . Uit dit alles volgt:  $U_3$  en  $U_4$  liggen aan verschillende kanten van  $V_1$  op de verticaal door  $V_1$  zo dat  $|U_3V_1| = |U_4V_1| = |OV_1|$ .

Op dezelfde manier kan aangetoond worden dat de verdwijnpunten  $U_5$  en  $U_6$  van de diagonalen van overige twee verticale zijvlakken, die in figuur 16 niet

getekend zijn, op de verticaal door  $V_2$  liggen zo dat  $|U_5V_2| = |U_6V_2| = |OV_2|$ .



FIGUUR 17. Vooraanzicht tafereel met kubus in tweepunts perspectief, rotatiebeelden van vlakken door  $O$ , cirkel met middellijn  $V_1V_2$  en distantiecirkel.

Deze eigenschappen en hun relatie met de perspectieffiguur kunnen in het tafereel zichtbaar gemaakt worden. Daartoe roteren we om te beginnen weer het oogvlak over  $90^\circ$  om de horizon. Omdat de perspectieffiguur in de situatie van figuur 16 onder de horizon ligt, kiezen we de rotatierichting zo dat het beeld  $O_3$  van  $O$  boven de horizon in het tafereel ligt. Vervolgens passen we op het vlak waarin  $OV_1$ ,  $OU_3$  en  $OU_4$  liggen een rotatie om de verticaal door  $V_1$  toe zo dat deze kijklijnen in het tafereel afgebeeld worden. Het beeld  $O_2$  van  $O$  ligt dan op de horizon. We kiezen de rotatierichting zo dat  $O_2$  op het verlengde van  $V_2V_1$  ligt. We zouden ook nog - of in plaats van de laatste rotatie - het vlak door  $O$ ,  $V_2$ ,  $U_5$  en  $U_6$  om de verticaal door  $V_2$  kunnen roteren zo dat het beeldpunt  $O_1$  van  $O$  op het verlengde van  $V_1V_2$  ligt. Zie figuur 17 met een vooraanzicht van het tafereel waarin het resultaat van de eerste rotatie geheel, het resultaat van de tweede rotatie gedeeltelijk en dat van de derde rotatie niet getekend is.

Omdat bij rotatie van lijnstukken hun lengten behouden blijven, zijn van de bovengenoemde vier eigenschappen de eerste twee ook waar als hierin  $O$  vervangen wordt door  $O_3$ , terwijl de laatste twee geldig blijven als  $O$  vervangen

wordt door respectievelijk  $O_2$  en  $O_1$ . Zo vinden we: distantie  $d = |O_3P|$  en  $|O_3P|^2 = |PV_1| * |PV_2|$ , verder is  $O_3U_2$  bissectrice van de rechte hoek  $V_1O_3V_2$ , er geldt  $|U_3V_1| = |U_4V_1| = |O_2V_1|$ , en  $|U_5V_2| = |U_6V_2| = |O_1V_2|$ . Over de relatie tussen  $O_3$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  en  $U_2$  valt nog iets meer te zeggen: volgens de omgekeerde van de stelling van Thales ligt het hoekpunt  $O_3$  van de rechthoekige driehoek  $V_1O_3V_2$  op de cirkel met lijnstuk  $V_1V_2$  als middellijn en volgens de stelling van de omtrekshoeken snijdt bissectrice  $O_3U_2$  van deze hoek de cirkelboog waarop hoek  $V_1O_3V_2$  'staat' in het midden. Dit punt noemen we  $M_3$ ; het is een van de snijpunten van de middelloodlijn van lijnstuk  $V_1V_2$  met de cirkel. Merk op dat de cirkel met middellijn  $V_1V_2$  in figuur 17 niet de distantiecirkel is. De distantiecirkel heeft als middelpunt  $P$  en als straal  $d = |O_3P|$ .

Ten slotte moeten we niet vergeten dat de lijnstukken  $O_3V_1$  en  $O_2V_1$  verschillende rotatiebeelden van hetzelfde lijnstuk  $OV_1$  zijn en dat dus geldt:  $|O_3V_1| = |O_2V_1|$ . Evenzo geldt:  $|O_3V_2| = |O_1V_2|$ .

Uit figuur 17 kan opgemaakt worden hoe, bijvoorbeeld bij gegeven horizon en gegeven lijnstukken  $A'B'$  en  $A'D'$ , de constructie van de kubus in tweepunts perspectief verloopt. We zijn nu echter meer geïnteresseerd in de manier waarop uit een gegeven afbeelding in tweepunts perspectief, niet noodzakelijkerwijs die van een kubus, bijzonderheden afgeleid kunnen worden. Ook hiervoor geeft figuur 17 in een aantal gevallen voldoende aanknopingspunten.

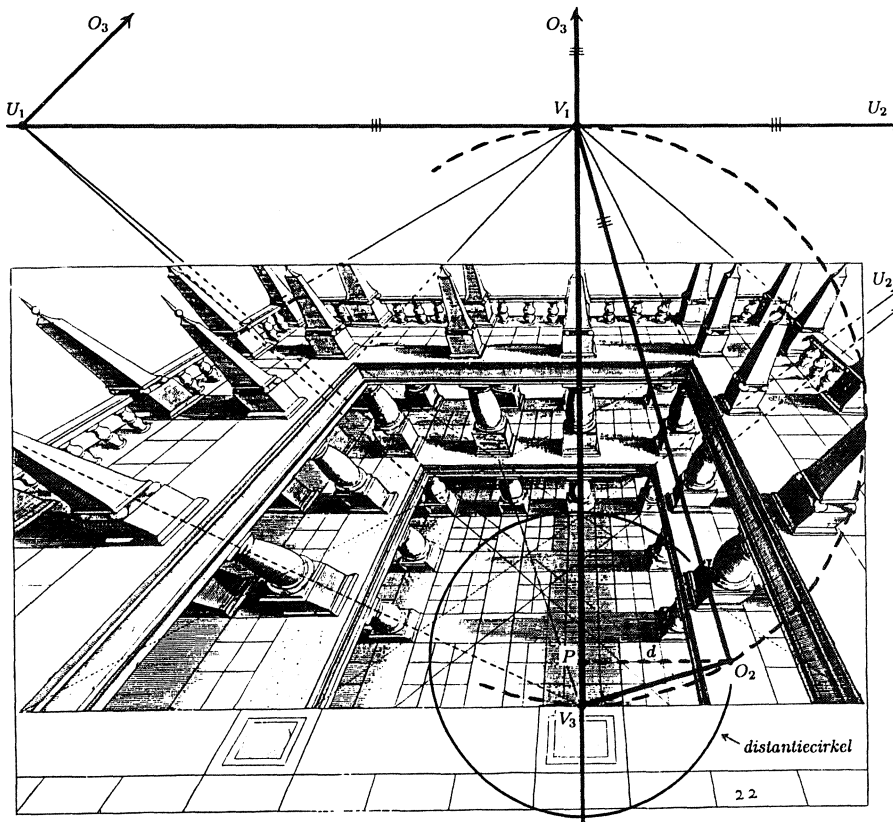
Soms zijn in een afbeelding van een gebouw in tweepunts perspectief vierkante vloertegels afgebeeld waarvan de zijden of de diagonalen dezelfde verdwijnpunten  $V_1$  en  $V_2$  hebben als de horizontale hoofdrichtingen van het gebouw. Dan kan op basis van de tegels  $U_2$  gevonden worden. Daarna tekenen we achtereenvolgens de cirkel met middellijn  $V_1V_2$ , het midden  $M_3$  van een van de twee bogen  $V_1V_2$  van deze cirkel, het snijpunt  $O_3$  van het verlengde van lijnstuk  $M_3U_2$  met de cirkel, en het voetpunt  $P$  van de loodlijn die we uit  $O_3$  op de horizon neerlaten. Nu is  $P$  het oogpunt en  $|O_3P|$  de distantie, waarmee het juiste gezichtspunt bij deze afbeelding gevonden is.

Zijn er in de afbeelding van een gebouw met horizontale verdwijnpunten  $V_1$  en  $V_2$  geen vloertegels, maar vierkante wandtegels afgebeeld waarvan twee zijden of een diagonaal horizontaal zijn, dan is de werkwijze tot aan het bepalen van  $O_3$  anders. In zo'n geval bepalen we eerst op basis van de tegels de verdwijnpunten  $U_3$  en  $U_4$  op de verticaal door  $V_1$  of  $U_5$  en  $U_6$  op de verticaal door  $V_2$ . Vervolgens kan  $O_2$  of  $O_1$  bepaald worden, maar nodig is dit niet. We tekenen een halve cirkel met middellijn  $V_1V_2$ , cirkelen de afstand  $|U_3V_1| = |U_4V_1| = |O_2V_1|$  vanuit  $V_1$  of de afstand  $|U_5V_2| = |U_6V_2| = |O_1V_2|$  vanuit  $V_2$  om en vinden als snijpunt met de cirkelboog  $O_3$ .

In de volgende paragraaf passen we varianten van deze laatste methode toe op een afbeelding in niet-diagonaal tweepunts perspectief van Vredeman de Vries. Bijzonder aan deze afbeelding is dat het tafereel niet verticaal is.

7. TWEEPUNTS PERSPECTIEF MET HELLEND TAFEREEL

Ook voor tweepunts perspectief geldt dat het tafereel niet verticaal hoeft te zijn. De enige eis die wat richting betreft aan het tafereel gesteld wordt, is dat het tafereel evenwijdig is aan precies één van de drie onderling loodrechte hoofd-richtingen van het object. Bij bouwwerken met horizontale vloer en verticale muren is voor tweepunts perspectief een horizontaal tafereel dus géén alternatief voor het gebruikelijke verticale tafereel. Wel is een 'hellend' tafereel mogelijk. Opmerkelijk is dat deze keuze door Vredeman de Vries gemaakt is voor het enige (fantasie)bouwwerk dat hij in zijn leerboek in niet-diagonaal tweepunts perspectief heeft afgebeeld. Zie figuur 18. De tekenaar lijkt een tekenvenster ongeveer in de stand van het bovenblad van een lessenaar voor zich gehouden te hebben, terwijl hij door dit venster van bovenaf op het gebouw neerkeek.



FIGUUR 18. Uit: HANS VREDEMAN DE VRIES, *Perspective*, 1604/1605. Met hulplijnen.  $|O_2V_1| = |O_3V_1| = |U_1V_1| = |U_2V_1|$ .

In figuur 18 hebben we de verdwijnpunten  $V_1$  van een van de horizontale hoofdrichtingen en  $V_3$  van de verticale hoofdrichting van het gebouw aangegeven.

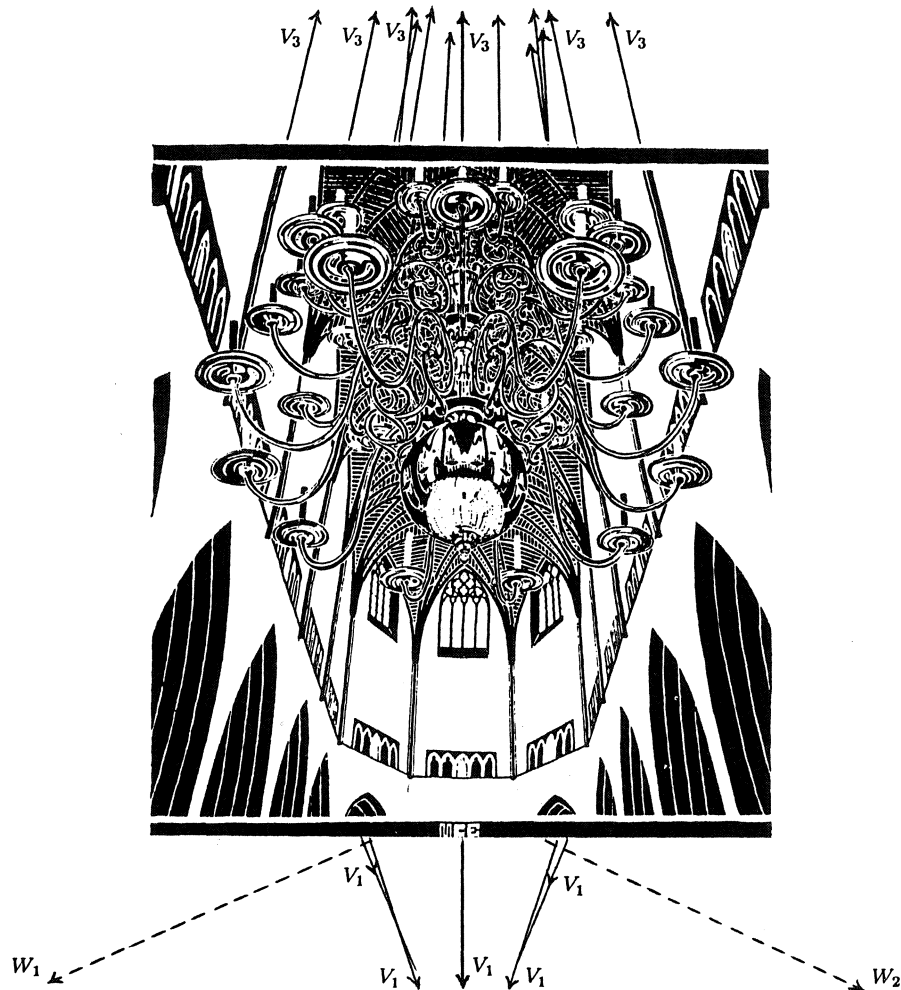
De tweede horizontale hoofdrichting is evenwijdig met de grondlijn van het tafereel en heeft dus geen verdwijnpunt. Het punt  $V_3$  wordt door Vredeman de Vries *conterpunt* (=contrapunt) genoemd. In de figuur zijn veel horizontale vierkante tegels afgebeeld en ook de balustrade en de vide zijn volgens de begeleidende tekst vierkant. We hebben enkele diagonalen die al in de tekening aangegeven waren, doorgetrokken om hun verdwijnpunten  $U_1$  (en  $U_2$ , hier niet getekend) op de horizon te bepalen. Op basis van de punten  $U_1$  (en  $U_2$ ),  $V_1$  en  $V_3$ , hebben we vervolgens  $O_2$  en het oogpunt  $P$  gevonden. Hierbij was de werkwijze analoog aan het bepalen van  $O_3$  en  $P$  op basis van  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $V_1$  en  $V_2$  zoals dit aan het eind van de vorige paragraaf aan de hand van figuur 17 beschreven is. De overeenkomst is duidelijker als figuur 18 een kwart slag gedraaid wordt.

De distantie,  $|O_2P|$ , is dus vergeleken met de afmetingen van de figuur klein en naar verhouding veel kleiner dan in alle andere afbeeldingen in het boek van Vredeman de Vries het geval is. Omdat de distantie ook in absolute zin erg klein is, op deze schaal 2.0 cm, heeft het pas na vergroting van de figuur zin deze sterk vertekende afbeelding met één oog vanuit het juiste punt,  $O$ , te bekijken. De illusie dat men echt op een gebouw neerkijkt kan dan nog versterkt worden door de bovenzijde van de pagina iets hoger te houden dan de onderzijde, zo dat het blad papier een hoek van ( $\angle PV_1O = \angle PV_1O_2 \approx$ )  $16^\circ$  met het horizontale vlak maakt. De eigen kijklijnen hebben dan ook ten opzichte van het aardoppervlak dezelfde richting als de overeenkomstige kijklijnen van de tekenaar. Zo is  $OV_1$  dan horizontaal, terwijl  $OV_3$  verticaal is.

Tot Eschers vroegste werk behoort de tekening *Sint Bavo* (1920). Deze is wat onderwerpkeuze verwant met het in paragraaf 4 besproken schilderij van Saenredam, maar is wat de soort perspectief betreft vergelijkbaar met de hierboven besproken afbeelding van Vredeman de Vries. Zie figuur 19, waarin Eschers tekening verkleind is weergegeven. Net als in figuur 18 is hier het tafereel noch verticaal, noch horizontaal en is het een van de onderling loodrechte horizontale hoofdrichtingen die geen verdwijnpunt heeft. Een verschil is dat Escher niet vanuit een hoog standpunt naar beneden, maar juist vanaf de vloer schuin omhoog keek. Een ander verschil is, dat hij niet zoals Vredeman de Vries via constructie een gefantaseerd bouwwerk, maar op basis van waarneming een gedeelte van het interieur van een bestaande kerk in beeld bracht. Daarbij ging het Escher kennelijk veel meer om het lijnenspel met de kaarsenkroon als blikvanger en de weerspiegeling in de bolvormige onderkant van de kroon zoals hij die zag dan om perspectivische juistheid met als uitgangspunt een vlak tafereel.

Escher heeft ook niet geprobeerd zijn waarnemingen achteraf door constructie meer in overeenstemming te brengen met de regels van de perspectief zoals Saenredam deed toen hij ruim tweeënhalve eeuw eerder aan zijn schilderij van het koor van de Sint-Bavokerk te Haarlem werkte. Zelfs met het 'conterpunt'  $V_3$  van Vredeman de Vries, dat nu aan de bovenzijde buiten de figuur ligt, is Escher losjes omgegaan. Op het eerste gezicht lijken de beelden van verticale lijnstukken wel op lijnen te liggen die elkaar alle in één punt snijden. Maar als we deze lijnen werkelijk tekenen, blijkt dit toch niet te kloppen. Ook de plaats

die we vinden voor het verdwijnpunt  $V_1$  van de horizontale lengterichting van de kerk, nu onder de figuur gelegen, hangt af van welke lijnstukken we verlenen. Hierdoor is de plaats van de horizon, die door  $V_1$  gaat en evenwijdig met de breedterichting van de kerk is, ook niet precies bekend. Dit alles maakt dat we het oogpunt en de distantie niet precies uit de tekening kunnen afleiden.



FIGUUR 19. M.C. Escher, *Sint Bavo*, 1920. Hulplijnen toegevoegd.

Dat in de figuur niet zoals in figuur 18 afbeeldingen van horizontale vierkanten voorkomen, is voor het bepalen van oogpunt en distantie op zichzelf geen probleem. We zouden  $O_3$ , nu onder de horizon, kunnen vinden met behulp van de verdwijnpunten  $W_1$  en  $W_2$  van de horizontale lijnstukken in de scheef ten opzichte van de lengte- en de breedterichting van het koor staande muren. De verdwijnpunten van deze lijnstukken speelden ook een rol bij de bespreking van

het schilderij van Saenredam in paragraaf 4. Daar hebben we laten zien hoe de hoeken tussen  $O_3W_1$  en  $O_3W_2$  en de loodlijn vanuit  $O_3$  op de horizon samenhangen met de hoeken die de betreffende muren met de achterste muur van het koor maken. Ook hebben we laten zien hoe deze hoeken op hun beurt samenhangen met verhoudingen van lijnstukken in de figuur, aannemende dat de drie muren die het koor aan de achterzijde begrenzen dezelfde breedte hebben. Onder deze aanname zouden we  $O_3$  dus op basis van de punten  $W_1$  en  $W_2$  en de lengten van enkele lijnstukken in de figuur kunnen bepalen. De constructie van  $O_2$  en het oogpunt  $P$  verloopt dan verder net zo als in figuur 18.

#### 8. DRIEPUNTS PERSPECTIEF

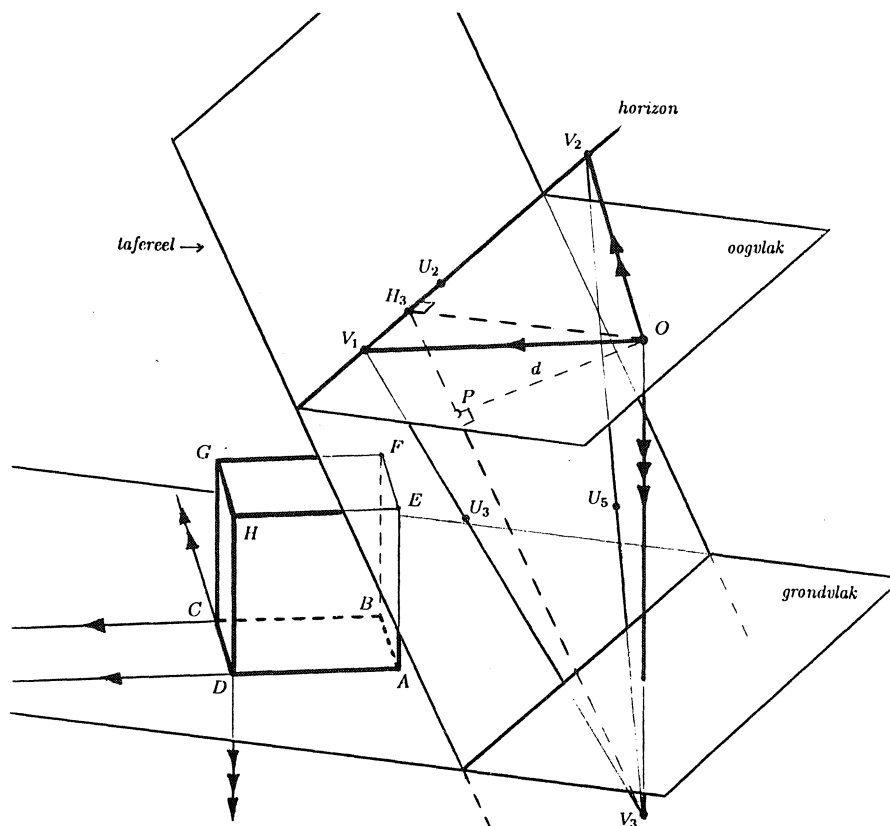
De afbeelding van Vredeman de Vries in tweepunts perspectief met hellend tafereel, zou een voorbeeld van *diagonaal driepunts perspectief* geweest zijn, als de horizontale hoofdrichtingen van het bouwwerk evenwijdig aan de diagonalen van de afgebeelde vierkante tegels waren geweest. De punten  $U_1$ ,  $U_2$  en  $V_3$  in figuur 18 zouden dan de verdwijnpunten van de drie onderling loodrechte hoofdrichtingen van het gebouw zijn. Hoewel we  $U_1$  en  $U_2$  dan  $V_1$  en  $V_2$  genoemd zouden hebben, zou er wat het construeren en interpreteren van de perspectiefafbeelding niets wezenlijks veranderd zijn.

Is voor diagonaal driepunts perspectief de kennis van de tweepunts perspectief voldoende, voor niet-diagonaal driepunts perspectief is dit niet het geval. Wie literatuur over dit onderwerp zoekt, hoeft niet in leerboeken te kijken die meer dan 50 jaar oud zijn. Uit de Nederlandstalige literatuur over perspectief uit het begin van de twintigste eeuw, waarin niet zozeer de schilderkunst maar veel meer het technisch tekenen als toepassingsgebied centraal stond, blijkt dat er wat constructiemethoden betreft vergeleken met de zeventiende eeuw wel duidelijk vooruitgang geboekt was. Maar nog steeds werd alleen een- en tweepunts perspectief behandeld, waarbij het tafereel nog bijna altijd verticaal gekozen werd. Toch was de belangstelling voor driepunts perspectief inmiddels gewekt, vooral door foto's van wolkenkrabbers die de verdwijnpunten van twee horizontale én de verticale hoofdrichting lieten zien. De fotografen hadden van onderaf tegen deze gebouwen op gekeken. Later raakte men ook vertrouwd met de driepunts perspectief van foto's en filmbeelden die van grote hoogte naar beneden kijkend, vanuit een vliegtuig, opgenomen waren. Het duurde echter nog tot het begin van de vijftiger jaren voordat in literatuur over (handmatig) technisch tekenen, reclametekenen en vrij tekenen en/of schilderen, weleens enige aandacht aan driepunts perspectief besteed werd. Hierop heeft Escher met het ontwerp voor zijn houtsnede *Toren van Babel* in niet-diagonaal driepunts perspectief (1928) niet gewacht. Voordat we dit werk van Escher bespreken, zullen we de nodige eigenschappen van - al dan niet diagonaal - driepunts perspectief behandelen. Hierbij kiezen we weer een kubus als object.

Figuur 20 toont een kubus  $ABCD.EFGH$  op een horizontaal grondvlak die met behulp van een 'hellend' tekenvenster in driepunts perspectief afgebeeld zal worden. Geen van de ribben van de kubus is nu evenwijdig met het tafereel.



$V_1$  is het verdwijnpunt van  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$ , en  $FG$ ,  $V_2$  is het verdwijnpunt van  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  en  $GH$  en  $V_3$  is het verdwijnpunt van de verticale ribben van de kubus. De kijklijnen vanuit het oog  $O$  naar  $V_1$ ,  $V_2$  en  $V_3$  zijn evenwijdig met respectievelijk  $AD$ ,  $AB$  en  $AE$ ; de eerste twee zijn dus horizontaal, de tweede is verticaal en ze staan twee aan twee loodrecht op elkaar. De lijn door  $V_1$  en  $V_2$  wordt, evenals bij een- en tweepunts perspectief, de horizon genoemd. De horizon is de snijlijn van het oogvlak, dat is het horizontale vlak door  $O$ , met het tafereel. Het oogpunt  $P$  is zoals steeds het voetpunt van de uit  $O$  op het tafereel neergelaten loodlijn.  $P$  ligt nu niet op de horizon.



FIGUUR 20. Driepunts perspectief:  $d^2 = |OP|^2 = |PV_3| * |PH_3|$ .

Er geldt: *het oogpunt  $P$  is het hoogtepunt van driehoek  $V_1V_2V_3$* . Bewijs: Uit het gegeven dat  $OP$  loodrecht op het tafereel staat, volgt dat  $OP$  een rechte hoek maakt met de horizon  $V_1V_2$ . Uit  $OV_3 \perp OV_1$  en  $OV_3 \perp OV_2$  volgt:  $OV_3 \perp$  vlak  $OV_1V_2$  en dus:  $OV_3 \perp$  lijn  $V_1V_2$ . Samen met  $OP \perp V_1V_2$  geeft dit laatste vlak  $OV_3P \perp V_1V_2$  en hieruit volgt: lijn  $V_3P \perp V_1V_2$ . Dus is  $V_3P$  hoogtelijn van driehoek  $V_1V_2V_3$ . Op dezelfde manier kan aangetoond worden dat  $V_2P$  en  $V_1P$  hoogtelijnen zijn van driehoek  $V_1V_2V_3$ , waaruit volgt wat te bewijzen was.

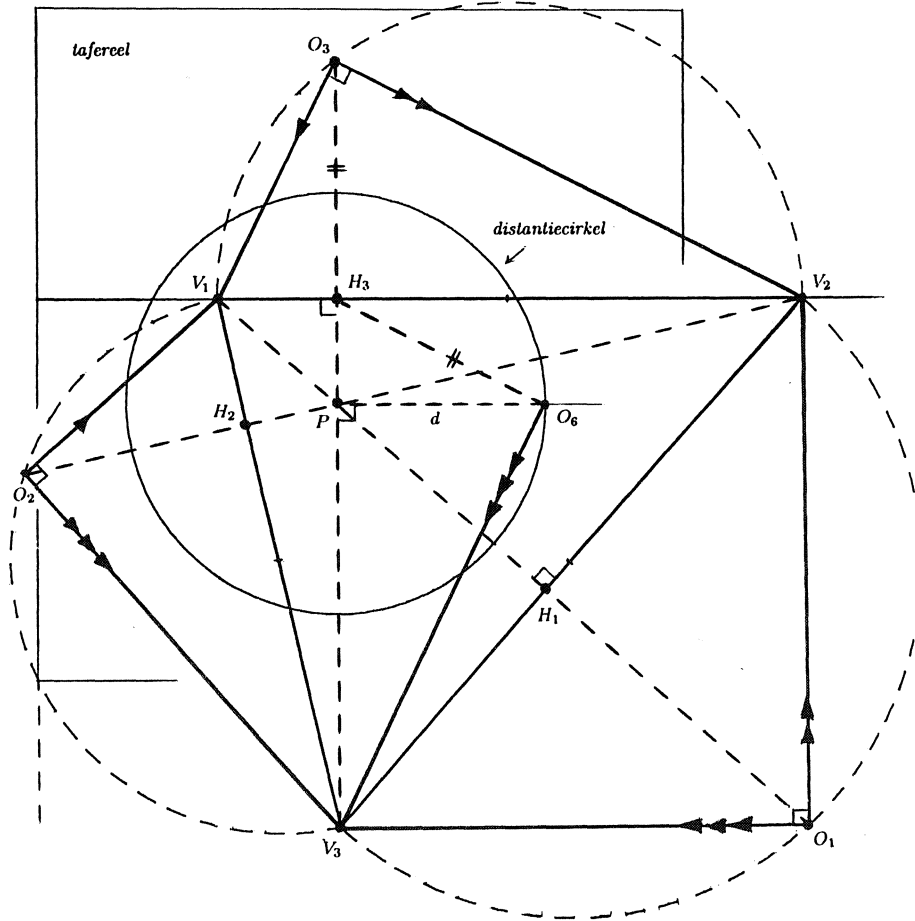
We noemen het voetpunt van de hoogtelijn  $V_3P$  van driehoek  $V_1V_2V_3$ :  $H_3$ . Uit  $OV_3 \perp$  vlak  $OV_1V_2$  volgt:  $OV_3 \perp OH_3$ . Uit  $OP$  staat loodrecht op het tafereel volgt:  $OP \perp V_3H_3$ . Dus  $OP$  is de hoogtelijn op de hypothenusa in de rechthoekige driehoek  $V_3OH_3$  en met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken volgt:  $|V_3P| : |PO| = |OP| : |PH_3|$ . Voor de afstand  $d$  geldt dus:  $d^2 = |OP|^2 = |PV_3| * |PH_3|$ . Noemen we de voetpunten van de hoogtelijnen  $V_2P$  en  $V_1P$  van driehoek  $V_1V_2V_3$  respectievelijk  $H_2$  en  $H_1$ , dan kunnen we op dezelfde manier aantonen:  $d^2 = |PV_2| * |PH_2|$  en  $d^2 = |PV_1| * |PH_1|$ .

In het bewijs van de eigenschap dat het oogpunt  $P$  hoogtepunt is van driehoek  $V_1V_2V_3$  hebben we gevonden  $V_1V_2 \perp$  vlak  $OV_3P$ . Hieruit volgt behalve  $V_1V_2 \perp V_3H_3$ , wat we al wisten, ook:  $V_1V_2 \perp OH_3$ . Als we op het oogvlak  $OV_1V_2$  een rotatie om de horizon toepassen zo dat het beeld  $O_3$  van  $O$  boven de horizon in het tafereel ligt, dan ligt  $O_3$  dus op het verlengde van  $V_3H_3$ . Op dezelfde manier vinden we: als de vlakken  $OV_1V_3$  en  $OV_2V_3$  om respectievelijk lijn  $V_1V_3$  en lijn  $V_2V_3$  geroteerd worden zo dat de beelden  $O_2$  en  $O_1$  van  $O$  buiten driehoek  $V_1V_2V_3$  in het tafereel liggen, dan liggen  $O_2$  en  $O_1$  respectievelijk op de verlengden van  $V_2H_2$  en  $V_1H_1$ . Zie figuur 21 met een vooraanzicht van het tafereel, nu nog zonder perspectiefbeeld van de kubus.

Uit  $\angle V_3OV_2 = \angle V_3OV_1 = \angle V_1OV_2 = 90^\circ$  volgt:  $\angle V_3O_1V_2 = \angle V_3O_2V_1 = \angle V_1O_3V_2 = 90^\circ$ . De punten  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  liggen dus op de cirkels in het tafereel met respectievelijke middellijnen  $V_2V_3$ ,  $V_1V_3$  en  $V_1V_2$ . In de figuur zijn alleen de buiten driehoek  $V_1V_2V_3$  gelegen delen van deze cirkels getekend. Van belang is nog op te merken dat  $O_3V_1$  en  $O_2V_1$  rotatiebeelden van hetzelfde lijnstuk  $OV_1$  zijn, dus:  $|O_3V_1| = |O_2V_1|$ . Evenzo:  $|O_3V_2| = |O_1V_2|$  en  $|O_1V_3| = |O_2V_3|$ .

In figuur 21 is ook het beeld getekend van de rechthoekige driehoek  $V_3OH_3$  met hoogtelijn  $OP$  bij rotatie om  $V_3H_3$  over  $90^\circ$ . Het beeld van  $O$  hebben we  $O_6$  genoemd. Nu is  $O_6P$  hoogtelijn in de rechthoekige driehoek  $V_3O_6H_3$  en  $|O_6P| = |OP| = d$ . Zo hebben we de afstand, waarvoor we al een uitdrukking in termen van lengten van lijnstukken uit het tafereel gevonden hadden, ook in het tafereel zichtbaar gemaakt. De cirkel met middelpunt  $P$  door  $O_6$  is de afstandscirkel. Hetzelfde resultaat hadden we natuurlijk kunnen bereiken door  $V_1OH_1$  of  $V_2OH_2$  over  $90^\circ$  om de hypothenusa te draaien. Merk op:  $O_6H_3$  en  $O_3H_3$  zijn beide rotatiebeeld van lijnstuk  $OH_3$  en dus geldt  $|O_6H_3| = |O_3H_3|$ .

Uit het bovenstaande blijkt dat als van drie onderling loodrechte richtingen in een perspectieftekening de verdwijnpunten  $V_1$ ,  $V_2$  en  $V_3$  gegeven of uit de figuur af te leiden zijn, het oogpunt en de afstand gemakkelijk bepaald kunnen worden. Immers, we tekenen eerst de hoogtelijnen van driehoek  $V_1V_2V_3$  en vinden het oogpunt  $P$  als hun snijpunt. Daarna bepalen we het voetpunt  $H_3$  van de hoogtelijn uit  $V_3$  en het snijpunt  $O_3$  van het verlengde van  $V_3H_3$  met de cirkel met middellijn  $V_1V_2$ . Nu richten we een loodlijn op  $V_3H_3$  op in  $P$ . We cirkelen vanuit  $H_3$  het lijnstuk  $H_3O_3$  om en vinden als snijpunt met de zojuist getekende loodlijn het punt  $O_6$ . Zo is dan de afstand  $d = |O_6P|$  gevonden. Anders dan bij een- en tweepunts perspectief hebben we hiervoor geen andere gegevens, zoals verdwijnpunten van diagonalen van horizontale of verticale vierkanten, nodig.

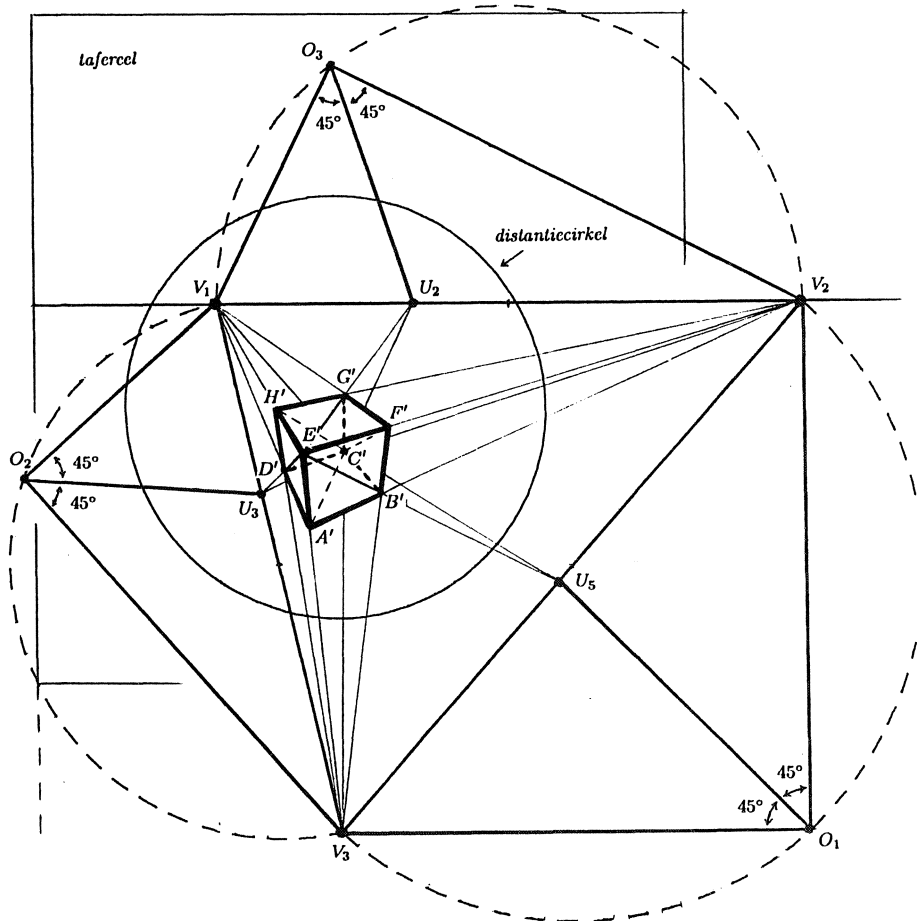


FIGUUR 21. Vooraanzicht tafereel met rotatiebeelden van vlakken door  $O$ , halve cirkels met middellijnen  $V_1V_2$ ,  $V_1V_3$  en  $V_2V_3$ , en distantiecirkel.

In figuur 20 hebben we toch van drie van dit soort verdwijnpunten de plaats aangegeven, overigens zonder de betreffende diagonalen en de bijbehorende kijklijnen erbij te tekenen:  $U_2$  is verdwijnpunt van  $AC$  en  $EG$ ,  $U_3$  is verdwijnpunt van  $ED$  en  $FC$ , en  $U_5$  is verdwijnpunt van  $EB$  en  $HC$ . Deze punten spelen een rol als men zelf een kubus in driepunts perspectief wil tekenen. Op dezelfde manier als bij tweepunts perspectief kan aangetoond worden dat  $U_2$  op  $V_1V_2$  ligt zo dat  $\angle V_1OU_2 = \angle V_2OU_2 = 45^\circ$ . Analoog vinden we:  $U_3$  ligt op  $V_1V_3$  zo dat  $\angle V_1OU_3 = \angle V_3OU_3 = 45^\circ$  en  $U_5$  ligt op  $V_2V_3$  zo dat  $\angle V_2OU_5 = \angle V_3OU_5 = 45^\circ$ .

De punten  $U_2$ ,  $U_3$  en  $U_5$  zijn ook te zien in figuur 22 waarin we de tekening van figuur 21 voor het grootste deel overgenomen hebben en waarin verder het perspectiefbeeld van de kubus van figuur 20 gegeven is. Nu geldt:  $\angle V_1O_3U_2 =$

$\angle V_2O_3U_2 = 45^\circ$ ,  $\angle V_1O_3U_3 = \angle V_3O_3U_3 = 45^\circ$  en  $\angle V_2O_3U_5 = \angle V_3O_3U_5 = 45^\circ$ .

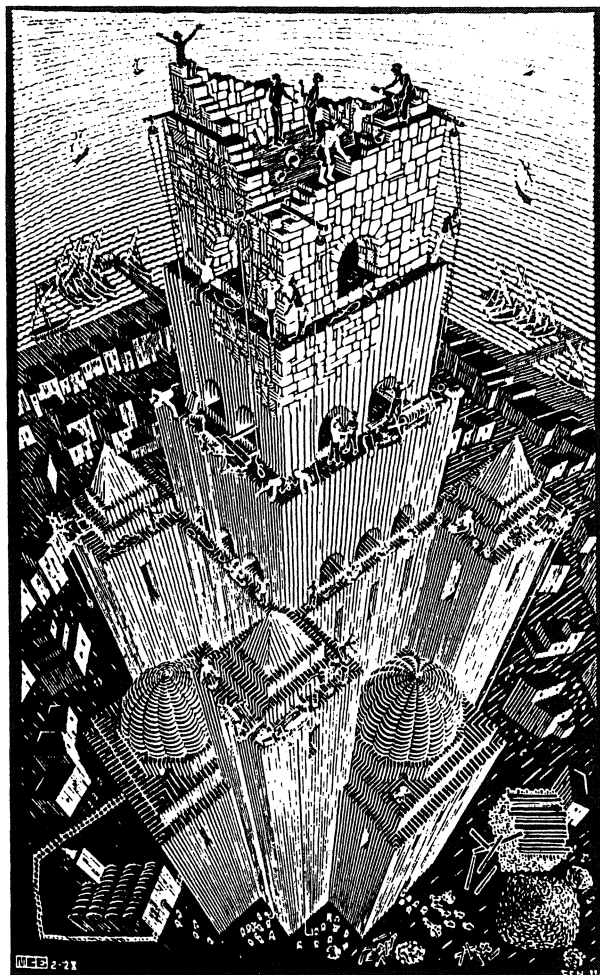


FIGUUR 22. Vooraanzicht tafereel met rotatiebeelden van vlakken door  $O$ , halve cirkels met middellijnen  $V_1V_2$ ,  $V_1V_3$  en  $V_2V_3$ , de distantiecirkel en de kubus in driepunts perspectief.

Ook geldt hier evenals bij tweepunts perspectief: het verlengde van  $O_3U_2$  gaat door het midden van de cirkelboog met middellijn  $V_1V_2$  waar hoek  $V_1O_3V_2$  op 'staat'; dat is juist de boog die wij hier niet getekend hebben. Op dezelfde manier kan aangetoond worden: de verlengden van  $O_3U_3$  en  $O_3U_5$  gaan door de middens van de niet getekende delen van de cirkels met middellijnen  $V_1V_3$  en  $V_2V_3$ .

Uit figuur 22 blijkt dat onze kubus in driepunts perspectief niet alleen ruim binnen de distantiecirkel, maar ook nog voor het grootste deel binnen de zichtcirkel met straal  $0.4 * d$  (hier niet getekend) ligt. Wat dit betreft is deze afbeelding dus beter geslaagd dan onze kubussen in de figuren 9 en 17.

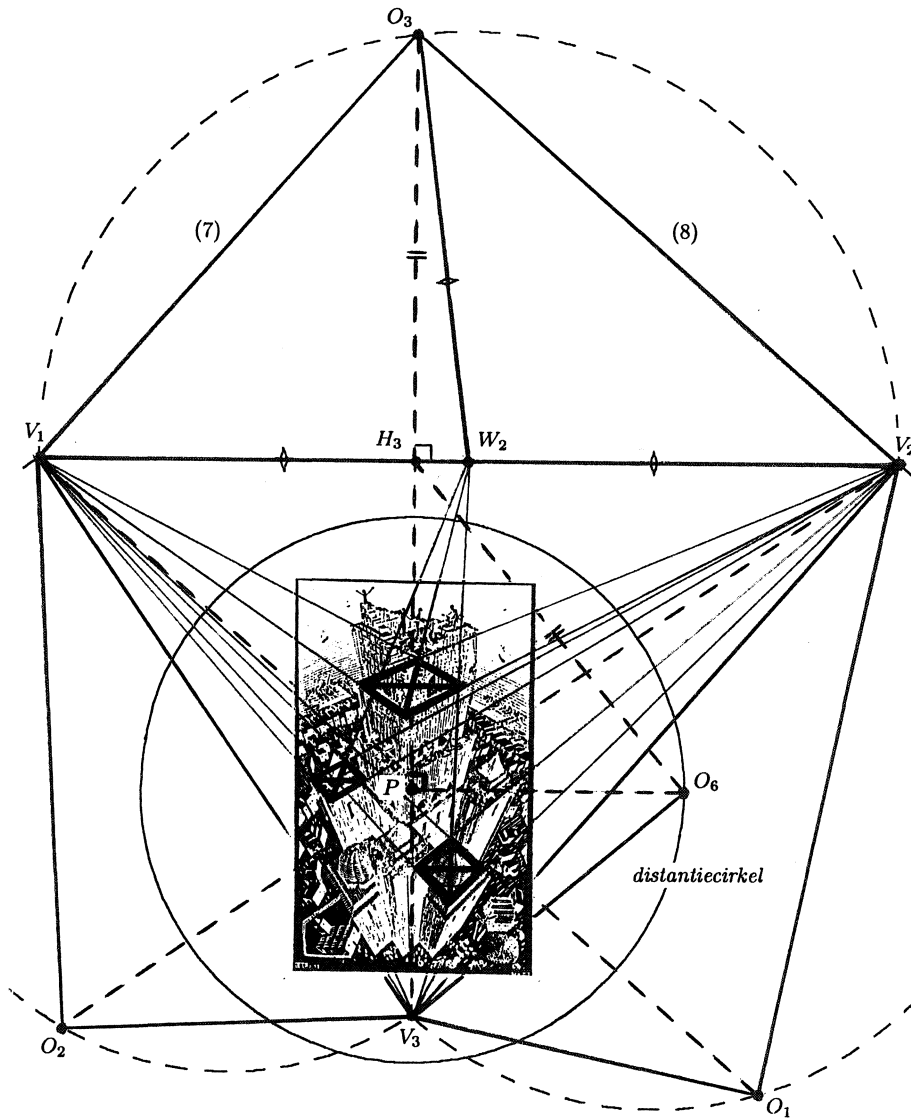
Uit de figuren 21 en 22 kan opgemaakt worden hoe, bijvoorbeeld bij gegeven  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  en lijnstuk  $A'B'$  waarvan het verlengde door  $V_2$  gaat, de constructie van de kubus in driepunts perspectief verloopt. We willen ons nu echter concentreren op het afleiden van bijzonderheden uit een gegeven afbeelding - niet noodzakelijk van een kubus - in driepunts perspectief. Zoals we gezien hebben, geeft figuur 21 op zichzelf hiervoor al genoeg aanwijzingen. Wat we verder nodig hebben, is dat de gegeven afbeelding perspectivisch correct is en dat hierin beelden van lijn(stukk)en met drie onderling loodrechte richtingen te zien zijn. Aannamen over de vorm van tegels of hoeken tussen muren die we bij een- en tweepunts perspectief niet konden missen, zijn nu overbodig. We zullen dit demonstreren voor Eschers houtsnede *Toren van Babel*, zie figuur 23.



FIGUUR 23. M.C. Escher, *Toren van Babel*, 1928.

Deze uiteraard niet uit waarnemingen afgeleide afbeelding is beter in over-

eenstemming met de regels van de perspectief dan zijn 8 jaar oudere *Sint Bavo*. De figuur heeft duidelijk een verticale en twee onderling loodrechte hoofdrichtingen. Om te kunnen laten zien hoe de bijbehorende verdwijnpunten  $V_3$ ,  $V_1$  en  $V_2$  en daarna  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $P$ ,  $H_3$ ,  $O_6$  en de distantiecirkel bepaald worden, hebben we de afbeelding nog verder verkleind; zie figuur 24.



FIGUUR 24. M.C. Escher, *Toren van Babel*, 1928. Hulplijnen en distantiecirkel toegevoegd.

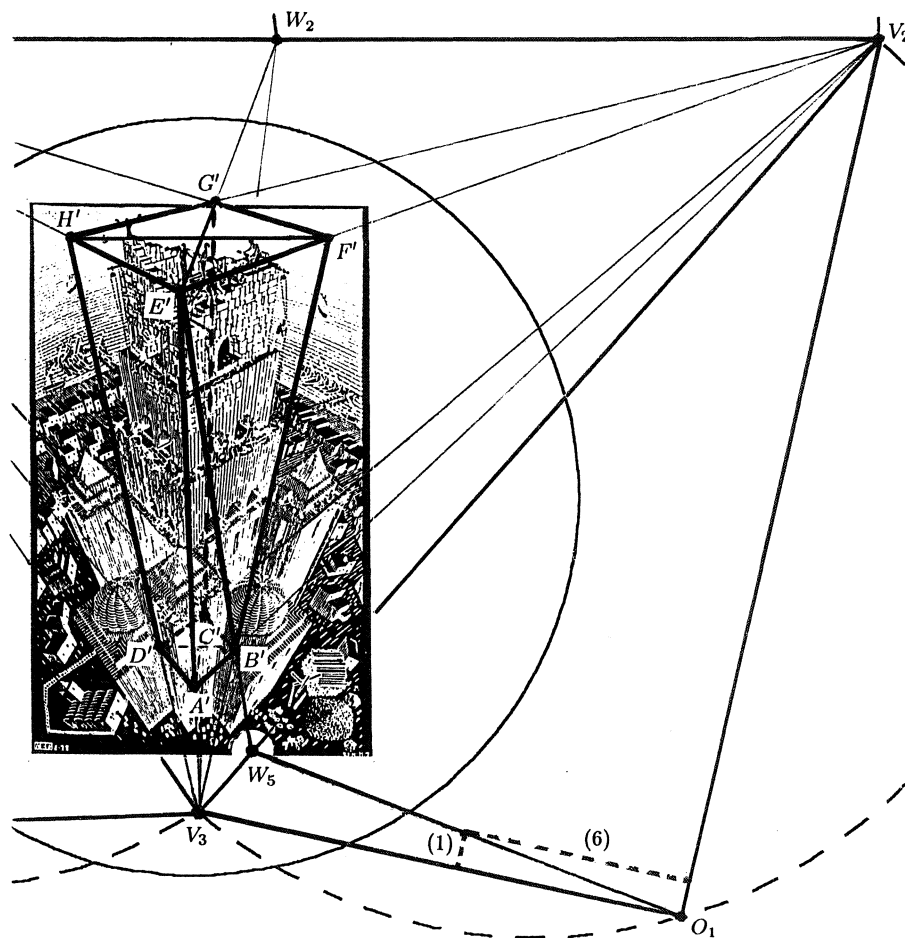
Het oogpunt  $P$  blijkt vrijwel in het centrum van de afbeelding te liggen

terwijl de figuur in z'n geheel binnen de distantiecirkel valt. Driehoek  $V_1V_2V_3$  is niet gelijkbenig, dus is geen van de driehoeken  $O_3V_1V_2$ ,  $O_2V_1V_3$  en  $O_1V_2V_3$  behalve rechthoekig ook gelijkbenig. Dit betekent dat we hier te maken hebben met niet-diagonaal driepunts perspectief.

Aan de hand van de figuur zullen we vervolgens nagaan of de horizontale doorsneden van de hoofdtoren, de lagere hoektorentjes en de nog lagere zijtorens vierkant zijn. Daartoe hebben we in figuur 24 diagonalen van beelden van horizontale omtrekken van de verschillende soorten torens getekend. Elk van deze diagonalen blijkt óf evenwijdig met de horizon  $V_1V_2$  te zijn óf de horizon in het midden  $W_2$  van lijnstuk  $V_1V_2$  te snijden. Zowel van de hoofdtoren als van de kleinere torens hebben de horizontale doorsneden dus een diagonaal die evenwijdig is met  $V_1V_2$  en een diagonaal die  $W_2$  als verdwijnpunt heeft en die dus evenwijdig is met de kijklijn  $OW_2$ . Dit betekent dat de hoeken die deze diagonalen met de zijden van de rechthoekige doorsneden maken, juist gelijk zijn aan de hoeken die  $V_1V_2$  en de omhoog gedraaide kijklijn  $O_3W_2$  in het tafereel met de zijden  $O_3V_1$  en  $O_3V_2$  van de rechthoekige driehoek  $V_1O_3V_2$  maken. Hieruit volgt dat de lengten van de zijden van de horizontale doorsneden van de genoemde torens zich verhouden als  $|O_3V_1| : |O_3V_2|$  en dat is ongeveer als 7 : 8. Deze doorsneden zijn dus *niet vierkant*.

Of dit Eschers bedoeling was, weten we niet. Bij de meest voorkomende vorm van diagonaal driepunts perspectief zijn het juist horizontale *vierkanten* die een diagonaal evenwijdig met de horizon hebben terwijl de andere diagonaal de horizon in het midden van  $V_1V_2$  snijdt. Dan is driehoek  $V_1O_3V_2$  behalve rechthoekig ook gelijkbenig, terwijl driehoek  $V_1V_2V_3$  gelijkbenig is met top  $V_3$ . Misschien heeft Escher aanvankelijk wel een afbeelding met vierkante torens in deze vorm van perspectief willen maken. Later kan hij wat de soort driepunts perspectief betreft van gedachten veranderd zijn en de positie van  $V_3$  ten opzichte van  $V_1$  en  $V_2$  wél, maar de manier waarop hij diagonalen tekende niet gewijzigd hebben zonder zich te realiseren wat dit voor de vorm van de tores betekende.

Ten slotte willen we proberen nog iets te weten te komen over de hoogte van deze toren van Babel. Een moeilijkheid is dat in de figuur de voet van de hoofdtoren niet te zien is. Door figuur 23 nauwkeurig te bestuderen wordt echter duidelijk dat de (verlengde) verticale snijlijn van de twee muurdelen van de hoofdtoren waarin drie ronde poortjes zichtbaar zijn, tevens snijlijn is van (uitbreidingen van) vlakken die de lage zijtorens begrenzen. Op basis hiervan kunnen we het beeld  $A'$  van het snijpunt van deze lijn met het grondvlak van het bouwwerk bepalen. Zie figuur 25 waarin een gedeelte van figuur 24 iets vergroot is overgenomen. Nu is het niet moeilijk meer om ook van de (verlengden van de) overige verticale snijlijnen van muurdelen van de hoofdtoren op dezelfde verdieping de snijpunten met het grondvlak in de perspectieffiguur aan te geven. In figuur 25 zijn dit de punten  $B'$ ,  $C'$  en  $D'$ . In dezelfde figuur hebben we de punten  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$  en  $H'$  op de verlengden van respectievelijk  $V_3A'$ ,  $V_3B'$ ,  $V_3C'$  en  $V_3D'$  getekend zo dat hun originelen dezelfde hoogte boven het grondvlak hebben als het hoogste punt van de hoofdtoren.



FIGUUR 25. M.C. Escher, *Toren van Babel*, 1928. Hulplijnen toegevoegd.

Nu bepalen we het snijpunt  $W_5$  van  $E'B'$  met  $V_2V_3$ ; dit is het verdwijnpunt van de zijvlakdiagonalen  $EB$  en  $HC$  van het blok  $ABCD.EFGH$ . We verbinden  $W_5$  met  $O_1$  en zien nu de hoeken die deze diagonalen met de zijden van  $ABFE$  en  $CDHG$  maken op ware grootte: hoek  $W_5O_1V_1$  en hoek  $W_5O_1V_3$ . In de figuur hebben we een rechthoek getekend met zijden langs  $W_5V_1$  en  $W_5V_3$  en een diagonaal langs  $W_5O_1$ . Hiervan en dus ook van  $ABFE$  en  $CDHG$  verhouden de lengten van de zijden zich als 1 : 6. Samen met de verhouding 7 : 8 die we al gevonden hadden voor de zijden van grond- en bovenvlak van blok  $ABCD.EFGH$ , vinden we zo dat de verhouding van de breedte, de lengte en de hoogte van dit blok is: 7 : 8 : 48.

Willen we iets zeggen over de hoogte in meters, dan kunnen we bijvoorbeeld de menselijke figuren op de verdieping met de drie ronde poortjes aan iedere kant als maatstaf nemen. Op basis hiervan schatten we dat de hoofdtoren hier



zo'n 10 meter breed is. Hieruit volgt dan dat Eschers toren van Babel een hoogte van nog geen 70 meter bereikt heeft. Dit is slechts 60% van de hoogte van de Domtoren in Utrecht. Door een relatief kleine uitbreiding had Escher zijn bouwwerk echter heel veel aan hoogte kunnen doen winnen, als hij die uitbreiding in de perspectieffiguur niet naar boven, maar naar beneden toe had aangebracht. Hier ligt het oneindige immers binnen handbereik.

## BRONNEN VOOR DE FIGUREN

- Figuren 1 en 2: Jørgen Wadum, *Vermeer en de ruimtelijke illusie*, in: De wereld der geleerdheid rond Vermeer, Waanders bv, Zwolle 1996, p. 31-49
- Figuur 5: Daniëlle H.A.C. Lokin, *Het Delftse kerkinterieur van 1650 tot 1675*, in: Delftse Meesters, Tijdgenoten van Vermeer, Waanders bv, Zwolle 1996, p. 41-86
- Figuren 6, 13, 15 en 18: Hans Vredeman de Vries, *Perspective*, deel I (1604), deel II (1605), herdruk Tableau B.V., Mijdrecht 1979
- Figuren 10 en 11: Gary Schwartz & Marten Jan Bok, *Pieter Saenredam, De schilder in zijn tijd*, SDU Uitgeverij, Maarssen 1989
- Figuur 12: Jørgen Wadum, *Vermeer in perspectief*, in: Johannes Vermeer, Waanders bv, Zwolle 1995, p. 67-78
- Figuren 14, 19, 23 en 24: J.L. Locher (red.), *De werelden van M.C. Escher*, Meulenhoff, Amsterdam 1971

## LITERATUUR

1. W.A. BÄRTSCHI, *Linear Perspective*, Van Nostrand Reinhold, New York 1981
2. ALISON COLE, *Perspectief*, Bosch en Keuning, Baarn 1993
3. J. VAN DE CRAATS, *Is dat echt een kubus?*, in: Nieuwe Wiskrant jg 12 nr 2, januari 1993, p. 31-34
4. J.V. FIELD, *The Invention of Infinity*, Oxford university Press Inc., Oxford 1997
5. A.J. GODDIJN, *Meetkunde in de zon en bij kunstlicht*, in: Nieuwe Wiskrant jg 1 proefnummer, maart 1981, p. 25-32
6. M. KINDT, *Meetkunde en perspectief*, in: Nieuwe Wiskrant jg 11 nr 4, juli 1992, p. 15-19
7. F. REHBOCK, *Geometrische Perspektive*, Springer Verlag, Berlin 1980
8. AGNES VERWEIJ, *'Perspectieven'*, in: Euclides jg 67 nr 1, september 1992, p. 8-14
9. JØRGEN WADUM, *Vermeer en de ruimtelijke illusie*, in: De wereld der geleerdheid rond Vermeer, Waanders bv, Zwolle 1996, p. 31-49
10. ERNEST W. WATSON, *Creative Perspective for Artists and Illustrators*, Dover Publications Inc., New York 1992



## Polytopen

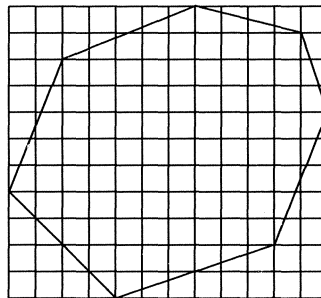
J.H.M. Steenbrink

KU Nijmegen, Vakgroep Wiskunde, Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen  
e-mail: steenbri@sci.kun.nl

### 1. INLEIDING

Een polytoop in de  $m$ -dimensionale Euclidische ruimte  $\mathbf{R}^m$  is een meetkundig object dat analoog is aan een lijnstuk op de rechte, een veelhoek in het vlak, of een veelvlak in de drie-dimensionale ruimte. Polytopen zijn opgebouwd uit simplices, de generalisaties naar willekeurige dimensie van driehoeken in het vlak. Voorbeelden van polytopen zijn de *convexe polytopen*: deze verkrijgt men als convex omhulsel van een eindige verzameling punten.

We spitsen ons onderwerp iets toe. In  $\mathbf{R}^m$  bevinden zich de *roosterpunten*: dit zijn de punten waarvan alle coördinaten geheel zijn. We zijn geïnteresseerd in die polytopen waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. In het convexe geval krijgt men deze polytopen als convex omhulsel van een eindige verzameling van roosterpunten. We zullen ze kortweg roosterpolytopen noemen. In bijgaande figuur treffen we een convexe roosterveelhoek in het vlak aan. Deze roosterpolytopen kunnen weer worden opgebouwd uit roostersimplices.



Voor convexe roosterveelhoeken  $P$  in het vlak bestaat een interessante relatie tussen het aantal roosterpunten  $i(P)$  dat op  $P$  ligt, het aantal roosterpunten  $i(\partial P)$  op de rand  $\partial P$  van  $P$  en de oppervlakte  $\text{opp}(P)$  van  $P$ :

$$i(P) = \text{opp}(P) + \frac{1}{2}i(\partial P) + 1$$

de *formule van Pick* (1898). De betreffende waarden voor bijgaande veelhoek zijn:  $i(P) = 97$ ,  $i(\partial P) = 11$  en  $\text{opp}(P) = 90\frac{1}{2}$ .

Men kan zich afvragen of deze formule kan worden gegeneraliseerd naar het niet-convexe geval of naar hogere dimensies. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn. In 1957 heeft Reeve laten zien dat in drie dimensies het aantal roosterpunten binnen en op de rand van  $P$  en  $2P$  (de verdubbeling van  $P$  vanuit een roosterpunt) de inhoud van  $P$  bepalen. Met alleen  $P$  zelf gaat het niet. Vergelijken we daartoe de piramides  $P_r$  met hoekpunten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  en  $(1, 1, r)$  voor positieve gehele  $r$  met elkaar. Voor elke  $r$  geldt dat  $i(P_r) = 4$  en  $i(2P_r) = r + 9$ , terwijl  $P_r$  inhoud  $\frac{r}{6}$  heeft. Macdonald heeft de formules van Pick en Reeve naar willekeurige dimensie gegeneraliseerd.

Ehrhart heeft in de jaren zestig een studie gemaakt van  $i(nP)$  voor een roosterpolytoop  $P$  als functie van het positieve gehele getal  $n$ . Het blijkt dat deze functie een polynoomfunctie van  $n$  is, en wel van graad  $m$  waar  $m$  de dimensie van  $P$  is; laten we dit polynoom noteren met  $i_P(x)$ . Het draagt de naam van *Ehrhartpolynoom*. Ehrhart bewees, dat voor een zekere klasse van polytopen (de zgn. *gewone* roosterpolytopen, waaronder ook de convexe roosterpolytopen vallen) de waarden van dit polynoom bij negatieve gehele getallen eveneens numerieke betekenis hebben: noteer met  $P^0$  het inwendige van het gewone roosterpolytoop  $P$  en met  $m$  de dimensie van  $P$ . Dan is voor positieve gehele getallen  $n$  het aantal roosterpunten in  $nP^0$  gelijk aan  $(-1)^m i_P(-n)$ . Uit deze wederkerigheidswet van Ehrhart kunnen de formules van Pick en Reeve eenvoudig worden afgeleid, evenals hun generalisatie door MACDONALD (zie [1]) naar willekeurige dimensie.

Men kan de functie  $n \mapsto i(nK)$  natuurlijk ook beschouwen voor deelverzamelingen van  $\mathbf{R}^m$  die niet noodzakelijk polytopen zijn. Laat  $\#V$  het aantal elementen van een eindige verzameling  $V$  aangeven. Dan geldt dat voor positieve gehele  $n$  en bijvoorbeeld  $K$  een compacte deelverzameling van  $\mathbf{R}^m$ :

$$i(nK) = \#(K \cap \frac{1}{n}\mathbf{Z}^m)$$

want in plaats van  $K$  te vergroten kunnen we ook het rooster fijnmaziger maken. Omdat bij benadering elk punt van het verfijnde rooster  $\frac{1}{n}\mathbf{Z}^m$  correspondeert met een hyperkubusje van inhoud  $n^{-m}$  binnen  $K$  zal de functie  $n \mapsto i(nK)$  ongeveer groeien als  $\text{vol}(K)n^m$ .

Vanuit dit gezichtspunt is duidelijk dat de kopcoëfficiënt van het Ehrhartpolynoom van een roosterpolytoop  $P$  gelijk is aan het volumen van  $P$ . De constante term blijkt ook een klassieke invariant: het *Eulergetal*. Als  $P$  gewoon is, laat ook de coëfficiënt van  $x^{m-1}$  in  $i_P(x)$  een interpretatie toe, in termen van een genormeerd volumen van de rand van  $P$ . In twee dimensies krijgt men  $\frac{1}{2}i(\partial P)$ , hetgeen de formule van Pick oplevert. De betekenis van de overige coëfficiënten van het Ehrhartpolynoom is niet steeds duidelijk.

## 2. ROOSTERVEELHOEKEN

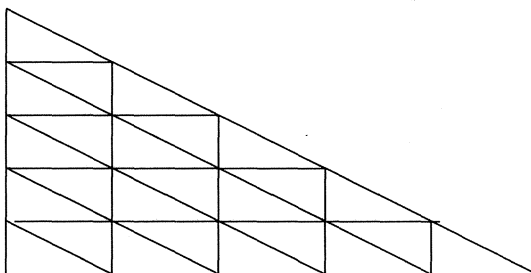
We werken in het Euclidisch vlak  $E = \mathbf{R}^2$  met rechthoekig rooster  $L$ . Onder een driehoek in  $E$  verstaan we het convex omhulsel van drie punten die niet op één rechte liggen. (De inwendige punten behoren dus tot de driehoek.) Een *roosterdriehoek* in  $E$  is een driehoek waarvan de hoekpunten op  $L$  liggen.

Zij  $\Delta$  een roosterdriehoek. We gaan roosterpunten tellen in  $n\Delta$  voor positieve gehele getallen  $n$ . Het resultaat noteren we met  $i(n\Delta)$ .

VOORBEELD. We gaan even een dimensie omlaag. Neem het geval van een lijnstuk  $\sigma = [0, k]$ . Dan is  $n\sigma = [0, nk]$  dus  $i(n\sigma) = nk + 1 = i_\sigma(n)$  terwijl  $i(n\sigma^0) = nk - 1 = -i_\sigma(-n)$ . De wederkerigheidswet van Ehrhart geldt dus voor roosterlijnstukken.

VOORBEELD. Zij  $\sigma$  de driehoek met hoekpunten  $0, (1, 0)$  en  $(0, 1)$  in het vlak. Dan heeft  $n\sigma$  de hoekpunten  $0, (n, 0)$  en  $(0, n)$  en  $i(n\sigma) = 1 + 2 + \dots + n + 1 = (n+1)(n+2)/2 = i_\sigma(n)$ . Verder is  $i(n\sigma^0) = i((n-3)\sigma) = (n-1)(n-2)/2 = i_\sigma(-n)$ . We zien dat ook hier de wederkerigheid geldt.

De functie  $n \mapsto i(n\Delta)$  kan voor een algemene roosterdriehoek op de volgende elementaire wijze berekend worden. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat  $(0, 0)$  een hoekpunt van  $\Delta$  is. Dan kun je  $n\Delta$  schrijven als vereniging van translaties van  $\Delta$  en van de gespiegelde  $-\Delta$  van  $\Delta$  ten opzichte van  $(0, 0)$ . Zo bestaat  $n\Delta$  uit  $n^2$  congruente copieën van  $\Delta$ . (Zie de figuur.)



Stel het aantal roosterpunten binnen (dus niet op de rand van)  $\Delta$  gelijk aan  $a$  en het aantal roosterpunten op de rand van  $\Delta$  gelijk aan  $b$ . Dan vinden we binnen  $n\Delta$  allereerst  $an^2$  roosterpunten die niet op de rand van zo'n copie liggen. De overige roosterpunten van  $n\Delta$  bevinden zich op de  $\frac{1}{2}n(n+1)$  getranslateerden van de zijden van  $\Delta$ . Houden we rekening met de hoekpunten, dan vinden we dat

$$i(n\Delta) = an^2 + \frac{1}{2}n(n+1)(b-3) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = (a + \frac{1}{2}b + 1)n^2 + \frac{1}{2}bn + 1.$$

We hebben hiermee het Ehrhartpolynoom van een roosterdriehoek berekend:

$$i_\Delta(n) = (a + \frac{1}{2}b + 1)n^2 + \frac{1}{2}bn + 1.$$

Op grond van de overwegingen uit de inleiding weten we dat de coëfficiënt van  $n^2$  hierin gelijk is aan de oppervlakte van  $\Delta$ , dus vinden we

$$\text{opp}(\Delta) = a + \frac{1}{2}b + 1 = i(\Delta) - \frac{1}{2}i(\partial\Delta) + 1.$$

Dit is de *formule van Pick* voor een roosterdriehoek. Hieruit kunnen we tevens de wederkerigheidsstelling van Ehrhart voor een roosterdriehoek afleiden: voor positieve gehele getallen  $n$  geldt

$$i(n\Delta^0) = i(n\Delta) - i(n\partial\Delta) = i_\Delta(n) - bn = i_\Delta(-n).$$

We gaan nu over van driehoeken op veelhoeken. We definiëren een *rooster-veelhoek* als een vereniging van eindig veel roosterdriehoeken zodanig dat ieder tweetal van deze driehoeken een zijde, een hoekpunt of niets gemeen heeft.

Is  $V$  een eindige verzameling roosterpunten in het vlak, dan is het convex omhulsel  $X$  van  $V$  een roosterveelhoek: neem een hoekpunt, en verbind het met alle niet-aanliggende hoekpunten van  $X$ . Dit levert een decompositie van  $X$  in roosterdriehoeken.

Neem een roosterveelhoek  $X$  en schrijf hem als een dergelijke vereniging van roosterdriehoeken:

$$X = \bigcup_{j=1}^s \Delta_j.$$

Dan is voor elk geheel positief getal  $n$

$$nX = \bigcup_{j=1}^s n\Delta_j.$$

Laat  $\Delta_j^0$  het binnengebied van de driehoek  $\Delta_j$  zijn. Noteer verder de zijden die optreden in de decompositie van  $X$  met  $\ell_k$  voor  $k = 1, \dots, t$  en met  $\ell_k^0$  de bijbehorende open lijnstukken. Tenslotte zij  $V$  de verzameling van alle hoekpunten die in deze decompositie optreden. Dan krijgen we als disjuncte vereniging

$$nX = \bigcup_{j=1}^s n\Delta_j^0 \cup \bigcup_{k=1}^t n\ell_k^0 \cup nV.$$

Derhalve is

$$i(nX) = \sum_{j=1}^s i(n\Delta_j^0) + \sum_{k=1}^t i(n\ell_k^0) + \#V.$$

Voor elke  $j$  is  $i(n\Delta_j^0)$  een kwadratisch polynoom in  $n$  met kopcoëfficiënt  $\text{opp}(\Delta_j)$ , en het is eenvoudig in te zien dat  $i(n\ell_k^0) = ni(\ell_k^0) + n - 1$ . We mogen dus concluderen dat  $i(nX)$  een kwadratisch polynoom in  $n$  is met kopcoëfficiënt  $\text{opp}(X)$ . We kunnen ook de constante term van dit polynoom eenvoudig berekenen: elke summand  $i(n\Delta_j^0)$  heeft constante term 1 terwijl de constante term van  $i(\ell_k^0)$  gelijk is aan  $-1$ . We vinden als resultaat dat

$$i_X(0) = s - t + v$$

waar  $v = \#V$ . Dit is het zogenaamde *Eulergetal* van  $X$  dat we noteren met  $e(X)$ . De lezer kan eenvoudig nagaan dat  $e(X) = 1$  voor een convexe roosterveelhoek.

## 3. DE FORMULE VAN PICK

We gaan nu wat precieser roosterpunten tellen. Zij  $X$  een roosterveelhoek in het vlak. Op grond van het algemene resultaat uit het vorige hoofdstuk weten we dat

$$i_X(n) = \text{vol}(X)n^2 + a_1(X)n + e(X)$$

waarbij in dit geval  $\text{vol}(X)$  de oppervlakte van  $X$  is. De formule van Pick geeft uitsluitend over de betekenis van  $a_1(X)$ . Ons uitgangspunt is, dat

$$2a_1(X) = i_X(1) - i_X(-1).$$

Stel dat voor  $X$  de wederkerigheidswet van Ehrhart zou gelden:

$$i_X(-n) = i_{X^0}(n) \text{ voor } n > 0,$$

dan zou

$$2a_1(X) = i(X) - i(X^0) = i(\partial X)$$

waar  $\partial X$  de rand van  $X$  is, dus

$$i(X) = \text{vol}(X) + \frac{1}{2}i(\partial X) + e(X);$$

aangezien  $e(X) = 1$  voor een convexe veelhoek  $X$ , zou dit de formule van Pick opleveren in het convexe geval. Er is dus alle aanleiding de uitdrukking  $i_X(1) - i_X(-1)$  in het algemeen te berekenen.

We pakken dit probleem wederom aan door  $X$  onder te verdelen in roosterdriehoeken. Zij  $T_0$  de collectie hoekpunten,  $T_1$  de collectie zijden en  $T_2$  de collectie van alle driehoeken uit de gekozen verdeling. Verder zij  $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ . Dan is  $X$  disjuncte vereniging van de bijbehorende open simplices:  $X = \cup_{\tau \in T} \tau^0$ . Derhalve is ook  $nX = \cup_{\tau \in T} n\tau^0$ . Bijgevolg geldt:

$$i_X(n) = \sum_{\tau \in T} i_{\tau^0}(n) = \sum_{\tau \in T} (-1)^{\dim(\tau)} i_{\tau}(-n).$$

Dus

$$i_X(1) - i_X(-1) = \sum_{\tau \in T} (i_{\tau^0}(1) - (-1)^{\dim(\tau)} i_{\tau}(1)).$$

We schrijven verder  $T_1 = T_{11} \cup T_{12}$  waar  $T_{11}$  bestaat uit de zijden  $\tau$  op de rand van  $X$  en  $T_{12}$  uit de zijden die het inwendige van  $X$  snijden. Analoog laten we  $T_0 = T_{01} \cup T_{02}$  waar  $T_{01}$  bestaat uit randpunten van  $X$  en  $T_{02}$  uit inwendige punten. We vinden dat

$$i_X(1) - i_X(-1) = \sum_{\tau \in T_2} (i(\tau^0) - i(\tau)) + \sum_{\tau \in T_{11}} (i(\tau^0) + i(\tau)) + \sum_{\tau \in T_{12}} (i(\tau^0) + i(\tau)).$$

We gaan voor ieder punt  $x \in X \cap L$  na wat de bijdrage is aan deze uitdrukking.

- Als  $x \in \tau^0$  voor  $\tau \in T_2$ , dan draagt  $x$  slechts 1 bij aan  $i(\tau^0)$  en aan  $-i(\tau)$ , met som 0.

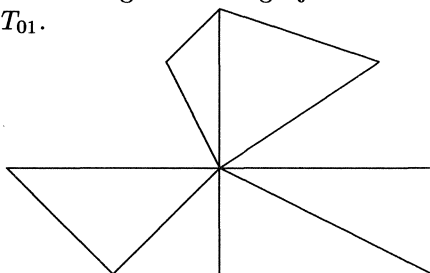
- Als  $x \in \tau^0$  voor  $\tau \in T_{12}$  zijn er precies twee elementen  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  van  $T_2$  die  $x$  bevatten, en wel als randpunt. Dan draagt  $x$  slechts bij aan de vier termen  $-i(\sigma_1)$ ,  $-i(\sigma_2)$ ,  $i(\tau)$  en  $i(\tau^0)$ , met resultaat 0.
- Als  $x \in \tau^0$  voor  $\tau \in T_{11}$  is er een unieke  $\sigma \in T_2$  die  $x$  bevat, en levert  $x$  een bijdrage 1 via  $-i(\sigma) + i(\tau) + i(\tau^0)$ .
- Als  $x \in T_{02}$ , dan zijn er evenveel elementen  $\sigma_j \in T_2$  als  $\tau_j \in T_1$  die  $x$  bevatten en is de totale bijdrage wederom 0.

Ons resteert dus de bijdrage van de punten van  $T_{01}$  te berekenen. Definiëer daartoe voor  $x \in T_0$ :

$$\epsilon(x) = \#\{\tau \in T_1 \mid x \in \tau\} - \#\{\tau \in T_2 \mid x \in \tau\}.$$

Dan levert  $x$  de bijdrage  $\epsilon(x)$ . Merk op dat  $\epsilon(x) = 1$  voor  $x \in T_{02}$ .

We gaan eerst een andere uitdrukking voor  $\epsilon(x)$  afleiden. Maken we ons eerst een voorstelling van de mogelijke structuur van  $X$  in de nabijheid van een punt  $x \in T_{01}$ .



In de figuur hebben we alleen die driehoeken van de onderverdeling van  $X$  getekend die het punt  $x$  bevatten. In dit voorbeeld is  $\epsilon(x) = 8 - 5 = 3$ . We zien dat de driehoeken die  $x$  bevatten in groepjes te verdelen zijn, waarbij twee driehoeken in hetzelfde groepje worden ondergebracht als men van de een naar de ander kan wandelen zonder het punt  $x$  te doorlopen. Ieder groepje bevat twee zijden op de rand van  $X$  die ook het punt  $x$  bevatten. Het aantal groepjes rond  $x$  is enerzijds gelijk aan

$$\#\{\tau \in T_2 \mid x \in \tau\} - \#\{\tau \in T_{12} \mid x \in \tau\}$$

en anderzijds aan  $\frac{1}{2}\#\{\tau \in T_{11} \mid x \in \tau\}$ . Neem twee maal de laatste uitdrukking en trek daarvan de eerste af, en je ziet dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan  $\epsilon(x)$ . Sommeren we de uitdrukking  $\epsilon(x) - 1$  over alle  $x \in T_{01}$  dan vinden we precies  $\#T_{11} - \#T_{01} = -e(\partial X)$ .

We noemen  $x \in \partial X \cap L$  een *gewoon randpunt* indien  $\epsilon(x) = 1$  voor zekere onderverdeling van  $X$  in roosterdriehoeken. Men kan eenvoudige inzien dat dit dan geldt voor ieder onderverdeling waarvoor  $x$  als hoekpunt optreedt.

We hebben door deze berekening de volgende stelling afgeleid:

**STELLING 1** *Zij  $X$  een roosterveelhoek in het vlak. Dan geldt*

$$2a_1(X) = i(\partial X) - e(\partial X).$$

*In het bijzonder zijn de volgende voorwaarden equivalent:*



1.  $X$  bezit alleen gewone randpunten;
2. de wederkerigheidswet van Ehrhart geldt voor  $X$ :

$$i_X(-n) = i(nX^0) \text{ voor positieve gehele } n;$$

3.  $a_1(X) = \frac{1}{2}i(\partial X)$ ;
4.  $\text{vol}(X) = i(X) - \frac{1}{2}i(\partial X) + e(X)$ ;
5.  $\partial X$  is een disjuncte vereniging van Jordankrommen;
6.  $e(\partial X) = 0$ .

VOORBEELD. Zij  $\Delta$  de driehoek met hoekpunten  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  en  $(0,1)$  en zij  $X$  de veelhoek die vereniging is van  $-\Delta$  en  $\Delta$ . Dan is  $(0,0)$  geen gewoon randpunt van  $X$ , want het ligt op vier zijden en op slechts twee driehoeken. Er geldt dat  $\epsilon(0,0) = 2$ .

VOORBEELD. Hier is een aardige toepassing van de formule van Pick, mij meegedeeld door mijn collega Jeurissen. Neem in het vlak een rechthoek waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Maak een wandeling met stappen van lengte 1 waarbij u alle roosterpunten binnen de rechthoek precies eenmaal passeert en op het beginpunt uitkomt. Dan hangt de oppervlakte van het ingesloten gebied niet af van de wandeling die u maakt!

#### 4. SIMPLICES

We proberen nu de resultaten uit de vorige hoofdstukken te generaliseren naar hogere dimensies. We beginnen met de existentie van het Ehrhartpolynoom. We werken in de  $m$ -dimensionale Euclidische ruimte  $E = \mathbf{R}^m$ . De standaardbasis geven we aan met  $e_1, \dots, e_m$ .

De punten in  $E$  met gehele coördinaten vormen het rooster  $L$ . Voor elk positief geheel getal  $n$  noteren we met  $L_n$  het rooster bestaande uit de punten  $x$  waarvoor  $nx \in L$ .

Een *hypervlak* in  $E$  is een echte niet-lege deelverzameling die wordt gedefiniëerd door een lineaire vergelijking. "Hypervlak" is dus de algemene term van het rijtje "punt op een lijn", "lijn in het vlak", "vlak in de ruimte". Elk hypervlak in  $E$  kan worden opgevat als een Euclidische ruimte van dimensie  $m - 1$ , en verdeelt  $E$  in twee stukken.

Een *gesloten simplex*  $\sigma$  in  $E$  is het convex omhulsel van  $m + 1$  punten van  $E$  die niet in één hypervlak liggen. Door elk  $m$ -tal van deze punten gaat precies één hypervlak. We hebben dus  $m + 1$  van zulke hypervlakken; ze snijden  $\sigma$  in de  $m + 1$  zijvlakken, en elk zijvlak is weer een simplex (van dimensie  $m - 1$ ) in dat hypervlak. De hoekpunten van  $\sigma$  krijgt men door telkens  $m$  van deze hypervlakken met elkaar te snijden. Een *open simplex* krijgt men door een gesloten simplex van zijn zijvlakken te ontdoen; dit komt erop neer dat we het inwendige nemen. We noteren met  $\sigma^0$  het inwendige van het gesloten simplex  $\sigma$ .

Een *facet* van het simplex  $\sigma$  is een doorsnede van zijvlakken van  $\sigma$ . Elk facet is zelf weer een simplex  $\tau$  en  $\sigma$  is de disjuncte vereniging van de open simplices  $\tau^0$  waar  $\tau$  de facetten van  $\sigma$  doorloopt.

Het *volumen* van het simplex  $\sigma$  kan, zoals bekend, als volgt worden berekend. Laat  $v_0, \dots, v_m$  de hoekpunten zijn. Dan geldt

$$\text{vol}(\sigma) = \frac{1}{m!} | \det(v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0) |.$$

Voor elke begrensde deelverzameling  $V$  van  $E$  geven we met  $i(V)$  het aantal roosterpunten van  $V$  aan. Dan geldt voor elk positief geheel getal  $n$  dat  $i(nV) = \#(V \cap L_n)$ . Hier is  $nV = \{nx \mid x \in V\}$ .

Een simplex in  $E$  heet *roostersimplex* als zijn hoekpunten in  $L$  liggen. We gaan ons voor zo'n geheel simplex  $\sigma$  eens verdiepen in  $i(n\sigma)$  als functie van  $n$ .

**STELLING 2** *Voor ieder roostersimplex  $\sigma$  in  $E$  bestaat een polynoom  $i_\sigma$  van graad  $m$  met kopcoëfficiënt  $\text{vol}(\sigma)$  en met de eigenschap dat  $i_\sigma(n) = i(n\sigma)$  voor elk positief geheel getal  $n$ . Bovendien geldt:  $i_\sigma(0) = 1$  en  $i_\sigma(-n) = (-1)^m i(n\sigma^0)$  voor elk positief geheel getal  $n$ .*

Merk allereerst op dat de bewijsmethode die we voor driehoeken hebben gebruikt ( $n\Delta$  schrijven als vereniging van driehoeken congruent met  $\Delta$ ) reeds in drie dimensies niet meer opgaat. Als we het proberen met een tetraeder  $T$  en bij elk hoekpunt van  $2T$  een verschoven copie van  $T$  weghalen, houden we een achthoek over, waarmee we verder niet veel aankunnen.

We moeten dus een andere aanpak kiezen. Om de stelling te bewijzen begeven we ons in een ruimte  $E'$  van één dimensie meer, door toevoeging van een basisvector  $e_0$  aan de standaardbasis van  $E$ . Laat  $u_0, \dots, u_m$  de hoekpunten van  $\sigma$  zijn, en definieer  $v_i := (1, u_i) \in E'$  voor  $i = 0, \dots, m$ . Dit zijn de hoekpunten van een  $m$ -simplex  $\sigma'$  in  $E'$ . Laat  $L'$  het gehelenrooster in  $E'$  zijn. Zij  $h$  het volumen van het parallellootop

$$\pi = \left\{ \sum_{i=0}^m t_i v_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

opgespannen door  $v_0, \dots, v_m$ . Dan spannen  $v_0, \dots, v_m$  een deelrooster  $M$  van  $L'$  op van index  $h$ . Dit betekent dat men in  $L'$  punten  $a_1, \dots, a_h$  kan vinden, alle verschillend, zodanig dat ieder punt van  $L'$  eenduidig te schrijven is als  $x = a_i + b$  met  $1 \leq i \leq h$  en  $b \in M$ . Voor de punten  $a_1, \dots, a_h$  kan men nemen de punten van  $A = T \cap L'$  waar

$$T := \left\{ \sum_{i=0}^m t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1 \right\}$$

of ook de punten van  $A' = T' \cap L'$  met

$$T' := \left\{ \sum_{i=0}^m t_i v_i \mid 0 < t_i \leq 1 \right\}$$

Onze aandacht richt zich nu op de gehele punten in het gebied

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^m t_i v_i \mid t_i \geq 0 \right\}.$$

Merk allereerst op dat

$$W \cap L' = \bigcup_{n=0}^{\infty} n\sigma' \cap L'.$$

Ieder punt  $y$  van  $n\sigma' \cap L'$  is eenduidig te schrijven als

$$y = x + \sum_{i=0}^m m_i v_i$$

met  $x \in A$ ,  $m_i \in \mathbf{N}$  en  $n = x_0 + \sum_{i=0}^m m_i$ . We vinden dat  $i(n\sigma) = i(n\sigma')$  gelijk is aan de coëfficiënt van  $z^n$  in

$$\sum_{x \in A} z^{x_0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)^{m+1} = f(z)/(1-z)^{m+1}$$

waar  $f(z) = \sum_{x \in A} z^{x_0}$ . Merk op dat  $x_0 < m+1$  voor elke  $x \in A$ , dus  $f(z)$  is een polynoom in  $z$  van graad hoogstens  $m$ . Laat

$$f(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_m z^m$$

waar  $\delta_k = \#\{x \in A \mid x_0 = k\}$ , dan  $\delta_0 = 1$  en  $f(1) = h$ . Door uitwerken van de formule krijgt men

$$i(n\sigma) = \delta_0 \binom{n+m}{m} + \delta_1 \binom{n+m-1}{m} + \cdots + \delta_m \binom{n}{m}$$

en dit is ten duidelijkste een polynoom  $i_\sigma$ , van graad  $m$  in  $n$ , met constante term gelijk aan 1. Bovendien is de kopcoëfficiënt van  $i_\sigma$ , d.w.z. de coëfficiënt van  $n^m$ , gelijk aan  $(\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_m)/m! = f(1)/m! = h/m! = \text{vol}(\sigma)$ . Immers: zij  $\bar{\sigma}$  het  $(m+1)$ -simplex in  $E'$  met hoekpunten  $0, v_0, \dots, v_m$ . Dan is  $h = \text{vol}(\pi) = (m+1)! \text{vol}(\bar{\sigma}) = (m+1) \text{vol}(\sigma)$ .

Hierbij moeten we bedenken dat  $\binom{x}{m} = x(x-1) \cdots (x-m+1)/m!$  voor elke  $x \in \mathbf{R}$ . Derhalve is  $\binom{x}{m} = 0$  voor  $x = 0, 1, \dots, m-1$  en dus  $i_\sigma(0) = \delta_0 \binom{m}{m} + \delta_1 \binom{m-1}{m} + \cdots + \delta_m \binom{0}{m} = \delta_0 = 1$ . Bovendien geldt:

$$\binom{-x}{m} = (-x)(-x-1) \cdots (-x-m+1)/m!$$

$$= (-1)^m (x+m-1)(x+m-2) \cdots x/m! = (-1)^m \binom{x+m-1}{m}$$

voor elke  $x$ . Dit leidt tot de wederkerigheidswet van Ehrhart als volgt.

De punten van  $n\sigma^0$  zijn eenduidig te schrijven als

$$y' = x' + \sum_{i=0}^m m_i v_i$$

met  $x' \in A'$ ,  $m_i \in \mathbf{N}$  en  $n = x'_0 + \sum_{i=0}^m m_i$ . Analoog aan het bovenstaande vindt men dat  $i(n\sigma^0) = i(n\sigma^0)$  gelijk is aan de coëfficiënt van  $z^n$  in

$$\sum_{x' \in A'} z^{x'_0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)^{m+1} = \sum_{x' \in A'} z^{x'_0} / (1-z)^{m+1}.$$

De afbeelding

$$x \mapsto x' = \sum_{i=0}^m v_i - x$$

geeft een bijectie van  $A$  op  $A'$ , en voor overeenkomstige punten  $x$  en  $x'$  geldt dat  $x'_0 = m + 1 - x_0$ . Derhalve is

$$\sum_{x' \in A'} z^{x'_0} = \sum_{x \in A} z^{m+1-x_0} = \sum_{i=0}^m \delta_i z^{m+1-i}$$

dus

$$i(n\sigma^0) = \delta_0 \binom{n-1}{m} + \delta_1 \binom{n}{m} + \cdots + \delta_m \binom{n+m-1}{m} = (-1)^m i_{\sigma}(-n).$$

**GEVOLG** De functie  $n \mapsto i_{\sigma^0}(n) := i(n\sigma^0)$  is polynomiaal van graad  $m$  met kopcoëfficiënt  $\text{vol}(\sigma)$  en constante term  $(-1)^{\dim(\sigma)}$ .

**VOORBEELD.** We lopen het bewijs nog eens na voor het geval dat  $\sigma$  het viervlak  $P_r$  uit de inleiding is. De hoekpunten ervan zijn  $u_0 = (0, 0, 0)$ ,  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0)$  en  $u_3 = (1, 1, r)$ . We vinden dan  $v_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1, 0)$  en  $v_3 = (1, 1, 1, r)$ . We bepalen eerst de verzameling  $A$ . Indien  $0 \leq t_i < 1$  voor  $i = 0, 1, 2, 3$  en

$$x = t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = (t_0 + t_1 + t_2 + t_3, t_1 + t_3, t_2 + t_3, r t_3)$$

heeft gehele coördinaten, dan is ofwel  $t_i = 0$  voor elke  $i$  ofwel er bestaat een natuurlijk getal  $k$  met  $0 < k < r$  zodanig dat

$$t_0 = t_3 = \frac{k}{r}, t_1 = t_2 = 1 - \frac{k}{r}.$$

Voor de punten  $x \in A$  komt dus  $x_0 = 0$  eenmaal voor en treedt er  $r - 1$  maal  $x_0 = 2$  op. Derhalve is

$$\delta_0 = 1, \delta_2 = r - 1, \delta_1 = \delta_3 = 0.$$

We vinden dat

$$i_{P_r}(n) = \binom{n+3}{3} + (r-1) \binom{n+1}{3}.$$

**OPMERKING** We kunnen het bovenstaande ook toepassen op roostersimplices in affiene deelruimten van  $E$  die door roosterpunten worden opgespannen; deze affiene deelruimten zijn immers ook wederom Euclidische ruimten voorzien van een rooster. Deze situatie treedt bijvoorbeeld op als we facetten van simplices beschouwen. We moeten echter steeds waar gesproken wordt over het volumen van zo'n simplex in acht nemen, dat het parallelepipedum dat door een basis van het rooster wordt voortgebracht het volumen 1 moet hebben. Als we de formules op deze wijze verstaan blijven ze gelden.

### 5. ROOSTERPOLYTOPEN

Een *roosterpolytoop*  $X$  in de ruimte  $E$  is een eindige vereniging van gesloten gehele  $m$ -simplices, zodanig dat twee van deze simplices elkaar snijden in een gemeenschappelijk facet of in het geheel niet. Het volumen  $\text{vol}(X)$  is de som van de volumina van de  $m$ -simplices in deze onderverdeling, en hangt niet af van de keuze van de onderverdeling.

Zij  $X$  een roosterpolytoop van dimensie  $m$  en kies een onderverdeling van  $X$  in simplices. Dan is  $X$  meteen een disjuncte vereniging van open simplices, van dimensies variërend van 0 tot  $m$ . Zij  $c_k$  het aantal open  $k$ -simplices in deze partitie van  $X$ . Het *Eulergetal*  $e(X)$  van  $X$  is de uitdrukking

$$e(X) = c_0 - c_1 + \cdots + (-1)^m c_m.$$

Het hangt ook niet af van de gekozen onderverdeling van  $X$ . Als  $X$  convex is, dan  $e(X) = 1$ .

**STELLING 3** *Zij  $X$  een  $m$ -dimensionaal roosterpolytoop. Dan is de functie*

$$n \mapsto i_X(n) := i(nX)$$

*een polynoom van de vorm*

$$i_X(n) = a_0(X) + a_1(X)n + \cdots + a_m(X)n^m$$

*met  $a_0(X) = e(X)$  en  $a_m(X) = \text{vol}(X)$ .*

**Bewijs** Kies een onderverdeling van  $X$  in roostersimplices. Dan is

$$i(nX) = \sum_{\tau} i(n\tau^0)$$

waar we sommeren over alle facetten van simplices uit de onderverdeling. De bijdrage van een facet  $\tau$  van dimensie  $k$  aan  $i(nX)$  is, wegens Stelling 2, een polynoom van graad  $k$  met kopcoëfficiënt  $\text{vol}(\tau)$  en constante term  $(-1)^{\dim(\tau)}$ . Vandaar dat  $i_X(n)$  een polynoom van graad  $m$  in  $n$  is met kopcoëfficiënt  $\text{vol}(X)$

en constante term  $\sum_{\tau} (-1)^{\dim(\tau)} = e(X)$  (merk op dat hieruit reeds volgt dat het Eulergetal van een roosterpolytoop onafhankelijk van de keuze van een onderverdeling is!).

**OPMERKING** Bovenstaande stelling kan met de juiste interpretatie van volumen ook worden toegepast op roosterpolytopen in  $E$  van dimensie kleiner dan  $m$ , bijvoorbeeld op de rand van een  $m$ -dimensionaal roosterpolytoop. Het polytoop moet dan wel zuiver zijn, d.w.z. zijn samengesteld uit simplices van dezelfde dimensie.

#### 6. GEWONE POLYTOPEN EN EHRHART-WEDERKERIGHEID

We behandelen nu de vraag in welk geval het Ehrhartpolynoom  $i_X(n)$  van een roosterpolytoop  $X \subset E = \mathbf{R}^m$  voldoet aan de betrekking

$$i_X(-n) = (-1)^m i(nX^0) \text{ voor } n > 0 \text{ geheel}$$

(Ehrhart-wederkerigheid). Uit het tweedimensionale geval is reeds duidelijk dat we hiervoor condities aan  $X$  moeten opleggen.

Voor  $m = 2$  hadden we de voorwaarde dat elk roosterpunt op de rand van  $X$  gewoon was. Dit kunnen we als volgt uitdrukken in topologische termen. Deze conditie komt erop neer dat de rand van de veelhoek  $X$  bestaat uit een disjuncte vereniging van eindig veel Jordankrommen, d.w.z. gesloten krommen homeomorf met een cirkel. In topologisch zin heeft  $X$  dan een gladde rand.

Deze conditie kunnen we als volgt vertalen: voor ieder punt  $p \in \partial(X)$  bestaat een  $r > 0$  en een topologische afbeelding van het gebied

$$B(p, r) = \{x \in E \mid |x - p| < r\}$$

op de eenheidsbol  $B(0, 1)$  die  $B(p, r) \cap X$  afbeeldt op  $\{x \in B(0, 1) \mid x_m \geq 0\}$ . Deze formulering heeft zin in elke dimensie. We zullen een polytoop  $X$  dat aan deze conditie voldoet een *gewoon* polytoop noemen.

**STELLING 4** *Zij  $X \subset E$  een gewoon polytoop. Dan geldt Ehrhart wederkerigheid voor  $X$ .*

We geven hier slechts een korte schets van het bewijs dat te vinden is in [2]. Ga uit van een onderverdeling van  $X$  in simplices. Zij  $T$  de collectie van alle (niet-lege) facetten van simplices hieruit. De relatie dat het simplex  $\tau$  een facet is van het simplex  $\sigma$  geven we aan met  $\tau \leq \sigma$ .

Het feit dat  $X$  een gewoon  $m$ -dimensionaal roosterpolytoop is, laat zich nu als volgt in combinatorische termen vertalen: er geldt voor iedere  $\tau \in T$  dat

$$\sum_{\sigma \geq \tau} (-1)^{\dim \sigma - \dim \tau} = \begin{cases} (-1)^{m - \dim \tau} & \text{if } \tau \not\subset \partial X, \\ 0 & \text{if } \tau \subset \partial X. \end{cases}$$

Laat  $T' \subset T$  de verzameling van die facetten zijn die niet in de rand van  $X$  liggen. We hebben dan dat

$$i_X(n) = \sum_{\sigma \in T} i(n\sigma^0) = \sum_{\sigma \in T} (-1)^{\dim \sigma} i_{\sigma}(-n)$$

terwijl

$$i(nX^0) = \sum_{\sigma \in T'} i(n\sigma^0) = \sum_{\sigma \in T'} (-1)^{\dim \sigma} i_{\sigma}(-n).$$

Dus

$$\begin{aligned} i_X(-n) &= \sum_{\sigma \in T} (-1)^{\dim \sigma} i_{\sigma}(n) = \sum_{\sigma \in T} (-1)^{\dim \sigma} \sum_{\tau \leq \sigma} i(n\tau^0) \\ &= \sum_{\sigma \in T} (-1)^{\dim \sigma} \sum_{\tau \leq \sigma} (-1)^{\dim \tau} i_{\tau}(-n) = \sum_{\tau \in T} i_{\tau}(-n) \sum_{\sigma \geq \tau} (-1)^{\dim \sigma - \dim \tau} \\ &= \sum_{\tau \in T'} (-1)^{m - \dim \tau} i_{\tau}(-n) = (-1)^m \sum_{\tau \in T'} i(n\tau^0) = (-1)^m i(nX^0). \end{aligned}$$

We willen nu laten zien hoe uit de wederkerigheidsstelling voor een gewoon roosterpolytoop in dimensie drie de betekenis van de getallen  $a_1(X)$  en  $a_2(X)$  kan worden afgeleid.

Allereerst kunnen we opmerken dat

$$i_X(1) + i_X(-1) = i(X) - i(X^0) = i(\partial X) = 2a_2(X) + 2e(X)$$

dus

$$a_2(X) = \frac{1}{2}i(\partial X) - e(X).$$

Verder geldt dat

$$i_X(1) - i_X(-1) = i(X) + i(X^0) = 2i(X) - i(\partial X) = 2\text{vol}(X) + 2a_1(X)$$

dus

$$a_1(X) = i(X) - \frac{1}{2}i(\partial X) - \text{vol}(X).$$

We vinden dan enerzijds

$$2a_1(X) = a_1(2X) = i(2X) - \frac{1}{2}i(2\partial X) - 8\text{vol}(X)$$

en anderzijds

$$2a_1(X) = 2i(X) - i(\partial X) - 2\text{vol}(X)$$

zodat

$$6\text{vol}(X) = i(2X) - \frac{1}{2}i(2\partial X) - 2(i(X) - \frac{1}{2}i(\partial X)).$$

Dit is de formule van Reeve waarop in de inleiding gedoeld werd, voor het geval van een gewoon roosterpolytoop van dimensie drie.

#### LITERATUUR

- [1] I.G. MACDONALD, The volume of a lattice polyhedron, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963), 719–726
- [2] I.G. MACDONALD, Polynomials associated with finite cell-complexes, *J. London Math. Soc.* (2), **4** (1971), 181–192





## Meetkunde, niet-euclidisch en toch waar

F. van der Blij

Ruysdaellaan 6, 3732 CC Bilthoven

In deze vertelling geven we geen systematische opbouw van de niet-euclidische meetkunde. Er bestaan vele goede leerboeken waaruit men desgewenst het vak kan leren. We willen in vogelvlucht iets vertellen over de geschiedenis, enkele typische voorbeelden geven en even opmerken dat het onderwerp binnen het wiskundig onderzoek actueel is. Door deze opzet worden vele details en bewijzen weggelaten ook wordt een enkele keer ter vereenvoudiging de waarheid een klein beetje geweld aangedaan, doordat niet alle voorwaarden expliciet vermeld worden. De lezer is dus gewaarschuwd!

### 1. GESCHIEDENIS

De geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde schrijven is een moeilijke zaak. In het laatste nummer van *The Mathematical Intelligencer* schrijft Jeremy Gray een stuk over de geschiedenis van de meetkunde en gaat op dit probleem in. Voor deze vertelling heb ik geen bronnenonderzoek gepleegd, ik heb me eenvoudigweg georiënteerd via secundaire bronnen. In de meeste leerboeken over niet-euclidische meetkunde zijn wel wat historische gegevens te vinden. In de literatuurlijst vermeld ik mijn bronnen. De geschiedenis begint bij Euclides, dat kan haast niet anders. In de *Elementen* vinden we voor de vlakke meetkunde een aantal eisen. Ik geef ze in de vertaling van E.J. Dijksterhuis.

- I. Laat geëist worden van elk punt naar elk een rechte lijn te trekken.*
- II. En een beëindigde rechte samenhangend in rechte lijn te verlengen.*
- III. En dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel beschreven wordt.*
- IV. En dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.*
- V. En dat, wanneer een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan denzelfden kant kleiner dan twee rechte (hoeken) maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan den kant, waar de hoeken zijn, die kleiner zijn dan twee rechte.*

Deze vaak postulaten genoemde eisen omvatten in I tot en met IV eenvoudige eisen, waaraan vanzelfsprekend voldaan lijkt te zijn. Wat bedoel ik er mee dat er aan die eisen voldaan lijkt te zijn? We moeten ons realiseren dat in de tijd van de klassieke meetkunde de meetkunde niet gezien werd als een abstract bouwwerk dat alleen aan eigen regels zijn bestaansrecht ontleent, maar als een geabstraheerde beschrijving van de waargenomen meetkunde van de ons omringende ruimte. Abstracties waren natuurlijk wel ingevoerd bij de definities:

*Een punt is, wat geen deel heeft.  
Een lijn is breedteloze lengte.  
De uiteinden van een lijn zijn punten.*

Maar met deze abstracties werd een model van de waarnemingen gegeven. Het vijfde postulaat lijkt in dit opzicht volkomen juist te zijn. De discussie over dit postulaat ging dus niet over de vraag of het 'waar' was, maar over de vraag of het nodig is. Met andere woorden kan de uitspraak van het vijfde postulaat niet gewoon bewezen worden uit de postulaten I tot en met IV? Vele stellingen uit de meetkunde kunnen inderdaad zonder gebruik te maken van dit postulaat bewezen worden, in de Elementen staan er genoeg voorbeelden van. We noemen er een paar:

*Indien twee driehoeken twee zijden aan twee zijden gelijk hebben een aan een en den door de gelijke rechten ingesloten hoek gelijk hebben aan den hoek, zullen ze ook de basis gelijk hebben aan de basis en de driehoek zal gelijk zijn aan den driehoek en de overige hoeken zullen gelijk zijn aan de overige hoeken een aan een, waaronder de gelijke zijden zich spannen. (propositie I-IV)*

Het is de moeite waard het bewijs van deze propositie eens na te lezen, de driehoeken worden opgetild en op elkaar gelegd. In het commentaar van Dijksterhuis is deze methode uitvoerig geanalyseerd.

*Indien van een driehoek twee hoeken aan elkaar gelijk zijn, zullen ook de zijden, die zich onder de gelijke hoeken spannen, aan elkaar gelijk zijn. (propositie I-VI)*

Het bewijs bij Euclides gaat uit het ongerijmde, stel dat de zijden ongelijk waren, dan....

*In elken driehoek is, wanneer een zijde verlengd is, de buitenhoek groter dan elk der afgelegen binnenhoeken. (propositie I-XVI)*

Deze stelling is bijzonder belangrijk, bij het bewijs wordt het vijfde postulaat niet gebruikt. De stelling dat de buitenhoek gelijk is aan de som van de niet

aanliggende binnenhoeken gebruikt dit postulaat wel.

Reeds in de klassieke oudheid werden formuleringen equivalent met het vijfde postulaat geformuleerd.

We merken even op dat in de *Elementen* parallel wordt gedefinieerd in definitie XXIII:

*Parallel zijn lijnen, die in het zelfde platte vlak gelegen en naar weerszijde tot in het oneindige verlengd, naar geen van beide zijden elkaar ontmoeten.*

Wanneer we parallel vervangen door ‘evenwijdig = even-wijd-ig’ wordt een ander begrip ingevoerd dan het simpele feit van ‘geen punt gemeen hebben’. In niet-euclidische meetkunde zullen we de begrippen ‘evenwijdig’ en ‘geen snijpunt hebben’ moeten onderscheiden.

In het systeem van Euclides is het vijfde postulaat equivalent met:

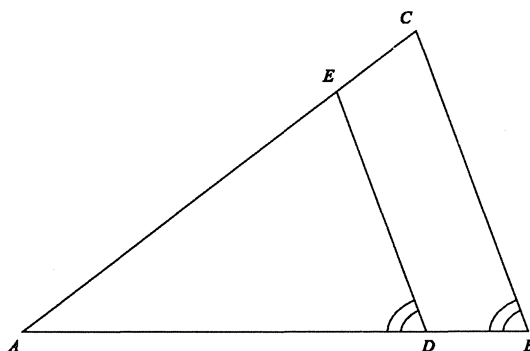
Door een punt buiten een lijn gaat precies één rechte, die de lijn niet snijdt, of ook met:

de som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan twee rechte hoeken, anders geformuleerd:

Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de niet aanliggende binnenhoeken.

In de achttiende eeuw begon men met pogingen de overbodigheid van het vijfde postulaat uit het ongerijmde af te leiden. Uit de eerste vier postulaten volgt dat er bij een gegeven lijn altijd door een punt tenminste één lijn is die die de gegeven rechte niet snijdt, maar het kunnen er meer zijn. Stel nu eens dat er tenminste zulke twee lijnen zijn, wat zijn de gevolgen van zo’n veronderstelling? Allereerst dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan twee rechte hoeken is. Er kan dus geen vierhoek met vier rechte hoeken bestaan. G. Saccheri (1667–1733) onderzocht uitvoerig de eigenschappen van vierhoeken met twee rechte hoeken aan de basis en twee gelijke opstaande zijden. J.H. Lambert (1728–1777) onderzocht vierhoeken met drie rechte hoeken.

A.M. Legendre (1752–1833) bewees eenvoudig dat de veronderstelling dat de som van de hoeken van een vierhoek groter dan 360 graden is tot een tegenspraak voert. Blijft dus het geval te onderzoeken dat de som kleiner dan 360 graden is. Ook in dit geval voert een redenering van Legendre tot een (schijnbare) ongerijmdheid. In figuur 1 is in driehoek  $ABC$  door  $D$  een lijn getrokken zodat hoek  $ADE$  gelijk is aan hoek  $ABC$ . Dan moet hoek  $AED$  groter zijn dan hoek  $ACB$ , omdat de som van de hoeken van de vierhoek  $DECB$  immers kleiner dan 360 graden zou zijn. De hoek  $AED$  zou een bepaalde (monotone) functie zijn van de lengte van  $AD$ . En daar er een absolute eenheid van hoekmaat is, bijvoorbeeld de rechte hoek, komt er door dit verband ook een absolute eenheid van lengtemaat.



FIGUUR 1.

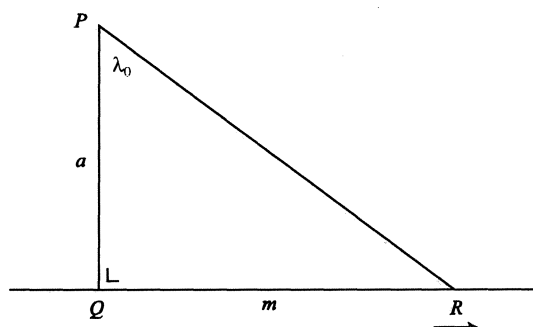
Maar deze consequentie is volgens Legendre absurd, omdat we uit ervaring weten dat de lengte van een lijnstuk pas gedefinieerd kan worden als we een (willekeurig te kiezen) eenheid van lengte aannemen.

Een andere manier om het optreden van deze absolute eenheid van lengte in te zien vinden we later bij Lobachevsky (1793–1856). Maar hier is het niet langer een resultaat dat de onhoudbaarheid aantoont van de veronderstelling dat er door een punt buiten een lijn meer dan één lijn is die de gegeven lijn niet snijdt. Het is bij Lobachevsky een stelling in een meetkunde die anders dan de euclidische is, waarin andere stellingen dan in de euclidische meetkunde gelden, maar die geen tegenstrijdigheid bevat. Het is wat we nu de hyperbolische meetkunde noemen. We schetsen de gevolgde redenering (figuur 2):

We beschouwen een lijn  $m$  en een punt  $P$  buiten de lijn  $m$ . Uit het punt  $P$  laten we een loodlijn  $PQ$  met lengte  $a$  op de lijn  $m$  neer. We beschouwen een punt  $R$  op de lijn  $m$  en bewegen dit, zodat  $QR$  steeds groter wordt. Dan groeit ook de hoek  $RPQ$ . Het punt  $R$  kunnen we aan beide kanten van  $Q$  op de lijn zo bewegen. De hoek waartoe hoek  $RPQ$  nadert is bij de beweging naar de ene kant even groot als bij de beweging naar de andere kant. Deze limiet, we noemen hem  $\lambda$ , moet een hoek kleiner dan een rechte hoek zijn; anders was er maar één lijn door  $P$  die de gegeven lijn niet snijdt. De grootte van de hoek hangt van de lengte van het lijn stuk  $PQ$  af. Op deze manier is weer aan ieder lijnstuk  $a$  een bepaalde hoek  $\lambda$  toegevoegd. Lobachevsky bewees al dat bij geschikte keuze van een lengte-eenheid de volgend formule geldt:

$$a = -\ln \tan(\lambda/2).$$

Het bewijs van Lobachevsky van deze formule is vrij gecompliceerd. J.C.H. GERRETSEN [4] geeft een bewijs dat hier een variant van is. Wij zullen op een later ogenblik, in het kader van trigonometrie in het hyperbolische vlak, een eenvoudig bewijs geven. Is het bestaan van een absolute eenheid van lengte, door Legendre verworpen, inderdaad een ongerijmdheid? Hierbij speelt natuurlijk de vraag of de meetkunde alleen een logisch gedachtenspel is of een adequaat model voor de ons omringende ruimte.



FIGUUR 2.

K.F. Gauss schreef al in 1824, voor de publicatie van Lobachevsky in 1829 in een brief aan F.A. Taurinus dat de veronderstelling dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180 graden is tot een merkwaardige meetkunde voert, die geheel consistent is. Hij heeft de theorie zelf ontwikkeld en kan alle problemen oplossen afgezien van de bepaling van één constante, die in zekere zin een absolute eenheid van lengte is. Hoe groter men deze constante kiest, des te meer gaat de meetkunde die er bij hoort op de euclidische gelijken. Deze uitspraak was in flagante tegenstelling met opvattingen van Kant, die aannam dat de meetkunde van Euclides een denknoodzakelijkheid was.

Een opmerking van Gauss aan Bessel uit 1830 stelt het nog duidelijker:

...we moeten bescheiden toegeven dat terwijl de getallen zuiver een produkt van onze geest zijn, de ruimte een realiteit buiten onze geest bezit, zodat we zijn wetten niet volledig a priori kunnen voorschrijven.

De publicaties van J. Bolyai in 1831 en N.I.Lobachevsky in 1829 ontwikkelden de nieuwe meetkunde, als reëel vak, niet meer om tot een ongerijmdheid te komen. Deze meetkunde is later de hyperbolische meetkunde genoemd, waarin de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180 graden is, waarin een absolute eenheid van lengte te definiëren is, waarin door een punt buiten een lijn tenminste twee lijnen gaan die een gegeven lijn niet snijden, zelfs zijn er oneindig veel van zulke lijnen. Bovendien geldt in deze meetkunde dat uit de gelijkvormigheid van twee driehoeken hun congruentie volgt. Allemaal vreemde conclusies maar geen logische tegenspraak en ook geen tegenspraak met onze ervaringen, als we maar uitgaan van het feit dat de eenheid van lengte in deze meetkunde, de constante waar Gauss over sprak, groot genoeg is. Uit metingen van de parallax van de vaste ster Sirius met twee, een half jaar na elkaar gelegen, waarnemingen had Lobachevsky al vastgesteld dat deze standaard-afstand vele honderdduizenden malen groter dan de middellijn van de aardbaan om de zon moest zijn.

Aan het einde van de 19de eeuw worden de grondslagen van de meetkunde nauwkeuriger onderzocht. Er blijken in het systeem van de *Elementen* vele

zaken als vanzelf sprekend aangenomen te zijn, zonder dat er axioma's voor ingevoerd werden. We merkten bovenal op dat het begrip congruentie wel erg handtastelijk ingevoerd werd met beschouwingen over *verplaatsen* van driehoeken. Ook worden allerlei gevolgen van continuïteit zonder daarvoor benodigde axioma's bij Euclides en veel van zijn opvolgers gebruikt.

M. Pasch publiceert in 1882 een boek *Vorlesungen über neuere Geometrie* waarin op deze lacunes ingegaan wordt. Volgens Pasch moet de meetkunde geheel deductief uit axioma's afgeleid worden zonder een beroep te doen op onze zintuigelijke waarneming. Waarom snijdt een rechte lijn op afstand 1 van het middelpunt van een cirkel met straal 2 deze in twee punten? Gebruiken we coördinaten dan is een berekening voldoende bewijs. Maar dan gebruiken we toch dat 2 een kwadraat is en heel wat rekenregels uit de algebra.

Het beroemde boek *Grundlagen der Geometrie* (1899) van D. Hilbert geeft een vrij uitvoerige opbouw van de meetkunde volgens dit programma. In deze tijd wordt de meetkunde ook losgekoppeld van de meetkunde van de door ons zintuigelijk ervaren ruimte. Een boeiend en gedetailleerd verslag van de hand van H. FREUDENTHAL [21] van de gebeurtenissen rond dit proces is te vinden in de bespreking in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van de achtste druk van Hilberts boek.

B.L. van der Waerden schreef in 1937 *De logische grondslagen der euclidische meetkunde*, een poging om de kloof te verkleinen tussen de elementaire, toen op school te onderwijzen, euclidische meetkunde en de meetkunde die aan de universiteit onderwezen werd.

Tot nu toe spraken we alleen over de meetkunde met driehoeken waarvan de som kleiner dan 180 graden is, en waarin door een punt oneindig veel lijnen gaan die een gegeven lijn niet snijden, kortom de hyperbolische meetkunde.

Er is ook een elliptische meetkunde, waarin door een punt geen lijn is die de gegeven lijn niet snijdt, beter gezegd ieder tweetal lijnen heeft een snijpunt. In deze meetkunde is de som van de hoeken van de driehoek groter dan 180 graden. Maar in deze meetkunde hebben de lijnen een eindige lengte, er kan niet zinvol gesproken worden over het feit of een punt op een lijn tussen twee andere punten op de lijn ligt, de punten op een lijn kunnen niet geordend worden op de manier die in de klassieke euclidische meetkunde gebruikt werd en zo komen we in strijd met enkele gevolgen van de postulaten I tot en met IV van Euclides.

Terwijl dus in onze moderne opvattingen er eigenlijk drie vormen van meetkunde zijn, de euclidische, de hyperbolische en de elliptische, is de ontstaansgeschiedenis van de hyperbolische en de elliptische meetkunde verschillend.

## 2. DE SYSTEMATISCHE OPBOUW

Vanuit de projectieve meetkunde is een uniforme opbouw voor de drie boven genoemde meetkonden te construeren. Men begint met een projectief vlak, dat is een verzameling punten en lijnen met de volgend axioma's:

*Door iedere twee punten gaat precies één lijn.  
Iedere twee lijnen hebben precies één punt gemeenschappelijk.  
Er zijn vier punten waarvan er geen drie op één lijn liggen.*

Men beschouwt nu afbeeldingen van dit vlak op zich zelf, die rechte lijnen in rechte lijnen overvoeren.

Uit de axioma's kan men de stellingen van Pappus-Pascal en Desargues niet afleiden; wanneer men deze wil gebruiken moet men ze als axioma's toevoegen. Of men kan de veronderstelling dat de projectieve meetkunde geconstrueerd is met behulp van een commutatief getallichaam, zoals de rationale of de reële getallen, in plaats daarvan gebruiken.

Vier punten op een rechte lijn en vier lijnen door een gegeven punt hebben onder deze transformaties een invariant, de dubbelverhouding. Met behulp van deze dubbelverhouding kan men nu lengten en hoeken in het projectieve vlak invoeren. Daarvoor is de keuze van een bepaalde (al dan niet ontaarde) kegelsnede nodig.

Het afleiden en bewijzen van stellingen in de niet-euclidische meetkunde lijkt een moeizaam werk. We zijn steeds geneigd 'verkeerde' tekeningen te maken, te redeneren met behulp van getekende of gedachte voorstellingen. De in deze stijl geschreven publicaties vragen nogal wat inspanning van de lezer.

Er is een heel andere, later gevonden manier om de niet-euclidische meetkunde te bedrijven. Is de gewone euclidische meetkunde de meetkunde in het platte vlak, vanzelfsprekend is er ook een meetkunde op andere oppervlakken in de driedimensionale ruimte. Meetkunde op een cylinder lijkt op meetkunde in het platte vlak, we zien dat als we de cylinder afwikkelen. Meetkunde op de bol is al sinds de oudheid bestudeerd, we kunnen ons die eenvoudig voorstellen en de stellingen direct met behulp van de stereometrie afleiden. Hoe zou de meetkunde op de torus of op nog heel andere oppervlakken er uit zien?

Bij die beschouwing van een meetkunde zal een punt gewoon een punt op het oppervlak zijn. Voor een rechte lijn zullen we een geodeet nemen, dat wil zeggen een lijn op het oppervlak, die de kortste verbinding van twee punten van de lijn levert. We zijn dan wel ver weg van Euclides, zijn definitie is immers.

*Een rechte lijn is (een lijn) die gelijk ligt met de punten erop. (definitie IV)*

En propositie I - XX luidt:

*In elken driehoek zijn twee zijden, op elke wijze samengenomen, groter dan de overblijvende.*

en deze propositie vraagt een bewijs.

Bezien we de meetkunde op de bol dan is het duidelijk dat aan de postulaten van Euclides niet steeds voldaan is. Er zijn bijvoorbeeld twee punten waardoor oneindig veel verschillende rechte lijnen (in dit geval grote cirkels) gaan. Ieder

tweetal grote cirkels heeft twee punten gemeen. Spannend is de verzameling van punten te zoeken, die een gegeven afstand tot een grote cirkel hebben, dus het analogon van de 'evenwijdige' lijn in het euclidische vlak. Het is duidelijk dat deze verzameling bestaat uit twee kleine cirkels, dus helemaal geen 'rechte lijnen' op de bol vormen. De som van de hoeken van een driehoek op de bol is altijd groter dan 180 graden, terwijl zelfs zonder het vijfde postulaat bewezen kon worden dat de som van de hoeken van een driehoek altijd gelijk of kleiner dan 180 graden is.

Er is een methode om gebruik makende van onze kennis van de euclidische meetkunde de niet-euclidische meetkunde te ontwikkelen. We willen dat in de volgende hoofdstukken voor de elliptische en hyperbolische meetkunde doen. We gebruiken daar voor een 'model' van het niet-euclidische vlak in de euclidische meetkunde.

(Een bekend voorbeeld van een model is te vinden in de theorie van het projectieve vlak. De verzameling van alle lijnen door een vast punt  $O$  in de driedimensionale euclidische ruimte is zo'n model als we onder PUNT een lijn door  $O$  verstaan en onder LIJN een vlak door  $O$ . Eenvoudig zijn dan de axioma's van het projectieve vlak te verifiëren.)

### 3. HET ELLIPTISCHE VLAK

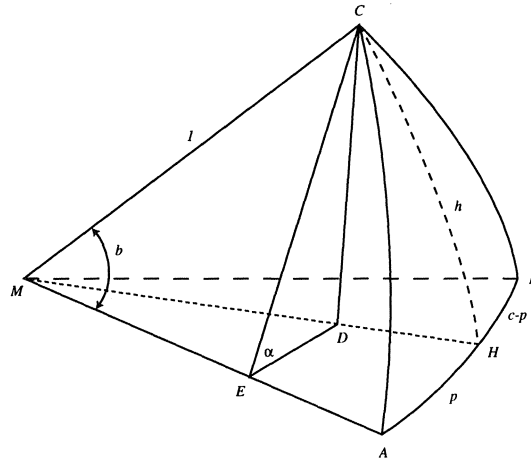
Als model voor het elliptische vlak gaan we uit van een boloppervlak. Twee diametraal gelegen punten van het boloppervlak noemen we een PUNT; grote cirkels, ook met geïdentificeerde diametrale punten noemen we een LIJN. Duidelijk is dat door ieder tweetal PUNTEN precies één LIJN gaat en dat ieder tweetal LIJNEN precies één PUNT gemeen hebben. Gebruiken we de gewone meetkunde op de bol dan krijgen we een goed beeld van de elliptische meetkunde. We merken allereerst op dat de som van de hoeken van een driehoek groter dan 180 graden is, een triviaal voorbeeld wordt gegeven door een driehoek met drie rechte hoeken, die we eenvoudig op het boloppervlak kunnen aanwijzen. Merkwaardig is dat LIJN-stukken een maximale lengte hebben, namelijk de straal van de bol vermenigvuldigd met het getal  $\pi$ .

Er moet nogal wat aangepast worden in de axiomatic van Euclides om deze meetkunde te axiomatiseren. Het begrip dat een punt 'tussen' twee andere punten ligt, of anders gezegd dat je op eenduidige manier over de volgorde waarin punten op een lijn liggen kunt spreken vervalt in de elliptische meetkunde.

Volledigheidshalve merken we op dat topologisch gezien, het oppervlak dat we krijgen met de diametrale identificatie het projectieve vlak is, hetgeen niet orienteerbaar is.

Er is wel enige verwarring over de relatie van de meetkunde op de bol met de elliptische meetkunde. We kiezen een tussenweg, volledige axiomatisering van de elliptische meetkunde vraagt nog al wat aanpassing van de postulaten van Euclides, deze impliceren immers dat de meetkunde euclidisch of hyperbolisch is.





FIGUUR 3.

We merken op dat in de boldriehoeksmeting bij twee punten steeds twee grote cirkelbogen zijn, met samen de lengte  $2\pi$ , die de beide punten verbinden. De definitie van een driehoek vraagt dus enige zorg. Bij de overgang naar het elliptische vlak blijft deze moeilijkheid, bovendien gaat de oriënteerbaarheid van het vlak verloren. We stappen luchthartig over al deze problemen heen en richten onze aandacht op 'kleine' driehoeken op het boloppervlak (met zijden bijvoorbeeld kleiner of gelijk aan  $\frac{1}{2}\pi$ ).

We willen wat formules voor de driehoeksmeting afleiden.

We gebruiken daartoe de klassieke stereometrie. Gemakshalve bestuderen we driehoeken op het oppervlak van een bol met straal 1. De drie hoekpunten  $A, B$  en  $C$  van de driehoek op de bol verbinden we met het middelpunt  $M$  van de bol. De figuur die bij het middelpunt  $M$  ontstaat is een drievlakshoek. De hoeken van de boldriehoek corresponderen met de standhoeken tussen de paren vlakken van de drievlakshoek, we noemen ze  $\alpha, \beta, \gamma$ . De zijden van de boldriehoek corresponderen met de hoeken die twee ribben van de drievlakshoek in het middelpunt met elkaar maken. We noemen deze hoeken  $a, b, c$  en wel zo dat zijde  $a$  tegenover hoek  $\alpha$  ligt enz.

We gaan nu gewone stereometrie bedrijven in figuur 3. We laten uit  $C$  een loodlijn  $CD$  neer op vlak  $MAB$  en vanuit  $D$  een loodlijn  $DE$  op de lijn  $MA$ . Nu is hoek  $AMC$  gelijk aan  $b$ , hoek  $CED$  gelijk aan  $\alpha$ . Omdat  $MC$  gelijk aan 1 is geldt dus  $CD = \sin b \cdot \sin \alpha$ . Met behulp van een loodlijn uit  $D$  op  $MB$  neergelaten bewijs men direct dat  $CD$  gelijk is aan  $\sin a \cdot \sin \beta$ . We hebben dus een analogon van de sinusregel gevonden:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

In de euclidische meetkunde zijn deze quotienten gelijk aan het inverse van de middellijn van de omgeschreven cirkel, of aan twee keer de oppervlakte van de

driehoek gedeeld door het produkt van de lengten van de drie zijden. Het is een aardige oefening in goniometrie om te onderzoeken welke generalisatie van deze euclidische stelling in de boldriehoeksmeting optreedt.

We zoeken nu nog een analogon van de stelling van Pythagoras uit de euclidische meetkunde. Het snijpunt van de lijn  $MD$  met het oppervlak van de bol noemen we  $H$ , de boog  $CH$  noemen we  $h$ , de boog  $AH$  noemen we  $p$  en we bestuderen de rechthoekige boldriehoek  $CAH$ . Nu geldt

$$\cos h = MD = ME / \cos p = \cos b / \cos p.$$

De stelling van Pythagoras in de meetkunde op de bol luidt dus:

De cosinus van de hypotenusa is gelijk aan het product van de cosinussen van de rechthoekszijden.

Uit de stelling van Pythagoras is de cosinusregel af te leiden. In de boldriehoek  $ABC$  geldt

$$\cos a = \cos h \cdot \cos(c - p) = \cos h \cdot \cos c \cdot \cos p + \cos h \cdot \sin c \sin p.$$

Nu is direct uit de figuur af te leiden

$$\cos p = ME / MD = \cos b / \cos h$$

en

$$\sin p = DE / MD = CE \cos \alpha / MD = \sin b \cos \alpha / \cos h,$$

dus

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

Dit is een analogon van de cosinusregel.

Er zijn in de boldriehoeksmeting nog veel meer basisformules. In zekere zin is er een symmetrie tussen hoeken en zijden, er is bijvoorbeeld een tweede cosinusregel, die een hoek uitdrukt in de overliggende zijde en de daaraan gelegen hoeken.

Vervolgens beschouwen we op de bol met straal 1 een cirkel met niet te grote straal  $r$ , gemeten over het boloppervlak. Deze cirkel is een kleine cirkel op de bol. Met elementaire meetkunde is zijn omtrek te berekenen, deze is gelijk aan  $2\pi \sin r$ .

Al deze formules hebben een grote gelijkenis met overeenkomstige formules van de euclidische meetkunde. Wanneer we 'kleine' figuren op de bol met straal 1 bezien, of wat op hetzelfde neerkomt figuren op een bol met heel 'grote' straal bezien, kunnen benaderingen invoeren. Voor kleine waarden van  $a, b$  en  $c$  kunnen we de benaderingen  $\sin a \sim a$ ,  $\tan a \sim a$ ,  $\cos a \sim 1 - \frac{1}{2}a^2$  enzovoorts gebruiken. Sinus- en cosinus-regel worden dan de overeenkomstige regels van de euclidische driehoeksmeting.

Enkele dingen willen we nog expliciet opmerken.

In een rechthoekige driehoek  $ABC$  met scherpe hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  en een rechte hoek  $\gamma$  gelden de volgende regels:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \tan b / \tan c \\ \sin \alpha &= \sin a / \sin c \\ \tan \alpha &= \tan a / \sin b.\end{aligned}$$

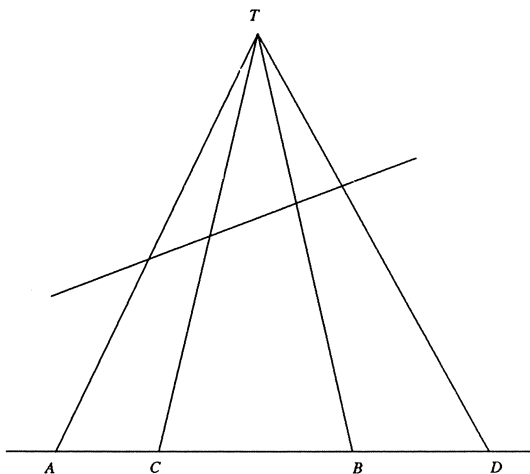
We vermelden nog het feit dat de oppervlakte van een boldriehoek gelijk is aan het verschil van de som van zijn hoeken en  $\pi$  en dat een analoge stelling geldt in de elliptische meetkunde.

#### 4. TUSSENSPEL

Om een model voor de hyperbolische meetkunde te vinden zouden we een remplacant van de bol willen zoeken waarop de meetkunde een model voor de hyperbolische meetkunde is. Wanneer we wat dieper ingaan op de structuur van het oppervlak waarop we de meetkunde willen bestuderen, blijkt de totale kromming een grote rol te spelen. De totale kromming in een punt wordt gedefinieerd uitgaande van de kromming van snijfiguren met vlakke doorsneden door dat punt. Bij een bol is de totale kromming in ieder punt gelijk en wordt bepaald door de straal van de bol. Wanneer we een oppervlak met een zadelpunt bekijken blijken de doorsneden in dat zadelpunt krommingen in tegengestelde richting te hebben (een zadelpunt is zo iets als een col in een bergpas). De totale kromming in zo'n zadelpunt is negatief. Er bestaan oppervlakken die in ieder punt een totale kromming hebben die gelijk is aan  $-1$ . Deze oppervlakken van constante negatieve kromming zouden we kunnen gebruiken om de hyperbolische meetkunde verder te bestuderen. Een voorbeeld van zo'n oppervlak met constante negatieve kromming is de pseudosfeer verkregen door omwenteling van de tractrix om zijn asymptoot. Omdat deze weg niet zo eenvoudig is als de methode om elliptische meetkunde te bestuderen met behulp van de bolmeetkunde, kiezen we een andere weg.

We gaan daarbij uit van later ontwikkelde opvattingen over de meetkunde. Felix Klein heeft er de aandacht opgevestigd dat meetkunde goed beschreven kan worden uitgaande van transformaties (bijvoorbeeld bewegingen) die figuren in elkaar overvoeren, respectievelijk in zich zelf overvoeren. Zo is er een meetkunde waarin de congruentie (in euclidische zin) centraal staat, een andere waarin de gelijkvormigheid centraal staat. Bij evenwijdige projectie blijven rechte lijnen rechte lijnen, evenwijdige lijnen worden geprojecteerd in evenwijdige lijnen. Maar bij deze projectie kunnen hoeken van grootte veranderen, een vierkant kan in evenwijdige projectie afgebeeld worden op een willekeurig parallelogram. De projecties van een cirkel zijn of een cirkel of een ellips (of ontaard in een lijnstukje) Verhoudingen van lijnstukjes op een vaste lijn blijven behouden, middens gaan over in middens enz.

We gaan nu uit van een projectief vlak. De daarbij horende groep van projectieve transformaties kan opgebouwd worden vanuit de centrale projecties. Bij centrale projectie, worden rechte lijnen geprojecteerd in rechte lijnen, maar evenwijdige lijnen snijden elkaar in projectie op de horizon. Cirkels kunnen ge-



FIGUUR 4.

projecteerd worden als parabolen of hyperbolen. Verhoudingen, van lijnstukken ook op een vaste lijn, blijven niet behouden. Vier punten op een rechte hebben wel een invariant, de dubbelverhouding. In figuur 4 zien we, bijvoorbeeld via een beschouwing van oppervlakten van driehoeken dat de dubbelverhouding van vier punten  $A, B, C$  en  $D$  op een rechte gelijk is aan de dubbelverhouding van vier lijnen vanuit een punt  $T$  buiten de rechte naar de vier punten getrokken.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ATC}{\sin BTC} : \frac{\sin ATD}{\sin BTD}$$

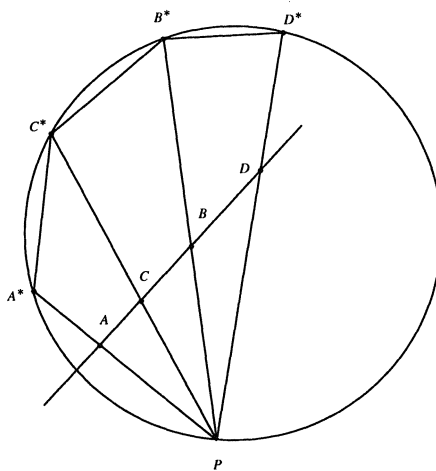
Iedere andere rechte die de vier rechten  $TA, TB, TC$  en  $TD$  snijdt levert een viertal punten op deze rechte met dezelfde dubbelverhouding.

In figuur 5 zien we dat de dubbelverhouding van de vier koorden  $A^*C^*, B^*C^*, A^*D^*$  en  $B^*D^*$  dezelfde is als de dubbelverhouding van de sinussen van de overeenkomstige omtrekshoeken in  $P$  en dus ook gelijk aan de dubbelverhouding van de vier punten  $A, B, C$  en  $D$  op de willekeurige transversaal van de vier door  $P$  gaande lijnen.

We proberen nu de lengte van een lijnstuk  $AB$  op een rechte lijn te beschrijven in projectief invariante termen. We willen dus gebruik maken van de dubbelverhouding, die immers een projectieve invariant is. We kiezen daar toe twee vaste punten  $O$  en  $V$  op de lijn en beschouwen de dubbelverhouding

$$\Delta = \frac{BO}{AO} : \frac{BV}{AV}.$$

Om te onderzoeken of er gelijkheid met de gewone definitie van lengte bezien we de waarde van deze dubbelverhouding in het geval dat gewone coördinaten op de lijn zijn aangebracht. We geven het punt  $O$  de coördinaat 0, het punt  $V$  de coördinaat oneindig en de punten  $A$  en  $B$  de coördinaten  $a$  en  $b$  respectievelijk.



FIGUUR 5.

Dan geldt:

$$\frac{BO}{AO} : \frac{BV}{AV} = \frac{b}{a}.$$

Dit is de verhouding van de lengten van de lijnstukken  $OB$  en  $OA$ . We wilden dat de lengte van het lijnstuk  $AB$ , verkregen als verschil van de lijnstukken  $OB$  en  $OA$ , ook een verschil van lengten zou zijn. We hadden in plaats van het quotiënt van de coördinaten liever een verschil gezien. Dit brengt ons er toe om op een lijn met vaste gegeven punten  $O$  en  $V$  de lengte van een lijnstuk  $AB$  te definiëren als

$$\text{Lengte } (AB) = k \ln(\Delta),$$

waarin  $k$  een constante is.

Ook een hoekmaat kunnen we via zo'n dubbelverhouding definiëren, maar dat lijkt wat gekunstelder te gaan. De hoek tussen twee lijnen  $OA$  en  $OB$  definiëren we met behulp van de isotrope lijnen door  $O$ , dat zijn lijnen waarop ieder segment de lengte nul heeft of anders gezegd lijnen die loodrecht op zich zelf staan. In coördinaten-termen lijnen met als richtingscoëfficiënten de complexe eenheden  $i$  en  $-i$ .

Geven we  $OA$  en  $OB$  richtingscoëfficiënten  $a$  en  $b$  dan blijkt de dubbelverhouding van deze vier lijnen gelijk te zijn aan

$$\frac{a-i}{a+i} : \frac{b-i}{b+i}.$$

Wanneer we voor de te kiezen constante nu het getal  $\frac{1}{2i}$  nemen vinden we een bekende formule terug.

$$\lambda = \frac{1}{2i} \ln \frac{(a-i)(b+i)}{(a+i)(b-i)} = \frac{1}{2i} \ln \frac{ab+1+i(a-b)}{ab+1-i(a-b)}.$$

Om deze uitdrukking te vergelijken met de gebruikelijke hoekmaat stellen we dat de lijn  $y = ax$  met de positieve  $X$ -as een hoek  $\alpha$  maakt en de lijn  $y = bx$  een hoek  $\beta$  maakt. Nu geldt  $\tan \alpha = a$  en  $\tan \beta = b$ .

We herleiden  $\lambda = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+it}{1-it}$ , waarin

$$t = \frac{a-b}{1+ab}.$$

De klassieke definitie van de logaritme van een complex getal geeft

$$\lambda = \arctan t = \arctan \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \alpha - \beta,$$

in overeenstemming met wat we verwachtten.

Door gebruik te maken van dubbelverhoudingen kunnen we dus in het projectieve vlak een maat voor de lengten van lijnstukken en voor de grootte van hoeken invoeren. De dubbelverhoudingen bepalen de grootte van de lengte van elk segment, respectievelijk de grootte van de hoek van elk paar lijnen. Door deze wat vreemde kronkelwegen hebben we een interpretatie van de euclidische begrippen lengte van een lijnstuk en grootte van een hoek in termen van dubbelverhoudingen.

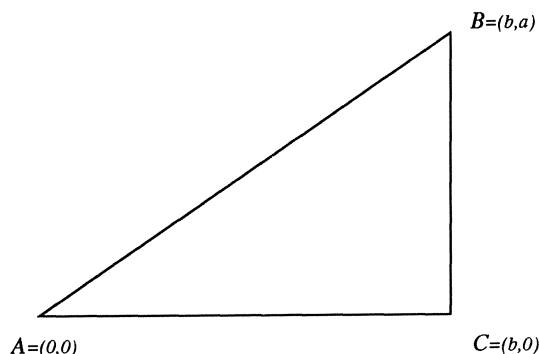
Om nu niet-euclidische maatsystemen in het projectieve vlak in te voeren gebruiken we analoge procedures. We kiezen in het projectieve vlak een vaste kegelsnede. Voor de twee op iedere lijn te kiezen ijkpunten kiezen we de snijpunten van deze lijn met de gegeven kegelsnede. Hoeken kunnen op een analoge manier gedefinieerd worden. Daarbij kan het begrip loodrecht een centrale rol spelen. We herinneren even aan de alledaagse aardrijkskunde, bij de evenaar horen twee polen, de noord- en de zuidpool. Alle grote cirkels (rechte lijnen op de bol) door de polen snijden de evenaar loodrecht. Generalisatie en abstractie van dit begrip is in de theorie van het projectieve vlak de theorie van pool en poollijn. Met behulp van deze theorie is het mogelijk het projectieve vlak van verschillende geometrieën te voorzien. We gaan op de concrete uitwerking ervan hier niet verder in.

We merken nog op dat in de euclidische meetkunde congruentie gedefinieerd kan worden door de definitie dat twee figuren congruent zijn als er een beweging, een combinatie van translaties en rotaties bestaat die de ene figuur overvoert in de andere; in plaats van translaties en rotaties kan men ook spiegelingen als bouwstenen voor de bewegingen gebruiken. Deze weg wordt ook in de niet-euclidische meetkunde gebruikt om congruenties te definiëren.

Al deze opmerkingen zullen de achtergrond vormen voor ons model van de hyperbolische meetkunde.

We hebben in de volgende paragraaf nog enkele stellingen uit de analyse nodig. We herinneren aan de bekende formules

$$\sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}); \quad \cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}).$$



FIGUUR 6.

We definiëren nu een hyperbolisch analogon van de, met behulp van de cirkel meetkundig gedefinieerde, goniometrische verhoudingen.

$$\sinh f = \frac{1}{2}(e^f - e^{-f}); \quad \cosh f = \frac{1}{2}(e^f + e^{-f}).$$

De naam hyperbolisch is te verklaren door de eenvoudig te verifiëren relatie  $\cosh^2 f - \sinh^2 f = 1$ .

Zoals de cirkel te parametrizeren is met sinus en cosinus, zo is de orthogonale hyperbool te parametrizeren met  $\sinh$  en  $\cosh$ .

We definiëren nog  $\tanh f = \sinh f / \cosh f$ .

De klassieke additiefomules van de goniometrische functies hebben eenvoudig te vinden analoge formules voor de hyperbolische functies. Ook de Taylorreeksen voor  $\sinh$  en  $\cosh$  zijn eenvoudig af te leiden. Met behulp hiervan vindt men weer benaderingsformules voor kleine waarden van het argument:

$$\sinh f \sim f; \quad \tanh f \sim f; \quad \cosh f \sim 1 + \frac{1}{2}f^2.$$

Een heel ander model voor de elliptische meetkunde is direct uit het euclidische vlak af te leiden. We gaan uit van een cartesisch coördinatenstelsel. Alleen voegen we aan een segment, algemeen aan een kromme een nieuwe, zogenaamd elliptische lengte toe. In de euclidische meetkunde kunnen we lengten definiëren als de integraal van de differentiaal  $ds$ , gedefinieerd door  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

We kiezen nu een andere differentiaal voor de lengte-definitie, namelijk

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Als illustratie laten we een voorbeeld van een berekening met zo'n definitie zien. We kiezen drie punten:  $A = (0,0)$ ,  $C = (b,0)$  en  $B = (b,a)$  en rekenen de drie zijden van deze driehoek uit (figuur 6).

De elliptische lengte van  $AC$  is, omdat dan  $y$  constant 0 is gelijk aan

$$\int_A^C ds = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b.$$

De elliptische lengte van  $AB$  is omdat nu  $y = \frac{a}{b}x$  gelijk aan

$$\int_A^B ds = \int_0^b \frac{b\sqrt{a^2+b^2}dx}{b^2+(a^2+b^2)x^2} = \arctan \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}x \Big|_0^b = \arctan \sqrt{a^2+b^2}.$$

De elliptische lengte van  $BC$  is omdat hier  $x$  constant gelijk aan  $b$  is

$$\int_C^B ds = \int_0^a \frac{\sqrt{1+b^2}dy}{1+b^2+y^2} = \arctan \frac{y}{\sqrt{1+b^2}} \Big|_0^a = \arctan \frac{a}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Is er nu een verband tussen deze drie lengten?

We gaan wat gekunsteld te werk.

$$\cos(\text{elliptische lengte } AC) = \cos(\arctan b) = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\cos(\text{elliptische lengte } AB) = \cos(\arctan \sqrt{a^2+b^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$\cos(\text{elliptische lengte } BC) = \cos(\arctan a/\sqrt{1+b^2}) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

en we vinden dus  $\cos(\text{elliptische lengte } AB) = \cos(\text{elliptische lengte } AC) \cdot \cos(\text{elliptische lengte } BC)$ , hetgeen juist de elliptische vorm van de stelling van Pythagoras is.

## 5. HYPERBOLISCHE MEETKUNDE

We kiezen een model voor de hyperbolische meetkunde dat naar H. Poincaré (1854–1912) genoemd wordt. Uitgangpunt is een vaste cirkel  $H$  met straal  $R$ . Punten zijn de punten binnen de cirkelomtrek, punten op de cirkelomtrek zullen we beschouwen als oneindig verre punten van onze meetkunde. Punten buiten de cirkelomtrek beschouwen we als niet bestaand. De middellijnen van de cirkel, voorzover ze binnen de cirkel liggen beschouwen we als rechte lijnen en eveneens de binnen de cirkel  $H$  gelegen cirkelbogen die de cirkel  $H$  loodrecht snijden.

Met deze definitie is direct in te zien dat door twee punten (binnen de cirkel  $H$ ) precies één lijn gaat, hetzij een middellijn, hetzij een cirkelboog loodrecht op  $H$ . Twee lijnen kunnen heel verschillend gedrag hebben. Ze kunnen elkaar snijden in een punt binnen de cirkel  $H$ , ze kunnen elkaar snijden in een punt



op de cirkelomtrek, we zouden ze dan parallel kunnen noemen, ze kunnen geen enkel punt binnen of op de cirkelomtrek van  $H$  gemeen hebben. Bij een gegeven lijn  $m$  en een gegeven punt  $P$  zijn er twee lijnen door  $P$ , die  $m$  in een 'oneindig ver' punt snijden en oneindig veel die überhaupt met  $m$  geen punt gemeen hebben.

In dit model zal de hoek tussen twee lijnen gelijk zijn aan de euclidische hoek tussen de rechte lijnen of cirkelbogen (zie figuur 7). De lengte van een lijnsegment  $AC$  gelegen op een middellijn met snijpunten  $K$  en  $L$  met de cirkel definiëren we (gedachtig aan de vorige paragraaf) met behulp van een dubbelverhouding:

$$\text{lengte}(AC) = \ln \left( \frac{AK}{AL} : \frac{CK}{CL} \right).$$

en geheel analoog

$$\text{lengte}(AB) = \ln \left( \frac{AS}{AT} : \frac{BS}{BT} \right).$$

De lengte van het segment  $AB$  gelegen op een cirkelboog, loodrecht op  $H$ , en met snijpunten  $P$  en  $Q$  met de cirkel  $H$  definiëren we, ook weer gedachtig aan de opmerkingen uit de vorige paragraaf

$$\text{lengte}(CB) = \ln \left( \frac{CQ}{CP} : \frac{BQ}{BP} \right),$$

waarbij we nu onder  $CQ$  de euclidische lengte van de koorde  $CQ$  zullen verstaan en analoog voor  $CP$ ,  $BQ$  en  $BP$  de euclidische lengten van de betreffende koorden verstaan.

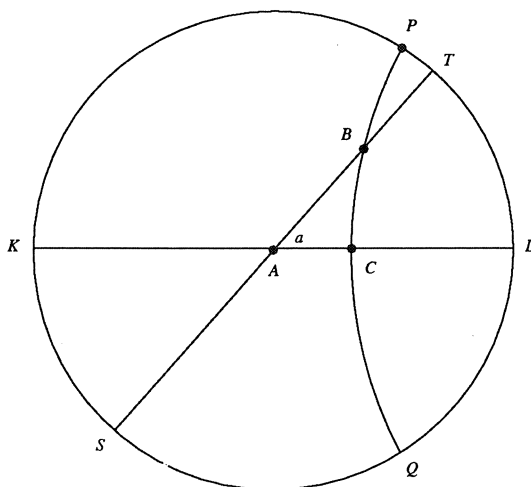
We proberen nu weer fundamentele eigenschappen van de driehoeksmeting in het hyperbolische vlak af te leiden. We beginnen met eigenschappen van een rechthoekige driehoek. De transformaties die in het hyperbolische vlak een willekeurige rechthoekige driehoek afbeelden op een driehoek waarvan het hoekpunt van een van de scherpe hoeken in het middelpunt van de Poincaré-cirkel ligt zijn transformaties waarbij de dubbelverhouding invariant blijft. Daarom beperken we ons in ons onderzoek tot een speciaal gelegen rechthoekige driehoek. In figuur 7 bestuderen we de driehoek  $ABC$ , met een rechte hoek in  $C$ , terwijl  $A$  het middelpunt van de Poincaré-cirkel  $H$  is. De zijden  $AC$  en  $AB$  zijn dus middellijnen van de cirkel, terwijl de zijde  $BC$  een deel van een cirkelboog is die de cirkel  $H$  loodrecht snijdt.

De hyperbolische lengtes van de lijnstukken  $AC$  en  $AB$  zijn eenvoudig met bovenstaande formule te bepalen, we noemen ze respectievelijk  $b$  en  $c$ .

De hyperbolische lengte  $a$  van het lijnstuk  $BC$  (in het Poincaré-model dus de cirkelboog  $BC$ ) op de cirkel door  $B$  en  $C$  en loodrecht op de cirkel  $H$  is met wat meer rekenwerk, maar geheel elementair te berekenen.

Vergelijking van deze drie uitkomsten geeft de relatie

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b,$$



FIGUUR 7.

hetgeen de hyperbolisch gedaante van de stelling van Pythagoras is. We merken nog op dat eveneens geldt:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sinh a / \sinh c; \\ \cos \alpha &= \tanh b / \tanh c; \\ \tan \alpha &= \tanh a / \sinh b,\end{aligned}$$

waarbij  $\alpha$  de hoek  $BAC$  is.

Wanneer we weer een kleine driehoek beschouwen of een grote waarde voor  $R$  kiezen kunnen we weer benaderingen invoeren. We vinden dan dat ook de hyperbolische meetkunde de euclidische meetkunde als grensgeval heeft.

Reeds vroeg is natuurlijk opgemerkt dat de formules voor de goniometrie van de hyperbolische meetkunde formeel direct uit die van de elliptische meetkunde kunnen worden afgeleid door bij wijze van spreken elliptische meetkunde te bedrijven op een bol met straal gelijk aan de imaginaire eenheid  $i$ . De formules  $\sinh a = -i \sin ia$ ,  $\cosh a = \cos ia$  maken de afleiding van de hyperbolische formules van de driehoeksmeting tot een trivialiteit als men die van de bolmeetkunde als uitgangspunt neemt. Dat dit echter een wiskundig juiste procedure is vraagt heel wat meer meetkundige theorie.

Met de nu afgeleide formules van de hyperbolische meetkunde kunnen we terugkomen op de in § 3 genoemde formule van Lobachevsky, handelend over een rechthoekige driehoek waarvan een punt op de omtrek van de Poincaré-cirkel ligt. De hoek, die we in figuur 2  $\lambda$  noemden, kunnen we berekenen in het geval dat het punt  $R$  nog in het eindige ligt met de formule

$$\tan \lambda_0 = \tanh(QR) / \sinh(PQ).$$

Wanneer nu  $R$  naar het oneindige gaat geldt dat  $\tanh(QR)$  tot 1 nadert en dus geldt in het grensgeval

$$\tan \lambda = 1 / \sinh a.$$

Een elementaire herleiding geeft dan de formule

$$a = -\ln \tan \frac{1}{2} \lambda.$$

In de hyperbolische meetkunde geldt dat de oppervlakte van een driehoek na vastlegging van een eenheid van oppervlakte, evenredig is met het verschil van  $\pi$  en de som van de driehoeken van de driehoek. Van een driehoek waarvan de drie hoekpunten alle drie in het oneindige liggen, is de oppervlakte maximaal met betrekking tot de oppervlakten van driehoeken.

Ook kan de hyperbolische meetkunde opgebouwd worden vanuit de definitie van een lijnelement  $ds$ .

De integraal over  $1/(1+x^2)$ , die via de arctan de goniometrie in de formules bracht wordt dan een integraal van  $1/(1-x^2)$ , waarvan de primitieve

$$\frac{1}{2} \ln((1+x)/(1-x))$$

is, de inverse functie is nu de exponentiële en de hyperbolische sinus en cosinus treden dus op.

#### 6. BETEGELINGEN VAN HET HYPERBOLISCHE VLAK

Zoals het platte vlak regelmatig betegelingen met gelijkzijdige driehoeken of met vierkanten of met regelmatige zeshoeken kent, kan men ook vragen naar regelmatig betegelingen van het elliptische vlak.

Deze hangen nauw samen met de platonische regelmatige lichamen. De kubus, het regelmatig acht-, twaalf- en twintig-vlak kunnen via diametrale identificatie betegelingen van het elliptische vlak geven.

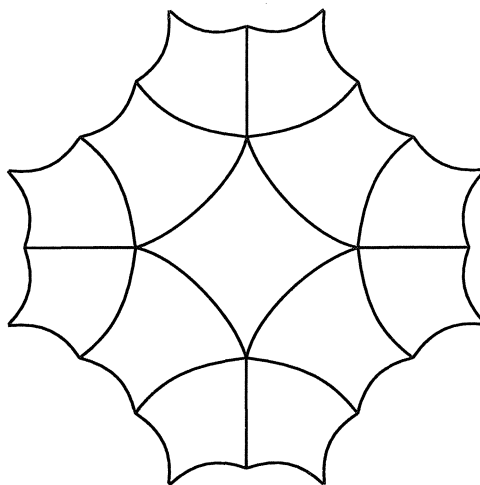
De regelmatig betegelingen van het hyperbolisch vlak hebben veel meer gedaanten. De grootte van de hoek  $\alpha$  van een gelijkzijdige driehoek hangt van de lengte  $a$  van de zijde af. De formule hiervoor is direct uit de trigonometrie af te leiden en luidt

$$(1 + \cosh a) \cos \alpha = \cosh a.$$

Het is ook mogelijk een betegeling met driehoeken te maken, waarvan in de verschillende hoekpunten  $p$ ,  $q$  en  $r$  driehoeken samenkomen, mits

$$1/p + 1/q + 1/r < 1.$$

In publicaties van H.S.M. Coxeter is veel over spiegelingsgroepen en betegelingen van het hyperbolische vlak te vinden. Hij was het ook die M.C. Escher inspireerde tot de prenten 'Cirkellimiet'. In latere publicaties bestudeerde Coxeter speciaal de prent Cirkellimiet III. Het lijkt op het eerste gezicht dat een normale structuur van het hyperbolisch vlak aanwezig is, maar enkele van de optredende cirkels in de prent van Escher staan niet loodrecht op de Poincaré-cirkel, maar maken er een kleinere hoek mee. In een tweetal artikelen onderzocht Coxeter dit feit. Het blijkt dat door intuïtie van de kunstenaar iets geconstrueerd is dat meetkundig een fraaie betekenis heeft.



FIGUUR 8.

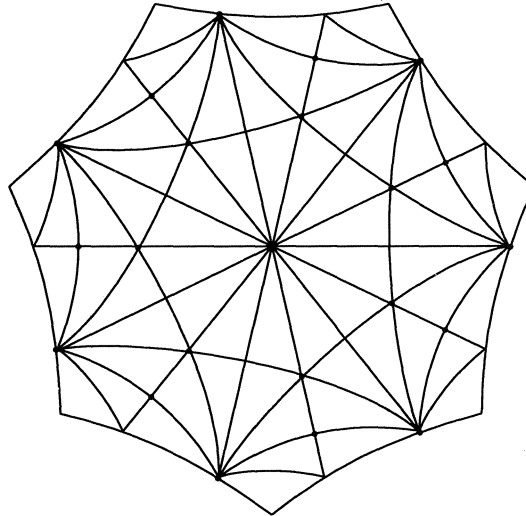
De ‘verkeerde’ cirkels in het Poincaré-model zijn namelijk geen rechte lijnen, maar krommen die ‘evenwijdig’ met een rechte lijn zijn. We merkten in het begin van dit verhaal reeds op dat alleen in de euclidische meetkunde de begrippen ‘evenwijdig’ en ‘niet snijden’ dezelfde zijn. De vissen in Cirkellimiet III zwemmen dus in kanalen met ‘evenwijdige’, niet uit rechte lijnen bestaande oevers!

Afgezien van betegelingen met driehoeken zijn ook betegelingen met regelmatige vierhoeken mogelijk.

Bijvoorbeeld met vijf vierhoeken in ieder punt samenkomend. (figuur 8). In het boek *Three dimensional Geometry and Topology* van W.P. Thurston zijn fraaie betegelingen met driehoeken met hoeken van  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  en  $\pi/7$  te vinden, waarvan er in de betreffende hoekpunten dus 4, 6 of 14 samenkomen. Wij volstaan in figuur 9 met een betegeling van een regelmatige hyperbolische zevenhoek met 42 van zulke driehoeken.

Het boek van W.Magnus *Noneuclidean Tessellations and their groups* gaat speciaal over dit onderwerp.

In de theorie van de modulaire functies, een gebied van de klassieke analyse, dat nuttig in de getaltheorie gebruikt kan worden, wordt het gedrag van bepaalde functies van een complexe variabele  $z$  onder de transformaties  $z$  naar  $(az+b)/(cz+d)$  met reële  $a, b, c, d$  beschouwd. Onder deze transformaties wordt het bovenhalfvlak van het complexe vlak, dus de punten met positief imaginair deel op zich zelf afgebeeld. Kiezen we de getallen  $a, b, c$  en  $d$  als gehele rationale getallen met determinant  $ad - bc = 1$ , dan hebben we een ondergroep van de groep van alle transformaties, De punten  $z$  met  $|z| \leq 1$  in het bovenhalfvlak vormen een fundamenteelgebied, ieder punt in het bovenhalf vlak kan door een



FIGUUR 9.

van de transformaties uit de genoemde ondergroep afgebeeld worden op een punt van het fundamenteaalgebied en twee punten uit dit fundamenteaalgebied kunnen niet door zulke transformaties op elkaar afgebeeld worden (voor de critici, er gaat wel wat mis op de rand van het fundamenteaalgebied, maar dat is te overkomen). De beelden van dit gebied onder de transformaties geven een betegeling van het bovenhalfvlak. Vervanging van de groep van de geheeltalige gebroken lineaire transformaties door ondergroepen ervan geeft verfijnde betegelingen van dit bovenhalfvlak.

Door Poincaré werd dit bovenhalfvlak eveneens als een model voor de hyperbolische meetkunde benut. Het is eenvoudig te vertalen naar het eerder genoemde model van het inwendige van een cirkel. De rechte lijnen en cirkels loodrecht op de Poincaré-cirkel zijn in het bovenhalfvlak de verticale lijnen, waarop het reële deel van  $z$  constant is en de cirkels loodrecht op de reële as. Door de transformatie die  $z$  overvoert naar  $e^{2\pi iz}$  wordt het bovenhalfvlak afgebeeld op het inwendige van de eenheidscirkel. Op deze manier zien we een verband tussen de betegelingen van het hyperbolisch vlak en de betegelingen van het bovenhalfvlak. Voor de aardigheid merken we nog op dat de hyperbolische metriek in het bovenhalfvlak wordt gegeven door  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ .

#### 7. VERDERE UITZICHTEN

Het zal duidelijk zijn dat naast niet-euclidische tweedimensionale meetkunde ook niet-euclidische ruimtemeetkunde en meerdimensionale meetkunde bestaat. Veel recent onderzoek gaat over verbanden tussen topologie en niet-euclidische meetkunde.

Door B. Riemann (1826–1866) is de meetkunde veel verder gegeneraliseerd.

Hierbij wordt afgezien van een axiomatische opbouw op de wijze van Euclides, maar wordt de analyse als uitgangspunt gekozen. Zoals in de euclidische meetkunde de afstand via de integraal van de differentiaal  $ds$  met  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  of in de ruimte  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  gedefinieerd wordt gebruikt de riemannse meetkunde een differentiaal die een kwadratische vorm in de differentiaal van de coördinaten met algemene, niet noodzakelijk constante coëfficiënten is. Een eenvoudige vorm is te gebruiken in de speciale relativiteitstheorie, daar geldt  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ .

De algemene relativiteitstheorie gebruikt een metriek waarin de coëfficiënten van de differentiaalvorm met de aanwezige massa's samenhangen.

Bijzonder boeiende verschijnselen doen zich voor in de theorie van de ruimtelijke hyperbolische meetkunde bij de berekening van inhoud van veelvlakken. Ze werden voor een deel reeds door Lobachevsky afgeleid. Daar bij speelt de functie gedefinieerd door

$$\mathcal{L}(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin u| du$$

een centrale rol. Deze met de dilogarithme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

verwante functie heeft als Fourier reeks

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^2}.$$

Een artikel van J.Milnor over de geschiedenis van de hyperbolische meetkunde in de laatste anderhalve eeuw geeft meer details en onder meer de opmerking dat het maximum mogelijke volume van een hyperbolisch 3-simplex gelijk is aan

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\pi\right).$$

In een bespreking van het werk van W.P.Thurston, ter gelegenheid van het feit dat Thurston in 1982 een Fields Medal kreeg, door H.Reitberger vinden we een zeer leesbaar overzicht van het belang van de hyperbolische meetkunde in het moderne onderzoek van oppervlakken. Voor ieder gesloten oppervlak (compact en zonder rand) bestaat een (riemannse) metriek met constante kromming. Is de kromming positief, dan is de bijbehorende meetkunde lokaal elliptisch, de Euler-karakteristiek (een generalisatie van de uitdrukking 'aantal hoekpunten min aantal ribben plus aantal vlakken' voor veelvlakken) is positief. Zulke oppervlakken zijn van het type van de bol en van het projectieve vlak. Is de kromming 0 dan is ook de Euler-karakteristiek 0 en de bijbehorende meetkunde is lokaal euclidisch, voorbeelden zijn de torus en de fles van Klein. Is de kromming negatief, dan is ook de Euler-karakteristiek negatief, en de meetkunde

is lokaal hyperbolisch, voorbeelden zijn bollen met meer dan één hengel en analoge maar niet oriënteerbare oppervlakken. Omdat de Euler-karakteristiek alleen de positieve waarden 1 en 2 kan hebben en willekeurig veel negatieve waarden lijkt het hyperbolische geval het meest gevarieerd.

De euclische ruimte kan gevuld worden met kubussen, de hyperbolische ruimte laat meer opvullingen met regelmatige lichamen toe, hetgeen weer fraaie figuren oplevert, die ook in het boek van Thurston te vinden zijn.

Verder gaande van twee- naar hoger-dimensionale objecten komen nog meer facetten aan de orde. Natuurlijk kan men zich een driedimensionale variëteit zich indenken als een soort hyperoppervlak met dimensie drie gelegen in een vierdimensionale ruimte. Maar er is ook een geheel andere voorstelling mogelijk, namelijk als het complement van een kromme of een aantal krommen in de gewone driedimensionale ruimte. De meetkundige structuur van dit complement kan vaak voorzien worden van een hyperbolische structuur en zo dienen als een middel om knopen te classificeren.

Een artikel van W.P. Thurston bevat een aantal fraaie figuren van zulke topologische bouwwerken, die aanleiding geven tot het bedrijven van hyperbolische meetkunde.

De video NOT-KNOT geeft hier prachtige beelden van.

Als voorbeeld van recent onderzoek noem ik nog een artikel van N.H. Kuiper over betegelingen van vierdimensionale hyperbolische objecten.

Ook het meer recente werk van M. Gromov op het gebied van de hyperbolische meetkunde moet genoemd worden.

Met deze laatste opmerkingen wilden we alleen proberen duidelijk te maken dat de niet-euclidische meetkunde en wel in het bijzonder de oudste tak ervan de hyperbolische meetkunde, aanleiding geeft tot recent top-onderzoek in de zuivere wiskunde.

#### LITERATUUR

Een willekeurige keuze uit de literatuur over dit onderwerp.

Eerst enkele algemene leerboeken:

1. H.J.E. BETH, *Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag*, Groningen, 1929.
2. R.BONOLA, H.LIEBMANN, *Der Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig, 1908.
3. H.S.M. COXETER, *Non-euclidean Geometry*, Toronto, 1974<sup>2</sup>.
4. J.C.H. GERRETSEN, *Niet-euclische meetkunde*, Gorinchem, 1942.
5. M.J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, development and history*, San Francisco, 1974.
6. W.MAGNUS, *Noneuclidean tessalations and their groups*, New York, 1974.
7. L. RÉDEI, *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F.Klein*, Budapest, 1965.

Vervolgens enkele boeken die meer algemeen op de grondslagen van de meetkunde ingaan:

8. W. BLASCHKE, *Projective Geometrie*, Wolfenbüttel, 1948.
9. K. BORSUK, W. SZIELEW, *Foundations of Geometry, Euclidean and Bolyai-Lobachevskian Geometry, Projective Geometry*, Amsterdam, 1960.
10. H.S.M. COXETER, *Introduction to Geometry*, New York, 1969<sup>2</sup>.
11. H. FREUDENTHAL, *Raumtheorie*, Darmstadt, 1978.
12. L. HEFTER, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie*, Stuttgart, 1958.
13. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, 1956<sup>8</sup>.
14. F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Leipzig, 1909.
15. E.E. MOISE, *Elementary Geometry from an advanced Standpoint*, Reading, 1974<sup>2</sup>.
16. M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882.
17. W.P. THURSTON, *Three-dimensional Geometry and Topology*, Berkeley, 1991.
18. B.L. VAN DER WAERDEN, *De logische grondslagen der Euclidische meetkunde*, Groningen, 1937.

Enkele artikelen die specialistische delen, behandelen, waar we in onze tekst naar verwezen:

19. H.S.M. COXETER, The non-Euclidean symmetry of Escher's picture 'Circle Limit III', *Leonardo* 12, 19–26, 1979.
20. H.S.M. COXETER, The Trigonometry of Escher's Woodcut 'Circle Limit III', *The Mathematical Intelligencer* 18–4, 1996, 42–46, correctie in 19–1, 1997.
21. H. FREUDENTHAL, Zur geschichte der Grundlagen der Geometrie, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, derde serie 5, 1957, 105–142.
22. J. GRAY, The Foundations of Geometry and the History of Geometry, *The Mathematical Intelligencer* 20–2, 1998, 54–59.
23. N.H. KUIPER, *Hyperbolic 4 - Manifolds and Tesselations*, Publications Mathématiques, IHES, No 68, 1989.
24. J. MILNOR, Hyperbolic Geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 9–24, 1982.
25. H. REITBERGER, Geometrische Topologie, Dynamik und das Werk von William P. Thurston, *Jahrbuch Überblicke Mathematik* 17, 1984.
26. W.P. THURSTON, Three dimensional Manifolds, Kleinian Groups and hyperbolic Geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 357–382, 1982.



## Medewerkers aan de Vacantiecursus 1998

### DOCENTEN

Prof.dr. J.M. Aarts

wg. TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4, 2628 CD Delft,  
015 – 2785399, e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl  
hs. Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 – 2126448

Prof.dr. J. van de Craats

wg. UVA/OU/KMA, e-mail: jcr@euronet.nl  
hs. Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 – 457364

Prof.dr. A.W. Grootendorst

hs. Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 – 3232936

Prof.dr. F. van der Blij

hs. Ruysdaellaan 6, 3732 CC Bilthoven, 030 – 2283168

Prof.dr. J.H.M. Steenbrink

wg. Katholieke Universiteit Nijmegen, Vakgroep Wiskunde, Toernooiveld,  
6525 ED Nijmegen, 024 – 3653144, e-mail: steenbri@sci.kun.nl  
hs. W. Beermanstraat 25, 6523 RC Nijmegen, 024 – 3225385

Drs. A. Verweij

wg. TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4, 2628 CD Delft,  
015 – 2785808, e-mail: A.Verweij@twi.tudelft.nl  
hs. Noord Rundersteeg 10, 2312 VN Leiden, 071 – 5131028

Dr. A.J. van Zanten

wg. TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4, 2628 CD Delft,  
015 – 2785821  
hs. Vlietdijk 10, 2811 NB Reeuwijk, 0182 – 520196

CONTACTPERSONEN CENTRUM VOOR WISKUNDE EN INFORMATICA

Dr. M. Bakker

wg. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,  
1090 GB Amsterdam, 020 - 5924172, e-mail: Miente.Bakker@cwi.nl

Mevrouw S. Panka

wg. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,  
1090 GB Amsterdam, 020 - 5924009, e-mail: Simone.Panka@cwi.nl

## MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek*. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
- 6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatiethorie*. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Jongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassing van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roeveer (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roeveer (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.



## CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
- 35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.
- 36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.
- 37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus*. 1994.
- 38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.
- 39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989-1990. Mathematical structures in field theory*. 1996.
- 40 Vacantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen*. 1995.
- 41 Vacantiecursus 1996: *Chaos*. 1996.
- 42 H.C. Doets. *Wijzer in Wiskunde*. 1996.
- 43 Vacantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval*. 1997.
- 44 Vacantiecursus 1998: *Meetkunde, Oud en Nieuw*. 1998.

