CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31-20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31-20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Wiskunde en praktijk in historisch perspectief
Reader

G. Alberts, J. Schut (eds.)

Colofon
WISKUNDE EN PRAKTIJK IN HISTORISCH PERSPECTIEF
bestaat uit twee delen: 1. Syllabus; 2. Reader
De set is ontstaan uit het college 163111 'Geschiedenis van de wiskunde' doctoraalkeuzevak voor studenten wiskunde aan de Universiteit Twente, voor de vakgroep geschiedenis van de faculteit WMW gegeven door Gerard Alberts (KUN) met medewerking van Jan Schut (UT).

Amsterdam, zomer 1994

ISBN 90 6196 447 4
NUGI-code: 811

Inhoud

1. Inleiding

Over het nut van wiskunde bestaan zeer uiteenlopende opvattingen, om precies te zijn twee. Volgens de ene leert de wiskunde helder te denken, hetgeen niet alleen het verstand, maar door het verstand ook de samenleving ten goede zou komen. Volgens de andere ligt het nut van de wiskunde in de weergave van de werkelijkheid, cq van een bepaalde situatie. Beide opvattingen spelen hun rol als motief in het onderwijs, in wisselende sterkte en ieder in verschillende historische gestalten. De aandacht gaat hier speciaal uit naar de rol van de wiskunde in de techniek en de opleiding daartoe. De teksten zijn uitgekozen, omdat ze een bepaalde fase in de relatie tussen wiskunde en technisch onderwijs illustreren.
De teksten tonen een verschuiving in visies op het toepassen van wiskunde. Over toegepaste wiskunde is veel geschreven. Die algemene thematiek is hier toegespitst op de verhouding tussen wiskunde en toepassing in de techniek. Van Stevin tot Timman vertoont de geschiedenis van deze relatie een wentelgang van praktische wiskunde naar praktische wiskunde, tweemaal dezelfde kreet met een bepaald verschillende betekenis gezien wat er zich in de tussentijd afspeelde.

De eerste van beide opvattingen over het nut van wiskunde houdt in dat de wiskunde het verstand vormt: het verstand helpt richten op de wereld, meer receptief maakt voor de wezenstrekken van de werkelijkheid. De consequentie van deze opvatting is dat men zich zoveel mogelijk moet oefenen in het wiskundig denken om het verstand te scherpen. In de propaedeuse vindt men deze gedachte ten volle uitgewerkt. De andere opvatting zegt dat de wiskunde haar heilzame werk doet aan de kant van de werkelijkheid: er structuur in aanwijst, haar toegankelijk maakt voor het verstand. Dan zou men zoveel mogelijk werkelijke structuren moeten onderzoeken en leren kennen, speciaal van de gebieden die men vervolgens zou willen beheersen. Volgens deze tweede opvatting laat men het wiskunde-onderwijs liever over aan de werktuigbouwers, bedrijfskundigen en technologen.
Beide opvattingen zijn te verenigen door de eenvoudige vaststelling dat de wiskunde helpt in de bemiddeling tussen verstand en werkelijkheid, en - kon het mooier? - helpt naar beide kanten. Deze eenvoudige vaststelling kwam in de geschiedenis niet gemakkelijk tot stand. Zo kostte het ook moeite om het idee van de wiskundig ingenieur te formuleren. Het is een idee dat zich met geen van beide opvattingen goed verdraagt. Om tot en concept van de Wiskundig Ingenieursopleiding te komen, was dan ook nodig dat zowel de ene als de andere opvatting werden losgelaten. De feitelijke instelling van de opleiding vereiste nog veel meer inspanningen; die geschiedenis wordt in de syllabus nader belicht.

Hoe men wiskunde in concreto bruikbaar maakt, ook daarover verschilden de visies. Globaal kan men drie episodes onderscheiden: die van de praktische

wiskunde, voor 1800, die van toegepaste wiskunde van 1800 tot 1950 en die van het wiskundig modelleren sinds 1950.
De praktische arithmetiek, dat was het boekhouden, en de praktische geometrie, landmeten, bedreef men door directe uitoefening van de betreffende kunst. Praktische wiskunde was met andere woorden het uitoefenen van wiskunst. Weliswaar werd er destijds meer onder de mathematische wetenschappen begrepen dan tegenwoordig, toch is de opvatting van praktijk als simpelweg identiek met de wiskunst wel erg beperkt. Het was dan ook tegen deze opvatting van praktijk dat Stevin zich afzette: spiegheling en daet waren bij hem activiteiten met een eigen karakter. De tweede, de praktijk, was het belangrijkste, maar men mocht ze niet op een hoop gooien.
In de achttiende eeuw kwam de term toegepaste wiskunde op. Ook de uitdrukking gemengde wiskunde, tegenover ongemengde of pure, kwam voor. Rond 1800 werd het een min of meer eenduidig begrip met een duidelijk voorbeeld: de analytische mechanica van Lagrange. Toegepaste wiskunde was dan een op een bijzonder onderwerp toegespitste theorie: vanuit de wiskunde gezien enigszins vermengd met onzuivere begrippen, maar als geheel een onwankelbaar waar geachte theorie. Toegepaste wiskunde was in die zin zuivere wetenschap, geleid door zuiver rationele overwegingen. Dit is het ideaalbeeld van wiskunde dat Monge en De Gelder voor ogen stond. Dit is de wiskunde die men uitstekend als gedachtenoefening kan onderwijzen, erg praktisch was het niet.
Het viel Felix Klein, William White en anderen niet moeilijk te erkennen dat er een kloof bleef tussen theorie en praktijk, ze gingen echter om verschillende redenen niet zover dat ze het idee van toegepaste wiskunde relativeerden. Dat gebeurde pas bij Biezeno en Von Mises. De laatste maakte de wezenlijke stap te stellen dat soms toegegeven moet worden op wiskundige elegantie en correctheid terwille van het gewenste resultaat. Bij Timman lezen we dan dat het kriterium van geloofwaardigheid in de plaats komt van waarheid. Pas op dat moment had men zich bevrijd van het Lagrange-paradigma van de toegepaste wiskunde.

Von Mises' tijdschrift *ZAMM* was de plaats waar de technisch-wetenschappelijke onderzoekers zich permitteerden om te werken met partiële, voorlopige en niet-unieke theorieën. Theorie werd een relatief begrip. "De mechanica", dat was er altijd maar één geweest en die was waar. Maar in de praktijk van de techniek werkte men met allerlei theorieën van trilling, turbulentie, sterkte van materialen etc: voorlopige "waarheden" met beperkte houdbaarheid en een beperkt geldigheidsdomein. Toch waren deze theorieën onmiskenbaar wiskundig van karakter, net als "de mechanica", met als enorm voordeel dat eraan gerekend kon worden. Het was, bleek nu, niet de wiskunde geweest die waarheid had gebracht. De wiskunde had slechts bemiddeld tussen wereld en verstand. Kennelijk was het zo dat men in de wiskunde uitdrukte wat men van de wereld begrepen had. Deze *uitbeelding*, men zocht lang naar de geschikte naam, was het *wiskundig model.* In de Nederlandse literatuur was Van Dantzig de auteur die het wiskundig model expliciet besprak en introduceerde.

Het wiskundig modelleren is een bijzonder algemeen en krachtig concept. In de voorliggende teksten ligt de nadruk op de ontwikkelingen in de werktuigbouw die er naartoe voerden, in de chemie of de natuurkunde verliep de geschiedenis parallel; in de bedrijfskunde was de geschiedenis tezelfdertijd iets anders. Dit laatste vak dankt überhaupt zijn bestaan aan het wiskundig modelleren. Het resultaat is overigens volkomen vergelijkbaar, in welke traditie het ook staat. Het idee van wiskundig modelleren kreeg gestalte in de Wiskundig Ingenieursopleiding. Toen dit eenmaal gebeurd was, bij Timman, waren er nog een aantal slagen nodig voordat het concept in zijn volle algemeenheid gerealiseerd was - voordat bijvoorbeeld het modellenpracticum zijn plaats in de opleiding had gekregen -. De opeenvolging van redes van Veltkamp, Benders, Zandbergen en Seidel maakt het mogelijk de stapsgewijze completering van het beeld van de Wiskundig Ingenieur te volgen.

De belangrijkste teksten in deze bundel zijn die van Von Mises en van Timman. Daar zijn de grote conceptuele doorbraken te lezen. Echter, zonder de andere teksten zou duister blijven wat er doorbroken werd.
De teksten zijn veelal ontstaan als inaugurale rede of voorwoord. Behalve de eenvoudige oorzaak dat dit een van de weinige gelegenheden is dat wiskundigen zich uitlaten over hun werk, vindt dit zijn grond in de programmatische strekking van dergelijke redes. Het kan niet anders of het valt op dat de auteurs hun eigen beelden van de geschiedenis, van hun eigen voorgeschiedenis in het bijzonder, hebben.
De teksten zijn illustraties bij de syllabus als geheel, niet strikt gekoppeld aan de opeenvolgende hoofdstukken. Die van Timman komt bijvoorbeeld al in het eerste deel aan de orde, naast die van Stevin. Voor het overige bleek de chronologische volgorde van het ontstaan van de teksten in deze reader het duidelijkste beeld te geven.

2. Simon Stevin

Simon Stevin, Brugge 1548 - Den Haag 1620, kennen we allereerst door de zeilwagen. Het ritje dat hij Prins Maurits zou hebben aangeboden en de twee zeilwagens die in stadhouderlijk bezit zouden zijn gebleven, hebben een legende gevoed, die tot in de schoolboeken van vandaag vermeld wordt. Niet onbekend is verder zijn pleidooi voor het hanteren van decimale notatie: *De Thiende* (1585). Veel belangrijker is, dat bij hem de Nederlandse traditie van de mathematische vernufteling begint. Hij noemde zich nu eens ingenieur en dan weer wiskundige. Hij ontwierp molens en haven- en vestingwerken en schreef daar verhandelingen over.

Stevin onderwees Maurits in de mathematische wetenschappen en stelde later die lessen te boek, *Wisconstighe Ghedachtenissen* (1608), een nagenoeg compleet overzicht van de stand van het rekenen, de meetkunde, theorie en praktijk van statica en hydrostatica van zijn tijd. In opdracht van Maurits stelde hij een programma op voor de ingenieursschool die in 1600 aan de Leidse universiteit verbonden werd: *Duytsche Mathematicque*, dat wil zeggen wiskunde onderwezen in de landstaal in plaats van in het Latijn. Hier begon voor Nederland het technisch hoger onderwijs: men leerde er wijnroeien, vestingbouw, havenbouw, werktuigbouw, landmeetkunde, voorlopers van de moderne technische wetenschappen, in het bijzonder van de militaire en civiele techniek, de ijk en de geodesie. Simon van Merwen, Ludolf van Ceulen en later de beide Frans van Schootens zouden er doceren; het is duister waarom Stevin zelf nooit in Leiden benoemd is.

Bijzonder aan Stevin is dat hij ook nog eens expliciet nadacht over de verhouding van theorie en praktijk in de wiskundige wetenschappen. Hieronder volgen twee passages waarin hij op deze kwestie ingaat: het voorwoord van de *Weeghdaet* en een stukje uit het curieuze *Wijsentijt*.

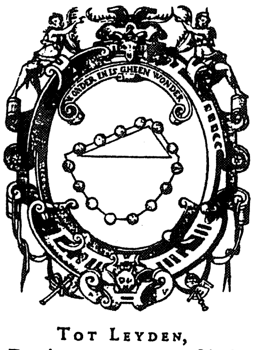
De Weeghdaet werd in 1586 gepubliceerd als tweede deel van drie in één band, met *De Beghinselen der Weeghconst* en *De Beghinselen des Waterwichts*. De praktijk, de daet, hoort het doel te zijn van theorie, spiegheling, daarom laat Stevin op de *Weeghconst* onmiddellijk *De Weeghdaet* volgen.

Spiegheling en daet moeten echter beslist uit elkaar gehouden worden, voegt Stevin er in het tweede fragment aan toe. Praktijk is wel het perspectief waarin spiegheling zinvol is, maar niet iedere theoreticus hoeft zich persoonlijk met de praktijk in te laten.

Er was een tijd dat de mens over alle kennis beschikte, meent Stevin. Deze Wijsentijt zou terug kunnen keren indien de mensen weer wijs werden, wiskunde zouden leren en zich in de voortreffelijke Nederlandse taal zouden uitdrukken. De *Wijsentijt*, waaruit deze passage 'Vant mengen van spiegheling en daet' is gelicht, is een paragraaf in de inleiding van *Vant Eertclootschrift*, onderdeel van de *Wisconstighe Ghedachtenissen* uit 1608.

Beide fragmenten zijn overgenomen uit *The Principle Works of Simon Stevin* (5 Vols), Ernst Crone e.a. (eds.) Amsterdam, Swets&Zeitlinger, 1955-1966.

DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.



Tot Leyden,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.

Simon Steuin wenſcht
DEN BVRGMEESTERS
ENDE REGIERDERS DER
STADT NVRRENBERG
VEEL GHELVCX.

GHELIICT onnutte coſt vvaer, een groote ſtercke grondt te legghen, die een ſvvaer gheſticht draghen can, ſonder eintlick eenich ghebau daerop te vvillen brenghen; Alſoo is de * ſpiegheling inde be- *Theoria.* ghinſelen der conſten verloren arbeydt, daer t'einde totte*daet niet en ſtreċt. Ghelijck oock *Effectum* na de natuerlicke oirden, dien grondt voor t'opperghebau gaedt, alſoo deſe ſpiegheling voor huer daet. Dit ſoo ſijnde, ende vooren beſchreuen hebbende de Beghinſelen der Weeghconſt,ſoo iſt vouglick de WEEGHDAET *Praxis.* te volghen; Oock my niet onbetamelick, de ſelue an ulieder E. Heeren toe te eyghenen. ende dat om drie beſonder redenen: D'eerſte, dat haer * voorſtellen niet alleen onghehoort, *Propoſitiones.* maer oock nut ſijn. D'ander,dat haer voordering van nerghens merckelicker te vervvach-

SIMON STEVIN WISHES THE BURGOMASTERS AND RULERS OF THE CITY OF NUREMBERG MUCH HAPPINESS.

Just as it would be useless to lay large and strong foundations which can support a heavy edifice without ultimately wishing to erect any building thereon, thus in the elements of the arts theory is lost labour when the end does not tend to practice. Just as, in the natural order of things, the foundation precedes the building, thus theory precedes practice. This being so, it is appropriate that, having described the Elements of the Art of Weighing hereinbefore, I should follow this up with the Practice of Weighing. Nor is it improper for me to dedicate same to Your Worships, such for three special reasons. The first, that its propositions are not only unheard-of, but also useful. The second, that its furtherance was to be expected from nowhere more clearly than from those with whom

4

ten en ſcheen, dan vande ghene daer de Conſten inde grootſte acht ſijn, vvaer af niet alleen en ghetuyghen de ſchriften veler gheleerden, maer oock ſelfs u onderſatens conſtighe* daden, verſpreydt in allen houcken des vveerelts. De laetſte ende voornaemſte, dat ick my duer ſulcx toecommende voorthelpers hoopte te bereyden, tot ſeker daden mijns voornemens; Met vvelcke eindelicke meining hier eindende, vvenſch V. H. alle voorſpoet ende vvelvaren. Vyt Leyden in Oogſtmaendt des 1586ᵉ. Iaers.

Effecta.

ANDEN

the arts are held in the greatest esteem, to which is borne witness not only by the writings of many scholars, but also by the ingenious works of your subjects, scattered in all parts of the world. The last and most important, that in this way I hope to gain future collaborators, for carrying out my projects. With which final thought I here conclude, and wish Your Worships all prosperity and health. From Leyden, in Harvest Month of the year 1586.

Theoriæ & praxis.

VANT MENGHEN DER *SPIEGHELING EN DAET.

WAntter int ſtick des oirdens noch een verſchil valt vant menghen der
ſpiegheling en daet,ſoo moet ick daeraf mijn ghevoelen ſeggen ,eerſt
haer beteyckening verclarende voor de ghene diet onbekent mocht ſijn.
Spiegheling is een verdochten handel ſonder natuerlicke ſtof,ghelijck onder
Per Hypoteſin. anderen ſijn de Spieghelinghen des Spieghelaers *Euclides*, handelende * deur
ſtelling van grootheden en ghetalen, maer elck gheſcheyden van natuerlicke
ſtof. Daet is een handel die weſentlick met natuerlicke ſtof gheſchiet,als lant
en wallen meten,de menichte der roen of voeten tellen diederin ſijn,en dier-
ghelijcke. T'beſluyt vandevoorſtellen der Spiegheling is volcommen , maer
der daet onvolcommen: Als by voorbeelt de Spiegheling vint en bewijſt dat
Perpendicularu. den helft des uytbrengs vande * hanghende en gront eens wiſconſtich drie-
houcx,volcommelick gheeft het inhoudt des plats ſonder eenich gebreck of
overſchot: Maer een weſentlick driehouck van lant of ander glatter ſtof da-
delick ghemeten ſijnde, t'beſluyt is daer af onvolcommen,eensdeels om dat
wy gheen langde ſoo nau meten en connen,dattet gheen duyſentſte deel der
dickte eens haers en ſchilt,of al waert by gevalle heel effen,tis onbewijſelick.
Ten anderen om dat gheen natuerlicke linien ſoo heel recht,noch natuerlic-
ke vlacken ſoo heel plat en ſijn,als de wiſconſtighe bepalinghen vereyſſchen,
of al waren ſy ſoo heel recht en plat, ten is niet bewijſelick. De eyghenſchap
en t'eynde der Spiegeling is datſe verſtreckt tot ſeker gront vande manier
der wercking inde daet,alwaermen deur nauwer en moeyelicker toeſicht de
volcommenheyt der Spiegheling ſo na mach commen,als de ſaecks einde tot
Smenſchen ghebruyck vereyſcht.

Mathematicas artes. Hier uyt is te verſtaen,dat wanneer ſommighe de * Wiſconſten van onvol-
commenheyt beſchuldighen , deur dien veel dadelicke werckinghen niet
heel effen uyt en commen,datter kennis gebreeckt des onderſcheyts tuſſchen
Mechanicam. Spiegeling en Daet,tuſſchen Wiſconſtighen en tuychwerckelicken handel:
Want de Daet of * tuychwerckelicken handel om de boveſchreven rede-
nen altijt onvolcommen moet weſen.

Deſe twee deelen Spiegeling en daet ſijn ſo verſcheydē,dat menich menſch
hem t'eenemael tottet een begheeft , ſonder van t'ander kennis te hebben,
Vniverſitatibus. ghelijck menich leeraer met ſijn toehoorders inde * ghemeen ſcholen ghe-
Elementis. beurt, die hun gheduerlick in Spieghelingen oeffenen,als in *Euclides* * begin-
ſelen der Meetconſt,ſonder dadelick te meten landen, wallen, of vaten, of yet
anders te doen daer de Daet in beſtaet : En weerom verkeert ſo vintmen da-
delicke Lantmeters,welcke alle reghels dieſe beſighen gelooven, of toeſtaen
waer te weſen,ſonder inde Spiegeling t'onderſoucken de oirſaken en bewijs:
Ia ſommighen en weten niet datter ſulcke oirſaken en bewijs af ſijn.

Angaen-

ON THE COMBINATION OF THEORY AND PRACTICE.

Because, in the matter of orderly exposition, opinions differ with regard to the combination of theory and practice, I feel bound to give my view about this, first explaining their meaning for those who are not acquainted with it. Theory is a fictitious operation without natural material, such as *e.g.* the theories of the theoretician *Euclid,* which operate by the assumption of quantities and numbers, but each of them without connection with natural material. Practice is an operation which essentially takes place with natural material, such as the measurement of land and ramparts, counting the number of rods or feet contained therein, and the like. The conclusion of theoretical propositions is perfect, but that of practical propositions is imperfect. Thus, for instance, the theory finds and proves that half the product of the height and the base of a mathematical triangle perfectly gives the area of the plane surface, without any deficiency or surplus; but when a real triangle of land or smoother material is measured actually, the conclusion is imperfect, in the first place because we cannot measure any length so exactly that it does not differ by one thousandth part of a hair's breadth, or even if it is quite exact, it cannot be proved. In the second place because no natural lines are quite so straight nor natural plane surfaces quite so flat as the mathematical definitions require, or even if they are quite straight and flat, it cannot be proved. The property and the end of theory is that it furnishes a sure foundation for the method of practical operation, in which by closer and more painstaking care one may get as near to the perfection of the theory as the purpose of the matter requires for the benefit of man.

From this it is to be understood that if some people accuse the mathematical sciences of imperfection, because many practical operations do not produce results which are quite exact, they lack knowledge of the difference between theory and practice, between mathematical and mechanical operations, for practice or mechanical operation on the above account must always be imperfect.

These two sections, theory and practice, are so different that many people apply themselves altogether to the one, without being acquainted with the other, as is the case with many lecturers and their audience in the universities, where they constantly study theories, *e.g. Euclid*'s elements of geometry, without actually measuring lands, ramparts or vessels or doing anything else in which practice consists. And, conversely, practical surveyors are to be found who take on trust all the rules they apply or regard them as true, without examining the causes and the proof in the theory; nay, some do not even know that such causes and proofs exist.

Angaende ettelicke ſegghen de Spiegheling ſonder Daet onnut te weſen, het ſchijnt datmen de ſaeck met beter onderſcheyt ſoude meughen inſien. Om hier af mijn ghevoelen te verclaren, ick ſegh by voorbeelt aldus: Datmen t'werck eens aerbeyders die boomen int boſch afhout, ſoude voor onnut achten, om dat hyder ſelf gheen huyſen, ſchepen, molens, ſluyſen, tonnen, kiſten, beelden, en dierghelijcke me en maeckt, dat en waer openbaerlick niet wel gheſeyt, want hoewel ſulcke wetenſchap in een menſch looflick is, nochtans ghemerckt hy met boomen af te houwen, an veel ander ſtof levert, om elck hem in ſijn ambacht te oeffenen, ſoo en is ſijn aerbeyt niet te verachten: Maer dat hy die boomen afhieuwe om te laten verrotten, ſonder nut daer af te verwachten, dat waer dwaſelick ghedaen: En alſoo iſt oock mette Spieghelaers in vrye conſten, ſy connen den Doenders ſtof leveren en voorderlick ſijn, ſonder ſelf Doenders te weſen: Als den Spieghelaer *Euclides*, die wy niet en bevinden Doender gheweeſt te hebben, heeft nochtans voorſtellen beſchreven den dadelicken Boumeeſters, Landtmeters, en ander doenders ſeer voorderlick: Den Spieghelaer *Ptolemeus* en meer ander die gheen dadelicke Stierlien en waren, hebben nochtans reghelen beſchreven den dadelicken Stierlien op groote Zeevaerden, en ander hun daer in oeffenende ſeer nut: Ia ſulcx dat de dadelicke Stierlien ſelf ſich voor meeſters achten, als ſy verſtaen de reghelen door ſulcke Spieghelaers beſchreven, hoewelſe nochtans gheen dadelicke Stierlien en waren. Daerom een Spieghelaers Spieghelinghen die ander Doenders te ſta commen, en ſijn niet onnut al en is hy ſelf gheen Doender.

Tot hier toe deur ettelicke omſtandighen verclaert hebbende wat Spiegeling en Daet beteyckent, ſoo is te weten dat d'oude Wiſconſtenaers met oock ettelicke nieuwe, van yder dier twee deelen onvermengt int beſonder handelen, welcke oirden wy daert te pas comt oock volghen: Doch wantter by ettelicke een ander ghevoelen is, die Spiegheling en daet met malcander menghen, om teen mettet ander t'ſamen te leeren, ſo moet ick om breeder reden mijns doens te verclaren, daer af mijn ghevoelen ſegghen.

Voor al ſoo iſt te weten dat der Menſchen natuerlicke gheneghentheden angaende de Daet ſeer verſcheyden ſijn, waer toe noch helpen de oirſaken die deſen anders ontmoeten en dringhen als dien: Den eenen heeft natuerlicke luſt met eenighe dringhende oirſaken totte Sterckte bou, en dinghen de crijch angaende: Den anderen tot Landtmeten: De derde tot Wijnſchroon: De vierde tot ſaken de groote Zeevaerden belanghende: De vijfde totten * Huyſbou: De ſeſte totte Spiegheling alleen: De ſevende tot ettelicke van deſe, of tot altemael, met noch oneyndelicke ander. Nu alſo een der voornaemſte eynden vande beſchrijving der vrye conſten ſtreckt, om daer deur te crijghen veel menſchen, die ten ghemeenen oirboire met lichticheyt gheraken ter kennis van t'ghene daer ſy hun toe begheven, ſoo willen wy eens overlegghen, of dat inde leering gheſchien can door vermenging des daets mette Spiegheling, tot welcken eynde ick aldus ſegh: Alſmen onder ſpieghelighe voorſtellen ettelicke des daets vermengt, en dat van een afcomſt ghetrocken uyt de oneyndelicke menichte diemen daer af beſchrijft, de ſelve dadelicke voorſtellen en ſullen miſſchien niet ſijn van die afcomſt daer den leerlinck na tracht: Als by voorbeelt, datmen inde Meetconſt tuſſchen de ſpieghelighe voorſtellen eenighe beſchrijft des daets, waer in voorbeelden commen neem ick der meting deur het * ſchuyfcruys van ongherakelicke veynſters en pylaren van gheſtichten; Maer t'can ghebeuren dat den leerlinck tot ſulcke afcomſt van Meetdaet gheen luſt en ſal hebben, denckende miſſchien dattet inde Daet luttel ghebruycx heeft, oock gheen ghenouchſaem ſeker-

Architecturam.

Radium.

As regards the assertion of some people that theory without practice is useless, it would seem that this matter should be considered more critically. To set forth my view about this, I say, for instance, as follows: it would evidently not be right to regard the work of a labourer, who cuts down trees in the wood, as useless because he does not personally make houses, ships, mills, canal-locks, barrels, chests, sculptures, and the like therewith, for although such knowledge is praiseworthy in a man, yet considering that by cutting down trees he supplies many others with material with which each of them can pursue his trade, his work is not to be despised. But if he were to cut down those trees to let them rot, without expecting any benefit of them, that would be acting foolishly. And thus it is also with the theoreticians in the liberal arts: they are able to furnish the practicians with material and to be of use to them, without themselves being practicians. Thus the theoretician *Euclid,* whom we do not find to have been a practician, nevertheless described propositions which are of great use to practical architects, surveyors, and other practicians. The theoretician *Ptolemy* and several others, who were no practical navigators, nevertheless described rules which are of great use to practical navigators during long voyages and to others pursuing this art, even to the extent that practical navigators consider themselves masters when they are conversant with the rules described by such theoreticians, although nevertheless the latter were no practical navigators. Accordingly the theories of a theoretician which are of use to others who are practicians are not useless, even though he himself is no practician.

Having so far explained by means of some ample considerations what is the meaning of theory and practice, I would say that it is to be noted that the ancient mathematicians as well as some modern ones treat of each of these two sections in particular without combining them, an order which we also follow where this is proper. But because a different view is held by some people, who combine theory and practice, in order to teach the two things together, I have to give my views about this, so as to explain the reason of my conduct more fully.

Before all it is to be noted that people's natural inclinations towards practice vary widely, a fact which is also promoted by the causes, which occur to and impel some people in a different way from others. One man has a natural liking, with some causes impelling him thereto, for the art of fortification and things concerned with war, another for surveying, a third for displacing barrels of wine, a fourth for matters concerned with great voyages, a fifth for architecture, a sixth for theory alone, a seventh for some or all of them, with an infinite number of others as well. Now since one of the main ends of the description of the liberal arts is thus to get many people who, for the benefit of all, easily acquire the knowledge of the subject to which they apply themselves, we will consider for a moment whether in instruction this can take place by a combination of practice and theory, to which end I say as follows: If among theoretical propositions one included some practical ones, and that of a species chosen from the infinite number described, these practical propositions may not be of the species the pupil is aiming at; thus, for instance, if in geometry among the theoretical propositions one describes some practical ones, in which there occur instances — I assume — of measurements, by means of the cross-staff, of inaccessible windows and columns of buildings. But it may be that the pupil has no liking for this species of practical measurement, thinking perhaps that it is little used in practice nor produces

kerheyt, om op ſulcke gevonden maten van pylaren in ander ghebou te werck tegaen, of ander invallen die hem meughen te voor commen: Boven dien en
Spedem. ſal hyder niet vinden * d'afcomſt daer hy na tracht: Sulcx dat by aldien hy al wil verſtaen watter int bouck is, ſal moeten leeren dat hy niet en begheert te weten. Maer de Spiegheling als een oirdentlick geketent werck alleen beſchreven ſijnde, en den leerlinck die verſtaende, ſy verſtreckt hem tot ghemeene gront, om innerlick te begrijpen alſulcken deel der Daet als hy uyt verſcheyden beſchreven Daden int licht uytgaende, na ſijn behaghen verkieſen ſal.

Voor beſluyt, ick heb mijn ghevoelen verclaert hoet ſchijnt datmen de ſaeck an mocht legghen, om metter tijt weerom te gheraken tot ſulcke groote wetenſchappen alſſer inden Wyſentijt gheweeſt ſijn, ghelijck t'voornemen was. En met opſicht van ſulcken gront, ſal ick de volghende handelinghen beſchrijven.

EERSTE BOVCK DES
EERTCLOOTSCHRIFTS
EYNDE.

sufficient certainty to proceed for another building on the basis of the measures of columns thus found, or for other reasons that may occur to him, while moreover he will not there find the species which he is aiming at, so that if he wants to understand all that the book contains, he will have to learn what he does not wish to know. But if the theory alone is described as a systematic chain of reasoning and if the pupil understands it, it will serve him as a general basis for grasping mentally any part of practice which he chooses at his own pleasure from different descriptions of practice that are published.

To conclude, I have set forth my view as to how it seems one might set out to attain gradually to such great learning again as existed in the Age of the Sages, as I intended to do. And with respect to this basis I will write the following treatises.

3. Gaspard Monge

Gaspard Monge, 1746-1818, was *de* inspirator van het wetenschappelijke technisch hoger onderwijs. De École Polytechnique werd in 1795 naar zijn idee ingericht en dat idee behelsde twee componenten. De basisgedachte van de Polytechnique was het inrichten van een propaedeuse in de wis- en natuurkunde voorafgaand aan de technische top-opleiding. Men leerde daar goed denken, wiskundig denken. Deze propaedeuse is het onveranderlijk kenmerk van alle polytechnisch onderwijs sindsdien, ook dat aan de Duitse Technische Hochschulen. De tweede component van Monge's idee was de centrale rol die hij toekende aan de beschrijvende meetkunde - de praktische geometrie die hij op hoger plan had gebracht. Deze zou zowel oefenen in helder denken, als een gemeenschappelijke taal bieden aan ontwerper (ingenieur), supervisor en uitvoerder van een technisch object. Het motief: welvaart, de Franse natie te bevrijden uit haar afhankelijkheid van de buitenlandse nijverheid.
De Géometrie Descriptive is na anderhalve eeuw van het programma afgevoerd, de propaedeuse is gebleven.
J.L. Lagrange was in de beginjaren samen met Monge directeur van de École Polytechnique. Diens analytische mechanica stond niet alleen, naast de beschrijvende meetkunde, model voor de rol van de wiskunde in het technisch hoger onderwijs, ze was het voorbeeld van toegepaste wiskunde ook buiten de technische sfeer. Naar dit voorbeeld stelde Monge zich ook de werking van zijn meetkunde voor, maar er bleef - niet ongewoon voor toegepaste wiskunde in de negentiende eeuw - een grote discrepantie tussen wat de wiskundigen als de aantrekkelijke finesses van het vak beschouwen en wat de technici in staat zijn ervan te absorberen. Het belangrijkste is de invloed van de wiskundige denkwijze.
Monge werd jong leraar aan de militaire academie in Mézières en al op zijn 24ste hoogleraar in wis- en natuurkunde aldaar. Monge was een vooraanstaand figuur in de Revolutie van 1789 en het vervolg, onder meer bij de oprichting van de École Polytechnique en in publieke ambten.
De tekst is het voorwoord van de beroemde *Géométrie Descriptive*, gekopieerd uit de tweede editie, Paris: Klostermann, 1811.

GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE,

Par G. MONGE, de l'Institut des sciences, lettres et arts, de l'École Polytechnique; Membre du Sénat conservateur, Grand-Officier de la Légion d'honneur et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

Avec un Supplément, par M. HACHETTE, Instituteur de l'Ecole Impériale Polytechnique, Professeur-Adjoint de la Faculté des Sciences de Paris.

PARIS,
J. KLOSTERMANN fils, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, rue du Jardinet, n°. 13.
M. DCCC. XI.

PROGRAMME.

Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut, premièrement, diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu'à ce jour, et accoutumer les mains de nos artistes au maniement des instrumens de tous les genres, qui servent à porter la précision dans les travaux, et à mesurer ses différens degrés : alors les consommateurs, devenus sensibles à l'exactitude, pourront l'exiger dans les divers ouvrages, y mettre le prix nécessaire; et nos artistes, familiarisés avec elle dès l'âge le plus tendre, seront en état de l'atteindre.

Il faut, en second lieu, rendre populaire la connaissance d'un grand nombre de phénomènes naturels, indispensable aux progrès de l'industrie, et profiter, pour l'avancement de l'instruction générale de la nation, de cette circonstance heureuse dans laquelle elle se trouve, d'avoir à sa disposition les principales ressources qui lui sont nécessaires.

Il faut enfin répandre, parmi nos artistes, la connaissance des procédés des arts, et celle des machines qui ont pour objet, ou de diminuer la main-d'œuvre, ou de donner aux résultats des travaux plus d'uniformité et plus de précision; et, à cet égard, il faut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères.

On ne peut remplir toutes ces vues qu'en donnant à l'éducation nationale une direction nouvelle.

C'est, d'abord, en familiarisant avec l'usage de la Géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile, et pour eux et pour l'état, que ceux même qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour donner un plus grand prix à leur travail.

Cet art a deux objets principaux.

Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse.

Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties.

Le second objet de la Géométrie descriptive, est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu; et, parce qu'elle est toujours appliquée à des objets susceptibles de la plus grande évidence, il est nécessaire de la faire entrer dans le plan d'une éducation nationale. Elle est non-seulement propre à exercer les facultés intellectuelles d'un grand peuple, et à contribuer par là au perfectionnement de l'espèce humaine, mais encore elle est indispensable à tous les ouvriers dont le but est de donner aux corps certaines formes déterminées; et c'est principalement parce que les méthodes de cet art ont été jusqu'ici trop peu répandues, ou même presque entièrement négligées, que les progrès de notre industrie ont été si lents.

On contribuera donc à donner à l'éducation nationale une direction avantageuse, en familiarisant nos jeunes artistes avec l'application de la Géométrie descriptive aux constructions graphiques qui sont nécessaires au plus grand nombre des arts, et en faisant usage de cette Géométrie pour la représentation et la détermination des élémens des machines, au moyen desquelles l'homme, mettant à contribution les forces de la nature, ne se réserve, pour ainsi dire, dans ses opérations, d'autre travail que celui de son intelligence.

Il n'est pas moins avantageux de répandre la connaissance des phénomènes de la nature, qu'on peut tourner au profit des arts.

Le charme qui les accompagne pourra vaincre la répugnance que les hommes ont en général pour la contention d'esprit, et leur faire trouver du plaisir dans l'exercice de leur intelligence, que presque tous regardent comme pénible et fastidieux.

Ainsi, il doit y avoir à l'École normale un cours de Géométrie descriptive.

Mais comme nous n'avons, sur cet art, aucun ouvrage élémentaire bien fait, soit parce que, jusqu'ici, les savans y ont mis trop peu d'intérêt, soit parce qu'il n'a été pratiqué que d'une manière obscure par des personnes dont l'éducation n'avait pas été assez soignée, et qui ne savaient pas communiquer les résultats de leurs méditations, un cours simplement oral serait absolument sans effet.

Il est nécessaire, pour le cours de Géométrie descriptive, que la pratique et l'exécution soient jointes à l'audition des méthodes.

Ainsi les Élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques de la Géométrie descriptive. Les arts graphiques ont des méthodes générales, avec lesquelles on ne peut se familiariser que par l'usage de la règle et du compas.

Parmi les différentes applications que l'on peut faire de la Géométrie descriptive, il y en a deux qui sont remarquables, et par leur généralité, et par ce qu'elles ont d'ingénieux : ce sont les constructions de la perspective, et la détermination rigoureuse des ombres dans les dessins. Ces deux parties peuvent être considérées comme le complément de l'art de décrire les objets.

4. Jacob de Gelder

Jacob de Gelder, 1765-1848, was in de wiskunde autodidact. Hij was van leerling op een "Franse school" leraar geworden en zocht zelf zijn wiskundige kennis bij elkaar. Al snel doceerde hij ook wiskunde en aanverwante vakken en in 1793 werd zijn eerste wiskunde-schoolboek gepubliceerd: *Grondbeginsels der Cijfferkunst*. Een reeks boeken zou volgen.
In de Franse tijd gaf hij onder meer wiskundelessen aan de school van de pages van koning Lodewijk Napoleon en vanaf 1805 aan de Haagse Maatschappij Diligentiâ: een instituut dat het onderwijs in de wiskunde aan de Nederlandse scholen wilde bevorderen en daartoe de kinderen van haar leden met het vak bekend wilde maken. De Gelder verhuisde rond 1810 naar Amsterdam en had de hand in de opleving van het Wiskundig Genootschap.
Toen na de onafhankelijkheid van 1813 Willem I het plan, dat al door Lodewijk Napoleon was overwogen, om één academie voor militair kader in te stellen, in Delft ten uitvoer bracht, werd De Gelder er benoemd tot leraar voor de wiskunde. Na een succesvolle start raakte hij in conflict met Voet, de commandant van de school, over de stijl en de omvang van het wiskundig onderricht aan de kadetten. De Gelder richtte zich naar het voorbeeld van de École Polytechnique van Monge, maar kreeg in Delft niet zijn gelijk. In 1819 werd hij benoemd tot buitengewoon, en in 1924 tot gewoon hoogleraar in Leiden. Daar bemoeide hij zich wel met de instelling van het Industrie-Kollegie, in 1826 naar zijn advies ingericht, maar de eigenlijke Polytechniek-gedachte zou pas later door anderen gerealiseerd worden met de (civiele) Koninklijke Akademie in Delft, 1843, na De Gelders emeritaat in 1840.
Jacob de Gelder roerde hij zich in tal van publieke zaken en genoot aanzien als wiskundige, hoewel hij er geen bijzondere wiskundige resultaten van hem bekend zijn gebleven. Wel heeft hij een lange reeks leerboeken en reflecties op het onderwijs in de wiskunde op zijn naam staan. Zijn betekenis is die van verbreider van het vak en dan in het bijzonder volgens een visie als die van Monge: wiskunde omdat men er helder van leert denken. In de volgende tekst, een passage uit de *Redevoering over den ware aart en voortreffelijkheid der Wiskunst*, waarmee hij in 1805 de lessen in Diligentiâ opende, zet hij precies dit motief uiteen: de intrinsieke waarde van de wiskunde boven haar nut voor andere vakgebieden. (uitg. Den Haag; Isaac van Cleef, 1806)

REDEVOERING

OVER DEN WAREN AART EN DE VOORTREFFELIJKHEID

DER

WISKUNST,

AANGEWEZEN IN DERZELVER INVLOED OP ALLE MENSCHELIJKE

KUNSTEN

EN

WEETENSCHAPPEN.

UITGESPROOKEN

OP DEN 26sten VAN SLAGTMAAND 1805,

IN DE

MAATSCHAPPIJ,

VOOR NATUUR- EN LETTERKUNDE,

ONDER DE SPREUK:

DILIGENTIÂ.

Ter gelegenheid van het openen der WIS, NATUUR- EN STERREKUNDIGE LESSEN, welke, onder opzigt van Bestuurderen, aan de Zoonen en Pupillen van de Leden deezer Maatschappij gegeeven worden.

DOOR

JACOB DE GELDER,

Mathematicus in den Hage.

IN DEN HAAG,

BIJ DE ERVEN VAN ISAAC VAN CLEEF,

1806.

Ik vertrouw, geachte Medeleden! zo veel gezegd te hebben, dat, al ware U de *Wiskunst* in alles geheel onbekend geweest, Gijl. toch begrijpen zoudt, waar toe haare bedoeling zig uitſtrekt. Het wordt nu tijd, dat ik haare nuttigheid en invloed op andere Weetenſchappen begin aan te wijzen.

I I.

Beſchouw ik deeze talrijke menigte van Toehoorers, welke 's weekelijks met zoo veel geestdrift naar deeze plaats ijlen, om de Voordragten, Verhandelingen, Proeven, en Demonſtratien der werkende Leden deezer Maatſchappij bij te woonen, dan zou ik Uliederkunde het billijke recht niet doen wedervaren, wanneer ik in het breede over het nut en den invloed der Wiskunde, op Natuurlijke Historie, Natuurkunde en Sterrekunde wilde uitwijden, en de menigte van gevallen wilde optellen, in welke Natuur-, Sterre-, Aardrijkskunde, ja zelfs de Natuurlijke Historie de hulp en onderſteuning der *Wiskunst* behoeft. Toen nog de Natuurkunde met den ſchors der *dogmata* en heilige magtſpreuken omkorst was, en men de Natuurverſchijnzelen, geen één uitgezonderd, zoo gereedelijk door de *Vires et Facultates Occultæ* wist te verklaaren en de Natuur - Verklaarers raasden, in woorden, die zij zelve niet verſtonden; toen kon men de behulpzaame hand der *Wiskunst* ontbeeren. Verkregen aanzien, gegrond, of op toevallige omſtandigheden, of op de gave van welſprekenheid en uitterlijk ſchitterend, maar door *ſophistery*, verdorven vernuft, regelden de wetten der Natuur, en verklaarden de verſchijnzels der Waereld, niet van de Waereld, waarin wij aanwezig zijn, maar van de Waereld,

welke in het verdorven verſtand van de Wijzen van dien tijd alleen haar denkbeeldig beſtaan vinden kon, en zulk eene Natuurkunde behoefde geene hulpmiddelen; maar toen ROGER BACON, tegen het begin der 16. Eeuw, door de toverkragt van zijn gezond verſtand, dien ſchors wist te verbrijzelen en de waare Natuurkunde uit den chaos der dwaalingen deedt te voorſchijn treeden, en men den Man, welke een Boek *de nullitate Magiæ, over de nietigheid der Toverkunst*, geſchreeven hadt, voor een' Tovenaar hieldt, om dat hij, onder anderen, geleerd hadt, dat men, om de Natuur te leeren kennen, de Natuur moet ondervraagen en raadplegen, de eerſte ſchemering van den dageraad van waarheid en gezond menſchenverſtand deedt aanbreken, veranderde alles van gedaante; nu was men zoo ſpoedig met de verklaaring der verſchijnzelen niet gereed, eene opgeraapte drogreden, waarïn niets dan de *cadans* van uitgeſproken klanken te vinden was, kon nu niet meer volſtaan: men moest de Natuur volgen, ondervraagen en raadpleegen, en zij, als eene getrouwe Moeder haarer Kinderen, deed ons, in de trouwe involging van haaren raad, waarheid vinden en kennis inzamelen. Maar men had hulpmiddelen noodig, om op dien weg met zekerheid te kunnen voordwandelen, eenen gids, die onzen gang beſtuurde! — Ontwaak nu uit den ſlaap des doods, gij groote Meetkundigen van het waereldberoemd Griekenland! de grillige fortuin eerbiedigde uwe voordbrengzels, die zij aan de verſlinding des tijds, en den moedwil der domheid en des bijgeloofs ontrukte; gij hebt zints eeuwen de hulpmidde-

Jen voorbereid, welke ons in de geheimen der Natuur moeten inleiden! Ziet met vergenoeging, ARCHIMIDES! dat BACON den taak opvat, dien gij zo gelukkig begon, maar welker voleinding de gouddorst van een Romeinsch Soldaad verijdelde! Ziet uwen roem, Gij APOLLONIUS en DIOPHANTUS met dien van den onfterflijken NEWTON verëenigd! juicht over de mislukking van den laatften ftorm, die vernuft en verbeeldingkragt op de fterkte van het gebied van *Wis-* en *Meetkunst* waagde, toen DESCARTES, als eene laatfte pooging, met miskenning van een hulpmiddel, dat hij met zulk eenen rijkdom van vindingen verbeterd had, de draaikringen verzon, welke NEWTON, tot het niet, waar uit zij geboren waren, deed wederkeeren. Verheug U, gij groote Mannen! in den roem der onfterflijkheid; maar nog meer in de uitbreiding uwer kunst. —— Het recht van landëigendom deed in *Egypten* uwe kunst ontftaan; maar de behoefte van weetenfchap en kennis vermeerdert de pogingen; en elke dag geeft nieuwe bijdragen tot den fchat, dien gij ons naliet.

Wat zou de Natuur- en Sterrekunde, met al de verlichte Wijsbegeerte, met al de opgehelderde denkbeelden van deezen tijd, zonder de Wiskunst, zijn? NEWTON had vrij alle de fchoone denkbeelden mogen uitvinden, welke men aan het hoofd van zijn derde Boek, *de Mundi Syftemate*, ontmoet: hij had vrij mogen leeren, dat men geen meer natuurlijke oorzaaken moet aanneemen, dan zulke, welke waare oorzaaken zijn, en tot de verklaaring der natuurver-

fchijnzelen voldoende zijn; dat gelijke uitwerkzelen aan gelijke oorzaaken moeten worden toegefchreeven; dat men, in de Natuurkunde, die ftellingen, welke uit de verfchijnzelen, bij inductie, zijn afgeleid, en met geene andere onderftellingen ftrijdig zijn, voor ware of ten naasten bij naauwkeurige ftellingen houden moet, tot zo lang men betere onderftellingen vindt, welke de verfchijnzelen naauwkeuriger en vollediger verklaaren kunnen. —— Alle deeze ftellingen had hij vrij, als zo veele grondftellingen van de zuivere reden mogen leeren, hij had zelfs de onderftelling mogen aanneemen, dat de aantrekking de oorzaak zij van alle Natuurverfchijnzelen; deeze onderftelling zou geene meerdere waarde dan die van de draaikringen van DESCARTES gehad hebben, indien niet de *Wiskunst* zijne getrouwe leidsvrouw geweest was, welke hem had in ftaat gefteld, de onderftelling van de aantrekkingskragt, zo wel als die van de *Cartefiaanfche* draaikringen, aan de waarneemingen ter toetfe te brengen. Hij was de grootfte Wiskunstenaar van zijnen tijd, en zulk eene verhevene Wijsbegeerte kon alleen voordgebragt worden door een' man, die EUCLIDES in naauwkeurigheid, APPOLLONIUS in geduld, ARCHIMEDES in werkzaamheid, DIOPHANTUS in fcherpzinnigheid, DESCARTES in vernuft overtrof, en die, behalven dat hij ons het waare waereld-ftelzel leerde kennen, het gebied der Wiskunst, met zijnen tijdgenoot LEIBNITZ, zoo onbegrijpelijk ver uitbreidde, dat zijn leeftijd, in de volgende Eeuwen, altijd als het merkwaardigfte tijdftip in de gefchiedenis der Wis- en Natuurkunde zal blijven aangezien worden. De Natuur en haare wetten, zegt POPE., waren in den nagt der donkerheid verborgen; maar God ſprak: „laat NEWTON geboren worden," en alles was licht.

Confidens du très haut, ſubſtances éternelles
Qui parez de vos feux, qui couvrez de vos alles
Le thrône où vôtre Maître est assis parmi vous
Parlez! du grand NEWTON *n'étiez vous point jaloux?*

Ja, mijne G. Medel. 'er beſtaat in de Natuurkunde geen vak, dat niet al deszelfs licht en klaarheid uit de Wiskunst ontleent. Hebben niet Schei- en Wiskunst de Mineralogie, in de handen van den grooten HAÜY, tot eene weetenſchap gemaakt? hoe veele klaagen niet, dat dit ſchoone ſtelzel, alleen door gebrek aan de nodige Wiskundige kennis, onverſtaanbaar voor hun is en deszelfs ware ſchoon verliest? Hoe vermaakelijk de verſchijnzelen van de Electriciteit en het *Galvanisme* zijn, het ware ſchoon van die verſchijnzelen verbergt zig voor het oog des geenen, die in alle Wiskunst volſtrekt onbedreven is: men behoeft ſlegts de nieuwe en verhevene inzigten, welke BERTHOLLET in zijn ſchoone Werk, over de Scheikundige evenwigts-leer, ontwikkeld heeft, oppervlakkig in te zien, om daar eenen ruimen loopbaan geopend te vinden, waarin de wetten der Scheikundige verwandſchappen, niet geſchiedkundig, door proeven en waarneemingen, waar in derzelver innerlijken aart, in evenredigheid of overëenkomst van tijd en hoeveelheid zullen bekend worden? Zou de ſtoute

lugt-

lugtreizer in de hogere gewesten des dampkrings durven opklimmen, zo Natuur- en Wiskunst hem in zijnen vaart niet beſtuurde? zoude zijne proeven in het onderzoek der Natuur van eenig belang kunnen zijn, indien de hoogte, op welke hij die proeven neemt, uit den ſtand zijnes Barometers en den ſtand van zijnen Thermometer, door de ſtrengſte regelen der Wiskunst niet bepaald konden worden? Wat zou in ſtaat zijn, het zwakke zintuig onzes gezigts, door de onëindigheid der ruimte, in de verst-afgelegene zonneſtelzels, heen te voeren, zo niet de kunst, die met alle juistheid de betrekking van tijd, kragt, ruimte, enz., in alle gegeevene omſtandigheden bepaalt, ons de Telloscopen en Acromatiſche kijkers, als werktuigen van ons gezigt, in handen had gegeeven? Hoe zouden de wetten der beweeging aan ons met juistheid, zonder Wiskundige hulp, bekend worden? Wij zouden waarneemen, dat de ſnelheid van een vallend lichaam onophoudelijk toeneemt, maar in welk eene evenredigheid die ſnelheid opklimt, in welk eene overëënkomst doorgelopene ruimte en tijd tot elkander ſtaan, zou onbekend en duister blijven! Wij zouden zien, dat de beweeging van een' ſlinger vermindert, als zijne roede langer wordt; en meer zouden wij niet weeten. In welk eene overëënkomst, last en vermogen in de onderſcheidene eenvoudige werktuigen tot elkander ſtaan, zou onbekend blijven, wij zouden die werktuigen niet doelmaatig gebruiken, veel minder dezelve zamenvoegen kunnen, om een voorgeſteld uitwerkzel te kunnen daarſtellen, zoo niet de Wiskunst ons de maat der beweegkragten

en

van derzelver onderlinge overëénkomst met elkander leerde kennen? Hoe ellendig zou het met de Waterweeg- en Waterloopkennis geſteld zijn? van deeze zoude wij niets weeten, dan die verſchijnzelen, welke den grondſlag uitmaaken van die gegeevens, uit welke de Wiskunst de nuttigſte gevolgen weet af te leiden. Behoef ik meer te zeggen, om den invloed der Wiskunst op de Natuurkunde in het helderſte ligt te ſtellen? deeze edele Kunst is onze getrouwe en grootmoedige Leidsvrouw, welke ons, op den wenk van onzen wil, ten dienſte ſtaat, om voor ons de Natuur wegens haare wetten te ondervraagen; zij is de weg, door welken wij tot het heiligdom haarer geheimen intreeden; de Beſtuurdereſſe onzer waarneemingen, de Raadgeefster in onze proefneemingen, de Vertolkſter van de meening der ſpreekende Natuur, eene onwankelbaare rots tegen den ſtroom der vooroordeelen, de Behoedſter tegen ongegronde leerſtellingen, de Goddelijke ſtraal van het licht der waarheid, de Fakkel der zuivere en onbedorven reden!

Maar het is de Natuurkunde alleen niet, welke door den weldaadigen invloed der Wiskunst beſtaat, door haar beſchermd wordt, door haar tot de tegenwoordige hoogte geklommen is, en in volgende Eeuwen tot nog grooter luister zal opſtijgen: neen! G. T. 'er is geene menſchelijke kunst, welke de behoefte van een' beſchaafder leeftijd, opgeklaardere verligting, verfijnder ſmaak in de Maatſchappij noodzaakelijk gemaakt heeft, welke niet alle verbetering, zoo ten aanzien van de uitvoering, als ten opzigte van

van de gemaklijke en min kostbaare wijze van zamenſtelling aan de Wiskunst, de Schei- en Natuurkunde te danken heeft. Gij nijvere Koopman, ſteun van ons Gemeenebest, die Rijkdom en welvaart onder ons gevestigd hebt, die uwe woonhuizen tot Konings paleizen en uwe lusthoven tot aardſche paradijſen gemaakt, en onzen van Natuur moerasſigen grond in eenen ſteenrotz herſchapen hebt; verledig u eenige oogenblikken, om uwen geest te ontdoen van alle die gecombineerde handel-ſpeculatien, welke u onophoudelijk, binnen de enge muuren van uw bedompt ſchrijfkantoor bezig houden, en wier welberekende uitkomsten, ons eene zee van nieuwe Rijkdommen doet inwagten; —— verledig U, om eenige oogenblikken de voornaamſte tijdvakken van de geſchiedenis der Kunsten en Weetenſchappen door te loopen: Begeef u naar de Sterre-ſchouwplaats van TIJCHO-BRAHÉ, beſchouw daar de rustelooze nagt arbeid van dien onvermoeiden waarneemer! verascht eenen ARCHIMEDES in zijne diepzinnige beſpiegelen, daar hij gantsch levenloos, en als zonder gevoel, met zijn onderwerp vereenigd is; bezoek onzen Landgenoot SNELLIUS als hij ſtoutmoedig onzen aardbol meet; bekruip onzen Stadgenoot HUIGENS in zijne liefhebberij-kamer, als hij den tijd door de zwaarte-kragt afmeet; verwonder u over het ſchijnbaar kinderſpel van onzen Grooten MUSSCHENBROEK, als hij met zijnen Pyrometer de wet van de uitzetting der metaalen naarſpeurt, en de bouwſtoffen bereid, welke onze ſlinger- en Zee-uurwerken verbeterd hebben. Sla het register van

van de oneindigheid van waarneemingen van eenen MAIJER, eenen LA LANDE, eenen MASCELYNE op, om den loop der Maan na te gaan; befchouw de reeks van vermoeijende berekeningen van CLAIRAIT LAGRANGE, LAPLACE en zo veele andere Wiskundigen van den eerften rang; gaat in de Werkplaatzen der Optifche en Mathematifche Werktuigen, om te befchouwen met welk eene zorg en oplettenheid daar alles vervaardigd wordt! Gij zult misfchien de bedoeling en de eindens van alle deeze bedrijven niet verftaan? Wel aan, deeze menfchen offerden rust en gemak; rijkdom, eer en aanzien op aan de uitvinding, befchaving en verbetering, van alle die verfchillende takken van Wiskunst, Sterre, Aardrijk, Natuur en Scheikunde, welke u met het Oosten en Westen bekend maakten, uwe Schepen eene betere conftructie gaven, en die drijvende pakhuizen uwer koopgoederen met meer zekerheids en minder gevaars, werwaards gij wildet, al waare het tot aan de einden der Aarde, bragten! die onvermoeide vernuften hebben het, als eerfte, oorzaaken mogelijk gemaakt, dat gij nijvere kooplieden kondet zijn; dat uwe Schatkisten met de goudftaven van *Peru*, uwe pakhuizen met de fpecerijën van het Oosten, met de Tabak, Indigo en Suiker van het Westen konden worden opgevuld, en uwe handel van Zee tot Zee en tot aan de einden der Aarde zig konde uitftrekken. Ja, de befpiegelingen en overpeinzingen van die Geleerden en Kunstenaars bereiden u in de toekomst nieuwe voordeelen, en het belang uwes handels, zoo anders het verheven beginzel van dankbaarheid

heid u daartoe niet aanfpoorde, vordert, dat gij die kunstenaars, die geleerden, die geftichten, welke aan kunst en weetenfchap gewijd zijn, die inftellingen, welke daar toe ftrekken, om in die verfchillende vakken bekwaame mannen op te leveren, met al uw vermogen bijftaat en onderfchraagt: zulke edelmoedige offers van dankbaarheid, zijn kleine fpotpenningen, die uwe naneven met eene duizendvoudige winst weder zullen inzamelen! Gij rijke landëigenaars! Ingelanden der laage polders, die uwe voorvaders, door kunst en beleid aan de woede der Noord-zee ontworsteld hebben! befchouw die reuzen-werken van dijken en dammen, welke met de pyramiden van *Egypten*, in het gigantesque, om den voorrang dingen; befchouw uwe Watermolens, die werktuigen van ons nationaal vernuft, welke het overtollige water uwer landen in den Oceaan uitftorten, befchouw de Sluisgevaarten, die bolwerken, welke het geweld der Noordwestelijke orcanen en de verbolgenheid der Zee weêrftaan: befchouwt alle deeze dingen met aandagt, en beoordeel, wat gij aan de Wiskunst en Natuurkunde verfchuldigd zijt, en welk een belang het voor u zij: dat de verëerers en beöeffenaars deezer weetenfchappen en kunsten onder u vermenigvuldigd worden. Edeldenkend Wijsgeer! die in de eenzaamheid van uw ftudeer-vertrek, het menschdom gadeflaat, deszelfs rampen overpeinst, uwen geest pijnigt, om behoedmiddelen tegen deszelfs onheilen uittevinden: Gij ftort traanen van gevoel, als de faam het krijgsrumoer der Volken, maar al te vaak door eigenzinnigheid, valsch berekende Staatkunde, of overheerfching

fching ontftoken, in het verblijf uwer eenzaamheid overvoert: maar verheug u, als gij eenen Monarch, uit het niet, ziet te voorfchijn treden, die, door Wis- en Natuurkunde zelve gevormd, de bekwaamheden van Krijgs- en Staatsman in zig vereënigt, en aan de Waereld een bewijs geeft, dat lichaams-fterkte, onverfchrokkene moed en dapperheid tegen welberekende manœuvres en marfchen niet kunnen opweegen; ja, dat men de rampen des oorlogs, door fpoediger Veldtogten, minder bloedvergieten en meer betoon van menfchelijkheid, verzagten en lenigen kan: verheug u, dat de krijgskunst, dagelijks meer kundigheden in den krijgsman vordert, welke hem daar door in de zamenleving te beminnelijker voorkomen geeft, en in het veld zoo veel meer beginzelen van edelmoedigheid en menfchelijk gevoel inboezemen.

Indien ik, G. Medl. alles zou willen optellen, waarin de Wis- en Natuurkunde haaren weldadigen invloed doet gevoelen, dan zou ik geen einde aan mijne rede vinden: maar indien ook de aangevoerde bewijsredenen, ter ftaaving van dit alles, nog niet fterk genoeg mogten toefchijnen, dan is 'er eene, die alles afdoet, en op de befchaving van onze verftandsvermogens zelve gegrond is. Ja, Mijne Heeren! Al konde zig de Wiskunst op alle de aangeweezene voordeelen niet beroepen, en in dit opzigt aanfpraak op onze hulde en onzen eerbied maaken; dan zelfs zou zij nog den eerften rang onder de menfchelijke kunsten en weetenfchappen moeten bekleeden, om dat zij de leermeesteresfe is, welke ons beftuurt in het leeren

gebruik maaken van onze verftandelijke vermogens, en in de kunst van geregeld te denken; zij regelt de wetten van ons geheugen, betoomt onze al te overdreevene verbeelding, is het behoedmiddel tegen alle valsch vernuft; het tegengif der nadeelige vooroordeelen; zij wekt ons zedelijk gevoel op, om het fchoone en verhevene in orde en eenvoudigheid op te merken; zij brengt alle de vermogens van ons verftand in eene evenredige en overëenftemmende werking; zij leert ons alle de bronnen onzer verftandskragten kennen; zij trekt, met de éene hand, ftoutelijk de grenslijn, die de werkkring van het vermogen onzes verftands, in den tegenwoordigen ftaat der kunst, bepaalt, en wijst ons, met de andere, op eene flaauwe fchemering van toekomstig licht, dat de werkkring van ons geestvermogen verder zal uitzetten (*t*). De uitkomsten van de betrekkingen der grootheden, welke zij ons leert kennen, eigenen zig de Natuur- en werktuigkundige weetenfchappen toe; maar de hebbelijkheid, die zij onze geestvermogens geeft, om dezelve tot alle verftandsoeffening en werkzaamheid van onzen geest zo buigzaam en gedwee te maaken, als onze voeten tot den dans, en onze vingers tot de behandeling der muzick instrumenten, geeven haar, wat de grondftellingen, welke zij ons leert kennen, aangaat, wel geen invloed op de verfchillende deelen der Letterkunde, maar wel ten opzigte van den invloed, welke zij op de befchaving onzer verftandsvermogens en gevolglijk op de beoeffening der Letterkunde heeft. Als ik de waarde der Wiskunst voor de rechtbank des gezonden verftands bepleit, verlies ik U niet uit het oog, waarde Medeleden! welke in het vak der Letterkunde, in deeze Maatſchappij optreedt, en ons in dit Wintergetijde op uwe voordbrengzels van kieſchen ſmaak en uitgelezene kunst vergasten zult. Een Wiskunstenaar, wiens kunst in denken en gevoelen beſtaat, en wiens gevoel niet verſtompt is onder den last van formulen en eigenſchappen van figuuren, waar mede het geheugen overladen is, zonder in het gezigtpunt geplaatst te zijn, waar uit hij de éénheid en zamenhang van het geheel beſchouwen kan, weet de voordbrengzelen van uw vernuft, en de gewrochten van uw kunstvermogen te waardeeren. Gij, verheven Dichter! dien de Natuur zelve, in de kragt van haare ſchoonheid, gevormd heeft, als uw ſtout penceel de Natuur naar het leven ſchildert, de heldendaaden van groote mannen verëéuwigt, de deugd in haar zedelijk ſchoon doet te voorſchijn treeden en de ondeugd, door de kragt uwer toonen, doet zidderen, dan wordt onzen geest levendig, dan verkrijgen onze verſtandskragten nieuwe ſterkte; als Gij! kweekelingen van DEMOSTHENES, eerbiedenswaardige navolgers van CICERO! de waarheid, uitgedoscht in het kleed der welſpreekenheid, te voorſchijn brengt; als gij wet en recht verdeedigt, als gij, om de kragt der ſchadelijke vooroordeelen tegen te gaan, door de cieraad en kragt uwer bewijsredenen overtuigt; als gij de CATILINA's door den donder uwer forſche welſpreekenheid verſchrikt, dan zijn wij gevoelig voor het ſchoon uwer kunst, dan worden nieuwe denkbeelden in onzen geest levendig gemaakt. Als gij Geſchied- en Levensbeſchrijver — als gij, Oud-

heidkenner, ons de voordbrengzelen van uwe vermoeijende naarſpeuringen vertoont, dan verkrijgen wij nieuwe bouwſtoffen voor onze beſchouwingen, of de levensbeſchrijving van een groot en bijna vergeeten man, geeft aan ons verſtand eene nieuwe veêrkragt. Welke genietingen uit uwe kunstvrugten! Maar de kunst, die onze gedagten regelt, die de combinatien der dingen bepaalt, die orde in onze denkbeelden brengt, ons meer vatbaar maakt, om het ſchoone der Natuur te gevoelen en te genieten, is ook in de uwe niet zonder allen invloed: zij helpt den Taalkenner, in het duidelijke ontleden van de beſtaandeelen der Taal, in het geregeld bepaalen zijner naarſpeuringen: zij zal den Dichter, in den losſen zwier zijner ſtukken, niet hinderen: zij zal den Redenaar gemaklijker zijne bewijsredenen doen vinden, en de figuuren der welſpreekenheid, wel ter ſnede leeren gebruiken; zij beſtuurt des Schilders penceel en des Beeldhouwers beitel Zoo, zegt CICERO, en wie beter dan hij kan daar van getuigen? zijn alle letterkundige takken aan één geſchakeld, en als 't ware met elkander vermaagtſchapt; leefde hij in deeze meer verlichte eeuw van Wijsbegeerte en Natuurkunde, dan zou hij zeggen: alle menſchelijke Kunsten en Weetenſchappen zijn in één punt verëénigd, in de grondregelen van waare wijsbegeerte en gezond verſtand; de kunst om zijne gedagten te regelen, zijne verſtandskragten te oeffenen, om met waarheid, en gevoel van overtuiging te redeneeren, is haar eerſte grondſlag, en de weg die ons tot de geheimen der Natuur inleidt. Ja! Eeuwig blijvende lichtſtraal van godlijk verſtand, gij vereënigt alle redelijke weezens, die den weldaadigen invloed van uw zagtvloeijend licht niet te rukeloos miskennen; wie, bij uw licht, in het boek der Natuur en der Reden leest, leert waarheid kennen; gij vergunt den zwarten Africaan, den koperkleurige bewooner van America met den blanken en beſchaafden Europeër, gelijke voordeelen. Gij alleen vertoont ons, in het verſchiet der nog ſluimerende Eeuwen, de hoop op vereéniging van aller gevoelens, de verzagting onzer plaagen, een Waereld waar in recht en rechtvaerdigheid heerscht! Volgen wij dit licht! houden wij hetzelve in ons verſtand, als het heilig vuur op den Altaar van VESTA, levendig!

I V.

Heb ik U overtuigd, geachte Medenleden! dat de Wiskunst haaren weldadigen invloed over Natuurkunde, en alle andere menfchelijke weetenfchappen verfpreid? heeft de beftrijding van het vooroordeel, dat bij Ul. op eenige wijze, ten nadeele van die kunst, mogt zijn opgerezen, U in haar voordeel kunnen winnen, en vlei ik mij, dat mijne aanftaande lesfen de dadelijke proef mijner bewijsredenen zullen opleveren? dan zult gij het befluit van Beftuurderen, om aan de Zoonen en Pupillen der Leden gelegenheid tot onderwijs in de Wiskunst te verfchaffen, moeten toejuichen, en hetzelve aanmerken, als eene nieuwen luister, welke zij aan deeze Maatfchappij willen bijzetten; als een bron van algemeen nut, welke zij in ons midden openen, en welker weldadigen invloed weldra, zo ik van harte wenfche, in de Maatfchappij zigtbaar zal worden. Maar ik moet, en dit is het laatfte gedeelte van mijnen taak, Ul. nader met het oogmerk en het plan van Beftuurderen bekend maaken. De inrichting van Beftuurderen, heeft meer dan één bedoeling.

1°. Om langzamerhand de Leden deezer Maatfchappij, welke van alle wiskundige kennis ontbloot zijn, gelegenheid te geeven, zig in die allereerfte en noodzaakelijke beginzelen te oeffenen, welke volftrekt nodig zijn, om de Natuurkunde, met meer vrugt, te hooren behandelen, en beter de verfchillende kunst termen, welke in de Natuurkunde voorkomen

te verftaan: flegts die eerfte beginzelen, welke in de eerfte Curfus zullen behandeld worden, zullen tot dat einde voldoende kunnen zijn.

2°. Maar voornamelijk is die inrichting, in het bijzonder, voor jonge lieden, voor de Zoonen of Pupillen der Leden, ingericht: deeze, in den leeftijd, waarïn men kunst en weetenfchap opzamelt, meer tijd en gelegenheid dan meer bejaarde perfoonen hebbende, zullen hier gelegenheid vinden, om hunne natuurlijke talenten en bekwaamheden te beproeven, en daarïn tot zulk eene hoogte, als zij begeeren en wenfchen mogten, kunnen opklimmen.

3°. Voornaamelijk zijn ook deeze lesfen ingericht voor die jonge lieden, welke tot de ftudien beftemd zijn, en zig thans op de Latijnfche Schoolen bevinden. Beftuurderen zijn, in deezen, bijzonder oplettend geweest op de klagten van de Hoogleeraaren onzer Hooge en Illustre Schoolen, dat hunne wiskundige voorleezingen voor de meeste vrugteloos zijn, om dat de Studenten aldaar verfchijnen, zonder eenige gronden te kennen, en dat de geringe tijd, welke hun overblijft, niet toelaat, de zaaken zoo uit den grond op te haalen, en uit elkander te zetten, als wel nodig zou zijn, om hunne voorleezingen verftaanbaar en duidelijk te maaken. Beftuurderen hebben met recht begreepen, dat geduurenden den tijd van vier of vijf jaaren, welke de jonge lieden op de Latijnfche School flijten, eenige weinige fnipperuuren, zonder nadeel aan de hoofdzaak toe te brengen, van de de dagelijksche uitspanningen der jonge lieden gemaklijk kunnen afgezonderd worden: ook staan zij met den beroemden Hoogleeraar RHUNKENIUS in het begrip (zie zijne *Oratio de Doctore umbratico*, (*m*) dat het aanleeren van de eerste beginzelen der Wiskunst het gemaklijk leeren der taalen moet bevorderen, en dat de kennis van de eerste beginzelen der Spheer (welke, zoo als straks blijken zal, ook in het plan van mijne Cursus komt,) volstrekt noodzaakelijk is, om eene ontelbaare menigte plaatzen der Griekfche en Latijnsche Dichters niet alleen te verstaan; maar ook om de dichterlijke schoonheden van die plaatzen, welke zonder deeze kennis verlooren gaat, in haar geheel te kunnen gevoelen.

4°. En eindelijk hebben Bestuurderen gemeend, dat deeze lessen ook zoo behoorden ingericht te zijn, dat bejaarder persoonen dezelve konde hooren en met vrugt bijwoonen, zonder dat de tegenwoordigheid der jonge lieden, daarin eenige hindernis zou kunnen toebrengen; neen, maar dat de jonge lieden, door hunne tegenwoordigheid, zouden aangemoedigd worden.

Zoo veel van het oogmerk van Bestuurderen: spreeken wij nu van het plan, waarnaar deeze lessen zullen zijn ingericht.

Men heeft begreepen, dat voorleezingen, op de gewoone wijze, zoo als doorgaands, in openbaare lessen, het gebruik was, een zeer ongeschikt middel

 zou-

zoude zijn, om dat deeze te snel voordgaan, en bij de vierde of vijfde voorleezing niet meer verstaan worden: men zal dan in elke les beginnen, het zij met de verklaaring van eene zaak; het zij met de demonstratie van eene stelling; het zij met de oplossing van een vraagstuk: die verklaaring, demonstratie of oplossing zal kort duuren, in korte oogenblikken zijn afgeloopen, daarna zal men met de leerlingen in een gesprek over dat onderwerp treden, hunne zwarigheden horen en oplossen, het verhandelde, door gemeenzaame en voorhanden zijnde voorbeelden, ophelderen, hen zelf laaten werken, en zo veel de tijd zal toelaaten, zig verzekeren, dat zij de zaak verstaan en begreepen hebben.

Men gevoelt, dat deeze wijze van behandelen al die nuttige gevolgen zal moeten opleveren, welke men van den aart deezer inrichting verwagten kan; de jonge lieden zullen met de onderwerpen, door deeze gemeenzaame gesprekken, beter bekend worden, en wat de toehoorderen betreft, deeze zullen, door hun rijper oordeel geene of ten minsten weinige zwarigheid ontmoeten kunnen, welke zij, in die gemeenzame gesprekken, niet zullen hooren oplossen. Op alles zal door Bestuurderen een regelement van orde worden vastgesteld. (*n*)

Op dat men nu in dit werk op eenen vasten voet zou mogen voordgaan, en door te groote overhaasting de zaak niet bederven, zal men de Wiskundige Cursus in eene eerste en tweede Cursus verdeelen.

De

De eerste Cursus zal elk jaar meeten afloopen, maar in het volgende wederom op nieuw begonnen worden, zo wel, ten einde die geene, welke nog te zwak zijn, gelegenheid te geeven het verhandelde te herhaalen, als om in het vervolg nieuwe leerlingen bij deeze lessen te plaatzen.

Die Cursus zal bestaan, in eene opheldercnde en vergelijkende verklaaring van het Talstelzel en deszelfs eigenschappen; de verklaaring van de vier grondregelen der Rekenkunst; de verklaaring van eenige van de eerste eigenschappen der getallen, en andere daar toe betreklijke dingen. Het Leerstelzel van de zoogenaamde gebrokens. De decimaal-rekening en derzelver gebruik. De evenredigheid der getallen: hier meede zullen 40 à 45 lessen vervuld zijn. Dan zal men overgaan tot de zogenaamde Algebra, daar in de oplossing van de vergelijkingen van een twee en meer onbekenden behandelen, en de oplossing van de vierkants, vergelijkingen geeven: benevens een denkbeeld van de gedurige breuken, het Binomium van NEWTON, de Logarithmen, met alle de bijzaaken, welke tot deeze Theorien behooren. Als de leerlingen reeds eenig tamelijk goed begrip van de oplossing der vergelijkingen verkreegen zullen hebben, dan zal men de lessen verdeelen: twee lessen in de Algebra aanhouden, en de derde voor de Meetkunst afzonderen; in welke ik mij alleen bij de hoofdstellingen bepaalen zal; en het zo verre brengen, dat de Cursus zal beslooten worden, met de platte Driehoeksmeeting, zullende deeze Cursus eindigen met eeni-

eenige lessen over de Hemel en Aardgloben. Buiten en behalven deeze lessen, zal ik, in den loop van den volgenden Zomer, vijf of zesmaal, buiten in den omtrek van de Stad, practicaale lessen geeven, zoo in het meeten van afstanden, als in het opneemen van situatie plans, ten einde, langs dien weg, den leerlingen de zamenstelling en het gebruik van de eerste en noodzaakelijkste werktuigen, als *Altrolabium*, *Mensula*, *Bousfole*, en *Sextant* te leeren kennen, en hun alzoo proefkundig de waarheid der ontwikkelde grondstellingen aan te toonen, en hun een denkbeeld te geeven van de toepasfing der Wis- en Meetkunst, in eene van de noodzaaklijkste menschelijke behoeften.

Dit is, mijne Heeren! een kort verslag van de eerste Cursus, welke in het eerste jaar zal gehouden en in elk volgend jaar hernieuwd worden. Zoo dra nu de eerste Cursus eene einde neemt, zal men de tweede beginnen, in welke de gelegde gronden nader ontwikkeld, en de verdere Theorien der Wis- en Meetkunde, de Werktuigkunde en de beginzelen der proefondervindelijke Natuurkunde behandeld zullen worden, op dien voet en wijze, als naar gelang der omstandigheden, welke de ondervinding in de eerste Cursus zal aan de hand geeven. Tot de tweede Cursus zal men alle die jonge lieden toelaaten, welke, in den loop der eerste, behoorlijke vorderingen hebben gemaakt, en instaat zullen zijn van dezelve met vrugt gebruik te maaken.

Ik zal, in de behandeling van deeze stof, mijn eigen ont-

ontwerp volgen, waaraan ik zederd den Jaare 1795. gearbeid heb; en waarvan het eerste deel van de Wiskunst, benevens de Meetkunst, met het begin van het aanstaande Jaar zal worden op de Pers genomen, en waarvan mijne Leerlingen succesfivelijk de afgedrukte bladen zullen kunnen verkrijgen. Intusschen moet ik als boeken, die ik menigmaal zal aanhaalen, aanbeveelen: de *Rekenkunst* van AENEAE, de Meetkunst van VAN SWINDEN, ook wel die van STEENSTRA: de *Algebra* van EULER. De grondbeginselen der Cijfferkunst, welke ik in 1793 heb uitgegeeven, vallen niet meer in het plan, dat ik thans heb aangenomen. In de Meetkunst en driehoeksmeeting zal ik volgen mijn eerste stuk over de *Trigometrie*, dat nabij afgedrukt is, en kort daar na zal worden uitgegeeven.

5. Felix Klein

Felix Klein, 1849 Düsseldorf - 1925 Göttingen, was de dictator van de Duitse wiskunde rond de eeuwwisseling. Geen inititatief of benoeming vond buiten hem om plaats.
Na studie en promotie te Bonn werd hij in 1871 toegelaten als "privatdozent" in Göttingen. In 1872 volgde een hoogleraarsbenoeming in Erlangen die hij aanvaardde met een rede waarin hij zijn Erlanger Programm uiteenzette: de stelselmatige herziening van de geometrie en daarmee van de hele wiskunde voortbouwend op de resultaten van Riemann. Het gezag dat hij met deze visie en onderneming opbouwde, was enorm. De tweede grote onderneming die hij mede entameerde was de *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* (1898-1933).
De wiskunde, of beter de hooghartigheid van de wiskundigen, stond in Duitsland bijzonder slecht aangeschreven; in de technische hogescholen was er in de jaren 1890 een "Anti-Mathematische Bewegung". Mede in reactie op deze situatie stortte Klein zich in de tweede helft van zijn carrière op de didactiek en op de toepassingen van de wiskunde. Om dit laatste gaat het hier. Dwars tegen de geest van het tijdsgewricht in richtte hij de Göttinger Vereinigung op die gelden wierf voor een mathematisch en fysisch laboratorium.
Felix Klein zette zich in voor het instellen van leerstoelen toegepaste wiskunde. Hij gaf seminars in de toegepaste wiskunde, zette zich in voor de relatie tussen wiskunde en techniek. En toch was er iets vreemds aan zijn inzet: hij had institutioneel grote invloed en stimuleerde van alles, maar voor zijn eigen opvattingen en activiteiten leek het geen consequenties te hebben. Het was retoriek, invloedrijke retoriek. Terwijl er wel degelijk veel veranderde in de verhouding tussen wiskunde en techniek, hield hij vast aan een traditoneel beeld van de toegepaste wiskunde en haar nut. Prandtl en Runge in Göttingen en hun concurrent Von Mises in Berlijn zouden later wel de ruimte benutten, die Klein vanuit een traditionele visie had helpen scheppen, om werkelijke vernieuwing te bereiken in de verhouding tussen wiskunde en techniek. Klein had wel oog voor het eigene van techniek - het is geen toegepaste wiskunde -, maar huldigde een traditionele opvatting van het toepassen.
De teksten geven beide laatstgenoemde aspecten van Kleins opvatting over toegepaste wiskunde weer. 'Wissenschaft und Technik', *Physikalische Zeitschrift* 1908, is een rede ter herdenking van de stichtingsdag van het Deutsches Museum waarin Klein wijst opo de noodzaak van een evenwicht tussen theoretische en ervaringskennis in de technische opleidingen. De 'Vorrede' van *Band IV: Mechanik* van de *Encyklopädie*, Leipzig: Teubner, 1908, geeft heel kort Kleins visie weer op de positie van de wiskunde temidden van de wiskundige wetenschappen.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

VIERTER BAND IN VIER TEILBÄNDEN.

MECHANIK.

REDIGIERT VON
FELIX KLEIN UND CONR. MÜLLER
IN GÖTTINGEN.

ERSTER TEILBAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901–1908.

Sonderabdruck
aus **Physikalische Zeitschrift**. 9. Jahrgang. 1908.

Wissenschaft und Technik [1].)

Von Felix Klein.

Königliche Hoheit! Hochgeehrte Anwesende! Das war vor 30 Jahren, daß eine kleine Zahl Professoren der hiesigen Technischen Hochschule sich alle 14 Tage am Samstag abend zusammenfand, um in ausführlicher Bezugnahme durch Vortrag und Diskussion ihre wissenschaftlich-technischen Interessen abzuklären und zu fördern. Sie nannten sich das Mathematische Kränzchen, aber nicht die einzelne Wissenschaft in abstracto, sondern die Beziehung zwischen Wissenschaft und Technik bildete den Mittelpunkt des gemeinsamen Interesses. Daß diese Beziehung, insbesondere was Mathematik und Physik angeht, sehr viel weiter entwickelt werden müsse, als bis dahin geschehen, das war das ständige Argument, welches unser verehrtes Mitglied, Professor Linde, uns mit nie ermüdendem Eifer vor die Seele stellte. Bauschinger hatte schon einige Jahre vorher an der Münchener Technischen Hochschule das erste staatliche Laboratorium für Festigkeitslehre eröffnet. Jetzt war es Linde gelungen, ein Laboratorium für theoretische Maschinenlehre zu begründen, in welchem zunächst Untersuchungen über die thermodynamischen Eigenschaften des überhitzten Wasserdampfes durchgeführt werden sollten.

Die Form ist bald zerfallen, die Mitglieder unseres kleinen Kreises wurden zerstreut, aber der Gedanke, der uns zusammengeführt, hat sich als siegreich erwiesen und in der Gründung des Deutschen Museums eine glänzende, nie geahnte Verwirklichung gefunden. Mir aber haben Sie den ehrenvollen Auftrag erteilt, bei der heutigen Festversammlung der Museumsmitglieder die Beziehung zwischen Wissenschaft und Technik in den Mittelpunkt der Betrachtung zu rücken, damit wir uns der Grundlage bewußt werden, auf der wir bauen, und der weiteren Ziele, die damit gegeben sind.

Der größte Feind, geehrte Anwesende, der richtigen Bestrebungen erwächst, ist nicht äußerer Widerstand, sondern Übertreibung. Von ihr müssen wir uns von vornherein freihalten, wenn wir nicht in ein falsches Fahrwasser geraten wollen. Noch andere, noch wichtigere Vorbedingungen für das Gedeihen der Technik gibt es als die Verbindung mit der Wissenschaft. Das sind die allgemeinen intellektuellen und ethischen Qualitäten: der technische Instinkt, der Unternehmungsgeist, die Beharrlichkeit; auch die Organisation der Arbeit spielt eine wichtige Rolle. Und ebenso hat die Wissenschaft ihre stärksten Wurzeln für sich: den unbedingten Trieb zur Erforschung der Wahrheit, woran sich die Unbestechlichkeit des Urteils schließt, die Freude am geordneten Denken, die Gründlichkeit und auch wohl eine gewisse Langsamkeit. Werden die beiden Gebiete in gedeihliche Wechselwirkung treten? Es gelingt nicht immer, und es sind unter Umständen auch üble Folgen der Bezugnahme zu vermerken, bei denen ich heute nicht weiter verweile. Aber wo sich die geeigneten Kräfte zusammenfinden, da entsteht neues, nach beiden Seiten förderliches Leben. Für die Wissenschaft kommt hier nicht nur der wichtige Impuls in Betracht, der sich aus dem Herankommen neuer Hilfsmittel ergibt, sondern ganz wesentlich auch die Befruchtung mit neuen, fremder Erfahrung entstammenden Ideen. Die technischen Betriebe aber werden durch erfolgreichen Kontakt mit der Wissenschaft auf eine höhere Stufe der Leistungsfähigkeit emporgehoben, zum Teil überhaupt erst ermöglicht. Es muß genügen, hier einige wenige Gebiete und führende Persönlichkeiten zu nennen, welche die Art dieser Einwirkung in einer jedermann verständlichen Weise besonders deutlich hervortreten lassen.

Ich nenne zuerst, wie billig, die chemische Technik, die ihren Bund mit der chemischen Wissenschaft unter Liebigs genialer Führung schloß, um ihn in der Folge immer enger zu gestalten, und sich dadurch bis zu einer Höhe der Leistung zu erheben, welche jede ausländische Konkurrenz weithin zurückgedrängt hat. Nichts erfreulicher für den Vertreter der Wissenschaft als eine der großen Arbeitsstätten zu durchwandern, welche die chemische Industrie sich geschaffen. Denn den Anforderungen der immer fortschreitenden Praxis wird hier in der Weise begegnet, daß Hunderte gelehrter Chemiker nach den verschiedensten Richtungen hin

1) Vortrag, gehalten bei der Jahresfeier des Deutschen Museums am 1 Oktober 1908 im Wittelsbacher Palais zu München. (Abgedruckt aus der Internationalen Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik vom 17. Oktober 1908.)

mit rein theoretischen Untersuchungen beschäftigt werden.

Ich erwähne ferner, ebenfalls an Münchener Erinnerungen anknüpfend, den Bau der optischen Instrumente. Fraunhofer ist der Typus eines der seltenen Männer, bei denen exakteste physikalische Beobachtung und sorgsamste Durchführung der technischen Prozesse von Hause aus Hand in Hand gehen. Und in unseren Tagen hat Abbe, indem er seine theoretischen, insbesondere auch mathematischen Fähigkeiten mit der praktischen Leistung eines hervorragenden Mechanikers (Zeiß) verband, jene wunderbaren Jenenser Werkstätten geschaffen, welche die ausführende Optik auf eine ganz neue Basis stellten. Es gibt keine Frage der modernen Physik oder Chemie, insbesondere auch der Kristallkunde, die hier nicht unmittelbar aufgenommen und mit praktischen Problemen in Verbindung gesetzt würde.

Endlich die Elektrotechnik mit ihrem stattlichen Sprossen, der drahtlosen Telegraphie! Kein Zweifel, daß dieses Gebiet technischen Schaffens, welches sich immer mehr anschickt, unsere ganzen Existenzbedingungen umzugestalten, ausschließlich auf dem Boden fortgeschrittener physikalischer Einsicht entstanden ist. Von Ohm über Gauß und Weber bis hin zu Hertz (um nur einheimische Namen zu nennen) geht die Reihe der Forscher, an welche sich die großen Praktiker, allen voran unser Siemens, seinerzeit unmittelbar angeschlossen haben. Und nun hat sich die erfreulichste Wechselwirkung entwickelt, die höchstens durch die ungeheure Ausdehnung, welche das Gebiet gewonnen hat, in etwas gehemmt wird.

Diese Beispiele sind entscheidend. Sie lassen zugleich in erfreulicher Weise erkennen, wie sehr unser deutsches Land an der wissenschaftlichen Entwicklung der Technik teilgenommen hat. Ich bin nicht der erste, der behauptet, daß eben hierin einer der Hauptgründe dafür zu erblicken ist, daß es der deutschen Industrie gelungen ist und fortschreitend gelingt, neben ihrer älteren Schwester, der englischen, Platz zu greifen.

Aber wir dürfen nicht unbedacht verallgemeinern. Es gibt wichtigste Gebiete der Technik, welche mit wissenschaftlichen Studien im engeren Sinne bisher nur wenig zu tun haben; ich nenne etwa die Textilindustrie oder den Bau von Automobilen und Fahrrädern. Es wäre interessant, unter dem Gesichtspunkte der Verbindung mit der Wissenschaft die verschiedenen Gebiete der Technik zu durchwandern und zu überlegen, warum die Dinge bald so, bald anders gestaltet sind, ob Notwendigkeiten vorliegen, die durch die Art der einzelnen Gebiete bedingt sind, oder Phasen der historischen Entwicklung, welche der Fortschritt bald überholen wird.

Statt weiter auszugreifen, möchte ich in diesem Betracht hier nur ein paar Worte über das jüngste Kind der heutigen Schaffensperiode sagen, den Liebling des Tages, die Motorluftschiffahrt und den mechanischen Flug. Es würde wenig angebracht sein, wenn ich als Theoretiker versuchen wollte, hier den wissenschaftlichen Gesichtspunkt einseitig in den Vordergrund zu stellen. Neben der großen technischen Konzeption ist es der unbeugsame Wille des Grafen Zeppelin, sein Wagemut, sein unerschütterliches Vertrauen auf den endlichen Sieg seiner guten Sache, die den Erfolg verbürgen und das Herz des deutschen Volkes gewonnen haben. Und ähnliches kann von den anderen Pionieren der neuen Technik gesagt werden. Aber wer näher zusieht, bemerkt, wie in der ganzen Entwicklung der aktiven Luftschiffahrt allerdings je länger je mehr sorgfältigste physikalische und mechanische Überlegungen zur Geltung kommen. Lilienthal, der mit seinem Gleitflieger als erster den Schwebeflug der Vögel erfolgreich nachahmte, hat bereits mit eingehenden Versuchen über den Luftwiderstand gewölbter Flächen eingesetzt. Entsprechendes ließe sich von Herrn v. Parseval berichten. Und Graf Zeppelin selbst hat sich je länger je mehr mit einem ganzen Stabe von Fachgelehrten umgeben. Alles spricht dafür, daß das Werk, welches jetzt in der Periode heroischer Entwicklung steht, auf dem Boden wissenschaftlicher Einzelarbeit weitere Förderung finden wird.

Ganz ähnlich dürften die Verhältnisse in vielen anderen Gebieten liegen, deren Aufzählung zu weit führen würde. Die Vertreter des Staats und die Leiter großer technischer Betriebe mögen ihre Aufmerksamkeit darauf gerichtet halten, um zu gegebener Zeit in richtiger Weise einzugreifen. Denn die wissenschaftliche Arbeit, wie sie hier verlangt wird, kann der Mithilfe leistungsfähiger Organisationen nicht entraten. Sie ist andererseits für das Gemeinwesen von der allergrößten Wichtigkeit. Man erwäge, daß in Zeiten ernster Bedrängnis, die unserer Nation nicht erspart bleiben werden, ein auch nur geringer Grad technischer Überlegenheit oder Unterlegenheit von entscheidender Bedeutung werden kann.

Wir haben soweit von dem Zusammengehen der wissenschaftlichen Forschung und der Technik gesprochen. Aber es gibt noch eine andere Art, wie die Wissenschaft die Technik unterstützt, die vielleicht noch weiter reicht, und die ich die unbewußte nennen möchte. Sie ruht auf der allgemeinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung, welche die ausübenden Persönlichkeiten — vom Erfinder herab bis zum Arbeiter, der die Einzelheiten herstellt — sich in der für sie in Betracht kommenden Form erworben haben mögen. Wir kennen keine Methode, um ein Genie zu schaffen, und auch die allgemeine Tüchtigkeit der Mitwirkenden ist ein Gut, das uns im wesentlichen von außen gegeben sein muß. Aber für die Verbreitung geeigneter mathematisch-naturwissenschaftlicher Kenntnisse und Fertigkeiten vermögen wir durch zweckmäßige Entwickelung unserer Unterrichtsanstalten außerordentlich viel zu tun. Hierüber wäre vieles zu sagen, wenn Zeit und Ort es gestatteten; ich würde glauben, dabei des Interesses meiner heutigen Zuhörerschaft von vornherein sicher zu sein. So aber will ich mich darauf beschränken, zu tun, was mir heute besonders am Herzen liegt, nämlich die werten Gäste, welche aus allen Teilen Deutschlands hierhergekommen sind, auf die vorbildlichen Einrichtungen aufmerksam zu machen, die uns Bayern in dieser Richtung vor Augen führt.

Da haben wir zunächst, hier in München, ein wunderbar ausgebildetes System von Fortbildungsschulen und niederen Fachschulen als Ergebnis des Zusammenwirkens organisatorischer Kraft und weitreichender Opferfreudigkeit der Gemeindevertretung. Daß die heranwachsende Jugend, die nach Abschluß der Volksschule sich anschickt, in einen gewerblichen Beruf überzutreten, eingehender Fürsorge und Förderung bedarf, daß Kenntnis und Können dabei auf dem Boden der realen Verhältnisse entwickelt werden müssen, daß hierfür naturwissenschaftliches Sehen und Verstehen eine besonders wichtige Sache ist, das alles finden Sie hier in glänzender Weise bedacht —, die Ausstellung „München 1908" läßt uns darin interessante Einblicke tun. Kein Problem des Unterrichtswesens ist, auch für die Technik, im Augenblicke wichtiger als dieses: was wir für die breiten Schichten der heranwachsenden Jugend in der Zeit tun sollen, die zwischen Volksschule und Militärdienst liegt. Die Allgemeinheit hat hier bisher zu wenig eingegriffen und den Einzelnen zu sehr der Gefahr ausgesetzt, auf Abwege zu geraten. Die Überzeugung, daß mit großen Mitteln wohlbedachte Abhilfe geschaffen werden muß, verbreitet sich auch in Norddeutschland immer mehr, und allgemeinstes Interesse wendet sich dabei den mustergültigen Einrichtungen zu, die uns München vor Augen führt.

Des ferneren darf ich von der Berücksichtigung unserer Interessen an den hiesigen höheren Schulen (oder, wie es in Bayern heißt, den Mittelschulen) einiges sagen. Die befreiende Losung, von der die moderne Entwicklung dieser Schulen beherrscht wird, kam 1900 aus Norddeutschland: daß es verschiedene Typen nebeneinanderstehender Schulen geben soll, welche den verschiedenen Arten der Begabung der Schüler und der späteren Berufsanforderungen gleichmäßig gerecht werden und unter allgemeinen Gesichtspunkten als gleichwertig anzusehen sind. Wir müssen leider sagen, daß Mathematik und Naturwissenschaft einige Zeit brauchten, um die große in diesem Programm für sie enthaltene Wirkungsmöglichkeit zu erfassen. Es war erst 1904, daß die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte hierfür eine eigene Unterrichtskommission einsetzte, welche Weihnachten 1907 einen zusammenfassenden Gesamtbericht veröffentlichte. Nun haben wir uns im Norden über das Entgegenkommen der maßgebenden Instanzen nicht etwa zu beklagen, aber wir sehen uns überall durch den Umstand gehemmt, daß die bestehenden Schulen bei uns, auch die realistischen, im wesentlichen Sprachschulen sind (unterschieden nur dadurch, ob der Nachdruck mehr auf die klassischen oder die modernen Sprachen gelegt wird). Erst die bayrische Unterrichtsverwaltung hat den uns ebenso erfreuenden als überraschenden Schritt getan, bei der Einführung ihrer neuen Oberrealschulen im vorigen Jahre ausdrücklich zu erklären, daß der Charakter dieser Anstalten in erster Linie ein mathematisch-naturwissenschaftlicher sein soll. Und das Zeitmaß für unsere Fächer und ihre methodische Ausgestaltung hat sie dabei ganz so bemessen, daß unsere wohlerwogenen Wünsche ganz befriedigt werden. Die Naturwissenschaft wird mit sieben Stunden durch alle Klassen durchgeführt, womit die Möglichkeit gegeben ist, neben Physik und Chemie auch den biologischen Disziplinen den erforderlichen Raum zu gewähren. Überall stehen praktische Übungen der Schüler im Vordergrund. Und dem mathematischen Unterricht hat man ganz das Gepräge gegeben, welches von der modernen Reformbewegung verlangt wird: daß durch frühzeitige Einführung des Funktionsbegriffs und seiner graphischen Darstellung der Schüler befähigt werde, die Bedeutung der Mathematik innerhalb des heutigen Kulturlebens in ihrer großen Einfachheit richtig zu verstehen.

Gestatten Sie endlich, dem früheren Professor der hiesigen technischen Hochschule zum Ruhme dieser hervorragenden Anstalt einige wenige Worte zu sagen, welche seitens der heute hier versammelten Zuhörerschaft gewiß auf volles Verständnis rechnen dürfen. Die Mehrzahl der Anwesenden weiß noch aus eigener Erinnerung, daß wir vor 10 bis 15 Jahren an den technischen Hochschulen Deutschlands lebhafte Auseinandersetzungen zwischen den mehr auf die Praxis gerichteten Vertretern des Ingenieurwesens und den mehr abstrakt interessierten Professoren der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen hatten. Nun ist ja theoretisch dieser Kampf längst im positiven Sinne geschlichtet, indem sich die Überzeugung von der Notwendigkeit engsten Zusammenwirkens der beiden Richtungen in neuer Form — auf Grund etwa der folgenden Leitsätze durchgesetzt hat:

1. Der Unterricht in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern an den technischen Hochschulen hat sich dem allgemeinen Unterrichtszweck der Anstalt einzufügen.

2. Andererseits bedarf die technische Unterweisung durchaus einer sorgfältigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlegung; ein allgemeiner technischer Unterricht auf Grund allein genialer Intuition ist unmöglich.

3. Darüber hinaus ist eine Minderzahl besonders veranlagter Ingenieure nach den verschiedenen in Betracht kommenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Richtungen so weit zu fördern, daß sie gegebenenfalls, wo neue Verbindungen zwischen Wissenschaft und Technik in Zukunft erforderlich werden, mit eigenen Untersuchungen einsetzen kann.

Aber es fehlt doch noch manches, daß diese theoretischen Formulierungen (die sich ja aus der in meinem heutigen Vortrag dargelegten Auffassungsweise sozusagen von selbst ergeben) überall in der Praxis zur vollen Geltung gekommen wären.

Um so erfreulicher ist es zu sehen, wie an der Münchener Hochschule beide nebeneinander in Betracht kommenden Richtungen unter ausführlicher Bezugnahme Hand in Hand gehen. Und als äußeres Zeichen dafür hat hier — und bisher hier allein — die Abteilung für allgemeine Wissenschaften im Kreise der übrigen diejenige gleichberechtigte Stellung, die sie im eigenen Interesse wie im Interesse der Gesamtanstalt fordern muß, indem sie gleich den anderen das Recht hat, die höchste Würde, welche die Anstalt verleiht, den Doktor der technischen Wissenschaften, zu erteilen. Zugleich ist hier von alters her eine andere für uns besonders wichtige Frage in befriedigender Weise geordnet, indem die Technische Hochschule ihren ganz bestimmten Anteil an der wissenschaftlichen Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften hat. Wenn sich diese Ordnung nicht ohne weiteres auf unsere norddeutschen Verhältnisse übertragen läßt, so erfordert sie trotzdem sorgfältigste Beachtung.

Und nun die Krönung der hiesigen für das Zusammengehen von Wissenschaft und Technik so wichtigen Bestrebungen! Das ist diejenige Schöpfung, der unsere heutige Feier gilt, das Deutsche Museum selbst. Dürfen wir dasselbe doch als eine Unterrichtsanstalt ansehen, als eine Unterrichtsanstalt größten Stils, welche dem Bildungsbedürfnisse nicht irgendwie abgegrenzter Kreise, sondern der Gesamtheit entgegenkommt und damit dem großen Grundsatz gerecht wird, daß es mit der zunftmäßigen Einengung gelehrter Studien heute nicht mehr getan ist, sondern daß darüber hinaus jedermann ein Anrecht auf die seinen Interessen und seiner Vorbereitung entsprechende Kenntnisnahme der erzielten Fortschritte hat. Es ist wunderbar, wie dieser Grundgedanke überall, wo seine Ausführung auch nur durch Vermittelung des gedruckten Führers bekannt wird — bei Männern und bei Frauen der verschiedensten Stände —, sofortiges Verständnis und begeisterte Zustimmung findet. Man beneidet insbesondere um das neugeschaffene Bildungsmittel die heranwachsende Jugend. Wie ist es denn uns Älteren noch gegangen, wenn wir als Knaben irgendwelche Kenntnis von der Tätigkeit in Fabriken gewinnen wollten? Wir drangen vielleicht ohne Erlaubnis in das Gebäude ein, um meist bald durch irgendein Machtwort veranlaßt zu sein, den Ausgang wiederzugewinnen; jedenfalls aber war von irgendeiner Erklärung der in Betracht kommenden Prozesse oder gar einer Darlegung ihres Zusammenhangs mit allgemeinen wissenschaftlichen Prinzipien keine Spur. Durch die Einrichtung des Deutschen Museums hat die lernbegierige Jugend ein ganz anderes Sprungbrett für eigene spätere Leistungen gewonnen. Harte Arbeit soll ihr darum nicht erspart bleiben, denn ohne sie erstarkt weder der Charakter noch die intellektuelle Fähigkeit. Aber sie braucht nicht mehr im Dunkeln zu tappen; ihre Anstrengung kann sofort auf klar erkennbare Ziele gerichtet werden.

Hochverehrte Anwesende! Ich werde mich unter den heute gegebenen Umständen nicht noch ausführlicher über die interessanten hiermit berührten Organisationsfragen und ihre Wichtigkeit für die moderne Kultur verbreiten dürfen. Ich meine aber in Ihrer aller Sinne zu handeln, wenn ich Sie nun zum Schlusse bitte, jenen Männern, die zum Zustandekommen der hiesigen so bemerkenswerten Einrichtungen beigetragen haben, den Gründern des Deutschen Museums insbesondere, allen voran dem hohen Protektor des Deutschen Museums, Seiner Königlichen Hoheit dem Prinzen Ludwig, durch Erheben von Ihren Plätzen Ihren tiefempfundenen Dank auszudrücken. Wir vereinigen uns in dem Rufe: Seine Königliche Hoheit Prinz Ludwig lebe hoch! hoch! hoch!

(Eingegangen 21. Oktober 1908.)

Vorrede zum vierten Bande.

Mit dem Bande IV, dessen ersten Teil ich hiermit dem Publikum vorlege, beginnt gemäss dem Plan der Encyklopädie die Reihenfolge der drei Bände, welche den *Anwendungen der Mathematik auf Naturwissenschaft und Technik* gewidmet sein sollen, also der Mechanik, der theoretischen Physik und der Geonomie und Astronomie. Wie Hr. v. Dyck in seinem „Einleitenden Bericht" in Band I bereits auseinandergesetzt hat, will die Encyklopädie in diesen Bänden mehr sein als eine blosse Zusammenstellung der fertig ausgearbeiteten mathematischen Theorieen; sie möchte der ferneren mathematischen Entwickelung der in Betracht kommenden wissenschaftlichen Disziplinen allgemein die Wege ebnen, indem sie ihren Lesern neben den Resultaten auch die *Ansätze* zur Kenntnis bringt, mit denen die Fachverständigen der verschiedenen Gebiete versucht haben, den ihnen vorliegenden Bedingungen der Wirklichkeit mathematisch gerecht zu werden.

Die Schwierigkeiten, welche sich der Durchführung dieses Programms sogleich bei der Inangriffnahme der Bände und dann Schritt für Schritt bei der weiteren Arbeit entgegenstellten und fortgesetzt entgegenstellen, sind in der Tat sehr bedeutende. Denn die Entwickelung im 19. Jahrhundert ist im ganzen die gewesen, dass sich die verschiedenen Gebiete der mathematischen Praxis von dem Betriebe der reinen Mathematik immer mehr abgetrennt haben, so dass die sachliche und namentlich auch die persönliche Verbindung, welche die notwendige Voraussetzung für die Durchführung unseres Planes ist, von Fall zu Fall immer erst mühsam hergestellt werden muss.

Hr. v. Dyck hat in seinem „Einleitenden Bericht" bereits des näheren dargelegt, wie sich diesen Verhältnissen gegenüber der Gedanke der Encyklopädie allmählich durchgesetzt hat. Den Anfang machte vor nun zehn Jahren eine allgemeine Orientierung nach der persönlichen Seite, unter direkter Bezugnahme mit hervorragenden Vertretern der verschiedenen Gebiete im Inlande und Auslande, wofür die Akademieen in dankenswerter Weise die Mittel zur Verfügung gestellt hatten. Die Redaktion der Bände V (Theoretische Physik) und VI (Geonomie und Astronomie) konnte bald hernach hervorragenden jüngeren Kräften übertragen werden. Die Bearbeitung von Band IV aber (Mechanik) übernahm ich selbst (Herbst 1899) und dies um so lieber, als mir die Herstellung normaler Beziehungen zwischen theoretischer und angewandter Mechanik nach dem Gange meiner persönlichen Entwickelung von je Herzenssache gewesen ist.

Ein besonderes Mittel, sich in Gebiete, die ihm ferner liegen, einzuarbeiten, ist für den deutschen Universitätsdozenten, der in hohem Masse über die besondere Richtung seiner Lehrtätigkeit frei verfügen kann, die Abhaltung geeigneter Vorlesungen und Übungen. Ich habe von diesem Mittel im Interesse meiner Tätigkeit an Band IV der Encyklopädie alle die Zeit hindurch vielseitigen Gebrauch gemacht. Insbesondere las ich im Winter 1899—1900 über Hydrodynamik und verband damit Seminarübungen über Schiffstheorie; — Vorlesung und Übungen waren nicht mehr als ein erster Versuch, aber sie haben mir denjenigen Mitarbeiter zugeführt, der mir für meine Aufgabe sehr bald die allerwesentlichste Hilfe werden sollte, Hrn. *Conrad H. Müller*. Ich bezeichne den Umfang seiner Mitwirkung am einfachsten, indem ich angebe, dass er nur an den drei Referaten Voss, Schönflies-Grübler und Abraham (IV 1, 3 und 14) nicht direkt mitgearbeitet hat; bei allen anderen hat er durch eindringendes Sachstudium und sorgfältigste Kontrolle sowohl der allgemeinen Exposition als der bibliographischen und drucktechnischen Einzelheiten zur Vollendung der endgültigen Darstellung ausserordentlich viel beigetragen, was von sämtlichen beteiligten Verfassern gewiss mit Dankbarkeit bestätigt werden dürfte. Hr. Müller war, als unser Zusammenarbeiten begann, noch Student. Er ist dann später zwei Jahre lang bei mir Assistent gewesen und folgeweise in die Bibliothekarlaufbahn eingetreten. Ich habe der Verwaltung der hiesigen Universitätsbibliothek wie dem vorgesetzten Ministerium meinen besten Dank dafür auszusprechen, dass Hr. Müller seit dem 1. Juli 1906, wo er zum Hülfsbibliothekar befördert wurde, im Interesse seiner Arbeit an der Encyklopädie für längere Zeit beurlaubt worden ist. Seit Ende 1904 wird Hr. Müller auf dem Titel von Band IV neben mir ausdrücklich als Mitherausgeber genannt.

Was die *Abgrenzung* der Mechanik gegen die Nachbargebiete angeht, so ist diese dem Wesen der Sache nach in hohem Masse willkürlich. Für eine abstrakte Auffassung ist die Mechanik, wie sie hier verstanden wird, nur ein Teil der theoretischen Physik und die Lehre von der Bahnbestimmung der Gestirne hinwiederum nur eine Anwendung der Mechanik. Für den Umfang von Band IV glaubten wir uns statt dessen im ganzen an das historische Herkommen halten zu sollen, wie es der Hauptsache nach durch Lagranges Mécanique analytique festgelegt ist. Elastizität und Akustik haben wir noch mit zur Mechanik gerechnet, dagegen Kapillarität und kinetische Gastheorie nicht mehr, ebensowenig Thermodynamik. Die astronomischen Einzelheiten bleiben dem Bande VI vorbehalten. Auch treten hier diejenigen Entwickelungen zurück, deren Schwerpunkt nach seiten der reinen Geometrie liegt; nach dem Plan der Encyklopädie gehören sie in den Band III.

Innerhalb des so umgrenzten Bereiches haben wir dann gemäss den oben genannten Grundsätzen nach möglichster *Vielseitigkeit* des Inhaltes gestrebt. Neben der analytischen Formulierung kommt die anschauungsmässige Behandlung zu ihrem Recht, neben Untersuchungen, welche die höchsten Mittel der Analysis erfordern, die elementar gehaltene Darstellung. Insbesondere aber haben wir überall die besonderen Ansätze und Approximationsmethoden zur Geltung gebracht, deren sich die Physiker und Ingenieure zur Erledigung der ihnen entgegentretenden mechanischen Aufgaben bedienen. Auf diese Weise sind aus dem ursprünglich einheitlich gedachten Band IV allmählich vier Teilbände, jeder im Umfange von etwa 40 Bogen, geworden, die selbständig paginiert sind und auf den Titelblättern der einzeln ausgegebenen Hefte als IV 1 (bezw. IV 1, I), IV 1, II, IV 2 (bezw. IV 2, I) und IV 2, II unterschieden wurden.

Die *Disposition* des Gesamtstoffes wird sich erst ganz übersehen lassen, wenn die gesamten Teilbände sämtlich vollendet vorliegen; ich behalte mir vor, in einem Schlussworte zu IV 2, II auf die hierher gehörigen Fragen zurückzukommen. Dort soll dann auch ein alphabetisch geordnetes Register für den Gesamtband gegeben werden. Vielleicht aber darf schon hier hervorgehoben werden, dass die Disposition trotz aller Verschiebungen, die sich im Laufe der Ausführung einstellten, einer gewissen Symmetrie nicht entbehrt. In der Tat stehen zu Anfang und Ende Artikel, die sich mit der Frage nach der philosophischen Begründung der Mechanik befassen (der Artikel *Voss* über die Prinzipien der rationellen Mechanik und der ursprünglich von *Boltzmann* übernommene Artikel über das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teile bestehenden Systeme), während die zwischengelagerten Artikel sich ziemlich zu gleichem Umfange auf die Mechanik der Systeme von endlichem Freiheitsgrad und die Mechanik der Kontinua verteilen.

Dies eine wird man uns jedenfalls zugestehen, dass eine ausserordentliche *Menge* von Stoff kritisch durchgearbeitet und nach einem einheitlichen Plane geordnet worden ist. Dass dabei vieles noch unvollkommen und unvollständig geblieben ist, ist niemandem besser bewusst als der Redaktion. Aber immer sind die ersten wichtigen Schritte auf das im Eingang dieser Vorrede bezeichnete Ziel hin getan. Der Studierende, der sich eine Übersicht über das Gesamtgebiet der Mechanik verschaffen will, erfährt doch zum mindesten von dem Vorhandensein der verschiedenen, neben einander herlaufenden Untersuchungsrichtungen und der zugehörigen Litteratur. Mögen unsere Bibliotheken ein übriges tun und dafür sorgen, dass diese Litteratur überall zugänglich sei. Mögen namentlich auch die elementaren Lehrbücher ihre vielfach einseitig gehaltenen Darstellungen an der Fülle des gebotenen Stoffes einer Revision unterziehen.

Wir meinen also, wenn erst Band IV vollendet vorliegt, etwas Bestimmtes und Nützliches geleistet zu haben. Aber freilich ist es, vom höheren Standpunkte, nur eine Vorbereitung. Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch *intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst* gelernt werden; die Litteratur giebt nur eine Beihilfe. Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muss. Die moderne Entwickelung hat ja auch in dieser Hinsicht in vielversprechender Weise eingesetzt. Möge die Wissenschaft der Mechanik, die eine Grunddisziplin aller Naturwissenschaft ist, solcherweise einer neuen Blüte entgegengeführt werden. Möge insbesondere auch das Wort *Leonardo da Vincis* sich wieder bewahrheiten, dass die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist!

Es erübrigt, dass ich allen Denen namens der Redaktion danke, die uns mit hingebender Arbeit unterstützt haben oder weiter zu unterstützen bereit sind. Zunächst unseren geehrten Referenten, deren guten Willen wir vielfach auf eine harte Probe gestellt haben, indem wir immer wieder genauere Darlegungen oder vielseitigere Darstellung verlangten. Dann aber nicht minder der Verlagsbuchhandlung, welche die vielen weitgehenden Änderungen des Textes, die im Laufe der Arbeit notwendig schienen, immer in entgegenkommendster Weise aufgenommen und zur Ausführung gebracht hat. Mögen sie alle die Befriedigung empfinden, die aus dem Bewusstsein entsteht, an einer guten Sache in hervorragender Weise mitgewirkt zu haben.

Göttingen, Weihnachten 1907.

F. Klein.

6. William H. White

Sir William Henry White, 1845-1913, was scheepsbouwer, geen wiskundige. Dat hij in 1912 werd uitgenodigd om het Fifth International Congress of Mathematicians in Cambridge toe te spreken, weerspiegelde het besef onder wiskundigen dat de technische wetenschappen nieuwe vragen opwierpen voor hun vak. White schetste veel indringender dan Klein de verhouding tussen wiskunde en techniek, maar ook hij trok nog niet de consequentie dat de wiskunde op ander wijze dan voorheen een rol te vervullen had in de technische wetenschappen. White was met zijn generatie als het ware de laatste die de opkomst van de wiskunde op dat terrein signaleerde zonder de consequentie te hoeven trekken. Hierna bij Biezeno en bij Von Mises zijn wel de aanzetten te zien tot omschrijving van een nieuwe rol voor de wiskunde.

In de scheepsbouw ging de introductie van stoomvoortstuwing, van stalen bepantsering en tenslotte van geheel stalen schepen hand in hand met de verwetenschappelijking van de scheepsbouwkunde. Vragen naar de ideale stroomlijn en omvang van een schip, naar weerstand van water en voortstuwing van zeeschepen en naar de stabiliteit en sterkte werden in de loop van de negentiende eeuw op een nieuwe manier gesteld. De wiskunde om dat soort vragen te formuleren was niet zonder meer voorhanden, maar belangrijker was eigenlijk nog het entameren van systematisch onderzoek, onder meer in sleeptanks. Als derde kwam er een geheel nieuw probleem bij, althans een probleem waarvoor voor het eerst een wiskundige formulering werd gezocht, namelijk de kwestie van de relatie tusssen schaalmodel en werkelijkheid (dimensional analysis). William Froude (1810-1879) was de grote wetenschapper op dit terrein; White was in Engeland - zoals B.J. Tideman (1834-1883) dat was in Nederland - in de praktijk de grondlegger van de moderne scheepsbouw. Nieuwe, steeds sterkere, beter bewapende en snellere oorlogsschepen werden er onder zijn leiding gebouwd: de overgang naar stalen schepen met moderne vorm was onomkeerbaar.

White was in 1867 de beste van de eerste lichting afgestudeerden van de scheepsbouwkunde-opleiding in South Kensington, werd onmiddellijk teruggehaald naar constructie-afdeling van de marine, waarvan hij uiteindelijk hoofd zou worden in een carrière slechts onderbroken door twee jaar in dienst van een scheepswerf om zelf marineschepen te bouwen. White werd al in 1871 lector en in 1875 hoogleraar scheepsbouwkunde. Zijn *Manual of Naval Architecture* (1877) werd een in vele talen vertaald standaardwerk. White had juist voorafgaand aan de hier afgedrukte voordracht een commissie over de herziening van het technisch hoger onderwijs voorgezeten en was nauw betrokken bij de opzet van het National Physical Laboratory in Teddington, dat door zijn invloed over een "William Froude National Tank" voor proeven met scheepsmodellen beschikte.

Overgenomen uit *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge, August 21-28, 1912)* Cambridge: Cambridge UP, 1913, 145-160.

PROCEEDINGS

OF THE FIFTH INTERNATIONAL CONGRESS

OF

MATHEMATICIANS

(Cambridge, 22—28 August 1912)

EDITED BY THE GENERAL SECRETARIES OF THE CONGRESS

E. W. HOBSON

SADLEIRIAN PROFESSOR OF PURE MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

AND

A. E. H. LOVE

SEDLEIAN PROFESSOR OF NATURAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF OXFORD

VOL. I.

PART I REPORT OF THE CONGRESS

PART II LECTURES

COMMUNICATIONS (SECTION I)

Cambridge:

at the University Press

1913

THE PLACE OF MATHEMATICS IN ENGINEERING PRACTICE

BY SIR W. H. WHITE.

The foundations of modern engineering have been laid on mathematical and physical science; the practice of engineering is now governed by scientific methods applied to the analyses of experience and the results of experimental research. The Charter of the Institution of Civil Engineers defines engineering as the "art of directing the great sources of power in Nature for the use and convenience of man." Obviously such direction can only be accomplished by engineers who possess an adequate acquaintance with "natural knowledge"—with the laws which govern these great sources of power. Obedience to natural laws is a condition essential to the full utilisation of the great sources of power. It is true, no doubt, that notable achievements in engineering were accomplished during the last century by men whose education was imperfect, whose mathematical and scientific knowledge was small, whose appeal to past experience gave little assistance in the solution of new problems. Their successors now enjoy greatly superior educational advantages; they can profit by enormous advances made in all departments of science and manufacture; they can study and criticise works done by their predecessors in the light of long subsequent experience; but even now there is room for surprise, if not for wonder, when one realises the great success attained by these early engineers.

The advantages obtainable by the combination of scientific training with practical experience are, however, in no way depreciated because, through force of circumstances, the pioneers of engineering had to do their work as best they could. Not a few of these men recognised the serious disadvantages resulting from their lack of scientific training and gave valuable assistance to a movement which ultimately led to the existing methods of training. George Stephenson, for example, who grew to full manhood practically uneducated, took care to secure for his son Robert Stephenson the advantages of a good elementary education which was followed by a period of practical training and then by a course of scientific study at Edinburgh University. The careers of both father and son were greatly influenced by this action, and it is of interest to note that the scheme which Stephenson framed and carried out for the professional training of his son—including the alternation of scholastic and engineering work—was, in its essential features, identical with that recommended in the Report of a representative Committee of British Engineers over which I had the honour to preside eight years ago. That Report has been approved by the leading Engineering Institutions of the United Kingdom and is now largely influencing the education of engineers.

The fundamental idea underlying the accepted system of training engineers consists in the combination of an adequate knowledge of the sciences which bear upon engineering with a thorough practical training on actual engineering works. No man is now entitled to admission as a Corporate Member of the Institution of Civil Engineers unless and until he has given proof of the possession of both these qualifications. Neither kind of training standing alone, or when developed disproportionately, can be regarded as satisfactory, or as meeting the needs of engineering practice. Formerly undue prominence was given to practical training and experience; while the facilities for scientific training were at first non-existent and for a long period were inadequate. Then came a better appreciation of scientific method and a great development of technical education, departments being established for the teaching of engineering science in Universities and University Colleges. The utilisation of these opportunities for instruction by considerable numbers of young men not unnaturally brought about a swing of the pendulum which went beyond reasonable limits. For a time there was a tendency to exalt unduly scientific education, and to depreciate the value of practical training. The hard pressure of experience has done much to adjust that disproportion. University graduates when they enter upon actual work soon discover that degrees in engineering, valuable as they undoubtedly are, require to be supplemented by thorough practical training. On the other hand, men who begin their engineering careers as pupils or assistants to practising engineers or as members of engineering office-staffs, become convinced that their limit of possible attainment must be low, unless scientific knowledge is added to practical experience. Under existing conditions new and difficult problems continually arise in all branches of engineering practice, and satisfactory solutions can only be found by bringing to bear upon these problems all the resources furnished by natural knowledge, accumulated experience and experimental research.

The full equipment of an engineer must include knowledge of other sciences besides the mathematical, but our present concern is exclusively with the latter. An adequate knowledge of mathematics must be possessed by every educated engineer, because he thus acquires valuable tools, by the use of which he can overcome difficulties that would otherwise be insuperable, as well as habits of thought and methods of rigorous investigation which are invaluable when he has to deal with novel and difficult undertakings. Apart from the employment of mathematics it would not be possible for the engineer to carry out designs and construction of engineering works, of structures and machines, capable of fulfilling their intended purposes and possessing both sufficient strength and durability. The days of blind reliance upon engineering formulae and "rules of thumb" are over. Syllabuses of instruction for the guidance of engineering students, standards established for degrees and diplomas in engineering science, conditions laid down as necessary qualifications for membership of great Engineering Societies, all furnish full recognition of the fact that an adequate knowledge of mathematics is essential to the successful practice of engineering.

It may be asked what range and character of mathematical knowledge can be described as adequate? Answers to this question are to be found in Calendars of Schools of Engineering which set forth detailed courses of study considered necessary for the attainment of degrees or diplomas. Identity of conditions does not exist in these Regulations, but a closer approach to uniformity has been reached as greater experience has been gained, and it is obviously desirable that further progress should be made in that direction. Engineering Degrees ought to be based on a common standard and to represent an equal attainment. These degrees, of course, should be regarded simply as certificates of knowledge of the fundamentals of engineering science; they do not cover all the mathematical knowledge requisite for the practice of particular branches of engineering, and in most branches a greater range of mathematics is necessary. Moreover a degree-course in engineering requires to be supplemented in all cases by subsequent practical training and experience, and in many cases by advanced or specialised courses of mathematical study going beyond the standards associated with degrees. In the settlement of these advanced courses the needs of each branch of engineering must be determined on the basis of experience; and the subject is one to be dealt with satisfactorily only on the basis of conference between practising engineers and mathematicians. The former know the needs which must be met: the latter can advise as to the best methods of meeting requirements.

Differences of opinion have always prevailed, and still exist, in regard to the methods by which mathematics should be taught to engineering students. Some authorities favour the arrangement of specialised courses of instruction—"mathematics for engineers" or "practical mathematics"—and advocate the creation of separate mathematical sections for engineering schools, even when these schools form departments of Universities or Institutions which possess well-organised mathematical Departments. Other persons, whose opinions are entitled to equal respect, believe that purely mathematical instruction is best given to engineering students by mathematicians, and that a similar rule should apply to instruction in other branches of science; because that method must lead to a broader view of science and a greater capacity for original and independent investigation than can be obtained by specialised teaching narrowed down to the known requirements of previous engineering practice. Personal experience and observation—as student, teacher and practical engineer—lead me to rank myself with the supporters of the latter method of teaching mathematics. No doubt, in the actual practice of engineers, there is room for "short cuts" and special methods in the use of mathematics; but I am convinced that during the period of education it is advantageous to follow ordinary methods of teaching and to leave specialisation for the time when the performance of actual work will almost inevitably lead each individual to make his choice of the branch of engineering to be followed, and of the methods which will best economise his labour and time in doing the work of calculation. The trend of professional opinion certainly lies in the direction of utilising, as far as possible, existing mathematical departments for the instruction of engineers. During the last year the subject has been exhaustively considered by the Governors of the Imperial College of Science and Technology, a special Committee having been appointed for that purpose. The Imperial College, as is well known, has been formed by bringing together the Royal College of Science, the Royal School of Mines, and the Engineering College founded and maintained by the City and Guilds of London Institute. The last-mentioned College at the outset had to be necessarily self-contained, and had its own Mathematical Department which was admirably organised and conducted by Professor Henrici over a very long period. The College of Science and Royal School of Mines also included a Department of

Mathematics and Mechanics of which Professor Perry has been the distinguished Director for many years. Both these Departments have justified their existence and done admirable work: but the development of the scheme of the Imperial College rendered it necessary to reconsider the subject of future mathematical instruction in the College as a whole. Alternatives taken into consideration were (1) the continuance of separate provision for engineering students; (2) the creation of a single department to be presided over by a mathematician of distinction, in which engineering students would receive their fundamental instruction in mathematics. After thorough investigation the latter course was preferred and will be carried into effect. Its adoption will in no way interfere with the teaching of special applications of mathematics as parts of the courses of instruction given by professors of engineering; and no one familiar with the training of engineers would consider such a change desirable.

A second example of the opinion which now prevails respecting the teaching of mathematics to engineers may be found in a valuable Paper by Professor Hopkinson of Cambridge University, published this year as one of a Series of Special Reports to the Board of Education on the teaching of Mathematics in the United Kingdom. Professor Hopkinson states that for good reasons, and during a considerable period after the Engineering Department was established at Cambridge, its students with few exceptions "got the whole of their instruction within the walls of the Engineering Laboratory," and "had not the full advantage of their position as students of Engineering Science in a centre of mathematical learning and research." In recent years, however, "the establishment of closer relations between the two studies (Mathematics and Engineering) has made great progress, and at the present time the students of Engineering get their foundation of Mathematics and of Elementary Mechanics from College Teachers, many of whom have graduated in the Mathematical Tripos."

It may be interesting to add that in a recent "Summary Report of the Teaching of Mathematics in Japan," Mr Fujisawa has discussed the "teaching of mathematics in technical education" in a brief but interesting fashion. While advocating the "practical" method of instruction, he is careful to explain that the form of utilitarianism which he recommends "has the potentiality of manifesting its usefulness wherever there is a necessity"—a condition which obviously cannot exist unless the engineer is endowed with a good knowledge of the principles and processes of mathematics.

More than seventy years ago, men who had received a mathematical and scientific training in the first British School of Naval Architecture, wrote as follows in vindication of the necessity for the liberal education of those engaged in the designing of ships:—"The study of naval architecture brings early conviction to the mind of the constructor that he can trust little or nothing to *a priori* reasoning. He uses the exact sciences it is true, but uses them only as a means of tracing the connection between cause and effects, in order to deduce principles that may be applied to his future works, with a certainty of producing the results he contemplates." This utterance may be applied with equal force to the practice of other branches of engineering; and, amongst the exact sciences which play so important a part in successful achievement, mathematics certainly hold the first place. The "complete engineer" of the earlier and simpler periods can exist no longer under modern conditions. Even the ablest men are driven to specialise in practice: but whatever branch of engineering may be selected, the worker will need that fundamental training in mathematics to which allusion has been made. Few engineers engaged in professional work have opportunities of prosecuting mathematical studies systematically, although they are continually using mathematical tools provided during their college careers, and not infrequently have occasion to add to their mathematical equipment in order to meet new demands, or to go beyond precedent and experience. When one considers the great responsibilities which practising engineers have to bear, it is not surprising to find that they, as a class, have made comparatively few contributions to the advancement of mathematical science, although they have been well trained in mathematics and continually apply that knowledge. There are, of course, exceptions to this rule; indeed, I have known engineers who turned to mathematics as a recreation, but these men are exceptional. Another group whose members have done notable work of a mathematical nature have been trained as engineers, but have either passed out of practice to an extent which left them ample leisure or have become professors of engineering. The names and work of engineers like Rankine, Froude and John Hopkinson will always be held in honour by mathematicians as well as by members of the profession which they adorned. The labours of many mathematicians who have devoted themselves to the tuition of engineers, and after becoming acquainted with the problems of engineering have done splendid work in the formulation of mathematical theories on which have been based valuable rules of a practical nature, also deserve and always receive the grateful appreciation of engineers. But, speaking broadly, there is a real and abiding distinction between the engineer, however accomplished he may be in mathematical science, and the mathematician however well informed he may be in regard to engineering practice. The mathematician necessarily regards engineering chiefly from the scientific point of view, and although he may aim at advancing engineering science, he is primarily concerned with the bearing of mathematics thereon. The engineer, being charged with actual design and construction of efficient and permanent works in the most economical manner possible, must put considerations of a practical and utilitarian character in the forefront; and while he seeks to utilise the aids which mathematical and physical science can render, his chief aim must always be to achieve practical and commercial success. There is obviously room for both classes, and their close and friendly collaboration in modern times has produced wonderful results. Fortunately the conditions which formerly prevailed have ceased to exist. Much less is said about the alleged distinction between pure and applied science, or about the comparative untrustworthiness of theory as compared with practical experience. Fuller knowledge has led to a better understanding of what is needed to secure complete success in carrying out great engineering works on which the comfort, safety, economical transport and easy communications of the civilized world so largely depend. The true place of mathematics in engineering practice is now better understood, and it is recognised to be an important place, although not so important as was formerly claimed for it by mathematicians.

The character of the change which has taken place in the use of mathematics in connection with engineering practice may be illustrated by reference to that branch of engineering with which my life-work has been connected. It is probably true to say that no branch of engineering has benefited more from mathematical assistance than naval architecture has done, and naval architects undoubtedly require to have at least as intimate a knowledge of mathematics as any other class of engineers. Moreover it was one of the first branches of engineering for which the foundation of a mathematical theory was attempted in modern times; and these attempts were made by men who in their day and generation were recognised to be in the first rank of mathematicians. The work which they did is now almost forgotten, but it laid the foundation for the science of naval architecture as it exists to-day. To France belongs the honour of having given most encouragement to men of science to attack these problems, and the Academy of Sciences aided the movement greatly by offering prizes which brought into the field not a few of the ablest European mathematicians during the latter half of the eighteenth century. Few of these mathematicians had personal knowledge of the sea or ships, and their investigations were influenced by these limitations. Others had made long voyages; like Bouguer, who (in 1735) proceeded to Peru *pour la mesure de la Terre*, and as a consequence of that experience a very practical tone was given to his famous *Traité du Navire*, which was published in 1745. It would be interesting to sketch the valuable work done by this single mathematician, but time does not allow me to do so. My main purpose at present is to illustrate the change that has since taken place in the use of mathematics in attacking engineering problems; and this may be done better by taking a single problem and showing how it was dealt with in the eighteenth and the nineteenth centuries.

Daniel Bernoulli in 1757 won the prize offered for the second time by the Académie Royale des Sciences for an answer to the question:—What is the best means of diminishing the rolling and pitching of a ship without thereby sensibly depriving her of any of the good qualities which she should possess? His *Mémoire* was published subsequently; it is an admirable piece of work, and deals thoroughly with the stability of ships; but here Bernoulli had been anticipated by Bouguer and made acknowledgment of the fact. Greater originality was shown in a mathematical investigation of the behaviour of ships in a seaway; and in a consideration of the influence of wave-motion upon the conditions of fluid pressure, as well as the determination of the instantaneous position of equilibrium for a ship floating amongst waves. Bernoulli recognised that the particles of water in a wave must be subjected to horizontal as well as vertical accelerations, although in his mathematical expressions he took account of the latter only. He emphasised the important influence which the relative sizes of waves and ships must have upon rolling and pitching motions, and advised that attention should be mainly devoted to cases where ships were small in proportion to the waves they encountered. In this particular he departed from assumptions usually made by his contemporaries and anticipated modern views. Bernoulli also dwelt upon the critical case wherein ocean waves, forming a regular series, have a period synchronising with the period of still-water rolling of the ship which they meet. A gradual accumulation of angular motion was shown to be inevitable in such circumstances, and it was remarked that the consequent rolling motions must be considerable and might possibly become dangerous in their extent. Bernoulli recommended the conduct of experiments to determine the periods of oscillation of ships in still water, and described methods of conducting these experiments. He also insisted upon the necessity for making accurate observations of the rolling of ships when amongst waves, and made other suggestions of much practical value, which have since been repeated by writers unfamiliar with Bernoulli's work and have been practically applied. Unfortunately the neglect by Bernoulli in his mathematical investigations of the horizontal accelerations of particles of water, which he recognised as existing in waves, led to erroneous conclusions in regard to the instantaneous position of equilibrium for a ship when floating amongst large waves and the best means for securing steadiness. Bernoulli considered that when a ship was in instantaneous equilibrium, her centre of gravity and the centre of buoyancy—i.e. the centre of gravity of the volume of water instantaneously displaced by the ship—must lie in the same vertical line. This condition of course holds good for a ship floating at rest in still water, but not for a ship floating amongst waves of large relative dimensions. Bernoulli deduced from his investigations a practical rule for the guidance of naval architects: viz. that in order to minimise rolling, ships should be designed so that their centres of buoyancy when they were upright and at rest should be made to coincide with the centre of gravity. He considered that ships should be made deep, that large quantities of ballast should be used, and that the cross-sections should be approximately triangular in form. This practical rule was misleading, and if applied in a design might be exceedingly mischievous in its effect on the behaviour of ships. Bernoulli himself foresaw that, in certain cases, his rule would work badly, but he considered that these would but rarely occur. It is now known that this view was mistaken.

The detailed mathematical investigations contained in Bernoulli's *Mémoire* are still of much interest; they included the examination of cases in which were assumed widely differing ratios of the natural periods of ships to the period of the waves producing rolling motion. Throughout, the motions of ships were supposed to be unaffected by the resistance of the surrounding water, but Bernoulli did not overlook the steadying effect which water-resistance would exercise on a ship in a seaway; on the contrary he recognised the influence which changes in the underwater forms of ships must have upon the amount and steadying effect of that resistance, and he recommended the use of side-keels in order to minimise rolling. Having regard to the state of knowledge at the time this *Mémoire* appeared, it was undoubtedly a remarkable piece of work and it well deserved the reward bestowed by the Academy. It contained many practical suggestions for experimental enquiry and for guidance in the preparation of designs for ships; but it was essentially a mathematical study and had little influence on the work of naval architects.

A century later the same problems were attacked by William Froude, a graduate of Oxford University and an engineer of experience in constructional work. As an assistant to Isambard Brunel, the attention of Froude had been directed to these subjects in connection with the design and construction of the *Great Eastern*, a ship of relatively enormous dimensions and novel type, respecting whose safety, manageability and behaviour in heavy seas serious doubts had been expressed. Like Bernoulli, of whose work I feel confident Froude had no knowledge, the modern investigator perceived that, amongst waves, there must be considerable variations in the direction and magnitude of the pressure delivered by the surrounding water on the surface of a ship's bottom; and that the instantaneous position of equilibrium for a ship exposed to the action of waves of large relative dimensions must be discovered if a theory of rolling was to be framed. Froude worked out a complete theory of trochoidal wave-motion and enunciated the principle of an "effective wave-slope." In his investigations it was assumed that the resultant water-pressure on the ship at each instant acted through the centre of buoyancy and normally to the effective wave-slope. In the differential equation framed for unresisted rolling, Froude took a curve of sines for the effective wave-slope instead of a trochoid. Having obtained the general solution of that equation, he proceeded to consider the behaviour of ships as influenced by variations in the ratios of their still-water periods of rolling oscillation to the relative periods of the waves encountered. In this manner the particular cases considered by Bernoulli were readily investigated, and many of the broad deductions made a century before were amended. The critical case of synchronism of ship-period and wave-period which Bernoulli had brought into prominence was shown to be that requiring most consideration. For that case the increment of oscillation produced by the passage of each wave of a regular series was determined on the hypothesis of unresisted rolling, and was shown to be about three times as great as the maximum inclination to the horizontal of the effective wave-slope. It was also made clear that apart from the influence of water-resistance, such synchronism of periods must lead to a ship being capsized by the passage of comparatively few waves. Up to this point, the investigation made by Froude was strictly mathematical, and the modern engineer who had received a thorough mathematical training had reached results superior to those obtained by the famous mathematician a century before; becoming, in fact, the founder of a theory for the oscillations of ships amongst waves which has been universally accepted. Like Bernoulli, Froude became impressed with the necessity for experiments which would determine the periods of still-water rolling for ships; and with the desirability for making observations of the rolling of ships in a seaway. In addition he emphasised the necessity for more extensive observations on the dimensions and periods of sea-waves, a subject which had been investigated to some extent by Dr Scoresby and other observers, but had been left in an incomplete state. One great generalisation was made by Froude at an early period in this important work, and it has since become a fundamental rule in the practice of naval architects; viz. that freedom from heavy rolling under the conditions usually met with at sea was likely to be favoured by making the period of still-water rolling of ships as large as was possible under the conditions governing the designs. This rule was the exact converse of that laid down by Bernoulli, as the effect of the latter rule by increasing the stability would have lessened the period. The explanation of this simple rule is to be found in the consideration that the longer the natural period of a ship is, the less likely is she to encounter waves whose period will synchronise with her own.

Purely mathematical treatment of the subject did not satisfy the mind of a trained engineer like Froude. For practical purposes it was essential that the effect of water-resistance to rolling should be determined and brought into the account. Here purely mathematical investigation could not possibly provide solutions; experimental research, conducted in accordance with scientific methods, became necessary. Aided by the Admiralty, Froude embarked upon a series of experiments which extended over several years. Most of these experiments were made on actual ships, but models were employed in special cases. In the analysis of experimental results, mathematics necessarily played a great part; indeed without their employment, the proper deductions could not have been made. On the basis of these analyses, Froude obtained valuable data and determined experimentally "coefficients" of resistance to rolling experienced respectively by the flat and curved portions of the immersed surfaces of ships. Furthermore he demonstrated the fact that the surface disturbance produced by the rolling of ships in still-water accounted for a large part of the extinctive effect which was produced when a ship which had been set rolling in still water was allowed to come to rest. In this way, and step by step, Froude devised methods by means of which naval architects can now calculate with close approximation the extinctive effect of water-resistance for a new design. Finally, Froude produced a method of "graphic integration," the application of which in association with the calculation of the effect of water-resistance, enables a graphic record to be constructed showing the probable behaviour of a ship when exposed to the action of successive waves, not merely when they form a regular series, but when they are parts of an irregular sea. Subsequent investigators have devised amendments or extensions of Froude's methods, but in all essentials they stand to-day as he left them—a monument of his conspicuous ability, and an illustration of the modern method in which mathematics and experimental research are associated in the solution of engineering problems which would otherwise remain unsolved.

In tracing as has been done the contrast between the methods of Bernoulli and Froude, an indirect answer has been given to the question—What is the true place of mathematics in engineering practice? It has been shown that even in the hands of a great mathematician, purely mathematical investigation cannot suffice, and that Bernoulli became convinced, in the course of his study of the behaviour of ships in a seaway, that no complete or trustworthy solution could be found apart from experimental research, as well as careful observations of ocean waves and the rolling of actual ships. Bernoulli was not in a position to undertake, or to lead others to undertake, these experiments and observations. In his mathematical investigations he made, and necessarily made, certain assumptions which are now known to have been incorrect. Even the most accurate mathematical processes, when applied to equations which were framed on imperfect or incorrect assumptions, could not produce trustworthy results; and consequently the main deductions made by Bernoulli, and the rules recommended by him for the guidance of naval architects, would have led to disappointment if they had been applied in practice. On the other hand, Froude, himself a great experimentalist, was fortunately able to impress upon the British Admiralty through the Constructive Staff the importance of making experiments and extensive observations of wave-phenomena and the behaviour of ships. Not merely did Froude devote many years of personal attention to these subjects, but he was aided over a long period by the large resources of the Royal

Navy. Similar work on a very large scale was also done simultaneously by the French Navy. Some of my earliest experiences at the Admiralty forty-five years ago were gained in connection with these observations and experiments, so that I speak from personal knowledge of the influence which Froude exercised, the inspiration of his great devotion and wonderful initiative. As a result of all these efforts, a great mass of experimental data was accumulated; the results of a large number of observations were summarised and analysed; and, in the end, the soundness of the modern theory was established, and the future practice of naval architects was made more certain in their attempts to produce designs for ships which should be steady and well-behaved at sea.

At the risk of making this lecture appear to be chiefly a notice of work done by William Froude, or a summary of the advances made in the science of naval architecture, another illustration will be given of the general principle laid down in regard to the place of mathematics in engineering practice.

Mathematicians, from an early date, were attracted by the subject of the resistance offered by water to the motion of ships and made many attempts to frame satisfactory theories. The earliest investigations were based upon the assumption that the immersed surface of a ship's skin could be treated as if it consisted of an aggregation of elements, each of which was a very small plane area, set at a known angle of obliquity to the direction of motion through the water. For each elementary plane area it was proposed to estimate the resistance independently of the others, and as if it were a small isolated flat plate. The integration of such resistances over the whole surface was supposed to represent the total resistance of the water to the motion of the ship at a given speed. Certain further assumptions were made in regard to the laws connecting the resistance of each unit of area with its angle of obliquity to the direction of motion and with the speed of advance. The effect of friction was, in most cases, neglected; nor was any account taken of surface disturbance produced by the motion of the ship. It is unnecessary to dwell upon the errors and incompleteness of these assumptions. So long as ships were propelled by sails little practical importance attached to an exact determination of the resistance experienced at a certain speed. When steamships came into use it was of primary importance to have the power of making close approximations to that resistance because estimates for the engine-power required to attain a given speed had to be based thereon. The subject received great consideration, as the result of which certain simple rules were framed and commonly employed in making estimates for the engine-power to be provided in new ships. These rules were mainly based on the results obtained by trials of existing vessels; and these trial-results, of course, included not merely the effect of water-resistance—as influenced by the form and condition of the immersed surface of a ship—but were also affected by the varying efficiency of the propelling apparatus and propellers. Many attempts were made to separate these items of performance and to determine the actual amount of the resistance for a ship and the separate efficiencies of her propellers and machinery. Little progress was secured until 1868. Mathematical theories were framed, it is true, for estimating the efficiency of propellers; but while these theories were accurate enough if the assumptions underlying them had been complete and representative of actual phenomena, there was no possibility of fulfilling those conditions since the phenomena were neither fully known nor understood.

In 1868 a special and representative Committee—including Rankine and Kelvin—appointed by the British Association, made a Report on this subject and recommended that towing experiments should be made on full-sized ships. The Committee was almost unanimously of opinion that the only method which would give trustworthy information in regard to the resistances experienced at various speeds was to tow actual ships and not to depend upon models. William Froude dissented from this conclusion and recommended model experiments. Accepting the stream-line theory of resistance which Rankine had introduced, Froude based upon it a system of experiment which dealt separately with frictional resistance and applied to the residual resistance—after friction had been allowed for and deducted—a law of "corresponding speeds" between models and full-sized ships which he had worked out independently. That law had been previously recognised in a more general form by mathematicians, and had been investigated for this particular case by a French mathematician, M. Reech, of whose work Froude was then ignorant. By this happy association of mathematical theory with experimental research, Froude placed in the hands of naval architects the means of solving problems which could not be dealt with either by purely mathematical investigation, or by experience with actual ships. Experimental tanks of the character devised by Froude have now been multiplied in all maritime countries. The latest and in many respects the best of these tanks, which is due to the generosity of Mr Alfred Yarrow, is a Department of the British National Physical Laboratory. The operations of these tanks have resulted in a great addition to natural knowledge and have secured enormous economies of fuel. The success achieved in connection with modern developments of steam navigation and the attainment of very high speeds is chiefly due to tank experiments which have involved relatively small cost, and enabled naval architects to choose for every design the form which gives the least resistance possible under the conditions laid down for a new ship, even when the size or speed required go beyond all precedent. Considerations of stability, carrying capacity, available depths of water, dimensions of dock entrances and other matters, as well as speed and fuel consumption, may limit the designer and narrow the alternatives at his disposal; but ordinarily there is room for considerable variations of form in a new design, and in making the final selection of form it is essential that the designer should know how the resistances of these permissible alternatives compare. Naval architects throughout the world enjoy great advantages in this respect over their predecessors, and owe their position entirely to the genius and persistence of William Froude.

Since the work of Froude in this direction was done, model experiments have become the rule in many departments of engineering and the scientific interpretation of the results has greatly influenced the designs of structures and machines. Prominent amongst these recent applications of experimental research on models stand those relating to air-resistance and wind-pressure on bridges and other structures. In regard to the laws of wind-pressure much has been discovered in recent years, and in connection with the effects of wind-pressure on engineering structures especial reference ought to be made to the work done by Dr Stanton at the National

Physical Laboratory. All engineers owe a debt of gratitude to that distinguished experimentalist and to the Institution where he works; and they recognise the fact that he has demonstrated the trustworthiness of deductions made from tests with small models exposed to the action of air-currents when applied on the full scale to complicated structures for which independent mathematical calculations of the effect of wind-pressure could not be made. The late Sir Benjamin Baker, who was chiefly responsible for the design of the Forth Bridge, was one of the first to appreciate and make use of this experimental system, and no engineer of his time more frankly admitted than he did what a debt engineering practice owed to mathematics when used in the proper manner.

The proper use of mathematics in engineering is now generally admitted to include the following steps. First comes the development of a mathematical theory, based on assumptions which are thought to represent and embody known conditions disclosed by past practice and observation. From these theoretical investigations there originate valuable suggestions for experimental enquiries or for careful and extensive investigations. The results obtained by experimental research or from observation and experience must be subjected to mathematical analysis: and the deductions made therefrom usually lead to amendments or extensions of the original theory and to the device of useful rules for guidance in practice. Purely mathematical theories have served and still serve a useful purpose in engineering; but it is now universally agreed that the chief services of mathematics to engineering are rendered in framing schemes for experimental research, in analysing results, in directing the conduct of observations on the behaviour of existing engineering works, and in the establishment of general principles and practical rules which engineers can utilise in their daily professional employment.

One of the most recent examples of this procedure is to be found in the constitution and proceedings of the Advisory Committee appointed in 1909 by the British Government in connection with the study of Aeronautics. Its membership includes distinguished mathematicians, physicists, engineers and officers of the army and navy, and its President is Lord Rayleigh, Chancellor of the University of Cambridge. The declared intention in establishing this Committee was to bring the highest scientific talent "to bear on the problems which have to be solved" in order to endow the military and naval forces of the British Empire with efficient aerial machines. The Reports published during the last two years are of great value; the work done by the Committee—described as "the scientific study of the problems of flight with a view to their practical solution"—has been accompanied and supplemented by research and experiment carried out by the Director of the National Physical Laboratory (Dr Glazebrook) and his staff in accordance with a definite programme approved by the Committee. These investigations necessarily cover a very wide field in which there is ample room for the operations of all the branches of science and engineering represented on the Committee, and there can be no doubt that already the influence of the work done has been felt in practice. No one who has followed the progress made in aerial navigation, however, can fail to be convinced that although a considerable amount of purely mathematical investigation has been devoted to the problems of flight, it has hitherto had but little influence on practice, in comparison with that exercised by improvements due to mechanical engineering—tending to greater lightness of the engines in relation to their power—and by actual experiments made with models and full-sized flying machines. A stage has been reached, no doubt, where the interpretation by mathematicians of the experimental results available and their suggestions as to the direction in which fuller experimental research can best be carried out are of great importance, and that fact is universally recognised by engineers.

Even when the fullest use has been made of mathematical science applied in the best way and of experimental research there still remain problems which have hitherto defied all efforts at their complete solution, and engineers have to be content with provisional hypotheses. Of the James Forrest Lectures given annually at the Institution of Civil Engineers a long series has been devoted to the description of "Unsolved Problems in Engineering." Mathematicians seeking fresh fields to conquer might profitably study these utterances of practising engineers of repute. On this occasion it must suffice to mention two classes of subjects on which additional light is still needed, although they are now less obscure than they have been in the past, thanks to long years of work and experiment.

The first group has relation to the laws which govern the efficiency of screw-propellers when applied to steamships, and has long engaged the attention of a multitude of writers in all maritime countries. Many mathematical theories have been published, which are of interest and value as mathematics, and are sound if the fundamental assumptions made could be accepted. It is, however, no exaggeration to say that at the present time there exists no mathematical theory which has any considerable influence on the design of screw-propellers and the determination of the form, area and pitch. Experience and experiment are still mainly depended upon when work of that kind has to be undertaken. Of course certain mathematical principles underlie all propeller designs, but the phenomena attending the operation of a screw-propeller at the stern of a ship in motion are too variable and complex to be represented by any mathematical equation even if they were fully known and understood—which they are not. The water in which a propeller works has already been set in motion by the ship before it reaches the propeller, and the "wake" of a ship in motion is in a very confused state. The action of a propeller upon the water "passing through it" and the manner in which its effective thrust is obtained still remain subjects for discussion and for wide differences of opinion between mathematicians and experimentalists who have seriously studied them. Froude initiated a system of model-experiments for propellers, both when working in open water and when attached to and propelling ships or developing an equivalent thrust. His son, Mr R. E. Froude, has done remarkable work in the same direction, and many other experimentalists have engaged in the task: but after more than seventy years of experience in the practical use of screw-propellers we remain without complete or accurate knowledge which would enable the designs of propellers for new ships, of novel types, or of very high speed, to be prepared with a certainty of success. On the whole, naval architects and marine engineers depend largely upon the results of experience with other ships. Although model-experiments are also utilised, there is not the same confidence in passing from results obtained with model propellers to full-sized propellers as there is in passing from model ships to full-sized ships. Probably this fact is chiefly due to essential differences in the reactions between the water and the surfaces of models and the surfaces of full-sized screws moving at the rates of revolution appropriate to each. These matters are receiving and have already received careful study not merely by the Superintendents of Experimental Tanks, but by practising engineers like Sir Charles Parsons and Sir John Thornycroft. The phenomenon of "cavitation"—which has been described as the breaking-away of water from the screw surfaces when the rate of revolution of the screw exceeds certain limits, and when the thrust per unit of area on the screw exceeds certain values—is one which has given much trouble in the cases of vessels of exceedingly high speed such as destroyers and swift cruisers. It is being investigated experimentally, but up to the present time no general solution has been found. In existing conditions surprising differences in the efficiency of propellers have been produced by what appeared to be small changes in design. On the whole the largest improvements have been obtained as the result of full-scale trials made in ships, although model-experiments have been of service in suggesting the direction in which improvements were probable. In my own experience very remarkable cases have occurred, and not infrequently it has been difficult even after the event to explain the results obtained. One such case may be mentioned as an illustration. A large cruiser obtained the guaranteed speed of 23 knots on trial with a development of about 30,000 horse-power. I had anticipated a higher speed. Progressive trials made at various speeds showed that the "slip" of the propellers became excessive as the maximum speed was approached, although the blade area given to the propellers on the basis of past experience was adequate for the power and thrust. The blade-area was increased about 20 per cent., the diameter and pitch of the screw-propellers being but little changed. With these new propellers the maximum speed became 24 knots and 23 knots was obtained with a development of 27,000 horse-power, as against 30,000 horse-power required with the original screws. The increase of blade area necessarily involved greater frictional losses on the screws, yet the effective thrust was increased, a higher maximum speed was attained, and the power required at all speeds became less than in the earlier trials down to 15 knots. This incident could be paralleled from the experience of many naval architects, and it illustrates the uncertainties which still have to be faced in steamship-design when unprecedented speeds have to be guaranteed.

This open confession of lack of complete knowledge, made in the presence of the professors of an exact science such as mathematics, may be thought singular. It is the fashion to criticise, if not to condemn, designers of ships and their propelling apparatus on the ground that after long experience there ought to be a complete mastery of these problems. That criticism, however, is hardly fair; because it overlooks the fact that throughout the period of steam navigation there has been incessant change in the dimensions, forms and speeds of ships and in the character of the propelling apparatus.

Knowledge is also still incomplete, and possibly complete knowledge will never be attained, in regard to the stresses experienced by the structures of ships at sea, when driven through waves and made to perform rolling, pitching and heaving movements simultaneously. The subject has long engaged the attention of mathematicians and naval architects. Early in the last century Dr Young made a study of the causes of longitudinal bending in wood-built ships, and presented a Memoir to the Royal Society. The eminent French geometrician Charles Dupin also dealt with the subject; which had great practical interest at a date when serious "hogging" or "arching" of ships was a common occurrence. Since iron and steel have been available for ship-construction—and as a consequence the dimensions, speeds and carrying powers of ships have been enormously increased—questions of a similar character have arisen on a larger scale, and have been carefully studied. There is much in common between ship construction and bridge construction under modern conditions; and because of this resemblance engineers practising in works of a constructional nature on land have been brought into close relation with the structural arrangements of ships. Sir William Fairbairn, who was associated with the younger Stephenson in the construction of the Menai and Conway tubular bridges, and Isambard Brunel, whose chief work was on railways, but who designed the famous steamships *Great Western*, *Great Britain* and *Great Eastern*, are amongst the men of this class who have most influenced shipbuilding. There are, however, obvious and fundamental differences between the conditions of even the greatest bridge founded on the solid earth, and those holding good in the case of self-contained floating structures carrying great loads across the sea, containing powerful propelling apparatus, and necessarily exposed to the action of winds and waves. In the former case bending moments and shearing stresses which must be provided against can be closely estimated, and ample strength can be secured by adopting proper "factors of safety." In the case of ships no similar approximations are possible; because their structures are stressed not only by the unequal distribution of weight and buoyancy, but have to bear rapidly varying and compound stresses produced by rolling and pitching motions, by external water-pressure and by the action of the propelling apparatus, as well as to resist heavy blows of the sea. Inevitably, therefore, the naval architect has to face the unknown when deciding on the "scantlings" of various parts of the structure of a new ship the design of which goes beyond precedent.

Mathematicians have had the courage to attack these problems and to propound theories respecting them. Professor Kriloff of the Imperial University, St Petersburg, has been one of the latest workers in this field, and has probably carried the mathematical theory furthest: but his work, like that of his predecessors, has had little effect on the practice of naval architects. Indeed it seems too much to expect that even the most accomplished mathematician can deal satisfactorily with the complex conditions which influence the variable stresses acting, from moment to moment, on the structure of a ship at sea. In these circumstances naval architects have been compelled to fall back upon experience with ships which have been long in service at sea, and to obtain the best guidance possible from the application of mathematics to the analysis of that experience and to the device of rules of a comparative nature. In general this procedure has led to the construction of ships which have possessed ample strength, although the actual margin of strength in excess of the permissible minimum has not been ascertained. In the comparatively few cases wherein weaknesses have been brought to light on service, scientific analysis has enabled even more valuable lessons to be deduced. But it cannot be said that purely mathematical investigation has been of great service to this branch of engineering.

Rankine many years ago proposed to base comparisons of the longitudinal bending moments and shearing stresses of ships amongst waves on the hypothesis that the distribution of weight and buoyancy should be determined for two extreme cases: first when a ship was momentarily resting in equilibrium on the crest of a wave having a length equal to her own length, and a height (hollow to crest) as great as was likely to occur in a seaway—say one-twentieth of the length of the wave. Second when she was momentarily floating astride a hollow of such waves. It was recognised, of course, that these cases were purely hypothetical, but the hypothesis has proved of great value in practice. Attempts have been made to carry the calculations further, and to take account of the effects of rolling, pitching and heaving motions, and of variations in the direction and amount of water-pressure consequent on wave-motion. Practice has been influenced but little by these attempts, which have necessarily been based on more or less arbitrary assumptions themselves not free from doubt. On the other hand Rankine's method has been widely used by naval architects; and the accumulated results of calculations obtained for ships whose reputations for strength and seaworthiness were good, are now available for reference. For new designs calculations of a similar character are made, and by comparison of results with those obtained for completed ships, most closely approaching the new design in type and dimensions, the principal scantlings are determined for various parts of the structure. In calculating the strengths of ships, they are usually treated as hollow girders exposed to the action of forces tending to cause longitudinal bending. The bending moments and shearing stresses calculated for the two extreme hypothetical conditions above described, are used in order to estimate the maximum stresses corresponding thereto in any members of the new ship's structure. A comparison of these maximum stresses (per unit of area of material) with the corresponding figures for successful ships is taken as a guide for determining the sufficiency or insufficiency of the scantlings proposed for the new vessel. In providing for adequate transverse strength and for margins of strength to meet local requirements, naval architects make separate calculations, but in these cases also are guided chiefly by comparisons based on actual experience with other ships. Mathematicians may regard this procedure as unsatisfactory: but they may be assured that any suggestions for improved or more exact methods which may be made will be welcomed by naval architects provided they command confidence and are capable of practical application.

In considering the relation of mathematics to engineering practice one important fact should always be borne in mind. The mission of engineers as a class is to produce results, "to do things," which shall be of practical service to humanity, and shall ensure safety of life and property. Complete solutions of problems, in the mathematical sense, are not usually to be found by engineers; they have to be content, in many cases, with partial solutions and fairly close approximations. It may be taken for granted that engineers desire to perform efficiently the duties laid upon them and that they are ready to avail themselves of all assistance which can be rendered by contemporary science, and by mathematicians in particular. On their behalf it has been my endeavour on this occasion to make suitable acknowledgment of the debt which engineering already owes to mathematics, and to indicate a few of the many problems in which further assistance is needed. All members of the engineering profession will endorse my expression of the hope that the close and friendly relations which have long existed between mathematicians and engineers, and which have yielded excellent results during the past century, will always continue and in future be productive of even greater benefits.

7. Cornelis Biezeno

Cornelis Benjamin Biezeno, 1888-1975, werd in 1914 hoogleraar toegepaste mechanica in Delft, voordat hij de tijd had gehad om te promoveren. Zijn voorganger en leermeester F.K.Th. van Iterson had ervoor gezorgd dat de leerstoel van "toegepaste wiskunde en mechanica" veranderde in "toegepaste mechanica", maar vertrok toch al na drie jaar, mede uit onvrede met de geringe middelen voor wetenschappelijk onderzoek, om directeur van de Staatsmijnen te worden. Biezeno ontwikkelde zich tot een vooraanstaand wetenschapsbeoefenaar en bereikte samen met J.M. Burgers, 1895-1981, zijn internationale doorbraak door in 1924 het eerste *International Congress for Applied Mechanics* te organiseren in Delft, het begin van een traditie.

Toegepaste mechanica was een nieuw vak, geen technische mechanica in de werktuigkundige traditie van Stevin en recenter Reuleaux, geen theoretische, rationele of analytische mechanica ("de mechanica") in de traditie van Newton en Lagrange. Toegepaste mechanica was in zekere zin voor het eerst een toepassing van het tweede op het eerste domein. Dynamische problemen uit de scheepsbouw, motoren en spoorwegen en vliegtuigbouw vroegen om wiskundige behandeling en de ontwikkeling in de wiskunde opende de weg daartoe. Onder leiding van Biezeno kwam een laboratorium voor toegepaste mechanica tot stand waar problemen van trek, breuk, knik etcetera onderzocht werden. Biezeno's hoofdwerk was *Technische Dynamik* in 1939 gepubliceerd samen met Grammel.

Biezeno zou tot 1958 hoogleraar blijven. De positie van het nieuwe vak moest bevochten worden, ook in Delft waar het pas in 1948, 34 jaar na Biezeno's aantreden, mogelijk werd om in zo'n "theoretische" richting af te studeren. Biezeno zag duidelijker dan White en Klein een nieuwe rol voor de wiskunde in de technische wetenschappen. Von Lossow, een exponent van de Anti-Mathematische Bewegung in Duitsland, kreeg in de inaugurale rede van Biezeno dan ook een heel ander en veel offensiever antwoord dan eerder van Felix Klein.

Met de wiskundigen had Biezeno minder op dan met de wiskunde. In 1948 zat hij een commissie voor die adviseerde om de onderafdeling wiskunde aan de THDelft op te heffen en te verdelen over de technische afdelingen - het advies werd niet opgevolgd -. Van de Wiskundig Ingenieursopleiding was hij ook geen voorstander, men zou dit liever aan de afdeling werktuigbouw moeten overlaten. Hulpwetenschap zou de wiskunde immers behoren te zijn, getuige de inaugurale rede uit 1914: *De beteekenis der wiskunde als hulpwetenschap der toegepaste mechanica.*

De beteekenis der Wiskunde als Hulpwetenschap der Toegepaste Mechanica.

REDE

uitgesproken bij de aanvaarding van
het Ambt van Hoogleeraar in de Toegepaste Mechanica
aan de Technische Hoogeschool te DELFT,
den 30en September 1914,

DOOR

C. B. BIEZENO, W. I.

DELFT. - Technische Boekhandel en Drukkerij J. WALTMAN JR. - 1914.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren, Hooggeleerde Heeren Professoren, Heeren Lectoren en Privaat-Docenten, Dames en Heeren Assistenten en Studenten dezer Technische Hoogeschool en verder allen, die mij door Uwe tegenwoordigheid een blijk van werkelijke belangstelling wilt geven,

Zeer gewaardeerde Toehoorders!

Toen mij voor ongeveer een jaar de vereerende opdracht verleend werd het onderwijs in de Toegepaste Mechanica, waaraan Professor F. K. Th. van Iterson zijne krachten tot teleurstelling van velen onttrokken had, te geven tot aan den datum, met ingang van welken in de vervulling van het door mij tijdelijk waar te nemen ambt definitief zou zijn voorzien, wist ik, dat de last van verplichtingen, welke op mijne schouders gelegd werd, wellicht in grootte niet ver verwijderd was van mijne „Kniklast."

Degenen onder U, die de onheilspellende beteekenis van het woord „Knikgevaar" kennen, zullen zich niet alleen kunnen voorstellen met welke bezorgdheid ik het mij toevertrouwde onderwijs inleidde, maar zich tevens afvragen, waaraan of aan wien ik den steun vond, die mij de mij opgelegde taak, ondanks de vele moeilijkheden, welke er aan verbonden waren, deed aanvaarden.

Dien steun heb ik mogen vinden, in het groote vertrouwen, dat mijn beste leermeester, Holst, in mij stelde.

Dat ik in mijne benoeming tot Hoogleeraar het bewijs mag zien dit vertrouwen niet geschonden te hebben, geeft mij eene voldoening, die ver opweegt tegen het gevoel van angst, dat ik geruimen tijd gehad heb, de schuldige getuige te zijn van de eerste vergissing, die ik hem hadde zien maken.

De ervaringen, die ik gedurende het voorgaande cursusjaar heb kunnen opdoen, hebben mij aanleiding gegeven Uwe aandacht te vragen voor het onderwerp, dat ik op het titelblad mijner rede heb aangeduid met:

De beteekenis der Wiskunde als hulpwetenschap van de Toegepaste Mechanica.

De omschrijving van het onderwerp mijner keuze moge voldoende in het licht stellen, dat ik er mij in de volgende beknopte bespreking van zal onthouden, de Mathesis den lof toe te zwaaien, die haar, krachtens de plaats welke zij in de rij der Schoone Kunsten inneemt, toekomt. Ik stel er prijs op, in dit verband, de beschuldiging of zelfs de verdenking van een vóóringenomenheid met een tak van wetenschap, die mij overigens lief is, a priori van de hand wijzen.

Er heeft zich in den laatsten tijd onder de Studenten der eerste twee studiejaren een verderfelijke neiging geopenbaard om de eischen, welke aan hunne wiskundige kennis gesteld wordt, als buitengewoon zwaar te brandmerken, om aan het nut der hun bijgebrachte kennis ernstig te twijfelen.

Het ligt niet op mijn weg hier de oorzaken te bespreken van de zoo zwartgallige meening omtrent de zwaarte der wiskunde-exameneischen; al zou het verleidelijk zijn eens scherp te reageeren op de klachten van dezulken, die in de 5e Klasse der H. B. S. de oppervlakte van een vierkant nog met π uitschelden, niet in staat zijn een axonometrisch teekeningetje met 8 lijnen van een tafel met 4 pooten te maken en in àl hunne verdere studiejaren aan de Technische Hoogeschool hardnekkig vol blijven houden, dat de sinus van 0° één, en de tangens van 90° nul tot waarde heeft.

Maar wèl meende ik dit uur te mogen gebruiken om aan de hand van voorbeelden, welke aan mijn vak ontleend zijn het nut der Wiskunde voor den Ingenieur in het licht te stellen; daarbij hopende er toe te kunnen bijdragen, dat in de toekomst met meer waardeering hulpstudie zal worden aanvaard, en eigenlijke vakkennis met meerder succes onderwezen kunne worden.

Het scheen mij evenzeer gewenscht eens een protest te doen hooren tegen de meening van hen, wier denkbeelden omtrent Hooger Technisch Onderwijs geheel of ten deele tot uiting gebracht worden in een artikel van P. VAN LOSSOW, die in het „Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure" 1899 onder het hoofd „Zur Frage der Ingenieursausbildung" het volgende schreef:

„Der Wert eines wetgehenden Mathematikunterrichtes für Ingenieure wird heutzutage vielfach arg überschätzt; und doch sind keine beweiskräftigen Fälle bekannt geworden, dasz ein Ingenieur als solcher deshalb hervorragendes geleistet hat weil er ein tüchtiger Mathemathiker war, und ebenso wenig war es schon da, das ein Ingenieur nur deshalb in sein Beruf unfähig war, weil er mangelhafte mathematische Kenntnisse hatte.

Im Gegenteil, im Bezug auf die Art und Weise des Denkens unterscheidet sich der Mathematiker vom Ingenieur grundsätzlich.

Jeder Konstruktionlehrer weisz, welche Mühe es kostet, in den Köpfen der Studierenden, nachdem sie sich zwei Jahre lang fast ausschlieszlich mit mathematischen Studien beschäftigen muszten, eine gewisse Revolution hervorzurufen, bis sie von dem Banne der „Unbekannten *X*" befreit sind."

Men vraagt zich bij 't hooren van deze en dergelijke meeningen met stomme verbazing af, wat nu eigenlijk onder een Ingenieur verstaan wordt.

Wanneer het woord „Ingenieur" de beroepstitel is van den middelman, wien geen andere problemen ter oplossing worden voorgelegd dan die, welke in uitkomst tabellarisch te vinden zijn in de Ingenieurshandboeken, dàn kan men inderdaad de meening staande houden, dat de onbruikbaarheid van een ingenieur tengevolge van gemis aan wiskundige bekwaamheden, niet te constateeren zal zijn.

Maar dan vergete men niet, dat men 't over dat soort van technici heeft, die de kennis van honderden bekwame mannen, zoo wiskundigen als ingenieurs, parasietisch gebruiken; wier volslagen onbruikbaarheid zou blijken, wanneer de kennis van anderen hun eens plotseling onthouden werd.

En zonder nu verder kwaad te willen spreken van óf met gebrek aan achting te willen denken aan lieden, die 't ver gebracht hebben in 't opmerkzaam lezen en handig gebruiken van hun verstrekte technische kookrecepten, zoo stel ik toch de vraag of men hun den naam van Ingenieur toe wil kennen, of er een Technische Hoogeschool voor noodig is ze op te leiden?

Moet niet het Hooger Onderwijs mannen vormen met geschoold verstand en helder inzicht? Mannen, wien het niet tot „reflex-beweging" geworden is bij het hooren van een tot hen gerichte vraag te grijpen naar een „boek", waarin 't antwoord misschien „gedrukt" zal staan?

Of zou de T. H. de fabriek moeten zijn, waar in massa-productie een technisch artikel wordt aangemaakt, dat, na bewerking door een zeker aantal wetenschappelijke beitels, boren en fraisen op de revolverbank van technisch onderwijs, onmiddellijk na aflevering aan duizend en een eischen en eischjes van de practijk heeft te voldoen?

Het antwoord op de tweede vraag kan niet ontgaan worden door de tegenwerping, dat de T. H. toch niet uitsluitend aanstaande wetenschappelijke ingenieurs van beteekenis kan vormen.

Het ware belachelijk een dergelijke eisch te stellen; maar wel moet van onze hooger-onderwijsinrichting gevergd worden, dat zij degenen, die de meest wetenschappelijke opleiding verlangen, bevredigt. Wil zij echter aan dezen haar gestelden eisch beantwoorden, dan is een breede wis- en natuurkundige inleidende studie voor hare leerlingen onmisbaar.

Zou men nu bij 't aanvaarden van de noodzakelijkheid dier studie angst moeten hebben, dat er later een Geistesrevolution hervorgerufen zou moeten worden voor en aleer de door VON LOSSOW zoo beklaagde slachtoffers bevrijd zouden zijn van den ban der „Unbekannten *X*", eer zij van dat kwaadaardige, epidemisch geworden mathematische denken gedesinfecteerd zouden wezen, om eerst daardoor weer voldoende geschiktheid te krijgen tot wat in tegenstelling tot wiskundig denken technisch denken pleegt genoemd te worden?

Het zij mij vergund mijn ontkennend antwoord in 't kort te motiveeren.

Degenen der studeerenden, bij wien *wérkelijk* geestes- en gevoelsrevoluties te voorschijn geroepen worden, wanneer zij zich aan den ban der „onbekende *X*" moeten onttrekken, kunnen door hun gemis aan aanleg voor het ingenieursberoep toch kwalijk invloed uitoefenen op de eischen, die aan Technisch Hooger Onderwijs gesteld moeten worden.

Maar zouden de ànderen dan, die wèl geacht kunnen worden ingenieursgaven te bezitten, door inleidende studie misschien zoo bedorven kunnen worden, dat zij hunne oorspronkelijke bekwaamheden zouden verliezen?

Hier vinden tegenstanders van een wiskundige ontwikkeling als basis voor later te geven technisch onderwijs een schijnreden een bevestigend antwoord te geven.

Inderdaad komt het zeer vaak, ja zelfs in de meeste gevallen voor, dat degene, die door zijne goede examens blijk heeft gegeven van het hem gegeven wiskundig onderwijs voordeel te hebben getrokken, in den aanvang van zijne meer speciaal technische studie groote moeilijkheid heeft met het oplossen van betrekkelijk elementaire technische problemen.

Hij heeft nog niet de ervaring, — hoe zou hij trouwens — dat bij de meeste vraagstukken van technischen aard vereenvoudigende aannamen moeten, en binnen bepaalde grenzen ook mogen gemaakt worden.

Hoe dikwijls heb ik op de teekenzaal, na op geoorloofde verwaarloozingen gewezen te hebben, juist van den meer begaafden student de tegenwerping gehoord: „Indien ik dàt geweten had, als die verwaarloozing geoorloofd is, dàn had ik Uw hulp hiervoor niet noodig gehad, en de gestelde vraag wel alleen kunnen beantwoorden".

Meestal was een dergelijke uitroep van een zekeren wrevel, die te begrijpen en te waardeeren was, niet onvermengd.

In de rekening werd het streven naar een, voor het doel overbodige nauwkeurigheid natuurlijk verraden door de aanwezigheid van een te verwaarloozen of als gegeven te beschouwen onbekende x of y of z.

Zou nu zoo iemand, met een alphabetletter te veel in zijne rekening verweten mogen worden, dat hij verkeerd dacht?

Integendeel, men behoorde blij te zijn, dat hij de onbekenden van zijn vraagstuk had kunnen vinden, en zoowel in onderling verband, als in verband met de gegevens van het vraagstuk had kunnen brengen. Hem moest alleen geleerd worden onder welke omstandigheden en in welke mate verwaarloozingen toelaatbaar waren. Het was allerminst noodig een Revolution hervorzurufen, maar er behoorde inzicht gegeven te worden in een nieuwe richting van denken.

De laatste woorden doen U misschien veronderstellen, dat ik den Heer Von Lossow c.s. dan tenminste toch op één punt gelijkgeef en zijne stelling tot de mijne maak, dat „wat de manier van denken betreft, de Ingenieur en de Wiskundige grundsätzlich van elkaar verschillen".

't Liefst hadde ik deze opvatting als eene, misschien in

1899 gehuldigde, thans niet meer geuitte meening doodgezwegen. Maar helaas kan men ze ook heden ten dage nog zoo dikwijls hooren verkondigen als men wil. En ik gevoel me dus wel verplicht ook hier nog eens uit te spreken, dat de manier van denken van Ingenieurs en Mathematici geheel dezelfde is. Onder beide categoriën van denkers zullen er zijn die, langzaam, logisch, slordig, vlug of scherpzinnig denken. Zou er bepaald verschil gemaakt moeten worden tusschen beide groepen van vorschers zoo zou men moeten wijzen op 't verschil in **richting** van denken, dat in 't algeméén aanwezig is.

De Toegepaste Mechanica is echter een wetenschapsgebied, waarop zelfs ook dit *richtingsverschil* in het denken niet meer te constateeren valt.

De nu volgende behandeling van eenige voorbeelden van wiskundig onderzoek ten behoeve van technische problemen moge U hiervan overtuigen, en mij in de gelegenheid stellen het eigenlijke doel mijner rede te vervolgen.

De wiskundige veerkrachtsleer stelt zich tot taak den vormveranderings- en den spanningstoestand van een door bekende krachten belast elastisch lichaam te bepalen zonder andere hulpmiddelen te gebruiken dan die, welke in de evenwichtsvergelijkingen, de wet van HOOKE, den zoogenaamden POISSON'schen contractie-coefficient en de wet van superpositie geboden worden.

De spanningstoestand in eenig punt is bepaald door de spanningen op drie willekeurige, door dat punt gaande vlakken. Ontbinding van deze spanningen volgens aangenomen coordinaatassen doet zien, dat er 9 spanningsonbekenden zijn, tot welker oplossing de evenwichtsvoorwaarden slechts 6 vergelijkingen leveren.

Nu zijn echter de spanningsontbondenen door 6 vergelijkingen in verband te brengen met de ter beschouwde plaatse optredende vormveranderingen, die op hùn beurt zijn uit te drukken in de verplaatsingen, die de punten van het lichaam ondergaan.

12

Voert men de verplaatsingen van een punt als drie nieuwe onbekende functies der coordinaten in, zoo kunnen dus 6 nieuwe vergelijkingen opgesteld worden, die samen met de evenwichtsvoorwaarden een stelsel van 12 vergelijkingen met twaalf onbekenden vormen, dat het elasticiteitsprobleem volkomen beheerscht.

Dit stel vergelijkingen wordt gewoonlijk gereduceerd tot een drietal simultane partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, waarin de verplaatsingen van eenig punt van het lichaam de onbekenden zijn.

Deze drie partieele differentiaalvergelijkingen hebben hunne algemeene oplossing niet gevonden.

Men heeft derhalve voor bijna alle eenvoudige belastingsgevallen vereenvoudigde aannamen gemaakt, die ons in staat stellen buiten deze vergelijkingen om tot een resultaat te geraken. Daarmede hebben echter de algemeene elasticiteitsvergelijkingen geenszins hunne waarde verloren. Want in ieder geval stellen zij ons dan toch in staat voor elk belastingsgeval afzonderlijk te *controleeren* of de gemaakte aannamen al dan niet in overeenstemming met de werkelijkheid zijn. De beroemde verhandeling van DE SAINT-VÉNANT „Sur la torsion des prismes" is daar om de waarde van een dergelijke onderzoekingsmethode in het licht te stellen. Maar behalve aan 't indirecte spanningsonderzoek, heeft men de algemeene vergelijkingen toch òòk aan het directe onderzoek dienstbaar kunnen maken, zooals ik U aan de hand van een voorbeeld, dat ik om de gedachte te bepalen zoo eenvoudig mogelijk gekozen heb, moge aantoonen.

Zij gegeven een door één enkele kracht belaste, aan één uiteinde ingeklemde prismatische balk, welker dwarsdoorsnede twee symmetrie-assen heeft, die met den naam Y- en Z-as mogen aangeduid worden.

Laat de werklijn van de kracht, welke in het niet-ingeklemde uiteinde van den balk moge aangrijpen, evenwijdig loopen aan de verticaal gedachte Z-as.

13

Dan levert het onderzoek naar het verloop der in een bepaalde dwarsdoorsnede optredende trekspanningen, mits de wet van HOOKE, en de aanname van BERNOULLI aanvaard worden, niet de minste moeilijkheid. De Y-as blijkt neutrale lijn te worden, terwijl de trekspanning in een willekeurig punt der doorsnede gelijk is aan 't product van een constante en den Z-coordinaat van het punt. De constante is begrijpelijkerwijze zoowel van den vorm, als van de belasting der beschouwde dwarsdoorsnede afhankelijk.

De bepaling van het verloop der schuifspanningen in de doorsnede is echter reeds bezwaarlijker, zelfs onder zeer vereenvoudigende aannamen. Het resultaat is ook veel minder eenvoudig.

De spanningen der punten eener, met de Y-as evenwijdig loopende, rechte l, hebben dezelfde z-ontbondene en convergeeren naar het punt, dat de raaklijnen, welke aan den omtrek der dwarsdoorsnede in zijne snijpunten met l getrokken kunnen worden, gemeen hebben.

De spanningen in àlle punten der lijn l zijn dus bekend, indien de spanning in haar snijpunt met de Z-as bekend is.

De grootte van deze spanning, is berekenbaar uit het quotient van twee producten, waarvan het eerste gevormd wordt door de in de dwarsdoorsnede optredende afschuivende kracht en het statisch moment van het aan één zijde der lijn l gelegen gedeelte der doorsnede ten opzichte van de neutrale lijn, terwijl het tweede de lengte der koorde l en het traagheidsmoment van de geheele dwarsdoorsnede ten opzichte van de Y-as tot factoren heeft.

Beschouwt men nu echter een z.g. dubbel T-ijzer, dan heeft men de zèkerheid, dat de in werkelijkheid in een dwarsdoorsnede optredende schuifspanningen ter plaatse waar de lijfplaat in de flenzen van het profiel overgaat, zoowel in grootte als richting afwijken van die, welke men met behulp van de zoo juist genoemde regels zou kunnen berekenen.

Want wel is waar vertoont de breedten afmeting van den balk ter bedoelder plaatse geen discontinuiteit, maar zij is toch tè sterk veranderlijk, dan dat men de aan de rekening ten grondslag liggende voorwaarden vervuld kan achten.

Den Heer F. VENING MEINESZ, c. i. komt de eer toe, in een, in „de Ingenieur" van 21 Jan. 1911 verschenen artikel een uiterst belangrijke bijdrage tot de verruiming van onze kennis ten opzichte van het onderhavige spanningsprobleem te hebben geleverd.

Steunende op de algemeene elasticiteitsvergelijkingen, aan zes van welke hij een voor zijn doel uitnemend geschikten, van aesthetisch standpunt beschouwd, uiterst fraaien vorm wist te geven, bepaalde hij de beide lineaire, simultane partieele differentiaalvergelijkingen, waaraan de ontbondenen τ_y en τ_z van de schuifspanning in eenig punt van de dwarsdoorsnede moeten voldoen.

Door eene substitutie, waarbij van τ_y en τ_z welgekozen tweedegraadsfuncties der coordinaten y en z werden afgescheiden, welke functies bovendien ieder nog een willekeurig te kiezen constante bevatten, bracht hij de bepaling van τ_y en τ_z terug tot de oplossing van twee nieuwe functies T_y en T_z, die krachtens de differentiaalvergelijkingen waaraan zij moesten voldoen, op te vatten waren als de partieele afgeleiden $\frac{\delta\varphi}{\delta y}$ en $-\frac{\delta\varphi}{\delta z}$ van één enkele functie φ.

De functie φ nu voldeed aan een partieele differentiaalvergelijking van de 2^e orde, welke, behalve in de potentiaaltheorie, waar zij bekend is onder den naam van „vergelijking van LAPLACE," een belangrijke rol speelt in de leer der trillende snaren, waarin zij onder den naam van „BERNOULLI'SCHE vergelijking" voorkomt.

De algemeene oplossing dezer vergelijking, welke zich ook nog als een bijzonder geval eener EULERSCHE differentiaalvergelijking laat opvatten, wordt geleverd door de som van twee willekeurige functies der complexe grootheden $y + iz$ en $y - iz$, die zich zeer slecht leent tot het aanpassen aan de zoogenaamde randvoorwaarde van het probleem.

De functie φ moet n.l. nog voldoen aan de voorwaarde, dat de uit haar afgeleide waarden van τ_y en τ_z voor punten aan den òmtrek van de dwarsdoorsnede een resulteerende schuifspanning leveren, welke volgens de raaklijn aan dien omtrek is gericht.

Deze voorwaarde is voldoende om de waarde van φ voor de omtrekspunten der dwarsdoorsnede, op een voor het probleem overbodige, constante na, te bepalen.

Zou men derhalve in èlk punt der dwarsdoorsnede een loodlijn op haar vlak kunnen oprichten, waarvan de lengte de bij dat punt behoorende, vooralsnog onbekende waarde van φ zou voorstellen, zoo zou het oppervlak, gevormd door de meetkundige plaats der uiteinden dier loodlijnen, door een volkomen bepaalde, gesloten randkromme moeten gaan.

Nu voldoet echter een tusschen een willekeurige gesloten ruimtekromme gespannen zeepvliesoppervlak aan dezelfde differentiaalvergelijking als de functie φ.

Wanneer derhalve eene, b.v. uit dun koperdraad gebogen randkromme na indompeling in een zeepoplossing er weer uit wordt teruggetrokken, zoo ontstaat een zeepvlies, dat ons in staat moet stellen door directe metingen de schuifspanningen in de punten eener dwarsdoorsnede van onzen balk te bepalen, mits de randkromme slechts zoo opgesteld worde, dat hare orthogonale projectie op 't vlak der doorsnede samenvalle met den omtrek van het profielijzer.

De ingevoerde functies T_y en T_z, die op bekende quadratische vormen na de spanningen τ_y en τ_z leveren, waren, afgezien van 't teeken van T_z, gelijk aan de partieele differentiaalquotienten van φ naar y en z.

Hieruit valt zonder veel moeite af te leiden, dat de bij eenig punt der dwarsdoorsnede behoorende, in Y en Z-richting uitgezette grootheden T_y en T_z een resultante leveren, waarvan grootte en richting samenhangen met de richting van dàt raakvlak aan het φ-oppervlak, welks raakpunt loodrecht boven 't beschouwde punt der dwarsdoorsnede ligt; hare grootte wordt n.l. gegeven door den tangens van den hoek tusschen dit vlak en het vlak der dwarsdoorsnede, hare richting door de snijlijn van beide vlakken.

Nu mag helaas de grootheid T niet aangezien worden voor de schuifspanning van het betreffende punt der dwarsdoorsnede; alleen wanneer de grootheden T_y en T_z identiek geweest waren met τ_y en τ_z, zouden de gevonden eigenschappen van T ook voor de schuifspanning gegolden hebben.

Is het er echter om te doen in de omgeving van een bepaald punt een, de waarheid benaderend overzicht van het verloop der schuifspanningen te verkrijgen, zoo laat een gunstige keuze van de in waarde nog onbepaald gelaten constanten, die bij de transformatie der grootheden τ_y en τ_z in T_y in T_z genoemd zijn, nog toe, de randkromme een zoodanigen vorm te geven, dat werkelijk, voor de omgeving van het punt met zeer groote benàdering, voor 't punt zelf met volkomen juistheid, τ_y en τ_z aan T_y en T_z gelijk zijn.

Nu was het er inderdaad bij het dubbel T-profiel alleen om te doen de schuifspanningsverdeeling in de omgeving van den zoo kritieken overgang van de lijfplaat in de flenzen te kennen, zoodat de zoo juist genoemde beperking der practische bruikbaarheid van het zeepvlies geen beletsel is.

Trouwens een wezenlijk bezwaar zou deze beperking tòch nooit kunnen wezen. Want mocht zich een geval voordoen, waarbij de kennis van het beloop der schuifspanningen in mèèrdere punten eener dwarsdoorsnede vereischt zou zijn, zoo zou men eenvoudig evenveel randkrommen construeeren als er punten te onderzoeken waren. De constructie dezer krommen zou niet zoo tijdroovend zijn als zij iemand bij 't eerste aanhooren der behandelde theorie wellicht zou kunnen voorkomen.

Natuurlijk blijft 't meten van ordinaten en hellingshoeken aan een zeepvliesoppervlak nog een subtiele quaestie. Maar al bestaan er nog groote moeilijkheden in verband met dit quantitatieve onderzoek, zoo mag toch de hoop gekoesterd worden, dat verfijnde meetmethoden niet op zich zullen doen wachten, die het in principe volledig opgeloste probleem tot afsluiting zullen brengen.

De zoo juist besproken onderzoekingen hebben U waarschijnlijk van de onmisbaarheid van diepgaande wiskundige kennis voor de bestudeering van elasticiteitsproblemen reeds eenigszins overtuigd. Het zou mij niet moeilijk vallen U in Uwe overtuiging te versterken door Uwe aandacht op nog àndere hoofdstukken der elasticiteitsleer te vestigen, en U b.v. te doen inzien hoe verschillende „berekeningen op gelijken weerstand" de kennis van elliptische functies eischen of hoe 't onderzoek naar de spanningsverdeeling in een elastisch ondersteunde plaat niet zonder de kennis van Besselsche functies streng kan worden doorgevoerd.

Maar ik laat dit liever na om, zonder ten Uwen opzichte al te veeleischend te worden, Uwe belangstelling nog te kunnen vragen voor een korte bespreking van een Graphostatisch onderwerp, de leer der zoogenaamde Cremonadiagrammen.

Deze leer is wel een der schoonste vruchten, die de op wiskundigen bodem geplante boom „Toegepaste Mechanica" van zijn tak Graphostatica heeft afgeworpen.

Een willekeurig in de ruimte verdeeld krachtenstelsel kan, zooals bekend mag worden verondersteld, door twee elkaar kruisende krachten vervangen worden. De werklijn van één dezer beide krachten kan willekeurig gekozen worden; de grootte van beide krachten zoowel als de werklijn van de tweede kracht zijn daarna echter volkomen bepaald.

Hieruit volgt dat bij een willekeurig in de ruimte gelegen krachtenpaar op $\sim^4$ wijzen een er mee aequivalent krachtenpaar kan geconstrueerd worden.

De constructie, welke de mogelijkheid van overgang van het gegeven krachtenpaar tot een ander met één willekeurig aangenomen werklijn doet inzien, blijkt echter hare geldigheid te verliezen wanneer de aangenomen rechte transversaal is van het oorspronkelijke krachtenpaar.

Een uitzonderingslijn, welke niet als een der werklijnen van een, het oorspronkelijk krachtstelsel vervangend krachtenpaar kan worden aangezien, heet nullijn, omdat het ten opzichte van haar bepaalde statische moment van het krachtsysteem de waarde nul heeft. Twee bij elkaar behoorende lijnen, die wèl als werklijnen van twee, het stelsel vervangende krachten dienst kunnen doen, heeten toegevoegde lijnen.

De rechten welke van uit een punt eener krachtlijn, naar de punten der toegevoegde krachtlijn kunnen getrokken worden, zijn uitteraard allen nullijnen.

Elke àndere rechte door dat punt heeft echter volgens het voorgaande een aan haar toegevoegde rechte. Waaruit volgt, dat de door een punt in de ruimte gaande nullijnen een waaier vormen.

Hiermede is natuurlijk nog geenszins gezegd, dat de in een willekeurig plat vlak gelegen nullijnen door een vast punt zouden gaan. Men zou zelfs in onzekerheid kunnen verkeeren, of in een willekeurig vlak wel nullijnen te vinden zouden zijn.

Deze twijfel wordt echter opgeheven zoodra men bedenkt, dat elk krachtenpaar in de verbindingslijn zijner snijpunten met het beschouwde vlak een nullijn levert.

Maar bovendien kan men zonder veel inspanning, gebruik makend van een der grondstellingen uit de leer der statica, bewijzen, dat alle in 't vlak gelegen nullijnen naar één punt convergeeren, dat het nulpunt van het beschouwde vlak heet.

Omgekeerd wordt het vlak, dat de meetkundige der nulstralen van een punt is, het nulvlak van dit punt genoemd.

De tot nu toe omschreven resultaten laten zich als volgt samenvatten :

Door een stelsel van twee krachten, welker ligging, grootte en zin gegeven zijn, wordt aan ieder punt der ruimte een door dit punt gaand vlak, (het nulvlak), aan ieder vlak der ruimte een in dit vlak liggend punt (het nulpunt) toegevoegd. De nulpunten der vlakken van een vlakkenbundel hebben de aan de as van den bundel toegevoegde rechte tot meetkundige plaats; terwijl de nulvlakken van de punten eener rechte een vlakkenbundel vormen, die de aan de rechte toegevoegde lijn tot as heeft.

Wij willen deze eigenschappen nog met ééne andere, die voor ons onderzoek van het meeste belang zal blijken te wezen, aanvullen.

Het is een in de elementaire leer der statica reeds bekende stelling, dat bij de reductie van een willekeurig krachtensysteem tot een kracht en een koppel, de resulteerende kracht in richting en grootte onveranderd blijft, wèlk reductiepunt ook gekozen worde.

De resultante van elk paar naar eenzelfde punt der ruimte overgebrachte, in het nulsysteem aan elkaar toegevoegde krachten is derhalve een in grootte en richting onveranderlijke vector. M. a. w. aan elkaar toegevoegde lijnen van het nulsysteem loopen evenwijdig aan vlakken, die tot eenzelfden vlakkenbundel behooren. De asrichting van dezen vlakkenbundel wordt tevens de asrichting van het nulsysteem genoemd.

20

Worden dus twee toegevoegde lijnen *in de asrichting* op eenig vlak, dat we ons gemakshalve loodrecht op de asrichting voorstellen, geprojecteerd, zoo leveren zij evenwijdige projecties.

Laat nu een willekeurig in de ruimte gelegen veelvlak gegeven zijn. Laat bovendien in elk zijvlak het nulpunt geconstrueerd wezen. Dan kunnen al deze nulpunten opgevat worden als de hoekpunten van een tweede polyeder, dat we het reciproke veelvlak van het eerste noemen.

Daar ieder nulpunt in zijn eigen nulvlak ligt, is het tweede veelvlak dus in het eerste beschreven. Maar de nulpunten der in een hoekpunt van het eerste veelvlak samenkomende zijvlakken, liggen in het nulvlak van dat hoekpunt. Elk hoekpunt van het eerste veelvlak ligt dus in een zijvlak van het tweede veelvlak. Men komt derhalve tot de fabelachtige, reeds door Möbius in het jaar 1828 gedane ontdekking, dat de beide reciproke veelvlakken niet alleen ín elkaar, maar ook óm elkaar beschreven zijn. Hunne ribben zijn uit den aard der zaak paarsgewijze als in het nulsysteem aan elkaar toegevoegde lijnen samen te nemen.

Projecteert men nu beide veelvlakken orthogonaal op een vlak, dat loodrecht op de asrichting van het nulsysteem staat, zoo ontstaan twee vlakke reciproke figuren, waarin met elke lijn der eene figuur een ermede evenwijdige rechte der andere overeenkomt. Komen in de eene figuur een zeker aantal rechten in één punt samen, zoo vormen de overeenkomstige rechten der andere figuur een veelhoek met een evengroot aantal zijden.

Cremona beschouwde nu twee reciproke ruimtefiguren, (welke hij met de hem eigene kernachtigheid van uitdrukking polyedrische kalotjes noemde), waarvan de randen gesloten scheeve veelhoeken waren. Het ééne van deze ongesloten veelvlakken sloot hij af door platte vlakken, welke behalve door een willekeurig aangenomen punt, door de randribben van het veelvlak gingen. De reciproke figuur van deze bijgevoegde pyramide werd geleverd door 't nulvlak van het aangenomen punt, èn de vlakken, die door de op elkaar volgende randribben van het reciproke veelvlak bepaald waren.

Worden de aldus aangevulde reciproke veelvlakken op een, op de as van het nulsysteem loodrecht staand vlak orthogonaal gegeprojecteerd, zoo zal, wanneer de projectie der randlijn van het eerste veelvlak opgevat wordt als de gesloten krachtenveelhoek van een aantal krachten, die in de tweede projectiefiguur gedacht worden aan te grijpen in de knooppunten van een door die figuur voorgesteld vakwerk, de éérste figuur in de zijden harer veelhoeken de in het vakwerk optredende inwendige krachten in grootte én richting leveren.

Bovendien zullen de beide projecties een gesloten stangenveelhoek met de bijbehoorende poolfiguur van het op 't vakwerk aangrijpende krachtensysteem, als overeenkomstige figuren bevatten, welke figuren echter door eene in de asrichting van het nulsysteem uitgevoerde verplaatsing naar het oneindige van het aan de eerste ruimtefiguur toegevoegde punt onderdrukt kunnen worden.

Deze op zich zelf uiterst belangrijke onderzoekingen van CREMONA, die de bestaansmogelijkheid van reciproke vakwerk- en staafkrachtfiguren in het licht stellen, laten de vraag onbeantwoord of bij elk gegeven vakwerk met bekende uitwendige belasting een nulsysteem te construeeren is, met behulp waarvan 't bestaan eener bijbehoorende staafkrachtfiguur gewaarborgd kan worden.

Deze vraag is het eerst in 1895 onder het oog gezien door FRIEDRICH SCHUR, die haar later, in een in de „Mathematische Annalen" 1897 verschenen verhandeling „Allgemeine Methode der reziproken Kräftepläne" tot volledige oplossing gebracht heeft.

De in het nulsysteem geldende reciprociteitseigenschappen hebben waarschijnlijk niet nagelaten bij U de herinnering op te roepen aan de zoo bekende polariteitseigenschappen van 2e graads oppervlakken. En wellicht is U de gedachte gerezen of deze eigenschappen niet evengoed gebruikt kunnen worden tot het construeeren van reciproke vakwerk- en staafkrachtfiguren.

Inderdaad heeft JAMES CLERK MAXWELL in 1867 reeds aangetoond, dat twee, ten opzichte van een omwentelings-paraboloide, polaire veelvlakken, geprojecteerd op een de as der paraboloide loodrecht snijdend vlak, twee reciproke diagrammen kunnen leveren, die als gelijkwaardig met de later ontdekte CREMONA-SCHUR diagrammen aangezien kunnen worden. Alleen moet één der projectiefiguren 90° gedraaid worden, zoodat de methode van CREMONA een in de teekenpractijk niet te onderschatten voordeel boven die van MAXWELL heeft aan te wijzen.

De voorgaande voorbeelden brengen mij van zelf tot de, dikwijls tot me gerichte vraag, of het nu wel strikt noodig is een theorie, als waarvan ik zooeven een zeer beknopt uittreksel gaf, volledig te behandelen, en of niet volstaan zoude kunnen worden met de mededeeling der resultaten.

Hare beantwoording komt mij voor juist hier op haar plaats te zijn, omdat het teekenen van een CREMONA-plan het voorbeeld bij uitnemendheid kan heeten van een opgave, die door iemand zonder eenig verstand op recept tot oplossing gebracht kan worden.

Stelt men zich op het standpunt, dat het geven van voorschriften voldoende is, zoo neem ik de vrijheid de opmerking te maken, dat 't mij hoogst ongewenscht voorkomt dergelijke voorschriften juist te verstrekken in een tijd, die bestemd is iemands kennis te verruimen, iemands kritischen zin te ontwikkelen. Dan maak ik 't voorstel aan de Technische Hoogeschool een vóór en naschooltje te verbinden, waarin na een vooroefening in gelooven op gezag een nà-oefening in het opvolgen van denk- en teekenbevelen kan worden gehouden.

Stelt men echter de vraag of het in 't algeméén wenschelijk te noemen zou zijn het inzicht in een hoofdstuk der Toegepaste

Mechanica, zooals dat door de leer der reciproke vakwerk- en staafkrachtdiagrammen gevormd wordt, te verhelderen door 't behandelen van verschillende theorieën, zoo zoude ik een ontkennend antwoord willen geven.

Hoe verlokkelijk het ook zijn moge een moeilijkheid op verschillende wijzen op te lossen, hoe leerzaam het ook dikwijls zijn kan een eenmaal opgeworpen vraag van uit verschillende standpunten te belichten, er behoort niet uit 't oog te worden verloren, dat er een groot verschil bestaat tusschen de plichten van een ingenieur en die van een wiskundige. Want er moge dan geen verschil tusschen hun beider denken aan te wijzen zijn, er is wèl groot onderscheid in de wijze, waarop zij hun denken ten algemeenen nutte hebben dienstbaar te maken.

De een heeft bijna altijd opgaven, waarvan de oplossing zoo spoedig mogelijk verwacht wordt, terwijl de ander daarentegen meestal problemen behandelt, waarvan de oplossing met veel minder grooten haast behoeft gezocht te worden.

Zeer karakteristiek drukt WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINE in de voorrede tot zijne „Applied Mechanics" dit verschil als volgt uit:

In theoretical science, the question is .... „*What are we to think?* .... and when a doubtful point arises, for the solution of which either experimental data are wanting or mathematical methods are not sufficiently advanced, it is the duty of philosophic minds not to dispute about the probability of conflicting suppositions, but to labour for the advancement of experimental inquiry and of mathematics, and await patiently the time when these shall be adequate to solve the question.

But in practical science the question is .... „*What are we to do?* .... a question which involves the necessity for the immediate adoption of some rule of working. In doubtful cases, we cannot allow our machines and our works of improvement to wait for the advancement of science; and if existing data are insufficient to give an exact solution of the question, that approximate solution must be acted upon which the best data attainable show to be the most probable. A prompt and sound judgment in cases of this kind is one of the caracteristicts of a *practical man*, in the right sense of that term.

Zoo zal een ingenieur, nadat hij kennis genomen heeft van de CREMONA-SCHUR'sche onderzoekingsmethode, welke het draaien over 90° van een der beide reciproke figuren uit de MAXWELL'sche theorie overbodig maakt, volkomen bevredigd zijn en het geleerde zoo spoedig mogelijk trachten dienstbaar te maken aan de berekening van door hem uit te voeren vakwerken.

Daarentegen kan men zich voorstellen, dat het een wiskundige mòet hinderen een metrische reciprociteit te ontdekken, die alléén verband zou houden met polariteitseigenschappen van één enkel tweedegraadsoppervlak, in casu de elliptische omwentelingsparaboloide.

De ingenieur is dankbaar, dat er een verbetering van groot practisch nut op de MAXWELL'sche polariteitstheorie is gekomen, en denkt over de laatste niet meer na.

Den Wiskundige blijft de omwentelingsparaboloïde intrigeeren, omdat zij zulk een bijzondere eigenschap vertoont, welke andere tweedegraadsoppervlakken niet hebben. Hij zal niet eerder tevreden zijn vóór hij óf weet, waaròm zij zulk een uitzonderingseigenschap bezit, òf weet dat de gevonden resultaten slechts bijzonderheden zijn van een voor alle 2^e graads oppervlakken geldend theorema.

En zoo is het dan ook G. HAUCK gelukt de volgende algemeene stelling te bewijzen:

„Een vakwerk met zijne bijbehoorende krachtfiguur zijn op te vatten als de projecties van twee reciproke ruimtefiguren in het polariteitssysteem van een willekeurig tweedegraadsoppervlak op een projectievlak, dat evenwijdig is aan een der cyclische vlakken; en wel het vakwerk als de scheeve parallelprojectie in de richting van de bij het cyclische vlak behoorende toegevoegde middellijn, de krachtenfiguur als de centrale projectie uit het middelpunt van het oppervlak; of omgekeerd. Bij de hyperbolische paraboloide treedt het vlak, door hetwelk het oppervlak volgens een gelijkzijdige hyperbool gesneden wordt in de plaats van het cyclische vlak.

Evenwel moet in alle gevallen, behalve dat van de hyperbolische paraboloide, één der beide figuren 90° gedraaid worden; daarentegen moet in 't genoemde uitzonderingsgeval de eene figuur nog gespiegeld worden ten opzichte van een lijn, die evenwijdig loopt aan die hoekdeellijn der asymptoten van de in het projectievlak gelegen gelijkzijdige hyperbool, welke reëele snijpunten met de kegelsnede oplevert".

Maar het is verklaarbaar, dat deze stelling, hoe belangrijk ze voor den wiskundige zijn moge, den ingenieur niet de geringste versnelling van wetenschappelijken polsslag bezorgt.

Het onderwijzen van kennis, als die welke er in vervat is, aan aanstaande ingenieurs zou ik overigens ook onverantwoordelijk vinden. Want eerstens zou het hun tijdroovende nuttelooze studie opleggen, die beperkend zou werken op den tijd, die aan eigenlijke vakstudie behoort dienstbaar gemaakt te worden, maar wat erger is, het zou hen er toe kunnen brengen *doel* te zien, in wat zelfs niet *middel* zou kunnen zijn.

Overigens zullen de zoowel aan de elasticiteitsleer als aan de leer der Graphostatica ontleende voorbeelden, die ik zooeven besproken heb, wel overtuigend bewezen hebben hoe wiskundig inzicht voor den wetenschappelijken ingenieur onmisbaar is. Gelooft echter niet, dat ik de stelling, welker verdediging ik mij tot doel stelde, voor omkeering vatbaar acht. Dat ik met andere woorden in een zekeren aanleg voor de wiskunde een waarborg voor de bruikbaarheid en de beteekenis van den ingenieur zie.

Integendeel, de voorwaarde die ik tot het welslagen van den wetenschappelijken ingenieur aan zijnen aanleg gesteld heb, mòet wel is waar als noodzakelijk, maar kàn noch màg als voldoende aangezien worden. Hierbij denk ik niet eens aan de vele eigenschappen, die een ingenieur buiten zijn kennis moet bezitten om maatschappelijk te kunnen slagen, als daar zijn: ordelijkheid, tact, doortastendheid, wilskracht, uithoudingsvermogen, zin voor verhouding tot ondergeschikten en meerderen. Reeds binnen de grenzen van het beperkte terrein, dat op zijn breed wetenschapsgebied door de Toegepaste Mechanica wordt ingenomen, kan de onvoldoendheid der „voorwaarde van wiskundigen aanleg" scherp worden aangetoond.

Gaat men toch na wat met de kennis der elasticiteitsleer bereikt kan worden, dan blijkt men niet verder te komen dan tot het inzicht in de spanningsverdeeling, die in eenig constructiedeel, welks materiaal aan voorop gestelde hypothetische eischen heeft te voldoen, optreedt, mits de elasticiteitsgrens, waarbij de wet van Hooke hare geldigheid verliest, niet overschreden worde.

Maar over de oorzaken, die 't bereiken van de elasticiteitsgrens of van de breukgrens beheerschen, leert zij uit den aard der zaak niets.

Zoolang dan ook de ingenieur omtrent den aard der materiaaleigenschappen in het duister tast, zoolang zal het nut der elasticiteitsleer zelfs niet problematisch, maar nihil te noemen zijn.

De bestudeering der materiaaleigenschappen kan den aanstaanden ingenieur dan ook niet ernstig genoeg worden aanbevolen. Helaas zal hij bij die studie echter meermalen tot de ontdekking komen dat onze materialenkennis nog veel te wenschen overlaat; dat zij in sommige opzichten nog zóó gebrekkig is, dat sceptisch aangelegde naturen wel eens 't nut der geheele Toegepaste Mechanica in twijfel trekken.

27

Tot déze opvatting nu bestaat echter niet de minste reden. Want al is het b.v. een verre van aangename ervaring te moeten constateeren, dat een Differdingenprofiel over de geheele lengte van de lijfplaat scheurt tengevolge van het opruimen van een paar nagelgaten in het lijf, al is het evenmin in overeenstemming met onze verwachtingen, dat een eenigszins ruwe ontlading van een dergelijk ijzer van een wagen op den grond breuk tengevolge kan hebben, het beleven van decepties bij wetenschappelijk onderzoek mag niet tot gevolg hebben, dat verkregen resultaten, waarop met tròts kan worden neergezien in hunne waarde zouden worden verkleind.

Er behoort juist met groote waardeering van de uitbreiding onzer kennis van materiaaleigenschappen gewag te worden gemaakt.

De in de laatste jaren in 't werkgestelde, goed geslaagde pogingen meer licht te verspreiden omtrent de oorzaken, die het breukgevaar beheerschen, het grondig bestudeeren der verschillende breukhypothesen, het onderzoek naar hunne geldigheid, het vaststellen hunner consequenties hebben er niet weinig toe bijgedragen de waarde der Toegepaste Mechanica te verhoogen.

Moge in de toekomst een blijvende vooruitgang te constateeren zijn; moge een zichzelf bevruchtend samenwerken van wiskundigen en technici blijven bestaan, opdat de scheppingskracht van den ingenieur het aanzien kunne geven aan kunstwerken, die door hunne harmonische volmaaktheid slechts kunnen worden vergeleken met die van den beeldenden kunstenaar.

Dames en Heeren Studenten.

Ik acht het een voorrecht meerdere jaren, voor verschillende vakken, als assistent aan de Technische Hoogeschool verbonden te zijn geweest.

Die jaren toch waren voor mij een tijd, waarin ik op velerlei wijze met Uwe gevoelens, wenschen en opvattingen kennis kon maken.

Ik hoop, dat het mij moge gelukken, zooveel belangstelling in mijn vak bij U te wekken, dat de bestudeering ervan vrije studie voor U moge zijn, dat wil zeggen studie, die Gij uit eigen wil onderneemt en niet afhankelijk doet zijn van door de wet gestelde exameneischen;

dat 't getal dièrgenen moge verminderen, wier éénige belangstelling voor de Toegepaste Mechanica zich openbaart in de vraag of *vijf* graphostatica-teekeningen, dan wel vier dergelijke geestesproducten moeten ingeleverd worden ter verzekering van de vrijstelling van het graphostatica-examen;

dat mijn onderwijs er dus toe moge bijdragen, het aantal diergenen, wien het werkelijk om vrije studie te doen is, te vergrooten, en het aantal diergenen, die 't liefst studie-vrij zijn, te verkleinen.

Mogen de door U in de vorige jaren opgedane ervaringen U aanleiding geven niet te twijfelen aan mijne welmeenendheid, wanneer ik U als leermeester toeroep:

Geloof niet op *gezag*, Mijnheer,
Gelòòf toch niet wat ik U leer,

maar onderzoekt en bestudeert het, en levert waar Gij meent dit te kunnen doen, Uwe kritiek. Gij zult mij steeds bereid vinden U, waar ik kan, over moeilijkheden heen te helpen; waar het zou moeten mijn ongelijk in een wetenschappelijk geschil te erkennen.

Moge het mij tenslotte blijven gelukken bij U de overtuiging te vestigen, dat ik niet alleen Uw leermeester maar óók Uw vriend wil zijn.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren,

Voor het groote vertrouwen, dat Gij wel in mij hebt willen stellen door mij ter benoeming als Hoogleeraar voor de Toegepaste Mechanica voor te dragen, betuig ik U mijn diepgevoelden dank.

29

U, Zeergeleerden DR. CLUYSENAER, zij het mij vergund, mijne groote dankbaarheid uit te spreken voor de bijzondere belangstelling, die ik van U mocht ondervinden.

Hooggeleerde Heeren Professoren,

Het zou mezelf meer als phrase dan als zin tegenklinken, wanneer ik zeide Uwen kring met schròom binnen te treden.

Het feit, dat ik reeds een jaar lang op zoo gemeenzame, wijze ben bejegend en tegemoet gekomen door de leden van de Afdeeling, waartoe ik thans behoor, dat de Hoogleeraren in de Wiskunde, in het bijzonder de Heeren CARDINAAL, BARRAU en VERSLUYS — wien ik om hunne hulpvaardige belangstelling in mijne wiskundige studie zooveel verschuldigd ben — mij dàâr, waar het dienstverband dit niet in den weg stond, ik mag wel zeggen op collegialen voet behandelden, moge het U verklaarbaar maken, dat ik de waarheid meer nabij kom met te zeggen, dat ik Uwen kring met vrijmoedigheid binnentreedt.

Dat ik daarbij den *schijn* van vrijpostigheid zelfs hoop te vermijden, behoef ik U wel niet te verzekeren.

Want *niet* heeft de zoo welwillende en vriendschappelijke houding, die Gij tegenover mij aannaamt tot gevolg gehad, dat ik in U niet meer mijne leermeesters zou erkennen en hoogschatten.

Hooggeachte Professor VAN ITERSON.

De verzekering de door U gegeven lessen trouw te volgen en voort te zetten, wil ik U niet geven. Uw verlangen naar vrijheid en zelfstandigheid, Uw aanleg voor originaliteit zouden trouwens een dergelijke wensch van een ander zeker niet tot eene U symphatieke uiting stempelen.

Gaarne dank ik U echter voor de bereidwilligheid, waarmee Gij mij in kennis bracht met de wijze, waarop door U 't onderwijs was ingericht en met de middelen, die Gij gebruiktet om dit onderwijs naar Uwe inzichten zoo vruchtdragend mogelijk te maken. Het vele, dat ik daarbij geleerd heb zal ik dankbaar gebruiken bij mijne pogingen het onderwijs zoo belangwekkend mogelijk te doen zijn.

Waarde KLOPPER.

Het was natuurlijk niet zonder spanning, dat ik het vorige jaar afwachtte of ook Gij in mij een jongeren broeder zoudt willen zien, dien Gij met Uwe zooveel uitgebreider kennis en rijpere ervaring zoudt willen steunen en helpen.

Mijne stille hoop werd verre overtroffen. Voor de van U ondervonden groote vriendschap ben ik U oprecht dankbaar. Zij is er mij een waarborg voor, dat het meest volledige samenwerken met U mij wacht, dat ik steeds zal mogen rekenen op Uwen raad waar ik dien noodig mocht hebben.

Niets is mij aangenamer dan U de verzekering te geven er naar te zullen streven, dat onze vriendschapsbanden in alzijdigen, gelijkmatigen trek komen te staan, zoodat geen schuifspanningen optreden, en wrijving tusschen ons dus voorkome worde.

U, HOLST, in wien ik in èlk opzicht mijn meerdere zie, wil ik niet om Uwe steun en hulpvaardigheid vragen. Ik kèn de straf van den blik, die duidelijker dan woorden nog, verwijtend zou vragen of ik niet *wist*, dat àlles wat Gij aan vriendschap en kennis ter mijner beschikking *kunt* stellen, ook ter mijner beschikking staat.

Aan U heb ik slechts deze vraag:

Aanvaardt de verzekering, dat ik de uren, waarin ik eerst Uwe naar vorm èn inhoud ongeevenaarde lessen mocht volgen, waarin ik later Uwe vriendschap mocht verwerven en genieten tot de schoonste van mijn leven reken.

Aanvaardt mijn dank, voor welks oprechtheid Gij mij borg weet.

31

Ouders,

Dat Gij beiden, in de kracht van Uw leven nog, aanwezig kunt zijn bij deze plechtigheid, is mij de eigenlijke bron van vreugde en voldoening van dezen dag.

Gij beiden hebt steeds al datgene, wat tot bevrediging van Uwe persoonlijke wenschen zou kunnen dienen, opgeofferd aan wat Gij mijn belang dacht te zijn.

Het zal U niet vreemd voorkomen, Vader, wanneer ik op dit oogenblik denk aan de vele uren van voor ons beiden zoo genotvol samenwerken; uren, die reeds vallen in den tijd toen Gij mij al wandelende voorbereiddet voor het toelatingsexamen der H. B. S. waarvoor 't niet noodig was hoogere kennis te vergaren dan b.v. deze: dat sommen of verschillen van hectaren en m.m.^{2} zich laten uitdrukken in vierkante kilometers.

Vijf jaar later ontving ik Uw eerste onderwijs in de Hoogere Wiskunde, dat in den letterlijken zin van het woord „laag bij den grond" was, want — U herinnert het zich zeker òòk nog — de Analytische Meetkunde, die hier in Delft met den naam van Analytische Meetkunde van het eerste studiejaar bestempeld wordt, en de beginselen der Differentiaalrekening, waaronder de mij aanvankelijk zoo onsympathieke reeksontwikkeling van TAYLOR, hebt Gij mij in 't gras liggend onderwezen.

Toen kwam een tijd van intensief samenwerken, waarbij Gij uit den aard der zaak steeds leermeester, ik leerling bleef.

Met groote dankbaarheid denk ik terug aan de uren, waarin Gij mij Uwe hulp verleendet bij 't overwinnen van moeilijkheden, die zich bij mijne studie voor de acten K_1 en K_5 voordeden.

Meestal kondt Gij mij eerst na Uwe laatste les, die omstreeks 't middernachtelijk uur eindigde, Uwen steun verschaffen, maar nooit waart Gij er te moe toe dan nog mijne bezwaren uit den weg te helpen ruimen.

Maar niet alleen op wiskundig terrein waart Gij mijn leermeester, ook in 't vak, dat ik de eer heb in de toekomst te mogen doceeren, heb ik 't juist inzicht in menig grondbegrip aan U te danken.

Ik weet, dat Gij mijn aandeel in 't werk, waarvan wij heden 't resultaat dankbaar aanvaarden, hooger schat dan ik zelf; en dat Gij mijne meening hieromtrent zelfs zou betwisten indien er gelegenheid toe was.

Van dit gebrek aan gelegenheid maak ik, op 't oogenblik, dat ik mijn nieuwe ambt met de beste voornemens aanvaard, gebruik om mijne meening te doen zegevieren.

Aan mij de vruchten van ons beider arbeid, aan mij de taak het in mij gestelde vertrouwen niet te schenden; màâr:

Aan U de eer van de onderscheiding, die mij te beurt viel.

Ik heb gezegd.

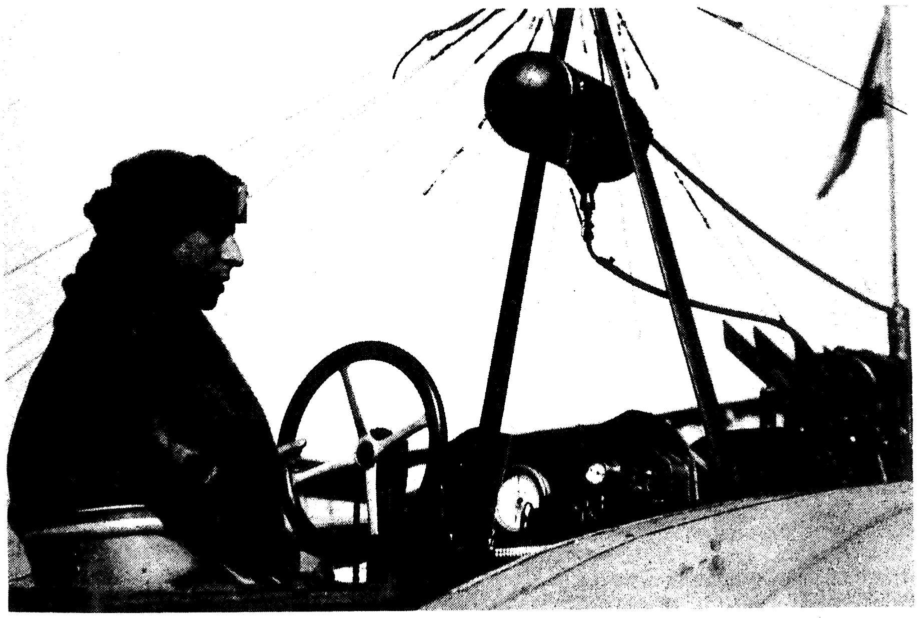
8. Richard von Mises

Richard Martin Edler von Mises, 1883 Lemberg - 1953 Boston (Mass.), was een alleseter op het gebied van de toegepaste wiskunde. In de wiskunde kwamen dergelijke omnivoren geregeld voor, in de toepassingen waren ze zeldzaam. Hij studeerde werktuigbouw in Wenen (1906) en maakte carrière in de toegepaste wiskunde in Duitsland: Brünn, Straatsburg, Frankfurt, Dresden en Berlijn (1920). Von Mises was joods: in 1933 werd de toestand in Duitsland voor hem onhoudbaar en hij aanvaardde een uitnodiging om naar Istanbul te komen. Van 1939 tot zijn dood in 1953 doceerde hij in Boston (Harvard). (De econoom Ludwig von Mises was zijn oudere broer).
Richard von Mises leverde fundamentele bijdragen aan de hydro- en aerodynamica, aan waarschijnlijkheidsrekening en toepassingen, aan het logische positivisme - zijn denken was nauw verwant aan dat van de Wiener Kreis -, en was de grootste Rilke-kenner en -verzamelaar van zijn tijd.

Von Mises signaleerde wel de verschoven rol van de wiskunde in het toepassen en bepleitte een zeker pragmatisme in het nastreven van waarheid, maar maakte niet de stap naar het begrip wiskundig model, dat we bij de volgende auteurs zullen aantreffen. Zijn bijdrage aan de conceptuele ontwikkeling is echter overduidelijk uit de tekst hieronder.
Göttingen, de "Hochburg der Reinen Mathematik", waar onder aansporing van Felix Klein de toepassingen erbij werden gedaan, werd in 1920 voorbijgestreefd door Berlijn. Von Mises werd er tot hoogleraar in de toegepaste wiskunde benoemd en kreeg de gelegenheid een Institut für Angewandte Mathematik in te richten. In 1921 begon hij met de uitgave van de ZAMM, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* en nog een jaar later volgde de oprichting van de GAMM, Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. De voortzetting van al die inititatieven na 1933 ontbeerde zijn geest.
'Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik', het openingsartikel van ze *ZAMM* uit februari 1921, is een vast referentiepunt voor de ingenieurstoepassingen van de wiskunde geworden.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 Ende Februar 1921 Heft 1



1913

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 Ende Februar 1921 Heft 1

Inhalt:

ZUR EINFÜHRUNG

Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik

Von R. v. MISES in Berlin.

Es ist im Laufe des letzten Jahrhunderts, namentlich in Deutschland, Brauch geworden der »reinen« Mathematik eine »angewandte« begrifflich gegenüberzustellen. Gehen wir aber in der Geschichte der Wissenschaften weiter zurück, so geraten wir wohl in Verlegenheit mit der Frage, wohin die Leistungen eines Archimedes oder Newton, eines Euler oder Gauß zu rechnen seien. Kann man vielleicht noch bei Gauß die einzelnen Arbeiten in solche der einen und der andern Richtung trennen, so bleibt es doch vollends unklar, ob wir Newtons Grundlegung der Differentialrechnung und der Mechanik als reine oder als angewandte Mathematik bezeichnen sollen. Auch die persönliche Einstellung des Urhebers scheint hier eine Entscheidung nicht immer zu ermöglichen: Man kennt die Ueberlieferung, die Archimedes als weltabgewandten Theoretiker auftreten läßt, während andrerseits feststeht, daß er beim Bau von Kriegsmaschinen sehr wohl seine Kenntnisse in den praktischen Dienst des Vaterlandes zu stellen wußte.

Die folgenden Zeilen versuchen es, das Gebiet der angewandten Mathematik, soweit dies möglich ist, logisch abzugrenzen, und unternehmen es zugleich, eine Andeutung über ihre hauptsächlichsten Problemgruppen, so wie sie sich dem heute tätigen Beobachter darstellen, zu geben. Natürlich darf Vollständigkeit in diesem zweiten Punkt so wenig erwartet werden, wie völlige Schärfe in dem ersten.

1. Abgrenzung nach außen. Wenn wir das, was der gewöhnliche Sprachgebrauch als Anwendungen der Mathematik oder einzelner mathematischer Lehren bezeichnet, näher zu bestimmen suchen, so finden wir sofort, wie veränderlich dieser Begriff je nach dem Standpunkt des Urteilenden ist. Der Mathematiker, der die Gedankengänge der Infinitesimal-Analysis entwickelt, spricht von »Anwendung« der Differentialrechnung auf Geometrie, wenn er die naheliegendsten geometrischen Schlüsse aus seinen Sätzen zieht. Wer sich mit einem Gebiet der theoretischen Mechanik, etwa der Elastizitätslehre, befaßt, für den ist diese Differentialgeometrie das mathematische oder theoretische Hilfsmittel, das er zur Aufstellung und Erörterung seiner Gleichungen »anwendet«. Der wissenschaftlich arbeitende Ingenieur wieder benutzt die Elastizitätslehre als »Theorie«, um zu konkreten Festigkeitsberechnungen zu gelangen, die erst für ihn eine wirklich »angewandte« Mathematik bilden. Dann kommt erst der praktische Konstrukteur, dem auch alle Festigkeitsrechnung noch hohe mathematische Theorie ist, und der mit ganz elementaren Faustformeln — der für ihn wahrhaft »angewandten« Mathematik — die Aufgaben seines Berufes meistert. Dieser Reihe kann man leicht beliebig viele ähnlich gebaute zur

Seite stellen, man denke etwa an die »Anwendung« der Analysis auf die Integration von Differentialgleichungen, die Grundgleichungen der Thermodynamik, die wärmemechanische Theorie der Dampfmaschine, endlich den Standpunkt des praktischen Dampfmaschinenkonstrukteurs; aber es lassen sich ihr auch noch an beiden Enden Glieder anfügen. Denn selbst die Sätze der Analysis bilden für den mit der Untersuchung ihrer logischen Grundlagen beschäftigten Forscher nur eine »Anwendung« und auf der andern Seite sind alle Faustformeln des Konstrukteurs noch abstrakte Theorie für den in Werkstatt oder Betrieb tätigen Techniker. Seine sachlichen Ueberlegungen aber müssen, auch wenn sie nur auf den »vier Spezies« des Elementarunterrichts beruhen, noch ebenso gut wie die reine Grundlagenforschung zur Mathematik im weitesten Sinne gezählt werden. So ergibt sich uns das folgende Bild:

Von den abstrakt-logischen Untersuchungen, die in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen, bis zu den verstandesmäßigen, auf Zahl und Maß gerichteten Ueberlegungen des Alltags ist eine Kette von vielfach ineinander geschlungenen Gliedern gespannt, die das umfaßt, was wir im allgemeinsten Wortsinn als Mathematik bezeichnen. Jeder einzelne von uns ist nach Beruf, Anlage oder Neigung an eine bestimmte Stelle dieser Kette gesetzt, von der aus er für gewöhnlich nur einen mehr oder weniger kleinen Teil des Ganzen überblickt. Innerhalb dieses Teilgebietes zieht er willkürlich eine Grenze und nennt das, was links von ihr liegt, nach dem Abstrakteren hinüberweist, die »reine« Mathematik, das rechts liegende, den Uebergang zum praktischen Leben vermittelnde, die »angewandte«. Keinerlei absolute Trennung ist hier möglich, kein Teil des Ganzen kann völlig entfernt werden, soll die Kette ihre Spannung nicht verlieren, und jeder Streit über Berechtigung, Zweckmäßigkeit und Abgrenzung muß angesichts dieser Erkenntnis verstummen.

Man kommt auch zu keinem andern Ergebnis, wenn man versucht, die reine Mathematik als die »um ihrer selbst willen« oder »als Selbstzweck« betriebene zu erklären. Denn auf jedem Gebiet kann Einsicht und Erkenntnis um ihrer selbst willen gesucht werden, und überall kann man Forschungsergebnisse auch mit andern Zielen im Auge gewinnen. Vielleicht sieht es zunächst so aus, als ob im Gegenstand der Forschung ein von vornherein angebbarer Unterschied läge, das eine Mal wäre es etwa die Erklärung bestimmter mechanischer (physikalischer) Erscheinungen, das andere Mal die Untersuchung rein formal-rechnerischer Beziehungen, die das Interesse in Anspruch nimmt. Aber schließlich beschäftigt sich auch die Zahlentheorie selbst mit den uns objektiv gegebenen ganzen Zahlen und die Verteilung der Primzahlen in der unendlichen Zahlenreihe bildet kein grundsätzlich anders geartetes Forschungsobjekt als etwa die Bewegung der Gestirne oder die mechanische Wirkung des elektrischen Stromes. Will man vielleicht die Zahlen selbst noch nicht als »physikalische« Objekte gelten lassen, so wird es schon sehr fraglich beim Gegenstand der Geometrie, und von da führt ein ganz stetiger Uebergang zur Mechanik und weiter.

Noch ein zweiter Punkt muß aber hier besprochen werden, der die Relativität der Abgrenzung zwischen reiner und angewandter Mathematik von einer andern Seite her beleuchtet. Wenn wir heute Ueberlegungen, die unmittelbar auf den vier Grundrechnungsarten fußen, als Alltäglichkeit betrachten, wenn wir gewohnt sind, die Anfangsgründe der Algebra und der analytischen Geometrie, ja neuerdings auch die der Differentialrechnung als durch die höheren Schulen in weiten Kreisen verbreitetes Handwerkzeug anzusehen, so steht dem die Tatsache gegenüber, daß vor drei- bis vierhundert Jahren die vier Spezies einen Gegenstand des mathematischen Universitätsunterrichts bildeten und ein Jahrhundert später die Infinitesimalrechnung, als die eben erst geschaffene, höchste Abstraktion des Menschengeistes, kaum einem kleinen Kreis von Auserwählten verständlich war. Damals also lagen den großen Baumeistern, deren Werke noch heute unsere Bewunderung erregen, Ueberlegungen, die den heutigen Ingenieuren geläufig sind, nicht nur jenseits des Gebietes der »Anwendung«, sondern auch jenseits ihres Gesichtskreises überhaupt. Es ist eine interessante, hier aber nicht weiter zu verfolgende Fragestellung, wie eine solche Ausbreitung des Wissens, wie eine solche Vermehrung der Aufnahmefähigkeit des Einzelnen im Laufe der Generationen zustande kommen kann. Sicher ist, daß, von einer bestimmten Berufsstellung aus gesehen, sich die Grenze zwischen reiner und angewandter Mathematik, ja der Inhalt des mathematischen Gesichtskreises überhaupt, mit der Zeit verschiebt; die historische Entwicklung geht zweifellos dahin, ein immer steigendes Ausmaß an mathematischen Theorien in einem bestimmten Bereich des praktischen Lebens zur Geltung zu bringen. Wir müssen so unserer oben gegebenen Formulierung noch hinzufügen: Die Stellung des Einzelnen gegenüber der Kette mathematischer Begriffsbildungen rückt im Laufe der Zeit — parallel mit dem Entstehen immer neuer Glieder — in der Richtung auf das Abstrakte immer weiter vor. Diese Entwicklung wird auch durch den von manchen Seiten mit großer Hartnäckigkeit geführten Kampf gegen das »Vordringen der Theorie« nicht gehemmt, wie ein Vergleich der heutigen Technik mit der vor etwa hundert Jahren zeigt.

Angesichts dieses Tatbestandes zweifacher Relativität der Begriffsabgrenzung müssen wir nun eine praktische Erklärung dafür suchen, was wir hier im Folgenden unter »Angewandter Mathematik« verstehen wollen. Es ist selbstverständlich, daß wir uns auf den Boden der Gegenwart stellen, und es sei hinzugefügt: auf den Standpunkt des wissenschaftlich arbeitenden Ingenieurs. Dabei soll dieses Wort über seine landläufige Bedeutung hinaus genommen werden, als Bezeichnung für jeden, der einen praktischen Beruf auf der Höhe wissenschaftlicher Erkenntnis ausübt; auch der Volkswirtschaftler, der Versicherungstechniker, der Arzt sind »Ingenieure« in diesem Sinne. Alles das, was der Ingenieur, der selbständige Arbeiten ausführt, an mathematischen Hilfsmitteln gebraucht, aus der Analysis und Geometrie, den verschieden verzweigten Teilen der Mechanik, aus der Thermodynamik und Elektrizitätslehre, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, das soll den Gegenstand bilden, dem die Abhandlungen und Berichte dieser Zeitschrift gewidmet sind. Da dabei die Mechanik im weitesten Sinne, deren Pflege heute fast ausschließlich in den Händen der Ingenieure ruht, den Kernpunkt ausmacht und naturgemäß den breitesten Raum einnehmen wird, ist sie im Titel noch ausdrücklich genannt.

2. Innere Kennzeichnung. Wir haben uns nun zu fragen, in welcher Weise die »Angewandte Mathematik des heutigen Ingenieurs« in ihrer Methode der Forschung und Lehre gekennzeichnet wird. Zwei bekannte Gedankengänge drängen sich da auf und müssen zunächst kurz besprochen werden.

Felix Klein — dessen Name hier mit besonderer Verehrung genannt werden muß, weil er wie kein zweiter in der Gegenwart dem Standpunkt des Ingenieurs innerhalb der mathematischen Wissenschaft und der Mathematik als solcher innerhalb des gesamten Kulturlebens Geltung und Ansehen zu verschaffen gewußt hat — prägte den Gegensatz der Präzisions- und Approximations-Mathematik. Nur die erstere hat es mit den scharf umrissenen Begriffen zu tun, an die wir in der Schulzeit durch allmähliche Gewöhnung herankommen, die wir später exakt definieren lernen, um schließlich zu erfahren, daß sie einem niemals abgeschlossenen Verfeinerungs- und Vertiefungsprozeß unterliegen. Hierher gehören, wenn nur die einfachsten genannt werden sollen, der Begriff der mathematischen Linie und Fläche, der irrationalen Zahl, des Differentialquotienten. In der Approximations-Mathematik gibt es nur Linienstreifen von endlicher, wenn auch geringer Breite, Flächenschalen von endlicher Dicke, keinen Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Brüchen, die Tangenten einer Linie sind Sekanten mit nahe beieinander liegenden Schnittpunkten. Und um auch ein geläufiges Beispiel für den Unterschied in der Problemstellung anzuführen: nur in der Präzisions-Mathematik hat die Unmöglichkeit der »Quadratur des Zirkels« einen Sinn, in der Approximations-Mathematik ist sie durch Kenntnis der Zahl π (und verschiedener Näherungskonstruktionen für diese) längst erledigt.

Niemand wird verkennen, daß hier ein sehr beachtenswerter Gesichtspunkt für die Beurteilung mathematischer Begriffsbildungen aufgedeckt wurde, der auch in manchen Fällen ein Kriterium für die praktische Brauchbarkeit einer Theorie abgeben kann. Vielleicht könnte sich der Ingenieur auch ganz gut mit einem vollständigen Aufbau der Approximations-Mathematik begnügen, wenn dieser Aufbau — nicht ganz erheblich viel schwieriger und umständlicher wäre als der übliche, der sich wesentlich auf die Begriffe der Präzisions-Mathematik stützt: es liegt eben so, daß die präzisen Begriffe der Mathematik (wie übrigens die aller Wissenschaften, die bereits zu Präzisierungen vorgedrungen sind) Vereinfachungen, Idealisierungen bedeuten, die wir bei der Begrenztheit unserer geistigen Fähigkeiten nicht missen können, die der Ingenieur erst recht nicht missen kann, der nur einen beschränkten Teil seiner Kraft und seiner Zeit mathematischen Studien widmen wird. Es ist ja selbstverständlich, daß wir uns beispielsweise mit einer approximativen Lösung einer Differentialgleichung begnügen, aber auf den präzisions-mathematischen Begriff des Differentialquotienten zu verzichten, würde eine außerordentliche Erschwerung und Verwicklung des ganzen Ansatzes und aller Methoden mit sich bringen. Andrerseits bleibt es für das Verständnis der Resultate sehr fruchtbar, wenn man sich immer gegenwärtig hält, daß schon in den ersten Ansätzen weitgehende, zum Teil willkürliche Vereinfachungen stecken.

Ein anderes kennzeichnendes Merkmal der Ingenieurmathematik, das namentlich von jenen gern hervorgehoben wird, die ihr Studiengang durch die Zeichensäle einer technischen Hochschule geführt hat, bildet die Bevorzugung sogenannter graphischer Methoden vor den analytischen. Seit Culmann seine graphische Statik als ersten Stein in dem stolzen Zukunftsbau einer »graphischen Ingenieurwissenschaft« bezeichnet hat, ist soviel Wahres und Falsches zum Lobe dieser »Sprache des Ingenieurs« gesagt worden, daß die Vorbedingungen einer unbefangenen Erörterung geradezu getrübt erscheinen, zumal hier unwägbare Einflüsse der Erziehung, Gewöhnung und der traditionellen Kampfstellung zwischen Technikern und Mathematikern mitspielen. Sachlich zerfällt der Anwendungsbereich der graphischen Methoden offenbar in zwei verschiedene Teile, die nur selten ineinander übergreifen. Das eine Mal sind es, wie z. B. in der Statik, wesentlich elementar-geometrische Aufgaben, die eine zeichnerische Lösung mit den Konstruktions-Verfahren der Präzisions-Mathematik zulassen, das andere Mal handelt es sich, wie z. B. bei der zeichnerischen Integration, um graphisches Rechnen, bei dem die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Kurven den Ausgangspunkt und das Interpolieren einer Kurve aus wenigen Bestimmungsstücken das Hauptwerkzeug bildet. Beide Gebiete haben ihre naturgemäße Begrenzung. Es ist nicht einzusehen, wie man den Gedankenkreis der Graphostatik erweitern soll auf die Behandlung von Problemen, bei denen ganz andere Dinge als elementargeometrische Beziehungen in Frage stehen, z. B. in der höheren Elastizitätstheorie oder in der Lehre vom Erddruck, und tatsächlich sind hierhergehörige Versuche, auch wenn sie von anerkannten Meistern unternommen wurden, restlos gescheitert. Solche Erweiterungs-Bestrebungen sind auch nicht ohne Gefahr, da sie dazu verleiten, viel verwickeltere Beziehungen in die einfachen Formen zu pressen, die sich mit den üblichen Konstruktionsmitteln beherrschen lassen. Weit umfassender und eines Ausbaues fähiger sind zweifellos die Methoden des graphischen Rechnens, die all dem gerecht werden können, was die numerische Rechnung zu leisten imstande ist. Darin drückt sich die Weite und zugleich die Beschränkung dieses Werkzeuges aus; denn, um ein von Gauß herrührendes Bild zu gebrauchen, die numerische Ausrechnung stellt nur die bare Münze des Zahlungsverkehres dar, größere und weittragende Unternehmungen erfordern aber, wie man weiß, ganz anders geartete Einrichtungen, und diesen entsprechen eben die allgemeinen, grundsätzlichen Untersuchungen der Mathematik. Innerhalb des beschränkten Bereiches ihrer Anwendbarkeit wird niemand die Vorzüge zeichnerischer Verfahren, größere Uebersichtlichkeit, Anschaulichkeit, leichtere Ueberprüfungsmöglichkeit, leugnen (obwohl hier gewiß die Gewöhnung viel ausmacht), und es muß auch zugegeben werden, daß ihre Ausgestaltung in mancher Richtung möglich ist (s. weiter unten). Aber in den graphischen Verfahren ein wesentliches Kennzeichen aller Teile der mathematischen Ingenieurwissenschaft zu sehen, ist sicher verkehrt.

Wenn wir aus diesem, oft mit großer Heftigkeit geführten Widerstreit der Meinungen zu einer halbwegs geklärten Auffassung gelangen wollen, so müssen wir uns nur von jeder Engherzigkeit und Kleinlichkeit frei machen. Der Ingenieur, der es mit seiner Aufgabe ernst nimmt, wird jedes Werkzeug, das ihm die — von seinem Standpunkt — »reine« Mathematik liefert, zurichten und zur Bewältigung seiner Aufgaben benutzen. Besonderen Nachdruck müssen wir dabei auf das »Zurichten« legen. Denn daraus entspringen vielleicht die meisten Enttäuschungen und Mißverständnisse, daß der Ingenieur oft meint, er müsse alle theoretischen Hilfsmittel fertig und zum unmittelbaren Gebrauch bereit aus anderen Händen empfangen. Es ist so, wie wenn man verlangen wollte, ein Lehrbuch des Maschinenbaues müsse für alle irgendwie denkbaren Arbeitsmaschinen fertige Konstruktionszeichnungen bringen. In Wahrheit kann die Maschinenkunde nur lehren, wie aus einem bestimmten Verwendungszweck heraus die Maschine geformt werden muß, und in ganz gleicher Weise kann der Mathematiker unmöglich die für jedes praktische Einzelproblem passende Methode oder gar Endformel von vornherein bereitstellen. Nur die genaue Kenntnis des Zieles kann auf dem letzten Stück des Weges richtig leiten.

Wenn etwas für das Verfahren innerhalb der Ingenieur-Mathematik allgemein kennzeichnend sein soll, so kann es nur dies sein: hier wird ausgegangen von einer bestimmten praktischen Aufgabe, die gelöst werden muß, und alles das aus zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Theorie herangezogen und angepaßt, was irgendwie brauchbar erscheint. Dagegen geht der reine Mathematiker — wenigstens vom Standpunkt der Anwendungen aus gesehen — von allgemeinen, mehr willkürlich gewählten oder nur durch den augenblicklichen Stand der Wissenschaft bestimmten Fragestellungen aus, die er mit einer gewissen »Reinheit der Methode« zu behandeln sucht (wobei er sich freilich in Rücksicht auf seine andere Stellung in der Kette aufeinanderfolgender Abstraktionsstufen doch nur analog dem Techniker verhält). J. M. Rankine, der erfolgreiche Begründer der technischen Physik, sagt einmal: »Die Frage für den Ingenieur ist: Was habe ich zu tun? Und er muß sich sofort entscheiden; die Frage für den Mathematiker lautet: Was soll ich denken? Und er kann sich unbegrenzt viel Zeit lassen.« Für den Mathematiker knüpfen sich an einen bestimmten gedanklichen oder methodischen Kern eine Fülle von Fragestellungen, beim Ingenieur sammeln sich um eine einzige praktische Frage herum Antworten oder auch nur Andeutungen von solchen aus allen möglichen Theorien. Vielleicht kann man am bezeichnendsten diese Verhältnisse in ferner Anlehnung an einen Ausspruch Machs so darstellen: Die wichtigste Theorie, die der Ingenieur beherrschen muß, ist die, eine unvollkommene oder unvollständige Theorie zu benutzen verstehen, solange es eine bessere nicht gibt.

Wir wollen im folgenden die Reihe der mathematischen Gebiete, die das Interesse des Ingenieurs berühren, flüchtig durchlaufen, und da und dort Fragen feststellen, deren Beantwortung oder nähere Untersuchung nach dem augenblicklichen Stand der Dinge erwünscht erscheint. Gelegentlich soll auch auf die Ergebnisse neuerer einschlägiger Arbeiten hingewiesen werden. Ein Teil der Problemgruppen wird später in den »Zusammenfassenden Berichten« unserer Zeitschrift noch genauer darzustellen sein.

3. Probleme aus der Analysis. Das Ausgangs- und Endproblem aller Analysis ist wohl dies: Mittel zu schaffen, um die Funktionswerte einer irgendwie (aber mathematisch, nicht physikalisch) definierten Funktion tatsächlich berechnen zu können. Von hier leiten sich ab und hierher münden ein alle Theorien, die die Untersuchung der Funktionen nach ihren verschiedenen Eigenschaften zum Gegenstand haben. Zwei Hauptfragen, die, jede für sich und beide in ihrer Zusammensetzung, in breitem Ausmaß Behandlung gefunden haben, lassen sich hervorheben. Die eine kann man als die Aufgabe der »Funktions-Umkehrung« oder in engerer Anlehnung an die übliche Ausdrucksweise als »Gleichungs Auflösung« bezeichnen: Gegeben ist eine explizite berechenbare Funktion einer Veränderlichen (oder n Funktionen von n Veränderlichen), man soll sie »umkehren«, d. h. jene Werte der Veränderlichen finden, für die die gegebene Funktion (bezw. die gegebenen Funktionen) vorgeschriebene Werte annimmt. Die zweite Hauptaufgabe besteht im »Aufbau« von Funktionen oder dem »reinen Integrationsproblem«: Gegeben sind Anfangswerte und Eigenschaften im Unendlichkleinen, man soll weiter entfernte Funktionswerte bestimmen. — Die für physikalische Fragen wichtigsten und zugleich schwierigsten Probleme sind die, bei denen sich beide Fragestellungen überkreuzen, etwa so, daß die durch »Aufbau« hergestellte Funktion erst noch umzukehren ist oder ähnlich (Randwertaufgaben usf.).

Sprechen wir zunächst vom Umkehrproblem, so ist hier nur der allereinfachste Fall der »algebraischen« Aufgabe, in dem es sich um eine rationale, ganze Funktion einer Veränderlichen handelt, als hinlänglich gelöst anzusehen. Man beherrscht die Frage der Auflösung einer Gleichung n-ten Grades, sowohl nach ihrer grundsätzlichen Seite als nach der rein praktischen der tatsächlichen Berechnung der Wurzeln [1]). Aber schon der Fall mehrerer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten hat nicht die gleich eingehende, wünschenswerte Behandlung gefunden, die eine rasche Uebersicht über die Lage der Wurzeln und ihre nähere Bestimmung ermöglichen würde. Noch schlimmer steht es mit dem für viele technische Anwendungen sehr wichtigen, über die Algebra hinausgehenden Fall transzendenter Gleichungen (d. h. nicht rational-ganzer Funktionen, die umgekehrt werden sollen). Hier ist nur weniges Methodische bekannt [2]), Sonderfälle sind gelegentlich mit Erfolg behandelt worden [3]).

Ein altes und dringendes Desideratum des Technikers bildet ein wirklich brauchbares, vor allem übersichtliches und einprägsames Verfahren zur Auflösung eines Systems von zahlreichen linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Was

[1]) Vgl. z. B. C. Runge, Praxis der Gleichungen, Leipzig 1900.

[2]) Bemerkenswert, aber nicht durchgreifend ist die Note von R. de Montessus, Comptes rendus de l'académie, 148, Paris 1909, S. 468 u. 1749. Vgl. a. Runge in Encykl. d. mathem. Wissensch. Bd. I S. 434 ff.

[3]) Vgl. z. B. H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Leipzig 1906.

bisher an zeichnerischen und rechnerischen Methoden vorgeschlagen wurde[1]), genügt diesen Anforderungen nicht. Anzustreben wäre, daß das Verfahren in den Sonderfällen einfacher Gliederung des Gleichungssystems, die eine einfachere Auflösung gestatten, von selbst übergeht in die bekannten, in der Graphostastik usf. gebräuchlichen Konstruktionen.

Hier wären anzuschließen, als nicht mehr ganz in die erste Hauptgruppe von Problemen gehörig, die Aufgaben der Reihenentwicklung und sonstigen **Darstellungen empirisch gegebener Funktionen** in vorgeschriebenen Formen. Die Technik hat in neuerer Zeit die praktische Verwendbarkeit gewisser einfacher Entwicklungen (harmonische Analyse der durch Oszillographen aufgenommenen Schwingungen) erkannt, es fehlt aber hier noch viel an der Verbreitung einfacher, den Theoretikern längst geläufiger, grundsätzlicher Erkenntnisse, z. B. über die reichen Möglichkeiten der Approximation durch Polynome usf[2]).

In der zweiten Problemgruppe, der **unmittelbaren Integration**, sind in den letzten Jahrzehnten viele fruchtbare Vorarbeiten geleistet worden. Bei manchen praktischen Aufgaben ist man wirklich bis zu völlig befriedigenden Lösungen vorgedrungen, vielleicht darf hier als ein, freilich besonders gut liegendes, Beispiel das ballistische Problem genannt werden[3]). Für umfassendere Untersuchungen wird man wohl in Zukunft auch die von Poincaré begründete »Geometrie der Differentialgleichungen«[4]) heranzuziehen haben. Daß hier in vielen Fällen gerade das zeichnerische Verfahren vor dem ihm grundsätzlich gleichwertigen rechnerischen den Vorzug verdient, ist schon oben erwähnt worden. Aber, ob Rechnung oder Zeichnung, das ganze Gebiet steckt noch, trotz seines beträchtlichen Alters — denn der Ursprung der meisten Verfahren geht in die Zeit vor Erfindung der Infinitesimalrechnung zurück — in den Anfängen seiner Bearbeitung. Die Hauptursache scheint darin zu liegen, daß die mathematische Theorie noch nicht den richtigen Standpunkt zu dieser Art von Fragestellungen gefunden hat. Man tut immer so, als wäre ein »praktisches« Integrationsverfahren etwas dem Wesen nach verschiedenes von einem »analytischen«, etwa in dem Sinne, daß das letztere eine **allgemeine** Lösung, das erstere nur eine Lösung bei gegebenen speziellen Zahlenwerten oder dergleichen liefert. Demgegenüber kann nicht genug betont werden (und ganz das gleiche ist hinsichtlich der numerischen Gleichungsauflösung zu sagen): ein Verfahren, das gestattet, von beliebig angenommenen Daten aus dem gesuchten Resultat beliebig nahe zu kommen (Konvergenz!), ist völlig »allgemein« und unterscheidet sich höchstens in der äußeren Form seiner Wiedergabe bezw. seiner Definition von einer analytischen Formel. Wenn erst diese Anschauung, die den älteren Mathematikern wie Euler oder Cauchy sicher noch geläufig war, wieder in das Allgemein-Bewußtsein der Mathematiker übergangen sein wird, wird man eine reichere Förderung dieses Zweiges der praktischen Mathematik erwarten dürfen.

Die Schwierigkeiten des **gemischten Problems**, das sich aus Funktions-Aufbau und Funktions-Umkehrung zusammensetzt, sind so bedeutende, daß man hier über die ersten tastenden Versuche kaum hinausgekommen ist, ja daß über die Fragestellung selbst keinerlei Klarheit herrscht. Meist verbirgt sich der Unterschied zwischen »Randwert«- und »Anfangswertproblemen« hinter dem viel unwesentlicheren zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. In den seltenen Fällen, in denen man es bei partiellen Gleichungen mit der reinen Integrationsaufgabe zu tun hat, sind fast die gleichen Methoden wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen anwendbar. Das Randwertproblem hingegen führt, wenn es numerisch behandelt wird, auf dem Wege über die Differenzenrechnung auf die Auflösung eines sehr vielgliedrigen Systems meist linearer Gleichungen; in dieser Weise sind gelegentlich praktische Aufgaben durchgeführt worden[5]). Wenn man aber, wie es oft durch die Natur der Aufgabe unmittelbar nahegelegt wird, zur Ausnutzung elementar-geometrischer Beziehungen den Weg zeichnerischer Behandlung einschlägt, so ist eine wesentliche Erweiterung und Vertiefung der bei eindimensionalen Problemen verwendeten Begriffe und Verfahren notwendig; nennenswerte Versuche in dieser Richtung sind für verschiedene Aufgaben der Elastizitätslehre

[1]) Vgl. etwa R. Mehmke, Graphisches Rechnen, Leipzig 1917.

[2]) Eine für die Anwendungen sehr brauchbare Darstellung enthält das Lehrbuch von C. Runge Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig 1904.

[3]) Vgl. z. B. C. Cranz und R. Rothe, Artillerist. Monatshefte 1917, S. 198 bis 238.

[4]) Vgl. den Bericht von H. Liebmann in Encykl. d. mathem. Wiss. III. Bd., Art. D 8.

[5]) Z. B. eine Torsionsaufgabe von C. Runge, Zeitschr. Math. Phys. 56 (1908) S. 225 bis 232. Vgl. a. die demnächst in dieser Zeitschr. erscheinende Arbeit von Hencky.

und der Hydromechanik unternommen worden[1]). Aber es fehlt noch jeder Ansatz zu einer Systematik, jeder Ueberblick über die möglichen Ausgestaltungen, jede Einsicht in die Reichweite des Verfahrens. Die bisher einzige lehrbuchmäßige Darstellung des Gebietes durch Massau[2]) ist in jeder Richtung unzulänglich.

Ein für die Anwendungen sehr fruchtbarer Gedanke, der von theoretischer Seite (zur Führung sogen. Existenzbeweise) beigebracht wurde, ist der der »sukzessiven Approximationen« oder der »Näherungsfolgen«. Er besteht darin, daß von einer in weiten Grenzen willkürlichen Funktion als erster Näherung ausgegangen und diese dann durch wiederholtes Einsetzen in die gegebenen Gleichungen fortschreitend verbessert wird. Anscheinend ganz unabhängig von der theoretischen Begründung hat L. Vianello diesen Gedanken in Gestalt eines zeichnerischen Verfahrens zur Lösung von Stabilitätsaufgaben der Elastizitätslehre (Knickung, kritische Drehgeschwindigkeit usw.) in die Technik eingeführt[3]). Nicht nur die eigentlichen Randwertprobleme sind in dieser Weise lösbar, sondern auch das Problem der »Eigenwert«-Bestimmung (das sind eben die »kritischen« Werte der Belastung, Geschwindigkeit usw.) und die in Form sogen. Integralgleichungen gefaßten Aufgaben lassen in vielen Fällen mit Vorteil eine Behandlung im Sinne der »Näherungsfolgen« zu. Es ist bemerkenswert, daß in neuerer Zeit dieser Grundgedanke auch für die Probleme der beiden früher angeführten Hauptgruppen, vor allem für die reine Integrationsaufgabe, aber auch für die Auflösung endlicher Gleichungssysteme mehr und mehr Geltung gewinnt. Vielleicht liegt hier auch der Weg, auf dem man einmal zu einer allgemeinen, den oben ausgesprochenen Forderungen genügenden Methode der praktischen Behandlung linearer Gleichungen mit sehr vielen Unbekannten gelangen wird.

Es sei noch erwähnt, daß man die Zurückführung eines Randwertproblems auf die Auflösung eines algebraischen Gleichungssystems statt auf dem unmittelbar sich darbietenden Weg der Differenzenrechnung (Einführung endlicher Differenzen an Stelle der Differentiale) auch auf zwei andere Weisen bewirken kann. Die eine besteht darin, daß man zuerst zu einer sogen. Integralgleichung übergeht, bei der die gesuchte Funktion unter dem Integralzeichen eines bestimmten Integrals steht, und dann dieses Integral durch eine endliche Summe annähert. Das andere Verfahren benutzt die Möglichkeit, die Aufsuchung der unbekannten Funktion auf die Form eines Variationsproblems zu bringen, das dann in analoger Weise in eine gewöhnliche Maximum-Minimum-Aufgabe übergeführt wird. Dieser Gedanke hat sich unter dem Namen der Ritzschen Methode schnell Eingang, auch in die Technik, verschafft, und es sind mannigfache Aufgaben auf seiner Grundlage behandelt worden. Naturgemäß haben beide Verfahren nicht denselben Umfang der Anwendbarkeit wie das grundsätzlich immer anwendbare Verfahren der endlichen Differenzen.

All diese Fragen mögen anscheinend weitab von dem Arbeitsgebiet und dem Aufgabenkreis des Ingenieurs liegen. Aber was nutzt alle Theorie der Mechanik und der Physik, wenn man nicht die Werkzeuge besitzt oder zu bereiten versteht, um im gegebenen Fall die zahlenmäßigen Folgerungen aus ihr zu ziehen?

4. Geometrische Fragen. Die Pflege der Geometrie, die schon im klassischen Altertum zu großen Erfolgen geführt hatte, ist ursprünglich wohl durch die Aufgaben des Feldmessens angeregt worden. Als Grundproblem kann man vielleicht die »Konstruktionsaufgabe« ansehen: ein Raumgebilde, das durch hinreichend viel Eigenschaften definiert ist, vollständig herzustellen. Allmählich ist diese etwas einseitige Auffassung mehr und mehr zurückgetreten gegenüber einer »systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander«. Im Gegensatz zur Analysis besitzt die Geometrie, und zwar erst seit neuerer Zeit, ein durchgreifendes Einteilungsprinzip: es bilden nach F. Klein immer jene Eigenschaften der Raumgebilde, die gegenüber einer bestimmten »Gruppe« von Transformationen unverändert bleiben, ein geschlossenes Untersuchungsgebiet, eine »Geometrie« für sich. So kann man heute insbesondere die metrische und die projektive Geometrie sowie die Analysis situs einander gegenüberstellen. Bei der ersten bilden die Bewegungen oder »kongruenten Transformationen« die maßgebende Gruppe,

[1]) Für die Potentialgleichung: C. Runge, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math. phys. Kl. 1911, S. 431 bis 448. Für Strömungsprobleme, namentlich in der Turbinentheorie: R. v. Mises, Zeitschr. Math. Phys. 57 (1909), S. 1 bis 120, oder Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908.

[2]) Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux derivées partielles, Gand 1900 bis 1903. Zur Einführung weit besser ist der Artikel von Runge und Willers in der Encyklopädie d. mathem Wiss. Bd. II, C 2. Vgl. a. A. Willers, Graphische Integration, Sammlung Göschen, Leipzig 1920.

[3]) Zeitschr. Ver. deutsch. Ingen. 1898, S. 1436.

bei der zweiten die Umwandlungen durch geradliniges Projizieren von einem Festpunkt aus, bei der dritten, von deren Bedeutung für die Anwendungen noch die Rede sein wird, alle Transformationen, die in bestimmtem Sinne stetig erfolgen.

Herkömmlicherweise werden zwei Gebiete der Geometrie zur angewandten Mathematik gerechnet, die sogen. »praktische Geometrie« oder Geodäsie (Feldmeßkunst) und die darstellende Geometrie, die etwa in der Lehre von der Kartenprojektion einen Berührungspunkt aufweisen. In der Geodäsie handelt es sich um metrische Aufgaben, und zwar zunächst um elementare, d. h. solche, die auf den einfachen Kongruenzsätzen für endlich ausgedehnte Figuren beruhen, dann erst, sobald auf die Krümmung der Erdoberfläche und insbesondere auf deren Abweichung von der Kugelgestalt Rücksicht genommen wird, um Fragen der Differentialgeometrie. Die Geschlossenheit dieses Problemkreises und die äußeren Verhältnisse der praktischen Anwendung haben die Geodäsie zu einem selbständigen Wissenschafts- und Berufszweig werden lassen, dessen Entwicklung ziemlich unabhängig von der der übrigen Teile der angewandten Mathematik verläuft. Eine solche Isolierung wirkt auf die Dauer niemals vorteilhaft.

Die darstellende Geometrie ist, was ihre systematische Ausbildung angeht, eng verknüpft mit der Geschichte der technischen Hochschulen, ja man kann ihre Entwicklung geradezu als ein Symbol für diese ansehen. Hervorgegangen aus einer Sammlung praktischer Regeln, die, zum Teil unter strenger Geheimhaltung nach außen, innerhalb enger Berufsgruppen (der »Bauhütten«) von Generation zu Generation überliefert wurden, hat sie durch Monge, einer der Begründer der école polytechnique in Paris, die feste Form eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes erhalten, dessen Pflege den verschiedenen, später entstandenen Hochschulen überlassen blieb. Auf die Anfänge der projektiven Geometrie, die auf Poncelet, einen Mitarbeiter Monges, zurückgehen, hat die darstellende befruchtend eingewirkt. In der ersten Blütezeit der deutschen technischen Hochschulen, in den 70- und 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts, in denen der Grund zu den meisten der heutigen theoretischen »Ingenieurwissenschaften« gelegt wurde, hat die darstellende Geometrie in der »Methodenlehre« Fiedlers in Zürich ein übergroßes Maß von projektiver Geometrie in sich hineingezogen und ist durch diese allzu theoretische Fassung ihren ursprünglichen Zielen stark entfremdet worden. Die Reaktion, die darauf eingesetzt hat und teils in einem Zurückdrängen der geometrischen Grundgedanken der Fragestellung, teils in fortschreitender Einschränkung des lehrplanmäßigen Unterrichts auf diesem Gebiet besteht, wirkt heute noch fort, nachdem sie bereits weit übers Ziel geschossen hat. Denn wenn auch die unmittelbaren Aufgaben der zeichnerischen Darstellung eine weitgehende theoretische Ausbildung in der darstellenden Geometrie nicht rechtfertigen können, sie bleibt doch ein unentbehrliches Mittel der Schulung für den Bauingenieur, der dreidimensionale Baukonstruktionen, z. B. räumliche Fachwerke, wirklich beherrschen, für den Maschineningenieur, der räumliche Bewegungsvorgänge, wie sie bei windschiefen Verzahnungen, beim Hinterschleifen von Fräsern usw. auftreten, richtig verstehen will. So kann man denn nur hoffen, daß die jetzt einsetzende Neubelebung des Interesses an den wissenschaftlichen Grundlagen der Technik auch dem geometrischen Unterricht allmählich zu seinem Recht verhelfen wird.

Dann aber wird die »angewandte« Geometrie aus der Enge hervortreten müssen, die ihr heute vielfach anhaftet, um sich vor allem nach zwei Richtungen zu entfalten. Einmal bedürfen die der Präzisionsmathematik zuzuzählenden geometrischen Grundbegriffe der Mechanik, der Vektor und Tensor, die Dyade, der Stab und die Dyname, Rotor, Gradient usw., Begriffe, die gerade in der technischen Mechanik zur umfassendsten Anwendung gelangen, der anschaulichen und durchgreifenden Verknüpfung mit dem Mutterboden der Geometrie, dem sie entstammen. Wie Wertvolles es hier auf dem nur scheinbar ausgeschöpften und vielfach als »nur formal« unterschätzten Gebiete noch zu finden gibt, haben neben dem großen Werk von Study[1]) die in ihrer Einfachheit bestechenden, schönen Arbeiten von Otto Mohr[2]) gezeigt; durch beide werden die besten klassischen Ueberlieferungen eines Möbius, eines Chasles, aufs würdigste fortgesetzt. Von einer Ausgestaltung und Zusammenfassung all dieser Lehren darf sich insbesondere die Mechanik der Baukonstruktionen, die ja so stark geometrisch durchsetzt ist, viel versprechen. Freilich scheint es, als ob die hier erforderlichen Begabungen geometrisch anschaulicher Richtung, selbst innerhalb des Kreises der mathematisch Veranlagten, besonders selten zu finden wären.

[1]) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

[2]) O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1914.

Der zweite Punkt, auf den wir die geometrische Betrachtungsweise ausgedehnt zu sehen wünschen, fällt in das Gebiet der Approximations-Mathematik im Kleinschen Sinne. Es handelt sich um eine geordnete Entwicklung der Grundsätze und der Hilfsmittel des graphischen Rechnens, von dem oben ausführlich die Rede war. Bekanntlich hat d'Ocagne vor nicht langer Zeit durch Schaffung der Nomographie hier sehr wesentliche Fortschritte herbeigeführt[1]). Man ist jetzt in der Lage, funktionale Zusammenhänge zwischen mehr als zwei Veränderlichen durch ebene Figuren zu beherrschen. Allein fast alle prinzipiellen Fragen der Nomographie harren noch der Lösung, und man wird nicht fehlgehen, wenn man von deren Klärung auch eine Erweiterung der Anwendungsgebiete erwartet. In letzter Linie liegen hier »Abbildungs« Probleme vor, die man ja einer genügend weit gefaßten »darstellenden« Geometrie unterordnen könnte; auch andere Aufgaben der zeichnerischen Rechenverfahren, z. B. die der Konstruierbarkeit unter Zuhilfenahme einer festen Kurve (analog den Steinerschen Konstruktionen mit festem Kreis), dann die schon berührten infinitesimal-geometrischen Fragen bei der Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, weisen mehr als nur äußerliche Berührungspunkte mit den Begriffsbildungen und Verfahren einer allgemeinen »Abbildungs«-Geometrie auf.

Vorhin ist auch ganz kurz der »Analysis situs« Erwähnung getan worden, jener Geometrie, die die Raumgebilde nur nach ganz allgemeinen Zusammenhangs-Eigenschaften unterscheidet: Für sie sind Kugel und Ring verschiedene Körper, aber der Kugel gleichgestellt wird jeder Körper, der, wie ein Würfel oder sonst ein einfaches Polyeder, durch einen einfachen Schnitt (d. h. einen in geschlossener Linie um die Oberfläche herumlaufenden) in zwei getrennte Teile zerfällt. Es sieht so aus und hat bisher als selbstverständlich gegolten, daß eine derartige Betrachtungsweise, die zumeist auf sehr schwierige Fragestellungen führt, für die Technik ohne jede Bedeutung sei (wenigstens soweit von den mittelbaren Anwendungen in der Funktionentheorie abgesehen wird). Demgegenüber sei gestattet, darauf hinzuweisen, daß in einem bestimmten Zweig der Technologie, der freilich gegenwärtig noch rein handwerksmäßig auf Grund überlieferter Erfahrungsregeln betrieben wird, eine ähnliche, wenn auch nicht die gleiche, Art der Auffassung geometrischer Körper zur Geltung kommt. Wir meinen die Gießerei, bezw. das Herstellen von Modellen und von Negativformen vorgegebener Gebilde. Hier ist die Aufgabe zu lösen: wie muß der herzustellende Körper in möglichst wenig Teile zerlegt werden, von denen jeder einzelne »abformbar« ist, d. h. bei Einführen in die Formmasse und Wiederherausziehen den Negativabdruck des ganzen von ihm repräsentierten Oberflächenteils des ursprünglichen Körpers hinterläßt. Beispielsweise ist es klar, daß, wie eine Kugel, jeder einfache konvexe Körper eine Zerlegung in zwei Teile zuläßt, ebenso aber auch der durch Rotation einer Kugel entstandene Ring (Torus). Dagegen erfordert eine offene Kugelschale, die mehr als die Hälfte der Vollkugel umfaßt, mindestens vier Modellteile, nämlich je zwei für die Außen- und Innenfläche. Es kommt hier, wie man erkennt, durchaus nicht der gleiche Gesichtspunkt zur Geltung, der die Zusammenhangs-Eigenschaften der Analysis situs liefert, aber ein Einteilungsgrund, der ebenfalls in sehr weitem Maße stetige Gestaltsänderungen der Körper unberücksichtigt läßt. Wir führen dies mit allem nötigen Vorbehalt an, nur um zu zeigen, wie weit die Möglichkeiten wissenschaftlicher Durchdringung praktischer Handhabungen noch sind; an einen augenblicklichen und unmittelbaren Nutzen darf man da freilich nicht denken.

5. Der Aufgabenkreis der Mechanik. Die Mechanik mit all ihren Verzweigungen nimmt einen so breiten Raum in dem Arbeitsgebiet des Ingenieurs ein, daß es kaum möglich erscheint, auch nur die wichtigsten, gegenwärtig aktuellen Fragen hier zu berühren. In drei Stufen erhebt sich bekanntlich das Lehrgebäude der heutigen wissenschaftlichen Mechanik. Den Grund bildet die Newtonsche Mechanik der freien Punkte (oder kleinen festen Körper), die unmittelbar eingeprägten Kräften unterliegen; sie hat hauptsächlich in der Astronomie ihr Anwendungsgebiet gefunden und hier fast die größten Triumphe gefeiert, die je einer Naturwissenschaft zuteil wurden. Aber schon die Bewegungserscheinungen am physischen Pendel bedurften weiterer, über die Newtonschen hinausgehender Begriffsbildungen, die, von Huyghens vorbereitet, durch Euler und Lagrange ihre systematische Ausgestaltung erhalten haben: In der Mechanik der gebundenen Punktsysteme einschließlich der starren Körper (Mechanik endlich vieler Freiheitsgrade) ist es der Begriff der Bewegungsbeschränkung (kinematische Bedingung) und der mittel-

[1]) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris 1899. Eine kurze Einführung gibt F. Schilling, Ueber die Nomographie von d'Ocagne, Leipzig 1900.

baren oder Reaktionskraft, der die Hauptrolle spielt[1]). Fast die gesamte Lehre von den Maschinen, von ihren Bewegungen und den in ihnen wirksamen Kräften, ruht auf diesem Fundament. Endlich hat Cauchy, gestützt auf mehrere Vorgänger, einen dritten Kraftbegriff, den der flächenhaft verteilten, inneren Kräfte oder Spannungen eingeführt, der es ermöglicht, die meisten Erscheinungen an stetig deformierbaren, festen, flüssigen oder luftförmigen Körpern bis zu einem gewissen Grade zu beherrschen. Ob damit der prinzipielle Aufbau der Mechanik abgeschlossen ist, muß angesichts des weiter unten noch zur Sprache kommenden, bisherigen Versagens der Hydromechanik gegenüber ganz geläufigen Bewegungsvorgängen zum mindesten als zweifelhaft gelten.

In den engsten Rahmen der Newtonschen Mechanik fällt von Aufgaben, die den Techniker angehen, eigentlich nur das sogen. »äußere« ballistische Problem. Es ist viel behandelt worden und gibt, wie schon erwähnt, reichlich Gelegenheit zur Anwendung praktischer Integrationsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen[2]). Bei der Vielfältigkeit der Anforderungen wird hier voraussichtlich noch lange nicht das letzte Wort gesprochen sein.

Der Untersuchung der Bewegungsvorgänge an Maschinen ist, wenn man etwa die Entwicklung der Statik der Bauwerke zum Vergleich heranzieht, verhältnismäßig wenig Aufmerksamkeit gewidmet worden. Breiteren Raum innerhalb der technischen Literatur hat eine Zeitlang nur die kinematische Betrachtungsweise der Reuleauxschen Schule eingenommen, die aber, trotz ihrer unbestreitbar aufklärenden Wirkung, sich bald infolge der einseitigen Ausschaltung der eigentlichen Kinetik als unfruchtbar erweisen mußte. Es ist erstaunlich, daß seit Poncelet (1845) und Grashof (1875/90) kaum eine nennenswerte Gesamtdarstellung der Maschinenlehre erschienen ist; hervorhebenswerte Behandlung von Einzelproblemen verdankt man J. v. Radinger für die Schwungradberechnung[3]), A. Stodola für die Theorie der Regulatoren[4]), H. Lorenz für den Massenausgleich[5]). Dabei liegt das methodische Rüstzeug für diese Untersuchungen seit mehr als hundert Jahren in der Lagrangeschen Systemmechanik fertig vor, deren Tag noch immer nicht gekommen zu sein scheint, obgleich K. Heun seit Jahrzehnten nachdrücklich auf sie hinweist[6]). Wenigstens bemühen sich stets wieder Techniker mit systematisch-theoretischen Bedürfnissen, wie beispielsweise Mohr, um die Schaffung von Begriffen, mit denen sie in den Anfangselementen der Lagrangeschen Mechanik stecken bleiben. Es wäre nun dringend zu wünschen, daß allmählich der Bann gebrochen wird und jene Methoden für die Lösung der maschinentechnischen Probleme herangezogen würden; davon wird man nicht nur Erfolg in Einzelfällen, z. B. bei einer zusammenfassenden Behandlung aller Aufgaben über die Regelung des Maschinenganges, erwarten dürfen, sondern es wird zweifellos neues Licht auf die Grundfragen der Maschinenlehre, auch auf die durch Reuleaux erst nur angebahnte Systematik, fallen. In mathematischer Hinsicht kommt hier nur das »reine« Integrationsproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen in Frage, zudem meist für lineare oder sonstwie spezialisierte Gleichungen; Schwierigkeiten physikalischer Natur, d. h. etwa Unstimmigkeiten zwischen dem Ansatz und dem tatsächlich Beobachteten, liegen in erheblichem Maße jedenfalls nicht vor.

Der allgemeine Spannungsbegriff, der von Euler vorbereitet, von Cauchy dann endgültig präzisiert wurde, hat seinen Ursprung und bisher auch die umfassendste Verwendung in der Theorie der elastischen Körper gefunden, die bekanntlich dadurch gekennzeichnet sind, daß Spannungen und Deformationen in jedem Punkt einander wechselweise eindeutig bestimmen. Nimmt man, wie dies allgemein üblich und hinreichend genau ist, diesen Zusammenhang als linearen an, so führt die Theorie für die einfachen Körperformen und Belastungsfälle, mit denen der Ingenieur gewöhnlich zu rechnen hat, zu Ergebnissen, die sich bei einiger Beherrschung der zeichnerischen und rechnerischen Näherungsverfahren in fast allen Fällen mit jedenfalls ausreichender Genauigkeit ableiten

[1]) Vergl. hierzu die in diesem Punkte vorbildliche Darstellung bei G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 87 ff.

[2]) Reiches Material bei C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Leipzig 1910. Vergl. auch Fußnote 2) S. 6, sowie die demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von K. Popoff.

[3]) Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, Wien 1892.

[4]) Schweizer Bauzeitung 22 (1893) S. 113 und 23 (1894) S. 108.

[5]) H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe, Leipzig 1901.

[6]) Z. B. in dem grundlegenden Bericht: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik Leipzig 1900. Eine ausführlichere Darstellung des ganzen Problemkreises der Maschinenlehre gibt R. v. Mises in Bd. IV der Encykl. d. mathem Wissensch., Artikel 10, S. 153 bis 355.

lassen [1]). Nur der dauernde Zustand gegenseitigen Mißverstehens zwischen Mathematikern und Technikern hat zur Folge gehabt, daß sich eine zum großen Teile mit der Elastizitätstheorie in Widerspruch stehende »technische Mechanik« ausgebildet hat, die den richtigen Ausgangspunkt durch angebliche »Näherungstheorien« ersetzt, wobei deren Begründung oft nur darin besteht, daß sie einfache Schlußfolgerungen, wenn auch ersichtlich falsche, gestatten. Damit soll nicht die »Baumechanik« im engeren Sinne getroffen werden, die besser Mechanik der Stabsysteme hieße, und aus wesentlich geometrischen Ausführungen um einen engen Kern richtiger mechanischer Vorstellungen besteht. Aber überall, wo es sich um etwas anderes als dünne Stäbe handelt, liegt ein weites, auf lange Zeit hinaus ergiebiges Arbeitsfeld der angewandten Mathematik vor: für die einzelnen Problemgruppen, wie z. B. die Schubspannungs-Verteilung beim gedrillten oder gebogenen Balken, das Gleichgewicht der belasteten ebenen Platte oder krummen Schale, die Stabilität verschieden beanspruchter Stäbe oder Schalen, die Spannungen und Formänderungen ebener Scheiben bei beliebigem Kraftangriff (Kerbwirkung) usw., die erforderlichen Rechnungen nun wirklich in dem praktisch notwendigen Umfang durchzuführen, so daß die Fragen, die in der technischen Mechanik gestellt und beantwortet zu werden pflegen, auch ihre rationelle Beantwortung tatsächlich erhalten. — Als rationell glauben wir hierbei ein Verfahren bezeichnen zu dürfen, das von einem, soweit die Beobachtung reicht, physikalisch richtigen Ansatz ausgeht und Schlußfolgerungen durch Näherungsrechnung von kontrollierbarem Genauigkeitsgrad zu gewinnen sucht.

Hier erhebt sich nun freilich der Einwand, daß die wirklichen Körper teils überhaupt nicht, teils nur in engen Belastungsgrenzen sich wie elastische verhalten. Den vor einigen Jahrzehnten unternommenen Versuch, den Abweichungen dadurch Rechnung zu tragen, daß man an Stelle des Hookeschen linearen ein nicht-lineares Spannungs-Zerrungs-Gesetz einführt [2]), kann man wohl als erledigt ansehen. Denn die eigentlichen Schwierigkeiten bestehen erst darin, daß Spannungen und Formänderungen nicht mehr in eindeutiger Wechselbeziehung stehen, sondern daß nach Verschwinden der Beanspruchung bleibende, plastische Formänderungen auftreten. Die allgemeine Theorie plastischer Körper, die schon auf Saint-Venant zurückgeht und in den anschaulichen Formulierungen Mohrs neue Förderung erhalten hat [3]), ist erst in neuester Zeit durch L. Prandtl bis zur expliziten Verwertung für bestimmte Aufgaben fortgeführt worden [4]). Der Wirklichkeit gegenüber bleibt aber auch die Theorie der plastischen Formänderungen noch ein gutes Stück zurück, da sie der »Verfestigung« des Materials durch die Beanspruchung, also einer gewissen »Gedächtnis-Erscheinung«, nicht Rechnung trägt. Diese wird man erst im Zusammenhang mit der elastischen Nachwirkung und den allgemeineren Ansätzen Volterras zu einer »Gedächtnis-Mechanik« [5]) beherrschen können; eine genügend umfassende Theorie, die sich heute, wenigstens in allgemeinem Rahmen, wohl schon aufstellen ließe, ist bisher nicht formuliert worden. Ueberhaupt darf bemerkt werden, daß die reichen Möglichkeiten, die verschiedenartige Festsetzungen über die inneren Spannungen als Funktion anderer Größen in der Mechanik der Kontinua, insbesondere der festen Körper, darbieten, bisher nur sehr wenig ausgenutzt wurden. Außer den plastischen und den gewöhnlichen elastischen Körpern sind in größerem Umfang nur noch gewisse elastische Gebilde mit endlich ausgedehnten Formänderungen, durch Cosserat u. a. behandelt worden [6]). Einstweilen ist hier die Sammlung von Beobachtungsmaterial, da sich die heutige Physik wenig um dergleichen kümmert, die wichtigste Aufgabe der an der Weiterentwicklung der Mechanik arbeitenden Techniker.

Ganz anders als in der Elastizitätslehre steht es in dem andern klassischen Gebiet der Mechanik stetig verteilter Massen, der Hydrodynamik. Hier verfügt man noch nicht über einen Ansatz, der auch nur in den wichtigsten und scheinbar einfachsten Fällen, wie z. B. dem der gleichförmigen Strömung des Wassers in einem geraden Rohr, zu Folge-

[1]) Vergl. hierzu z. B. den demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Bericht über die Lösungen des Torsionsproblems von Th. Pöschl.

[2]) Namentlich C. Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1890; 8. Aufl. Berlin 1920.

[3]) S. 192 bis 235 in den Fußn. 2, S. 8, genannten Abhandlungen Mohrs. Für den allgemeinen Ansatz und seine Begründung vergl auch R. v. Mises, Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. 1913, S. 582. Zusammenfassendes Referat in der Encykl. d. math. Wissensch. Bd. IV, Art. 31, von v. Karman und L. Föppl.

[4]) Vergl. den folgenden Aufsatz sowie Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. 1920 S. 74.

[5]) Vergl den Bericht von Volterra im Arch. d. Math u. Phys. (3) 22 (1914) S. 155 bis 182.

[6]) E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Paris 1909.

rungen führte, die mit der Beobachtung in erträglichem Maße übereinstimmen. Man besitzt bekanntlich zwei Theorien, die der »idealen« und die der »zähen« Flüssigkeiten, und für jede von ihnen gibt es Gebiete, in denen sie unbestritten zur Geltung kommt; die Idealtheorie beispielsweise bei der Berechnung der freien Strahlen (vena contracta), die Zähigkeitstheorie bei der geordneten, laminaren Bewegung in engen Kanälen, in den schmalen, vom Schmiermittel erfüllten Spalten zwischen Welle und Lager usw. Auf beiden Gebieten liegen, noch wenig bearbeitete, Aufgaben der Approximations-Mathematik, ähnlich denen der Elastizitätstheorie vor. Von den meisten übrigen Bewegungen weiß man nur, daß sie »turbulent« sind, d. h aus einer verhältnismäßig ruhigen Grundströmung und darüber gelagerten, sehr unregelmäßigen Vibrationen bestehen, und man kann nur mit Verwunderung feststellen, daß die Grundströmung im großen ganzen den Bewegungsgesetzen der idealen Flüssigkeiten folgt[1]). Ein neues Beispiel für die oft sehr weitgehende Uebereinstimmung hat die in letzter Zeit weit ausgebildete Theorie der Luftströmung in der Umgebung eines bewegten Tragflügels geliefert[2]). Aber weder kann man aus den mechanischen Gleichungen den Grund dafür ableiten, daß bei Außerachtlassen der Pulsationen das Verhalten der wirklichen Flüssigkeit annähernd das einer reibungsfreien wird, noch viel weniger lassen sich die Fragen beantworten, die mit dem Auftreten der Turbulenz unmittelbar zusammenhängen, vor allem die, welchen Umständen das Entstehen der Turbulenz zuzuschreiben ist[3]). Nach dem gegenwärtigen Stand der Theorie muß man es als noch unentschieden ansehen, ob der Ansatz der zähen Flüssigkeiten bei genügender mathematischer Durchdringung eine Erklärung der Turbulenz zu geben vermag, etwa auf dem Wege einer entsprechenden Berücksichtigung der Wandrauheit als Grenzbedingung, oder ob die Lösung nur durch die Sprengung des Rahmens der klassischen Mechanik und Uebergang zu statistischer Betrachtungsweise erhofft werden kann. Bei den großartigen und vielfach verblüffenden Erfolgen, die der physikalischen Statistik in den letzten Jahren zuteil geworden sind, wird man vielleicht mehr der letzteren Ansicht zuneigen, die — wenn sie sich bewahrheiten sollte — von gar nicht abzuschätzender, grundsätzlicher Bedeutung für die gesamte Auffassung der Mechanik werden könnte.

So haben wir in flüchtigem Zuge den mannigfaltigen Aufgabenkreis der Wissenschaft durcheilt, die mehr als irgend eine andere eine unentbehrliche Grundlage der schaffenden Technik bildet. Die Mechanik, die einmal Lionardo das Paradies der Mathematiker genannt hat, ist für den heutigen Ingenieur das umfassendste Arbeitsfeld geworden, dessen mühevolle Bebauung ihm fast allein überlassen blieb und aus dem er, wenn auch in harter Arbeit, reichlich lohnende Früchte zieht.

6. Weitere Probleme. Schlußbemerkung. Mit den vorstehenden Betrachtungen über die Aufgaben der angewandten Analysis und Geometrie sowie der Mechanik ist die Fülle der Probleme bei weitem nicht erschöpft, mit deren Bearbeitung wir uns zu befassen haben. Die angeführten Problemgruppen sind nur insofern ausgezeichnet, als sie bei der nach der Berufsgliederung orientierten Stoffabgrenzung der verschiedenen Zeitschriften an keiner andern Stelle ihre zuständige Vertretung finden. Nun tritt aber noch eine ganze Reihe von Gebieten hinzu, die bei der heutigen Spezialisierung nicht mehr in vollem Umfang bei uns behandelt werden können, die aber dem hier vertretenen Interessenkreis so nahestehen, daß sie nicht ganz unberücksichtigt bleiben dürfen.

An erster Stelle sei die mathematische Statistik genannt, die mit ihren Ausstrahlungen nach der Bevölkerungslehre und Versicherungs-Wissenschaft auf der einen, nach der physikalischen Statistik auf der andern Seite, heute nicht nur großen Umfang, sondern hohe und immer noch steigende, wissenschaftliche und praktische Bedeutung gewonnen hat. Es scheint, daß hier eine Klärung der Grundlagen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und auch ein Ausbau der Lösungsmethoden für Einzelprobleme vonnöten wäre. Beide Mängel traten z. B. in letzter Zeit zutage bei der langwierigen, nicht ganz befriedigend abgeschlossenen Erörterung über das Problem der »Iterationen«, das Marbe zum Ausgangspunkt weitgehender Angriffe gegen die bisher als allgemein gültig an-

---

[1]) Dieser Sachverhalt wird ausführlich dargestellt bei R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 29 bis 33.

[2]) Vergl. besonders L Prandtl, Nachr. Ges Wissensch. Göttingen, math phys. Kl. 1918 S. 107 sowie das demnächst hier erscheinende Referat von Trefftz.

[3]) Ueber den bisherigen Stand dieser Frage unterrichtet das in dieser Zeitschr. demnächst erscheinende Referat von F. Noether.

erkannten Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht hat [1]). Beide Umstände bewirken aber auch, daß die meisten Teile der physikalischen Statistik dem logisch Denkenden einen höchst unbefriedigenden Eindruck machen und bei allen, Physikern und Mathematikern, die größten Bedenken auslösen. Andererseits arbeitet die Statistik im engeren Sinn, namentlich in Fragen der Fehlerausgleichung, der Bevölkerungslehre und des Versicherungswesens, mit scheinbar großer Sicherheit, indem sie eine Reihe erstarrter Formeln und Begriffe, wie das »Bernoullische Schema«, das Fehlerquadrat, die normale und nicht normale Streuung und ähnliches mehr, weit über den Geltungsbereich ihrer ursprünglichen Definitionen hinaus, handhabt. In mathematischer Richtung handelt es sich heute, abgesehen von der ganz allgemein notwendigen Reinigung der Schlußweisen und Voraussetzungen, um das von Laplace zum erstenmal in Angriff genommene Problem der »Funktionen großer Zahlen«. Die Sache liegt so, daß man in den elementaren Formeln der Kombinatorik (oder eigentlich in den einfachsten Formeln der Arithmetik) die Mittel besitzt, um jedes klar gefaßte Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung — und die Statistik hat keinerlei andere Quellen, wenn sie auch manchmal meint, den Wahrscheinlichkeitsbegriff entbehren zu können — »grundsätzlich« zu lösen. Aber die Berechnung der in Frage kommenden Funktionen nach ihrer ursprünglichen Definition wird zur praktischen Unmöglichkeit, sobald die Veränderlichen die hohen Werte annehmen, die ihnen in den Anwendungen zukommen. Eine systematische, zusammenfassende Behandlung dieser Fragen, die sich dem Grundproblem der praktischen Analysis (s. oben) zwanglos unterordnen, ist seit Laplace nicht wieder versucht worden. Aber gerade die neueste Entwicklung der Analysis hat viel zu ihrer Förderung beigetragen [2]), so daß man jetzt hoffen darf, viele bisher unerledigte Aufgaben der Statistik mit rationellen Methoden in Angriff nehmen zu können.

Wie wir die Aufgaben der mathematischen Statistik an die der Analysis anschließen können, so verfahren wir ähnlich, indem wir den Aufgabenkreis der Mechanik soweit ausdehnen, daß er die Wärmemechanik oder technische Thermodynamik mit umfaßt. Dabei wollen wir weniger an den Ursprung jener Bezeichnung, die sogenannte »mechanische Natur« der Wärme, denken als vielmehr daran, daß die Mechanik der Dampfmaschine oder anderer Wärmekraftmaschinen wesentlich lückenhaft bleibt, solange man nicht die thermodynamischen Ueberlegungen heranzieht, die das »Kraftfeld« der Maschine erst bestimmen. Es war wohl Gustav Zeuner, der zum erstenmal mit der bewußten Absicht, dem Maschinenkonstrukteur zu dienen, die Grundbegriffe der modernen Thermodynamik zur Erklärung der Vorgänge in der Dampfmaschine angewandt hat. In welchem Maße sich die hierhergehörigen Probleme ausgedehnt und vertieft haben, zeigt das große, nur einem Sondergebiet gewidmete Werk von A. Stodola über Dampfturbinen [3]), das vorbildliche Muster eines technischen Lehrbuches, das um einen Kern unmittelbar praktischer Aufgaben eine Menge fruchtbarer Gedanken aus verschiedenen Gebieten der Theorie sammelt, neue Fragestellungen anregend, alte Probleme aufklärend. Nur für den, der mit dem Inhalt dieser Forschungen gar nicht vertraut ist, muß es ausdrücklich gesagt werden, daß diese Thermodynamik weder in der »reinen«, noch in der »technischen Physik« genügende Berücksichtigung findet. Denn jene, die sich noch traditionell in eine »theoretische« und eine »experimentelle Physik« gliedert, beschäftigt sich ausschließlich damit, den Bereich der erklärbaren Naturerscheinungen zu erweitern, und ist vollauf befriedigt, sobald es gelungen ist, eine neue Gruppe von Tatsachen in ein Gedankenschema sicher einzuordnen, so etwa wie die Differentialgleichungen der Mechanik ein Schema, einen Rahmen, für die Erklärung aller Bewegungserscheinungen abgeben. Derartige Bemühungen bilden wohl eine notwendige Voraussetzung und Vorbedingung für alle technische Verwertung der Naturphänomene, doch keineswegs die einzige und hinreichende, so wenig etwa, wie die Kenntnis dessen, was den physikalischen Inhalt der Elastizitätstheorie bildet, hinreicht, um ein Bauwerk zu berechnen. Die sogenannte »technische« Physik aber ist teils nur eine Zusammenfassung der für die physikalische Technik, d. h. für die Durchführung

[1]) K. Marbe, Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916; L. v. Bortkewicz, Die Iterationen, Berlin 1917. Vgl. a. R. v. Mises, Die Naturwissenschaften 7 (1919) S 168 ff.

[2]) Hierher gehören die neueren Untersuchungen über das sogenannte Momentenproblem von Stieltjes, vgl. H. Hamburger, Math. Zeitschr. 4 (1919) S. 186 bis 222 und Math. Ann. 81 (1920) S. 235 bis 319 sowie G. Polya, Math. Zeitschr. 8 (1920) S. 171 bis 181.

[3]) A. Stodola, Die Dampfturbinen, 5. Aufl. Berlin (im Erscheinen).

von Experimentaluntersuchungen, in Betracht kommenden Lehren, teils erfüllt sie die Aufgaben, die wir hier für den eigentlichen Maschinenbau im Auge haben, auf bestimmten anderen Sondergebieten der Technik, z. B. dem des Apparatebaues, der Röhrentechnik usf.

Nicht unähnlich liegen die Verhältnisse auf dem auch sachlich verwandten Gebiet der Elektrotechnik und Elektrizitätslehre. Hier hat freilich der große Umfang der praktischen und theoretischen Aufgaben schon längst zu einer Absonderung geführt, die bei allem Nutzen und Vorteil der Arbeitsteilung auch deren Mängel zutage treten läßt. Manche Fragen des Elektromaschinenbaues, wie z. B. die des Pendelns parallel geschalteter Maschinen, sind wesentlich mechanischer Natur und die der Elektrizitätslehre angehörigen Ueberlegungen dienen dabei nur zur Feststellung des Kraftfeldes so, wie das oben hinsichtlich der Thermodynamik erwähnt wurde. Andere Aufgaben, wie etwa die Berechnung von Fernleitungen auf Spannungsabfall zeigen weitgehende formale Analogie mit Rechnungen ganz anderer Art (hier der Festigkeitsberechnung gebogener Balken) und auch die der Elektrotechnik besonders eigentümlichen geometrisch-zeichnerischen Verfahren (Kreisdiagramme usf.) haben schließlich viel allgemeinere Bedeutung und können zweckmäßig von weiteren Gesichtspunkten aus beleuchtet werden. Am engsten werden die Beziehungen zwischen elektrotechnischen Problemen und denen aus anderen Gebieten der angewandten Mathematik dort, wo man sich nicht auf mehr weniger elementare Rechenmethoden beschränken kann, sondern auf die Differentialgleichungsansätze zurückgeht. Es ist bekannt, daß jedes elektrostatische Problem ein hydrodynamisches und vielfach auch ein elastisches Analogon hat, und wenn auch kaum sehr häufig die ganz gleichen Fragestellungen in den verschiedenen Gebieten auftreten (gewisse Abweichungen sind fast immer vorhanden), so erkennt man doch aus dem Bestehen der Analogie, daß es sich mathematisch um ganz ähnliche Aufgaben hier und dort handelt, Aufgaben, die jedenfalls mit denselben approximations-mathematischen Methoden zu behandeln sind. Es schlingt so die »praktische Analysis« ein gemeinsames Band um alle Probleme, die auf die Systeme partieller Differentialgleichungen führen, wie wir sie in ihrer einfachsten Form in der gewöhnlichen Potentialgleichung kennen. Wir meinen, daß es nur zur Förderung all der von diesen Problemen berührten Gebiete ausschlagen kann, wenn wir gegenüber der — an ihrer Stelle auch nützlichen — Spezialisierung hier eine Gelegenheit schaffen, die gemeinsamen Züge der verschiedenen Erscheinungen zu pflegen. —

In der Einleitung ist die Unbestimmtheit und zweifache Relativität, die in dem Begriff der »angewandten Mathematik« steckt, ausführlich dargelegt worden. Der flüchtige Gang durch die lange Reihe verschiedenartiger Probleme, den wir haben folgen lassen, wird sicherlich das Gefühl noch verstärkt haben, daß es sich hier um ein nach außen unsicher begrenztes, nach innen wenig geschlossenes Gebiet handelt. Was wir diesem wenig befriedigenden Eindruck entgegen zu stellen haben, ist vor allem die Berufung auf das praktische Bedürfnis, dem Sammlung und Zusammenfassung lose aneinander hängender Fragen oft mehr dienen kann, als die glatte Abrundung eines einheitlichen Kernes. Gewiß wäre es schöner und ästhetisch befriedigender, wenn wir es nicht nötig hätten, zwischen den Stoffgebieten des Mathematikers, Physikers und Technikers die Reste wahrzunehmen, die von allen Seiten unerledigt bleiben. Man kann sich auch vorstellen, daß einmal eine Zeit kommen wird, die, die einzelnen Wissenzweige in einer höheren Einheit vereinigend, ein derartiges Unternehmen überflüssig erscheinen läßt, wie ja auch den Großen unseres Gebietes, einem Euler oder Gauß, einem Newton oder Cauchy der Zwiespalt zwischen reiner und angewandter Wissenschaft fremd war. Allein niemand kann die Zeit und die Verhältnisse, in die er gestellt und unter denen er zu wirken berufen ist, frei wählen: die Erfordernisse der Gegenwart erkennen und ihnen nach Kräften zu dienen suchen, ist äußerer und innerer Umkreis der Pflicht.

So wollen wir denn die immanente Bedeutung unserer Aufgabe, wie sie sich von einem weitausblickenden historischen Standpunkt aus darstellt, sicher nicht überschätzen. Aber wenn wir hier dem Werke, das von hervorragenden und einsichtigen Männern der letzten Jahrzehnte eingeleitet wurde, einen festen äußeren Rahmen zu schaffen versuchen, so sind wir uns doch bewußt, etwas zu unternehmen, was weder nutzlos noch geringfügig ist und dabei über die Kräfte des einzelnen nicht nur, sondern auch eines einzelnen Geschlechtes hinausgeht. Wie die Baumeister des Mittelalters ihre Bauten begannen, unbekümmert darum, daß sie sie unmöglich zu Ende führen konnten, so vertrauen auch wir, daß trotz der gewaltigen Erschütterungen unserer Zeit, trotz aller die Zukunft unserer Kultur bedrohenden Erscheinungen, sich stets die Kräfte finden werden, in dieser oder jener Form das Begonnene fortzuführen, solange es nottut. Denen aber, die aus einer Welt »reinerer« Forschung mit Mißtrauen oder Geringschätzung zu uns herübersehen, rufen wir die Worte zu, die eine alte Ueberlieferung dem Heraklit von Ephesus zuschreibt: Entroite, nam et hic dii sunt; tretet ein, denn auch hier wohnen Götter. 12

BERLIN 1932

9. David van Dantzig

David van Dantzig, 1900-1959, was gegrepen door de zuivere wiskunde. Het was Mannoury die hem, toen hij aanvankelijk scheikunde studeerde, de weg wees naar de schoonheid van dat heldere en dwingende denken. Van Dantzig legde zich toe op de twee onderwerpen die in Amsterdam in de jaren twintig, mede onder invloed van Brouwer, actueel waren: de topologie en de grondslagen van de wiskunde. Op het eerste zou hij promoveren bij zijn studievriend Van der Waerden: *Studiën over topologische algebra*, 1931. Naar het tweede onderwerp bleef hij gedurende zijn hele carrière telkens terugkeren. Speciaal de visie van Mannoury, de significa, de leer van de menselijke verstandhouding, hield hem zozeer bezig, dat men mag vermoeden dat deze leer hem zijn eigenlijke inspiratiebron was.
Van Dantzig was een echte wroeter, altijd op zoek naar de basisaannamen en dan naar de fundamenten daar weer van. Van fundamentele bijdragen aan topologie switchte hij naar de meetkundige grondslagen van de mathematische fysica in samenwerking met J.A. Schouten hoogleraar in Delft. Het bracht hen in contact met Ehrenfest en Einstein. In Delft ontwikkelde Van Dantzig zich van assistent tot collega van Schouten, maar juist toen in 1940 zijn benoeming tot gewoon hoogleraar afgekomen was, werd hij op last van de bezetters verwijderd.
Na de oorlog kreeg Van Dantzig al snel een benoeming in Amsterdam en ditmaal, alsof zijn werk nog niet genoeg gebieden bestreek, in de leer der collectieve verschijnselen, dat wil zeggen mathematische statistiek, aan de Universiteit van Amsterdam. Hier legde hij de basis voor de academische beoefening van de mathematische statistiek in Nederland. Niet minder belangrijk was zijn invloed op twee andere terreinen: op de oprichting en vormgeving van het Mathematisch Centrum en op de Nederlandse introductie en uitwerking van het concept van wiskundig modelleren.
Het was een welbewust besluit geweest, eind jaren dertig, om zich toe te leggen op maatschappelijke dienstbaarheid van de wiskunde - een gedachte die in het Mathematisch Centrum institutioneel gestalte kreeg -. David van Dantzig schreef diverse mensen aan met het verzoek om hem voorbeelden mede te delen van het gebruik van mathematische statistiek, zelf stortte hij zich natuurlijk allereerst op de grondslagen van de statistiek. Het vragen naar de gronden van de gronden op dat terrein bracht hem bij een notie van wiskundig model. J. Tinbergen, J.M. Burgers en D. van Dantzig waren de eersten in de Nederlandse literatuur die deze notie ontwikkelden. "Wiskundig model" kwam in 1939 in Van Dantzigs correspondentie voor, in 1945 in een college en in 1946 in een engelstalige publicatie. De hier gekopieerde latere tekst is gekozen, omdat hij beknopt en nederlandstalig is: 'Het wiskundig model in de ervaringswetenschappen' (uit: *Euclides* **29** 1951/52). De visie stoelde mede op een intussen ruime ervaring in de statistische consultatie.

GENERAL PROCEDURES OF EMPIRICAL SCIENCE

by
D. VAN DANTZIG

(University of Amsterdam)

HET WISKUNDIGE MODEL IN DE ERVARINGSWETENSCHAPPEN [1])

door

Prof. Dr D. VAN DANTZIG.

1. De algemene gang van zaken in een uitgebreide groep van ervaringswetenschappen voltrekt zich globaliter volgens een aantal stappen, die ik bij een vroegere gelegenheid[2]) ongeveer als volgt heb aangegeven:

1. Voorafgaande ervaring; 2. Herinnering daaraan; 3. Waarneming; 4. Beschrijving daarvan; 5. Modelvorming; 6. Formalisering; 7. Inductie; 8. Axiomatisering; 9. Deductie; 10. Interpretatie; 11. Verwachting; 12. Handeling.

Te dezer plaatse wil ik slechts enkele punten uit het geciteerde betoog samenvatten, die in het bijzonder op de middenfasen betrekking hebben. De belangrijkste daarvan is de zgn. „inschakeling" van een *model.* Deze bestaat, kort gezegd, daarin, dat aan de werkelijke waarnemingsbeschrijvingen een beetje gedokterd wordt, waardoor ze gemakkelijker handelbaar worden. Bij voorbeeld wordt bij numerieke waarnemingen een enkele sterk afwijkende aan een „foutieve aflezing" geweten, terwijl kleine fluctuaties b.v. aan „waarnemingsfouten" geweten en (althans in eerste aanleg) verwaarloosd worden. Het model geeft dus een *vereenvoudigd* en *geregulariseerd* beeld van de oorspronkelijke waarnemingsbeschrijving, zoals een scheepsmodel van een schip of een maquette van een stadsdeel. De modelvorming moet aan twee contradictoire eisen voldoen: als het model te véél van de oorspronkelijke werkelijkheidsbeschrijving verschilt is het voor de latere fasen 10—12 niet meer bruikbaar, en als het niet voldoende geregulariseerd is, is het praktisch niet hanteerbaar, inzonderheid met betrekking tot de middenfasen 6—9. Overigens is de modelvorming slechts een voortzetting in lichtelijk gewijzigde vorm van de *beschrijving* der waarnemingen zelf. Immers daarbij treedt ook een vereenvoudiging en regulari-

[1]) Voordracht gehouden op de vacantiecursus voor leraren op Vrijdag 22 Augustus 1952.

[2]) D. VAN DANTZIG, General procedures of empirical science, Synthese 5, 441—455, 1947.

sering op, zoals die trouwens aan alle taal inhaerent is: een verbale beschrijving van waargenomen verschijnselen is nooit zó compleet, dat deze verschijnselen daaruit in alle details ondubbelzinnig reconstrueerbaar zijn. Geen enkel woord- (of formule-) systeem kan wèlk verschijnsel ook exact en volledig weergeven; het kan slechts appelleren aan de eigen ervaring van de lezer, en hem een voor bepaalde doeleinden voldoend duidelijk beeld ervan geven. Ook hier zou een *te* grote precisie tot onhanteerbaarheid leiden, terwijl anderzijds een te grote beknoptheid der beschrijving tot een àl te geringe reproduceerbaarheid der verschijnselen leidt, die b.v. met de term „vaagheid" aangeduid wordt.

De *formalisering* is een opmerken en weergeven van bepaalde in het model voorkomende regelmatigheden. Formeel logisch kan dit geschieden door bepaalde uitspraken als „waar" te aanvaarden. Deze uitspraken kunnen herleid worden tot al-uitspraken of negaties daarvan, waarbij predicaten optreden die één of meer variabelen bevatten, die *bepaalde verzamelingen van gedane waarnemingen* doorlopen. B.v.: alle waarnemingen die de eigenschap A bezitten, hebben ook de eigenschap B. Of: voor alle x geldt: als x tot de gedane waarnemingen W behoort en als $A(x)$ geldt, dan ook $B(x)$.

De inductiestap bestaat nu daarin, dat in deze uitspraken de verzameling W van gedane waarnemingen tot een ruimere verzameling W' van gedane en nog te verrichten waarnemingen wordt uitgebreid en dat er toch nog dezelfde waarheidswaarde aan wordt toegekend. Door een verdergaande modelvorming wordt deze verzameling W' nog weer uitgebreid door er geheel denkbeeldige waarnemingen aan toe te voegen, waarbij er veelal een *oneindige* verzameling W'' voor in de plaats komt. Door een aantal der inductief gegeneraliseerde aan het model ontleende, als waar aanvaarde uitspraken als *axioma's* in te voeren, daaruit *deductief* nieuwe formele uitspraken af te leiden, en deze als eventuele waarnemingsresultaten te *interpreteren* („uitschakeling" van het model) komt men via de *verwachting*, dat deze resultaten bij werkelijke waarnemingen inderdaad empirisch geconstateerd zullen worden tot de *handelingen* (b.v. bepaalde experimenten of constructies), die de eigenlijke toepassing van het formalisme uitmaken.

2. In de geciteerde publicatie is een aantal in filosofische en populariserende geschriften veelvuldig gemaakte fouten opgesomd, waarvan de belangrijkste op modeloverschatting berusten. B.v. de bij EDDINGTON voorkomende opmerking, dat „de wereld is opgebouwd uit partiële differentiaalvergelijkingen". Correcter ware

geweest te zeggen, dat het doorgaans in de natuurkundige wetenschappen gebruikte *model* voor onze ervaringen van „de wereld" uit vergelijkingen van het genoemde type kan worden opgebouwd.

Een andere, nog veel vaker gemaakte fout bestaat daarin dat men zegt, dat de uitkomsten van metingen, of daaruit afgeleide fysische constanten, reële getallen (in de zin der analyse) zijn. Ten aanzien van de meetresultaten zèlf is het evident dat dit onjuist is: iets nauwkeuriger ware het te zeggen, dat zulk een uitkomst een *interval* van reële getallen is. Ook dit is evenwel niet geheel juist, daar de uiteinden van het interval niet steeds ondubbelzinnig uit de waarneming kunnen worden afgeleid. (Juistheid kan hier echter bereikt worden door slechts voldoend grote, *elkaar overdekkende* intervallen als „meetresultaten" toe te laten). Klaarblijkelijk is het vervangen van zulke intervallen door reële getallen weliswaar doorgaans niet te vermijden en zeer nuttig, maar een vrij ver gaande vereenvoudiging van de werkelijk gedane waarnemingen. (Te zeggen, dat de uitkomsten *rationale* getallen zijn, zoals wel gedaan wordt (t.w. bij voorbeeld de middens der bedoelde intervallen) is om dezelfde reden evenmin geheel correct). Van fysische constanten wordt vaak gezegd, dat hun „ware waarde" (een reëel getal) tengevolge van onvermijdelijke waarnemingsonnauwkeurigheden niet bepaald kan worden. Ook deze uitspraak is strikt genomen fout, daar zij impliceert dat het begrip dezer „ware waarde" vaststaat. Immers een dergelijke „ware waarde" kan niet alleen niet gemeten maar zelfs niet met onbeperkte nauwkeurigheid *gedefinieerd* worden. En het is niet slechts tengevolge der quantumverschijnselen, dat dit niet mogelijk is. Om de „ware waarde" van de massa der zon als een reëel getal te definiëren zou men o.a., daar deze door straling voortdurend verandert, vooraf het *tijdstip* waarop deze massa beschouwd wordt met onbeperkte nauwkeurigheid moeten definiëren. Om de massa van een mens als reëel getal te definiëren, zou men o.a. niet slechts het tijdstip der massabepaling moeten vastleggen, maar bovendien van elk stofje op zijn huid, van elke losgelaten huidschilfer, ja zelfs van elk molecuul van zijn adem *per definitie* moeten bepalen of het al dan niet meegeteld moet worden. Ook bij elke andere fysische grootheid doen zich dezelfde verschijnselen voor.

Het gebruik van de term „idealisering", waarmede men soms de inschakeling van het formalisme der reële getallen verantwoordt, geeft daaraan een nauwelijks te verdedigen gevoelskleur. Correcter ware het m.i. te zeggen, dat deze berust op een ter bereiking van het gestelde doel (b.v. bestudering van bepaalde verschijnselencomplexen) onontbeerlijke *verwaarlozing* van de lengte van het onbepaaldheidsinterval der beschouwde grootheden.

Deze fictie van de existentie der „ware waarden" leidt zelf weer tot verdere en zelfs zeer ernstige fouten. Ik behoef nauwelijks de schijnvraag te noemen, of b.v. de massa van de aarde een rationaal dan wel een irrationaal getal is, m.a.w. de mening, dat deze vraag weliswaar experimenteel niet te beantwoorden, maar wel zinvol is. Belangrijker echter is, dat de gehele causaliteitsleer van Laplace en zijn opvolgers op deze fictie berust: indien men op een willekeurig gekozen tijdstip de plaatsen en de snelheden van alle materiële deeltjes zou kennen, zouden deze volgens Laplace (die overigens de snelheden vergat te noemen) ook op een willekeurig later (of vroeger) tijdstip ondubbelzinnig bepaald zijn. De conclusie is slechts voor ieder tijdstip juist, indien genoemde grootheden met onbeperkte nauwkeurigheid bekend waren. Aldus echter zijn ze niet slechts onbekend, maar ook ongedefinieerd, en zelfs ondefinieerbaar. Men ziet, dat deze weerlegging van het „causaliteitsbeginsel" niet noodzakelijk op de quantummechanika een beroep behoeft te doen, maar reeds lang vóór dien mogelijk ware geweest.

3. Ook de functie van de deductieve redenering wordt niet steeds duidelijk ingezien, of althans weergegeven. Geen enkele deductie kan iets bewijzen omtrent de uitkomsten van nog niet gedane waarnemingen. Ook kunnen nòg zovele overeenstemmingen van deze uitkomsten met de deductief voorspelde nooit de juistheid van het axiomasysteem, of algemener het model, bewijzen, daar de deductie steeds *binnen* het model plaats vindt, dus de juistheid daarvan vóóronderstelt. Deze juistheid kan dus, strikt genomen, nooit bewezen, maar wèl *weerlegd* worden, t.w. door een niet-overeenstemming (daarbij thans afziende van eventuële twijfel omtrent juistheid van de waarneming, interpretatie van een deductieve uitspraak, e.d.). Ieder mathematisch „bewijs" van een waarneembaar verschijnsel (b.v. van het feit, dat drie krachten, overeenkomende met twee zijden en een passend georiënteerde diagonaal van een parallelogram elkaar in evenwicht houden) is dus een schijnbewijs. In werkelijkheid wordt zelfs na verifiëring van overeenstemming van voorspelling en waarneming, slechts bewezen, dat het model, of het hypothesen- of axioma-stelsel *vooralsnog* niet weerlegd is.

4. Ook ten aanzien van de betekenis van het oneindigheidsbegrip in de ervaringswetenschappen komen de wonderlijkste misvattingen

voor. Beschouwen we b.v. de definitie van het soortelijk gewicht, of, beter gezegd, de massadichtheid van een stof. De fysicus zal zeggen dat deze de verhouding is van de massa en het volume van een kleine hoeveelheid dezer substantie. De mathematicus echter zal wellicht bezwaren tegen deze definitie maken, zeggende dat daarmede niet de massadichtheid zèlf, die een functie van de plaats is, maar haar volumeintegraal, dus de *gemiddelde* massadichtheid over een eindig volume gedefinieerd is. Volgens hem wordt de correcte definitie verkregen door de *limiet* van de genoemde verhouding te nemen voor een zich op een punt samentrekkend volume. Deze definitie is evenwel niet beter, maar slechter dan de eerst genoemde, namelijk totaal fout. Immers, afgezien nog van de vraag, of deze limiet bestaat, zal men in ieder geval kunnen zeggen, dat men niet slechts totaal verschillende waarden zal krijgen, al naar gelang het beschouwde punt zich bevindt in een atoomkern of in een electron, of in de „lege ruimte" daartussen, maar dat zij in *ieder* geval in het geheel *niets* te maken heeft met b.v. het s.g. van water, waarover men wil spreken.

Weliswaar is mij niet bekend dat een dergelijk dispuut tussen een fysikus en mathematikus over de massadichtheid werkelijk heeft plaats gevonden, maar wèl is iets dergelijks het geval geweest ten aanzien van analoge begrippen, b.v. het snelheidsbegrip. Hier is het sinds een kwarteeuw de mode, de zogenaamde verwarring van „snelheid op een bepaald tijdstip" en „gemiddelde snelheid gedurende een tijdsinterval" onherroepelijk af te keuren en slechts de zogenaamd exacte definitie van de snelheid als *limiet* van de gemiddelde snelheid te aanvaarden. Wanneer we echter nagaan, wat de uitdrukking „snelheid van een stoffelijk punt op een bepaald tijdstip" kan betekenen, dan moeten we allereerst opmerken, dat een „stoffelijk punt" empirisch alleen gedefinieerd kan worden als een lichaam waarvan de afmetingen verwaarloosd worden. Soms kan een electron, soms een kanonskogel, soms een planeet, soms een melkwegstelsel als een stoffelijk punt behandeld worden, al naar de voor het gestelde doel vereiste nauwkeurigheid. Voorts kan „een bepaald tijdstip" alleen een klein tijdsinterval betekenen, waarvan de grootte verwaarloosd wordt. De „snelheid" van het „stoffelijk punt" „op" dit „tijdstip" kan dan niet anders zijn dan de ongevere waarde van het quotiënt van de ongevere waarde der in dit intervalletje afgelegde weg tot de ongevere waarde van de daartoe benodigde tijd, waarbij de term „ongeveer" in de verschillende gevallen nog een precisering in de zin ener quantitatieve schatting toelaat.

Dit betoog houdt natuurlijk niet in, dat men dus het gebruik van differentiaalrekening in de mechanika zou dienen te vermijden. Immers het is duidelijk, dat de precisering der onbepaaldheidsintervallen een wèrkelijk gebruik van deze definitie praktisch onmogelijk zouden maken in alle gevallen die een uitsluitend numerieke behandeling der beschouwde problemen te boven gaan.

Men heeft dus vrijwel geen andere keus. dan toch maar „tot de limiet over te gaan" (t.w. tot een der oneindig vele waarden voor deze limiet die niet met de gegevens in strijd zijn) en ook overigens de infinitesimaalrekening toe te passen. Dáár is niets tegen. Wèl echter tegen de waan dat men door zo te handelen *exacter* zou werken dan wanneer men zich aan kleine (natuurlijk niet: „oneindig kleine") differenties en haar eindige sommen houdt, terwijl men in werkelijkheid eerder zou moeten zeggen, dat men „slordiger" werkt, doordat men een aantal kleine eindige grootheden verwaarloost. Ook logisch bezien zal men bezwaarlijk kunnen volhouden, dat als onaanvechtbaar voorgestelde schijnexactheid logisch bevredigender is dan als zodanig onderkende beperkte exactheid.

Ook andere oneindigheidsuitspraken, die minder bij het middelbaar dan bij het hoger onderwijs voorkomen, berusten op een soortgelijke modeloverschatting. Bij voorbeeld de uitspraak, dat een stoffelijk punt een bepaalde positie, b.v. een van labiel evenwicht slechts „na oneindig lange tijd" bereikt. Deze uitspraak geldt slechts in het model; in werkelijkheid wordt het evenwicht reeds na een eindige tijd bereikt — of niet! Ook hier drukt men dit soms uit door te zeggen, dat de empirische werkelijkheid onvolkomenheden bevat, waarvan de mathematische theorie vrij is. Het in het woord „onvolkomen" gelegen emotionele accent verleggende, zou ik liever willen zeggen, dat de *theorie* zulke onvolkomenheden bevat, met name dat het model *te* sterk vereenvoudigd is om het bestudeerde verschijnsel correct weer te geven. Trouwens het gehele begrip „labiel evenwicht" berust op een te zeer vereenvoudigd model. Bij het allerlabielste in werkelijkheid voorkomend evenwicht (dat overigens, precieser beschouwd nooit statisch, maar altijd dynamisch is) is nog wel een epsilonnetje te vinden, waarbeneden een verstorinkje zich herstelt!

5. De bovenstaande kritiek is niet bedoeld, om het gebruik van mathematische modellen te ontraden. De in het begin als een keten van 12 schakels geschetste procedure der ervaringswetenschappen kan uiteraard de schakel van het wiskundige model niet missen. Het is echter wel belangrijk te wijzen op de gevaren van over-

schatting van het mathematische model. Het is zinloos één van de twaalf schakels tot een veel grotere exactheid op te voeren dan de overige. De exactheid van het geheel neemt daardoor niet noemenswaardig toe en de logische structuur wordt erdoor aangetast. Een der gevolgen van modeloverschatting is vaak een verstarring van de denkmethode, die zich ook in het onderwijs doet gevoelen in de vorm van een gebrek aan aanpassing aan nieuwe ontwikkelingen, vooral voorzover deze buiten het model optreden. Zonder op details in te gaan, zij hier gewezen op de wenselijkheid van een grondige herziening in de vorm van een verbreding enerzijds en een beknotting anderzijds van het middelbaar onderwijs in zuivere en toegepaste wiskunde. Verschillende gedeelten van de nu onderwezen stof zouden zonder schade voor de verdere studie weggelaten kunnen worden, waardoor ruimte zou ontstaan voor het behandelen van nieuwe onderwerpen. Het zou b.v. wenselijk zijn niet meer de mechanica als het enige onderwerp van toegepaste wiskunde te onderwijzen, maar daarnaast ook vakken als statistiek en numerieke wiskunde in te voeren, waarbij de mogelijkheid van een facultatieve keuze uit deze toepassingsgebieden overwogen zou kunnen worden.

6. Resumerend en aanvullend zou ik tenslotte willen vaststellen, dat het Mechanika Onderwijs niet alleen — evenals het Wiskunde Onderwijs en eveneens ten dele onder de pressie van het alle redelijk onderwijs in de kiem smorend eindexamen — ontaard is in een massaproductie van „sommen", die noch met de werkelijkheid, noch met de wetenschap nog enig verband houden, maar bovendien door absolutering van een sterk vereenvoudigd mathematisch model een fundamenteel onjuist beeld geeft aan de wijze waarop wiskunde op ervaringswetenschappen wordt toegepast, een complex van foutieve beweringen poneert en dit achter schijnexactheid maskeert, en daarmede de tot zijn doelstelling behorende „bevordering van het logisch denken" in haar tegendeel doet verkeren.

10. Reinier Timman

Reinier Timman, 1917-1975, was een voortvarend mens. Hij studeerde in vier jaar wiskunde in Amsterdam, 1934-1938, en schreef, terwijl hij gedurende de oorlogsjaren bij Fokker werkte, zijn proefschrift *Beschouwingen over de luchtkrachten op trillende vliegtuigvleugels, waarbij in het bijzonder rekening wordt gehouden met de samendrukbaarheid van de lucht.* Hij promoveerde hierop in Delft bij Bremekamp en de al meer genoemde Burgers. Verbonden aan het Nationaal Luchtvaartlaboratorium ontwikkelde hij in samenwerking met de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum de numerieke uitwerking aan theoretische resultaat van zijn proefschrift. In 1952 volgde de benoeming tot hoogleraar in Delft. De verwachting dat hij een opleiding in de toegepaste wiskunde van de grond zou tillen, kwam in 1956 uit. De conceptuele ontwikkelingen in wiskunde, wiskundig modelleren en techniek en de maatschappelijke ontwikkelingen van techniek, industrialisatie en de positie van de technische wetenschappen kwamen hier samen.

De inzichten van Von Mises en anderen trok Timman radicaal door: waarheid verloor het alleenrecht als criterium voor de acceptatie van een resultaat; geloofwaardigheid kwam ervoor in de plaats. De notie van wiskundig model gaf hij een plaats in de sfeer van geavanceerde techniek.

Timman hanteerde een consultatie-idee van het toepassen van wiskunde en richtte daar het studieprogramma op in. Van cruciaal belang was in zijn ogen de numerieke analyse.

Timmans inaugurale rede is in zijn geheel opgenomen: *De betekenis van de Wiskunde voor het Toegepast Wetenschappelijk Onderzoek* (Delft: Waltman, 1952).

De betekenis van de Wiskunde voor het Toegepast Wetenschappelijk Onderzoek

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN GEWOON HOOGLERAAR IN DE ZUIVERE EN TOEGEPASTE WISKUNDE EN DE MECHANICA AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT, OP WOENSDAG 8 OCTOBER 1952

DOOR

Dr. R. TIMMAN

UITGEVERIJ WALTMAN · HIPPOLYTUSBUURT 4 · DELFT

Mijne Heren Curatoren en Professoren,
Mijne Heren Lectoren, Instructeurs en Assistenten,
Dames en Heren Studenten,
en voorts gij allen, die deze plechtigheid met Uw tegenwoordigheid vereert,

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

Over de betekenis van de wiskunde voor de techniek is op deze plaats reeds verschillende malen het woord gevoerd. Een zestal jaren geleden heeft VAN VEEN U een overzicht gegeven over de wisselwerking, die in het verleden heeft bestaan tussen de wiskunde en de technische wetenschap en daarbij duidelijk naar voren gebracht hoeveel beide vakken aan elkaar te danken hebben.

Als ik gedurende dit uur Uw aandacht vraag voor dit onderwerp, dan is dat niet om nogmaals deze historische ontwikkeling te beschrijven, dit is reeds geschied op een wijze, die ik niet vermag te verbeteren, ik wil hier een poging doen om een schets te geven van de recente ontwikkeling, die destijds minder gemakkelijk was te overzien en voor een deel nog in de schoot der toekomst verborgen lag.

Bij een beschouwing van de historische ontwikkeling valt het op, hoe perioden van nauw contact tussen de wiskunde en de al of niet toegepaste natuurwetenschap afwisselen met perioden van vrijwel volkomen isolatie. Het schijnt, dat beide vakken van wetenschap na zo'n contactperiode, die hen met nieuwe begrippen en methoden verrijkte, een adempauze nodig hadden, teneinde deze nieuwe ideëen volledig te assimileren en ze te transformeren in de voor het vak karakteristieke denkwijze, waarna zij zijn blijven voortleven in deze nieuwe vorm, waaraan de vreemde oorsprong nauwelijks meer valt te herkennen. Het is niet gemakkelijk aan een modern wiskundeboek (zoals bijvoorbeeld LANDAU's beroemde „Einführung in die Differential- und Integralrechnung"), dat voor zuivere wiskundigen is geschreven, te herkennen, dat de differentiaalrekening door NEWTON is uitgevonden in samenhang met problemen uit de mechanica.

Sterker nog komt mij deze afstand voor bij het lezen van moderne boeken over abstracte Integraalrekening, waar het aanschouwelijk physische karakter van de begrippen inhoud en oppervlak geheel schuil gaat achter de verzamelingstheoretische inkleding.

Omgekeerd realiseert een ingenieur, die bij het dimensioneren van zijn constructies gebruik maakt van soms zeer eenvoudige „vuistformules", zich niet, hoeveel mathematische arbeid er aan deze vuistformules ten grondslag ligt, terwijl het zonder de ontwikkeling van de wiskunde in de achter ons liggende eeuwen zeker niet mogelijk zou zijn geweest deze formules op te stellen, hoewel ogenschijnlijk iedere wiskundige „geleerdheid" er vreemd aan is.

Elk der partijen vergeet veelal, hoeveel zij in een vroeger stadium aan de andere te danken heeft gehad en dit leidt tot de betreurenswaardige toestand, dat er dikwijls van een wederzijdse waardering niet veel te bespeuren valt.

Op het ogenblik bevinden wij ons echter in een nieuwe ontwikkelingsphase, waarbij voor het eerst sinds lange tijd de isolatie is verbroken en een nauwe samenwerking ontstaat tussen de wiskundige en de ingenieur en wel op een wijze, die karakteristiek is voor onze tijd, zoals ik U straks nog nader hoop uiteen te zetten.

De impuls tot deze nieuwe ontwikkeling is uitgegaan van de techniek zelf, die in een stadium is gekomen, dat zij zich voor problemen gesteld ziet, die dermate gecompliceerd zijn, dat het toegepast wetenschappelijk onderzoek een eigen, zelfstandige plaats gaat innemen tussen het zuiver wetenschappelijk onderzoek enerzijds en de directe toepassingen in de practijk anderzijds.

Dit toegepast wetenschappelijk onderzoek heeft derhalve een eigen karakter, haar doelstellingen zijn gericht op problemen, die door de practijk gesteld zijn, haar methoden daarentegen zijn die van de zuivere wetenschap, incidenteel ten behoeve van de practische doeleinden gemodificeerd.

Hoewel geen enkele nieuwe ontwikkeling uit het niets ontstaat en symptomen van nieuwe omstandigheden achteraf vaak al heel vroeg zijn aan te wijzen, lijkt mij een duidelijk beginpunt voor deze ontwikkeling in de wiskunde te liggen in het jaar 1921, toen in Duitsland begon te verschijnen het „Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik", een orgaan, waarin de resultaten van technisch wetenschappelijk onderzoek, gevoerd met mathematische methoden, gepubliceerd werden. Het tijdschrift had een eigen karakter, het verschilde zowel van de mathematische als van de technische vaktijdschriften. In het inleidende artikel „Ueber die Aufgabe und Ziele der angewandten Mathematik" omschreef de toenmalige hoofdredacteur R. von Mises als werkgebied van het tijdschrift, alle onderwerpen, waaraan de ingenieur, die zelfstandig theoretisch werk levert, behoefte heeft en noemde daarbij behalve de analyse en de meetkunde uitdrukkelijk de mechanica in de meest ruime zin des woords. Deze sterke koppeling aan de mechanica is ook in de titel, die de tijdschriften, die later op dit gebied zijn ontstaan, vrijwel ongewijzigd hebben overgenomen, tot uitdrukking gebracht.

Hierbij blijkt duidelijk het streven om de toegepaste wiskunde en de mechanica samen een zelfstandige plaats in de rij der exacte wetenschappen te laten innemen, een plaats, die aan de ene zijde begrensd wordt door de zuivere wiskunde, van welker resultaten zij steeds weer gebruik maken, anderzijds door de meer experimentele gedeelten van physica en chemie.

Het streven naar zelfstandigheid blijkt ook duidelijk bij de instelling van de Internationale Congressen voor Theoretische en Toegepaste Mechanica, in 1924 voor de eerste maal hier in Delft op initiatief van Biezeno en Burgers gehouden, en sindsdien door een lange reeks gevolgd en tenslotte door de oprichting van de Internationale Unie voor Theoretische en Toegepaste Mechanica, die als zelfstandig lichaam naast de andere Internationale Wetenschappelijke Unies een plaats inneemt.

Het is geen toeval, dat juist in Duitsland het eerste tijdschrift voor toegepaste wiskunde ontstond. Immers juist daar was de afkeer van de wiskundigen van de toepassingen het grootst, ondanks de pogingen aan het eind van de vorige eeuw van Felix Klein om een toenadering tot stand te brengen, zodat alleen een nieuwe zelfstandige organisatie in staat was te voldoen aan de behoeften van de beoefenaren van de toegepaste wiskunde.

In Engeland, waar gedurende de gehele 19e eeuw de beoefening der wiskunde een sterk physische inslag heeft gehad en waar de meeste triomfen gevierd werden op het gebied der mathematische physica, is het eerder de zuivere wiskunde geweest, die een harde strijd om het bestaan had te voeren. Ieder, die Whittaker en Watson's beroemde „Course of Modern Analysis", een boek, dat voor een degelijke studie van de Mathematische Physica vrijwel onontbeerlijk is, heeft doorgebladerd, weet, dat vele van de talrijke vraagstukken, die het boek rijk is, ontleend zijn aan de examenopgaven voor studenten in de wiskunde te Cambridge uit het eind der vorige of het begin van deze eeuw, zodat deze studenten practisch voorbestemd werden voor de studie der mathematische physica. Eerst omstreeks 1914 is hierin verandering gekomen en op het ogenblik bestaan aan vrijwel iedere Universiteit in Engeland afzonderlijke Departments of Pure en of Applied Mathematics naast elkaar.

Ook in Frankrijk was gedurende de 19e eeuw de scheiding niet volledig gegroeid, men denke hierbij aan de Ecole Polytechnique, die aan haar ingenieurs een sterke wiskundige inslag gaf en nog steeds geeft, zodat daar steeds belangrijk werk op het gebied der toegepaste wiskunde is geleverd. Ik kan hier niet nalaten de naam van de grote mathematicus POINCARÉ te vermelden, die op vrijwel alle gebieden van de zuivere èn de toegepaste wiskunde baanbrekend werk heeft verricht.

De nieuwe ontwikkeling van de toegepaste wiskunde in de geallieerde landen is eerst tijdens en na de tweede Wereldoorlog tot stand gekomen.

De eisen van de totale oorlog maakten het noodzakelijk alle krachten, waarover deze landen beschikten, in te schakelen en het werd al spoedig duidelijk, dat de krachten van de wiskundigen hier niet onbelangrijk waren. De jonge wiskundigen werden niet opgeroepen voor de militaire dienst, maar tewerkgesteld op voor de defensie belangrijke laboratoria, waar zij speciale opdrachten uit te voeren kregen. Op deze wijze is een mijner Engelse collega's, die aanvankelijk in Cambridge met veel liefde de analytische getallentheorie bestudeerde, overgebracht naar de theoretische aerodynamica, die hij thans nog met veel animo en succes beoefent.

Het is een bekend feit, dat een eenmaal gegroeide ontwikkeling niet teniet gedaan kan worden, de wiskunde heeft in de techniek een belangrijke plaats ingenomen en het is niet te verwachten dat haar invloed weer zal afnemen.

Het spreekt vanzelf, dat deze invloed het grootst is in de meest moderne vormen van techniek, welker opbloei heeft plaats gevonden in de laatste decennia. Ik denk hierbij in het bijzonder aan de electrotechniek vooral de telecommunicatietechniek en de luchtvaarttechniek. Het is merkwaardig op te merken dat onder invloed van de successen van de wiskunde in deze jonge takken van techniek, haar invloed in de oudere, zoals de scheepsbouw en de werktuigbouw groter wordt. In het algemeen gesproken staat het technisch wetenschappelijk peil van de scheepsbouw achter bij dat van de luchtvaarttechniek; op het ogenblik wordt echter hard gewerkt om veel bekende resultaten uit de laatste toe te passen op specifiek scheepsbouwkundige problemen waarmede tegelijkertijd de stimulans wordt geschapen om andere problemen uit de scheepsbouw, waar de resultaten van de luchtvaarttechniek niet direct toepasbaar zijn, eveneens te gaan onderzoeken.

Ik wil echter niet op deze vakgebieden ingaan, en, vooral voor de electrotechniek, het gaarne aan meer bevoegden overlaten om hier het woord te voeren over de invloed, die de wiskunde uitoefent en als voorbeeld voor verdere toelichting dat gebied van de techniek kiezen, waarmede ik uit eigen ervaring enigszins vertrouwd ben, n.l. de luchtvaarttechniek. Ter illustratie van de gegroeide invloed van de wiskunde geef ik U hier een klein statistiekje, dat het aantal rapporten van wiskundige aard beschrijft benevens het totaal aantal rapporten, dat uitgebracht is door het grote Amerikaanse instituut voor luchtvaarttechnisch onderzoek, het National Advisory Committee for Aeronauties en wel in de periode 1936—1939, dus voor de oorlog en in de even lange periode 1947—1950, na de oorlog.

In 1936—1939 werden gepubliceerd in gedrukte vorm 139 rapporten, waarvan er 13 van wiskundige aard waren. In de periode 1947—1950 werden eveneens 139 rapporten in gedrukte vorm verspreid, waarvan er 57 van wiskundige aard waren.

Hier wordt duidelijk de absolute groei van het aandeel dat de wiskunde in het onderzoekingswerk heeft, gedemonstreerd. De cijfers geven geen juist beeld van de relatieve groei, omdat op het ogenblik een groot deel van het experimentele en ontwikkelingswerk uit veiligheidsoverwegingen niet wordt gepubliceerd. Dit geldt echter ook voor de resultaten van numerieke berekeningen, die op het ogenblik met de in Amerika in zeer groot aantal aanwezige electronische rekenmachines worden gedaan en dat als voortzetting van het zuiver theoretische werk kan gelden, terwijl voor het experimentele werk een fundamenteel theoretisch inzicht onontbeerlijk is, zodat men veilig kan concluderen, dat ook het relatieve aandeel van de wiskunde aan het totaal van het onderzoekingswerk belangrijk is gestegen.

Het is verder interessant na te gaan welke onderdelen van de wiskunde vroeger en nu gebruikt werden. Terwijl de 13 rapporten uit de periode van 1936—1939 slechts gebruik maakten van elementaire theorieën, zoals gewone differentiaal-vergelijkingen en slechts hier en daar van de conforme transformatie, is deze verdeling voor de 57 rapporten uit de na-oorlogse periode als volgt:

conforme transformatie en potentiaaltheorie	8
hyperbolische partiële differentiaalvergelijkingen	24
variatierekening	4
gewone differentiaalvergelijkingen	4
asymptotische ontwikkelingen uit de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen	3
integraalvergelijkingen, i.h. bijz. numerieke methoden bij bepaalde singuliere vergelijkingen	2
numerieke methoden in het algemeen	5
matrix rekening	2
Laplace- en Fourier transformaties	4
mathematische Statistiek	1

Deze statistiek geeft echter aan de andere kant weer een zeer onvolledig beeld van het werk, dat in de Verenigde Staten op het gebied van wiskundige toepassingen in de luchtvaarttechniek en in het bijzonder in de theoretische aerodynamica wordt verricht. Aan vele Universiteiten wordt in opdracht van regeringsinstanties gewerkt en de resultaten van dit werk worden veelal gepubliceerd in de vaktijdschriften, zoals het Quarterly of Applied Mathematics and Mechanics, dat in de oorlog is ontstaan in duidelijke navolging van het bovengenoemde Duitse tijdschrift en dat sedert die tijd door andere tijdschriften is gevolgd. Hier komen ook meer de geavanceerde onderdelen van de wiskunde tot hun recht.

Het is echter een misverstand om te geloven, dat voor ieder technisch probleem, dat mathematisch geformuleerd kan worden, een oplossingsmethode pasklaar uit de schatkamers der mathematische wetenschap te voorschijn gehaald kan worden, hoe rijk en veelomvattend deze schatkamers ook mogen zijn.

Integendeel, wij zijn wel heel ver van deze ideale toestand verwijderd en het aantal problemen, waarbij zelfs met de meest geavanceerde mathematische kennis geen oplossing is te vinden, is ontstellend groot. Dit is te erger, omdat het dikwijls voor de techniek zeer belangrijke problemen zijn, welker oplossing voor een verdere ontwikkeling een levensbelang is.

Ik zal hiervan twee voorbeelden uit de aero- en hydrodynamica noemen.

Een theoretische behandeling van de stroming van de lucht om een lichaam met zo grote snelheid, dat in een deel van het veld de plaatselijke snelheid groter en in een ander deel kleiner is dan de snelheid van het geluid, een mathematische behandeling dus van het transsone snelheisdgebied, zou zeer belangrijk zijn, te meer omdat het experimenteel ook uitermate lastig is om dit gebied te bestuderen.

Zij ontbreekt echter nog steeds door het gecompliceerde karakter van de niet lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, die de stroming beheersen.

Een tweede voorbeeld, dat nog belangrijker is, omdat het toepassingsgebied veel en veel groter is, is de turbulente stromingstoestand. Hier zijn in principe de vergelijkingen ook bekend, het zijn de klassieke stromingsvergelijkingen, van NAVIER en STOKES, die de stroming van een visceus medium beschrijven.

Terwijl echter bij het probleem van de transsone snelheden er verschillende methoden zijn aan te geven, die tot een mathematische behandeling kunnen leiden, die echter te gecompliceerd zijn om met een aanvaardbare hoeveelheid werk een resultaat op te leveren, verkeert men over de mathematische aard van het turbulentieprobleem nog op zijn gunstigst geformuleerd in de schemering. Door het statistisch karakter van de turbulentie is men geneigd om statistische methoden toe te passen, analoog aan de statische mechanica, zoals die door de theoretische physici wordt beoefend. Terwijl echter de vergelijkingen van de golfmechanica lineair zijn, is dat met de vergelijkingen van NAVIER en STOKES niet het geval, zodat de bekende theorie ons al spoedig in de steek laat.

BURGERS heeft een aantal „mathematische modellen" van de turbulentie opgesteld met de bedoeling door het bestuderen van de oplossingen van eenvoudiger vergelijkingen, die enkele karakteristieke facetten met de vergelijkingen van NAVIER en STOKES gemeen hebben, tot beter inzicht te geraken en een grondslag te krijgen voor de in de laatste jaren ontwikkelde semi-empirische theorieën, die wel enige beschrijving geven, maar het wezen van de zaak niet kunnen weergeven, omdat de vergelijkingen van NAVIER-STOKES daar vrijwel niet in voorkomen. Algemeen mathematisch geformuleerd leidt het probleem tot de studie van nietlineaire variëteiten in de ruimte van HILBERT, de bekende ruimte met oneindig veel dimensies en hangt samen met de nog zo weinig bekende Ergodentheorie, die uitermate moeilijk is.

Om weer tot dichter bij de werkelijkheid staande zaken terug te komen, moet ik U nog wijzen op een kenmerkend verschil in interpretatie tussen de wiskundige en de ingenieur van het begrip „oplossing" van een probleem

In iedere tak van wetenschap kan men een onderscheid maken tussen een abstract logisch deelgebied en een deelgebied, dat direct aansluit aan de ervaring. Het eerste deel omvat die beweringen, die door omvorming volgens logische wetten uit andere zijn ontstaan, terwijl de aansluiting van de wetenschap aan de werkelijkheid door de beweringen, die ervaringensfeiten uitdrukken wordt gegeven.

In het algemeen is het doel van de wetenschap een zo systematisch mogelijke beschrijving te geven van haar onderwerp, waarbij, uitgaande van een aantal axioma's, die aan de ervaring getoetst kunnen worden (desnoods indirect) het gehele vakgebied beschreven wordt door het logische systeem, dat uit deze axioma's volgt. Hoe meer zich de ervaringsfeiten opstapelen, die overeenkomen met beweringen uit het systeem, hoe succesvoller het systeem is, en hier komt het belang voor de techniek naar voren, hoe beter het systeem zich leent tot het beinvloeden van de natuur op het speciale gebied.

Na het succes, dat de axiomatische methode in de meetkunde heeft bereikt, is men haar op verschillende andere vakgebieden gaan toepassen en men zou de natuurwetenschappen kunnen rangschikken naar de mate, waarin deze axiomatisering voortgeschreden is. Het is bekend, dat de wiskunde hierin aan de top staat, en dat de ervaringsfeiten, waarop het systeem der wiskunde berust, uitermate gering in aantal zijn Hoewel het streven van de wiskundigen er op gericht is, ze zoveel mogelijk te beperken, is er een belangrijke stroming onder diegenen, die zich met het onderzoek naar de grondslagen bezighouden, die van menig is, dat het ervaringsbestanddeel nooit geheel uitgeschakeld kan worden en er tussen de wiskunde, de mechanica en de andere natuurwetenschappen slechts graduële en geen principiële verschillen bestaan.

Een kenmerkend verschijnsel bij de beoefening van een wetenschap is echter, en dit geldt voor de wiskunde even goed als voor ieder ander vak, dat de resultaten aan de rand van het reeds bekende gebied nooit gevonden worden in de axiomatische vorm, maar op grond van vage intuities, gebaseerd op vroegere ervaringen en dat deze resultaten eerst achteraf geordend worden in het formele systeem, waarbij vaak de weg, die aanvankelijk tot het resultaat leidde, nauwelijks meer te herkennen valt. Men vergelijke hiermede de aan het begin van deze rede gemaakte opmerking over de vroegere wisselwerking tussen natuurwetenschap en wiskunde. Geformuleerd met de woorden van MANNOURY in het boekje „Mathesis en Mystiek": „Spreek-wiskunst zoekt, vermoedt, gist, raadt of raadt mis, geniet en lijdt, duizelt en slaat spijkertjes [om bijna goede redeneringen bij te spijkeren], maar hoor-wiskunst blijft er kalm bij en verschanst zich in kant- en klare definities en laat logarithmetafels drukken met stereotiepplaten. En wil zijn moeder niet meer kennen! . . ."

Het verschil tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde is het verschil in doelstelling. De doelstelling van de wetenschap is het verkrijgen van kennis, ik heb boven gepoogd om dit nader te omschrijven, de techniek echter vervult een sociale functie, haar doelstelling is de resultaten van de wetenschap te gebruiken voor constructies ten dienste van de maatschappij en de toegepaste wiskunde moet een antwoord geven op concrete vragen, die bij deze constructies opkomen.

Soms zijn deze vragen reeds wiskundig geformuleerd, dikwijls ook niet. De vertaling van het technische probleem in wiskundige terminologie is steeds een werk, dat aan de eigenlijke wiskundige oplossing moet voorafgaan en deze oplossing moet ook steeds gevolgd worden door een formulering in de technische terminologie.

„Onder die omstandigheden is de belasting van het beschouwde onderdeel zo groot, en om deze belasting te kunnen houden, moeten de afmetingen minstens zo groot zijn" zodat de constructeur direct met deze resultaten rekening kan houden.

Dit verschil in doelstelling maakt het dus niet nodig, dat de resultaten van het wiskundige onderzoek in de strenge mathematische vorm gegoten worden, integendeel, dit kan soms storend werken bij de omzetting in de taal van de techniek. Ook de door de mathematicus gestelde strenge eisen van nauwkeurigheid blijven veelal achterwege, de nauwkeurigheid van de uitkomsten behoeft in principe niet groter te zijn dan de nauwkeurigheid, waarmee de constructeur zijn bouwsels kan maken.

Deze eis van de mogelijkheid van omzetting in de technische terminologie heeft nog een ander gevolg: het is gewenst de uitkomst in zo eenvoudig mogelijke vorm te gieten en dit kan ertoe leiden, dat een snel en gemakkelijk te verkrijgen resultaat, dat minder nauwkeurig is, dikwijls verkozen wordt boven een strenge, door moeizame berekeningen verkregen oplossing. In de techniek speelt het geld, en daarmee de tijd, een grote rol, hoezeer dit de researchwerker dikwijls aan het hart gaat!

Ik wil deze algemene beschouwing toelichten aan een enkel voorbeeld: het gebruik van asymptotische ontwikkelingen.

Een functie laat een asymptotische ontwikkeling toe, indien zij een parameter λ bevat, die zeer grote waarden kan aannemen en indien het mogelijk is voor de functie een reeks op te schrijven, waarbij de opvolgende termen op de duur naar nul toe gaan als de negatieve machten van deze parameter, als deze steeds toeneemt. Het merkwaardige van deze reeksen, die door POINCARÉ zijn ingevoerd bij de bestudering van de hemelmechanica (hét vak, waar de toegepaste wiskunde een generatie terug werd belichaamd), is, dat zij niet behoeven te convergeren in de gewone zin des woords; d.w.z., dat de som van een eindig aantal termen bij een vaste waarde van λ niet tot een eindige waarde behoeft te naderen, indien het aantal termen onbepaald toeneemt.

De eis, die hier gesteld wordt is, dat bij een vast aantal termen het verschil tussen de waarde van de functie en de waarde van de som willekeurig klein wordt, indien de parameter maar groot genoeg wordt gekozen.

Voor zeer grote waarden zijn dikwijls één of twee termen al voldoende om een goede benadering van de functie op te leveren.

Deze asymptotische ontwikkelingen spelen in de toegepaste wiskunde een zeer grote rol en ik onderscheid hierbij drie mogelijkheden, die karakteristiek zijn voor de denkwijze in dit vak.

In het eerste geval is de ontwikkeling van de functie streng mathematisch mogelijk en kan voor de restterm (het verschil tussen de waarde van de functie en de som van een eindig aantal termen van de reeks) een bovengrens aangegeven worden, voor elke waarde van de parameter.

Voor een mathematicus is dit de enige wijze, waarop het gebruik van een asymptotische ontwikkeling bevredigend kan zijn.

Inderdaad is het in zeer veel gevallen mogelijk deze schattingen te geven, veel werk is op dit gebied verricht door VAN DER CORPUT en zijn school. Het spreekt echter vanzelf, dat alleen in betrekkelijk eenvoudige gevallen het uitvoeren van dit programma mogelijk is.

Veelal, vooral bij het zoeken naar asymptotische ontwikkelingen van een oplossing van een differentiaal-vergelijking, is het wel mogelijk een voorschrift te geven om de opeenvolgende termen van de reeks te berekenen, maar de schatting van de restterm is dermate gecompliceerd, dat zij niet meer uitvoerbaar is. In dit geval gaat men in de practijk zo te werk, dat men een aantal termen van de reeks berekent. Indien de laatst berekende term (of soms twee termen) niet meer een bijdrage leveren, die de berekende functiewaarde binnen de gestelde nauwkeurigheidseisen beinvloedt, is men tevreden.

Het merkwaardige is zelfs, dat men juist aan deze methode de voorkeur geeft. Bij het aangeven van een exacte bovengrens van de restterm is men n.l. genoodzaakt om hier en daar vrij grove schattingen in te voeren, zodat de aangegeven bovengrens meestal de werkelijke waarde van de restterm sterk overtreft en dan van weinig practisch nut is.

In de mathematische physica komt evenwel een derde mogelijkheid het meeste voor en het is voor een goed begrip van de hier gevolgde redeneringen nodig geweest hier enige aandacht aan te wijden. In dit geval is het practisch vrijwel niet uitvoerbaar om meer dan de eerste term van de ontwikkeling te berekenen, terwijl de optredende parameter toch niet zo groot is, dat deze eerste term al binnen de gestelde nauwkeurigheidseisen een resultaat levert. Het is dan een vrij grove benadering, die ook voor een ingenieur niet meer quantitatief aanvaardbaar is.

De problemen, die de natuur ons stelt, zijn echter zo gecompliceerd, dat men bijna altijd in dit derde geval verkeert. Dit is n.l. steeds zo indien men bij een probleem, welks exacte formulering aanleiding geeft tot een niet-lineaire differentiaalvergelijking, deze „met geweld" gaat lineariseren, d.w.z. men stelt, dat de niet-lineaire termen in de vergelijkingen klein zijn en laat ze in eerste benadering weg. Door dit zonder commentaar te doen, verdoezelt men het feit, dat hier eigenlijk een probleem uit de theorie der asymptotische ontwikkelingen aanwezig is met het gevolg, dat dit dan ook onopgemerkt blijft, zowel door de ingenieur, die de asymptotische ontwikkelingen vaak niet kent, als door de mathematicus, die de problemen in de literatuuroverzichten niet onder het hoofd „asymptotische ontwikkelingen" gerangschikt ziet.

Als voorbeeld zal ik kiezen de theorie der dunne draagvlakken in de aerodynamica, de mathematische beschrijving van de stroming langs een draagvlak, waarbij op grote afstand van dit draagvlak een homogene parallelstroming heerst. Dit is uiteraard equivalent met de berekening van het veld dat een draagvlak, dat met constante snelheid door een stilstaand medium, i.c. de lucht, wordt voortbewogen, veroorzaakt.

Indien het medium samendrukbaar is, komt voor de componenten van de snelheidsvector t.o.v. een rechthoekig assenstelsel een stelsel van niet-lineaire partiële differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde te voorschijn, terwijl als randvoorwaarden voor het probleem in de eerste plaats de voorwaarde, dat op grote afstand van het draagvlak de ongestoorde parallelstroming heerst, optreedt en verder op het draagvlak zelf zekere voorwaarden gesteld worden.

De asymptotische ontwikkeling kan hier nu geintroduceerd worden, indien men veronderstelt, dat overal op het draagvlak het raakvlak aan het oppervlak een kleine hoek maakt met de richting van de ongestoorde snelheid. Immers, de reciproke waarde van de maximale grootte, die deze hoek kan aannemen, is dan de grote parameter.

Door deze parameter expliciet in de vergelijkingen en de randvoorwaarden in te voeren, verkrijgt men dan voor de hoofdterm van de asymptotische ontwikkeling vergelijkingen die bekend staan als de vergelijkingen van de gelineariseerde theorie. Omdat wij nu eenmaal een stelsel lineaire vergelijkingen veel beter beheersen dan een stel niet-lineaire vergelijkingen, kunnen wij zeer veel problemen met deze benadering oplossen. Vrijwel alle rapporten, die in mijn bovengenoemde statistiekje betrekking hadden op hyperbolische partiële differentiaal-vergelijkingen zijn uitwerkingen van problemen uit de draagvlaktheorie in deze lineaire approximatie en wel voor supersone hoofdsnelheid.

Het is duidelijk, dat de hier genoemde procedure moet kunnen leiden tot tweede en hogere benaderingen. Dit is echter door de zeer grote hoeveelheid werk, die er aan verbonden is, vrijwel niet uitvoerbaar, zodat men zich met de eerste benadering tevreden stelt.

Toch is deze handelwijze zeer bedenkelijk. Immers de eis, die aan het invoeren van de asymptotische oplossing gesteld werd, was, dat overal het raakvlak aan het oppervlak een kleine hoek met de ongestoorde stromingsrichting maakte.

Welnu, indien het draagvlak aan de voorkant rond is, is daar ter plaatse het raakvlak verticaal, zodat deze voorwaarde duidelijk geschonden is. Het gevolg is, dat de berekening oplevert, dat aan de voorkant een oneindig grote snelheid heerst, terwijl dit in werkelijkheid niet het geval is. In de enkele gevallen, die exact berekend kunnen worden, blijkt de snelheid hier wel groot te worden, maar de vereenvoudigde berekening is toch principieel fout, zij introduceert singulariteiten, die er in werkelijkheid niet zijn.

Wat is nu de zin van dergelijke beschouwingen, die ook zelfs een toegepast mathemathicus niet kunnen bevredigen?

Het antwoord is duidelijk: ,,beter een half ei dan een lege dop". Het is beter althans enige kennis te bezitten, en, dit is belangrijk, deze met beleid te interpreteren, dan in het geheel niet.

De techniek stelt vragen en eist daarop een antwoord, de toegepaste wiskunde kan niet anders doen dan de problemen met ,,third degree"-methoden aan te vallen, om de gewenste resultaten te verkrijgen, maar moet zich dan ook realiseren, dat zij met het trekken van conclusies uit op deze wijze verkregen resultaten uitermate voorzichtig moet zijn.

Waar de extreme vorm van de strenge mathematische critiek verstek laat gaan, omdat zij niet anders kan doen dan alles onaanvaardbaar te verklaren, moet een op ervaring gebaseerde vorm van critiek aanwezig zijn, die het ene resultaat wel, het andere niet geloofwaardig acht en die alleen verkregen kan worden, als de beoefenaar van dit vak behalve een omvangrijke kennis van de te gebruiken mathematische methoden ook een fundamenteel inzicht heeft in de physische verschijnselen, waarop de wiskunde wordt toegepast.

Dit inzicht is al direct nodig bij het eerste stadium van onderzoek, n.l. bij de omzetting van het technische probleem in mathematische taal.

De natuurverschijnselen zijn n.l. altijd gecompliceerd en een mathematische formulering kan vrijwel nooit het probleem in zijn geheel omvatten. Ik heb hier niet het oog op de philosophische vraag of een mathematische formulering van het natuurgebeuren in volle omvang mogelijk is, ik bedoel alleen, dat van de in de techniek voorkomende problemen steeds alleen die facetten naar voren gebracht moeten worden, die belangrijk geacht moeten worden.

Deze formulering moet dus steeds door de technicus in samenwerking met de toegepaste wiskundige geschieden, waarbij de eerste ervoor moet waken, dat het effect, dat hem interesseert, naar voren komt en waarbij de tweede moet zoeken naar middelen om de vergelijkingen zo eenvoudig te maken, dat hij zich in staat acht ze te beheersten. Ook bij deze discussie is een belangrijke mate van verstandhouding nodig en de toegepast wiskundige mag niet een alleenstaande figuur zijn, die slechts aanknopingspunten met zijn directe vakgenoten heeft.

Het is geen toeval, dat de nieuwe opbloei van de toegepaste wiskunde valt op een tijdstip waarop overal ter wereld het wetenschappelijk onderzoek wordt verricht door research-teams. De toegepast wiskundige is in zo'n team een waardevol onderdeel en eerst in deze entourage kan zijn werk ten volle tot zijn recht komen.

In het buitenland wordt dit ook allerwegen ingezien en zijn op grote schaal wiskundigen in de research-teams ingeschakeld. Ook in ons land begint deze nieuwe taak duidelijk te worden. Het aantal wiskundigen, dat werkzaam is in de industrie of in laboratoria voor toegepast wetenschappelijk onderzoek, dat voor de oorlog gemakkelijk op de vingers van één hand geteld kon worden, neemt zienderogen toe. Dat dit echter aan de opleiding voor toegepaste wiskunde speciale eisen stelt, is duidelijk. Het is niet alleen een zaak van te behandelen onderwerpen, het is ook gewenst vroegtijdig kennis te maken met de andere denkgewoonten in de techniek, die ik hierboven geprobeerd heb te schetsen en die zeer verschillen van de mathematische denkwijze. Eigenlijk is de toegepaste wiskunde het arbeidsveld van de theoretisch werkende ingenieur, zoals ook door Von Mires in de beginselverklaring van het Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik uitdrukkelijk is vermeld.

Men kan dus op twee manieren tot dit vak komen: als wiskundige door zich met de techniek vertrouwd te maken, als ingenieur door zeer veel wiskunde te leren en de practijk leert ook, dat beide categorien vertegenwoordigd zijn. Om ingenieurs met de nodige mathematische hulpmiddelen uit te rusten moeten deze in ruime mate beschikbaar gesteld worden tijdens de opleiding en dit kan in nauw contact met de technische vakken geschieden. Zo kan een goede basis gelegd worden voor diegenen, die in de toekomst een werkkring op theoretisch gebied in de Nederlandse laboratoria voor toegepast wetenschappelijk onderzoek wensen.

Ik heb de indruk, dat een ruime toevloed van wiskundigen met een inzicht in de techniek of van ingenieurs met een goede kennis van wiskundige methoden op vele plaatsen met vreugde begroet zou worden.

Ook in ons land is voor de wiskunde de weg tot een nieuwe sociale functie geopend en ik hoop, dat de gelegenheid gevonden zal worden om haar die functie met ere te laten bekleden.

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

Bij de aanvaarding van mijn ambt moge ik in de eerste plaats mijn eerbiedige dank betuigen aan HARE MAJESTEIT DE KONINGIN, die mij heeft willen benoemen tot hoogleraar aan de Technische Hogeschool.

Edelgrootachtbare Heren Curatoren,

Voor Uw medewerking bij mijn benoeming ben ik U zeer dankbaar. Ik kan U de verzekering geven, dat ik mijn beste krachten zal wijden aan de taak, waarvoor ik aan de Technische Hogeschool, gesteld ben; in het bijzonder, daar ik een deel van mijn vorming, zij het niet op de collegebanken, aan haar te danken heb.

Mijne Heren Hoogleraren aan de Technische Hogeschool.

Het is voor mij een groot voorrecht in Uw kring te worden opgenomen. De vriendelijke houding, die ik in het verleden van velen Uwer ondervonden heb geeft mij de hoop, dat ik ook in de toekomst bij U om steun en voorlichting niet vergeefs zal behoeven aan te kloppen en ik hoop, dat ik ook hier en daar in staat zal kunnen zijn U behulpzaam te zijn.

Mijne Heren Hoogleraren van de Sub-Afdeling Wiskunde,

Hoewel de weg, die mij na het verlaten van de Universiteit tot deze plaats heeft gevoerd, verschillend is van de weg, die gij hebt doorlopen, en dit noodzakelijkerwijze zijn stempel op mij heeft gedrukt, vertrouw ik, dat dit een vriendschappelijke en vruchtbare samenwerking niet in de weg zal staan. Uit het feit, dat de voordracht tot mijn benoeming van U is uitgegaan, meen ik te mogen afleiden, dat eenzelfde vertrouwen ook bij U aanwezig is en ik ben U daar zeer erkentelijk voor.

Mijne Heren Hoogleraren en Lectoren van de Afdeling der Werktuig-, Scheeps- en Vliegtuigbouwkunde.

Door mijn vroegere werkkring ben ik met verschillende van U reeds meerdere malen in aanraking gekomen. Het stemt mij tot een grote vreugde, dat ik in de gelegenheid gesteld word dit contact te handhaven en te versterken, thans als Uw collega.

Mijne Heren Instructeurs en Assistenten, Dames en Heren van het Personeel van de Sub-Afdeling Wiskunde.

Uit de prettige wijze waarop ik in de afgelopen weken met U gewerkt heb, koester ik de hoop, dat dit in de toekomst op dezelfde wijze het geval zal zijn.

Het zij mij vergund bij deze gelegenheid mijn dank te betuigen aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

Hooggeleerde FREUDENTHAL,

De tijd, die ik in Amsterdam onder Uw leiding heb gewerkt, staat mij nog duidelijk voor de geest en ik heb nog dikwijls steun geput uit de aanmoedigingen, die ik van U heb mogen ontvangen. Ik kan U de verzekering geven, dat de gevoelens van eerbied en vriendschap, die ik destijds koesterde, onveranderd in mij voortleven.

Hooggeleerde BREMEKAMP,

Morgen is het zes jaar geleden, dat U mij op deze plaats toegesproken hebt in Uw functie als promotor. Ik prijs mij gelukkig, dat ik op het ogenblik in de gelegenheid ben U hier mijn dank uit te spreken voor de bereidwilligheid, waarmede U deze taak aanvaard en volvoerd hebt en de vriendelijke en hulpvaardige wijze, waarop U mij van Uw kennis en ervaring gebruik hebt laten maken.

Ik betreur het, dat ik U hier niet meer als directe collega kan begroeten, maar ik heb opgemerkt, dat Uw belangstelling voor de werkzaamheden van de Technische Hogeschool en Uw werkkracht beiden zo groot zijn, dat ik verwacht U hier nog meerdere malen aan te treffen.

Hooggeleerde Burgers,

Mijn eerste contact met de Technische Hogeschool, nu ongeveer 10 jaar geleden was een contact met U, dat geculmineerd heeft in de zo juist genoemde promotie, waarbij U als tweede promotor optrad.

Het was wederom U, die mij enige jaren geleden het verzoek deed, om tijdens Uw verblijf in de Verenigde Staten een deel van Uw werk over te nemen.

Uit de vriendelijke wijze, waarop U mij de laatste maanden weer tegemoetgekomen bent koester ik de beste verwachtingen, dat in de toekomst dit contact geintensiveerd zal worden. Ik hoop in staat te zijn nog meerdere malen van Uw diepe inzicht in de verschijnselen, die het zo moeilijke vak van de aero- en hydrodynamica vertoont, te kunnen leren.

Hooggeleerde Van der Corput,

Helaas behoor ik niet tot diegenen, die zich Uw directe leerlingen kunnen noemen. Niettegenstaande dat is Uw invloed op mijn wetenschappelijke vorming zeer groot geweest en heb ik in de afgelopen jaren toch de gelegenheid gehad om met Uw kring van nabij kennis te maken.

Ik ben U zeer dankbaar voor de vruchtbare uren, die U mij van Uw druk bezette tijd hebt afgestaan en die voor mij van zeer grote betekenis zijn geweest, omdat ik hier de gelegenheid gehad heb om Uw werkmethode, die tot zulke grote resultaten heeft geleid van nabij te zien en tevens voor de morele steun, die ik van U heb ontvangen in die tijd. Ik spreek de wens uit, dat dit ook in de toekomst nog wel eens het geval zal zijn en dat nog vele generaties jonge wiskundigen ditzelfde voorrecht geschonken zal worden.

Hooggeleerde Van Veen.

De band, die ons bindt, is reeds oud. Mocht ik reeds als student Uw grote kennis horen roemen, mijn eerste, weliswaar bescheiden, publicatie is door Uw handen gegaan en heeft, naar mij later bleek, de basis gelegd voor de vriendschappelijke verhouding, die de laatste jaren tussen ons heeft bestaan. Ik hoop ook in de toekomst met U, die mijn naaste oudere collega bent deze vriendschap te behouden en deze tot heil van het onderwijs en het wetenschappelijke werk aan de Technische Hogeschool aan te wenden.

Dames en Heren Vrienden en Collega's van het Nationaal Luchtvaart Laboratorium.

Een afscheid stemt altijd weemoedig, als ermee een afsluiten van een levensperiode gepaard gaat, waaraan men met vreugde terugdenkt. Deze vreugde is gebaseerd op de bijzonder prettige omstandigheden, waaronder ik met U gewerkt heb en die mij ten volle de ontplooiingsmogelijkheden hebben geleverd, die ik nodig had, èn aan Uw vriendschap. Ik wil hier geen namen noemen, de rij zou te groot zijn, maar ik wil één uitzondering maken voor de naam van onze, helaas overleden Directeur, IR. C. KONING, de man, die mij geleerd heeft, dat bij alle werk de menselijke factor de belangrijkste is.

Gelukkig is het contact niet geheel verbroken en ik verwacht, dat ik in de periode van nieuwe bloei, waarin het Laboratorium, dank zij de energie en het doorzettingsvermogen van Zijn Bestuur, in het bijzonder van U, Hooggeleerde VAN DER MAAS, is gekomen, ook nog enigszins deelgenoot zal kunnen zijn.

Mijne Heren leden van de Raad van Beheer en medewerkers van het Mathematisch Centrum.

De ontwikkeling van het Mathematisch Centrum heb ik in de afgelopen jaren in verschillende hoedanigheden met grote belangstelling en waardering gevolgd. Ik ben de overtuiging toegedaan, dat in ons land voor het Centrum een grote taak is weggelegd. Ik hoop in de toekomst in staat te zijn om, voor zover mij dit mogelijk is, een bijdrage te leveren tot Uw werk, teneinde voor het vele, dat ik in de afgelopen jaren heb mogen ontvangen althans enige tegemoetkoming te leveren.

Dames en Heren Studenten,

Mijn taak hier is U de wiskunde te onderwijzen, die U in Uw latere loopbaan als ingenieur nodig zult hebben. De omvang van deze benodigde wiskunde is sterk variërend. Ik ken verschillende ingenieurs, die hun werk uitstekend vervullen en niet meer een eenvoudige functie kunnen differentiëren, ik ken anderen, die problemen oplossen, die mathematici van professie verstomd doen staan en dit gehele spectrum is in U als geheel in de kiem aanwezig. Toch is er in de eerste jaren geen differentiatie in de groep, die aan mijn zorgen is toevertrouwd. Dit lijkt onnuttig, maar is het niet, want ook voor diegenen, die later met een zucht van verlichting hun wiskundeboeken voor goed in de kast zetten, is het nodig geweest de denkscholing door te maken, die de wiskunde geeft. Immers juist deze denkscholing onderscheidt een ingeneur, die in staat moet zijn problemen (of zij nu van wetenschappelijke, constructieve of bedrijfstechnische aard zijn) scherp te stellen en behalve het hoe ook het waarom te begrijpen, van een andere technicus. Tot diegenen, die zich geroepen voelen tot toegepast wetenschappelijk onderzoek, heb ik na al mijn voorgaande woorden niet veel meer te zeggen, zij zullen de wiskunde aan het werk zien, als experimentatoren bij hun theoretische collega's, als theoretici in hun eigen gedachtebouwsels.

Gij allen echter kunt erop rekenen, dat ik steeds bereid zal zijn U steun en voorlichting te verschaffen, waar mij dit maar mogelijk is en ik hoop, dat ik ook van U op een tegemoetkomende houding mag rekenen.

Ik heb gezegd.

11. Gerrit Veltkamp

Gerrit W. Veltkamp, geboren in 1923, maakte een bijzonder eenduidige academische carrière, zoals die pas na 1945 mogelijk werd. Hij studeerde wiskunde, werkte aan het Natuurkundig Laboratorium van de RU Utrecht en aan het Mathematisch Centrum in Amsterdam, schreef een proefschrift en werd hoogleraar wiskunde aan de Technische Hogeschool Eindhoven.
Dit laatste was een spannende opdracht, want nadat de Delftse Hogeschool haar Wiskundig Ingenieursopleiding had gestart in 1956, wilde Eindhovense er een naar eigen idee. Er waren al wel hoogleraren aangesteld voor het dienstverlenend onderwijs aan de technische afdelingen, maar Veltkamp was - hoewel dit niet bleek uit zijn leeropdracht - uitdrukkelijk aangezocht om de eigen opleiding gestalte te geven. J.J. Seidel was in 1956 begonnen de basis te leggen voor de Eindhovens onderafdeling Wiskunde. Veltkamp werd in 1959 aangezocht en begon zijn werk in 1960 op nogal plezierige wijze: samen met Seidel op oriëntatie-reis naar de Verenigde Staten. Zij bezochten een hele reeks universiteiten en laboratoria, iedereen die iets te vertellen had over wiskunde in de industrie.
Anders dan Timman, die zijn denkbeelden over de opleiding in Delft baseerde op de eigen ervaring in het technisch zeer geavanceerde werk van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, gingen Veltkamp en Seidel te rade bij verschillende laboratoria en andere afdelingen in de industrie.
De uitkomst was op twee punten anders dan het Delftse voorbeeld: een meer klassiek beeld van toegepaste wiskunde gecombineerd met grotere aandacht voor de industriële praktijk. Zij zagen scherper dan de Delftse collega's het belang van gebruik van wiskunde voor de bedrijfsvoering: Operations Research en andere toepassingen in de bedrijfskunde. Bovendien, en dat was de bijzondere inbreng van Veltkamp, brachten zij van die Amerikaanse rondreis het besef mee dat werken in een industriële omgeving echt andere eisen stelt dan in de academische sfeer:
WE WANT VIGOR, NOT RIGOR is de kreet die Veltkamp te horen krijgt en die weerklinkt in de hierna afgedrukte rede.
Hetzelfde idee van werken in de bedrijfscontext kwam in de verdere ontwikkelingsgang van de Wiskundig Ingenieursopleiding nog sterker naar voren, in het toekennen van een centrale plaats aan het wiskundig modelleren (modellenpracticum). Daar zat Veltkamps invloed mede achter, maar zijn voornaamste werk in Eindhoven was toch het, met oog voor RIGOR, verzorgen van de numeriek-wiskundige kant van de opleiding.
Tekst: *De wiskundig ingenieur* (inaugurale rede THE, 26 mei 1961)

DE WISKUNDIG INGENIEUR

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT
VAN GEWOON HOOGLERAAR IN DE WISKUNDE AAN DE
TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN
OP VRIJDAG 26 MEI 1961

DOOR

DR. G. W. VELTKAMP

Mijne heren curatoren,
Mijne heren hoogleraren en adviseurs,
Dames en heren leden van de wetenschappelijke,
de technische en de administratieve staf,
Dames en heren studenten,
en voorts gij allen die deze bijeenkomst met
Uw tegenwoordigheid vereert,

Zeer geachte toehoorders,

„We want vigor, not rigor". Zo karakteriseerde een research-leider in een industrielaboratorium de eisen die hij aan zijn theoretisch georiënteerde medewerkers stelt. Onder dit motto wil ik in dit uur enkele gedachten ontwikkelen, die betrekking hebben op de plaats van de wiskunde in de natuurwetenschappelijke en technische research en op de activiteiten van de wiskundig ingenieur, wiens opleiding — op grond van een op 11 oktober 1960 door H.M. de Koningin getekend Koninklijk Besluit — thans aan deze Technische Hogeschool mogelijk is.

Aanvankelijk zult U wellicht de indruk krijgen dat ik — conform de indruk die men gewoonlijk van wiskundigen heeft — geneigd ben de nadruk meer op de „rigor" dan op de „vigor" te leggen. Tegen het eind echter hoop ik U overtuigd te hebben, dat de „vigor" van de wiskundig ingenieur slechts waarde heeft indien zij gebaseerd is op een helder inzicht in de eventuele noodzaak van wiskundige strengheid.

Bezien wij eerst de ontwikkeling van de relatie tussen de wiskunde enerzijds, de natuurwetenschappen en de techniek anderzijds.

Tot aan het eind van de 19de eeuw was er een nauw verband tussen wiskunde en natuurwetenschap. Zeer vele wiskundigen droegen bij tot de ontwikkeling der natuurkunde, men denke slechts aan EULER, LAPLACE, GAUSS en POINCARÉ, terwijl anderzijds natuurkundigen als HELMHOLTZ, GREEN, STOKES en RAYLEIGH wezenlijk bijdroegen tot de ontwikkeling van de wiskunde. Men kan zelfs verder gaan en stellen dat tot laat in de 19de eeuw de wiskunde een natuurwetenschap was. Immers de meetkunde was gebaseerd op de euclidische postulaten, die beschouwd werden als grondslagen, aanschouwelijk gegeven door de ons omgevende fysische werkelijkheid. En een groot deel van de ontwikkeling van de analyse kan gezien worden als een onderzoek van het eveneens door de natuur gesuggereerde getallencontinuüm, terwijl de ontwikkeling van de differentiaal — en integraalrekening wezenlijk bepaald werd door natuurkundige probleemstellingen. Men denke hier, behalve aan NEWTON, ook aan LAPLACE, FOURIER en vele anderen. Dat in de natuurwetenschappelijke instelling eerst langzaam verandering kwam, blijkt bijvoorbeeld uit de nog zeer natuurwetenschappelijk klinkende titel van RIEMANN's werk „Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen", in welk werk echter op overtuigende wijze de betrekkelijkheid van het euclidische uitgangspunt aangetoond wordt. En zelfs HILBERT, door latere generaties beschouwd als de grondlegger van de axiomatische opbouw, niet van dè meetkunde, doch van alle mogelijke meetkunden, was nog primair geïnteresseerd in een logische fundering van de euclidische meetkunde. Andere meetkunden, die hij als pathologisch beschouwde, zag hij slechts als hulpmiddel om de onafhankelijkheid van de axioma's aan te tonen.[1]

Geheel anders is het beeld in de 20ste eeuw. Ik wil niet trachten, hier een sluitende definitie te geven van wat moderne wiskunde is. De filosoof WHITEHEAD zegt: „Mathematics is thought moving in the sphere of complete abstraction from any particular instance of what it is talking about". En BERTRAND RUSSELL zegt het wat gewoner: „Mathematics is the science in which we do not know what we are talking about nor whether what we say is true or not". Men kan zich afvragen of deze laatste uitspraak op niet-wiskundigen geruststellend of verontrustend zal werken: zij hebben immers ook nooit begrepen waarover de wiskundigen spreken, doch wel vermoedden zij dat de wiskundige van de waarheid van zijn uitspraken overtuigd is.

Duidelijk inzicht geeft een uitspraak van de natuurkundige WIGNER: „Mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose". Op twee aspecten wordt hier een accent gelegd. Wezenlijk is het bedenken van steeds nieuwe begrippen. Het is een misverstand te menen dat de wiskunde bestaat uit het voortdurend maken van gevolgtrekkingen uit een vrij

[1] H. FREUDENTHAL, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, Nw. Archief voor Wisk. (3), **5** (1957), 105-142.

4

klein aantal axioma's. Het aantal ontdekbare interessante stellingen zou dan vrij snel op zijn. Juist het vinden van nieuwe begrippen en regels waarmee de wiskundige op vaardige wijze nieuwe reeksen stellingen formuleert, maakt dat de wiskunde en de wiskundige tot meer dan een logisch mechanisme dat, uitgaande van axioma's, kan toetsen of bepaalde uitspraken waar zijn of niet. Het tweede accent ligt op het feit dat de wiskundige zijn nieuwe begrippen niet ontleent, althans niet behoeft te ontlenen, aan enige fysische ervaring. De nieuwe begrippen worden alleen geïntroduceerd om er vaardig mee te kunnen manipuleren. De grote wiskundige wordt gekenmerkt door de als het ware profetische gave die hij heeft om juist die nieuwe begrippen in te voeren welke aanleiding geven tot een elegant bouwwerk van stellingen, betrekking hebbend zowel op de nieuwe begrippen zelf als op het verband met en tussen reeds vroeger geïntroduceerde begrippen.

Geldt wat hier gezegd wordt over het steeds invoeren van nieuwe wiskundige begrippen op de basis van een vast axiomastelsel reeds voor een deel van de wiskunde uit de 19de eeuw, in de 20ste eeuw komt ook het axiomastelsel ter vrije keuze van de wiskundige. Men gaat bekende structuren als het continuüm der reële getallen ontleden in eenvoudiger structuren. Zo beschouwt men groepen, waarin men slechts kan optellen en aftrekken; ringen, waarin men kan optellen, aftrekken en vermenigvuldigen; lichamen, waarin ook een deling mogelijk is. Ook beschouwt men metrische ruimten, waarin slechts afstanden een primaire rol spelen of, algemener, topologische ruimten, waarin het begrip omgeving op de voorgrond staat. Deze ontwikkeling kan nog gezien worden als een poging om de structuur van de reële getallen uiteen te rafelen in zijn algebraïsche en topologische basisstructuren. Verder gaat men wanneer men vervolgens ook groepen beschouwt waarin de som van de elementen *a* en *b* niet noodzakelijk dezelfde is als die van *b* en *a*, en ringen waarin het produkt van twee elementen nul kan zijn zonder dat een der factoren nul is, enzovoorts, enzovoorts. Ook in de meetkunde treedt deze verruiming op: niemand is meer gebonden om in zijn meetkunde het parallellenaxioma van EUCLIDES geldig te verklaren of om te veronderstellen dat zij meer dan eindig veel punten bevat.

Het is duidelijk dat door deze ontwikkeling de plaats van de wiskunde fundamenteel verandert. Van een natuurwetenschap, gebonden aan de structuur van de wereld om ons, wordt zij een geheel autonome wetenschap, een geesteswetenschap of, zo men wil, een kunst. De bepalende kenmerken van goed wiskundig werk zijn voortaan slechts: logische consistentie, breedheid van conceptie, innerlijke samenhang en schoonheid van opbouw en uitwerking.

Met de gewonnen vrijheid hangt samen een neiging tot specialisatie die onvermijdelijk leidt tot een uit elkaar raken van de verschillende onderdelen. Ook ontstaat het gevaar van ontaarding in het manipuleren met willekeurige esoterische symbolen indien in een bepaald gebied het materiaal dat waard is geaxiomatiseerd te worden, op raakt. Doch tegenover deze gevaren staat een sterk verdiept inzicht in de structuur en de onderlinge onafhankelijkheid van de wiskundige systemen. Bovendien komt het voor dat een volledig abstract ontworpen wiskundige structuur het passende hulpmiddel blijkt te zijn om een fysische theorie uit te drukken; men denke aan de operatorentheorie in de quantummechanica — waarin de operatoren een niet-commutatieve ring vormen — en aan de Riemann-meetkunde in de relativiteitstheorie. Ook op eenvoudiger niveau gebeurt dit vele malen. Zo worden, al sinds GAUSS, de complexe getallen door de wiskundige abstract ingevoerd als paren van reële getallen waartussen een optelling en een — allerminst vanzelfsprekende — vermenigvuldiging gedefinieerd is. Deze complexe getallen bleken een vrijwel onmisbaar hulpmiddel te zijn bij de beschrijving van trillingsverschijnselen in natuurkunde en techniek. Dat dit zo is, doet de wiskundige plezier. Zijn esthetische appreciatie van de complexe getallen wordt echter bepaald door andere kenmerken, zoals het feit dat het lichaam der complexe getallen de enig mogelijke uitbreiding van het lichaam der reële getallen is, waarin oplossing van algebraïsche vergelijkingen van willekeurige graad onbeperkt mogelijk is.

Het is dan ook niet verwonderlijk dat na de opkomst van de axiomatische methode de afstand tussen wiskunde en natuurwetenschap snel groter werd. Er ontstond een toestand — natuurlijk met uitzonderingen — waarbij wiskundigen en natuurkundigen ver van elkaar verwijderd leven en elkaars taal niet meer verstaan. Deze toestand was des te ernstiger omdat de fysica, bezig met het onderzoek van de microstructuur der materie, grote gebieden afstootte en aan de aandacht van wiskundigen en technici overliet, zoals de elasticiteitstheorie, de stromingsleer en de elektromagnetische theorie. Ook omdat de techniek (en de militaire wetenschappen), die worstelden met de problemen van steeds ingewikkelder systemen, een groeiende behoefte hadden aan wiskundige assistentie. Ik kom straks nog terug

6

op het feit dat voor deze problemen vaak andere delen der wiskunde nodig zijn dan de klassieke mathematische fysica.

De omkeer komt in en na de tweede wereldoorlog. De oorlogvoerende landen besteden grote bedragen aan toegepast wiskundige research en uitgebreide acties worden ondernomen om het aantal toegepast wiskundigen te vergroten. Deze ontwikkeling zet zich na de oorlog over de hele wereld voort. Voor wat ons land betreft denke men aan het Nationaal Luchtvaart Laboratorium, waar vanaf het begin grote aandacht bestond voor wiskundige problemen en methoden, en aan het Mathematisch Centrum. Deze activiteit heeft weer haar terugslag op Amerika. Zo wordt in 1948 in een verslag van het Office of Naval Research — een instelling die tezamen met soortgelijke instellingen van leger en luchtmacht grote delen van de wetenschappelijke research aan universiteiten en hogescholen financiert — gezegd: „A vigorous development of applied mathematics has begun abroad, particularly in Russia, Germany, England and Holland; and O.N.R. is attempting to assist a similar development in this country".

Deze sterke toename van de belangstelling — zowel van de zijde der wiskundigen als van die der consumenten — voor het toepassen der wiskunde hangt nauw samen met de onstuimige ontwikkeling der automatische rekenmachines in de laatste twee decennia. De oorsprong van deze ontwikkeling is niet van wiskundige doch van technologische, militaire en economische aard. Haar invloed op het geheel van toegepaste en zuivere wiskunde is nog nauwelijks te overzien. Reeds thans beïnvloedt zij sterk de ontplooiing van vele delen der toegepaste wiskunde. Het verwerken en richten van deze ontwikkeling is voor de wiskundigen en, in groter verband, voor de gehele maatschappij een taak die ons niet slechts voor wiskundige en technische, doch in laatste instantie ook voor fundamentele ethische problemen stelt.

Wat is de rol die de wiskunde kan spelen of zou moeten spelen in natuurwetenschap en techniek? Of, algemener, wat is eigenlijk toegepaste wiskunde?

Om met het laatste te beginnen, toegepaste wiskunde kan niet geïdentificeerd worden met een bepaald deel of een verzameling van delen van de wiskunde. Veeleer is zij een speciaal soort activiteit van wiskundigen, welke gericht is op het scheppen, aanpassen en verbreiden van wiskunde, geïnspireerd door en bewust verbonden met pogingen om enig aspect van onze omgeving redelijk te doorgronden. Ieder onderdeel van de wiskunde kan hier in principe een rol spelen of gaan spelen. Het kenmerk van de toegepast wiskundige is zijn houding tegenover en de motivering van zijn wiskundig werk. Als alle goede wiskunde is goede toegepaste wiskunde origineel en inventief in de conceptie en het gebruik van haar begrippen en methoden. Zodoende kan zij de wiskunde in het algemeen verrijken met structuren die verbonden zijn met of gesuggereerd worden door de toepassingen. Maar primair blijven de behoefte bezig te zijn met de ervaringswereld en de interesse voor problemen buiten de eigenlijke grenzen van de wiskunde.

Twee tendensen in de toegepaste wiskundige activiteit moeten hier worden genoemd. In de eerste plaats is er de richting die zich bezig houdt met gebieden van de wiskunde die regelmatig toegepast worden voor de oplossing van natuurwetenschappelijke of technische problemen. Hoewel gehoopt wordt dat de resultaten van nut zijn in het gebied der toepassingen, is dit niet het belangrijkste. Beslissend is de wiskundige originaliteit die ervoor borg staat dat de resultaten, nu of in de toekomst, direct of indirect, van invloed zijn op de ontwikkeling in het oorspronkelijke toepassingsgebied. Deze richting produceert de wiskunde die over enkele of vele jaren door fysici of ingenieurs gehanteerd zal worden. Een voorbeeld is de ontwikkeling van existentie- en eenduidigheidsstellingen voor partiële differentiaalvergelijkingen, een gebied dat sterk geïnspireerd wordt door de gasdynamica. Men zou, met veel voorbehoud, de vertegenwoordigers van deze richting de academische toegepast wiskundigen kunnen noemen.

Daar staat tegenover de richting die zich meer direct bezig houdt met de wiskundige behandeling van technische, natuurwetenschappelijke of economische detailproblemen. Hier is essentieel het vermogen om deze problemen op goede wijze in wiskundige termen om te zetten. En de kwaliteit van dit werk wordt niet in de eerste plaats bepaald door de originaliteit van de gebruikte wiskunde. Bij vertegenwoordigers van deze richting richt de aandacht zich vooral op de problemen waarvoor de wiskunde gebruikt wordt, niet op de wiskundige methode. De titel wiskundig ingenieur is hier min of meer op zijn plaats, met name voor diegenen die zich in hoofdzaak bezig houden met technische of bedrijfskundige problemen.

Men zou kunnen menen dat uit deze karakteristiek van de toegepaste wiskunde volgt, dat hier het 19de-eeuwse, natuurwetenschappelijke en pre-axiomatische standpunt nog heerst. Dit is slechts gedeeltelijk juist. Wel wordt, anders dan in de zuivere wiskunde, het uitgangspunt en de doelstelling bepaald door het contact met de ervaringswereld. Doch de werkwijze is wezenlijk 20ste eeuws. Op grond van de reeds bekende inzichten in het te behandelen probleem construeert de wiskundige een mathematisch model. Dat is een axiomatisch opgebouwd, abstract wiskundig systeem. Binnen dit systeem wordt op zuiver wiskundige wijze geredeneerd, worden relaties afgeleid, nieuwe begrippen ingevoerd enzovoorts, enzovoorts. Het resultaat van deze arbeid kan men een theorie noemen. In deze fase van het werk is de wiskunde autonoom, er is geen logische verbinding tussen de fysische achtergrond van de theorie en de wiskundige afleidingen daarbinnen. Hetgeen natuurlijk niet wil zeggen, dat de wiskundige zich ook in deze fase niet sterk laat leiden door zijn inzichten in het fysische probleem. Dit geldt trouwens gedurende alle fasen van het werk. Zelden zal als eerste wiskundige activiteit een axiomasysteem kant en klaar ontworpen worden. En in de praktijk zal meestal zelfs in de uiteindelijke vorm van de theorie het axiomasysteem niet uitdrukkelijk vermeld worden. Dit is echter niet wezenlijk, slechts een vorm van economie. Want al denkt de toegepast wiskundige bij zijn werk slechts zelden na over de expliciete axiomatisering van zijn modellen (behalve dan wanneer hij zijn oratie voorbereidt), door vergelijking van moderne toegepast wiskundige publicaties met die van een halve eeuw geleden — of met recente publicaties van fysici en ingenieurs — blijkt echter duidelijk hoe zeer het „axiomatisme" van de moderne wiskunde ook de toegepaste wiskunde beïnvloed heeft.

Ik kan op de wijze waarop de relatie tussen wiskundig model en fysische werkelijkheid tot stand gebracht wordt niet uitvoerig ingaan. Er liggen hier tal van moeilijkheden, zowel van filosofische — men zie de recente Utrechtse oratie van Braun — als van praktische aard. Ik moge het principe van dit proces schetsen aan de hand van een voorbeeld.

Het ervaringsgebied dat correspondeert met het terrein van de elementaire meetkunde is welbekend. Iedere leerling van de middelbare school heeft een min of meer materiële voorstelling van de begrippen punt, lijn, rechthoekige gelijkbenige driehoek. Doch wat is precies het verband tussen deze materiële voorstelling en de wiskundige theorie? HELMHOLTZ spreekt over de „Tatsachen", RIEMANN over de „Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". Pas bij HILBERT worden de zaken volledig gescheiden: „Wir denken uns zwei verschiedene Systeme von Dingen die wir Punkte bezw. Geraden nennen. Wir denken die Punkte und Geraden in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen, zwischen, parallel . . ."; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die nachstehenden Axiome . . .". Of, in nog iets moderner vorm[1]: „Een systeem van twee verzamelingen (punten en rechten) en van een aantal relaties (liggen op, tussen, parallel . . .) heet een vlakke meetkunde indien het de volgende eigenschappen bezit." En dan volgende axioma's zoals: „bij ieder tweetal verschillende punten bestaat er een en slechts een rechte waar deze punten op liggen", en: „er zijn tenminste drie punten die niet op dezelfde rechte liggen".

Op deze wijze houdt de meetkunde op natuurwetenschap te zijn. Toepassing van de meetkunde in fysica of techniek is nu een object van toegepaste wiskunde. Een technicus noemt een stuk materie een rechthoekige gelijkbenige driehoek indien de uitkomsten van bepaalde voorgeschreven meetprocedures — betreffende hoeken, lengten, maar ook rechtheid etc. — aan bepaalde voorwaarden voldoen. De wiskundige noemt een combinatie van drie lijnen en drie punten uit zijn verzamelingen een rechthoekige gelijkbenige driehoek, indien deze elementen aan bepaalde relaties uit het systeem voldoen. De toegepast wiskundige beschouwt de wiskundige driehoek als model voor de technische driehoek, weet dat uit de wiskundige axioma's de stelling van PYTHAGORAS afgeleid kan worden en suggereert de technicus dat er een relatie zou kunnen bestaan tussen de gemeten lengten van de rechthoekszijden en de hypotenusa. Blijkt deze relatie binnen de meetfouten verifieerbaar te zijn, dan wordt de toegepast wiskundige gesterkt in zijn vermoeden het goede mathematische model gekozen te hebben, de technicus in zijn hoop, dat nog meer bruikbare relaties uit dit model kunnen worden afgeleid.

Ik wil aan dit voorbeeld nog een waarschuwing ontlenen. De wiskundige gebruikt in zijn abstracte systeem vaak dezelfde woorden die door de fysicus gebruikt worden voor onderdelen, begrippen of eigenschappen van zijn materiële systeem. HILBERT blijft de „dingen"

---

[1] Vgl. H. FREUDENTHAL, l.c., p. 116.

uit zijn theorie „punten", respectievelijk „rechten" noemen. Dit kan licht tot verwarring aanleiding geven. Zegt een wiskundige: „Wij beschouwen de stroming van een wrijvingsloze vloeistof", dan denkt hij in wezen aan een stel functies — die hij „snelheid", respectievelijk „druk" noemt — die voldoen aan een bepaald stelsel partiële differentiaalvergelijkingen. Zijn tweede zin: „Deze wordt beschreven door de vergelijkingen van EULER, te weten . . ." is voor hem dan ook eigenlijk een herhaling van de eerste zin, waarin hij nog eens uitdrukkelijk het uitgangspunt, het axioma zo men wil, van zijn theorie uitspreekt. Een weinig theoretisch georiënteerde fysicus — zo deze nog bestaat — associeert het woord „vloeistof" echter met water, olie of een ander belangwekkend vocht, glimlacht toegeeflijk bij het woord „wrijvingsloos", daarbij misschien denkend aan zoiets als de overgang van Δx naar dx, en denkt bij „vergelijkingen van Euler" hetzij aan „hogere wiskunde", hetzij aan een vaag omschreven begrip „natuurwet". Het is duidelijk dat er enige discussie nodig is voordat de wiskundige en deze fysicus vruchtbaar kunnen samenwerken.

Helaas kan ik ook niet ingaan op de intrigerende vraag hoe het komt dat wiskunde toepasbaar is. In sommige gevallen is dit niet zo verbazingwekkend. Hier kan een wiskundige beschrijving gegeven worden van de meetresultaten, verkregen bij experimenten onder eenvoudige omstandigheden. En met behulp daarvan kunnen dan voorspellingen gedaan worden over het gedrag van gecompliceerde combinaties van de experimenteel onderzochte componenten. Ik denk aan bijvoorbeeld de theorie van elektrische netwerken of van staalconstructies. Anders wordt het indien een wiskundige theorie, opgebouwd om een stelsel van empirische regels te beschrijven, in staat blijkt te zijn ook verschijnselen welke essentieel buiten het toepasbaarheidsgebied van deze regels vallen, met verbluffende nauwkeurigheid te voorspellen. Een voorbeeld is de quantummechanica, een theorie die werkt met zelfgeadjungeerde operatoren in een complexe hilbertruimte en die zegt dat de eigenwaarden van deze operatoren corresponderen met de uitkomsten van waarnemingen bij atoomexperimenten. Dat deze theorie in staat blijkt het spectrum van het waterstofatoom te beschrijven, is niet zo verwonderlijk, daar de theorie ontstaan is naar aanleiding van de opmerking dat de semi-empirische quantiseringsregels, opgesteld om dit en andere spectra te beschrijven, formeel equivalent zijn met bepaalde rekenregels voor zelfgeadjungeerde operatoren. Het wonderlijke is echter dat de theorie in staat blijkt het laagste energieniveau van het heliumatoom — een probleem dat absoluut buiten het gezichtspunt van de genoemde semi-empirische ergels valt — met een nauwkeurigheid van één op tien miljoen te voorspellen. Hierop kan men, met WIGNER[1], slechts zeggen: "The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wunderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning".

Het is, meen ik, niet teveel gezegd indien ik stel dat in het laatste decennium de praktische toepasbaarheid van de wiskunde revolutionair is toegenomen. Dit wordt veroorzaakt door het ter beschikking komen van automatische rekenmachines. Veel technische problemen konden reeds lang via klassieke of moderne theorieën in wiskundige problemen vertaald worden — men denke bij voorbeeld aan de elastomechanica, aangevuld met de moderne plasticiteitstheorie. Tot voor kort waren veel van deze problemen voor de wiskundige weliswaar wel oplosbaar — in wiskundige zin — doch vaak in een zo gecompliceerde vorm dat de technicus daarmee weinig gediend was. Deze toestand is, dank zij de automatische rekenmachines, wezenlijk veranderd.

Het is te verwachten dat deze ontwikkeling een grote invloed zal hebben, bij voorbeeld op de wijze waarop technische ontwerpen tot stand komen. Veel van de tot nu toe gehanteerde veiligheids- of onzekerheidsfactoren zijn in wezen immers onberekenbaarheidsfactoren! Ook op de experimentele vakken zal deze ontwikkeling haar invloed hebben. Reeds thans stelt men dat in Amerika tien procent van alle fysische experimenten op een computer uitgevoerd wordt!

Welke zijn de gebieden van de wiskunde die de toegepaste wiskundige en speciaal de wiskundig ingenieur in de zoëven aangeduide zin regelmatig gebruikt? In principe kan ieder deel van de wiskunde voor toepassing in aanmerking komen. Doch de gebieden die nu en vermoedelijk ook in de betrekkelijk nabije toekomst het belangrijkst lijken, met name voor toepassing in techniek en industrie, laten zich als volgt samenvatten.

In de eerste plaats is er de mathematische fysica. Dit is het klas-

[1] E. P. WIGNER, The unreasonable effectiveness of mathematics in the rational sciences, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 1-14.

sieke gebied van de toegepaste wiskundige. Het bestaat grotendeels uit de wiskunde die betrekking heeft op delen van de theoretische natuurkunde die door de fysicus in de loop der jaren losgelaten zijn, zoals elasticiteitstheorie, hydro- en aerodynamica, elektromagnetisme. De fysicus is in wezen klaar na het opstellen van de fundamentele differentiaalvergelijkingen die de verschijnselen beschrijven, zoals de vergelijkingen van MAXWELL. Het oplossen van deze vergelijkingen voor allerlei speciale situaties laat hij aan de wiskundige over. De optredende wiskundige vraagstukken vallen voor een groot deel onder het begrip randwaardeproblemen en bij de behandeling hiervan spelen vele delen van de klassieke en de moderne analyse van reële en complexe functies een grote rol. Vele problemen zijn in de laatste honderd jaar reeds opgelost. De overblijvende problemen zijn niet de eenvoudigste, met name omdat niet-lineaire verschijnselen een steeds belangrijker rol spelen. Hulp van numerieke methoden is derhalve vaak nodig, ook om uit reeds bekende oplossingen practisch bruikbare numerieke resultaten te verkrijgen.

Een tweede gebied is dat van de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek. Ook dit gebied is gedeeltelijk klassiek. Doch in de laatste decennia is het in breedte en diepte sterk uitgebreid en aangevuld met de leer der stochastische processen. Doel is het verkrijgen van uitspraken over regelmatigheden die optreden in op zichzelf ordeloze systemen, zoals de verzameling van de moleculen van een gas, de variabele kwaliteit van door een machine vervaardigde voorwerpen, of de aankomst van vliegtuigen, telefoonoproepen of bestellingen. En ook bijvoorbeeld bij de studie van het gedrag van regelsystemen onder invloed van willekeurig optredende verstoringen van het evenwicht. De wiskundige basis is de theorie der reële functies en de maattheorie; voor de uitwerking van praktische vraagstukken is nog een groot aantal andere wiskundige technieken nodig. Ook hier kunnen uiteindelijke resultaten vaak pas na numerieke bewerking op grote schaal verkregen worden.

In de mathematische fysica houdt men zich bezig met de analyse van problemen met slechts een gering aantal variabelen. Hierop zijn technologische prestaties als radio en vliegtuig gebaseerd. In statistiek en stochastiek treden een praktisch willekeurig groot aantal variabelen op met een min of meer ongeordende samenhang. Resultaten zijn kernreactoren en kwaliteitscontrole. Het schijnt dat de techniek thans een nieuw gebied binnentreedt, waarin vele variabelen, echter in geordende samenhang, beheerst moeten worden. De nieuwe problemen treden op bij het ontwerp van systemen waarin vele componenten samenwerken, zoals grote telefooncentrales, rekenmachines, defensiesystemen, produktieschema's en automatie van fabrieken. Een belangrijk deel van de hierbij benodigde wiskunde wordt samengevat onder termen als "operations research" en "finite mathematics". Onderdelen zijn combinatoriek, schakelalgebra, speltheorie, mathematische programmering. Belangrijk is het construeren van mathematische modellen, vaak in de vorm van een abstract algebraïsch systeem. Voor de uitwerking van de problemen zijn uitgebreide rekenfaciliteiten meestal noodzakelijk.

Het laatste gebied is dat der numerieke wiskunde en van de, nog nauwelijks goed gedefinieerde, "computer science". In dit gebied, dat tot voor enkele decennia een stiefkind van de wiskundige was, ligt thans voor een belangrijk deel der toegepast wiskundigen hun hoofdwerkzaamheid. De praktische bruikbaarheid van de vorige drie gebieden wordt wezenlijk bepaald door de mogelijkheid om tenslotte door numerieke berekening tot een eindresultaat te komen. Doch anderzijds is het verre van waar dat de aanwezigheid van een computer — of een rekentuig, zoals sommigen propageren — het bedrijven van wiskunde overbodig maakt. Integendeel, grote mathematische vaardigheid is nodig om wiskundige problemen — laat staan andere, niet of onvolledig wiskundig geformuleerde problemen — voor bewerking met een computer geschikt te maken en om de resultaten van de berekening op zinvolle wijze te interpreteren. Op het gevaar van "computerhappiness" wordt van talloze zijden gewezen, met name door serieuze werkers in de "computer science".

Uit deze opsomming moge duidelijk zijn dat de allround wiskundig ingenieur over een uitgebreid arsenaal van wiskundige kennis moet beschikken. Doch om U te tonen dat hij er daarmee nog lang niet is, wil ik U een schets geven van het karakteristieke bedrijf van de wiskundig ingenieur: de wiskundige consultatie, uitgeoefend hetzij als "free lance" wiskundige, hetzij als medewerker in een researchgroep. Men kan hier verschillende fasen onderscheiden.

1. Het onderkennen, begrijpen en analyseren van een fysisch, technisch, bedrijfskundig of economisch probleem. Degene die verantwoordelijk is voor het experiment, het technische ontwerp of de beslissing bespreekt de probleemsituatie met de wiskundige. Vaak moet eerst nog onderzocht worden, wat precies het probleem is. De wiskundige leeft zich in de situatie in en tracht samen met de op-

drachtgever de fundamentele punten te vinden en te beoordelen welke aspecten, als van weinig belang zijnde, terzijde geschoven kunnen worden. Natuurlijk komt het ook voor dat de opdrachtgever het probleem al wiskundig geformuleerd heeft. In de regel moet de wiskundige zich echter ook dan verdiepen in de achtergrond van het probleem en nagaan of het probleem juist, respectievelijk op de meest effectieve wijze geformuleerd is. Dit geldt met name bij opdrachten tot numeriek werk. Teleurstellingen in een latere fase kunnen daardoor soms voorkomen worden.

2. Formulering van het probleem. De wiskundige ontwerpt een wiskundig model van de probleemsituatie en „vertaalt" de hem voorgelegde vragen in een wiskundig probleem. Vaak zijn in deze fase nog weer onderhandelingen met de opdrachtgever nodig. Vereenvoudigingen kunnen gewenst zijn op grond van praktische berekenbaarheid, ook generalisaties zijn soms mogelijk. Beide partijen moeten open oog hebben voor het afwegen van factoren als beschikbare tijd, geld, mankracht en rekenfaciliteiten tegen de belangrijkheid van het probleem.

3. Oplossing van het wiskundig geformuleerde probleem. Deze fase omvat het zoeken naar bestaande methoden, eventueel gecombineerd met het ontwerp van nieuwe methoden. Voorts moet worden beslist in hoeverre de oplossing met analytische middelen — globaal gezegd: met formules — kan worden verkregen of dat op zeker moment tot een numerieke behandeling moet worden overgegaan. Daarbij speelt het een rol dat analytische resultaten weliswaar vaak het inzicht in de samenhang der verschijnselen vergroten, doch dat de opdrachtgever vaak slechts geïnteresseerd is in een enkel getal. Ook is vaak een onderzoek nodig naar de betrouwbaarheid van het antwoord in verband met de invloed van verwaarlozingen in de berekeningen of van schematiserende veronderstellingen bij de opstelling van het model.

4. Interpretatie van de resultaten. De resultaten moeten gepresenteerd worden in een vorm die begrijpelijk is voor de opdrachtgever. Dit is eenvoudig als het gaat om een getal of een tabel, hoewel hier vaak een waarschuwing nodig is tegen onbeperkt vertrouwen in de resultaten, gezien de idealisering bij de constructie van het model. Moeilijker is soms de interpretatie van analytische resultaten of van algemeen inzicht gevende stellingen. De gebruiker moet dan enigszins op de hoogte gebracht worden van de wiskundige theorieën die tot het antwoord of de behandelingswijze geleid hebben. Soms

ook moet de opdrachtgever geholpen worden om de nuttigheid van het werk tegenover derden — zijn opdracht- of geldgevers — te verdedigen. Suggesties als „maak het verslag gerust ingewikkeld, iedere Griekse letter is een tientje waard" kunnen daarbij naar voren komen.

Uit deze schets kan men de volgende eisen afleiden die aan een goed wiskundig ingenieur gesteld moeten worden.

1. Hij moet een goed wiskundige zijn. Deze eis is primair. Niemand wenst of vertrouwt het advies van een man die zijn vak niet verstaat. Dit houdt in dat hij grondig vertrouwd moet zijn met de wiskundige denkwijze in het algemeen en dat hij de grondbeginselen van algebra en analyse beheerst en doorziet. Daarnaast, dat hij kennis heeft van een groot aantal meer gespecialiseerde vakgebieden of althans weet wat er in deze vakgebieden „te koop" is en zich zonodig hierin snel in kan werken. Tenslotte, dat hij in staat is tot creatief werk, zo al niet in het ontwikkelen van nieuwe wiskundige theorieën, dan toch in het ordenen en combineren van bestaand wiskundig materiaal tot een samenhangende behandeling van een hem gesteld probleem. Daarbij mag hij zich niet verliezen in op zichzelf misschien wiskundig interessante finesses, doch moet hij duidelijk de doelstelling van zijn onderzoek voor ogen houden.

2. Hij moet een gedegen kennis hebben van een of meer technische of natuurwetenschappelijke vakgebieden. Hij moet de fenomenologische, zowel als de logische structuren in deze gebieden kunnen doorzien en in staat zijn deze structuren in wiskundige modellen om te zetten.

3. Hij moet de gedachtengang van vertegenwoordigers der niet-wiskundige vakgebieden kunnen volgen, hun taal kunnen spreken en in staat zijn deze mensen te overtuigen van de resultaten en het praktisch belang, eventueel ook van de beperkingen, van zijn wiskundige hulp.

4. Hij moet — en daarmee kan men eigenlijk het complement op de gestelde wiskundige eisen samenvatten — vele en gemakkelijk op te wekken belangstellingen hebben en bereid zijn mee te werken aan de problemen van anderen.

Men moet, meen ik, in het licht van deze eisen de uitspraak "we want vigor, not rigor" zien. De wiskundig ingenieur moet vóór alles in staat zijn iets aan te pakken. Hij moet — met een buiten-wiskundig doel voor ogen — zijn wiskunde gebruiken als middel.

Hij mag niet terugschrikken voor moeilijkheden, doch moet deze hetzij doorbreken — desnoods met forse en mogelijk weinig elegante middelen — hetzij op verantwoorde wijze omgaan door een eenvoudiger model te kiezen. Daarbij dient hij er zich echter voortdurend van bewust te zijn dat zijn redeneringen wiskundig streng moeten zijn. Dat wil niet zeggen dat hij alles in alle details streng moet bewijzen. Veeleer moet zijn wiskundige rijpheid en intuïtie hem de overtuiging geven dat hij — zo hij er de tijd voor had en het de moeite waard was — alles zou kùnnen bewijzen. En essentieel is dat hij scherp weet te onderscheiden tussen de zuiver wiskundige redeneringen binnen zijn theorie en de buiten-wiskundige overwegingen die hem bij de opzet van de theorie geleid hebben. De laatste overwegingen zijn oorsprong en doel van zijn wiskundig werk, bepalen de richting waarin zich dit ontwikkelt, doch mogen niet in de plaats komen van — al dan niet expliciet weer te geven — wiskundige redeneringen binnen de theorie. Slechts indien hij aan deze eis streng de hand houdt, kan hij zijn opdrachtgevers duidelijk maken onder welke voorwaarden de ontwikkelde theorie toepasbaar is.

Tot slot een enkel woord over de opleiding van de wiskundig ingenieur.

Twee min of meer tegengestelde visies zijn daarbij mogelijk. De eerste is: de student een grondige training te geven in de vele deelgebieden van de wiskunde die in de toepassingen een rol spelen. Hij moet onderwijs krijgen in gewone en partiële differentiaalvergelijkingen, fourieranalyse, bessel- en andere speciale functies, asymptotiek, steekproeftheorie, lineair programmeren, numerieke wiskunde, programmeren voor rekenmachines, enzovoorts, enzovoorts. Daarnaast moet hij dan nog een aantal technische en mathematisch fysische vakken bestuderen.

De andere mogelijkheid is, hem voornamelijk in de diepte te trainen, hem een goed inzicht te geven in de fundamenten van wiskunde, natuurkunde en techniek en hem vertrouwd te maken met de denkwijze in deze vakgebieden. Het is dan niet belangrijk welke vakgebiedjes hij meer speciaal bestudeert. Zijn algemeen inzicht en zijn kennis van de basisvakken stellen hem in staat zich snel overal in te werken.

Deze laatste opvatting correspondeert, naar ik meen, met die welke in het technisch hoger onderwijs meer en meer veld wint. De concrete realisatie van technische principes in de vorm van machines en apparaten gaat bij het onderwijs een steeds minder grote rol spelen. Deze ontwikkeling wordt bepaald door het feit dat de techniek steeds sneller evolueert en door het besef dat de student niet alleen wordt opgeleid voor zijn eerste betrekking, doch tevens een basis moet krijgen die hem in staat stelt gedurende zijn hele loopbaan — dat wil zeggen gedurende ongeveer veertig jaar — de ontwikkeling van de technische wetenschap bij te houden.

Aan deze gedachten moet ook de opleiding van de wiskundig ingenieur getoetst worden. Aan één factor dient daarbij bijzondere aandacht besteed te worden. Wij bevinden ons in een periode van zeer snelle opkomst van automatische rekenmachines, zowel in de zuivere research als in de industriële praktijk. West-Europa heeft daarbij een zekere achterstand, doch in de komende tien jaar zal deze ontwikkeling zich ook hier sterk doen gevoelen. Ik ben van mening dat het een belangrijke taak voor onze wiskundige ingenieurs zal zijn om deze ontwikkeling te stimuleren en de industrie "computer-minded" te maken. Het onderwijs zal daar — althans in de eerste decennia — in sterke mate op gericht moeten zijn.

Dames en heren,

Ik hoop U in dit uur ervan overtuigd te hebben dat het toepassen van wiskunde een boeiend bedrijf is, waarin de wiskundige gelegenheid heeft zowel zijn zin voor wiskundige schoonheid als zijn behoefte om ook direct maatschappelijk nuttig te zijn, volledig kan bevredigen. Het is mijn hoop en verwachting dat de aan deze hogeschool opgeleide wiskundige ingenieurs in dit bedrijf een eervolle plaats zullen kunnen innemen.

Gaarne wil ik deze rede besluiten met enige persoonlijke woorden.

Aan *Hare Majesteit de Koningin*, die mij in dit ambt heeft willen benoemen, moge ik mijn eerbiedige dank betuigen.

Mijne heren curatoren,

Gaarne zeg ik U dank voor het vertrouwen dat U in mij gesteld heeft door mij voor deze benoeming voor te dragen. Wij — ik meen hier namens de gehele onderafdeling der wiskunde te mogen spreken — zijn zeer dankbaar voor Uw voortvarendheid bij de instelling van de opleiding voor wiskundig ingenieur. Wij hopen ook bij de verdere opbouw hiervan op Uw medewerking te mogen rekenen.

Mijne heren hoogleraren en adviseurs,

Toen ik voor de keus gesteld werd tussen een positie bij het universitaire hoger onderwijs en een bij het technisch hoger onderwijs, heb ik na langdurig beraad de laatste gekozen. Ik deed dit omdat ik meen dat mijn aanleg in Uw milieu beter tot ontwikkeling zal kunnen komen. U kunt op deze ontwikkeling grote invloed hebben door mij te willen helpen om mijn zeer fragmentarische kennis van de technische wetenschappen aan te vullen en vooral door mij te willen betrekken in de wiskundige problemen van Uw vakgebied.

Mijne heren leden van de afdeling der algemene wetenschappen,

Ik noemde als voorbeeld van wiskundige structuren: groepen, ringen, lichamen. Ik zou onze afdeling willen vergelijken met een groep. In de groepentheorie tracht men de structuur van een groep vast te stellen door de groep op te lossen in een aantal groepen met eenvoudiger structuur. Ik hoop dat dit oplossingsproces in onze afdeling de samenhang niet zal verbreken. Ook hoop ik dat het structuuronderzoek zal uitwijzen dat deze groep, wat men in de groepentheorie noemt, torsievrij is.

Dames en heren leden en medewerkers van de onderafdeling der wiskunde,

Voortgaande met de algebraïsche analogie sta ik voor de keuze de onderafdeling te vergelijken met een ring of met een lichaam. De keuze is moeilijk. In ringen kent men idealen, zelfs soms niet-triviale hoofdidealen. Ik kies echter voor een lichaam omdat men in een lichaam steeds kan delen. Het is immers algemeen bekend hoezeer men in Uw kring zorgen en vreugden met elkaar deelt.

Ik ben U zeer dankbaar voor de hartelijkheid waarmee U mijn vrouw en mij heeft ontvangen en voor de steun die U ons in het afgelopen jaar op velerlei wijze gegeven hebt. Ook op het terrein van wetenschap en onderwijs hoop ik op een nauw contact, met name met diegenen onder U die door opdracht of belangstelling nauwer verbonden zijn met de toepassingen van ons vak.

Gaarne wil ik vanaf deze plaats een woord van dank richten tot allen die bijgedragen hebben tot mijn wetenschappelijke vorming. Het is U, waarde VAN DER LEEDEN, wellicht niet bekend dat mijn eerste belangstelling voor de mathematische fysica gewekt werd door het enthousiasme waarmee U als jong staflid in Delft college gaf. Aan U, zeer geachte POPKEN, en aan wijlen DR. H. B. A. BOCKWINKEL dank ik een solide grondslag in de analyse. Op deze basis heb ik mij kunnen omvormen van experimenteel fysicus tot toegepast wiskundige. Mijn bescheiden inzicht in andere delen van de wiskunde dank ik vooral aan U, zeer geachte FREUDENTHAL en aan wijlen PROF. DR. D. VAN DANTZIG. Ik besef nog dagelijks sterker welke invloed U op mijn vorming gehad heeft.

Ook wil ik hier gaarne de naam noemen van HANS BRANDTS BUYS, in leven dirigent van het Utrechts Studenten Koor en Orkest. Ik ben er zeer dankbaar voor te behoren tot diegenen op wier persoonlijke vorming „Hans" een grote invloed gehad heeft. En ik wens alle studenten aan deze hogeschool toe dat zij in de Eindhovense hogeschoolgemeenschap iemand mogen ontmoeten die zoveel te geven heeft aan jonge mensen.

Mijne heren leden van de Raad van Beheer van het Mathematisch Centrum, waarde LAUWERIER,

In de tijd dat ik aan het Mathematisch Centrum verbonden was hebt U mij willen helpen bij het verwezenlijken van mijn wens om toegepast wiskundige te worden. Deze jaren zijn daardoor van beslissende betekenis voor mij geweest. Ik betreur het zeer dat het niet mogelijk is PROF. DR. D. VAN DANTZIG hier in het bijzonder toe te spreken.

Zeer geachte FREUDENTHAL, *dames en heren medewerkers van het Mathematisch Instituut te Utrecht,*

De verwachtingen die U in mij gesteld heeft zijn wellicht niet geheel vervuld, ik hoop echter dat ik ze niet te zeer beschaamd heb. In de periode die ik bij U doorbracht, heeft U mij zeer vrij gelaten doch mij anderzijds de kans geboden veel van U te leren. Ik hoop ook in de toekomst de vriendschappelijke banden met U te mogen blijven onderhouden.

Mijne heren bestuursleden van het Eindhovens Hogeschool Fonds,

U heeft mij in de gelegenheid gesteld onmiddellijk na mijn benoeming een reis naar Amerika te maken. Mijn inzicht in de plaats van de wiskunde in hoger onderwijs en technische research heeft daar zeer van geprofiteerd.

Dames en heren studenten,

Mijn gedachten over de rol van de wiskunde in de techniek heb ik reeds uitgesproken. De kennismaking met de wiskunde aan deze hogeschool zal sommigen Uwer wellicht hebben ontmoedigd. Het door mij vanmiddag vooropgestelde inzicht in de wiskundige denkwijze lijkt soms te worden overschaduwd door de vele wiskundige techniekjes die U noodzakelijk ook moet leren. Weest er echter van overtuigd dat wij de beschikbare tijd zo goed mogelijk trachten te gebruiken om U in staat te stellen de zich voor wiskundige behandeling lenende problemen uit Uw latere werk zelf of met medewerking van Uw meer wiskundig gespecialiseerde collega's te kunnen oplossen.

Tot de studenten en de aanstaande studenten voor wiskundig ingenieur wil ik dit zeggen. U kiest geen gemakkelijk vak. Wel echter een vak dat en om zichzelf en omdat het U de gelegenheid biedt contact te hebben met zeer uiteenlopende gebieden van wetenschap en techniek, U zeer veel voldoening kan schenken. Wij hopen U een goede basis voor de uitoefening van dat vak te kunnen meegeven.

Dames en heren,

Ik dank U allen voor Uw aandacht.

12. Jacques Benders

Jacobus Franciscus Benders, geboren in 1925, was de eerste full prof beoefenaar van de Operations Research in Nederland, het vakgebied dat Van Dantzig nog in 1957 sierde met de naam "besliskunde". Na een studie wiskunde in Utrecht en statistisch werk voor de Rubberstichting werkte hij vanaf 1955 bij het Koninklijke Shell Laboratorium te Amsterdam aan vraagstukken van lineaire programmering afgeleid van problemen van de raffinaderij-planning. Zijn eigen werk hieraan resulteerde in een proefschrift over decompositie-voorwaarden, Benders-decompositie.

Benders' toevoeging aan het concept van de Wiskundig Ingenieur was dat de bedrijfskundig gerichte toepassingen onder zijn leiding uit de verf kwamen. Alle betrokkenen wisten het belang van deze toevoeging aan te wijzen, maar de ervaring ontbrak. Conceptueel was er, gegeven de notie van wiskundig modelleren, geen groot verschil met andere domeinen van toepassing, qua stijl was het werk in deze richting werkelijk anders, zoals ook doorklinkt in de bijgevoegde tekst: *De taak van de wiskunde in de operations research* (inaugurale rede THE, 28 februari 1964).

DE TAAK VAN DE WISKUNDE IN DE OPERATIONS RESEARCH

REDE
UITGESPROKEN BIJ HET AANVAARDEN VAN HET AMBT
VAN BUITENGEWOON HOOGLERAAR IN DE WISKUNDIGE
EN NUMERIEKE ASPECTEN VAN DE OPERATIONS RESEARCH
AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN
OP VRIJDAG 28 FEBRUARI 1964

DOOR

DR. J.F. BENDERS

Mijne Heren Curatoren,
Mijnheer de Secretaris van de Technische Hogeschool,
Mijne Heren Hoogleraren,
Dames en Heren Leden van de Wetenschappelijke, van de Technische en van de Administratieve Staf,
Dames en Heren Studenten,
en voorts Gij allen, die deze bijeenkomst met Uw tegenwoordigheid vereert,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

In het verleden heeft de techniek ons geleerd hoe de fysieke vermogens van de mens door het gebruik van machines kunnen worden vervangen en uitgebreid. Thans is een groot deel van onze wetenschappelijke en technische activiteit erop gericht geestelijke routinearbeid van de mens te mechaniseren en door machines te laten verrichten.
Deze ontwikkeling is op gang gebracht door de wens tot automatisering van technische installaties en processen. Door het servomechanisme hebben deze vaak een beperkt vermogen tot zelfkritiek gekregen. Daardoor kunnen zij hun eigen gedrag controleren en zo nodig verbeteren zonder direkte menselijke tussenkomst.
Geheel nieuwe mogelijkheden werden geschapen door het verschijnen van de electronische rekenmachine, direkt na de laatste wereldoorlog. Ook deze rekenmachines zullen nooit meer dan een zeer kleine fractie van ons denkwerk kunnen overnemen. Maar zij overtreffen de mens ver in het uitvoeren van mentale routine processen waarin snelheid, het verwerken van grote massa's kwantitatieve informatie en het maken van keuzen uit alternatieven een grote rol spelen.
De mechanisering van denkprocessen is niet een nieuw product van onze technische tijd. De wiskunde heeft zich hiermee reeds eeuwenlang bezig gehouden. Want wat zijn de wiskundige algoritmen voor het trekken van de vierkantswortel uit een getal of voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen anders dan gemechaniseerde denkprocessen?

Deze produkten van de wiskunde, de logische en numerieke algoritmen, vormen het meest aangewezen gereedschap voor de verwerking van kwantitatieve informatie, in het bijzonder als deze een logische of empirische samenhang vertoont. En toch is de wiskunde, ondanks deze pretentie, ondanks de vele numerieke methoden in de loop der tijden ontwikkeld, en ondanks de belangrijke plaats die zij in ons onderwijs altijd heeft ingenomen, in het verleden niet in staat geweest uit te groeien tot een algemeen bruikbaar gereedschap voor de practicus. Een onoverkomelijke barrière werd gevormd door de fysieke en technische onmogelijkheid het rekenwerk, verbonden aan haar toepassing in practisch interessante gevallen, daadwerkelijk uit te voeren. Het doorbreken van deze rekenbarrière door de digitale en analoge electronische rekenmachines maakte echter, in één klap, het grote arsenaal van wiskundige algoritmen, en daarmee ook de in eeuwen opgebouwde wiskundige begrippenwereld en methodiek, toegankelijk voor de informatieverwerkende praktijk.

De belangstelling van het bedrijfsleven voor de wiskunde blijkt sindsdien uit afdelingen met namen als "applied mathematics" in grote bedrijven, uit advertenties waarin gevraagd wordt naar wiskundig gevormde medewerkers van alle niveaus, uit industriële adviesbureaus die hun wiskundige hulp aanbieden, en uit de talrijke rekenmachines die bij de industriële praktijk en research zijn ingeschakeld. De Verenigde Staten hebben in deze ontwikkeling, kwantitatief gezien, nog veruit de leiding, maar in West-Europa en ook in ons eigen land gaat de industriële wiskunde een steeds belangrijker rol spelen.

Omgekeerd krijgt de wiskunde nu ook sterke impulsen uit de wereld van de toepassing. Zo heeft het streven naar doelmatige constructie en zinvol gebruik van rekenmachines een uitgebreide studie van logische processen op gang gebracht. De numerieke wiskunde bloeit als nooit te voren. Vroegere theorieën en methoden, ontwikkeld los van de eisen die de praktijk thans stelt, vereisen hernieuwd onderzoek en uitbreiding. Nieuwe toepassingsgebieden vragen om nieuwe of meer verfijnde begrippen, en om nieuwe analytische en numerieke hulpmiddelen.

De wiskunde dringt nu ook door in zeer praktisch georiënteerde gebieden, waar zij tot voor kort slechts incidenteel werd gebruikt of in het geheel niet werd genoemd. Een van deze gebieden is dat van de bedrijfsvoering.

In het bedrijfsleven staat het ontwerpen van afzonderlijke technische installaties reeds lang onder invloed van natuur- en technische wetenschap. De bedrijfsleiding echter, het regelen en controleren van het

samenspel van mensen en machines, afdelingen en processen, die tezamen zo'n bedrijf vormen, is veelal gebaseerd op ervaring, intuïtie en traditie. Met het groter en complexer worden van het industriële en overheidsbedrijf groeit echter de behoefte aan wetenschappelijk gefundeerde methoden voor het ontwerpen, controleren en plannen van complete systemen. Vooral de invloed die de mens via ontwerp, constructie en bestuur op het operationele gedrag van deze systemen kan uitoefenen, staat hierbij in het brandpunt van de belangstelling.
De interesse voor de studie van zulke "systems of organized complexity" komt uit heel verschillende richtingen. Uit de automatisering heeft zich een technisch gerichte "systems analysis" ontwikkeld. De doelstelling daarvan wordt meestal omschreven als: het vinden van de best bij elkaar passende componenten van uit te breiden of nieuw te ontwikkelen systemen. ACKOFF noemt dit dan ook „content analysis". Daarnaast is, als een direkte voortzetting van de zo succesvolle wetenschappelijke aanpak van militaire problemen in de jongste wereldoorlog, een meer organisatorisch gerichte „operations analysis" of „operations research" ontstaan. Deze beoogt het meest doeltreffende samenspel te achterhalen van de componenten van een reeds bestaand systeem, van mensen en machines.
Deze beide richtingen groeien geleidelijk naar elkaar toe. Want uiteraard vindt ook de operations analysis aanwijzingen tot „content" verbetering, terwijl de doelmatigheid van het samenstel van componenten slechts uit hun samenspel beoordeeld kan worden. Ook volgt operations research logisch op systems engineering, vooral nu, door de explosieve ontwikkeling van natuur- en technische wetenschappen, vele industriële installaties en processen slechts een betrekkelijk korte levensduur hebben en een snelle opbouw van operationele ervaring dus zeer gewenst is.
De methodiek van de technische zowel als van de organisatorische systeemanalyse is sterk wiskundig georiënteerd. Waar experimenten met bestaande systemen niet mogelijk of te kostbaar zijn en zelfs bij vele planningsstudies de systemen alleen op papier bestaan, is het op empirische gegevens berustende wiskundige model uitgegroeid tot een instrument voor het verkrijgen van experimentele ervaring.
De waarde van zulke modellen wordt bijzonder sprekend in plotseling sterk gewijzigde situaties, waar ervaring en traditie geen betrouwbare leiders meer zijn, en waar de consequenties van alternatieve beslissingen alleen via adequate modellen kunnen worden beoordeeld. Een uitstekend voorbeeld vinden we in een voordracht van DE WOLFF voor de Vereniging voor Statistiek. Hij beschrijft daar hoe, door de

aanwezigheid van een wiskundig model van de nederlandse economie bij het Centraal Planbureau, onze regering binnen één dag inzicht gegeven kon worden in de mogelijke gevolgen van monetaire maatregelen, die genomen zouden kunnen worden naar aanleiding van de revaluatie van de duitse mark in maart 1962. Andere voorbeelden vinden we in het doelbewust gebruik van wiskundige modellen bij het in werking stellen van nieuwe processen of installaties. Het effect van elke handeling in het werkelijke systeem wordt dan eerst nagegaan in een begeleidend wiskundig model. De aanwezigheid van zo'n model kan het verschil betekenen tussen ramp en succes. Denkt U hierbij maar aan de bemande raketvaart. Bovendien kan zo'n model naderhand dienen voor het opsporen van optimale procescondities.

Waarde toehoorders,

Mijn opdracht aan deze Technische Hogeschool omvat het onderwijs in de wiskundige fundamenten en technieken van de operations research. Na U de rol van het wiskundige model in de systeemanalyse te hebben geschetst, wil ik daarom trachten U, met enkele grepen uit mijn vakgebied, de taak te illustreren die de wiskunde in deze operations research is toebedeeld.
De operations research richt zich op systemen die binnen hun menselijke, technische, economische of organisatorische beperkingen op vele manieren kunnen worden geleid en haar uiteindelijke taak ziet zij in het geven van wetenschappelijk gefundeerde adviezen aangaande de keuze van een optimale beleidslijn.
In de wiskundige beschouwingen over operations research wordt de centrale plaats ingenomen door het beslissingsproces: het maken van een keuze uit een aantal alternatieven. Haar eerste taak ziet de wiskunde daarom in het verschaffen van een basis van wiskundige begrippen en theorieën om zoveel mogelijk aspecten, die op de besluitvorming van invloed kunnen zijn, te kunnen kwantificeren en in een wiskundig model te kunnen opnemen.
Een bijzonder aantrekkelijk studieobject voor dit doel vormt het gedrag van de mens in conflictsituaties, welke we in extreme vorm aantreffen in onze gezelschapsspelen, zoals schaken, dammen, bridge en poker. Deze conflictsituatie en daarmee ook het aloude probleem van de economie: „hoe gedraagt de egoïstische homo economicus zich onder gegeven omstandigheden", werd door VON NEUMANN in 1928, in zijn theorie over strategische spelen, op een geheel nieuwe wijze aangepakt.

De Robinson Crusoë situatie, een man, achtergelaten op een onbewoond eiland, die tracht maximaal gewin te halen uit de hem omringende natuur, is lange tijd het standaard model geweest voor het beantwoorden van deze vraag. Wiskundig gezien, leidt zij tot het gewone maximaliseringsprobleem. Dit model is echter onbruikbaar als meerdere personen, elk met eigen doelstellingen, in het beeld moeten worden betrokken. Het effect van een beslissing van een van hen hangt dan ook af van de beslissingen die de anderen nemen. VON NEUMANN nu heeft laten zien, dat ook deze conflictsituaties zich lenen voor wiskundige modelvorming en analyse. Uitgaande van het minimax criterium toonde hij aan, dat in een spel van twee personen, waarbij de winst van de een het verlies is van de ander, er voor elk van de spelers een rationale gedragslijn kan worden aangegeven. Elke speler kan zo spelen dat zijn winst gemiddeld niet lager of zijn verlies gemiddeld niet groter is dan een door het spel bepaald bedrag. Wanneer elk van de spelers zo'n gedragslijn volgt, dan verhinderen zij hun opponent gemiddeld meer dan dat bedrag te winnen dan wel minder dan dat bedrag te verliezen.

Aanvankelijk trok deze speltheorie, op de gebruikelijke wiskundige wijze beschreven in een wiskundig tijdschrift, weinig aandacht. Maar de uiterst suggestieve wijze, waarop VON NEUMANN en MORGENSTERN in 1944 de speltheorie presenteerden in het beroemd geworden boek „Theory of Games and Economic Behaviour", heeft haar toen zelfs populariteit buiten de wiskunde gegeven. Het idee nu eindelijk eens te kunnen leren hoe een spel te winnen zonder vals te spelen, is ook voor niet-wiskundigen zeer aantrekkelijk. Gelukkig bleek al gauw dat ze voor onze gezelschapsspelen van weinig practische betekenis is en zeker niet aangeeft hoe de opvolgende zetten moeten worden gespeeld. Hoe suggestief de naam "speltheorie" ook is, het werk van VON NEUMANN en MORGENSTERN moet allereerst gezien worden als een serieuze poging een eigen wiskundig apparaat te scheppen voor de analyse van economische en sociale relaties van de mens. Zij heeft dan ook grote invloed gehad op de naoorlogse ontwikkeling van de wiskundige economie. Tesamen met WALD's werk betreffende statistische beslissingsprocessen uit de jaren 1940-1950 vormt zij de oorsprong van de moderne beslissingstheorie, zoals die thans door wiskundigen, economen, filosofen, psychologen en sociologen wordt uitgewerkt. Ook heeft zij een sterke stimulans geleverd tot de ontwikkeling van de huidige militaire spelen. Al deze ontwikkelingen hebben op hun beurt weer grote betekenis voor de operations research, waar ze vooral bijdragen tot een heldere begripsvorming

omtrent conflictsituaties, die zij in haar studies in vele vormen tegenkomt.
Er zijn veel situaties in het bedrijfsleven, die een duidelijk spelkarakter hebben, zoals aanbestedingen, het verwerven van licenties of concessies, en het stemmen in vergaderingen. De literatuur maakt melding van succesvolle industriële toepassingen van de speltheorie, maar daar de auteurs zeggen onder industriële geheimhouding te staan, is de draagwijdte van deze bewering niet te achterhalen. De algemene ervaring is echter, dat zij nog slechts een geringe practische bruikbaarheid bezit ondanks de talloze studies die er sinds 1944 aan zijn gewijd. De oorzaak ligt vooral in het feit, dat de speltheorie nog geen aanvaardbare oplossing biedt voor spelen waarin meer dan twee personen betrokken zijn. In zulke gevallen kunnen coalities worden gevormd, steekpenningen gegeven en contracten aangegaan en verbroken. Om deze situaties doeltreffend te kunnen hanteren, zouden meer gegevens over de sociale of psychologische relaties tussen de opponenten in het model moeten worden opgenomen. Bijzonder moeilijk wordt ook de studie van het onderling gedrag van meerdere bedrijven wanneer, zoals in de praktijk vaak voorkomt, anti-trust wetgeving de mogelijkheid tot samenwerking beperkt.
Dat de speltheorie toch nog wel interessante informatie kan verschaffen, blijkt uit een studie van SHAPLEY en SHUBIK over de machtsverhouding in commissies, zoals bijvoorbeeld de Tweede Kamer, die voorstellen volgens een bepaald stemsysteem kunnen aanvaarden of afwijzen. De macht van een commissielid definiëren zij als de waarschijnlijkheid, dat dit lid een verliezende coalitie in een winnende doet overgaan, als de winnende coalitie wordt opgebouwd door een aselecte keuze uit alle leden. Zij berekenen hiermee o.a. de machtsverhoudingen in de Veiligheidsraad, die, zoals bekend, uit elf leden bestaat waarvan de „Grote Vijf" het recht van veto hebben. Een voorstel is aanvaard, als er tenminste zeven voorstemmers en geen veto's zijn. Zij komen tot de conclusie dat 98,7 % van de macht in de Veiligheidsraad in handen is van de „Grote Vijf". Individueel gezien, hebben de leden van de „Grote Vijf" een 90 : 1 voordeel over de andere leden.
Deze berekening gaat uit van zeer vereenvoudigende veronderstellingen; zo negeert zij elke sociale of psychologische relatie tussen de leden. Het is echter niet onmogelijk, dat zo'n berekening bij invoering van een stemsysteem een niet verwachte en ongewilde machtsdistributie tijdig aan het licht brengt.

De speltheorie houdt zich bezig met conflictsituaties waarin twee of

meer partijen actief tegenover elkaar staan. Dit mag in de concurrentiestrijd tussen bedrijven, die elk voor zich streven naar een zo voordelig mogelijke positie op de markt, een aanvaardbare veronderstelling zijn, binnen eenzelfde bedrijf mag zo'n situatie toch niet als normaal gezien worden. Ook daar lopen de belangen van medewerkers en afdelingen niet altijd parallel, maar het bedrijfsbegrip houdt toch in dat allen, die in een bedrijf werkzaam zijn, tenminste enkele gemeenschappelijke doeleinden nastreven. De conflictsituatie uit zich hier meer passief in de vorm van technologische beperkingen in de beschikbare installaties, door schaarste aan grondstoffen, mankracht, tijd en geld, door kwaliteitseisen ten aanzien van te fabriceren producten, door fysisch voorgeschreven volgorden van operaties of door beperkte opslag- en voorraadmogelijkheden.
In zulke systemen, waar de relaties een sterk technologisch karakter hebben en niet in hoofdzaak afhangen van individuele menselijke reacties, heeft de operations research geleid tot veelbelovende wiskundige modellen voor planningsdoeleinden.
Dit brengt ons op de tweede taak van de wiskunde in de operations research, het verschaffen namelijk van hanteerbaar wiskundig gereedschap voor de modelanalyse.
Bij het vervullen van deze taak speelt het structuur onderzoek van bedrijfsmodellen een belangrijke rol. Het ideaal voor industriële toepassing is de reductie van voorkomende modellen tot enkele standaardmodellen. Hiervoor moet dan getracht worden een constructief en praktisch rekenproces te ontwikkelen zodat, bij aanwezigheid van bevredigende numerieke waarden voor de optredende parameters, de modelanalyse op routine basis kan worden uitgevoerd. Succesvolle voorbeelden vormen hier de simplexmethode voor lineaire programmeringsmodellen en de PERT methode (Project Evaluation and Review Technique) voor de netwerkmodellen, die worden gebruikt bij de planning van grote projecten, welke bestaan uit vele deelprojecten.
Dit zoeken naar methoden en technieken en het construeren van hanteerbaar wiskundig gereedschap is van groot practisch belang. Immers, modelvorming heeft in het bedrijfsleven alleen dan zin, als zo'n model ook daadwerkelijk geanalyseerd kan worden. Het is dan ook het beschikbare gereedschap dat de toepassing inspireert! De historie van de operations levert hiervan reeds vele voorbeelden.
Zo is haar ontstaan na de jongste wereldoorlog en de hoge vlucht, die zij direkt genomen heeft, voor een groot deel te danken aan de uitbouw van de wiskundige statistiek in de jaren tussen de beide wereld-

oorlogen. Haar meest succesvolle resultaten hadden toen immers betrekking op militaire activiteiten zoals de bestrijding van duikboten, bescherming van convooien en training van piloten, waarvoor met statistische hulpmiddelen meetbare en controleerbare maten voor de doeltreffendheid konden worden opgesteld. De nadruk van de operations research in die tijd lag op het systematisch verzamelen en analyseren van operationele gegevens. Het hoeft ons daarom niet te verbazen dat ze haar oorspıong juist in Engeland gevonden heeft. Want daar had de statistische gedachtengang toen reeds meer dan elders ingang gevonden, niet in het minst door het baanbrekende werk van Sir RONALD FISHER in het doelmatig organiseren van biologische en landbouwkundige experimenten en het verwerken van waarnemingsuitkomsten.

Een ander sprekend voorbeeld vormt de statistische kwaliteitscontrole. Tussen 1920 en 1940 was de steekproeftheorie en het trekken van conclusies uit statistische gegevens, vooral door het werk van NEYMAN en PEARSON, op een gezonde waarschijnlijkheidstheoretische basis gebracht. Parallel daarmee liep de eerste ontwikkeling van de statistische kwaliteitscontrole, waarvoor de industrie echter, vooral in Amerika, weinig belangstelling toonde. Toen echter na 1939 de massa productie van militaire uitrusting en de hoge kwaliteitseisen, die daaraan werden gesteld, vroegen om snelle en toch betrouwbare keuringsmethoden, lag daarvoor een theoretisch goed gefundeerd en bruikbaar gereedschap klaar. En toen bovendien de amerikaanse militaire autoriteiten de kwaliteitscontrole op statistische basis ging uitvoeren, was de industrie wel gedwongen hetzelfde te doen. En niet tot haar nadeel, menig bedrijf maakt er sindsdien een dankbaar gebruik van.

Ook de na-oorlogse ontwikkeling van optimaliseringsmethoden heeft de wiskundige modelvorming en analyse in het bedrijfsleven sterk bevorderd. Vooral de lineaire programmering heeft grote bekendheid gekregen. Hierin wordt de samenhang tussen de in aanmerking te nemen systeemvariabelen door lineaire relaties beschreven, terwijl ook de doelstelling van het systeem door een, te minimaliseren, lineaire vorm in deze variabelen wordt uitgedrukt.

Ik wil op het ontstaan van de lineaire programmering iets nader ingaan om U te demonstreren hoe nauw zij samenhangt met ingrijpende ontwikkelingen in de wiskundige economie van de dertiger jaren.

Reeds sedert het einde van de vorige eeuw werden door WALRAS, PARETO e.a. in wiskundige vorm beschreven modellen van economisch evenwicht bestudeerd. Deze hebben zich echter lang aan een rigoreuze wiskundige analyse onttrokken. Zo werd het bestaan van

zo'n evenwicht en zelfs van zijn eenduidigheid zonder meer aangenomen als het aantal variabele grootheden in het model maar gelijk was aan het aantal daartussen bestaande onafhankelijke relaties. Eerst in 1935 werden door WALD noodzakelijke en voldoende voorwaarden hiervoor afgeleid. Ook VON NEUMANN leverde in die jaren een belangrijke bijdrage tot een goede wiskundige begripsvorming door zijn dicht bij de lineaire programmering en dicht bij de speltheorie staande studie van een expanderende economie.
Een ontwikkeling van meer practisch belang begon omstreeks 1935, toen Leontief geen genoegen meer nam met de zuiver formele studies van economisch evenwicht zonder dat daarbij empirische gegevens tot uitgangspunt dienden. Hij constateerde enerzijds een concentratie van economische theorieën, niet gebaseerd op feiten en anderzijds een steeds groter wordende stroom van statistische informatie over inkomsten, besparingen, productie en investeringen, waaraan geen theorie ten grondslag lag. Zijn werk: „to fill the empty boxes of economic theory with relevant empirical contents", resulteerde in 1936 in de z.g. inter-industrie modellen. Deze beschrijven de samenhang tussen afzonderlijke bedrijven, uitgaande van de gedachte dat vele producten slechts intermediair zijn, dus weer als grondstof of half product dienen voor de productie van andere goederen in andere bedrijven. Zij leveren het uitgangspunt voor een op empirische gegevens berustende analyse van de invloed van veranderingen in de vraag op de markt, of in het productie proces in enig bedrijf, op het productie niveau van alle bedrijven die in het model zijn opgenomen.
Deze inter-industrie modellen vinden thans uitgebreide toepassing bij de economische planning in vele landen. De bedrijven zijn dan meestal bedrijfstakken, zoals chemische industrie en auto industrie, en er wordt aangenomen dat zij elk slechts één enkel product fabriceren, hier dus chemicaliën of auto's. Verder worden ze beschouwd als black-boxes, waarvan alleen de input/output structuren bekend zijn, die door vaste technologische coëfficiënten worden gegeven.
Het zijn deze inter-industrie modellen die, direkt na de oorlog, het uitgangspunt vormden voor een wetenschappelijke benadering van de enorme distributie en toewijzingsproblemen, welke zich in de militaire organisatie voordeden bij de verdeling van mankracht en materiaal en bij de bevoorrading van troepen. Hun bruikbaarheid werd echter sterk beperkt door de eis dat elk bedrijf slechts één product mocht produceren. Bovendien kon in zulke militaire problemen een gesteld doel, binnen de technische en organisatorische beperkingen, op meerdere manieren worden gerealiseerd. Zulke alternatieven werden echter door

de Leontief-modellen niet beschreven. De pogingen, deze moeilijkheden op te lossen door een generalisering van het inter-industrie model, leidden DANTZIG in 1947 tot het model van lineaire programmering. Gelijktijd ontwikkelde hij de wiskundig uiterst eenvoudige, doch zeer doeltreffende simplexmethode voor zijn numerieke analyse. Dit lineaire model bracht onmiddellijk in verscheidene gebieden van wetenschap en toepassing een grote activiteit teweeg.
Onder de bezielende leiding van onze vroegere landgenoot KOOPMANS, zelf in de oorlogsjaren betrokken bij de ontwikkeling van transport modellen, werd de grote betekenis van dit lineaire model voor de economische theorie verder uitgewerkt.
In de wiskunde gaf zij aanleiding tot een diepgaande studie van stelsels lineaire ongelijkheden, die tot dan toe zeer stiefmoederlijk behandeld waren. Er bleek ook een sterke relatie te bestaan tussen de lineaire programmering en VON NEUMANN'S „twee personen nul-som spel". De uitbreiding tot convexe niet-lineaire programmeringsmodellen bracht nieuwe aandacht voor convexe functies en verzamelingen, die nu in de wiskundige economie een fundamentele rol spelen. Ook voor deze niet-lineaire programmeringsmodellen konden efficiënte numerieke methoden voor de modelanalyse worden ontwikkeld.
De amerikaanse luchtmacht, door wie DANTZIG's onderzoek was gesteund, ging de lineaire programmering op haar practische bruikbaarheid onderzoeken. Een dankbaar studie-object vond zij daarbij in de russische blokkade van Berlijn met al haar bevoorradings- en transport moeilijkheden.
Industriële toepassing op grote schaal is eerst veel later begonnen. Daadwerkelijk gebruik van de lineaire programmering, met haar omvangrijke kwantitatieve informatieverwerking, was pas mogelijk toen de electronische rekenmachine, omstreeks 1955, in het bedrijfsleven begon door te dringen. De ervaring sindsdien heeft geleerd dat vele industriële planningsproblemen, zoals toewijzing en distributie van grondstoffen en producten, mengproblemen in olie-, levensmiddelen- en veevoerbedrijven, en productieplanning in de chemische- en in de aardolie-industrie, bevredigend door een lineair model kunnen worden beschreven en met behulp van de simplexmethode kunnen worden opgelost. Voor een meer gedetailleerde planning, waar het gebruik van vaste technologische input/output coefficienten niet meer bevredigend is, wordt ook reeds van niet-lineaire programmering gebruik gemaakt.

De wiskunde behoeft niet ontevreden te zijn over de wijze waarop zij

tot nu toe haar taak ten behoeve van de operations research heeft vervuld. Intensief wiskundig onderzoek zal echter nodig zijn om te voorkomen dat, bij de verdere uitbouw van de operations research, het ontbreken van geschikte wiskundige theorieën en technieken een bottleneck gaat vormen.
Zo richt deze haar aandacht meer en meer op het dynamische karakter van het bedrijfsgebeuren, en tracht zij, in haar planningsmodellen, rekening te houden met steeds veranderende omstandigheden, zoals dagelijks variaties in de vraag naar producten, in aanvoer en kwaliteit van grondstoffen, en in de technische uitrusting. Ook spelen dynamische aspecten een belangrijke rol bij de wederzijdse aanpassing van de tactische planning die nauw samenhangt met het directe bedrijfsgebeuren, en de strategische planning die daarvoor slechts richtlijnen geeft op langere termijn.
Baanbrekend werk in de analyse van dynamische beslissingsprocessen is reeds verricht in de dynamische programmering, waarvan BELLMAN de grote promotor is. De systemen die daar worden onderzocht, zijn gekenmerkt door een aantal toestandsvariabelen en een aantal beslissingsvariabelen. Door aan de beslissingsvariabelen passende numerieke waarden toe te kennen kan het systeem in een nieuwe toestand worden overgevoerd. Het meerstapsbeslissingsproces beoogt nu, op een aantal opvolgende tijdstippen, deze beslissingsvariabelen telkens zodanig in te stellen, dat het systeem aan het einde van de operatie in een nader gespecificeerde optimale eindtoestand overgaat. Deze meerstapsbeslissingsprocessen zijn alle gebaseerd op de veronderstelling, dat het vaststellen van de optimale waarden van de beslissingsvariabelen op elk tijdstip alleen afhangt van de toestand van het systeem op dat moment, en niet van de wijze waarop het in die toestand is gekomen. Zij leidt tot een simpel dynamisch optimaliteitscriterium, dat weer vertaald kan worden in recurrente betrekkingen en functionaalvergelijkingen, die machtige hulpmiddelen vormen voor de analyse van vele beslissingsprocessen, varierend van het uitdunnen van bossen tot operaties met atoomreactors. Aanvankelijk ontwikkeld met het oog op bedrijfsvoeringsproblemen, blijkt de dynamische programmering ook van toepassing in de automatische procescontrole, bij de studie van chemische processen en reactors, en bij raket- en ruimtevaartproblemen. Het gebruik van deze recurrente betrekkingen en functionaalvergelijkingen vereist echter het inbedden van het op te lossen dynamische probleem in een grote verzameling van analoge problemen, die simultaan moeten worden opgelost. Afgezien van het feit dat men in de oplossing van deze andere problemen vaak weinig

geinteresseerd is, leidt deze aanpak ook tot veelal onoverkomelijke numerieke moeilijkheden, indien per stap niet meer dan drie of vier toestandsvariabelen rekening moet worden gehouden. Voor de industriële planning, waar vaak vele toestandsvariabelen in het beeld moeten worden betrokken, is de dynamische programmering in haar huidige vorm daarom slechts in beperkte mate bruikbaar, en er zullen andere technieken ontwikkeld moeten worden om ook daar dynamische aspecten doeltreffend te kunnen verwerken.
Een dringende noodzaak tot fundamenteel wiskundig onderzoek bestaat ook voor die beslissingsprocessen, waarbij een beste keuze gemaakt moet worden uit een eindig aantal alternatieven. Zulke problemen doen zich o.a. voor als productie niveaus slechts in discrete stappen kunnen worden gewijzigd, bij uitbreidings- of investeringsproblemen waar een keuze moet worden gemaakt uit een aantal mogelijke projecten, en bij het vaststellen van volgorden van operaties met eenzelfde machine, welke voor meerdere doeleinden kan worden gebruikt. Vooral berucht is het lesrooster probleem, waarmee niet alleen onze scholen telkenjare opnieuw worden geconfronteerd, maar dat zich ook in vele vormen manifesteert bij de industriële planning, zoals bij vervoersproblemen, waarin met individuele transportmiddelen en verbindingswegen rekening moet worden gehouden.
Zulke discrete beslissingssingssituaties kunnen niet door continu over een interval varieerbare grootheiden worden gerepresenteerd. Zij laten zich echter kwantificeren door variabelen welke alleen de waarden nul en een mogen aannemen, waardoor ze op uiterst eenvoudige wijze in een programmeringsmodel kunnen worden opgenomen. Het combinatorische karakter van deze programmeringsproblemen biedt echter grote numerieke moeilijkheden. Alleen in zeer eenvoudige gevallen zijn bevredigende oplosmethoden bekend. Een practisch interessant voorbeeld vormt de „kritieke pad methode" voor de volgordeplanning van deelkarweien in een groot project. In de meeste andere gevallen echter is het individueel toetsen op optimaliteit vereist van een astronomisch aantal alternatieven en er is dringend behoefte aan technieken, welke niet optimale alternatieven snel van dit onderzoek uitsluiten.

Groot was daarom het enthousiasme in de operations research, toen GOMORY in 1958 een algoritme ontwikkelde voor het oplossen van lineaire programmeringsproblemen, waarin sommige of alle variabelen gehele getalwaarden moesten aannemen. Dit algoritme was sterk verwant aan het simplex-algoritme voor de gewone lineaire programmering, dat zich juist in die dagen als zeer efficiënt ontpopt had. Ook nu kon een optimale oplossing verkregen worden door een eindig aantal herhalingen van een simpel rekenprocedé. Het enthousiasme was echter weer gauw verdwenen, toen numerieke experimenten aantoonden, dat dit rekenprocedé, in tegenstelling met de ervaringen bij de simplex-methode, zo slecht convergeerde, dat het voor bedrijfskundige toepassingen onbruikbaar was. De situatie is hier veel somberder dan bij de dynamische programmering. Want, vindt deze laatste, ondanks haar beperkte numerieke technieken, toch uitgebreide toepassing, de hier geschetste methode voor het incorporeren van discrete alternatieven in een programmeringsmodel, hoe vruchtbaar ook voor de modelvorming, heeft nauwelijks enige betekenis zonder bijpassend numeriek gereedschap voor de modelanalyse.

De vele toepassingen, die de optimaliseringsmethoden thans in het bedrijfsleven vinden, hebben doorgaans betrekking op beperkte bedrijfsonderdelen. Het ideaal van de operations research pioniers, de operaties van een bedrijf als één geheel te behandelen en de bedrijfsleiding te adviseren aangaande een optimaal beleid voor het bedrijf als geheel, is dan ook nog lang niet bereikt. Welke problemen zich bij het nastreven van dit wel zeer ambitieuze doel voordoen, en hoe de wiskunde ook hier haar hulp wellicht weer kan bieden door het ontwikkelen van geschikte theorieën en technieken, moge ik U illustreren aan het probleem van de decentralisatie van beslissingsinstanties.
De huidige optimaliseringsmethoden gaan uit van een centrale beslissingsinstantie, die over het volledige bedrijfsmodel en over alle daarbij behorende numerieke gegevens beschikt. De beslissingsmacht in een bedrijf is echter veelal verdeeld over meerdere instanties, die elk een van de min of meer sterk met elkaar verbonden bedrijfsonderdelen beheren. Reeds lang wordt erover gefilosofeerd of het mogelijk is zodanige interne kosten en prijzen aan interne diensten en goederen toe te kennen, dat de lokale beslissingen van deze instanties tegelijk optimale of bij benadering optimale beslissingen zijn voor het bedrijf als geheel. Interessant is nu dat in een lineair programmeringsmodel van een systeem van samenhangende afdelingen, zulke interne prijzen en kosten inderdaad kunnen worden berekend. De decompositie methode van Dantzig en Wolfe, in 1958 ontwikkeld voor het oplossen van zeer grote lineaire programmeringsproblemen, leidt hier namelijk tot een meerstapsbeslissingsproces. Er is dan een centrale instantie, die wel de onderlinge samenhang van de afdelingen kent, maar die geen informatie heeft over de lineaire modellen van de afdelingen zelf. In elke

stap wisselt iedere afdeling enige nadere gespecificeerde informatie uit met de centrale instantie, die daaruit tenslotte de gewenste interne prijzen en kosten berekent.
Momenteel worden in verschillende bedrijven rekenmachineprogramma's ontworpen op basis van deze decompositie methode met het doel geografisch gescheiden onderdelen van zo'n bedrijf simultaan te programmeren en om dynamische aspecten in een op lineaire programmering gebaseerde bedrijfsplanning te kunnen opnemen. We mogen hopen, dat de ervaring met deze decompositie methode ook informatie zal verschaffen over de practische betekenis en mogelijkheden van zulke interne prijzen en kosten.

Tenslotte wil ik nog een enkel woord wijden aan de structuur verandering die de wiskundige wereld thans ondergaat. Behalve de wiskundige per se, kennen we sinds enkele jaren de wiskundige ingenieur, wiens centrale taak het is de enorme analytische en numerieke potenties van de wiskunde uit te dragen naar de toepassingsgebieden. Daarnaast groeit nu weer de wetenschappelijke rekenaar, die bij dit uitdragen moet assisteren, zoals dat in de techniek gebeurt door de HTS-er.
Naast de wiskunde ontwikkelt zich nu ook, wat ik wil noemen, een technische wiskunde, zoals in het verleden naast de natuurkunde de technische natuurkunde, in vele variaties, en naast de chemie de chemische techniek zijn ontstaan. Het ontwerpen, construeren en beproeven van wiskundige en statistische rekenmachine programma's, van vertaalprogramma's behorende bij programmeertalen en vele andere wiskundige activiteiten, die ten doel hebben wiskundige methoden en technieken bruikbaar en toegankelijk te maken voor de niet-wiskundige gebruiker, kunnen we immers terecht „technische wiskunde" noemen.
Deze technische wiskunde krijgt ook gestalte door haar werk ten behoeve van de „operational engineering".
Vlugter omschrijft in zijn intree-rede in Delft in 1959 de chemical engineering als: „alle werkzaamheden die verricht moeten worden om van een chemisch laboratorium experiment te komen tot een goed functionerend commercieel bedrijf". Tevens laat hij zien hoe deze chemical engineering een samenspel vormt van chemici en fysici, die een verantwoord ontwerp van een proces of installatie moeten maken, en werktuigbouwkundigen, die dit ontwerp moeten realiseren.
Met enige vanzelfsprekende variaties kunnen we nu de operational engineering omschrijven als: „alle werkzaamheden die verricht moeten worden om een in de operations research geboren idee om te

zetten in een economisch, organisatorisch en wiskundig verantwoord apparaat voor het verkrijgen van informatie die nodig is voor een doeltreffende bedrijfsvoering". Het samenspel zal hier in het algemeen plaats hebben tussen de bedrijfs- of de proceskundige en de wiskundige ingenieur.
De aandeel van de technische wiskunde in de operational engineering moge U duidelijk worden uit het volgende voorbeeld. Als de operations research in een bedrijf leidt tot een bruikbaar model voor planningsdoeleinden, dan kan deze planning alleen dan op routine basis worden uitgevoerd als hiervoor de nodige wiskundige apparatuur in de vorm van rekenmachine-programma's geschapen wordt. Is het model lineair, dan kan deze apparatuur o.a. omvatten: matrix generatoren, die de numerieke parameters van het model uit bedrijfsgegevens opbouwen, schalingsprogramma's, die numerieke moeilijkheden bij de latere berekeningen moeten voorkomen, een lineair programmeringsprogramma als wiskundige kern, en tenslotte rapportage programma's, die de verkregen informatie omzetten in direkt leesbare en interpreteerbare rapporten voor de bedrijfsleiding of voor haar adviseurs.
Leidt voortgezette operations research tot verfijning of uitbreiding van het model, doordat bijvoorbeeld met dynamische of niet-lineaire aspecten rekening kan worden gehouden, dan moet dit wiskundige apparaat weer snel en doeltreffend kunnen worden aangepast en vernieuwd.
Deze constructies van de technische wiskunde zijn in opbouw en werking volkomen vergelijkbaar met technische installaties. Zij moeten binnen een bepaalde tijdslimiet en volgens vooraf gegeven specificaties worden opgebouwd en zij stellen analoge eisen betreffende bedrijfszekerheid, betrouwbaarheid en hanteerbaarheid. Ook is het voor de bedrijfskundige gebruiker niet nodig alle constructieve details te kennen; duidelijke gebruiksinstructies en een goed begrip voor haar mogelijkheden en beperkingen zijn voldoende.
Hier ligt naar mijn overtuiging een dankbaar en fascinerend werkterrein voor de wiskundige ingenieur, waar hij zijn creativiteit in hoge mate kan uitleven. Hoewel hij goed moet kunnen samenwerken met de bedrijfs- en proceskundige ingenieur, staat hij voor een geheel eigen problematiek welke hij alleen aankan als hij goede kennis van wiskunde en moderne rekenmethoden en rekenapparatuur paart aan goed inzicht van het vakgebied waarin hij werkt. Bovendien moet hij in de vele gevallen, waar de wiskundige wetenschap hem nog in de steek laat, een beroep durven doen op zijn kritische durf, ervaring en intuïtie, want evenals bij elk technisch werk worden de beste resultaten verkregen

door een samenspel van kunst en kunde.

Zeer geachte toehoorders,

Ik heb U slechts een beperkt beeld kunnen geven van de problemen, waarvoor de wiskunde door de operations research wordt gesteld. Niettemin hoop ik, dat ik U heb duidelijk gemaakt, welk een belangrijke taak de wiskunde heeft voor het welslagen van deze operations research, maar ook welk een boeiend en veelzijdig werkterrein er ligt voor de wiskundige, die zich het vervullen van deze taak ten doel stelt.

Gekomen dan aan het einde van mijn rede, betuig ik in de eerste plaats mijn eerbiedige dank aan Hare Majesteit de Koningin, voor mijn benoeming tot buitengewoon hoogleraar aan deze Technische Hogeschool.

Mijne Heren Curatoren,

Aan U betuig ik mijn grote erkentelijkheid voor het vertrouwen dat U mij hebt betoond door mij voor deze benoeming voor te dragen. Ik verzeker U, dat ik mij ten volle bewust ben van de grote verantwoordelijkheid die ik op mij heb genomen.

Mijne Heren Leden van de Senaat,

Het is voor mij een grote eer in Uw midden te zijn opgenomen. Door de beperkingen die een buitengewone leerstoel met zich meebrengt, heb ik nog betrekkelijk weinig gelegenheid gevonden tot contact buiten de Onderafdeling Wiskunde. Niettemin ben ik er van overtuigd dat ik, bij mijn pogen de wiskunde dienstbaar te maken aan wetenschap en techniek, mag rekenen op Uw kritische doch welwillende hulp, steun en medewerking.

Mijne Heren Hoogleraren van de Onderafdeling Wiskunde,

Ik beschouw het als een groot voorrecht deel te mogen uitmaken van

Uw selecte groep. Zeer erkentelijk ben ik U voor de wijze waarop U mij hebt ontvangen, en voor de hulp en steun die U mij, in het afgelopen jaar, in zo ruime mate hebt verleend bij de opbouw van mijn groep van direkte medewerkers. De sfeer van vertrouwen en samenwerking die bij U heerst, is voor mij een garantie voor het welslagen van mijn opdracht.

Hooggeachte Monhemius,

Waar mijn wiskundig werk zich vooral richt op de operations research, ben ik zeer verheugd juist met U te mogen samenwerken, die deze nieuwe wetenschap met zoveel vuur beoefent.

Mijne Heren Leden van de Directie van het Koninklijke/Shell Laboratorium te Amsterdam,

U breng ik mijn dank voor de toestemming die U mij hebt gegeven, mee te werken aan de wiskundige vorming van de ingenieur aan deze Hogeschool, en voor de faciliteiten die U mij daartoe verleent.

Gaarne grijp ik deze gelegenheid aan om dank te zeggen aan mijn naaste medewerkers in Amsterdam en aan de vele anderen in de Koninklijke/Shell Groep, die door hun werk en discussies bijdragen tot mijn inzicht in de mogelijkheden en beperkingen van de industriële wiskunde, welk inzicht ik thans ga uitdragen naar de toekomstige ingenieur.

Hooggeachte Freudenthal,

Het verheugt mij zeer op deze dag ook een woord van dank en erkentelijkheid te kunnen spreken tot U, die mijn vorming en leven als wiskundige voor zo'n belangrijk deel hebt bepaald. Nog steeds trek ik profijt van wat ik in mijn utrechtse jaren, als Uw direkte medewerker, heb geleerd. Het is ook op Uw suggestie geweest, dat ik het Mathematisch Instituut in Utrecht heb verlaten en mijn wiskundig werk in het bedrijfsleven ben gaan verrichten. Ik heb hiervan nooit spijt gekregen, want wat ik daar heb geleerd, zou ik ook als wiskundige niet graag meer willen missen. Toch was het voor mij een groot genoegen, toen U mij, na mijn promotie, opnieuw met een vererende opdracht bij het utrechtse hoger onderwijs betrok. Ook nu ik dit werk in Eindhoven ben gaan voortzetten, weet ik mij gesteund door Uw belangstelling. Voor dit alles ben ik U zeer dankbaar.

Waarde Zoutendijk,

Met genoegen, maar ook met een zekere weemoed, denk ik terug aan de jaren dat wij samen op het Koninklijke/Shell Laboratorium onze operational research verrichtten. Dit waren zeer vruchtbare jaren, waarin wij, in goede harmonie en samenwerking, veel van elkaar hebben geleerd. Ik prijs mij gelukkig, dat wij nu, na enkele jaren onderbreking door jouw verblijf buiten Nederland, onze wetenschappelijke contacten weer hebben opgevat.

Dames en Heren van de Wetenschappelijke, Technische en Administratieve Staf

De aangename sfeer en werklust, die ik ook bij U heb aangetroffen, schept voor mij de beste verwachtingen voor een vruchtbare samenwerking.

Dames en Heren Studenten,

U zult Uw toekomstig werkterrein voornamelijk vinden in het bedrijfsleven. Daarom verdient het huidige streven naar een wetenschappelijk gefundeerde, kwantitatieve aanpak van problemen die zich daar voordoen, Uw bijzondere aandacht. Hoewel deze wetenschappelijke wijze van benaderen van practische problemen nog nauwelijks het beginstadium van haar ontwikkeling ontgroeid is, wettigen de tot nu toe verkregen resultaten een groot vertrouwen in de kracht van de wetenschappelijke methodiek op practisch terrein. Een snelle en gezonde uitbouw van deze aanpak vereist echter dat dit vertrouwen niet alleen gedragen wordt door enkele specialisten, maar dat het gemeengoed wordt van allen die, na een wetenschappelijke opleiding, een taak in het bedrijfsleven krijgen te vervullen.
De wiskunde is in deze aanpak slechts een hulpmiddel, maar dan toch een onmisbaar hulpmiddel. Evenals in de natuurwetenschappen speelt zij hier de rol van „taal van de wetenschap", waarmee nu echter

theorie en practijk, in het op empirische gegevens berustende wiskundige model, dichter tot elkaar worden gebracht. Ik hoop daarom, dat mijn onderwijs in de wiskunde ertoe zal bijdragen, dat U deze taal zult leren verstaan en gebruiken, en dat ik U op deze wijze kan inspireren tot een wetenschappelijke aanpak van problemen, welke U in Uw latere practijk zult tegenkomen. In het bijzonder hoop ik ertoe te kunnen bijdragen dat ook de niet-wiskundige ingenieur reeds in zijn studietijd een inzicht krijgt in de mogelijkheden die de wiskunde thans, in combinatie met de moderne reken- en informatieverwerkende apparatuur, biedt in de practijk van het bedrijfsleven.

Ik heb gezegd.

13. Pieter Zandbergen

Pieter Jacobus Zandbergen, geboren in 1933, studeerde vliegtuigbouw in Delft en werkte aan het Nationaal Luchtvaartlaboratorium voor hij hoogleraar werd aan de Technische Hogeschool Twente. Zijn achtergrond was dus vergelijkbaar met die van Biezeno en Timman, toch was hij degene die het concept van wiskundig ingenieur afrondde door niet alleen ruimte te scheppen voor de bedrijfskundige richting - dat was in Eindhoven ook al gebeurd -, maar ook de reflectie op het toepassen te integreren in de opleiding.
In Twente vond men het wiel uit, althans opnieuw. De wiskundigen waren aanvankelijk, in 1964, verspreid over de verschillende technische afdelingen. Zo was Zandbergen als hoogleraar in de wiskunde aangesteld in de afdeling werktuigbouw. Al snel bleek deze situatie onbevredigend en Zandbergen nam het voortouw in het streven naar een eigen afdeling en een eigen studierichting. Na drie jaar commissiewerk was de opleiding geboren. Zandbergen schetst in het hier opgenomen "groene boekje" de gedachtengang en de contouren van de opleiding: enerzijds terug tot het concept van Timman, de achtergrond van toegepaste mechanica, anderzijds integratie in de opleiding van het nadenken over de praktijk.
Het gebruik van de wiskunde als technologisch hulpmiddel; de opleiding tot toegepast wiskundige aan de THT (rede, 10 oktober 1969).

HET GEBRUIK VAN DE WISKUNDE ALS TECHNOLOGISCH HULPMIDDEL

De opleiding tot toegepast wiskundige aan de THT

Prof. dr. ir. P.J. Zandbergen

HET GEBRUIK VAN DE WISKUNDE ALS TECHNOLOGISCH HULPMIDDEL

De opleiding tot toegepast wiskundige aan de THT

Proloog

Dames en Heren

Het is mij een groot voorrecht als laatste spreker op deze dag u iets te kunnen zeggen over het gebruik van de wiskunde als technologisch hulpmiddel. Vooral omdat dit een ongezochte gelegenheid is plaats en doelstelling van de opleiding tot wiskundig baccalaureus en wiskundig ingenieur in een wat helderder daglicht te stellen. Wellicht hebt u met een lichte graad van wrevel tegen dit thema zitten aankijken. Wiskunde is immers nog altijd een wetenschap die velen als een naast de werkelijkheid staand, en daarom als vervelend en oninteressant onderwerp beschouwen. Haar beoefenaren kunnen op zijn best een wat wereldvreemd volkje zijn dat zich bij voorkeur in ivoren torens ophoudt en alleen voor elkaar belangstelling of ijverzucht koestert.
Laat ik daarom om het geheel in een wat menselijker context te plaatsen, wijzen op de uitspraak van een Gronings wiskundehoogleraar, die, u moet mij op mijn woord geloven, zeer goed in staat is over deze analogie te oordelen. Hij stelt n.l. dat de wiskunde te vergelijken is met een gracieuze en capricieuze vrouw, beeldschoon, maar vol listen en lagen en voor haar bewonderaars niet te doorgronden. We zullen het dus vanmiddag over deze schone grillige vrouw hebben. Daarbij zullen we tot de ontdekking komen, dat het deze vrouw, zoals zovele uit

de geschiedenis bekende, gelukt is door een dienstverlenende houding uiteindelijk tot een macht van de eerste orde te worden en dat vooral in het technologisch gebeuren. Het is, geloof ik, verstandig om het eigenlijk thema toe te lichten aan de hand van de ontwikkelingen die ertoe geleid hebben om in dit land de opleiding tot wiskundig ingenieur in te stellen. We zullen nagaan hoe de inhoud van deze opleiding zich in slechts 10 jaar tijd heeft gewijzigd en willen trachten een indruk te geven van wat in de toekomst te verwachten valt.

Vooral de maatschappelijke implicaties vormen een boeiend onderwerp dat vanmiddag zeker niet uitputtend behandeld kan worden.

Inleiding

De samenhang tussen wiskunde en technologie verliest zich in het duister van de tijden, en was vaak anders dan nu het geval is meer op de vorm dan op de kwantitatieve berekening gericht. Wanneer we een bouwwerk als de Aya Sofia te Istanbul bestuderen of de machtige gotische kathedralen, dan is het voornamelijk de geometrie van ruimten, wanden en motieven, die ons een samenhang met de wiskunde suggereert. De overgebleven manuscripten leggen er getuigenis van af dat dit ook inderdaad zo is. De constructie van deze bouwwerken geschiedde nog op puur empirische gronden, met instorten en weer opbouwen.
Als direkte voorloper van de wiskundig ingenieur, men zou kunnen zeggen als het oertype van dat merkwaardige duale wezen dat kennis van wiskunde paart aan gevoel voor techniek, kan men Archimedes noemen. Hij was niet alleen een groot wiskundige - ver voor Newton paste hij reeds de integraalrekening toe - hij was zelfs niet alleen een groot toegepast wiskundige - men denke aan zijn werk op het gebied van de vloeistofmechanica - hij was ook een groot technicus, die de stad Syracuse de middelen verschafte om zich lange tijd tegen de Romeinen te verzetten. Eerlijkheidshalve moet ik er aan toevoegen, dat hij dit laatste als smerig handwerk beschouwde,

waartoe hij door de nood gedreven werd, maar waaraan een ordentelijk wiskundige zich niet moest bezondigen. Een dergelijke houding zullen we van de hedendaagse wiskundig ingenieur niet meer kunnen accepteren.

Wanneer de glans van de Griekse wetenschap gedoofd en de macht van het Romeinse keizerrijk vervallen is duurt het eeuwen voordat uit de smeltkroes der volkeren, die West-Europa overstromen en op basis van deze zelfde Griekse wetenschap, die zo lijkt het ons achteraf door toevalligheden bewaard was gebleven, een nieuwe Phoenix uit de as kon verrijzen. Uit het oogpunt van de wiskunde gezien, was een belangrijk groeielement de invoering van het Indiasche cijferstelsel; een stelsel dat gedurende de 16e eeuw stof was voor universitair wiskunde onderwijs, en dat zijn grote kracht ontleent aan zijn positionele schrijfwijze. Vanaf dan verloopt de ontwikkeling snel. De belangstelling voor techniek, die in de Griekse tijd, zoals we boven zagen, als smerig handwerk werd beschouwd, bracht in de dagen van Christiaan Huygens de toegepaste wetenschappen mede op gang.

Voortbordurend op het werk van Archimedes hield deze beroemde landgenoot, die leefde van 1629 tot 1695, zich in zijn jeugd bezig met zuiver wiskundige onderzoekingen. Hij verwierf zich hiermee grote naam, maar keerde zich daarna tot meer technische bezigheden. In 1656 construeerde hij een apparaat, dat een beslissende stap voorwaarts betekende voor de oplossing van een in wezen technisch probleem, de bepaling van de lengte op zee. Ik doel hier natuurlijk op het slingeruurwerk. Om een exact isochroon werkende slinger te verkrijgen moest hij de theorie van evolventen van kromme lijnen ontwikkelen, terwijl hij ook reeds aandacht besteedde aan het feit, dat de slinger niet bestaat uit een draad van verwaarloosbare massa. We zouden nog vele wiskundigen de revue kunnen laten passeren, die ook technische prestaties hebben geleverd, doch ik geloof niet, dat we daarmee een nadere kijk zouden krijgen op de hedendaagse wiskundig ingenieur. Wel hebben we aangetoond

dat wiskunde en techniek ook in vroeger tijden - anderen zullen zeggen juist in vroeger tijden - niet zover uit elkaar hebben gelegen als thans wel eens wordt gesuggereerd.
Wat wij thans "de techniek" plegen te noemen is het resultaat van een ontwikkeling die omstreeks het einde van de 18e eeuw is ingezet en die in een steeds ontzagwekkender tempo zich tot aan vandaag de dag is blijven voortzetten. Daarbij zijn dan echter wel een aantal tijdstippen aan te geven die tot stroomversnellingen hebben geleid. Bijvoorbeeld het jaar 1832 waarin Michael Faraday zijn openbare proeven over inductiestromen deed, het begin van het elektriciteitstijdperk. Wanneer we de moeite nemen ons het leven voor te stellen zonder elektriciteit, dan kunnen we ons een denkbeeld vormen van de veelvuldige technische toepassingen. Dit heeft echter ook geleid tot de verbazingwekkende synthese van deze verschijnselen in een aantal wiskundige vergelijkingen; de vergelijkingen van Maxwell. Deze vergelijkingen tezamen met de experimenten van Michelson en Morley brachten Einstein tot zijn relativiteitstheorie. Laten we nog een andere datum noemen: het jaar 1903, het jaar waarin de gebroeders Wright er in slagen voor het eerst te vliegen met een toestel zwaarder dan lucht. De ontwikkeling hiervan heeft er toe geleid dat wij vandaag niet alleen kunnen spreken over massavervoer door de lucht, maar ook van een bemande vlucht naar de maan.

En dan is daar verder nog de gehele ontwikkeling van de inzichten ten aanzien van de bouw van de materie, die tenslotte geleid hebben tot de beheersing van zulke technische problemen als de kernsplitsing en tot het onderzoek van de technische verwerkelijking van kernfusie.

De vraag die na deze opsomming terecht bij u zou kunnen opkomen is: Wat is de rol die de wiskunde bij dit alles gespeeld heeft en nog speelt? Aanvankelijk was er - zoals uit het bovenstaande blijkt - sprake van een samengaan van techniek en wiskunde, doch omstreeks het begin van de 19e eeuw scheiden zich de wegen. De wiskundigen

worden er zich van bewust, dat de strengheid van hun bewijsvoering de toets der kritiek niet kan doorstaan en dat leidt hen tot een systematisch en grondig onderzoek van de grondslagen van het vak. Dit onderzoek op zichzelf opent een rijke bron van mogelijkheden voor de wiskunde, maar deze blijft daarmee vaak ver van de technische toepassingen verwijderd.
Het gat, dat daarmee is ontstaan moet worden opgevuld en wordt uiteraard ook opgevuld door de toegepaste wiskunde; wiskunde beoefend door lieden, die het erom gaat oplossingen te verkrijgen van het vaak geschematiseerde model van een technisch of fysisch probleem.
Het zijn de theoretisch fysici met een wiskundige belangstelling of wiskundigen met een zekere technische belangstelling, die dit vak beoefenen. Zij zijn te vinden vooral daar waar de technische realisering afhangt van een zo nauwkeurig mogelijke kwantitatieve voorspelling over het gedrag van het te construeren apparaat. Een typisch voorbeeld hiervan is de vliegtuigbouwkunde, waar een belangrijke vraag bijv. is: Hoe kan een vleugel zo licht mogelijk gemaakt worden, terwijl tegelijkertijd een voldoende sterkte gewaarborgd blijft?
Om een dergelijk probleem te kunnen oplossen is nogal wat nodig, en ik zal u dan ook niet vermoeien met daarover een uiteenzetting te geven. Genoeg zij, dat men zich hier omstreeks 1930 mee ging bezighouden, en dat dit tot op vandaag nog steeds een actueel probleem is. Dit laatste vindt zijn oorzaak in het feit dat de technici in deze tak van industrie perfectionisten moeten zijn, die ogenblikkelijk toepassen wat zojuist gevonden is en dan weer op nog niet te beantwoorden vragen stuiten. Ik zou nog wel even uw aandacht willen vestigen op het feit dat het om kwantitatieve gegevens ging. D.w.z. de wiskundige formulering moet tot zinvolle numerieke resultaten leiden; er moet dus gerekend worden. Nu kosten berekeningen tijd en naarmate het model ingewikkelder is zal de omvang van het rekenwerk toenemen. Al gauw is de omvang zo groot, dat met de hand rekenen niet meer mogelijk is. Een enorme verbetering werd al verkregen met de elektrische tafelrekenmachine.

Uiteraard geldt de hier geschetste ontwikkeling niet alleen voor de vliegtuigbouwkunde, maar ook voor andere technische wetenschappen, o.a. de elektronica. Sinds 1930 is er dan ook een steeds toenemende vraag naar toegepast wiskundigen, hetzij wiskundigen met zogenaamd fysisch gevoel of ingenieurs met een sterk theoretische belangstelling.
Het zou evenwel tot na de tweede wereldoorlog duren, voordat het tot een opleiding kwam die voor de industrie bruikbare toegepast wiskundigen afleverde. Maar daar was toen dan ook wel alle reden voor. Immers gedurende de oorlog was er in Amerika een rekentuig ontwikkeld, dat alles wat daarvoor bestond volledig in de schaduw stelde: de elektronische rekenmachine of computer. Hierdoor werd het mogelijk aanzienlijk ingewikkelder problemen wiskundig te benaderen en praktisch bruikbare resultaten te verkrijgen en dat alles in een redelijke tijd. Dit leidde er vanzelfsprekend toe, dat de industrie meer belangstelling kreeg voor het onderzoek met behulp van wiskundige modellen, wat de vraag naar hiervoor geschikte wiskundigen deed toenemen. Dat moesten dan natuurlijk mensen zijn die de mogelijkheden van het nieuwe hulpmiddel ook werkelijk konden uitbuiten, of met andere woorden mensen die geleerd hadden te programmeren en die begrip hadden van de numerieke wiskunde. Deze laatste tak van wiskunde was eigenlijk tot ontwikkeling gebracht door de astronomen en houdt zich bezig met zulk soort zaken als numerieke integratie, interpolatie en extrapolatie, de numerieke behandeling van differentiaalvergelijkingen enz. Het behoeft waarschijnlijk geen betoog, dat de numerieke wiskunde juist door de komst van de computer sterk beïnvloed is. Maar daarover straks meer.

Het zal u na het bovenstaande niet meer verbazen dat tegen de tijd, dat voorbereidingen worden getroffen voor de aanschaffing van de eerste rekenmachines in dit land, tegelijkertijd een nieuwe opleiding wordt gecreëerd: de opleiding tot wiskundig ingenieur aan de Technische Hogeschool te Delft. Degene die deze nieuwe opleiding

vorm en inhoud geeft is de dan juist benoemde hoogleraar Timman, een internationaal bekend toegepast wiskundige. Het is interessant, de eisen die door hem aan een wiskundig ingenieur werden gesteld hier in zijn eigen woorden weer te geven, woorden uitgesproken in 1958:
1) "Een kennis op behoorlijk niveau van de belangrijkste gebieden der wiskunde, die veel toepassingen vinden. Het zwaartepunt valt daarbij uiteraard op de analyse.
2) Een degelijke kennis van verschillende numerieke methoden en een vaardigheid in het hanteren van deze methoden voor concrete problemen.
3) Een goed begrip van de denk- en handelwijze van de techniek en het vermogen zich snel in te leven in de probleemstelling, die in concrete gevallen in de techniek optreedt. Hiervoor is een kennis van de grondslagen van de techniek noodzakelijk."

Ook hier treedt duidelijk de reeds eerder geconstateerde dualiteit op t.a.v. de kennis van wiskunde en techniek, die ons in de praktijk noodzaakt te zoeken naar een "aanvaardbaar" compromis.
Timman zelf constateert al dat het volgende resultaat niet uitgesloten is: "een hybridische figuur die te weinig begrip van wiskunde heeft om ooit iets op dit gebied te betekenen en te weinig praktisch inzicht om ooit tot een resultaat in een concreet geval te komen."
Het is inderdaad gebleken dat de grote moeilijkheid bij de opleiding van de wiskundig ingenieur de integratie is van de beide onmisbare elementen techniek en wiskunde. De vraag die namelijk beantwoord moet worden is: Welke mate van gestrengheid is noodzakelijk bij het wiskunde onderricht aan een wiskundig ingenieur? Hoe meer wordt ingegaan op allerlei grondslagen, hoe minder tijd er overblijft voor oefening in de techniek. Als er echter onvoldoende tijd wordt besteed aan de zuivere wiskunde, dan is de kans groot dat de ingenieur later niet in staat is de ontwikkelingen in zijn vak voldoende te blijven volgen.
Waarschijnlijk daarom is aan de Technische Hogeschool Eindhoven een wat groter gewicht gelegd op de wiskunde

sec..Een vergelijking van de Delftse en Eindhovense opleiding is echter nauwelijks mogelijk, omdat Eindhoven eerst onlangs zijn eerste wiskundig ingenieurs heeft afgeleverd, en uiteindelijk geeft de praktijk d.w.z. de beoordeling in het beroep de doorslag.
Inmiddels zijn in ons land ongeveer honderdvijftig wiskundig ingenieurs werkzaam, terwijl de vraag groot is.

De opzet in Twente

Laten wij ons thans wenden tot de situatie zoals die was op het ogenblik dat deze hogeschool haar poorten opende: september 1964. Er waren toen drie technische afdelingen en een afdeling Algemene Wetenschappen. Deze laatste afdeling bevatte evenwel niet de wiskundigen. Dezen waren verdeeld over de technische afdelingen. Vanwaar deze afwijking van de in Delft en Eindhoven gebruikelijke gang van zaken? Het zou mij veel te ver voeren nu alle argumenten hiervoor te analyseren. Laat ik volstaan met te constateren, dat er bij de technische afdelingen van onze zusterinstellingen een zekere onvrede was gegroeid met de inbreng van de wiskunde in deze afdelingen. Allerwegen kan men waarnemen, dat de invloed van de wiskundige technieken hand over hand toeneemt en dit was ook de technici niet ontgaan. Daar voor velen van hen de wiskunde een dienende wetenschap is, lijkt het een voor de hand liggende gedachte de dienaren in huis te halen en hen aldus met hun neus op de problemen te drukken. Zo kan men ongeveer samenvatten wat het leidend beginsel is geweest bij de plaatsing van de wiskundigen aan deze hogeschool.
Laat ik mij echter haasten er aan toe te voegen dat dit zeker niet het enige beginsel is geweest. In de eerste plaats valt op te merken dat eenzelfde principe is gevolgd ten aanzien van de natuurkundigen. Verder is er direkt rekening gehouden met het feit dat de wiskundigen en natuurkundigen een aantal gemeenschappelijke belangen hebben, niet alleen onderling maar ook ten aanzien van een goed funktioneren van het onderwijs. Het zou bijv. onzinnig zijn geweest het wiskundeonderwijs in een bepaalde afdeling uitsluitend door de wiskundigen van die

afdeling te laten verzorgen, omdat dat tot een verveelvoudiging van de noodzakelijke mankracht had geleid. Er was dus een coördinerend orgaan nodig met een zekere mate van inspraak in het beleidscollege, dat gevormd wordt door Rector en Assessoren. Dit orgaan was de Contactgroep voor Wis- en Natuurkundigen.
De natuurkunde is vanouds één van de allerbelangrijkste basiswetenschappen voor het technisch onderwijs terwijl het belang van de wiskunde in dit opzicht gedurende het laatste decennium bijna van dag tot dag toeneemt. Dit betekent uiteraard, dat er aan de bijdrage van de wiskunde vanaf het begin van de hogeschool zeer bijzondere aandacht is besteed. Een goede ontwikkeling is in de eerste plaats alleen dan te bereiken, wanneer de wiskundigen een zodanige groep vormen, dat het individueel verrichte onderzoek bij elkaar aansluit en bovendien blijft aansluiten bij de hedendaagse ontwikkelingen in de wiskunde. Daar komt dan aan een hogeschool nog de eis bij, dat het onderzoek ook voor de technici interessante resultaten moet opleveren. Al snel in het bestaan van de hogeschool daagde het denkbeeld, dat aan deze eisen kon worden voldaan door het instellen van opleidingen in de wiskunde. Twee grote voordelen zouden zijn: een verbreding van het spectrum van de studentenbevolking, dat minder eenzijdig zou worden en het feit, dat we daardoor zouden kunnen bijdragen aan de vraag naar wiskundig ingenieurs. Uiterste zorg diende besteed te worden aan de bezwering van het gevaar, dat deze opleiding er toe zou kunnen leiden dat de wiskundigen zich in de ivoren toren van hun eigen opleiding zouden terugtrekken, en de technici verder aan hun lot zouden overlaten.
Om dit alles te bekijken werd er in 1965 een Commissie Ontwikkelingsplan Wiskunde (CONWI) opgericht, die bestond uit alle wiskundigen plus een vertegenwoordiger van elk der afdelingen.
Ik kan u verzekeren, dat deze commissie haar taak uiterst serieus heeft opgevat en de in haar taakomschrijving aanwezige conflictstof zeker niet uit de weg is gegaan, zodat de vergaderingen soms een nogal stormachtig verloop hadden.

Het gevolg hiervan is evenwel geweest, dat elk denkbeeld van alle mogelijke kanten is bekeken en dat er uiteraard een evolutie in deze denkbeelden heeft plaatsgevonden, naar mijn mening zeer ten voordele van de uiteindelijke voorstellen.

Zonder hier een verslag te gaan geven van de lotgevallen der commissie, is het misschien toch wel van belang het oorspronkelijke uitgangspunt van de discussie weer te geven. Dit was als volgt:

In Twente bestaat een opleiding tot baccalaureus, d.w.z. een drie en een half jaar durende opleiding in de wetenschappelijke basis van een technische wetenschap, die zo is opgezet, dat de afgestudeerde in staat is zelfstandig de in de praktijk blijkende lakunes in een specialisme van zijn vak aan te vullen. Voor diegenen die belangstelling hebben voor een meer specialistisch gerichte onderzoek-funktie is er gelegenheid aan de hogeschool door te studeren voor ingenieur. Wat de hogeschool hier in feite claimt is dat er voor het grootste deel van de aanwezige ingenieursfunkties volstaan kan worden met de aan de baccalaureus meegegeven basiskennis, die overigens door het daar speciaal op afgestemde onderwijsprogramma niet essentieel voor die van de aan de zusterinstellingen opgeleide ingenieurs onderdoet.

De CONWI redeneerde aldus: De baccalaureus is grondig getraind in een van de technische wetenschappen, daarmee ligt dus zijn vertrouwdheid met de techniek vast. Wat ligt nu meer voor de hand dan door een aanvulling in de wiskunde deze baccalaureus om te vormen tot een wiskundig ingenieur. Een nadeel daarbij was dan wel de tweetrapsaanbreng van verschillende disciplines, maar dat achtte men minder bezwaarlijk dan een onvoldoende technische scholing. In feite richtte deze zogenaamde kopopleiding zich nog geheel op de klassieke opvatting van de wiskundig ingenieur namelijk die van de mathematisch fysicus. Dit betekende in feite een navolging van Delft, ook al werd dan een ander opleidingspatroon gekozen.

Het drong echter al spoedig tot de commissie door, dat hierna wel erg slecht gebruik gemaakt zou worden van de unieke mogelijkheden, die Twente bood, vooral als rekening werd gehouden met de snel toenemende invloed van de computer. De commissie zette er zich dan ook toe, zich eerst een visie te verwerven op de te verwachten ontwikkelingen en daaruit het gewenste opleidingspatroon te laten volgen, met een zo goed mogelijk gebruik van het baccalaureaat.
Dat hield dus tevens in, dat aan een nieuwe image van de wiskundig ingenieur gestalte moest worden gegeven. Het is tekenend, gelet op de tijd die inmiddels verlopen is sinds Timman de wiskundig ingenieur schetste, dat er grote verschillen zijn te constateren in nadruk op de vakopleiding en de maatschappelijke omstandigheden waarin het beroep moet worden uitgeoefend. De eisen door Timman uitgesproken blijven in hun algemeenheid gelden, alhoewel nu zeker de nadruk niet meer ligt op de analyse. Maar daarnaast komen de volgende punten aan de orde:

I. De ingenieur moet niet alleen op grond van zijn wetenschappelijke kennis een probleem kunnen oplossen; hij moet ook een probleem kunnen stellen, en daarbij oog hebben voor de maatschappelijke implicaties;
II. De huidige ontwikkeling van de ingenieurswetenschap dwingt tot het aanbrengen van basiskennis, die de ingenieur in staat stelt zijn eigen weg te vinden; ook wanneer de specialisatie die hij in een bepaald tijdperk van zijn leven heeft beoefend, haar belang inmiddels verloren heeft;
III. De ingenieur moet in teamverband kunnen werken met mensen, die op dat ogenblik een totaal andere specialisatie beoefenen.

Deze eisen gelden in feite voor elke technicus. Naar ons idee zijn ze echter voor de wiskundig ingenieur een conditio sine qua non. Immers hij wordt meer dan alle anderen bedreigt met het gevaar van isolatie omdat de vaktaal van de wiskundige vaak zo moeilijk begrijpbaar is

voor niet wiskundig geschoolden. De wiskundige zal zich dan ook moeten aanpassen aan de vaktaal van anderen en niet omgekeerd.
Voor we nu de nadere uitwerking van de opleiding bespreken, is het dacht ik juist nog even terug te komen op de in punt één genoemde maatschappelijke implicaties. Zonder nadere precisering is dit een vrij zinloze kreet die tegenwoordig vaak wordt gebruikt. Wat wij hier bedoelen is het volgende. Sinds jaar en dag is er een soort tegenstelling tussen maatschappij en wiskunde. Juist nu echter het maatschappelijk belang van de wiskunde - ik zou haast zeggen van uur tot uur - groter wordt is het gewenst dat althans de beoefenaren van de toegepaste wiskunde een duidelijk beeld krijgen van de plaats van hun vak temidden van de andere wetenschappen daarbij inbegrepen de geesteswetenschappen. Zoals het lid van de CONWI, Van de Velde, het zo plastisch uitdrukte: "In een integraal vormingsproces moet duidelijk worden, dat de wiskunde een verfijning is van een door iedere mens gepraktiseerde aktiviteit; dat ze als algemeen-menselijke aktiviteit steunt op de complete mens en geen werkelijke stap vooruit doet zonder intuïtie, emotie, en de aanwezigheid van de medemens. Wat moet worden bijgebracht is het mathematische van geest en gedrag en het geestrijke gedrag van de mathematiek".

De inhoud van de opleiding

Dames en Heren

Ik geloof, dat we thans voldoende achtergrond hebben verkregen om over te gaan tot een korte beschrijving van de eigenlijke inhoud van de opleidingen.
Daarna wil ik met u nagaan hoe deze inhoud een weerspiegeling vormt van een visie op de ontwikkeling van de toegepaste wiskunde, m.a.w. hoe deze opleidingen in staat stellen de wiskunde te gebruiken als technologisch hulpmiddel in de toekomst.

Het zal u opvallen, dat ik hier in het meervoud spreek over de opleiding. Dat behoeft enige toelichting. Wij hebben nl. gemeend twee typen opleiding te moeten creeren:
1. een opleiding tot wiskundig baccalaureus, die desgewenst na het behalen van het baccalaureaat kan worden voortgezet tot die voor wiskundig ingenieur:
2. een opleiding tot wiskundig ingenieur nadat een technisch baccalaureaatsdiploma is behaald.

De eerste opleiding zal na de vrij uitvoerige toelichting in het voorgaande naar ik aanneem niemand verbazen. De tweede steunt op het volgende reeds gereleveerde feit, dat vele van de thans in dit land werkzame toegepast wiskundigen pas tot de wiskunde zijn gekomen, nadat zij tijdens een technische studie hadden bemerkt, hoe belangrijk de wiskunde is voor de oplossing van vele technische problemen. In Twente geeft het baccalaureaat technische wetenschappen een goede basis voor verdere studie in de toegepaste wiskunde. Waarom dan niet de baccalaurei, die voor de wiskunde gemotiveerd zijn geraakt, deze kans geboden?
Zoals duidelijk geworden zal zijn vraagt de maatschappelijke behoefte het bestrijken van een groot spektrum in de toepassingsgebieden van de ingenieurswetenschappen. Daarin kan globaal de volgende indeling worden gemaakt, een indeling die is aangehouden voor de twee typen van doktorale studie, te weten:

1. De fysische richting

Fysisch duidt hier op de fundamentele beschrijving van natuurwetenschappelijke verschijnselen, zoals bijv. verschijnselen behorend tot het terrein der continuummechanica en de veldentheorie. De toe te passen wiskunde legt het accent op methoden uit de analyse waarbij de numerieke aspekten een belangrijke rol kunnen spelen.

2. De technische richting

Technisch duidt op de realisering van in dit geval niet bedrijfskundige werkwijzen. Deze kunnen zowel een materieel resultaat tot gevolg hebben. Het ontwikkelen van algorithmen voor specifieke technische problemen moet bijv. tot de laatste kategorie gerekend worden. De te gebruiken wiskunde is gericht op het verkrijgen van procedures en numerieke resultaten, gebruikmakend van analytische en algebraïsche methoden. Met name behoort hiertoe de studie in de computerscience of informatica.

3. De bedrijfskundige richting

Dit is een gebied, waarbij het gaat om het onderzoeken, ontwerpen en bestuderen van een bedrijf opgevat als een systeem. Daarbij komt het optimalisatieprobleem aan de orde: Hoe kan een bedrijf zo goed mogelijk funktioneren? De toe te passen wiskunde bestaat onder andere uit de stochastiek en is gericht op het simuleren van systemen en informatiestromen, veelal met behulp van een digitale automaat.

Aangezien de baccalaureaatsstudie veel minder gespecialiseerd is dan de doktorale, is daar slechts sprake van een tweetal oriëntaties, te weten de:

Technisch-Fysische, welke zeer geëigend is voor de eerder geschetste computerdeskundige en de Bedrijfskundige, welke vooral bedoeld is voor de opleiding van een breed georiënteerd bedrijfskundig systeem-analist.

Laten we nu eerst de baccalaureaatsstudie eens wat nader bekijken. Na de algemene propaedeuse, die voor alle studenten gemeenschappelijk is kan de student de studierichting toegepaste wiskunde kiezen. De student moet dan eerst de wiskundige vakpropaedeuse afleggen om daarmee zijn geschiktheid voor deze studie te bewijzen. Na het behalen van dit P_2 examen vangt dan de eigenlijke baccalaureaatsstudie aan, die drie semesters duurt. In het eerste semester krijgen de studenten nog allemaal hetzelfde programma, waarna in het tweede semester de differentiatie in de aangegeven oriëntaties plaatsvindt. Het derde semester blijft dan in hoofdzaak gereserveerd voor het afleggen van de baccalaureaatsopdracht.

Deze opdracht bestaat uit:

a. een onderzoek, in het algemeen voorafgegaan door een literatuur studie, waarbij gebruik wordt gemaakt van een analoge of digitale rekenmachine;
b. een verslag van dit onderzoek;
c. een colloquium-voordracht betreffende dit onderzoek.

Voor de technische en fysische vakken is uiteraard een keuze gemaakt uit die vakken waaruit de toepassing van de wiskunde duidelijk blijkt. In de vakpropaedeuse zijn dit vrijwel uitsluitend natuurkundig getinte vakken terwijl in de baccalaureaatsstudie bijv. regeltechniek en netwerkanalyse zijn opgenomen. Daarnaast zal door de student deel te laten nemen aan projekten aandacht worden besteed aan de integratie van wiskunde en techniek; dit is een van de meest essentiële onderdelen van het gehele studiepakket, waarbij de samenwerking van de technische en wiskundige staven noodzakelijk is.
Vatten we het geheel samen, dan krijgen we het volgende schema.

Ten aanzien van de Wiskunde:

1.1 en 1.2	AP	
2.1 en 2.2	VP	
3.1	Kernprogramma Wiskunde	
3.2	Technisch-Fysisch	Bedrijfskundig
4.1	Baccalaureaatsopdracht	

Ten aanzien van de Techniek:

1.1 en 1.2	AP	
2.1 en 2.2	VP (Natuurkunde)	
3.1	Kernprogramma Technisch-Fysisch	Kernprogramma Bedrijfskundig
3.2	Keuzeprogramma Technisch-Fysisch	Keuzeprogramma Bedrijfskundig

De student, die zijn baccalaureaatsdiploma behaald heeft kan indien hij dit wenst aan de hogeschool verder studeren ter verkrijging van de graad van wiskundig ingenieur. Deze studie zal onder leiding staan van een afstudeerhoogleraar, in overleg met wie het studieprogramma moet worden samengesteld. Voor dit studiepakket gelden een aantal minimum eisen voor zover het het aantal te bestuderen vakken betreft. Ten behoeve van het kunnen maken van de ingenieursopgave zal in het algemeen hier niet mee volstaan kunnen worden.

Deze minimum eisen komen op het volgende neer:
400 uur wiskundevakken (8 semesteruur), college Wijsbegeerte van de Wiskunde en het college Symbolische Logica;
400 uur technische vakken;
200 uur maatschappijwetenschappen;
minstens 48 middagen projektwerk.

Voorzover het de wiskundevakken betreft kan een keuze gemaakt worden uit een daartoe opgestelde lijst.

De studie tot wiskundig ingenieur via een technisch baccalaureaat is natuurlijk zeer verschillend van de juist besproken doktorale opleiding; immers het is de bedoeling, dat het eindprodukt van beide opleidingen geen wezenlijke verschillen vertoont. Om dat te bereiken is het noodzakelijk gedurende het eerste jaar van deze opleiding veel aandacht te besteden aan het verbreden en verdiepen van de wiskundekennis. Dit zal worden ondersteund door een, afhankelijk van het verworven baccalaureaat en de gekozen richting, aantal geschikt gekozen fysische, technische en bedrijfskundige keuzevakken. In het tweede jaar van deze studie volgt dan nog een pakket van minimaal vereiste omvang voor zowel de wiskundige als de technische vakken. Deze lopen parallel met de ingenieursopdracht en zullen in het algemeen daarop betrekking hebben.
Ook hier zijn de colleges "Wijsbegeerte van de Wiskunde" en "Symbolische Logica" weer verplicht evenals minstens 48 middagen projektwerk.

Voor deze studie geldt derhalve het volgende schema:

Ten aanzien van de Wiskunde:

sem.	Fysische richting	Technische richting	Bedrijfskundige richting
4.2		B a s i s v a k k e n	
5.1	Kernprogramma	Kernprogramma	Kernprogramma
		P r o j e k t w e r k	
5.2	Keuzeprogramma	Keuzeprogramma	Keuzeprogramma
6.1		I n g e n i e u r s o p d r a c h t	

Ten aanzien van de Techniek:

4.2 5.1 5.2	Fysische keuzevakken	Technische keuzevakken	Bedrijfskundige keuzevakken

De samenhang van het studieprogramma met de eisen geformuleerd ten aanzien van het beeld van de wiskundig ingenieur.

Het lijkt mij juist thans terug te komen op de eisen, die wij hadden geformuleerd als aanvulling op die van Timman. Waar komen deze nu tot uiting in het studieprogramma?
Eis één ten aanzien van de maatschappelijke implicaties wordt gedeeltelijk vervuld doordat de student naast het normale pakket maatschappijwetenschappelijke vakken de colleges "Wijsbegeerte van de Wiskunde" en "Symbolische Logica" moet hebben gevolgd. Het eerste zal tevens de aandacht vestigen op de cultureel-maatschappelijke en menselijk-historische aspekten van de wiskunde, zo mogelijk toegelicht aan de hand van een concreet geval. Het tweede zal ingaan op de structurele aspekten van de mathematica en meta-mathematica. Daartoe behoren ook de formele systeemtheorie en bijv. de ethiek.

Het is, geloof ik, belangrijk te stellen dat de vervulling van eis één thans ook op andere wijze geschiedt of althans kan geschieden. De jonge mens is veel meer maatschappijbewust geworden. Dit houdt in, dat een onderwijsafdeling waarvan de stafleden hun eigen indrukken van de maatschappelijke omstandigheden van het beoefenen van het vak inbrengen, er zeer veel bij kan winnen, deze indrukken te spiegelen aan de verwachtingen van die van de student. Door dit in de afdeling te institutionaliseren, zoals dit in de thans aan de gang zijnde zogenaamde democratiseringsprocedures het geval is, wordt bereikt dat de maatschappelijke gerichtheid een vanzelfsprekend onderdeel van de studie kan worden.

Eis twee, ten aanzien van een zodanige basiskennis, dat de ingenieur in staat blijft zelfstandig de verdere ontwikkelingen te blijven volgen is moeilijk op concrete wijze tot uiting te brengen. Het veronderstelt een staf, die steeds zelfwerkzaam blijft op de nieuwste gebieden en die er voor zorgt dat nieuwe resultaten van algemeen belang in het onderwijs worden opgenomen. Het lijkt ons, dat dit zelfwerkzaam zijn op de meest geëigende wijze kan geschieden in onderzoekprojekten. Door de studenten bij deze projekten in te zetten wordt de techniek van het zelfstandig werken overgedragen en daarmee het beoogde doel bereikt.

Tevens wordt op deze manier op ongekunstelde wijze voldaan aan de geformuleerde eis ten aanzien van het werken in teamverband.

We zijn er ons van bewust, dat de realisatie van de projektgedachte een tijdrovende zaak is, maar daar staat tegenover dat met de realisatie van deze gedachte een dermate wezenlijke bijdrage wordt geleverd tot een ons inziens geslaagde opleiding tot wiskundig baccalaureus en ingenieur, dat de daaraan te besteden tijd meer dan gewettigd is.

Het is, lijkt mij, vrij overbodig te verklaren, dat wij het zeer op prijs zouden stellen, wanneer de industrie

ons bij het realiseren van deze projektgedachte behulpzaam zou zijn. Zij zou onderwerpen voor deze projekten kunnen leveren; medewerkers de vrijheid kunnen geven aan projekten deel te nemen, tot haar en ons voordeel; zij zou de studenten door het formuleren van zinvolle stageopdrachten in overleg met onze medewerkers die de stages behartigen tot een voorbereiding op en tot een afsluiting van projektwerk kunnen brengen.
Dit brengt mij nu vanzelf tot het kernpunt van mijn thema.

De technologische behoefte aan wiskunde

Waartoe dient nu deze opleiding of anders gezegd: Wat is de rol van de wiskunde in het technologisch gebeuren of, ruimer nog, in het maatschappelijk leven?

Het is, dacht ik, duidelijk dat nog steeds veel van de technologie berust op de kennis van fysische processen. Tot voor tien jaar waren deze processen theoretisch eigenlijk alleen toegankelijk door een benaderende beschrijving, die leidde tot zogenaamde lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Maar zelfs dan kon slechts in zeer eenvoudige gevallen een kwantitatief resultaat worden verkregen. De komst van de computer heeft hier tot een revolutionaire ontwikkeling geleid. We verkeren nu juist in het stadium, dat met behulp van grote snelle computers de oplossingen van deze lineaire vergelijkingen in de meeste gevallen kunnen worden verkregen. Hiermede hangt samen, de thans overal aan het licht tredende ontwikkeling van berekeningsmethoden, op basis van reeds beschreven wiskundige modellen van fysische processen.

Er is echter meer. De rekenmachine en de numerieke wiskunde in zijn huidige ontwikkeling stellen ons in staat ook aanzienlijk betere beschrijvingen van het fysische gebeuren te gebruiken. Dit leidt meestal tot het onderzoek van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. De interpretatie van de verkregen numerieke resultaten heeft veelal echter niet meer dan een geloofswaarde, omdat het wiskundige fundamentele onderzoek van deze

vergelijkingen nog niet ver gevorderd is en de komende jaren nog wel veel van de tijd en energie van de wiskundigen zal vergen.
Daarmee zal het u duidelijk zijn, dat de mathematische fysica, hoewel het de zogenaamde klassieke tak is van de toegepaste wiskunde, nog springlevend is.

Terwijl kan worden gesteld, dat tot voor enige jaren de computer in feite als niet veel anders dan een ontzaglijk snel en groot rekentuig werd gebruikt en dus een hulpmiddel was, dat in principe door andere hulpmiddelen kan worden vervangen, is sindsdien een geheel andere ontwikkeling op gang gekomen. De computer wordt meer en meer als integrerend bestanddeel van allerlei processen gebruikt. Hoe komt deze verandering tot stand? Om een computer te kunnen gebruiken moet hij geprogrammeerd worden, daarvoor is een of andere code noodzakelijk. Hoe gemakkelijker deze code is des te gemakkelijker is het van de machine gebruik te maken. Maar allerlei technische en bedrijfskundige problemen hebben hun eigen vaktaal en vereisen daardoor als het ware hun eigen computertaal. Deze worden dan ook ontwikkeld. Om ze echter op één en dezelfde machine te kunnen draaien is het noodzakelijk, dat ze omgezet kunnen worden in de taal van de machine. Dat vereist weer speciale vertaalprogramma's. Hiermede begint het tijdperk van de studie van de structuur van talen. Tegelijkertijd komt allerlei hulpapparatuur tot ontwikkeling die de mogelijkheden van de computer aanmerkelijk vergroten; bijvoorbeeld tekenapparatuur en de mogelijkheid een computer vanaf een afstand te bedienen, zelfs vanaf meerdere eindstations. Dit echter op zijn beurt betekent, dat de ontwikkeling van de programmatuur steeds verder gaat, immers er moeten nu programma's komen die op kunnen letten dat de aangeboden problemen in de juiste volgorde kunnen worden verwerkt bijvoorbeeld volgens een van te voren in de machine ingebouwd prioriteitenschema. Tevens komt een ontwikkeling op gang, waarbij menselijke handelingen, die neerkomen op het nemen van beslissingen op grond van aangeboden informatie worden geprogrammeerd en daarna automatisch door de machine uitgevoerd. De computer is een beherend element geworden. Op het ogenblik is deze ontwikkeling in volle gang en het mag verwacht worden dat zij speciaal in de bedrijfskundige sector nog tot veel veranderingen zal leiden. Daarvoor moeten eerst nog meer bruikbare wiskundige modellen worden ontwikkeld, die kunnen worden gebezigd om het bedrijfsgebeuren te analyseren en te voorspellen.

Terwijl de hier geschetste ontwikkeling in dit land op gang kwam, was zij in Amerika al verder gevorderd en had er geleid tot speciale opleidingen in de zogenaamde computer-science. Meestal zijn deze opleidingen echter betrekkelijk eng van karakter en ze voldoen dus zeker niet aan onze eisen ten aanzien van de aangebrachte basiskennis.

Het is evenwel dunkt mij vanzelfsprekend dat bij het formuleren van de nieuwe opleidingen in de wiskunde met het bovenstaande nadrukkelijk rekening is gehouden. Dit krijgt nog meer gewicht wanneer de grote rekenmachinefabrieken verklaren, dat zij binnen een aantal jaren een behoefte aan enige honderden in dit vakgebied opgeleide academici zullen hebben. Gezien het feit, dat in de meeste gevallen de specialisatie het beste in de werkkring zal kunnen plaatsvinden, lijkt de baccalaureaatsstudie hiervoor van nature aangewezen. Het lijkt ons dat deze studie ook bijzonder aantrekkelijk moet zijn voor meisjes, die naar gebleken is uitermate geschikt zijn voor het hier bedoelde soort werk. Misschien zou op deze wijze een einde kunnen komen aan de merkwaardige toestand, dat vergeleken bij het buitenland hier ontzettend weinig vrouwen werkzaam zijn of studeren in een wiskundig gekleurd vakgebied.

De wiskundige ondergrond die vereist wordt voor de realisatie van door de computer mogelijk gemaakte ontwikkeling bestrijkt een groot gebied van wiskundige kennis, met name in dat van de fundamenten: te weten de mathematische logica, de theorie van de berekenbaarheid en beslisbaarheid en de algebraïsche strukturen. Ook ontstaan er nieuwe gebieden, zo zien we bijvoorbeeld de zogenaamde systeemtheorie ontstaan, die het mogelijk moet maken op abstrakte wijze de eigenschappen van complexe, samenhangende systemen te evalueren. Hier is wel een beginpunt aan te wijzen doch zeker nog geen eindpunt. Nauw hiermee samen hangt de mathematische regeltheorie van deterministische of stochastische systemen. Hiervoor is uiteraard een kennis van de theorie van stochastische processen noodzakelijk, een theorie die op zichzelf een vrijwel onafzienbaar werkterrein biedt. Denkt u in dit verband bijvoorbeeld ook aan alle fijnzinnige statistische tests die zijn ontwikkeld en nog ontwikkeld worden om tot een beoordeling van een bepaalde situatie of resultaat te geraken.

In onze maatschappij vragen vele groepen (fabrieken, maatschappijen, ziekenhuizen enz.) om een in een of andere zin optimaal resultaat. Dit steunt heden ten dage op de nog steeds groeiende verzameling van onderzoekingen op het gebied van de optimalisatietheorieën waartoe bijvoorbeeld het lineair en dynamisch programmeren behoren. De termen houden al in, dat we voor toepassingen aan de computer moeten denken.

De ontwikkelingen, die ik hier beschrijf en die in vele opzichten onvoltooid zijn hebben er toe geleid dat vele, tot voor enige jaren nog als absoluut toepassingsloos gedachte, gebieden der wiskunde een belangrijke rol zijn gaan spelen in die toepassingen. Het lijkt er wel op alsof de wiskundigen niet meer snel genoeg nieuwe wiskundige ontdekkingen kunnen doen om de enorme vraatzucht van onze consumptieve maatschappij te kunnen bevredigen.

Slotwoord

Ik hoop, dat ik er in het voorgaande in geslaagd ben u iets te laten proeven van de grote invloed die de beoefening van de toegepaste wiskunde kan hebben op de verdere ontwikkeling van de technologie en dus van de maatschappij.

We leven in het tijdperk van een sterk toenemende kwantificering op basis van wiskundige kennis en de uitwerking daarvan is zeer wel merkbaar. Immers zij die niet vertrouwd zijn met de wiskundige ondergrond van deze kwantificering zullen deze ondergaan als een niet stuitbare en mysterieuze uitoefening van macht over de maatschappij. Men wordt geregeerd door principes, toegepast door professionele lieden, die door niet ter zake kundigen nauwelijks meer gecontroleerd kunnen worden. De maatschappij moet op deze wijze wel het gevoel krijgen overgeleverd te zijn, en als reaktie daarop de eis stellen op de meest direkte wijze betrokken te willen worden bij het stellen van de normen waaraan de nieuwe ontwikkelingen moeten voldoen. Ik geloof dat dit goed is, mits het op constructieve wijze gebeurt, dat wil zeggen, mits wij ons er van bewust blijven, dat wij ons allen moeten inspannen voor ons allen, ook als wiskundigen.

14. Jaap Seidel

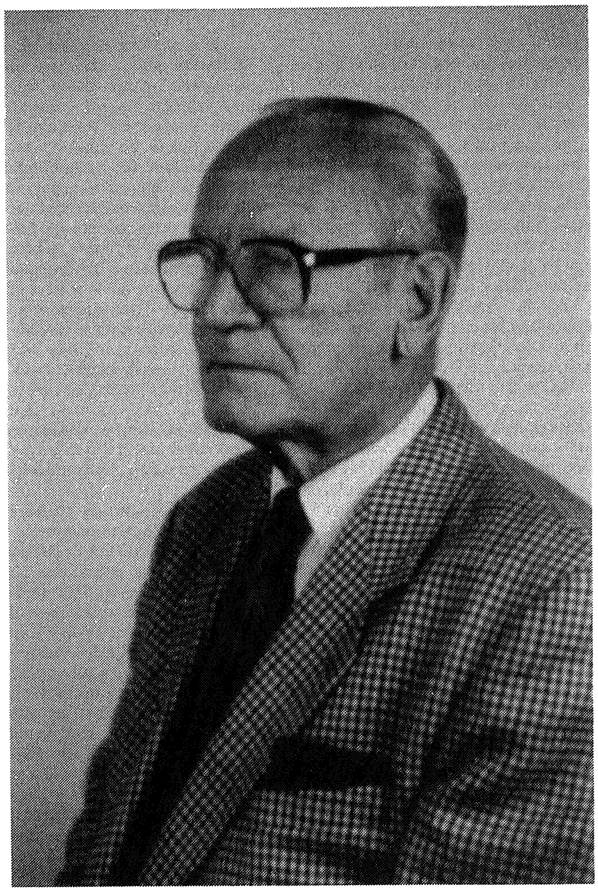
Johan Jacob Seidel, geboren in 1919, kon zijn studie wiskunde in Leiden niet afronden wegens sluiting van de Leidse universiteit in 1941. Hij zette zijn studie voort aan de de Vrije Universiteit in Amsterdam, waar hij in 1946 afstudeerde. In 1948 promoveerde hij in Leiden bij Haantjes. Seidel legde zich toe op de meetkunde en grafentheorie. Seidel houdt van meetkunde, op de ouderwetse manier van de "oprechte amateur": de inspiratie die de wiskunde niet ontberen kan. Die noodzakelijke inspiratie komt hier nauwelijks aan bod, omdat deze reader geheel is toegespitst op het motief van maatschappelijke dienstbaarheid.

Aan de TH Delft werd na de tweede wereldoorlog het propadeutisch onderwijs in de wiskunde, wegens aanhoudende klachten over de veel te hoge uitval, veel intensiever opgezet door het aantrekken van instructeurs om de practica te begeleiden. Seidel die tot dan toe werkzaam was geweest als leraar werd in 1950 benoemd tot instrucuteur en al spoedig tot hoofdinstructeur. Bij de voorbereiding van de Technische Hogeschool in Eindhoven werd hij aangetrokken als adviseur en benoemd tot hoogleraar in de wiskunde. Zo werd Seidel vormgever en godfather van de Eindhovense onderafdeling wiskunde. In samenwerking met Veltkamp bereidde hij de Eindhovense variant van de Wiskundig Ingenieursopleiding voor.
Had Veltkamp uit de VS de slogan "Vigor, not rigor" meegenomen, Seidel ging door op de daar verkregen informatie dat aan het Amsterdamse Shell-Laboratorium vooraanstaand onderzoek in de lineaire programmering werd verricht - uiteindelijk kwam hieruit de benoeming van Benders in Eindhoven voort -. Dat was karakteristiek voor Seidel: hij wist een bijzonder sterk team van wiskundigen op te bouwen.
De hier afgedrukte voordracht biedt een terugblik waarin hij de Nederlandse ontwikkeling van de Wiskundig Ingenieursopleiding samenvat voor de *Conference on Mathematical Education and Engineering* (London, 20-2-1973), IMA, the Institute of Mathematics and its Applications.
'The mathematical education of engineers, and the education of mathematical engineers, in the Netherlands', *Bulletin of the IMA* **IX**, 305-307.

The mathematical education of engineers, and the education of mathematical engineers, in the Netherlands

by

J.J. Seidel



Text of a lecture for the Conference on Mathematical Education and Engineering, London, 20-2-1973, The Institute of Mathematics and its Applications.

The Mathematical Education of Engineers, and the Education of Mathematical Engineers, in the Netherlands*

J. J. SEIDEL

Technological University, Eindhoven, The Netherlands

1. The Dutch educational system for engineers

ENGINEERING education in Holland began in 1600 at the University of Leiden, and was initiated by the famous Simon Stevin, the prototype of the mathematician, astronomer, book-keeper, mechanical, fortress and hydraulic engineer. The first professor was Ludolf van Ceulen, known for his calculation of π to 32 decimal places (first published on his grave stone; the Germans still call π the "*LudolphischeZahl*"). Although at that time Latin was the scientific language, the Dutch Republic wished to make science accessible to a broader public, to apply it and to profit by it and Professor van Ceulen, therefore, taught in Dutch. They were successful in this Dutch golden age, and the English had to face the consequences. However, when 70 years later the professors in engineering acquired the right to teach in the more worthy Latin language, teaching in Dutch was modified, and soon the Dutch had to face the consequences.

Ludolf van Ceulen had to restrict his teaching to subjects of direct use. It was stated officially that the sphere, ellipse, parabola and hyperbola were useless to the engineer, hence unnecessary. It is interesting that in later centuries the subject of conics and quadrics developed into a cult of mediocre mathematics which was considered to be especially suited for engineering education. Nowadays, this wave is almost over. However, the restriction to directly useful and non-abstract subjects is a problem we are faced with even today.

The engineering school in Delft, founded in the mid-19th century, was officially converted into a Technological University (Technische Hogeschool) in 1905. After the second world war, when the need for industrialisation was felt as one of the consequences of the loss of our colonies, the second Technological University was founded in Eindhoven in 1957, and the third in Twente in 1964.

Although these institutes had university status, they were never allowed to add other faculties, *e.g.*, medical, in spite of pressures. However for technical higher education this separation from the traditional academic style was experienced as a liberation and gave way to a free development. Especially today, at the end of the golden after-Sputnik-decades, we feel this strongly.

On the other hand, technical science is still not fully understood. For instance, some time ago I had trouble in explaining that antenna theory was a respectable scientific subject, not restricted to erecting things on the roof. In addition, we have the impression that the best pupils at secondary school are advised to enter a so called "real" university. It is sad to observe that during their studies these students develop in applied fields and must be content with fewer facilities and less guidance than they would have had in a technological environment.

Apart from the university education for engineers there is also professional education. For the same age group, starting at about 18, there are 27 "higher technical" professional schools in the Netherlands. Here the important "middle class" of technical engineers is educated in a 4-year programme which is less theoretical and more practical than the university curriculum. In a few schools a curriculum for computing science is offered. The syllabus, developed in cooperation between teachers from higher technical schools and university, is set up to fill the need for programmers of computer-oriented software. Also in the other higher technical, as well as the "economic-administrative" professional schools, the applications of computer methods receive growing attention.

A strange development is resulting. On the one hand these technical schools tend to increase their theoretical strength, partly in response to professional needs, partly in order to meet international standards. On the other hand, for the universities, there is a proposal for law which will restrict the university education to a 4-year programme. So there is a tendency towards what is sometimes called integration. But I shall restrict myself to the present situation at the universities.

2. Mathematics for the engineer

It is interesting to observe how, through the centuries, there has been a shift of subjects from the higher to the lower forms of education. The methods for problem solving at university level in Simon Stevin's time, now have disappeared or belong to the domain of the primary school and, I am sorry to say, are sometimes killed there. The pre-war analytic geometry and elementary calculus have shifted to the secondary school syllabuses. Descriptive geometry, once the major tool for approximation in design (and not for the development of geometric intuition) disappeared from all syllabuses, although a little late. Nowadays, the compulsory syllabus for the average engineer consists of advanced calculus, including linear algebra, Fourier analysis, statistics, computing with an Algol course and complex variables, to the extent of some 10 hours per year lectures in total, and the same amount for working groups. The lectures are given for audiences of between 100 and 250 students; the working groups, which follow the lectures closely, consist of at most 40 students and are tutored by experienced teachers. You are now confronted by a firm believer in lectures for large but not too large audiences for standard university courses. The reasons for my conviction are of an economic nature. If well selected, one teacher is better than the average of 10 teachers. The upper bound for the audience is obtained by the necessary condition that the lecturer should remain in contact with his audience.

Standard courses, designed for thousands of students, are subject to the danger of becoming a routine, especially in view of the standard examinations which follow them. However, renewing changes in the secondary school

* Paper presented at the Conference on Mathematical Education and Engineering, London, February 20th-21st, 1973.

curriculum, and developments in the engineering science, force one to reconsider the syllabuses after a period. This is what will happen in the next few years. The school reform has come to the upper levels of the secondary school and this will have its consequences for the mathematics curriculum for the engineers. There are more reasons for this reconsideration, because of the growth of the applications of set theory and algebra in the engineering sciences, along with the traditional applications of analysis.

In the last section we reviewed the standard undergraduate programme, its problems and its development. But there is more mathematics to be assimilated by the interested advanced engineering student. Non-theoreticians may follow courses in, for example, numerical methods, applied statistics, optimisation and computer science. For the theoretically good students there are the courses from the mathematical engineering curriculum, which will be described shortly. In the early days of our university, when no syllabus for mathematical engineering had been set up, one of our chemical colleagues asked for some group theory for one of his students in quantum theory. One of the mathematicians took up the challenge and together with the student developed a course which still exists and is enjoyed by a limited number of specialised chemical and physical engineers. I am proud to say that the chemical student was reasonably well equipped when he came to England to continue his studies.

3. A curriculum for mathematical engineering

Before 1950 mathematics at Dutch universities was mostly "pure." Applied mathematics was, apart from some rare converted mathematicians, mainly developed by representatives from other disciplines, such as physicists and engineers. However, in the last 15 years there has been a considerable change. Curricula for mathematical engineering have been set up at the technological university in Delft (1955), Eindhoven (1962) and Twente (1968).

In addition, the university of Groningen has a programme for theoretical engineering, including applied mathematics, and almost all other universities now have one or two chairs in applied mathematics, numerical analysis and statistics. I shall describe mathematical engineering in my own institution as at present. Delft and Twente are similar.

The philosophy behind the syllabus has been stated as follows.

The domain of the mathematical engineer is the approach, with mathematical tools, of problems in technology, management, physical and information sciences. The word "engineer" indicates the type of problem involved. The word "mathematical" refers to the methods of investigation. The combination of these words reflects the union of method and problem, which is essential for the philosophy behind the programme. In recent years the active participation both in the search for problems and in the development of new mathematical tools was stressed.

The curriculum at present officially covers 5 years, and 3 sections, ended by "the propaedeutic examen" (after 1 year), "the candidate examen" (after 3 years) and "the engineer's examen" (after 5 years). In the first 3 years students study the compulsory mathematics and physics for the other engineers, and a more fundamental course consisting of an introduction to mathematical methods (sets, groups, etc., aimed at the use of mathematics as a scientific language), some algebra and a substantial amount of analysis. In addition the candidate examination includes introduction to mathematical statistics, mechanics, the art of programming, numerical analysis and discrete mathematics; a large proportion of physics and electronics is also included. I shall describe the nature of the course and some problems we face. There is no course in topology as such, but topological notions are introduced whenever they are needed as a tool for analysis. Analysis is of a pragmatic nature, and is orientated towards the harder parts and to problem solving. We are not afraid of abstraction in the good sense, when it serves a better understanding and overview, but we are allergic to general abstract nonsense. The dichotomy between the standard mathematics for everyone and the fundamental arose out of reasons of principle and of practice, but is not likely to stay forever. We are not certain that this is a main reason for the considerable drop-out of students in the first years. There may be other reasons for this drop-out, because in our country there is no special selection at university entrance.

However, our main problem with the syllabus in the first 3 years is not the theoretical part, but consists in finding appropriate practical work which, at a non-advanced level, is representative for engineering applications of mathematics. At first the workshop was considered to be a good confrontation, but was found not to be. The physics laboratory work has also turned out to be unsatisfactory. Yet, we are convinced that the mathematics student, who intrinsically runs the risk of wanting to keep his hands clean, should be faced with practical work from other disciplines. For these reasons a group is working on a new set-up of practical work directed to the design of mathematical models of any kind. This should provide a source of good problems on a medium level including introductory examples for what is to follow and, eventually, for the profession of the mathematical engineer.

In the second half of the curriculum the student specialises in one of the following: mathematical physics, mechanics, statistics and operational research methods, numerical analysis, computing science and a "free" direction (combinatorics, algebra, functional analysis, etc.). Apart from following a more specialised course of lectures and seminars, his main work is on a real problem for about 9 months, on which he must report in a kind of master's thesis. We now have some 75 of such theses available. This may concern physical-technical problems with analytic methods, the evaluation of data from mathematical models of a stochastic nature, mathematical and numerical aspects of problems from decision and control, automatic manipulation of numerical and non-numerical data, the theory of programming, the construction of software, problems from graph theory and error correcting codes, and also problems of a more abstract nature. Sometimes the problems come from other engineering departments or from industry. The use of computers is almost always an essential tool. The department, and its staff, puts much effort in guiding the students during this period, which should give the finishing touch to the shaping of the mathematical engineer.

I shall leave untouched the question of what will become of this if the proposal for law will be accepted, which will reduce the curriculum to 4 years without, it seems, providing a graduate programme for at least a minority of the students.

The abilities acquired by the mathematical engineer during his studies should make him well suited for a career in industry, in research laboratories (as a specialist or as a theoretical member of a team), in computer centres, etc. In addition, his knowledge of mathematics as a tool for other subjects may serve educational purposes at various levels. I am unable to give reliable statistics about the careers of our former students: military service, the young age of the profession, the needs of the universities to build up staff in recent years and the present bad job situation obscure the situation. However, I have no pessimistic data about unemployment. There is no unanimous opinion about the level the mathematical engineer should eventually have. The traditional feeling is that "among industrial mathematicians there is no place for the average man." This still holds true for careers where the creative part is dominant. However, not every mathematical job needs a creative genius, and I cannot see why the mathematician in a team should be different in quality from his colleagues in other disciplines, if he has the right attitude towards the work he is expected to carry out, and a good feeling for mathematics as a tool. So, with slight hesitation, I would say that the mathematical engineer should be educated to be a good scientist.

4. The department of mathematics at a technological university

I wish to conclude by commenting on the organisation of the department of mathematics at a technological university. Although this does not appear interesting, there is good reason to pay attention to it. Indeed, such a department is the home and the basis, from which the curriculum under discussion is guided and supported.

Traditionally, mathematics at Dutch universities had its place in the faculty of sciences, together with physics, astronomy and, at a greater distance, chemistry, biology, and so on. At the technological universities the situation was somewhat different. While the educational duties were restricted to supplying mathematics to the engineering departments, positions at the other universities were considered to be preferable.

So a young professor would start his career at a technological university, and after some time would be "promoted" to a professorship at a general university. This has changed completely with the introduction of the programme for mathematical engineering. Now, the department of mathematics at a technological university has its own educational tasks and its own responsibilities in research. Its position relative to the other engineering departments and to the mathematics departments at the other universities has been strengthened considerably. Let us consider the consequences of this changed position, also in view of possible future developments.

There are three main areas to be distinguished:

(*i*) analytic methods, including differential equations, its functions and its numerical approximations;

(*ii*) stochastic methods, including statistics, probability and operational research methods;

(*iii*) the methods of organising complexity, including computing science and methods of algebraic, combinatorial and logical nature.

These areas are interrelated in such a way that making a distinction is at the same time a plea for their coexistence. Three areas of mathematical methods have been distinguished, but the problems do not follow this dissection. Indeed, the aim of the department should be to create an atmosphere where the representatives of these areas can cooperate. Tolerance and readiness to help should be characteristics. On the other hand, the equilibrium between the streams should be carefully watched, and brought into line with the real needs. The boundaries with the other disciplines should be respected, and *l'art pour l'art* tendencies should be opposed. However, it should be a department of mathematics, and not of a particular kind of applied mathematics, from which later departments of statistics, of operations research, of mechanics and of computer science are separated. The mathematical sciences belong together, since their strength comes from mathematical methods and ideas which are not restricted to special applications in special disciplines. As a consequence, both the pure and the applied staff members should depart from the common philosophy to concentrate, in research and in teaching, on mathematical methods to be used as tools for the problems of society.

It is the attitude and the motivation that counts, and I am tempted to deny any further distinction between pure and applied mathematics.

MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis.* 1965.
1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening.* 1965.
1.3 J. Hemelrijk, J. kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek* 1966
1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden.* 1966.
1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde.* 1966.
1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1.* 1968.
1.6b B. Dorhout, J. kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2.* 1977. 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1.* 1968.
1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2.* 1970.
1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3.* 1971.
1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie.* 1968.
2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1.* 1967.
2.2. L. Dekker, T.J. dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2.* 1968.
3.1. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1.* 1967
3.2. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2.* 1968
3.3. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3.* 1968
4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen.* 1968
5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde.* 1968.
6. K.K. Koksma. Cursus ALGOL 60. 1969.
7.1 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 1.* 1969.
7.2 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 2.* 1969.
8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen.* 1969.
9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1970
9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1970
10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening.* 1970
11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren.* 1971.
12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra.* 1971
13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8.* 1971
14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie.* 1971
15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1972.
15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1973.
15.3 P.A. Beentjes. K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3.* 1975.
16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren.* 1973
16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60.* 1973
17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1.* 1973.
17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2.* 1973.
17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3.* 1976.
18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Songh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971.* 1973.
19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens.* 1973.
20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen.* 1976.
21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid.* 1975.
22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid.* 1976.
23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1.* 1976.
23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2.* 1977.
24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden.* 1975.
25 *Colloquium structuur van programmeertalen.* 1976.
26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1.* 1976.
26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2.* 1976.
27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden.* 1976.
28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems.* 1976.
29.1 J.C. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B.* 1976.
29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2.* 1977.
30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen.* 1983.
31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie.* 1976.
32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen.* 1976.
33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren.* 1977.
34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek.* 1977.
35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics.* 1978.
36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen.* 1977.
37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren.* 1978.
38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I.* 1979.
38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II.* 1979.
39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen.* 1978.
40 J. van Tiel. *Convexe analyse.* 1979.
41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations.* 1979.
42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen.* 1980.
43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus).* 1980.
44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations.* 1980.
45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur.* 1980.
46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1.* 1981.
46.2 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2.* 1981.
47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices.* 1981.
47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations.* 1981.
47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I.* 1981.
47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II.* 1981.
47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I.* 1981.
47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II.* 1981.
47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation.* 1981.
48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1.* 1982.
48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2.* 1982.
49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups.* 1982.
50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie.* 1982.
51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie.* 1983

CWI SYLLABI

1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde.* 1984.

2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories.* 1984.

3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions.* 1984.

4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1.* 1984.

5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2.* 1984.

6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories.* 1985.

7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening.* 1985.

8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization.* 1985.

9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations.* 1985.

10 Vacantiecursus 1986: *Matrices.* 1986.

11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes.* 1986.

12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener.* 1986.

13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2.* 1987.

14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school.* 1987.

15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen.* 1987.

16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1.* 1988.

17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987.* 1988.

18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening.* 1988.

19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX.* 1988.

20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1.* 1988.

21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2.* 1988.

22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3.* 1988.

23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer.* 1989.

24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde.* 1989.

25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw.* 1989.

26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories.* 1990.

27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen.* 1990.

28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren.* 1991.

29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat.* 1992.

30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras.* 1992.

31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie.* 1992.

32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992.* 1992.

33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu.* 1993.

34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC.* 1992.

35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal.* 1993.

36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra.* 1994.

37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus.* 1994.

38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader.* 1994.