



## **CWI Syllabi**

### **Managing Editors**

J.W. de Bakker (CWI, Amsterdam)  
M. Hazewinkel (CWI, Amsterdam)  
J.K. Lenstra (Eindhoven University of Technology)

### **Editorial Board**

W. Albers (Enschede)  
P.C. Baayen (Amsterdam)  
R.C. Backhouse (Eindhoven)  
E.M. de Jager (Amsterdam)  
M.A. Kaashoek (Amsterdam)  
M.S. Keane (Delft)  
H. Kwakernaak (Enschede)  
J. van Leeuwen (Utrecht)  
P.W.H. Lemmens (Utrecht)  
M. van der Put (Groningen)  
M. Rem (Eindhoven)  
H.J. Sips (Delft)  
M.N. Spijker (Leiden)  
H.C. Tijms (Amsterdam)

CWI  
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands  
Telephone 31 -20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),  
telefax 31 -20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Vacantiecursus 1991  
Meetkundige structuren



**Centrum voor Wiskunde en Informatica**  
Centre for Mathematics and Computer Science

1980 Mathematics Subject Classification: 51-01, 51-03.  
ISBN 90 6196 399 0  
NUGI-code: 811

Copyright © 1991, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam  
Printed in the Netherlands

## Inhoud

Ten geleide <i>A.W. Grootendorst</i>	
De meetkundige algebra bij Euclides <i>A.W. Grootendorst</i>	1
Rondom de $s$ -formule <i>H.J.A. Duparc</i>	27
Meetkunde en groepen <i>J.H.M. Steenbrink</i>	37
Configuraties en computers <i>J. Simonis</i>	43
Puzzels, permutaties en pariteiten <i>J. van de Craats</i>	57
Meetkunde in de vierde dimensie <i>F. van der Blij</i>	71
Symmetrie problemen (Symmetrische problemen en problemen in het begrijpen van symmetrie) <i>M. Hazewinkel</i>	91



## TEN GELEIDE

Van de oudchristelijke geleerde Anatolius (3e eeuw na C.) is de volgende vraag (met antwoord) overgeleverd: "Hoeveel takken van de wiskunde zijn er?"

Het antwoord luidt dan: "Er zijn twee hoofdtakken van deze zeer geëerde en voorname wetenschap nl. arithmetica en geometria".

In de vacatiecursus 1990 stond de getallentheorie centraal; het onderwerp van de cursus 1991 (de 45e in successie!) is van meetkundige aard en werd aangekondigd onder de titel "Meetkundige Structuren". Deze cyclus omvat een breed spectrum van onderwerpen, breed naar tijd en naar aard.

Zo staat in de eerste voordracht een onderwerp uit het klassieke werk de "Elementa" van Euclides (ca. 300 v.C.) centraal, terwijl de voordrachten "Meetkunde en Groepen" en "Symmetrie problemen" direct aansluiten bij zeer recente literatuur.

Daarnaast zijn er ook de voordrachten: "Rondom de  $s$ -formule" en "Configuraties en Computers", die aansluitend bij werk uit de klassieke oudheid de daarin afgeleide resultaten generaliseren en moderniseren, waarbij zelfs de term "Computational Geometry" valt.

Ook het spelelement (de mens is homo ludens) ontbreekt niet: de befaamde kubus van Rubik wordt aan een meetkundige analyse onderworpen.

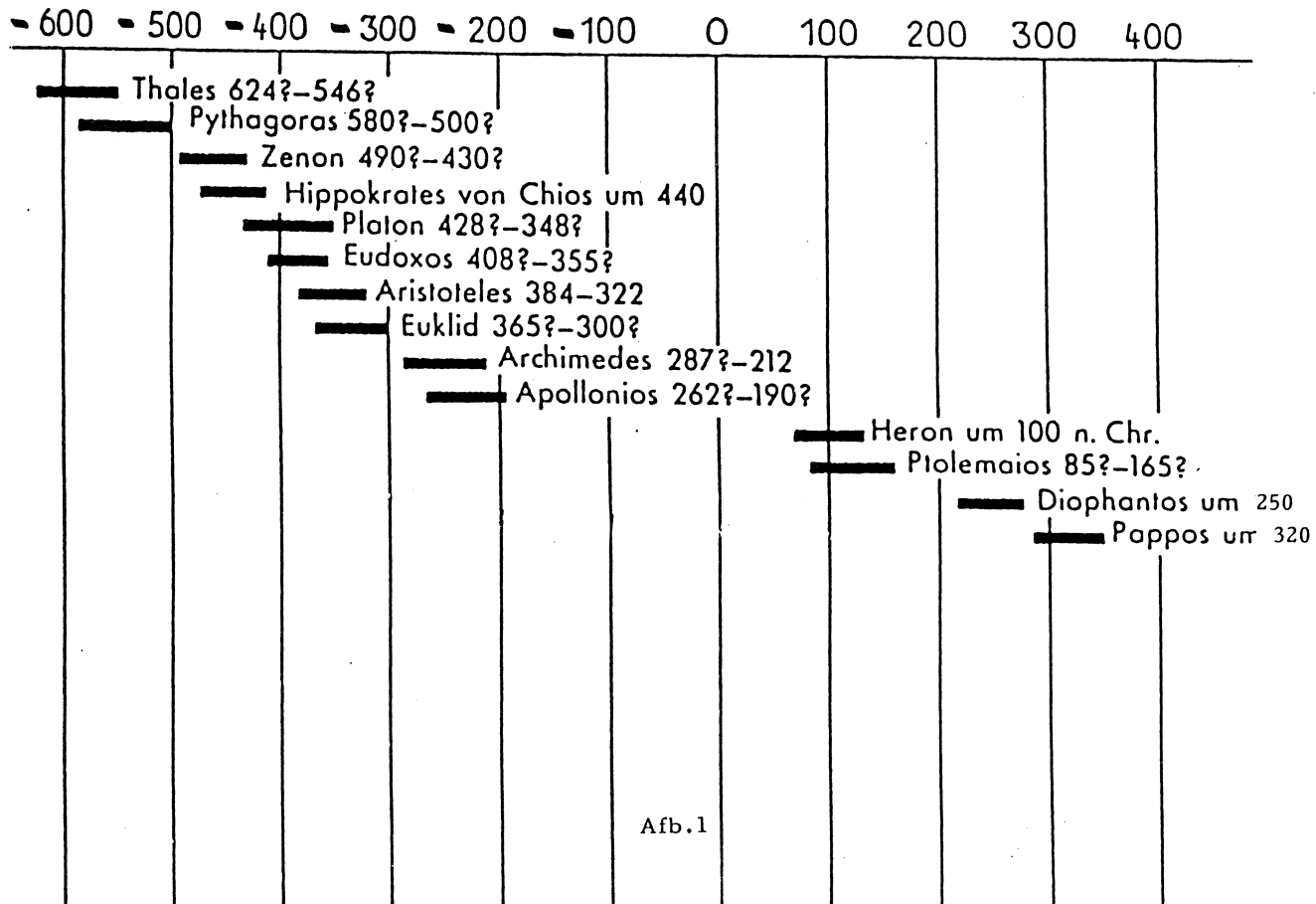
Tenslotte is er een levendige en speelse voordracht over de vierde dimensie die (d.w.z. die dimensie) ons voorstellingsvermogen te boven (of te buiten?) gaat. Film en computer zullen ons daarbij wegen wijzen.

Tijdens deze cursus wordt ook plaats ingeruimd voor zelfwerkzaamheid. Dit is immers in vorige jaren goed bevallen.

Evenals in andere jaren - en misschien dit jaar wel in het bijzonder - gaat het om onderwerpen die, eventueel door de leraren zelf daartoe pasklaar gemaakt, met succes aan leerlingen van het VWO kunnen worden doorgegeven.

Tenslotte dit: het is een goede traditie - maar zeker geen loze traditie - een woord van zeer hartelijke dank te adresseren aan de medewerksters en medewerkers van het CWI, die er ook dit jaar weer in slaagden in zo korte tijd zo'n fraaie syllabus te produceren. Hiervoor zeer veel dank!

A.W. Grootendorst





## De Meetkundige Algebra bij Euclides

A.W. Grootendorst

*Aardbeistraat 11  
2564 TM Den Haag*

### 1. ORIENTATIE IN DE TIJD

Een blik op de bijgevoegde tijdbalk (ontleend aan Behnke's Enzyklopädie der Elementarmathematik) leert ons dat de beoefening van de wiskunde in Griekenland inzette met de activiteiten van Thales van Milete (ca. 624-546) en diens leerling, de legendarische Pythagoras (ca. 580-ca. 500), geboren in Sidon in Klein-Azië, opgegroeid op Samos, met als belangrijkste periode in zijn werkzame leven het leiderschap van zijn school in Croton in Zuid-Italië. Beide deden hun basiskennis op gedurende jarenlange reizen door Babylonië en Egypte en het moet als zeker worden aangenomen dat Pythagoras op zijn "grand tour" de befaamde, later naar hem genoemde, stelling leerde kennen.

In deze tijdbalk vallen twee zaken op. In de eerste plaats een periode van circa 300 jaren, tussen 200 v.C. en 100 n.C., waarin geen wiskundigen van formaat optraden en het vrij abrupte einde van de beoefening van de wiskunde tegen de vierde eeuw van onze jaartelling, waarbij het centrum inmiddels verlegd was naar het Egyptische Alexandrië.

Hoe interessant een onderzoek naar de oorzaak van deze twee verschijnselen ook is, wij zullen dit laten rusten. Vermeld zij slechts dat de wiskunde via een omweg door de Arabische wereld, circa 1200 n.C. zijn definitieve rentree in de westerse wereld zou maken.

Onze aandacht zal zich in dit artikel richten op enkele problemen die voorkomen in de "Elementen" van Euclides (ca. 300 v.C.) en die later van groot belang zouden blijken.

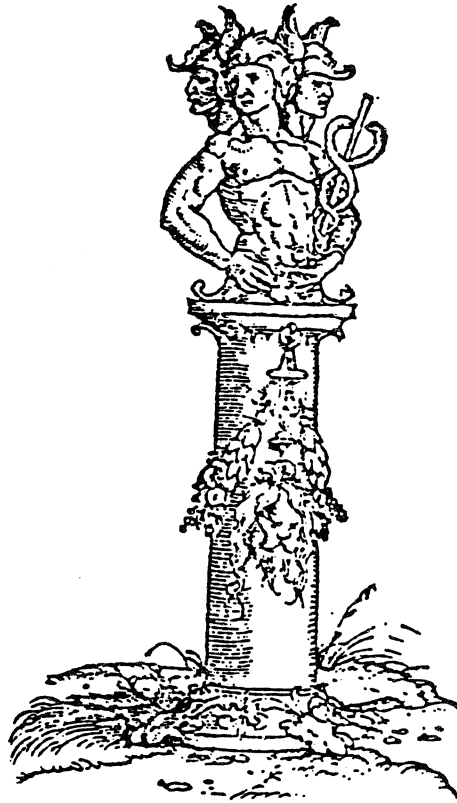
Dit laatste is in de Griekse wiskunde geen uitzondering. Men hoeft maar te denken aan de zgn. klassieke problemen: trisectie van de hoek, verdubbeling van de kubus en kwadratuur van de cirkel, alsook het probleem van het irrationale getal; alle zijn het vraagstukken waarop het definitieve antwoord eerst in de 19<sup>e</sup> eeuw, dus ruim 2000 jaren later, werd gevonden.

De Grieken verstonden bij uitstek de kunst: "to put the right questions".

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ  
 ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ  
 ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-  
 ΟΥΣΙΩΝ.

*Εἰς τὰ αὐτὰ ἢ πρῶτον, ἱεργυμμάτων Πρόκλου βιβλίου.*

*Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis  
 Mathematicis nonnihil.*



BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO  
 M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

## 2. DE BRONNEN

Een belangrijke bron van onze kennis van de Griekse wiskunde wordt gevormd door de "Elementa" van Euclides van Alexandrië. Over de persoon van Euclides - de vermaardste wiskundige aller tijden - is uitermate weinig bekend. Slechts dit: hij moet geleefd hebben na de leerlingen van Plato (427-347 v.C.), waartoe de beroemde Eudoxus van Cnidus (ca. 400-ca. 347 v.C.) behoorde en vóór of deels gelijktijdig met Archimedes (287-212 v.C.). Euclides is in hoofdzaak bekend door de "Elementa" (Grieks: "stoicheia"), maar daarnaast heeft hij ook over andere onderwerpen gepubliceerd, zoals: astronomie, muziektheorie, optica.

Deze "Elementa" omvatten 13 boeken, waarvan deel I t/m deel VI gewijd zijn aan de vlakke meetkunde, deel VII t/m deel X behandelen onderwerpen uit de getallentheorie en de leer van de verhoudingen, terwijl deel XI t/m deel XIII de stereometrie tot onderwerp hebben met als hoogtepunt de studie van de vijf - later naar Plato vernoemde - regelmatige (convexe) veelvlakken.

Ik schets deze inhoudsopgave vluchtig om het misverstand uit de weg te ruimen dat de "Elementa" uitsluitend over vlakke meetkunde zou handelen.

Van deze "Elementa" werd eerst in de 4<sup>e</sup> eeuw n.C. een officiële volledige editie uitgegeven door Theon van Alexandrië. Deze uitgave gold eeuwenlang als de standaardeditie, totdat in 1908 Peyrard in het Vaticaan een 10<sup>e</sup>-eeuws handschrift ontdekte dat teruggaat op teksten die ouder zijn dan die waarover Theon beschikte. Hierop zijn o.a. gebaseerd de Griekse textuitgave van Heiberg (Teubner uitgave) en de Engelse vertaling met uitstekend commentaar van T.L. Heath (Dover serie). Laatstgenoemde uitgave maakt de "Elementa" voor iedereen toegankelijk.

Natuurlijk mag de Nederlandse uitgave van onze landgenoot E.J. Dijksterhuis niet onvermeld blijven. Ook deze bevat een uitstekend commentaar, maar is geen volledige vertaling. Voor de boeken VII t/m XIII is dit werk - zoals de auteur zelf zegt - eerder een kritisch overzicht.

Voor een goed begrip zij opgemerkt dat de "Elementa" niet uitsluitend werk van Euclides zelf bevat. Integendeel, in feite gaat het hier om een compilatie van de destijds bekende wiskunde. Dit betekent o.a. dat veel van dit werk uit de school van Pythagoras en Plato stamt. Dit wist men al in de oudheid. Proclus (410-485) schreef in zijn commentaar op het eerste boek, na het opsommen van een aantal wiskundigen: "Niet veel jonger dan deze is Euclides, die de "Elementa" samenstelde, veel resultaten van Eudoxus samenvatte, veel voltooide wat Theaetetus\* was begonnen en de minder strenge bewijzen van zijn voorgangers in een niet te weerleggen vorm bracht."

Als voornaamste bijdrage van Euclides zelf moet men dus zien het aanscherpen van bewijzen, maar vooral ook het ordenen van de stof. Hoe zorgvuldig hij dit deed, moge blijken uit het feit dat tot in de zestiger jaren van deze eeuw de

\* 417-369 v.C.. Hij behandelde de irrationaliteiten en de vijf regelmatige lichamen. Regelmatig 8-vlak en regelmatig 20-vlak zouden zijn vinding zijn geweest.

vlakke meetkunde werd opgedist in dezelfde vorm en volgorde als waarin Euclides die bracht. Vlakke meetkunde wordt in Engeland nog steeds “Euclid” genoemd!

Aangezien Euclides nergens een naam noemt, is het bijzonder moeilijk (maar ook bijzonder interessant) om de auteurs van de afzonderlijke stellingen te identificeren.

Een belangrijke, maar niet altijd even betrouwbare, steun geven de zgn. “scho lia”, d.w.z. toelichtingen van latere schrijvers uit de Oudheid, waaronder de reeds genoemde Proclus.

### 3. DE OORSPRONG VAN DE MEETKUNDIGE ALGEBRA BIJ DE GRIEKEN

Als inleiding tot de behandeling van enkele aspecten van de zgn. meetkundige algebra bij de Grieken, zullen we ons verplaatsen in het wiskundige klimaat van de beschouwde tijd, d.w.z. circa vijf eeuwen vóór onze jaartelling, de bloeitijd van de school van Pythagoras in het Zuiditaliaanse Croton.

Voor de Pythagoraeërs was het getal, d.w.z. het natuurlijke getal, het wezen van de dingen.

Zeer duidelijk vinden we dit verwoord in een fragment dat toegeschreven wordt aan de Pythagoraeër Philolaus ( $\pm 450$  v.C.):

“Inderdaad heeft alles wat men kan kennen een getal, want het is niet mogelijk iets te begrijpen of te kennen zonder het getal”.

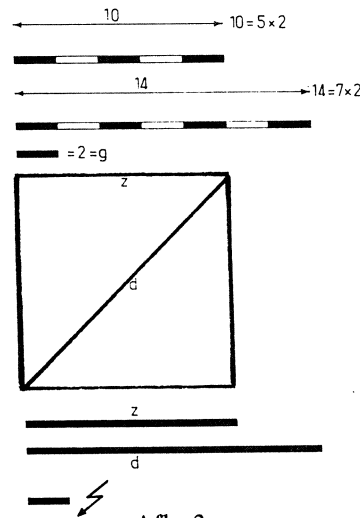
Ook een fragment van Chrysogonos ( $\pm 500$  v.C.) spreekt duidelijke taal:

“Wij leven door getal en berekening, deze immers redden de stervelingen”.

Tot dit inzicht zou men gekomen zijn o.a. door het waarnemen van de bewegingen van de hemellichamen, de observatie van de sterrenbeelden en door intensieve bestudering van de muziek, waarbij men het verband tussen snaarlengte en toonhoogte opmerkte.

Zo ontdekten zij in de kosmos een wetmatigheid, een harmonie die beheerst werd door gehele getallen of verhoudingen daarvan. Om een voorbeeld te noemen: een rechte hoek werd gekarakteriseerd door een Pythagorisch tripel zoals (3,4,5) of (5,12,13). Het getal zelf kreeg daardoor een goddelijke betekenis en werd zelfs geïdentificeerd met het goddelijke omdat het los stond van de materie. Het beoefenen van de getallentheorie kreeg iets van een goddelijke opdracht omdat het een zuivering, katharsis in de mens teweeg zou kunnen brengen.

De schok was dan ook groot toen men ontdekte dat naast verhoudingen die met behulp van natuurlijke getallen kunnen worden beschreven er ook “verhoudingen” bestaan die men niet met natuurlijke getallen kan weergeven, zoals de “verhouding” tussen de zijde en de diagonaal van een vierkant, deze twee hebben nl. geen gemene maat.



Afb. 3

Aan dit probleem van het irrationale zal een aparte paragraaf in dit hoofdstuk worden gewijd.

De ontdekking ervan betekende een grote schok voor de Griekse wiskundigen, hetgeen achteraf ook wel te begrijpen is als men bedenkt dat het tot het einde van de 19<sup>e</sup> eeuw zou duren voordat men een goede fundering had gelegd onder dit begrip!

De schrik over de ontdekking van andere grootheden dan natuurlijke getallen weerspiegelt zich in de verhalen die in omloop zijn over de vermoedelijke ontdekker ervan, Hippasus van Metapontum. Een ellendig einde zou hem beschoren zijn. In een scholion op boek X van de Elementa van Euclides lezen we bij Proclus:

“Het verhaal gaat dat de eerste Pythagoraeër die de theorie hierover (d.w.z. het irrationale) openbaar maakte, schipbreuk geleden heeft toen hij zee koos”. Anderen schrijven dat hij zelfs overboord gegooid is. Wat van het een en ander ook waar is: deze verhalen zouden niet zijn gelanceerd indien het de mathematici van destijds niet tot in hun diepste had geroerd.

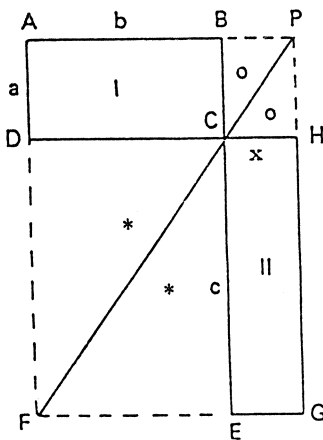
Vanaf deze tijd ging men onderscheid maken tussen (natuurlijke) getallen enerzijds en grootheden, zoals lengten, oppervlakten, inhouden en tijdsduren anderzijds. Mede door een gebrek aan een formeel apparaat van notaties (zoals letters voor onbekende getallen - maar dat kon toen ook helemaal niet, want een letter met een accent stelde een wel gedefinieerd getal voor), operatietekens zoals  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  en  $:$ , alsook een teken voor gelijkheid was men aangewezen op een meetkundige wijze van behandeling van de “algebra”, de zgn. meetkundige algebra, ook wel oppervlakte-rekening genoemd.

Hierin wordt niet met letters gerekend, maar met lijnstukken getekend. De formuleringen zijn alle in meetkundige taal vervat.

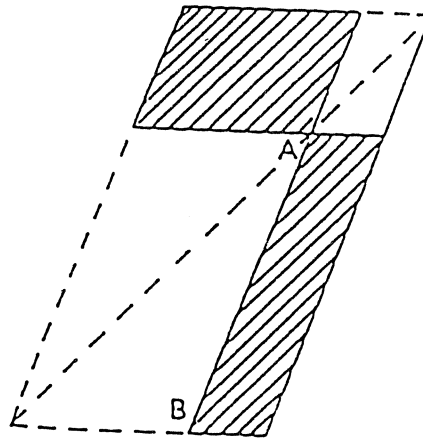
Som en verschil van lijnstukken worden op voor de hand liggende wijze gedefinieerd. Het produkt van twee lijnstukken is (de oppervlakte van) een rechthoek. Deling werd aanvankelijk niet uitgevoerd met behulp van evenredigheden omdat die nog niet ingevoerd waren.

Het gaat bij deling om de bepaling - bij gegeven  $a, b$  en  $c$  - van  $\frac{ab}{c}$ . Men construeerde daartoe de rechthoek met zijde  $c$  en oppervlakte  $ab$ . Afbeelding 4a laat zien hoe dit in zijn werk gaat. De juistheid van de constructie is in één oogopslag te zien.

De bewering is dat de rechthoeken I en II dezelfde oppervlakte hebben en dit volgt onmiddellijk uit de congruentie van de driehoeken APF en GFP en van de met  $*$  en  $\circ$  aangegeven driehoeken. Afbeelding 4b geeft een voor de hand liggende uitbreiding van deze stelling die zeer vaak wordt toegepast in de Elementa.



Afb. 4a



Afb. 4b

Deze visie op de wiskunde weerspiegelde zich ook in het taalgebruik. Men kende “vierkante” getallen, “rechthoekige” getallen, “rechtlijnige” getallen d.w.z. priemgetallen, waarmee men immers geen rechthoek of vierkant kon vormen. Heel sprekend is ook dat men de wortel uit een grootte, die noodzakelijkerwijze als vierkant opgevat werd, de zijde (pleura) daarvan noemde. Verschillende van deze terminologieën vindt men nog in de moderne talen terug.

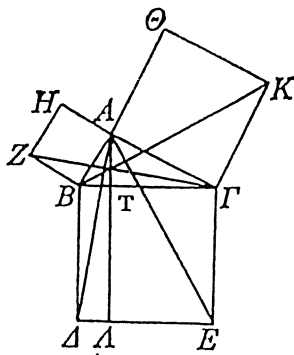
#### 4. ENKELE EENVOUDIGE STELLINGEN UIT DE MEETKUNDIGE ALGEBRA

Een duidelijk voorbeeld van deze stijl van wiskunde- beoefening vinden we in de formulering van de zgn. Stelling van Pythagoras (El. I, prop. 47).

“In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de zijde die de rechte hoek onderspant gelijk aan de vierkanten op de zijden die de rechte hoek insluiten.”

Het bewijs verloopt dan op de bekende wijze met behulp van het “verschuiven” van de driehoeken, dus met recht via de oppervlakterekening. Er komen geen gelijkvormige driehoeken aan te pas.

ἡ ὑπὸ  $\Delta B A$  ὄλη τῆ ὑπὸ  $Z B \Gamma$  ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $\Delta B$  τῆ  $B \Gamma$ , ἡ δὲ  $Z B$  τῆ  $B A$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta B$ ,  $B A$  δύο ταῖς  $Z B$ ,  $B \Gamma$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Delta B A$  γωνία τῆ ὑπὸ  $Z B \Gamma$  ἴση· βάσις ἄρα ἡ  $A \Delta$  βάσει τῆ  $Z \Gamma$  [ἐστὶν] ἴση, καὶ τὸ  $A B \Delta$  τρίγωνον τῷ  $Z B \Gamma$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ [ἐστὶ] τοῦ μὲν  $A B \Delta$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $B \Lambda$  παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι· τὴν  $B \Delta$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς  $B \Delta$ ,  $A \Lambda$ · τοῦ δὲ  $Z B \Gamma$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $H B$  τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν  $Z B$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς  $Z B$ ,  $H \Gamma$ . [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $B \Lambda$  παραλληλόγραμμον τῷ  $H B$  τετραγώνῳ.



Afb. 5

Afbeelding 5 geeft de figuur zoals die voorkomt in de Griekse textuitgave van Heiberg.

$$\frac{1}{2} \text{ opp. } ABZH = \text{ opp. } \Gamma BZ = \text{ opp. } \Delta B A = \frac{1}{2} \text{ opp. } B \Delta \Lambda T.$$

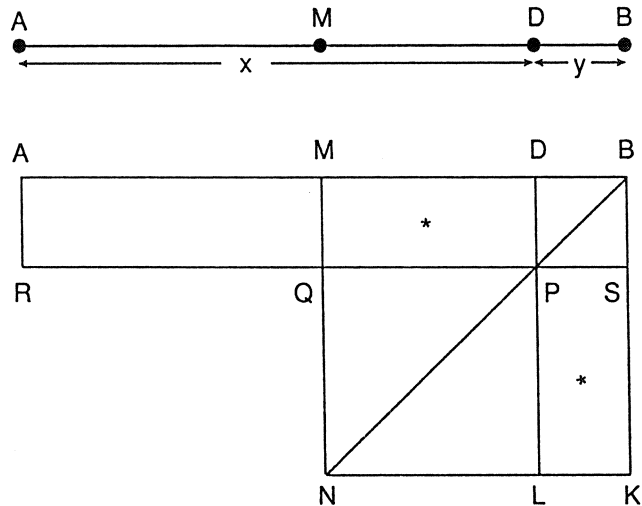
Dito voor vierkant  $A \Gamma K \Theta$ .

Dat een en ander kon leiden tot gecompliceerde en minder doorzichtige formuleringen moge blijken uit de volgende stelling (El. II, prop. 5):

“Wanneer een lijnstuk verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, dan is de rechthoek die omsloten wordt door de ongelijke delen van het geheel, tezamen

met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op het halve lijnstuk.”

De betekenis hiervan is niet in een oogopslag in te zien!



Afb. 6

Laat in Afbeelding 6 het lijnstuk  $AB$  het bedoelde lijnstuk zijn dat door  $M$  verdeeld wordt in de twee gelijke delen  $AM$  en  $MB$  en door  $D$  in de twee ongelijke delen  $AD$  en  $DB$ . We vormen nu de rechthoek  $ABSR$  waarbij  $BS = AR = DB$ ; dan is  $ADPR$  de rechthoek “die omsloten wordt door de ongelijke delen”. Verder construeren we op de aangegeven wijze het vierkant  $MBKN$ . De diagonaal van dit vierkant gaat dan door het hoekpunt  $P$  van rechthoek  $ADPR$ . Evenals in Afb. 4a geldt dan:

$$\text{opp. } MDPQ = \text{opp. } PSKL .$$

Verder is duidelijk dat

$$\text{opp. } AMQR = \text{opp. } MBSQ$$

en aangezien

$$\text{opp. } ADPR = \text{opp. } MDPQ + \text{opp. } AMQR$$

zien we dat

$$\text{opp. } ADPR = \text{opp. van de rand } MBKLPQ .$$

De Grieken noemden zo'n rand in de vorm van een winkelhaak een “gnomon”. Voegt men aan deze gnomon ( $MBKLPQ$ ) toe: “het vierkant op het stuk tussen de deelpunten”, d.w.z. het vierkant  $QPLN$  dan is de stelling bewezen, immers  $MBKN$  is het “vierkant op de helft van het lijnstuk  $AB$ ”.

We kunnen dit resultaat in onze wiskundetaal kort en bondig weergeven.



Stel nl.  $AD = x$  en  $DB = y$  dan geldt:  $AM = MB = \frac{1}{2}(x + y)$  en  $MD = x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$  zodat de stelling in feite zegt:

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Maar zó konden de Grieken het niet schrijven! Zij hadden geen plus-of minteken, geen teken voor gelijkheid, geen haakjes. Het zou tot circa 1500 duren voordat deze symbolen ingang vonden!

Als toepassing van deze stelling lossen we het volgende probleem op: Gevraagd wordt twee lijnstukken te bepalen waarvan de som gegeven is, alsook de oppervlakte van de rechthoek die door deze lijnstukken wordt ingesloten. In onze taal: bepaal  $x$  en  $y$  zodanig dat

$$x + y = a \text{ en } xy = b^2.$$

Oftewel: los op

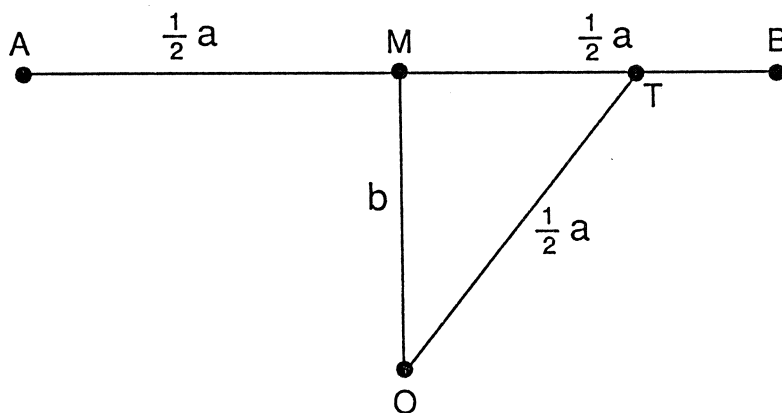
$$(a - x)x = b^2$$

d.w.z.

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

De constructieve oplossing verloopt dan als volgt:

Zij  $M$  het midden van  $AB (= a)$ . Trek in  $M$  de loodlijn  $MO$  ter lengte van  $b$  op  $AB$ . Bepaal  $T$  op  $AB$  z.d.d.  $OT = \frac{1}{2}a$ .



Afb. 7

Volgens de genoemde stelling geldt dan (in onze notatie)

$$AT \cdot TB + MT^2 = MB^2 .$$

Ook geldt volgens Pythagoras

$$OM^2 + MT^2 = OT^2 .$$

Aangezien  $OT = MB$  geldt dus

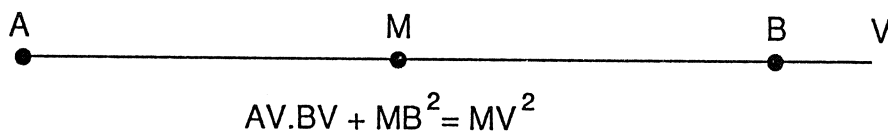
$$AT \cdot TB = OM^2 = b^2$$

en

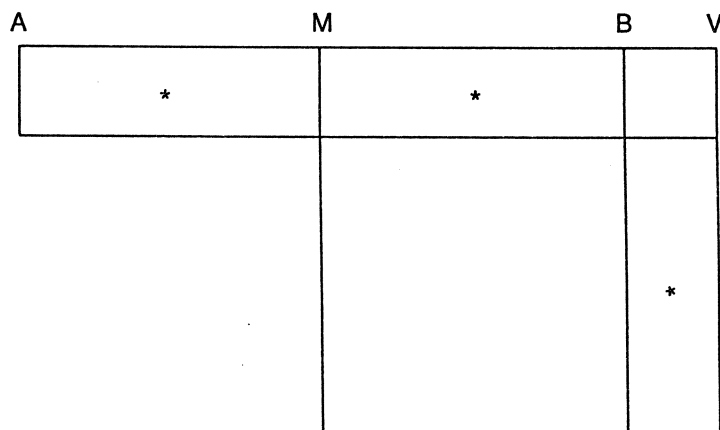
$$AT + TB = a .$$

Dus  $AT$  en  $TB$  zijn de gevraagde lijnstukken. Duidelijk is de eis:  $b^2 \leq \frac{1}{4}a^2$ .

Een pendant van de genoemde stelling is de volgende (El. II, 6): Indien men een lijnstuk halveert en er een lijnstuk aan toevoegt, dan is de rechthoek gevormd door het gehele lijnstuk met de verlenging en de verlenging zelf tezamen met het vierkant op de helft van het (oorspronkelijke) lijnstuk gelijk aan het vierkant op de helft vermeerderd met de verlenging, dus:



Afb. 8



Afb. 9

Een blik op Afb. 9 verschaft nu al gauw het bewijs.

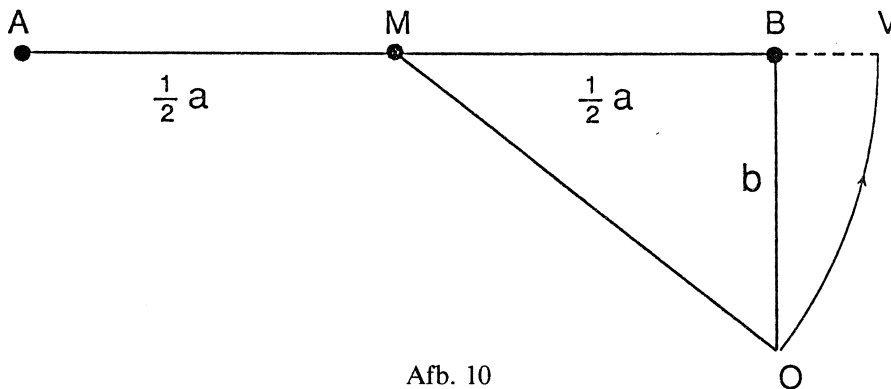
Met deze stelling kunnen we nu het volgende vraagstuk oplossen: Bepaal twee lijnstukken  $x$  en  $y$  waarvan het verschil is gegeven alsook de oppervlakte van de door deze rechten ingesloten rechthoek. In formule:

Los op:  $x - y = a$  en  $xy = b^2$

d.w.z. de vierkantsvergelijking

$$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

De oplossing verloopt analoog aan de oplossing van het vorige vraagstuk. We volstaan met een tekening, waarin  $AV$  en  $BV$  de gezochte lijnstukken  $x$  en  $y$  zijn. De laatstgenoemde stelling geeft dan, met de stelling van Pythagoras in driehoek  $MBO$ , de oplossing.



Afb. 10

Hierin geldt:  $AM = MB = \frac{1}{2}a$ ;  $BO \perp AB$ ,  $BO = b$ ;  $MO = MV$ .

Een derde belangrijke toepassing is het verdelen van een lijnstuk, zeg  $a$ , in twee delen resp.  $x$  en  $a - x$  zodanig dat

$$a : x = x : (a - x),$$

de bekende verdeling in uiterste en middelste reden, een verdeling die later de sectio divina en nog later de sectio aurea genoemd zou worden.

Dit vraagstuk wordt door Euclides tweemaal behandeld, eenmaal in de hierboven gegeven formulering (El.VI, 30), wanneer de leer van de evenredigheden is besproken, maar ook al eerder, zonder verhoudingen (El.II,16). De formulering moet dan natuurlijk anders zijn en verloopt geheel in de stijl van de oppervlakte-rekening aldus: "Een gegeven rechte zó te verdelen dat de rechthoek, gevormd door het geheel en een van de delen gelijk is aan het vierkant op het andere deel".

Zó gezegd gaat het dus om het oplossen van de vierkantsvergelijking

$$a(a - x) = x^2 \text{ oftewel } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Hierop zullen wij niet verder ingaan.

### 5. ENKELE OPMERKINGEN OVER HET PROBLEEM VAN HET IRRATIONALE BIJ DE GRIEKEN

Zoals gezegd, was het probleem van de verhoudingen - al dan niet rationaal - een groot probleem in de Griekse wiskunde.

Op twee verschillende plaatsen in de *Elementa* wordt daaraan aandacht geschonken en wel in boek V en in boek VI. De wijzen waarop dit probleem wordt aangepakt in deze boeken staan geheel los van elkaar en dit valt te begrijpen daar het in boek VI gaat over natuurlijke getallen, die opgebouwd zijn uit een eindig aantal eenheden, terwijl in boek V bedoeld wordt op grootheden, die daardoor gekarakteriseerd zijn dat zij "tot in het oneindige toe" deelbaar zijn.

Aristoteles (*Metaphysica* V, 1020 a) zegt:

"Een grootheid is datgene wat potentieel verdeeld kan worden in samenhangende delen"

Voorbeelden hiervan zijn, zoals gezegd, lengten, oppervlakten, inhoud, tijdsduren.

Twee grootheden heten daarbij gelijksoortig indien een geheel veelvoud van de een de ander kan overtreffen (axioma van Eudoxus - Archimedes). Zo zijn lengten onderling gelijksoortig, evenals oppervlakten onderling en inhoud en tijdsduren. Gelijksoortige grootheden kunnen een verhouding hebben, waarbij het begrip verhouding vaag gedefinieerd is (*El.V*, def 3) als:

"Een zekere betrekking tussen gelijksoortige grootheden volgens hun grootte".

Wanneer het gaat over natuurlijke getallen, dan blijkt de wijze waarop de evenredigheden behandeld worden overeen te stemmen met onze wijze van behandelen; de terminologie is echter anders. Leest U maar (*El.VII*, Def. 20):

"Getallen zijn evenredig\* wanneer het eerste van het tweede en het derde van het vierde even vaak veelvoud of hetzelfde deel of dezelfde delen is".

Met het slot van deze definitie "dezelfde delen" wordt het volgende bedoeld: Neem aan dat het gaat om de getallen  $A, B, C, D$  waarbij  $A$  verdeeld is in  $a$  gelijke delen  $g$ , waarvan  $B$  er  $b$  bevat, dus  $A = ag$  en  $B = bg$ . De vier getallen  $A, B, C, D$  vormen dan in deze volgorde een evenredigheid indien  $C$  eveneens verdeeld kan worden in  $a$  gelijke delen waarvan  $D$  er  $b$  bevat, d.w.z.  $C = ah$  en  $D = bh$ .

In onze notatie betekent dit dus:

$$A : B = C : D \text{ dan en slechts dan als } A = ag, B = bg; C = ah, D = dh.$$

Opmerkelijk is dat het begrip verhouding zelf niet gedefinieerd wordt, maar wel de gelijkheid van verhoudingen.

De effectieve constatering of vier getallen een evenredigheid vormen wordt

\* In het Grieks is verhouding "logos" en evenredig "analogon".

uitgevoerd m.b.v. de bekende algoritme die later de Euclidische algoritme genoemd zou worden en die we vinden in El.VII, 1,2.

Volledigheidshalve wordt deze hier in onze, moderne notatie vermeld:

Stel dat we van twee getallen  $A$  en  $B$  de g.g.d. moeten bepalen, dan zoeken we, d.m.v. “delen met rest”, getallen  $q_0$  en  $r_0$  zodanig dat

$$A = Bq_0 + r_0 \quad \text{met } 0 \leq r_0 < B$$

en verder:  $B = r_0q_1 + r_1$  met  $0 \leq r_1 < r_0$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2 \quad \text{met } 0 \leq r_2 < r_1$$

etc.

Voor de resten  $r_i$  geldt dan

$$B > r_0 > r_1 > r_2 > \dots \geq 0.$$

Daar de  $r_i$  natuurlijke getallen zijn (of nul) en monotoon dalen, moet er vroeg of laat een  $r_{n+1}$  optreden met  $r_{n+1} = 0$ , dus

$$A = Bq_0 + r_0$$

$$B = r_0q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_n.$$

$r_n$  is dan de g.g.d. van  $A$  en  $B$ , d.w.z.  $r_n$  is deelbaar op  $A$  en  $B$ , terwijl ieder getal dat op  $A$  en  $B$  deelbaar is ook op  $r_n$  deelbaar is, hetgeen men eenvoudig kan verifiëren.

Een eenvoudig getallenvoorbeeld:  $A = 1065$ ,  $B = 309$ . Er geldt dan:

$$1065 = 3 \times 309 + 138$$

$$309 = 2 \times 138 + 33$$

$$33 = 5 \times 6 + 3$$

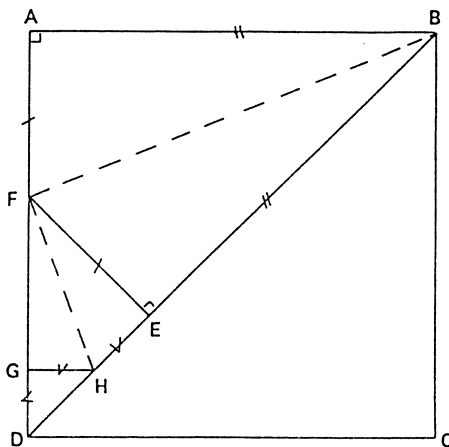
$$6 = 2 \times 3.$$

De g.g.d. van 1065 en 309 is dus 3.

Dit alles gaat goed omdat we met natuurlijke getallen te maken hebben en de algoritme na eindig veel stappen afbreekt.

Wanneer het gaat om lijnstukken, oppervlakten, inhouden of tijden, i.h.a. om “grootheden”, dan rijzen er problemen omdat de Euclidische algoritme niet altijd na eindig veel stappen afbreekt. Dit was de schokkende ontdekking in de vroege Griekse wiskunde: de ontdekking van het “irrationale”.

We illustreren dit aan de hand van het voorbeeld van de zijde en de diagonaal van een vierkant (zie Afb. 11).



Afb. 11

In het vierkant  $ABCD$  wordt gezocht naar de gemeenschappelijke maat van de zijde  $AB$  en de diagonaal  $BD$ . We doen dat weer met behulp van de Euclidische algoritme.

Daartoe wordt  $AB$  éénmaal afgetrokken van (d.w.z. afgepast op)  $BD$ . De rest  $ED$  (kleiner dan  $AB$ ) moet nu worden afgepast op  $AB$ , maar daarvoor kunnen we ook  $AD$  nemen. Aangezien kennelijk geldt  $AF = FE = ED$  zien we dat  $ED$  tweemaal kunnen afpassen op  $AD$  met als rest  $GD$  die dan weer afgepast moet worden op de vorige rest  $ED$ . Omdat echter  $GD = GH = HE$ , komt het er uiteindelijk op neer dat we  $GH$  moeten afpassen op  $HD$ , maar dan zijn we in principe weer in de beginsituatie, toen we  $AB$  moesten afpassen op  $BD$ . Dit proces zal dus nooit eindigen. Op deze wijze zullen we dus nooit een gemene maat vinden voor zijde en diagonaal van een vierkant.

Intuitief zijn we toch van mening dat er zoiets als een verhouding bestaat tussen deze twee lijnstukken. De reeds eerder genoemde Eudoxus vond hier iets op en dat is vastgelegd in boek V van de *Elementa*, waar we een theorie voor evenredigheden voor grootheden vinden die geheel los staat van de theorie voor evenredigheden van getallen in boek VII.

In boek V, 5 vinden we nl. de volgende definitie van gelijkheid van verhoudingen van grootheden:

“Men zegt dat grootheden in dezelfde reden (logos) zijn, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde wanneer willekeurige gelijke veelvouden van de eerste en de derde tegelijkertijd zijn: groter dan, gelijk aan of kleiner dan onderling gelijke veelvouden van de tweede en de vierde, met behoud van de volgorde.” In onze taal betekent dit dat voor de grootheden  $A, B, C, D$  geldt:

$$A : B = C : D$$

dan en slechts dan indien voor willekeurige natuurlijke getallen  $m$  en  $n$  voldaan is aan de volgende drie implicaties

$$mA > nB \Leftrightarrow mC > nD$$

$$mA = nB \Leftrightarrow mC = nD$$

$$mA < nB \Leftrightarrow mC < nD .$$

Dit valt min of meer uit de lucht, maar het is gelijkwaardig met de definitie van evenredigheid voor natuurlijke getallen. Daarvoor definieerden we immers dat

$$A : B = C : D$$

zou betekenen

$$A = ag, B = bg \text{ en } C = ah, D = bh .$$

Uit dit laatste volgt echter:

$$mA \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nB \Leftrightarrow mag \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nbg \Leftrightarrow ma \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nb \Leftrightarrow mah \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} mbh \Leftrightarrow mC \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nD .$$

Ook het omgekeerde is voor natuurlijke getallen  $A, B, C, D$  waar. Laat nl. gelden

$$mA = nB \Leftrightarrow mC = nD$$

voor alle natuurlijke  $m$  en  $n$ . Kiezen we i.h.b.  $m = B$  en  $n = A$ , dan volgt.

$$BA = AB \Leftrightarrow BC = AD$$

dus  $BC = AD$

en hieruit leidt men af dat  $A, B, C, D$  een evenredigheid vormen in de zin van El. VII, def. 20, zoals we die gaven op blz. 12. Voor het gemak geven wij deze evenredigheid aan als  $A : B = C : D$ .

Immers steeds geldt:	$A : B = AC : BC$	(*)
en	$C : D = AC : AD$	(**)
Gegeven is echter	$BC = AD$	
dus uit (*) volgt	$A : B = AC : AD$	
en met (**) geeft dit	$A : B = C : D$	

Deze gelijkwaardigheid van beide definities wordt echter niet genoemd of bewezen in de Elementa. Wel worden alle bekende eigenschappen van de evenredigheden op scherpzinnige wijze afgeleid uit de definitie van evenredigheid voor grootheden.

Eerst ruim 2000 jaren later, in 1887, zou Richard Dedekind (1831-1916), hoogleraar aan het Polytechnicum in Braunschweig een exacte definitie geven van verhouding, ook voor het irrationale geval en daarmee het irrationale *getal* introduceren. In feite baseerde hij zich daarbij op de definitie van gelijkheid van verhoudingen zoals Eudoxus die gegeven had. Hij zegt dat ook expliciet (Ges. Abh. III, p. 341).

Het zou ons echter buiten het bestek van deze voordracht voeren indien we daarop nader in zouden gaan.

## 6. DRIE PROBLEMEN UIT DE MEETKUNDIGE ALGEBRA

We hebben nu voldoende materiaal bijeen om drie centrale problemen uit de meetkundige algebra aan te pakken.

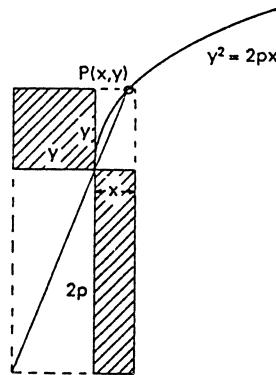
Het betreft hier de zgn. “aanpassingsproblemen” die wij vinden in de *Elementa* en wel in boek II,14 en boek VI, 28 en 29. Zij dragen de namen resp. van parabolische, elliptische en hyperbolische aanpassing.

### A. Allereerst de *parabolische aanpassing*.

Van de drie genoemde problemen is dit het eenvoudigste. In feite is dit het vraagstuk van het uitvoeren van de deling  $\frac{ab}{c}$  die we al in par. 3 (blz. 6) behandelden. Dit vraagstuk plaatsen we nu in een andere context.

Wij zullen het vraagstuk enigszins stileren zonder afbreuk te doen aan de essentie: we zullen namelijk steeds spreken over rechthoeken i.p.v. willekeurige parallelogrammen.

Evenals in par. 3 gaat het over de constructie van een rechthoek met gegeven zijde en gegeven oppervlakte. Deze oppervlakte stellen we ons nu voor in de gedaante van een vierkant. In Afb. 12 is dat een vierkant met zijde  $y$ ; de gegeven zijde is met voorbedachten rade  $2p$  genoemd. De constructie van de onbekende zijde  $x$  van de gevraagde rechthoek verloopt analoog aan de constructie op blz. 6. De afbeelding spreekt weer voor zichzelf.



Afb. 12

Maar nu het interessante: bij variabele  $y$  varieert natuurlijk ook  $x$ , maar steeds geldt:  $y^2 = 2px$ , d.w.z. het punt  $P$  doorloopt een *parabool*.

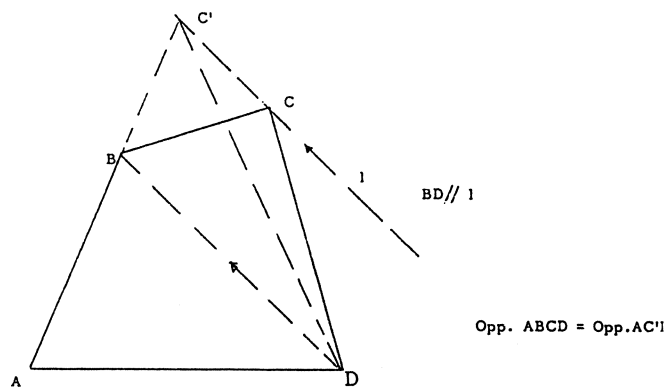
Het lijnstuk  $2p$  noemde men in het Grieks ὀρθία (*orthia*) en in het Latijn “latus rectum”. Beide woorden betekenen “rechtopstaande” zijde en het is tekenend dat tot in de 17<sup>e</sup> eeuw het dubbele van de parameter  $p$  van de parabool nog steeds “latus rectum” werd genoemd.

Tenslotte nog een opmerking over de oorsprong van het woord “parabolische” aanpassing. We zagen dat het hier ging om het construeren van een rechthoek waarvan de oppervlakte gelijk gemaakt moest worden aan die van een gegeven vierkant. het Griekse woord παρὰ βᾶλλον (*paraballein*) betekent: naast elkaar

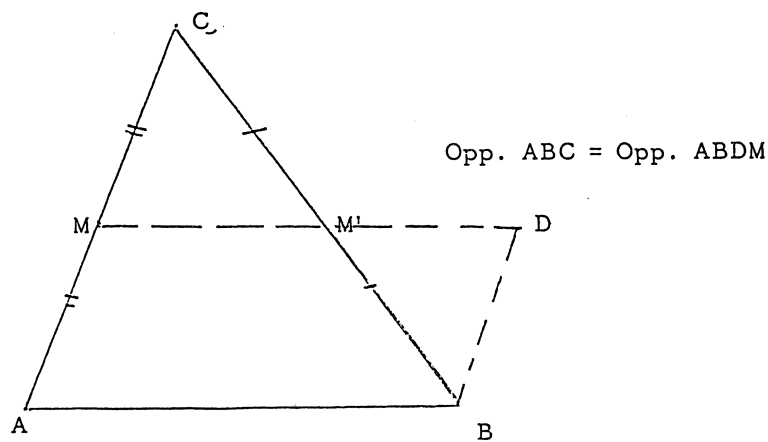


zetten, vergelijken. Wij vinden dit ook terug in ons woord “parabel” d.w.z. gelijkis zoals voorkomend in het N.T.; algemeen: zinnebeeldig verhaal.

Natuurlijk rijst de vraag naar de zin van dit vraagstuk. Welnu, met behulp hiervan kan men oppervlakten van vlakke veelhoeken met elkaar vergelijken. Allereerst wordt daartoe opgemerkt dat men een vlakke veelhoek steeds kan vervormen tot een driehoek met dezelfde oppervlakte en deze weer tot een parallelogram met dezelfde oppervlakte en zelfs met voorgeschreven hoeken, dus ook tot een rechthoek. Voor een vierhoek is dat in afbeelding 13 en 14 aangegeven.



Afb. 13



Afb. 14

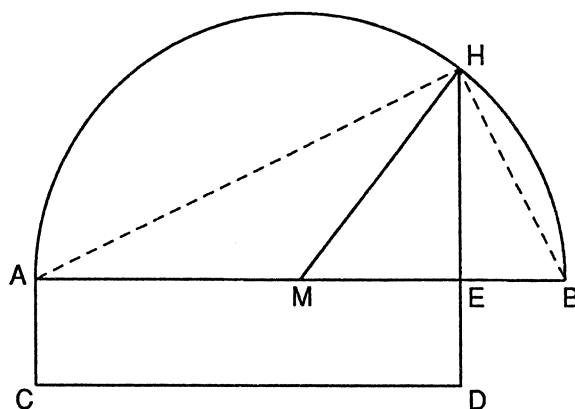
De methode laat zich eenvoudig generaliseren tot een willekeurige vlakke veelhoek.

Nu zou men de parabolische aanpassing op analoge wijze kunnen uitvoeren uitgaande van een rechthoek i.p.v. een vierkant, maar dan mist men de aardige formule  $y^2 = 2px$ . Daarom wordt hier - bij wijze van intermezzo - de “kwadratuur” van de rechthoek gegeven en wel geheel in de trant van de oppervlakterekening, d.w.z. zonder evenredigheden.

Men zou immers, als de zijden van de rechthoek  $a$  en  $b$  genoemd worden, de vergelijking  $x^2 = ab$  kunnen oplossen door op te merken dat uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $BHE$  en  $HAE$  in afbeelding 15 (waarin  $AE = a$ ,  $EB = b$ ,  $AM = MB$  en  $HE \perp AB$ ) volgt:

$$a : HE = HE : b$$

en dan is het probleem opgelost, maar met evenredigheden.



Afb. 15

Het probleem van de evenredigheden willen we echter nog even uitstellen. Daarbij merken we op dat het probleem van de parabolische aanpassing voorkomt in boek II van de Elementa en dat de beide andere genoemde aanpassingsproblemen, waarbij gelijkvormigheid en dus evenredigheid essentieel zijn, eerst in boek VI worden behandeld, nadat in boek V de aan Eudoxus toegeschreven “redentheorie” is uiteengezet.

Het merkwaardige is nu dat we bij de oplossing zonder evenredigheden precies dezelfde constructie zullen uitvoeren, maar er een ander verhaal bij vertellen.

In afbeelding 15 is  $AEDC$  de gegeven rechthoek met  $AE = a$  en  $ED = b = EB$ . Volgens de stelling die we noemden en bewezen op blz. 7 en die voorkomt in de “Elementa” boek I als propositie 5, geldt dat de oppervlakte van de rechthoek  $AEDC$ , vermeerderd met de oppervlakte van het vierkant met zijde  $ME$  gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant met zijde  $MB$ . Anachronistisch, in onze notatie:

$$AE \cdot ED + ME^2 = MB^2. \quad (*)$$

Volgens Pythagoras geldt in driehoek  $HEM$ :

$$HE^2 + ME^2 = MH^2 \quad (**)$$

maar

$$MB = MH,$$

dus dan volgt uit (\*) en (\*\*)

$$AE \cdot ED = HE^2.$$

$HE$  is dus de zijde van het vierkant met dezelfde oppervlakte als de rechthoek  $AEDC$ .

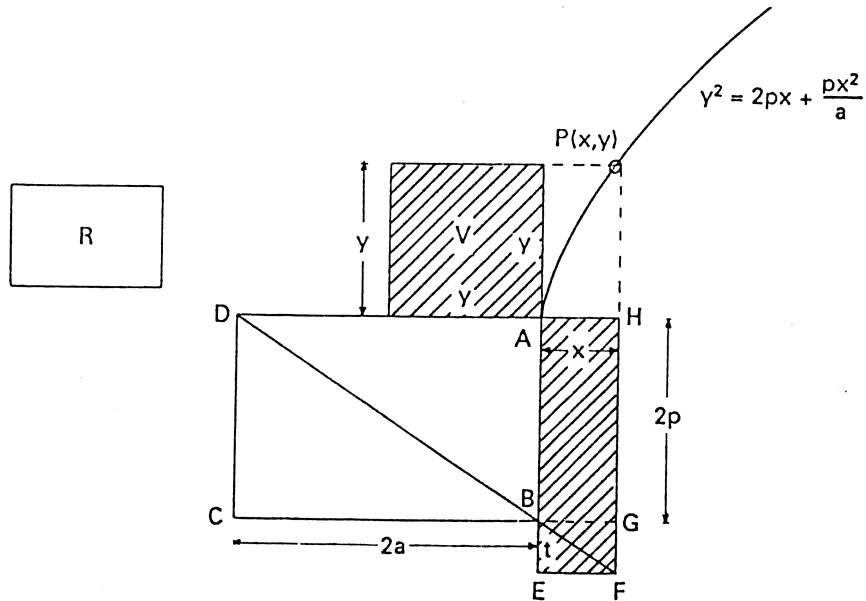
Na dit intermezzo terug naar de vraag naar de bedoeling van de parabolische aanpassing:

Iedere veelhoek kan terug gebracht worden tot een vierkant met dezelfde oppervlakte en door aanpassing aan een vast lijnstuk met lengte  $2p$  correspondeert zo met ieder vierkant een waarde voor de breedte  $x$  van de aangepaste rechthoek en het is duidelijk dat via deze  $x$ -waarden de oppervlakten van veelhoeken met elkaar vergeleken kunnen worden.

#### *B. De hyperbolische aanpassing*

Van de parabolische aanpassing bestaan twee generalisaties, waarvan we allereerst zullen bespreken de *hyperbolische aanpassing*. We gaan daarbij weer uit van een vierkant  $V$  met zijdelengte  $y$  en een lijnstuk  $AB$  met lengte  $2p$ . Verder is er een gegeven rechthoek  $R$  in het spel (zie Afb. 16). De opgave is nu een rechthoek  $AEFH$  te construeren met dezelfde oppervlakte als  $V$  en met één hoekpunt in  $A$ , waarvan de zijde  $AE$  op de drager van  $AB$  ligt, zodanig dat  $AE > AB$  en tevens zó dat het buiten  $AB$  uitstekende deel van deze rechthoek (het zogenaamde *exces*) gelijkvormig is met  $R$ .

Afbeelding 16 geeft de gewenste eindsituatie; hierin is  $ABCD$  een rechthoek die gelijkvormig is met  $R$ . Eén zijde daarvan is  $2p$ , de andere wordt gesteld op  $2a$ . Het is duidelijk dat het vraagstuk opgelost is als we het punt  $F$  bepaald hebben. Dit moet natuurlijk liggen op het verlengde van  $DB$  omdat  $BGFE$  gelijkvormig is met  $DABC$ . Hoe we dat doen, zal straks blijken, maar we bezien nu eerst de eindsituatie en vragen naar de breedte  $x$  van de gezochte rechthoek, bij een gegeven oppervlakte  $y^2$  van het gegeven vierkant.



Afb. 16

Stellen we  $AH = x$  en  $BE = t$  dan geldt op grond van de gelijkheid van de oppervlakten

$$y^2 = (2p + t)x$$

en op grond van gelijkvormigheid

$$t : x = 2p : 2a$$

en dus

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$$

en dit is juist de topvergelijking van een *hyperbool* met parameters  $p$  en  $a$  en top in  $A$ . Bij variabele  $y$  zal de bovenhelft van de rechttertak daarvan door het punt  $P$  doorlopen worden.

Ook hier noemt men  $2p$  “ $\delta\rho\theta\acute{\iota}\alpha$ ” of “latus rectum”; de parameter  $2a$  heet - zeer sprekend - “ $\pi\lambda\alpha\gamma\acute{\iota}\alpha$ ” (plagia) of “latus transversum”, d.w.z. horizontale zijde, welke termen (evenals bij de parabool) nog lang gebruikt werden om de (dubbele) parameters van de hyperbool aan te geven.

Ook hierbij is een taalkundige opmerking te plaatsen.

“ $\delta\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ ” (hyperballein) is een Grieks werkwoord dat betekent: overschrijden, overtreffen. Wij kennen ook de term “hyperbolische” uitdrukking, d.w.z. overdreven uitdrukking: “Ik moet nog een hele berg tentamens nakijken” of “Na een eeuwigheid kwam hij terug.”

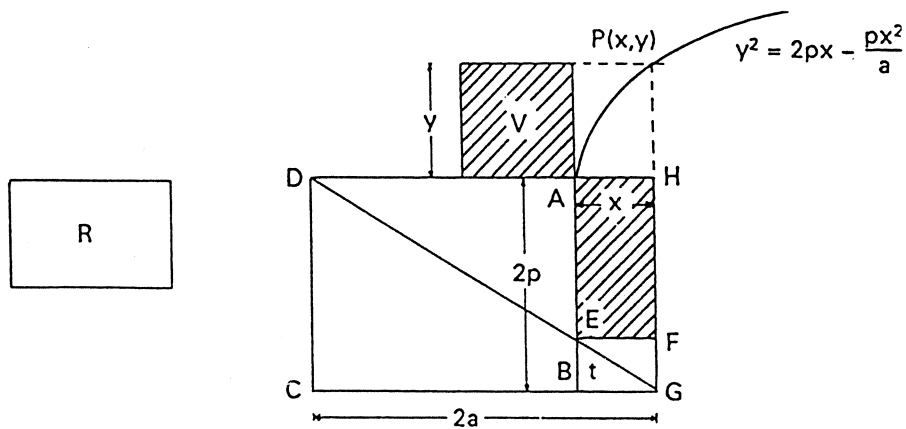
De constructie van het punt  $F$  stellen we nog even uit tot na de bespreking van de tweede generalisatie van de parabolische aanpassing, t.w.

C. De elliptische aanpassing

Ook nu is weer een vierkant  $V$  gegeven met zijdelengte  $y$  en een lijnstuk  $AB$  met lengte  $2p$ , alsmede een rechthoek  $R$ .

Ditmaal zoeken we een rechthoek  $AEFH$  met dezelfde oppervlakte als  $V$  en met één hoekpunt in  $A$ , waarvan de zijde  $AE$  langs een deel van  $AB$  valt, zodanig dat  $AE < AB$  en wel zó dat het “ontbrekende deel” van de rechthoek gelijkvormig is met  $R$ .

Dit ontbrekende deel noemt men het defect.



Afb. 17

Afbeelding 17 geeft de gewenste eindtoestand. De rechthoek  $HGCD$  is bepaald door de eis dat deze gelijkvormig is met  $R$  en als opstaande zijde heeft  $2p$ . De horizontale zijde volgt dan daaruit en we stellen die op  $2a$ . Duidelijk is dat dan ook het defect  $EFGA$  gelijkvormig is met  $R$ . De ligging van  $HGCD$  wordt bepaald door de eis dat  $opp. AHFE = y^2$ , dus door de ligging van  $H$ .

Ook nu stellen we de constructie even uit en bezien eerst, uitgaande van de eindsituatie, de ligging van het punt  $P(x,y)$ .

Indien we stellen  $AH = x$  en  $EB = t$ , dan geldt op grond van de gelijkheid van oppervlakten

$$y^2 = (2p - t)x$$

en op grond van gelijkvormigheid

$$t : x = 2p : 2a$$

dus

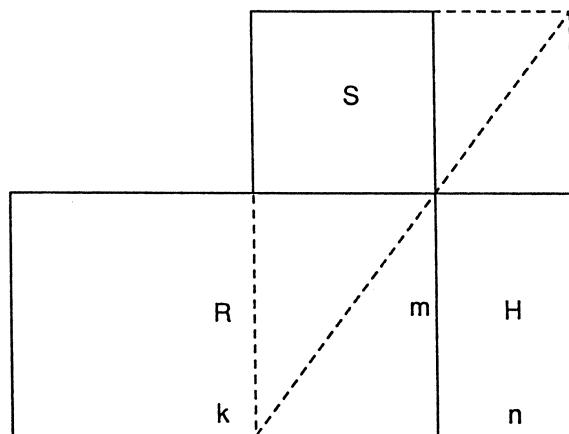
$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

Dit is juist de topvergelijking van een *ellips* met parameters  $p$  en  $a$  en top  $A$ . Bij variabele  $y$  zal de bovenhelft daarvan doorlopen worden door het punt  $P$ . Ook nu worden  $2p$  en  $2a$  “latus rectum” en “latus transversum” genoemd. Natuurlijk tot slot iets over de etymologie: “ἔλλειπειν” (elleipein) is het Griekse woord voor tekortschieten, ontbreken. Ook kennen we elliptische, d.w.z. onvolledige zinnen zoals b.v. “Allemaal een biertje?” i.p.v. “Willen de dames en heren elk nog een glas bier?”.

#### 7. DE CONSTRUCTIEVE OPLOSSING VAN DE DRIE AANPASSINGSPROBLEMEN

Tot slot rest nog de vraag naar de constructieve oplossing van de drie aanpassingsproblemen. Als inleiding hierop eerst de constructie van een rechthoek die gelijkvormig is met een gegeven rechthoek  $R$  en een oppervlakte  $S$  heeft. Zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat  $S$  gegeven is als oppervlakte van een vierkant  $V$ . De Grieken gaven immers oppervlakten altijd als oppervlakten van veelhoeken en we zagen al hoe die teruggebracht kunnen worden tot oppervlakten van rechthoeken, die dan weer gekwadeerd kunnen worden (blz. 18).

De bedoelde constructie verloopt nu als volgt: construeer eerst een rechthoek  $H$  met oppervlakte  $S$  en met één zijde gemeenschappelijk met  $R$ . Dit kan via de parabolische aanpassing (zie Afb. 18).



Afb. 18

Stel nu dat  $R$  de zijden  $k$  en  $m$  heeft en  $H$  de zijden  $m$  en  $n$ . Er geldt dan  $mn = S$ . Als we de zijden van de gezochte rechthoek  $x$  en  $y$  noemen, dan geldt

$$x : y = k : m$$

omdat de gezochte rechthoek gelijkvormig is met  $R$  en

$$xy = mn$$

omdat de gezochte rechthoek de oppervlakte  $S$  moet hebben.

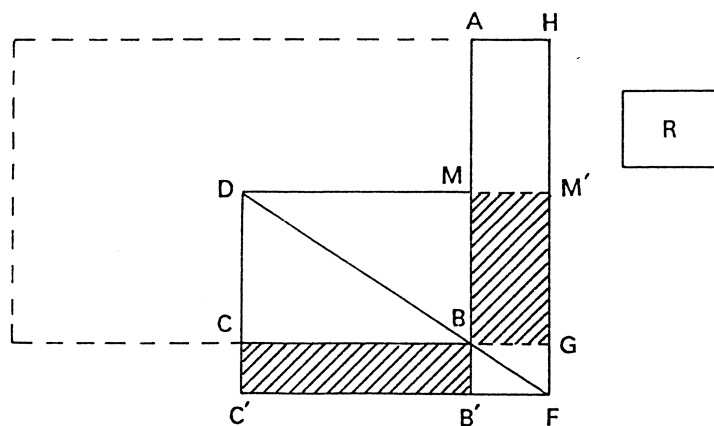
Dit betekent echter, als we  $y$  elimineren

$$x^2 = kn.$$

Op blz. 18 zagen we al hoe we daaruit  $x$  kunnen bepalen. Hierna geeft de parabolische aanpassing de bijbehorende waarde voor  $y$  uit  $xy = mn$ .

Nu zijn we in staat de hyperbolische en de elliptische aanpassing daadwerkelijk uit te voeren.

Allereerst het hyperbolische geval. De opgave was daarbij een rechthoek te construeren met oppervlakte  $y^2$ , liggende "langs"  $AB$  (Afb. 16) zodanig dat het uitstekende deel (het excès) gelijkvormig is met de rechthoek  $R$ .



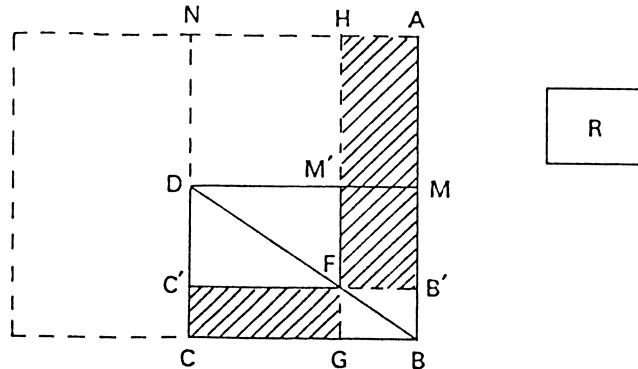
Afb. 19

Daartoe halveren we  $AB$  in afbeelding 19 d.m.v. het punt  $M$  en construeren we de rechthoek  $MBCD$  gelijkvormig met  $R$ . Vervolgens construeren we de rechthoek  $DM'FC'$  gelijkvormig met  $DMBC$  (en dus met  $R$ ) en wel zó dat de oppervlakte daarvan gelijk is aan die van  $DMBC + y^2$ . We zagen al hoe dat moet. De rand (gnomon)  $MM'FC'CB$  heeft dan  $y^2$  als oppervlakte. Op de bekende wijze constateren we echter dat *opp.*  $CBB'C' = \text{opp. } MM'GB$ . Aangezien *opp.*  $AHM'M = \text{opp. } MM'GB$  (de ligging van  $H$  blijkt duidelijk uit de afbeelding), geldt *opp.*  $AHFB' = \text{opp. gnomon} = y^2$ . Ook is de uitstekende rechthoek gelijkvormig met  $R$ , dus  $AHFB'$  voldoet aan alle eisen.

Vervolgens construeren we de oplossing van het elliptische geval. Hierbij gaat het erom een rechthoek met oppervlakte  $y^2$  te construeren "langs"  $AB$  (Afb. 17) zodanig dat het ontbrekende deel, het defect, gelijkvormig is met een gegeven rechthoek  $R$ .

Daartoe halveren we ook nu weer (zie Afb. 20)  $AB$  d.m.v. het punt  $M$ . Op  $MB$  beschrijven we de rechthoek  $MBCD$  gelijkvormig met  $R$ . In de "linkerbovenhoek" daarvan construeren we vervolgens de rechthoek  $DM'FC'$ , gelijkvormig met  $DMBC$  (en dus met  $R$ ) en met als oppervlakte  $DMBC$

verminderd met  $y^2$ . Vereist is dus:  $y^2 \leq \text{opp. } DMBC$ .



Afb. 20

De rand (gnomon)  $M'BCC'F$  heeft dan de gegeven oppervlakte  $y^2$ . Vervolgens verlengen we  $M'F$  en  $C'F$  tot deze de zijden  $NA$ ,  $CB$  en  $AB$  snijden in resp.  $H$ ,  $G$  en  $B'$ . Het is dan duidelijk dat  $\text{opp. } M'MB'F = \text{opp. } C'FGC$ , maar ook  $\text{opp. } HAMM' = \text{opp. } M'MBG$ , zodat - als we  $M'MBG$  "opschuiven" tot deze  $HAMM'$  bedekt - blijkt dat de oppervlakten van de gnomon  $M'MBCC'F (= y^2)$  gelijk is aan de oppervlakte van de rechthoek  $HAB'F$ . Daar ook duidelijk is dat  $FB'BG$  gelijkvormig is met  $R$ , is de elliptische aanpassing voltooid.

Tenslotte een opmerking over de existentie van deze oplossing. Uit de constructie blijkt duidelijk dat de oppervlakte van de gnomon  $M'MBCC'F$ , die we gelijk aan  $y^2$  hadden gemaakt, niet groter mag zijn dan de rechthoek  $DMBC$ , d.w.z.  $y^2 \leq pa$ . Dit is ook duidelijk als we opmerken dat in het elliptische geval geldt

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

en dus voor de breedte  $x$  van de gezochte rechthoek  $HAB'F$  geldt

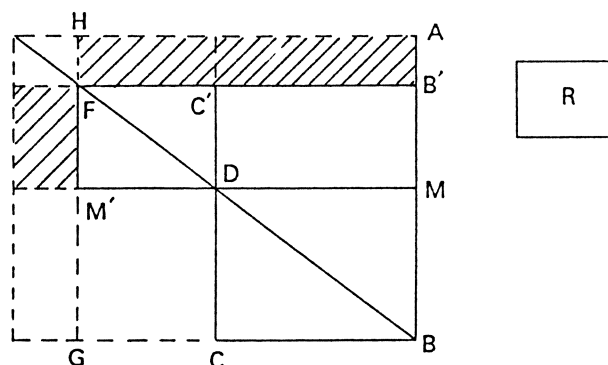
$$px^2 - 2apx + ay^2 = 0 \quad (*)$$

hetgeen inhoudt dat  $x$  dan en slechts dan reëel is als de discriminant  $4a^2p^2 - 4apy^2$  niet negatief is, d.w.z.  $y^2 \leq ap$ . Het extreme geval  $y^2 = ap$  betekent dat  $NAMD$  de gezochte, aan te passen rechthoek is.

Voorts is het duidelijk dat - indien  $y^2 < ap$  - de vergelijking (\*) twee verschillende positieve wortels heeft en er dus twee oplossingen voor het elliptische aanpassingsprobleem bestaan. De tweede oplossing construeren we door de



rechthoek  $DM'FC'$  om het verlengde van de diagonaal  $BD$  te construeren, zoals in afbeelding 21 is weergegeven.



Afb. 21

Deze afbeelding moge voor zichzelf spreken; ook nu is  $HAB'F$  de aangepaste rechthoek en  $FB'BG$  de met  $R$  gelijkvormige rest. Opvallend is dat Euclides met geen woord over die tweede mogelijkheid rept. Men heeft daarvoor verschillende argumenten aangevoerd, die er allen van uitgaan dat hij deze tweede mogelijkheid wel onderkend heeft. Sommigen wijzen erop dat Euclides meestal slechts één oplossing van zijn problemen geeft, anderen menen dat hij de tweede oplossing als vanzelfsprekend of onbelangrijk aan zijn leerlingen overliet.

Tot slot een opmerking over het “praktische nut” van de elliptische en de hyperbolische aanpassing. Zoals deze problemen geformuleerd werden, vallen ze eigenlijk “uit de lucht”.

Reeds eerder losten we de volgende vierkantsvergelijkingen constructief op

$$x^2 - Ax + B^2 = 0 \text{ (blz.9)}$$

en

$$x^2 - Ax - B^2 = 0 \text{ (blz.10).}$$

Het gaat hierbij om positieve reële coëfficiënten en alleen positieve oplossingen tellen. Van de vier mogelijkheden

$$x^2 \pm Ax \pm B^2 = 0$$

valt dus af  $x^2 + Ax + B^2 = 0$ . Er rest dus nog  $x^2 + Ax - B^2 = 0$ , maar de substitutie  $x = y - A$  voert deze terug tot het type van blz. 10. De gevallen waarin de kopcoëfficiënt niet 1 is, maar een willekeurig positief reëel getal, zeg

$g$ , kunnen worden behandeld met behulp van de hyperbolische en de elliptische aanpassing.

Wij zagen al dat deze voerden - bij vaste  $p$  en  $a$  - tot de volgende betrekkingen tussen  $x$  en  $y$

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$$

en

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

Hierbij was  $y$  een gegeven grootheid, de zijde van een gegeven vierkant. De op blz. 20 en 21 gegeven constructies betekenen dus in feite de constructieve bepaling van de positieve wortels van de volgende vergelijkingen in  $x$

$$px^2 + 2apx - ay^2 = 0$$

en

$$px^2 - 2apx + ay^2 = 0$$

d.w.z. juist de typen die van belang zijn, maar nu met kopcoëfficiënt  $p$  niet noodzakelijk 1. Wij, voorzien van ons algebraïsch formalisme, zouden deze gevallen, door te delen door  $p$ , tot de vorige gevallen hebben gereduceerd.

Dit delen door  $p$  weerspiegelt zich nu in de keuze van de rechthoek  $R$  met zijden  $a$  en  $p$ , waarmee het exces, resp. defect, gelijkvormig moet zijn.

#### LITTERATUUR

1. R. DEDEKIND, Was sind und was sollen die Zahlen? In: Gesammelte Abhandlungen III, p. 335-391, Chelsea Publishing Company, New York, 1969.
2. R. DEDEKIND, Stetigkeit und Irrationale Zahlen, o.c.p. 315-339.
3. R. DEDEKIND, Continuity and Irrational Numbers, Dover Publications Inc., New York, 1963. (Engelse vertaling van (2)).
4. E.J. DIJKSTERHUIS, De Elementen van Euclides I en II, Noordhoff, Groningen, 1929.
5. T.L. HEATH, The Thirteen Books of Euclid's Elements (translated from the Text of Heiberg), Dover Publications Inc., New York, 1956.
6. T.L. HEATH, A History of Greek Mathematics I, II, Clarendon Press, Oxford, 1965.
7. I.L. HEIBERG, Euclidis Elementa (ed. E.S. Stamatis), Teubner, Leipzig, 1969.
8. M. KLINE, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York, 1972.
9. W.B. KNORR, The Evolution of the Euclidean Elements, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1975.
10. E. LANDAU, Grundlagen der Analysis, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1960.
11. C. THAER, Euklid, die Elemente, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962. (Duitse Vertaling.)

## Rondom de $s$ -formule

H.J.A. Duparc  
*Insulindeweg 26*  
 2612 EM Delft

### 0. INLEIDING

De aanvankelijk met sterk visuele inslag beoefende Griekse wiskunde kreeg er een aantal jaren geleden een component van een wat andere signatuur bij. Door de ontwikkeling van de algebra, in het bijzonder het algebraïsche formularium, kon de Griekse meetkunde aanzienlijk worden verrijkt met formules die verbanden leggen tussen meetkundige grootheden. Deze twee manieren van beoefenen van de meetkunde vormden tezamen de grondslag van het meetkundeprogramma zoals dat vóór de invoering van de mammoetwet in Nederland bij het secundair onderwijs van kracht was.

Latere verschuivingen in het programma door Analytische Meetkunde en Lineaire Algebra gaven het meetkunde-onderwijs een geheel andere inslag. Wel heeft een aantal formules de vernieuwing overleefd, maar er zijn allerlei andere interessante (en soms ook nog wel nuttige) formules die het loodje moesten leggen. Vandaar dat hier een poging wordt gedaan enkele ervan weer eens boven water te halen, soms met een verrassend bij-effect.

### I. BELEVENISSEN BIJ DE DRIEHOEK

Allereerst behandelen wij de  $s$ -formule

$$\vartheta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

voor de oppervlakte  $\vartheta$  van een driehoek met zijdelengten  $a$ ,  $b$  en  $c$  en halve omtrek  $s$ . In de pre-mammoetse meetkunde werd deze afgeleid door gebruik te maken van de formule

$$\vartheta = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

en door  $\cos \gamma$  te verkrijgen uit de cosinusregel. Eliminatie van  $\gamma$  uit beide formules leidt na een flinke rekenpartij tot het gewenste resultaat. Wil men de meetkunde geheel vrij van de goniometrie bedrijven dan kan men via de projectiestelling eerst de lengte berekenen van de projectie van een zijde op een andere om daarna via de stelling van Pythagoras de lengte van een hoogtelijn te berekenen (alweer via een flinke rekenpartij), waaruit de begeerde formule voor de oppervlakte volgt.

Uit de Griekse tijd is echter een veel eleganter bewijs bekend. Ten onrechte wordt dit wel toegeschreven aan Hero van Alexandrië; in feite dateert het van Archimedes<sup>\*)</sup>. We geven deze afleiding hieronder weer, zij het met gebruikmaking van moderne formule(routine)s.

Uitgangspunt is het feit dat de lengten van de twee raaklijnen uit een punt aan een cirkel gelijk zijn. Voor de ingeschreven cirkel met middelpunt  $I$  en raakpunten  $A'$ ,  $B'$  en  $C'$  aan de respectieve zijden van een driehoek  $ABC$  volgt daaruit

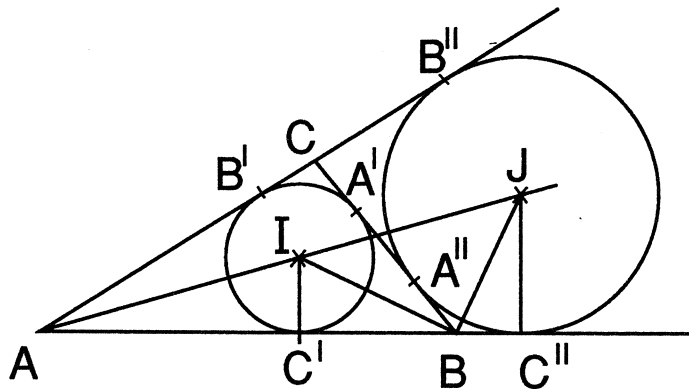
$$AB' + B'C + C'A = s$$

dus

$$C'B = s - b \quad \text{en evenzo} \quad AC' = s - c.$$

Op analoge wijze vindt men voor een aangeschreven cirkel met middelpunt  $J$  en raakpunten  $A''$ ,  $B''$  en  $C''$  dat

$$AC'' = s \quad \text{en} \quad BC'' = s - c.$$



Een en ander leidt tot

<sup>\*)</sup> Vergelijk B.L. van der Waerden, Ontwakende wetenschap, Noordhoff, Groningen, 1950, p. 252.

$$r : r'' = (s - a) : s.$$

Voorts levert gelijkvormigheid van de driehoeken  $IC'B$  en  $BC''J$

$$r : (s - b) = (s - c) : r''.$$

Uit deze beide resultaten volgt

$$r^2 = (s - a)(s - b)(s - c) : s.$$

Omdat de oppervlakte van driehoek  $ABC$  de som is van de oppervlakten van de driehoeken  $BCI$ ,  $CAI$  en  $ABI$  heeft men

$$\Theta = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = rs$$

dus

$$\Theta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Het zou helaas te ver voeren hier uiteen te zetten voor welke gehele  $a$ ,  $b$  en  $c$  ook  $\Theta$  geheel is. Zo'n driehoek wordt wel een Heronische driehoek genoemd. Het bekendste voorbeeld is wel de driehoek met zijdelengten 13, 14 en 15.

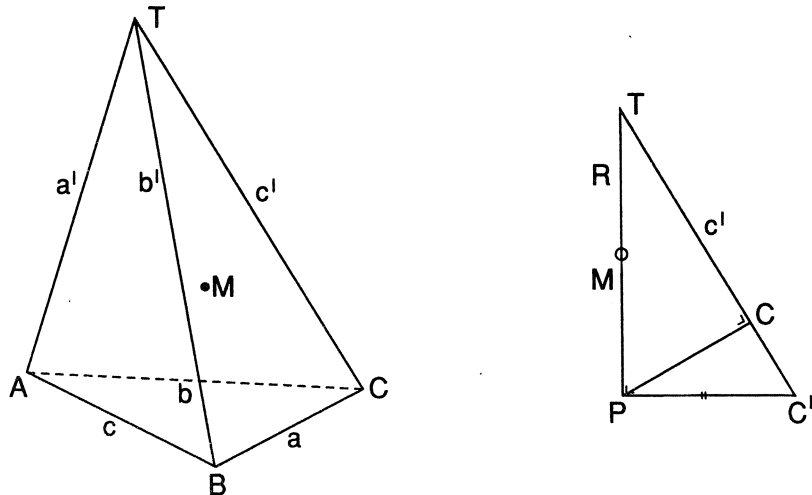
En passant vermelden wij nog even de formule voor de straal  $R$  van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$ . Men heeft

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{2bc\sin\alpha} = \frac{abc}{4\Theta}.$$

Van deze formule zullen wij in het volgende hoofdstuk een driedimensionale generalisatie geven.

## II. HET VIERVLAK

Beschouw een viervlak met ribbelengten  $a, b, c, a', b'$  en  $c'$ , met inhoud  $I$  waarvan de omgeschreven bol het middelpunt  $M$  heeft en een straal  $R$ . De middel-lijn door  $T$  snijdt de bol andermaal in  $P$ . Het raakvlak in  $P$  aan die bol snijdt de ribben  $TA$ ,  $TB$  en  $TC$  resp. in  $A''$ ,  $B''$  en  $C''$ . Dan heeft men



30

$$TC'' = TP^2 : TC = 4R^2 : c'$$

dus

$$TC'' : TB'' = b' : c'$$

hetgeen leidt tot de gelijkvormigheid van de driehoeken  $TB''C''$  en  $TCB$ .  
Hieruit volgt

$$B''C'' : CB = TC'' : TB,$$

dus

$$a'' = B''C'' = a \frac{4R^2}{b'c'} = \frac{4R^2}{a'b'c'} \cdot aa'.$$

Analoge formules gelden voor  $b'' = C''A''$  en  $c'' = A''B''$ . Daaruit volgt

$$\begin{aligned} \vartheta'' &= \text{opp } \Delta A''B''C'' = \sqrt{s''(s''-a'')(s''-b'')(s''-c'')} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{4R^2}{a'b'c'}\right)^4 (aa'+bb'+cc')(-aa'+bb'+cc')(aa'-bb'+cc')(aa'+bb'-cc')} \\ &= \frac{4R^4}{a'^2b'^2c'^2} J. \end{aligned}$$

De stereometrie leert ons vervolgens

$$\text{Inh } TABC : \text{Inh } TA''B''C'' = TA \ TB \ TC : TA'' \ TB'' \ TC'',$$

dus

$$I : \frac{2}{3}R \text{ opp } A''B''C'' = a'b'c' : \frac{64R^6}{a'b'c'}$$

waaruit volgt

$$I = \frac{\frac{2}{3}R \cdot 4R^4 J}{a'^2b'^2c'^2} \frac{a'^2b'^2c'^2}{64R^6} = \frac{J}{24R}$$

met als eindresultaat de formule van von Staudt

$$R = \frac{J}{24I}.$$

Men kan zich afvragen wat er gebeurt als de hoogte van het viervlak tot nul nadert, d.w.z. als  $T$  in het vlak  $ABC$  komt te liggen. Daar  $T$  tevens op de omgeschreven bol van het viervlak  $TABC$  moet blijven liggen komt  $T$  dus op de doorsnijding van die bol met vlak  $ABC$ . Globaal gesproken zijn er dan drie mogelijkheden voor de ligging van  $P$ , namelijk op een der drie bogen  $AB$ ,  $BC$  resp.  $CA$ . Ons viervlak is dan verworpen tot een koordenvierhoek.

Daar nu geldt  $I=0$ , moet gelden  $J=0$ , dus een van de drie factoren

$$-aa'+bb'+cc', \quad aa'-bb'+cc', \quad aa'+bb'-cc'$$

moet gelijk zijn aan nul (zulks in overeenstemming ermee op welk van de drie bogen  $T$  gelegen is). Dit resultaat staat bekend als de stelling van Ptolemaeus voor een koordenvierhoek, van welke stelling natuurlijk ook rechtstreekse planimetrische bewijzen te geven zijn.

In het voetspoor van het bovenstaande zou zo'n bewijs te geven zijn door het trekken van een middenlijn van de omgeschreven cirkel door het punt  $T$  welke die cirkel andermaal snijdt in  $P$  en door vervolgens de raaklijn in  $P$  aan die cirkel te trekken, enz. enz. Een en ander geeft ons tevens een goede introductie op het volgende hoofdstuk.

### III. VIERHOEKEN

In dit hoofdstuk gaan wij uit van een koordenvierhoek met, in een iets andere notatie dan in het vorige hoofdstuk, vier opeenvolgende zijden met lengten  $a, b, c$  en  $d$  en diagonalen met lengten  $p$  en  $q$ . Verwisselt men vervolgens de zijden  $c$  en  $d$ , dan ontstaat een koordenvierhoek met opeenvolgende zijden  $a, b, d$  en  $c$  en diagonalen  $p$  en  $r$ .

Terwijl voor de oorspronkelijke koordenvierhoek volgens de stelling van Ptolemaeus geldt

$$ac + bd = pq$$

geldt voor de nieuw verkregen koordenvierhoek

$$ad + bc = pr$$

en door een verdere permutatie van de vier zijden is het niet moeilijk in te zien dat blijkt te gelden

$$ab + cd = qr.$$

Uit deze drie relaties volgt door eliminatie van  $q$  en  $r$  het resultaat

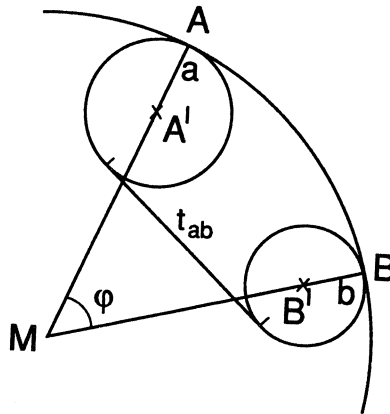
$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

en natuurlijk analoge formules voor  $q^2$  en  $r^2$ .

Wij behandelen thans een minder bekende generalisatie van de stelling van Ptolemaeus, de stelling van Casey. Deze zegt dat de formule van Ptolemaeus geldig blijft als men de hoekpunten van de koordenvierhoek opblaast tot cirkels die de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek (b.v.) gelijksoortig raken en de lengten van de zijden en de diagonalen van de koordenvierhoek vervangt door de lengten van de (b.v.) gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen aan de bedoelde cirkels twee aan twee.

Voor het bewijs van de stelling van Casey beschouwen we een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $R$  die (b.v.) inwendig wordt geraakt door twee cirkeltjes met middelpunt  $A'$ , raakpunt  $A$ , straal  $a$  resp.  $B'$ ,  $B$  en  $b$ . Voor de lengte  $t_{ab}$  van de gemeenschappelijke uitwendige raaklijn vindt men

$$\begin{aligned}
 t_{ab}^2 &= A'B'^2 - (a-b)^2 \\
 &= (R-a)^2 + (R-b)^2 - 2(R-a)(R-b)\cos\phi - (a-b)^2 \\
 &= 2(R-a)(R-b)(1-\cos\phi) = 4(R-a)(R-b)\sin^2\frac{1}{2}\phi \\
 &= \frac{R-a}{R} \frac{R-b}{R} AB^2.
 \end{aligned}$$

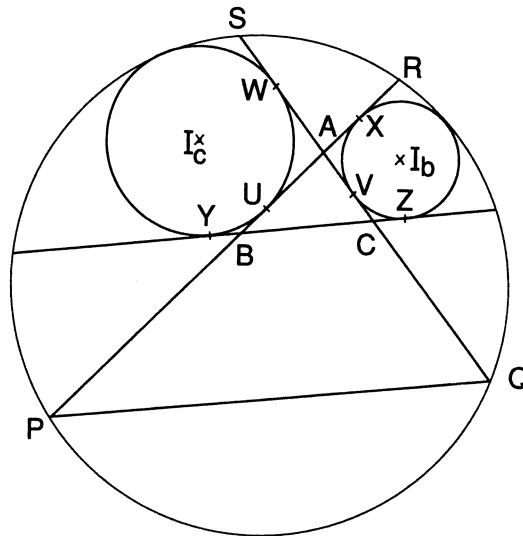


Hieruit en uit de analoge formules voor de vijf andere gemeenschappelijke raaklijnen volgt de stelling van Casey met gebruikmaking van de stelling van Ptolemaeus voor de koordenvierhoek  $ABCD$ .

Van de stelling van Casey kan men gebruik maken voor het bewijs van de volgende stelling.

Beschouw twee cirkels die een derde cirkel inwendig raken en teken hun vier gemeenschappelijke raaklijnen. De inwendige gemeenschappelijke raaklijnen snijden die derde cirkel in vier punten, waarvan twee der verbindingslijnen evenwijdig lopen met hun uitwendig gemeenschappelijke raaklijnen.





Voor het bewijs maken wij gebruik van de stelling van Casey, toegepast op de cirkels  $I_c$  en  $I_b$  en (nul)cirkels  $Q$  en  $P$ . Men heeft dan

$$PU \cdot QV + PQ \cdot YZ = PX \cdot QW.$$

Noemt men de lengten van de zijden van driehoek  $ABC$  weer  $a, b$  en  $c$  stelt men  $PA = x$  en  $QA = y$ , dan laat de Casey-relatie onder gebruikmaking van allerlei  $s$ -formules (zoals afgeleid in paragraaf I) zich schrijven als

$$\{x - (s - b)\} \{y - (s - c)\} + PQ(2s - a) = (x + s - c)(y + s - b),$$

dus

$$PQ(b + c) = xa + ya,$$

ofwel

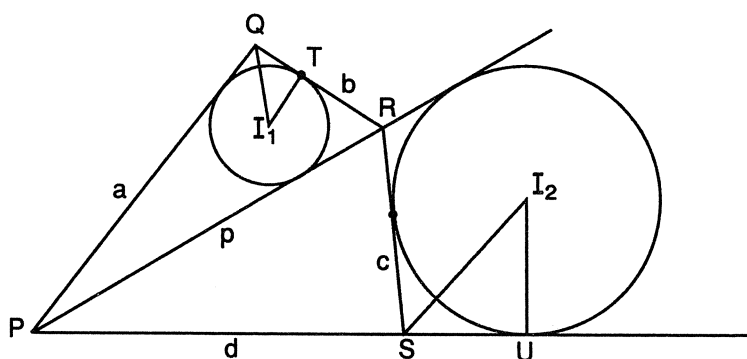
$$PQ : a = (x + y) : (b + c).$$

Hieruit volgt dat de driehoeken  $ABC$  en  $APQ$  (of  $AQP$ ) gelijkvormig zijn waaruit volgt dat  $PQ$  parallel (of antiparallel) is met  $BC$ . We slaan hier maar de ietwat subtiële redenering over die ons uiteindelijk leert dat geldt  $PQ // BC$ .

Een zeer vernuftig rechtstreeks bewijs van deze stelling, waarbij geen gebruik wordt gemaakt van de stelling van Casey is gevonden door jhr. ir. H.S. van Lennep<sup>\*</sup>.

<sup>\*</sup>) Een en ander is te vinden in Nieuw Archief voor Wiskunde 3, XVI, 1968, p. 30-31, waar na een korte inleiding mijnerzijds het bewuste bewijs wordt gegeven. Zie ook Wiskundige opgaven, 17<sup>e</sup> deel (1942), p. 44-50.

De hier bewezen stelling doet ons begrijpen dat de cirkel die de drie aangeschreven cirkels van een driehoek uitwendig raakt de zijden van de driehoek snijdt in 6 punten, waarvan drie een driehoek vormen waarvan de zijden parallel lopen met de zijden van de driehoek en de drie andere een driehoek waarvan de zijden antiparallel lopen met de zijden van de oorspronkelijke driehoek. De eerste driehoek heeft als hoekpunten dus de middens van de zijden van de oorspronkelijke driehoek, de andere moet de zgn. voetspuntsdriehoek zijn. De bedoelde raakcirkel is dus de negenpuntsdriehoek of de cirkel van Feuerbach. Een analoge redenering kan ons ten slotte leren dat deze cirkel ook raakt aan de ingeschreven cirkel van de oorspronkelijke driehoek.



Tot slot geven wij - gedeeltelijk in het voetspoor van Archimedes (Hero) - een wat ongewoon bewijs voor de oppervlakteformule

$$\vartheta = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

voor een koordenvierhoek met zijdelengten  $a, b, c$  en  $d$  en halve omtrek  $s$ .

Beschouw zo'n koordenvierhoek  $PQRS$  met ingeschreven cirkel  $I_1$  (met straal  $r_1$ ) van driehoek  $PQR$  en aangeschreven cirkel  $I_2$  (met straal  $r_2$ ) van driehoek  $PRS$ . Voor de oppervlakte  $\vartheta_1$  van  $\Delta PQR$  heeft men

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} r_1 (a + b + p)$$

en voor de oppervlakte  $\vartheta_2$  van  $\Delta PRS$  heeft men

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} r_2 (p + d - c).$$

Omdat in de koordenvierhoek de hoeken  $Q$  en  $PSR$  supplementair zijn, zijn de hoeken  $Q$  en  $RSU$  (en dus ook hun helften) onderling gelijk, hetgeen voert tot de gelijkvormigheid van de driehoeken  $QI_1T$  en  $SI_2U$ . Daaruit volgt dan

$$r_1 : r_2 = QT : SU = (a + b - p) : (p + c - d).$$

Hieruit en uit de gevonden oppervlakteformules concludeert men tot

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{(a+b+p)(a+b-p)}{(p+d-c)(p+c-d)} = \frac{(a+b)^2 - p^2}{p^2 - (c-d)^2}. \quad (1)$$

Op geheel analoge wijze vindt men

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{(c+d)^2 - p^2}{p^2 - (a-b)^2}. \quad (2)$$

Uit (1) volgt

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{(a+b)^2 - p^2}{(a+b)^2 - (c-d)^2}$$

en uit (2)

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{p^2 - (a-b)^2}{(c+d)^2 - (a-b)^2}$$

waaruit na vermenigvuldiging van de laatstgevonden relaties blijkt

$$\frac{16\vartheta_1^2}{16\vartheta^2} = \frac{(a+b+p)(a+b-p)(p+a-b)(p-a+b)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

De  $s$ -formule leert voor driehoek  $PRS$  dat in de laatste formule de tellers gelijk zijn. Dan is dat ook het geval met de noemers waarmee de beloofde formule voor de oppervlakte  $\vartheta$  van de koordenvierhoek is bewezen.



## Meetkunde en Groepen

J.H.M. Steenbrink

*Katholieke Universiteit Nijmegen  
Faculteit der Wiskunde en Informatica  
Postbus 9010 6500 GL Nijmegen*

### 0. INLEIDING

Dit verhaal gaat over tweedimensionale meetkundes. Een meetkunde is hierbij een verzameling waarin men afstanden kan meten: een metrische ruimte. Wilen we echter een mooie theorie opbouwen, dan moet die ruimte een grote mate van symmetrie hebben. We willen immers graag, dat de eigenschappen van figuren zoveel mogelijk plaats-onafhankelijk zijn: de ruimte moet homogeen zijn. Deze eigenschap kan men met behulp van groepen uitdrukken. Gegeven een metrische ruimte  $M$ , laat  $G$  de verzameling zijn van alle bewegingen van  $M$ , d.w.z. de afstandsbewarende bijecties van  $M$  op zichzelf. De homogeniteit van  $M$  komt neer op de eis, dat voor ieder tweetal punten van  $M$  een element van  $G$  bestaat dat het ene punt in het andere overvoert. Deze eigenschap van  $M$  garandeert dat de eigenschappen van de meetkunde plaats-onafhankelijk zijn.

Er is nog een andere manier waarop groepen in de meetkunde van belang zijn. Hierbij gaat het om bepaalde ondergroepen van de groep  $G$ . Eerst een voorbeeld. Laat  $M$  het Euclidische vlak zijn, d.w.z. de  $\mathbf{R}^2$  met de gebruikelijke afstandsmaat. Iedere translatie in  $\mathbf{R}^2$  behoudt de afstand, dus is een beweging. Zij nu  $T$  zo'n translatie, en laat  $\Gamma$  de ondergroep van  $G$  zijn, bestaande uit alle gehele machten van  $T$ . We kunnen nu een ruimte  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  maken, het *quotiënt van  $\mathbf{R}^2$  naar  $\Gamma$* , en wel als volgt. We identificeren in  $\mathbf{R}^2$  steeds een element  $P$  met zijn beeldpunt  $T(P)$ . In de ruimte die zo ontstaat wordt het verbindingslijnstuk tussen  $P$  en  $T(P)$  een gesloten kromme. De afstand tussen twee elementen van  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ , gerepresenteerd door twee punten  $P, Q$  van  $\mathbf{R}^2$ , definiëren we als het minimum van alle afstanden tussen  $P$  en de punten  $T^n(Q)$  waarbij  $n$  de gehele getallen doorloopt. Daarmee krijgt  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  de structuur van een cylinder.

Deze constructie is omkeerbaar. Een meetkunde heet *enkelvoudig*

*samenhangend* als men elke gesloten kromme daarin continu tot een punt kan samentrekken. De bol en het Euclidische vlak zijn daarvan voorbeelden, maar de cylinder is niet enkelvoudig samenhangend. Het blijkt dat elke meetkunde  $M$  te schrijven is als  $M/\Gamma$  waarbij  $M$  een enkelvoudig samenhangende meetkunde is en  $\Gamma$  een groep van bewegingen van  $M$ . Als we een eenvoudige eis aan  $\Gamma$  opleggen, is deze schrijfwijze uniek.

We noemen een tweedimensionale meetkunde  $M$  *lokaal Euclidisch* als elk punt van  $M$  een omgeving bezit die isometrisch is met een cirkelschijf in het Euclidische vlak. We zullen een classificatie van alle mogelijke lokaal-Euclidische tweedimensionale meetkundes beschrijven. Er blijken vijf types te bestaan, waarbij de laatste drie types oneindig veel verschillende meetkundes bevatten.

### 1. WAT IS EEN MEETKUNDE?

Zoals reeds in de inleiding werd vermeld, is een meetkunde niet een theorie, maar een verzameling met een structuur. De definitie van meetkunde in [NS] is de volgende.

We gaan uit van de structuur van *metrische ruimten*. Een metrische ruimte is een verzameling  $M$  voorzien van een afstandsfunctie op de verzameling van paren  $M \times M$ . We noteren met  $|ab|$  de afstand tussen de punten  $a, b$  van  $M$ . De afstandsfunctie op een metrische ruimte moet voldoen aan de volgende eisen:

- (a)  $|ab| \geq 0$  en  
 $|ab| = 0 \Leftrightarrow a = b$ ;
- (b)  $|ab| = |ba|$ ;
- (c)  $|ac| \leq |ab| + |bc|$  (driehoeksongelijkheid)

voor alle  $a, b, c \in M$ . Twee metrische ruimten  $M$  en  $M'$  heten *isometrisch* indien een bijectieve afbeelding  $f: M \rightarrow M'$  bestaat met  $|f(a)f(b)| = |ab|$  voor alle  $a, b \in M$ .

Er is nog één eis nodig om van een meetkunde te kunnen spreken. Om die te kunnen formuleren voeren we het begrip *keten* in. Een *keten* op  $M$  van  $a$  naar  $b$  is een rijtje punten  $p_1, \dots, p_n$  met  $p_1 = a$  en  $p_n = b$ . De *schakels* van de keten zijn de ketens  $p_i p_{i+1}$  en de *lengte* van de keten is de som van de afstanden van de schakels, i.e.  $\sum_i |p_i p_{i+1}|$ . Merk op dat voor iedere keten geldt:

$$|p_1 p_n| \leq |p_1 p_2| + \dots + |p_{n-1} p_n|.$$

Merk op dat voor ketens op een lijn het gelijktteken geldt als de keten monotoon is (de punten in de juiste volgorde staan). De laatste eis is nu:

(d) Gegeven positieve reële getallen  $\alpha$  en  $\beta$  en punten  $a, b \in M$ , dan bestaat een keten van  $a$  naar  $b$  waarvan de schakels lengte  $\leq \beta$  hebben en waarvan de totale lengte niet meer dan  $\alpha$  van  $|ab|$  verschilt.

Als voorbeelden van meetkundes in deze zin vallen te noemen de  $n$ -dimensionale Euclidische ruimten. Er zijn echter veel meer mogelijkheden,

zoals we verderop zullen zien.

Eis (d) is nogal sterk. Beschouw de sfeer  $S$  met middelpunt  $O$  en straal  $r$  in de ruimte. We kunnen hiervan een meetkunde maken door afstanden te meten langs krommen op de sfeer zelf. Gegeven  $a, b \in S$  nemen we een vlak door  $a, b$  en  $O$  (het vlak als  $a \neq \pm b$ ) en nemen in de doorsnede van dat vlak met  $S$  de kortste van de twee cirkelbogen. We vinden zo de afstand  $|ab| = r \angle aOb$ , waarbij de hoek waarden aanneemt in het interval  $[0, \pi]$ . Zouden we de afstand meten in de ruimte, dan meten we de lengte van het lijnstuk  $ab$ ; die metriek op  $S$  voldoet niet aan eis (d).

We noemen een meetkunde  $M$  lokaal Euclidisch van dimensie  $n$  als er een getal  $r > 0$  bestaat zodanig dat voor ieder punt  $a$  van  $M$  de bol  $B(a, r) = \{x \in M \mid |ax| < r\}$  isometrisch is met de bol met middelpunt  $O$  en straal  $r$  in  $\mathbf{R}^n$ . Het hoofdthema in [NS] is een bespreking van twee- en driedimensionale lokaal-Euclidische meetkundes. Deze laatste zijn vooral interessant wegens hun verband met kristallografische groepen.

**Opgave.** Toon aan dat de meetkunde op de sfeer niet lokaal-Euclidisch is.

**Opgave.** Klassificeer alle ééndimensionale lokaal-Euclidische meetkundes.

**Opgave.** Laat zien dat iedere meetkunde boogsamenhangend is.

## 2. TWEEDIMENSIONALE LOKAAL-EUCLIDISCHE MEETKUNDES

We laten hier eerst een aantal voorbeelden de revue passeren.

(a) *Het Euclidische vlak.* Dit voorbeeld heeft geen betoog.

(b) *De cylinder.* Bekijk in  $\mathbf{R}^3$  de cylinder  $C_r$  met vergelijking  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ). Hierop meten we weer de afstand via krommen die geheel op  $C_r$  liggen. We kunnen  $C_r$  parametriseren door de afbeelding.

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow C_r, f(x, y) = (r \cos(x), r \sin(x), y)$$

De afbeelding  $f$  wordt 1-1 zodra we hem beperken tot een verticale strip van breedte minder dan  $2\pi r$ . Beperken we  $f$  tot een strip van breedte hoogstens  $\pi r$ , dan is  $f$  zelfs afstandsbewarend. Hieruit blijkt dat  $C_r$  lokaal-Euclidisch is. We kunnen ons  $C_r$  voorstellen als ontstaan uit een (gesloten) verticale strip van breedte  $2\pi r$ , waarvan we de linkerkant op de rechterkant plakken door identificatie van de punten  $(x, y)$  met  $(x + 2\pi r, y)$ . Rechte lijnen in  $\mathbf{R}^2$  worden door  $f$  afgebeeld op een cirkel of op een helixvormige kromme. Zulke krommen zijn nog wel de korste verbindingen tussen twee van hun punten mits die voldoende dicht bij elkaar liggen: het zijn de *geodeten* van  $C_r$ . De geodeten van eindige lengte hebben allemaal dezelfde lengte:  $2\pi r$ .

(c) *De getwiste cylinder.* Deze ontstaat als we ons vergissen bij het plakken in voorbeeld (b) en het punt  $(x, y)$  van de linkerkant identificeren met het punt  $(x + 2\pi r, -y)$ . Het oppervlak dat zo ontstaat is nog steeds lokaal Euclidisch (want je merkt op kleine schaal niets van dat verkeerde plakken) maar is niet meer oriënteerbaar. Het is een onbegrensde versie van een Möbiusband. Er is precies één geodeet met lengte  $2\pi r$ , de overige hebben lengte  $4\pi r$  of zijn

onbegrensd.

(d) *De torus*. Hier moeten we oppassen: het gebruikelijke beeld van de torus in de ruimte levert wel een meetkunde op, maar deze is niet lokaal-Euclidisch. Om een lokaal-Euclidische meetkunde op de torus te krijgen zijn er twee manieren. De eerste is: beschouw de torus als het Cartesisch product van twee cirkels en leg hierop de produkt-metriek. Daar de cirkel lokaal-Euclidisch is, levert dit een lokaal-Euclidische metriek op de torus op. Zo'n torus kan men inbedden in  $\mathbf{R}^4$  en parametriseren door de afbeelding  $g:(x,y) \mapsto (\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y))$ . Een andere methode gaat weer via plakken. We kunnen een torus maken uit een parallellogram door daarvan de paren overstaande zijden te identificeren. Neem bijvoorbeeld het vierkant in  $\mathbf{R}^2$  met hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1)$ . Identificeer telkens  $(-1, y)$  met  $(1, y)$  en  $(x, -1)$  met  $(x, 1)$ . Er zijn weer diverse soorten geodeten: die van oneindige lengte komen oneindig vaak in de buurt van ieder punt. Zo'n geodeet is het beeld van een lijn in  $\mathbf{R}^2$  die een irrationale richtingscoëfficiënt heeft. Voor een lijn met rationale richtingscoëfficiënt hangt de lengte van de geodeet die als beeld optreedt af van de noemer van de richtingscoëfficiënt.

Als we ons weer vergissen met plakken en wel  $(-1, y)$  met  $(1, y)$ , maar  $(x, -1)$  met  $(-x, 1)$  identificeren ontstaat

(e) *De fles van Klein*. Dit is weer een niet-oriënteerbaar oppervlak.

We hebben nu vijf typen van lokaal-Euclidische vlakke meetkundes gezien. Het is niet moeilijk na te gaan dat een meetkunde tot ten hoogste één van deze typen kan behoren.

We beschrijven nu een algemene constructie van lokaal-Euclidische tweedimensionale meetkonden met behulp van groepen. Zij  $G$  de groep van alle bewegingen van het Euclidische vlak  $\mathbf{R}^2$ . Voorbeelden van zulke bewegingen zijn: translaties, draaiingen en spiegelingen. Elk element van  $G$  is eenduidig te schrijven als  $g = TS$  waar  $T$  een translatie is en  $S(0) = 0$ . Dan is  $S$  òf een draaiing om  $O$  òf een spiegeling ten opzichte van een lijn door  $O$ . Een stelling van Chasles zegt dat elk element van  $G$  òf een draaiing òf een spiegeling in een lijn òf een glijspiegeling is (een spiegeling in een lijn gevolgd door een translatie in de richting van die lijn).

We noteren de translatie over een vector  $v$  met  $T_v$  en de glijspiegeling t.o.v. een lijn  $l$  met translatievector  $x$  als  $S_l^x$ .

Zij nu  $\Gamma$  een *ondergroep* van  $G$ . Men noemt zo'n  $\Gamma$  *uniform discontinu* indien een positief getal  $d$  bestaat zodanig dat, als  $g$  een beweging in  $\Gamma$  is en  $X$  een punt van het vlak met  $g(X) \neq X$  dan  $|Xg(X)| \geq d$ . Merk op dat een uniform discontinue groep geen spiegelingen of draaiingen kan bevatten, want daarvoor kan men steeds punten vinden die willekeurig dicht bij hun beeldpunt liggen. Derhalve mag zo'n groep alleen uit translaties en glijspiegelingen bestaan.

Een groep  $\Gamma$  van bewegingen van  $\mathbf{R}^2$  definiëert een equivalentierelatie op  $\mathbf{R}^2$ : twee punten heten equivalent indien er een beweging in  $\Gamma$  is die het ene punt in het andere overvoert. De verzameling der equivalentieklassen noteren we met  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ . Voorbeeld: nemen we  $\Gamma = G$ , dan is er maar één equivalentieklasse, en  $\mathbf{R}^2/G$  bestaat uit slechts één element. Nemen we echter voor  $\Gamma$  de groep



bestaande uit de veelvouden van een translatie over een vector  $v$ , dan kunnen we  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  als cylinder opvatten.

Gegeven een uniform discontinue ondergroep  $\Gamma$  van  $G$ , laat  $M = \mathbf{R}^2/\Gamma$ . Hierop leggen we een metriek als volgt. Laat  $p, q \in M$ . Dan wordt  $|pq|$  gedefinieerd als de minimale waarde van  $|PQ|$  waarbij  $P$  en  $Q$  de klassen  $p$  en  $q$  doorlopen. (Dat dit minimum wordt aangenomen, volgt uit de definitie van uniform discontinu.)

**Stelling 1.** Voor iedere uniform discontinue groep  $\Gamma$  van bewegingen van het Euclidische vlak is  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  een tweedimensionale lokaal-Euclidische meetkunde.

**Stelling 2.** Een uniform discontinue groep van bewegingen van  $\mathbf{R}^2$  is van één van de volgende typen:

- (a)  $\Gamma$  bestaat alleen uit de identieke afbeelding;
- (b)  $\Gamma$  bestaat uit translaties over vectoren  $nv$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) met  $v$  een vaste vector  $\neq 0$ ;
- (c)  $\Gamma$  bestaat uit alle gehele machten van een glijspiegeling met translatievector  $\neq 0$ ;
- (d)  $\Gamma$  bestaat uit translaties over vectoren  $nv + mw$  ( $n, m \in \mathbf{Z}$ ) waar  $v$  en  $w$  lineair onafhankelijke vectoren in  $\mathbf{R}^2$  zijn;
- (e) laat  $l$  een lijn in het vlak zijn,  $v$  een richtingsvector van  $l$  en  $w$  een vector  $\neq 0$  loodrecht op  $l$ ;  $\Gamma$  bestaat uit de translaties over  $nv + mw$  ( $n, m \in \mathbf{Z}$ ) en uit de glijspiegelingen  $T_x S^{v/2}$  waar  $x$  een vector van dezelfde gedaante is.

Merk op dat deze typen van groepen precies corresponderen met de voorbeelden (a) - (e)!

**Stelling 3.** Iedere tweedimensionale lokaal-Euclidische meetkunde behoort tot één der typen (a) t/m (e).

Dit resultaat volgt uit het feit dat iedere tweedimensionale lokaal-Euclidische meetkunde  $M$  isometrisch is met een meetkunde van de vorm  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  met  $\Gamma$  een uniform discontinue groep van bewegingen van  $\mathbf{R}^2$ . Dit kan worden bewezen door eerst een voldoende kleine schijf in  $\mathbf{R}^2$ , zeg met een straal  $r$ , isometrisch naar  $M$  af te beelden, en dan te laten zien dat deze afbeelding uit te breiden is tot een surjectieve afbeelding  $F$  van  $\mathbf{R}^2$  naar  $M$  die voldoet aan:  $|F(P)F(Q)| = |PQ|$  voor alle  $P, Q \in \mathbf{R}^2$  met  $|PQ| < r$ . We krijgen zo een equivalentierelatie op  $\mathbf{R}^2: P \sim Q$  als  $F(P) = F(Q)$ . Men kan nu aantonen dat deze equivalentierelatie afkomt van een uniform discontinue groep  $\Gamma$ .

#### REFERENTIE

[NS] V.V. NIKULIN, I.R. SHAFAREVICH, *Geometries and groups*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin etc., 1987.



## Configuraties en Computers

J. Simonis  
 Technische Universiteit Delft  
 Postbus 356, 2600 AJ Delft

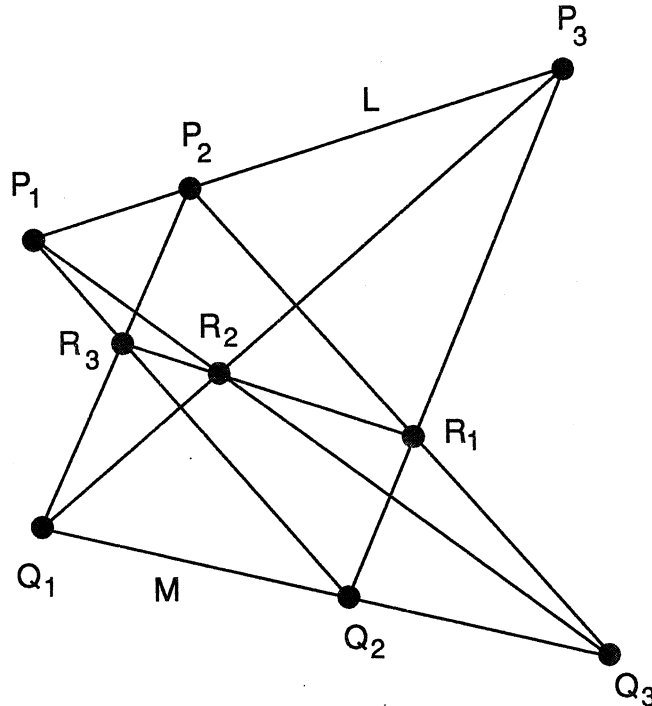
### 1 INLEIDING

We beginnen met de twee beroemdste stellingen van de projectieve meetkunde:

**Stelling van Pappos:** *Neem in het vlak twee willekeurige lijnen  $L, M$  en op elke lijn drie willekeurige punten:  $P_1, P_2, P_3 \in L$  en  $Q_1, Q_2, Q_3 \in M$ . Dan liggen de snijpunten*

$$R_1 := P_2Q_3 \cap P_3Q_2, R_2 := P_3Q_1 \cap P_1Q_3 \text{ en } R_3 := P_1Q_2 \cap P_2Q_1$$

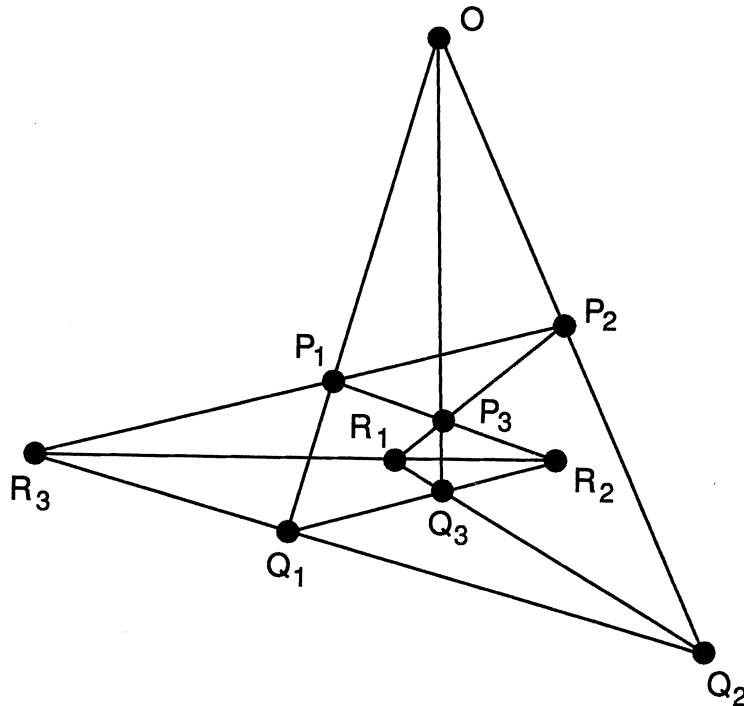
*van de kruiselingse verbindingslijnen op één lijn.*



**Stelling van Desargues:** *Als in het vlak twee driehoeken  $P_1P_2P_3$ ,  $Q_1Q_2Q_3$  zo gelegen zijn dat de verbindingslijnen  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_2$  en  $P_3Q_3$  door één punt  $O$  gaan, dan liggen de drie snijpunten*

$$R_1 := P_2P_3 \cap Q_2Q_3, R_2 := P_3P_1 \cap Q_3Q_1 \text{ en } R_3 := P_1P_2 \cap Q_1Q_2$$

*op één lijn.*



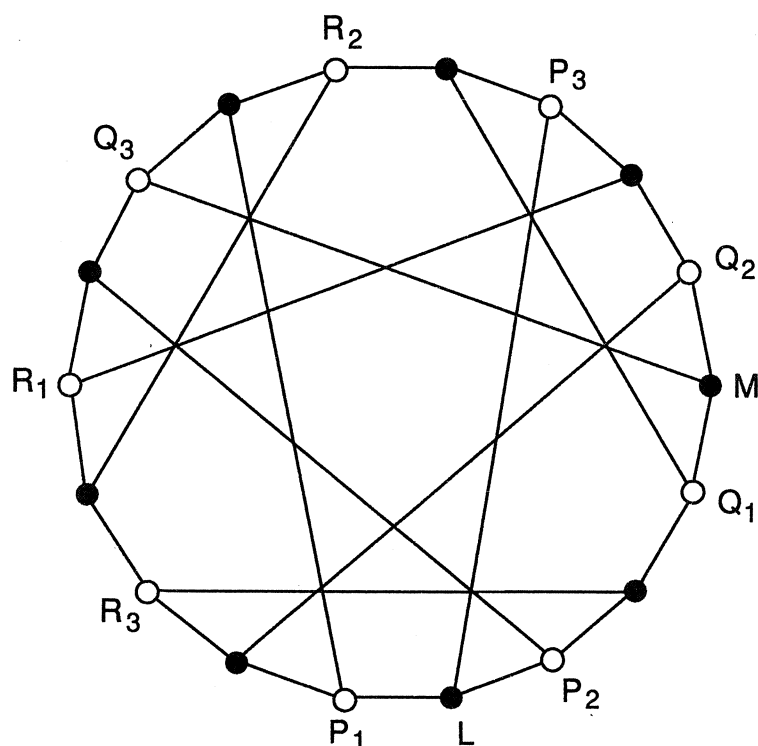
De (talloze) bewijzen van deze beide stellingen vallen uiteen in twee klassen, afhankelijk van onze definitie van vlak. Is onze meetkunde gebaseerd op **axioma's**, dan spreken we van **synthetische** bewijzen. Gebruiken we **coördinaten**, dan heten de bewijzen **analytisch**. Het algoritme dat op het eind van dit artikel beschreven wordt, genereert ook voor de stellingen van Pappos en Desargues “automatische” bewijzen. Deze zijn in essentie van analytische aard.

Bij nadere bestudering van de bovenstaande afbeeldingen valt ons een merkwaardige regelmaat op: bij de figuur van Pappos gaat het om 9 punten en 9 lijnen, bij de figuur van Desargues om 10 punten en 10 lijnen. In beide gevallen bevat elke lijn precies 3 punten en gaan door elk punt precies 3 lijnen! Dergelijke figuren heten **configuraties**:

*Een  $n_i$ -configuratie in het vlak is een collectie van  $n$  lijnen en  $n$  punten zo dat elke lijn met precies  $i$  punten en elk punt met precies  $i$  lijnen incident is.*

Dus de figuur van Pappos is een  $9_3$ -configuratie en die van Desargues een  $10_3$ -configuratie.

Aan configuraties zitten zowel **combinatorische** als **meetkundige** kanten. De  $n$  punten en lijnen van een  $n_i$ -configuratie bezitten een incidentiestructuur die van elke meetkundige interpretatie ontdaan kan worden. Om deze structuur te beschrijven kunnen we bijvoorbeeld gebruik maken van **graf**en: de  $n$  punten en lijnen corresponderen met de  $2n$  knopen van een bipartiete graaf, waarbij elke tak correspondeert met een punt-lijn-incidentie. Als voorbeeld geven we hieronder de graaf van de configuratie van Pappos:



Een andere geschikte manier om de combinatorische structuur van configuraties vast te leggen gebruikt het begrip **matroïde**. We zullen hier later op terugkomen.

De theorie van de combinatorische configuraties houdt zich bezig met boeiende vragen als

*Voor welke  $n$  en  $i$  bestaan er combinatorische  $n_i$ -configuraties?*

*Hoeveel wezenlijk verschillende zijn er bij gegeven  $n$  en  $i$ ?*

*Welke symmetriën vertoont een gegeven combinatorische  $n_i$ -configuratie?*

De meetkundige is natuurlijk meer geïnteresseerd in vragen als de volgende:

*Zijn de kandidaat-configuraties die de combinatoriek ons levert te realiseren als meetkundige configuraties in het vlak? Met andere woorden: zijn er*

*werkelijk in het vlak  $n$  lijnen en punten te vinden met het voorgeschreven incidentiepatroon?*

Aan deze vraag dient echter een fundamentele vraag vooraf te gaan:

*Wat is eigenlijk een vlak?*

## 2 HET PROJECTIEVE VLAK

We beginnen met het vlak  $V \subset \mathbb{R}^3$  te bestuderen dat gegeven is door de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Elk punt  $\underline{x} \in V$  spant een unieke 1-dimensionale deelruimte  $[\underline{x}] \subset \mathbb{R}^3$  op, maar op deze manier verkrijgen we niet alle 1-dimensionale deelruimten van  $\mathbb{R}^3$ : de 1-dimensionale deelruimten die  $V$  niet snijden (parallel zijn aan  $V$ ) ontbreken. Elke lijn in  $V$  spant een unieke 2-dimensionale deelruimte van  $\mathbb{R}^3$  op, en op één uitzondering na krijgen we zo alle 2-dimensionale deelruimten. Die ene uitzondering is de ruimte  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , die immers parallel aan  $V$  is.

Het basisidee van de analytische projectieve meetkunde is dat de ontbrekende 1- en 2-dimensionale deelruimten geïnterpreteerd kunnen worden als de punten en de lijn “op oneindig” van  $V$ . Preciezer: is  $\underline{x} \neq \underline{o}$  een vector parallel aan  $V$ , dan representeert de 1-dimensionale deelruimte  $[\underline{x}] := \{\lambda \underline{x} | \lambda \in \mathbb{R}\}$  het punt op oneindig van alle lijnen in  $V$  die de richtingsvector  $\underline{x}$  hebben.

Vullen we  $V$  met de punten op oneindig aan tot het *z.g. projectieve vlak*  $\bar{V}$ , dan is er een perfecte correspondentie tussen de punten en de lijnen van  $\bar{V}$  enerzijds en de 1- en 2-dimensionale lineaire deelruimten van de vectorruimte  $\mathbb{R}^3$  anderzijds.

We doen nu een koene stap: we vergeten  $V$  (en  $\bar{V}$ ) en noemen de verzameling van de 1-dimensionale deelruimten van  $\mathbb{R}^3$  het **projectieve vlak**  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Elke vector  $\underline{x} \neq \underline{o}$  representeert een punt  $[\underline{x}] := \{\lambda \underline{x} | \lambda \in \mathbb{R}\}$  van  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , en drie punten  $[\underline{x}]$ ,  $[\underline{y}]$  en  $[\underline{z}]$  liggen op een lijn (zijn **collineair**) precies als de vectoren  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  en  $\underline{z}$  lineair afhankelijk zijn.

Door deze simpele ingreep hebben we de (projectieve) meetkunde teruggebracht tot lineaire algebra. De analytische benadering heeft als groot voordeel dat we voor het lichaam  $\mathbb{R}$  elk lichaam  $K$  kunnen substitueren. Zo levert de keuze  $K := \mathbb{C}$  het **complexe** projectieve vlak  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  en  $K := \mathbb{F}_q$  het **eindige** projectieve vlak  $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q)$ .

Deze keuzevrijheid leidt tot de volgende formulering van ons hoofdprobleem:

*Voor welke lichamen  $K$  is een gegeven combinatorische configuratie te realiseren in het projectieve vlak  $\mathbb{P}_2(K)$ ?*

## 3 MATROÏDEN

We hebben hierboven collineariteit van punten teruggebracht tot afhankelijkheid van vectoren. Dus de punten van bijvoorbeeld een  $n_3$ -configuratie corresponderen met de kolommen van een  $3 \times n$ -matrix zo dat drie punten collineair zijn precies als de corresponderende kolommen afhankelijk zijn. Op die manier representeert de matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$O \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3$

de tien punten van een configuratie van Desargues.

We willen nu de lineaire algebra overboord zetten en toch begrippen als afhankelijkheid, basis enz. behouden. Wat overblijft is het begrip **matroïde** (matrix-achtige).

Algemener bekijken we een  $m \times n$ -matrix van rang  $m$ , en in het bijzonder de  $n$  kolomvectoren. We observeren dan dat sommige collecties kolomvectoren een basis van  $K^m$  vormen en andere niet. Dit patroon kan niet totaal willekeurig zijn, want in een vectorruimte geldt de **uitwisselingsstelling van Grassmann-Steinitz**:

*Zijn  $B, B'$  twee bases van  $K^n$ , dan is er bij elke vector  $\underline{b} \in B$  een vector  $\underline{b}' \in B'$  zo dat  $(B \setminus \{\underline{b}\}) \cup \{\underline{b}'\}$  ook een basis is van  $K^n$ . (We hebben de vectoren  $\underline{b}$  en  $\underline{b}'$  uitgewisseld.)*

(Uit dit resultaat volgt onder meer dat elk tweetal bases evenveel vectoren telt.)

We nemen nu de stelling van Grassmann-Steinitz als uitgangspunt voor de **definitie**:

*Een **matroïde**  $M$  is een paar  $(E, \mathcal{B})$  bestaande uit een eindige verzameling  $E$  en een collectie  $\mathcal{B}$  van deelverzamelingen van  $E$  (de z.g. **bases**) zo dat bij elk paar bases  $B, B'$  en elk element  $b \in B \setminus B'$  een element  $b' \in B'$  bestaat zo dat  $(B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$  ook een basis is.*

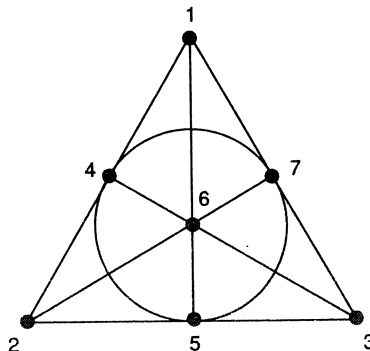
Merk op dat evenals in een vectorruimte alle bases van  $M$  hetzelfde aantal elementen  $d$  hebben. Dit aantal heet de **rang** van  $M$ .

**Voorbeeld:** De volgende tekening stelt de zeven **niet-bases**

$$\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}$$

van een rang-3-matroïde  $M$  over de verzameling  $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  voor.

Dus de overblijvende  $\binom{7}{3} - 7 = 28$  drietallen zijn de bases van  $M$ .



Allerlei begrippen uit de lineaire algebra hebben hun pendant in de theorie van de matroïden. We geven een klein lijstje:

Zij  $M := \{E, \mathcal{B}\}$  een matroïde van rang  $d$ .

Een deelverzameling  $A \subset E$  heet **onafhankelijk** als  $A$  bevat is in een basis. Zoniet, dan heet  $A$  **afhankelijk**.

De **rang**  $\rho(A)$  van een deelverzameling  $A \subset E$  is de cardinaliteit van de grootste onafhankelijke deelverzameling die bevat is in  $A$ .

Een deelverzameling  $A \subset E$  heet een **deelruimte** als

$$\rho(A \cup \{x\}) > \rho(A) \quad \forall x \in E \setminus A.$$

Deelruimten van rang 1, 2, 3 en  $d - 1$  heten respectievelijk **punten**, **lijnen**, **vlakken** en **hypervlakken**.

Dankzij deze terminologie is duidelijk wat bedoeld is als we een matroïde een  $n_i$ -configuratie noemen. Zo is ons voorbeeld hierboven een  $7_3$ -configuratie, met als lijnen de zeven niet-bases.

Voor het toepassen van recursie moeten we van grote matroïden op kleinere kunnen overstappen. Twee manieren komen in aanmerking:

Zij  $e \in E$  een willekeurig element.

De **deletie**  $M \setminus e$  is de matroïde over de verzameling  $E \setminus \{e\}$  met als bases de bases van  $M$  die  $e$  niet bevatten.

De **contractie**  $M/e$  is de matroïde over  $E \setminus \{e\}$  met als bases de verzamelingen  $B$  zo dat  $B \cup \{e\}$  een basis is van  $M$ .

Tenslotte waar het ons eigenlijk om te doen is:

Een **realisatie** over het lichaam  $K$  van een matroïde  $M$  van rang  $d$  is een afbeelding  $\sigma : M \rightarrow K^d$  zo dat  $\sigma(B)$  een basis is van  $K^d$  dan en slechts dan als  $B$  een basis is van  $M$ . Voor een **zwakke realisatie** wordt slechts geëist dat  $\sigma$  geen enkele niet-basis in een basis overvoert.

Voor welke  $K$  is bijvoorbeeld onze  $7_3$ -configuratie realiseerbaar? In het vervolg zullen we zien dat er een systematische manier bestaat om dit vast te stellen.

#### 4 EEN ALGORITME VOOR $n_3$ -CONFIGURATIES

Als voorbereiding wat analytische meetkunde:

- i) Drie punten  $[\underline{x}]$ ,  $[\underline{y}]$ ,  $[\underline{z}]$  in het projectieve vlak  $\mathbb{P}(K)$  zijn collineair dan en slechts dan als de vectoren  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z} \in K^3$  afhankelijk zijn, d.w.z. als  $\det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = 0$ . Voor de determinant de volgende “**haakjes**”-notatie gebruikelijk:

$$[\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}] := \det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}).$$



- ii) Het snijpunt van de lijnen  $[\underline{x}_1][\underline{x}_2]$  en  $[\underline{x}_3][\underline{x}_4]$  wordt gerepresenteerd door de vector

$$\underline{v} := [\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3] \cdot \underline{x}_4 + [\underline{x}_2\underline{x}_1\underline{x}_4] \cdot \underline{x}_3. \quad (*)$$

Het is immers duidelijk dat  $\underline{v}$  afhankelijk is van  $\underline{x}_3$  en  $\underline{x}_4$ . Uit

$$[\underline{v}\underline{x}_1\underline{x}_2] = [\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3][\underline{x}_4\underline{x}_1\underline{x}_2] + [\underline{x}_2\underline{x}_1\underline{x}_4][\underline{x}_3\underline{x}_1\underline{x}_2] = 0$$

volgt dat  $\underline{v}$  eveneens afhankelijk is van  $\underline{x}_1$  en  $\underline{x}_2$ . (Merk op dat  $[\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3] = [\underline{x}_3\underline{x}_1\underline{x}_2]$  en  $[\underline{x}_4\underline{x}_1\underline{x}_2] = -[\underline{x}_2\underline{x}_1\underline{x}_4]$ .)

- iii) De drie lijnen  $[\underline{x}_1][\underline{x}_2]$ ,  $[\underline{x}_3][\underline{x}_4]$  en  $[\underline{x}_5][\underline{x}_6]$  gaan door één punt als het snijpunt  $[\underline{v}]$  van  $[\underline{x}_1][\underline{x}_2]$  en  $[\underline{x}_3][\underline{x}_4]$  collineair is met de punten  $[\underline{x}_5]$  en  $[\underline{x}_6]$ , d.w.z. als

$$[\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3][\underline{x}_4\underline{x}_5\underline{x}_6] + [\underline{x}_2\underline{x}_1\underline{x}_4][\underline{x}_3\underline{x}_5\underline{x}_6] = 0. \quad (**)$$

- iv) Tenslotte nog een normeringskwestie:

Zijn  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4 \in K^3$  vier vectoren waarvan elk drietal een basis is, dan bestaat er een coördinatentransformatie  $\underline{x} \mapsto \tilde{\underline{x}}$  zo dat voor elke permutatie  $\sigma := (i_1, i_2, i_3, i_4)$  van  $(1, 2, 3, 4)$  geldt dat

$$[\tilde{\underline{x}}_{i_1}\tilde{\underline{x}}_{i_2}\tilde{\underline{x}}_{i_3}] = \text{sign}(\sigma).$$

(We kunnen er namelijk voor zorgen dat

$$\tilde{\underline{x}}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\underline{x}}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\underline{x}}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \tilde{\underline{x}}_4 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dit is de zogenaamde **hoofdstelling van de projectieve meetkunde**.)

We gaan nu onderzoeken voor welk lichaam  $K$  onze  $7_3$ -configuratie realiseerbaar is, in de hoop dat zo het algemene algoritme vanzelf duidelijk zal worden. Zij dus

$$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5, \underline{x}_6, \underline{x}_7\} \subset K^3$$

een zevental vectoren dat voldoet aan de voorwaarden

$$\begin{aligned} [\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_4] &= [\underline{x}_2\underline{x}_3\underline{x}_5] = [\underline{x}_3\underline{x}_4\underline{x}_6] = [\underline{x}_4\underline{x}_5\underline{x}_7] = [\underline{x}_5\underline{x}_6\underline{x}_1] = [\underline{x}_6\underline{x}_7\underline{x}_2] = \\ &= [\underline{x}_7\underline{x}_1\underline{x}_3] = 0. \end{aligned}$$

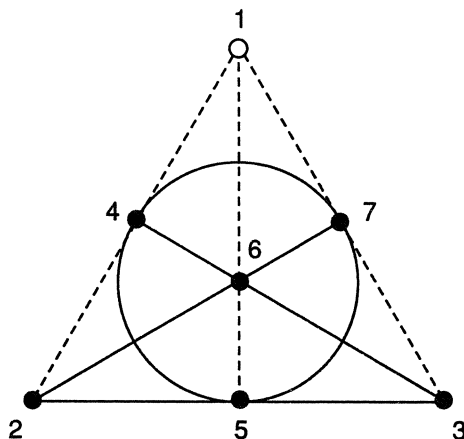
We gaan met behulp van de formules (\*) en (\*\*) vectoren **eliminieren**: Bij de eliminatie van  $\underline{x}_1$  verdwijnen de voorwaarden

$$[\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_4] = [\underline{x}_5\underline{x}_6\underline{x}_1] = [\underline{x}_7\underline{x}_1\underline{x}_3] = 0$$

en ontstaat de voorwaarde

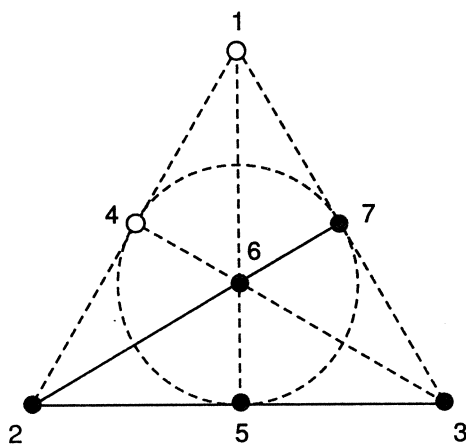
$$[x_2 x_4 x_5][x_6 x_3 x_7] + [x_4 x_2 x_6][x_5 x_3 x_7] = 0. \quad (4.1)$$

We zijn van de matroïde  $M$  overgegaan op de matroïde  $M \setminus 1$ .



Nu elimineren we  $x_4$  door deze te vervangen door

$$[x_3 x_6 x_5] \cdot x_7 + [x_6 x_3 x_7] \cdot x_5.$$



De voorwaarden

$$[x_3 x_4 x_6] = [x_4 x_5 x_7] = 0$$

verdwijnen en de voorwaarde (4.1) verandert wegens  $[x_2 x_5 x_5] = [x_7 x_2 x_6] = 0$  in

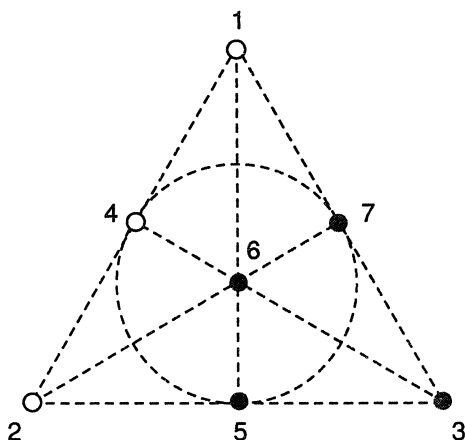
$$[\underline{x}_3\underline{x}_6\underline{x}_5][\underline{x}_2\underline{x}_7\underline{x}_5][\underline{x}_6\underline{x}_3\underline{x}_7] + [\underline{x}_6\underline{x}_3\underline{x}_7][\underline{x}_5\underline{x}_2\underline{x}_6][\underline{x}_5\underline{x}_3\underline{x}_7] = 0.$$

We mogen door  $[\underline{x}_6\underline{x}_3\underline{x}_7]$  delen omdat  $\{6, 3, 7\}$  een basis is. Dit geeft

$$[\underline{x}_3\underline{x}_6\underline{x}_5][\underline{x}_2\underline{x}_7\underline{x}_5] + [\underline{x}_6\underline{x}_3\underline{x}_7][\underline{x}_5\underline{x}_2\underline{x}_6] = 0. \quad (4.2)$$

Vervolgens vervangen we  $\underline{x}_2$  door

$$[\underline{x}_3\underline{x}_5\underline{x}_6] \cdot \underline{x}_7 + [\underline{x}_5\underline{x}_3\underline{x}_7] \cdot \underline{x}_6.$$



De voorwaarden

$$[\underline{x}_2\underline{x}_3\underline{x}_5] = [\underline{x}_6\underline{x}_7\underline{x}_2] = 0$$

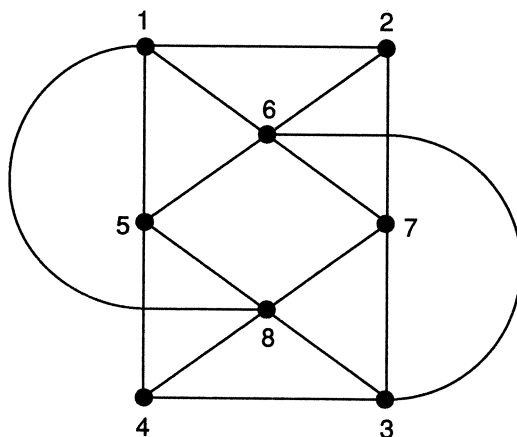
verdwijnen en de voorwaarde (4.2) verandert in

$$[\underline{x}_5\underline{x}_3\underline{x}_7][\underline{x}_3\underline{x}_6\underline{x}_5][\underline{x}_6\underline{x}_7\underline{x}_5] + [\underline{x}_3\underline{x}_5\underline{x}_6][\underline{x}_6\underline{x}_3\underline{x}_7][\underline{x}_5\underline{x}_7\underline{x}_6] = 0.$$

De beide termen aan de linkerkant zijn gelijk en verschillend van nul, dus we vinden uiteindelijk de voorwaarde  $2 = 0$ .

**Conclusie:** onze matroïde is alleen realiseerbaar over lichamen van karakteristiek 2 (en staat dan bekend als de **configuratie van Fano**). In het reële of complexe projectieve vlak bestaat onze 7<sub>3</sub>-configuratie niet!

In het volgende voorbeeld komt een nieuw element naar voren: het introduceren van parameters. Het gaat hier om de 8<sub>3</sub>-configuratie waarvan de incidentiestructuur af te lezen is uit de volgende tekening:

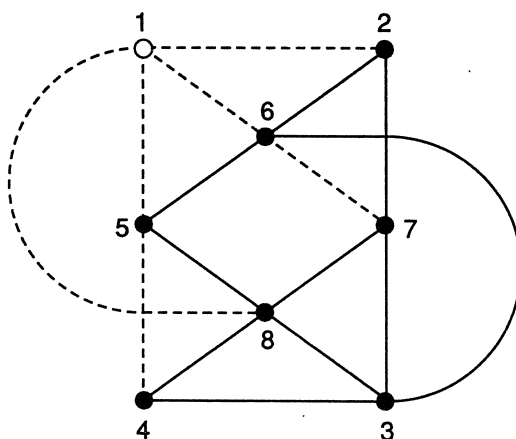


Bij een realisering  $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5, \underline{x}_6, \underline{x}_7, \underline{x}_8\} \subset K^3$  moet dus voldaan zijn aan de voorwaarden

$$\begin{aligned} [\underline{x}_1 \underline{x}_2 \underline{x}_8] &= [\underline{x}_1 \underline{x}_4 \underline{x}_5] = [\underline{x}_1 \underline{x}_6 \underline{x}_7] = [\underline{x}_2 \underline{x}_5 \underline{x}_6] = [\underline{x}_2 \underline{x}_3 \underline{x}_7] = [\underline{x}_3 \underline{x}_4 \underline{x}_6] = \\ &= [\underline{x}_3 \underline{x}_5 \underline{x}_8] = [\underline{x}_4 \underline{x}_7 \underline{x}_8] = 0. \end{aligned}$$

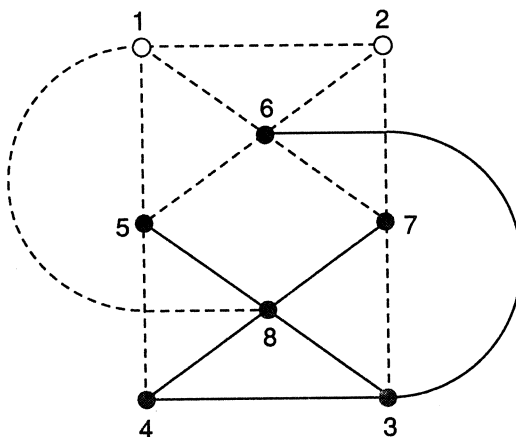
De eliminatie van  $\underline{x}_1$  levert de conditie

$$[\underline{x}_2 \underline{x}_8 \underline{x}_6][\underline{x}_7 \underline{x}_4 \underline{x}_5] + [\underline{x}_8 \underline{x}_2 \underline{x}_7][\underline{x}_6 \underline{x}_4 \underline{x}_5] = 0. \quad (4.3)$$



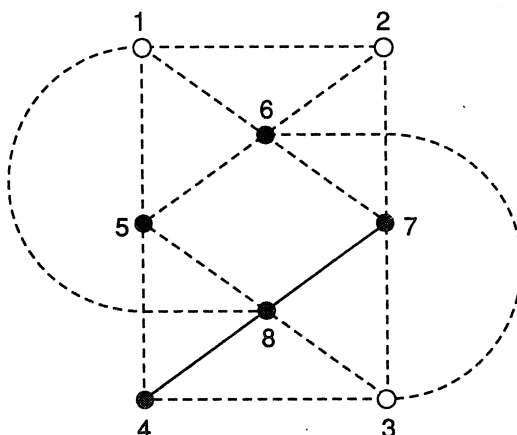
De substitutie  $\underline{x}_2 := [\underline{x}_5 \underline{x}_6 \underline{x}_3] \cdot \underline{x}_7 + [\underline{x}_6 \underline{x}_5 \underline{x}_7] \cdot \underline{x}_3$  verandert (4.3) in:

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_3] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_8 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] + [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_8 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] + \\
& + [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_8 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$



Na de substitutie  $\underline{x}_3 := [\underline{x}_5 \underline{x}_8 \underline{x}_4] \cdot \underline{x}_6 + [\underline{x}_8 \underline{x}_5 \underline{x}_6] \cdot \underline{x}_4$  ontstaat uit (4.4) de voorwaarde

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{x}_8 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_4] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_8 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] + \\
& + [\mathbf{x}_8 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_4 \mathbf{x}_8 \mathbf{x}_6] [\mathbf{x}_7 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] + \\
& + [\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8 \mathbf{x}_4] [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_8 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7] [\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5] = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$



Wegens  $[\underline{x}_4 \underline{x}_7 \underline{x}_8] = 0$  kunnen we voor geschikte  $\lambda, \mu \neq 0$  de vector  $\underline{x}_4$  vervangen door de lineaire combinatie  $\lambda \cdot \underline{x}_7 + \mu \cdot \underline{x}_8$ . De voorwaarde (4.5) verandert

dan in

$$\begin{aligned}
& \lambda\mu[x_8x_5x_6][x_5x_6x_7][x_7x_8x_6][x_7x_8x_5]+ \\
& +\mu^2[x_8x_5x_6][x_5x_6x_8][x_7x_8x_6][x_7x_8x_5]+ \\
& +\lambda\mu[x_8x_5x_6][x_6x_5x_7][x_7x_8x_6][x_7x_8x_5]+ \\
& +\lambda^2[x_5x_8x_7][x_6x_5x_7][x_8x_6x_7][x_6x_7x_5]+ \\
& +\lambda\mu[x_5x_8x_7][x_6x_5x_7][x_8x_6x_7][x_6x_8x_5] = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Elk drietal van de overgebleven vier vectoren is een basis van  $K^3$ , dus we mogen de haakjes *op*  $\pm 1$  normeren. Dit levert de eenvoudige vergelijking

$$\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0. \tag{4.7}$$

Deze vergelijking heeft geen niet-triviale oplossing in  $\mathbb{R}$ , maar wel in  $\mathbb{C}$ .

**Conlusie:** onze  $8_3$ -configuratie bestaat niet in het reële projectieve vlak, maar wel in het complexe projectieve vlak! (Het is de *z.g.* **configuratie van Möbius.**)

Vervelende berekeningen als de bovenstaande kunnen beter aan een computer overgelaten worden. Het volgende algoritme, gecopieerd uit het boek “*Computational Synthetic Geometry*” van J. Bokowski en B. Sturmfels garandeert dat van elke  $n_i$ -configuratie de realiseerbaarheid efficiënt vastgesteld kan worden.

### Algorithm 3.3.

Input: Rank 3 matroid  $M$  with  $\geq 4$  points.

Output: Polynomial  $p \in \mathbf{Z}[v_1, \dots, v_r]$  such that the weak coordinatizations of  $M$  (modulo projective equivalence and with respect to a fixed basis) correspond to the points of the hypersurface  $p = 0$  in  $K^r$ .

1.  $p := 0$ .
2. If  $M$  has only four points  $e_1, e_2, e_3$  and  $e_4$ , then replace the bracket  $[e_i e_j e_k]$  in  $p$  by  $\text{sign}(ijk)$ , i.e. by either  $+1$  or  $-1$ . print  $p$  and STOP.
3. Pick  $e \in E$  such that the number  $n(e)$  of non-bases of  $M$  containing  $e$  is minimal. Write  $\{e, x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n(e)$  for the non-bases of  $M$  containing  $e$ .
  - 4.1. If  $p = 0$  and  $n(e) \leq 2$ , then set  $M := M \setminus e$  and go to 2.
  - 4.2. If  $p = 0$  and  $n(e) = 3$ , then set  $p := [x_1 y_1 x_2][y_2 x_3 y_3] = [y_1 x_1 y_2][x_2 x_3 y_3]$ , set  $M := M \setminus e$  and go to 2.
  - 4.3. If  $p \neq 0$  and  $n(e) = 0$ , replace each occurrence of  $e$  in  $p$  by  $\lambda_e x + \mu_e y + \nu_e z$ ,  $\{x, y, z\} \subset E$  any basis, set  $M := M \setminus e$  and go to 2.
  - 4.4. If  $p \neq 0$  and  $n(e) = 1$ , then replace each occurrence of  $e$  in  $p$  by  $\mu_e x_e + \nu_e y_1$ , set  $M := M \setminus e$  and go to 2.
  - 4.5. If  $p \neq 0$  and  $n(e) = 2$ , then replace each occurrence of  $e$  in  $p$  by  $[x_1 y_1 x_2] \cdot y_2 + [y_1 x_1 y_2] \cdot x_2$ , set  $M := M \setminus e$  and go to 2.
  - 4.6. Otherwise, STOP; the algorithm does not apply to  $M$ .

Hoe zit het nu met de configuraties van Pappos en Desargues? Bij toepassing van het algoritme ontstaat in beide gevallen de vergelijking  $0 = 0$ ! Dit resultaat is een feite een bewijs dat de stellingen van Pappos en Desargues gelden in alle projectieve vlakken. Het wachten is nu nog op een programma dat interessante meetkundige stellingen **genereert**.

### Litteratuur

Meer over configuraties is te vinden in

1. D. Hilbert en S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea 1952. (Vertaling van *Anschauliche Geometrie*.)
2. F. Levi, *Geometrische Konfigurationen*. Leipzig: Hirzel, 1929.
3. E. Steinitz, *Konfigurationen der projektiven Geometrie*. Leipzig: Enc. der math. Wiss., Band III1, Heft 4, 1910.

De analytische projectieve meetkunde wordt elegant beschreven in

4. M. Berger, *Géométrie 1/ action de groupes, espaces affines et projectifs*. Paris: CEDIC/FERNAND NATHAN, 1979, ISBN: 2-7124-0701-6.
5. P. Samuel, *Géométrie projective*. Paris: PUF, 1986, ISBN: 2-13-039367-5.

Goede leerboeken over matroïden zijn

6. J.P.S. Kung, *A Source Book in Matroid Theory*. Boston: Birkhäuser, 1986, ISBN: 0-8176-3173-9.
7. D.J.A. Welsh, *Matroid Theory*. London: Academic Press, 1976, ISBN: 0-12-744050-X.
8. N. White (ed.), *Theory of Matroids*. Cambridge: Cambridge U. P., Encyclopedia of Mathematics 26, 1986, ISBN: 0-521-30937-9.

Tenslotte twee boeken over computers en meetkunde:

9. S.-C. Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Dordrecht: Reidel, 1987, ISBN: 90-277-2650-7.
10. J. Bokowski en B. Sturmfels, *Computational Synthetic Geometry*. Berlin: Springer, 1989, ISBN: 3-540-50478-8.





## Puzzels, permutaties en pariteiten

J. van de Craats  
Koninklijke Militaire Academie  
Breda

### 1 DE '15-PUZZEL' VAN SAM LOYD

In het begin van de jaren zeventig van de vorige eeuw publiceerde meesterpuzzelaar Sam Loyd de volgende opgave: geef een methode om bij het bekende schuifpuzzeltje van 15 blokjes in een  $4 \times 4$ -raam vanuit de in figuur 1 afgebeelde stand, waarin de blokjes 14 en 15 verwisseld zijn, door schuiven de stand te bereiken waarin alle blokjes weer in de goede volgorde staan.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

FIGUUR 1. Sam Loyds '15-puzzel'.

Die puzzel was een van zijn grootste successen: naar verluid hielden hele volkstammen zich ermee bezig; tal van mensen beweerden de oplossing te hebben gevonden, maar als puntje bij paaltje kwam, wilde het toch maar net niet lukken. De grap is natuurlijk dat de puzzel onoplosbaar is: het is onmogelijk om door schuiven de beginstand te bereiken. Het produceren van een *bewijs* van die onmogelijkheid is zonder wiskundige voorkennis echter niet eenvoudig. Wiskundig getinte puzzels zijn al zo oud als de wiskunde zelf, maar misschien is Sam Loyds 15-puzzel wel het eerste voorbeeld uit de geschiedenis van een situatie waarin een breed publiek geconfronteerd werd met het verschil tussen puzzelen als tijdverdrijf en puzzelen als wiskundige uitdaging. Alleen inzicht in de structuur van de puzzel kan uitkomst brengen: zelfs door toeval en geluk kan niemand geholpen worden. Hoe je ook schuift, nooit krijg je de goede stand te zien. Pas als je begrijpt *waarom* dat zo is, heb je de puzzel echt opgelost. In de jaren tachtig zou zich net zo'n soort situatie voordoen met betrekking tot Rubiks draaikubus. Ook dat is een puzzel waarvan je pas kunt zeggen dat je hem helemaal hebt opgelost wanneer je een volledig inzicht hebt in de structuur van de puzzel: je moet een *oplossingsmethode* hebben die gegarandeerd werkt vanuit *elke* wanordelijke stand, en dus moet je ook weten welke standen er überhaupt mogelijk zijn.

Omdat de 15-puzzel in allerlei varianten nog steeds erg populair is, en omdat de ‘oplossing’ ervan (in de bovenvermelde wiskundige zin) ook onder wiskundigen toch lang niet zo verbreid is als je misschien wel zou mogen verwachten, wil ik beginnen met een analyse van die puzzel. Dat brengt met zich mee dat ik het moet hebben over permutaties, en in het bijzonder over het feit dat er daar twee soorten van zijn: de even en de oneven permutaties. Dat is de sleutel tot de oplossing, en het is tevens één van de sleutels van de oplossing van Rubiks kubuspuzzel en allerlei varianten ervan.

*Welke standen zijn door schuiven bereikbaar?*

Bij elke ‘zet’ van de 15-puzzel schuif je één blokje naar het lege vakje. Je zou het ook zo kunnen zeggen: naast de 15 genummerde blokjes is er ook nog een ‘leeg’ blokje,  $L$  genaamd, dat bij elke zet van plaats wisselt met een aangrenzend blokje. Een opeenvolging van zetten kun je dus volledig vastleggen door het traject te beschrijven dat het ‘lege blokje’  $L$  aflegt. En elke stand van de schuifpuzzel kun je opvatten als een *permutatie* van de 16 blokjes (15 ‘gewone’ blokjes, en blokje  $L$ ). In principe zijn er dus  $16!$  verschillende standen. Maar zijn die ook allemaal door schuiven bereikbaar? Dat is de vraag waar het om gaat.

Dat niet elke stand bereikbaar hoeft te zijn, kun je in eenvoudiger gevallen al gemakkelijk inzien. Neem bijvoorbeeld de  $2 \times 2$ -variant. Die heeft  $3 + 1 = 4$  blokjes, en dus zijn er in principe  $4! = 24$  mogelijke standen. Maar je ontdekt heel snel dat er daar maar 12 van door schuiven bereikbaar zijn. Bij de  $2 \times 3$ -variant ligt het al wat moeilijker. In principe zijn er  $6! = 720$  standen mogelijk. Door systematisch te werk te gaan, kun je heel wat van die standen bereiken. Maar hoe weet je of je ze ook echt allemaal hebt? Om dat uit te zoeken, zou je eerst op kunnen merken dat elke stand op een eenduidige wijze overgevoerd kan worden in een stand waarin het lege hokje  $L$  rechtsonder zit, namelijk door eerst  $L$  zoveel mogelijk naar beneden te verplaatsen, en vervolgens zoveel mogelijk naar rechts. Zo’n stand met  $L$  rechtsonder zullen we een *standaardstand* noemen. Bij elke standaardstand van de  $2 \times 3$ -puzzel horen op die manier precies vijf andere standen met  $L$  op een van de andere vijf plaatsen. Het aantal mogelijke schuifstanden is dus zes maal zo groot als het aantal standaardstanden. Figuur 2 laat zo’n standaardstand zien.

2	3	1
5	4	

FIGUUR 2. Een standaardstand bij de  $2 \times 3$ -puzzel.

Bij zo’n standaardstand zit  $L$  op z’n oorspronkelijke plaats, en dat geeft voor de andere blokjes nog  $5! = 120$  mogelijkheden. Dat er daarvan (minstens) zestig bereikbaar zijn, kan elke ervaren puzzelaar controleren: in de twee hokjes in de linkerkolom kun je elke combinatie krijgen die je wilt, en door de andere drie blokjes daarna rond te schuiven kun je ze nog op drie manieren in het overblijvende  $2 \times 2$ -hok krijgen met  $L$  rechtsonder. Dat geeft dus inderdaad in

totaal  $5 \times 4 \times 3 = 60$  bereikbare standaardstanden. Maar, nogmaals, zijn de andere 60 standaardstanden echt onbereikbaar? Hoe bewijs je dat?

Zelfs bij zo'n eenvoudige puzzel als de  $2 \times 3$ -variant ontkom je er niet aan om daarvoor wiskundig gereedschap uit de kast te halen, en dat gereedschap heeft te maken met de *pariteit van permutaties*.

### *Permutaties en cykels*

Een permutatie is een rangschikking van een eindig aantal verschillende objecten. Bijvoorbeeld  $n$  objecten  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , die op een zekere manier verdeeld worden over  $n$  verschillende plaatsen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Deze beschrijving sluit direct aan bij de 15-puzzel: Er zijn 16 genummerde vakjes en  $15 + 1$  genummerde blokjes (inclusief het 'lege' blokje) die bij elke stand op een bepaalde manier over de vakjes verdeeld zijn. Maar er is ook nog een tweede manier om permutaties te beschrijven, en die is meer dynamisch van aard. Een permutatie vat je daarbij op als een *één-aan-één afbeelding* van een verzameling van  $n$  elementen op zichzelf. In termen van objecten en plaatsen is een permutatie dan een (afbeeldings)*voorschrift* waardoor vastgelegd wordt hoe je overgaat van één rangschikking van de objecten naar een andere. Bij elke plaats  $p_i$  wordt vastgelegd naar welke plaats het blokje dat op  $p_i$  zit, verhuizen moet. De volledige permutatie kun je dus beschrijven door een lijst te maken, waarin onder elke 'vertrekplaats' de 'bestemmingsplaats' staat. Hier is een voorbeeld; de plaatsen zijn door hun nummers aangegeven.

vertrekplaats	1	2	3	4	5	6
bestemmingsplaats	3	1	2	5	4	6

Zijn de blokjes vóór de permutatie dus op een bepaalde manier gerangschikt, dan beschrijft de tabel hoe ze door die permutatie verplaatst worden.

De dynamische beschrijving heeft het voordeel dat de permutaties dan vanzelf een *groep* vormen: je kunt twee permutaties samenstellen door ze achter elkaar uit te voeren, en bij die samenstelling is aan alle groepsaxioma's voldaan. Bij de beschrijving van de permutatiegroep is het handig om met een vereenvoudigde notatie te werken: de *cykelnotatie*. De permutatie van hierboven kan dan als volgt genoteerd worden:

$$(132)(45)$$

In woorden: het blokje van plaats 1 gaat naar plaats 3, dat van 3 gaat naar 2, dat van 2 gaat naar 1; het blokje van plaats 4 gaat naar plaats 5, en dat van 5 gaat naar 4. Als een plaatsnummer niet genoemd wordt (zoals in dit geval plaats 6), zit daar volgens afspraak een blokje dat niet verplaatst wordt. Een *cykel* is zo'n rijtje nummers tussen haakjes. De permutatie van hierboven bestaat dus uit een 3-cykel en een 2-cykel. Eigenlijk zou je een cykel het beste langs de omtrek van een cirkel kunnen noteren, want de blokjes op de aangegeven plaatsen worden in de gegeven volgorde cyclisch verwisseld; om typografische redenen zetten we ze echter achter elkaar met haakjes eromheen.

Met volledige inductie naar het aantal objecten kun je gemakkelijk bewijzen dat elke permutatie te schrijven is als een product van *disjuncte* cykels. Die ontbinding is op de volgorde van de cykels na eenduidig bepaald.

Je kunt nu permutaties achter elkaar uitvoeren door ze in de cykelnotaties achter elkaar te schrijven en het geheel vervolgens te vereenvoudigen tot een product van disjuncte cykels. Als je bijvoorbeeld de permutatie van hierboven laat volgen door de permutatie  $(16)(2354)$  dan krijg je

$$(132)(45)(16)(2354) = (1526)(3)(4) = (1526).$$

(We lezen de opeenvolging van permutaties hier dus van links naar rechts.)

In het vervolg zullen *2-cykels*, dat wil zeggen de cykels die 2 objecten verwisselen, een belangrijke rol spelen. Je kunt, eveneens met volledige inductie, gemakkelijk bewijzen dat elke permutatie ontbonden kan worden in een product van (in het algemeen niet disjuncte!) 2-cykels. Zo is de 4-cykel  $(1526)$  bijvoorbeeld te schrijven als  $(1526) = (13)(53)(23)(63)(13)$ . Zo'n ontbinding is niet uniek: er zijn tal van manieren om een gegeven permutatie in 2-cykels te ontbinden. Maar wat wèl uniek is, is de *pariteit* van het aantal 2-cykels: we zullen zien dat het aantal altijd even, of altijd oneven is, welke ontbinding je ook kiest.

#### *De pariteit van een permutatie*

Laat een willekeurige verdeling gegeven zijn van  $n$  objecten (bijvoorbeeld blokjes)  $b_1, b_2, \dots, b_n$  over  $n$  plaatsen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . We stellen ons die plaatsen voor als de hoekpunten van een graaf, bijvoorbeeld in de vorm van een regelmatige  $n$ -hoek, en trekken alle verbindingslijnen. Zo ontstaat dus een zg. *volledige graaf* met  $n$  hoekpunten. Elke verbindingslijn voorzien we nu van een pijl waarvan de richting afhangt van de nummers van de blokjes op de eindpunten: de pijl zal lopen van het blokje met het laagste nummer naar het blokje met het hoogste nummer.

Bij een permutatie veranderen de blokjes van plaats, en na afloop zullen sommige pijlen dus de andere kant op wijzen. De volgende observatie over 2-cykels is in dit verband van belang:

*Bij elke 2-cykel is het aantal pijlomkeringen oneven.*

Het bewijs is erg eenvoudig: als de 2-cykel bijvoorbeeld de blokjes op de plaatsen  $p_1$  en  $p_2$  verwisselt, keert de pijl tussen  $p_1$  en  $p_2$  om, terwijl voor elke andere plaats  $p_i$  geldt dat de twee pijlen  $p_i p_1$  en  $p_i p_2$  hetzij allebei omkeren, hetzij allebei onveranderd blijven.

Neem nu een willekeurige permutatie, en bekijk het totale aantal pijlomkeringen dat erdoor teweeggebracht wordt. Je kunt zo'n permutatie altijd tot stand brengen door een opeenvolging van 2-cykels, zoals we hierboven al hebben opgemerkt. Bij elke 2-cykel is het aantal omkeringen *oneven*, en dus is het totale aantal omkeringen bij de permutatie even of oneven, al naar gelang het aantal 2-cykels in de ontbinding ervan even of oneven is. Dat heeft twee belangrijke consequenties:

1. De pariteit van het aantal 2-cykels in elke ontbinding van een permutatie in 2-cykels is altijd dezelfde.
2. De pariteit van het aantal pijlomkeringen bij zo'n permutatie is onafhankelijk van de rangschikking van de blokjes.

We zullen een permutatie *even* of *oneven* noemen al naar gelang het aantal 2-cykels in een ontbinding ervan even of oneven is. Zojuist hebben we bewezen dat dit een zinvolle en consistente definitie is. Een onmiddellijk gevolg van het bovenstaande is:

*De opeenvolging van twee permutaties van gelijke pariteit is even;  
de opeenvolging van twee permutaties van verschillende pariteit is  
oneven.*

Hierboven hebben we de 4-cykel (1526) als volgt ontbonden in vijf 2-cykels:  $(1526) = (13)(53)(23)(63)(13)$ . Die 4-cykel is dus een *oneven* permutatie. In het algemeen kun je op precies zo'n zelfde wijze laten zien dat *elke* 4-cykel een oneven permutatie is, of, nog algemener:

*Een  $n$ -cykel is een even of oneven permutatie al naar gelang  $n$  oneven of even is.*

De pariteit van een permutatie kun je dus gemakkelijk bepalen door die permutatie als product te schrijven van disjuncte cykels.

#### *De oplossing van de 15-puzzel*

Omdat elke zet bij de 15-puzzel bestaat uit een 2-cykel, namelijk de verwisseling van het lege blokje  $L$  met een van z'n burens, is de permutatie die hoort bij een schuifstand even of oneven al naar gelang het aantal zetten dat nodig was om die stand te bereiken, even of oneven was. Dat betekent dat elke *standaardstand* (dus met  $L$  rechtsonder) door een even permutatie vanuit de beginstand tot stand moet zijn gekomen, want slechts door een even aantal zetten kan  $L$  weer op zijn oorspronkelijke plaats terugkeren (denk maar aan een schaakbordkleuring; bij elke zet wisselt  $L$  van kleur). De stand van figuur 1 waarin alleen de blokjes 14 en 15 verwisseld zijn, kan dus nooit vanuit de beginstand bereikt zijn, en terugschuiven naar de beginstand is daarom evenmin mogelijk.

Hebben we nu ook een totaaloverzicht van alle mogelijke schuifstanden? Dat hebben we inderdaad. Om te beginnen behoort bij elke stand een standaardstand met  $L$  rechtsonder. Elke schuifstand moet dan corresponderen met een *even* permutatie van de overige 15 blokjes. Zijn al die even permutaties ook realiseerbaar? Dat moet je aan de ervaren puzzelaar vragen. Die weet dat het niet moeilijk is om vanuit elke willekeurige stand de hele puzzel in orde te krijgen op het kleine  $2 \times 3$  hokje rechtsonder na, en zoals we hierboven al gezien hebben is elke even permutatie van dat deelhokje ook realiseerbaar. Alle even standaardstanden zijn dus inderdaad bereikbaar, en omdat er bij elke standaardstand nog 15 andere standen horen, brengt dat het totaal aantal standen van de schuifpuzzel op  $\frac{1}{2} \times 16! = 10461394944000$ . En, tenslotte,

hoe kun je nu van een willekeurige gegeven stand zien of die door schuiven vanuit de beginstand te bereiken is zonder dat je zelf aan het schuiven gaat? Ook dat is eenvoudig: ontbind de permutatie die bij die stand hoort in disjuncte cykels. De stand van figuur 3 hoort bijvoorbeeld bij de cykelontbinding  $(1, 9, 4, 10, 13, L, 8, 12, 15, 3)(2, 5, 7, 11, 14)$ . Dat is het product van een 10-cykel (oneven) en een 5-cykel (even), dus een oneven permutatie. Door schuiven is die stand niet vanuit de beginstand te realiseren want  $L$  bevindt zich op een plaats die alleen door een *even* aantal zetten vanuit de beginpositie rechtsonder bereikt kan zijn.

3	14	15	9
2	6	5	
1	4	7	8
10	11	12	13

FIGUUR 3. Is deze stand door schuiven vanuit de beginstand te bereiken?

Bij de bovenstaande beschrijving hebben we vanaf het begin aangenomen dat alle blokjes van de 15-puzzels echt verschillend zijn: ze dragen verschillende nummers. Maar er bestaan ook versies van de puzzel waarbij de blokjes in de beginstand een mooi patroon vormen, of bijvoorbeeld een woord van 15 letters. In dat geval kan het voorkomen dat sommige blokjes niet van elkaar zijn te onderscheiden. Dan is ook het aantal verschillende schuifstanden kleiner. Zijn er bijvoorbeeld twee blokjes gelijk, dan is het aantal standen slechts half zo groot. Je kunt dan een aardige grap uithalen door vanuit de beginstand de twee gelijke blokjes te verwisselen. Tegelijkertijd worden er dan nog (op z'n minst) twee andere blokjes verwisseld. Zorg ervoor dat die twee andere blokjes een eindje bij de twee gelijke blokjes vandaan zitten. Het is aardig om die stand dan aan iemand te geven met de opdracht om de zaak weer in orde te brengen; de meeste mensen zullen niet op het idee komen om eerst de twee gelijke blokjes, die op het oog al goed zitten, te verwisselen. Na hun vruchteloze pogingen kun je dan een weddenschap winnen door de puzzel wèl schoon te schuiven!

## 2 DE KUBUS VAN RUBIK

Tien jaar geleden was de rage van de draaikubus van Rubik op z'n hoogtepunt. Het succes van die puzzel overtrof alles wat de wereld op dit gebied ooit gezien had. Alleen al in Nederland moeten er tientallen miljoenen in allerlei formaten en varianten verkocht zijn. Iedereen was in de ban van de kubus: een onophoudelijke stroom artikelen, interviews en boeken begeleidde de kubusgekte, en tal van slimme zakenlieden hebben er een fortuin mee verdiend. Ook de uitvinder Ernő Rubik is er wel bij gevaren, hoewel men de indruk krijgt dat de zegeningen van de toen nog in Hongarije vigerende socialistische heilsstaat

hem verhinderd hebben werkelijk alles uit zijn geniale vinding te halen wat er in commercieel opzicht inzat.

De moeilijkheidsgraad van de kubuspuzzel is vele malen groter dan die van de 15-puzzel: vergeleken met de kubus is dat puzzeltje maar kinderspel. Want ondanks het grote aantal standen is het ‘schoonschuiven’ van de 15-puzzel niet echt moeilijk. Als er geen blokjes verwisseld zijn, is het gewoon een kwestie van een paar simpele trucjes. Rubiks kubuspuzzel is echter veel en veel moeilijker: het vinden van oplossingsstrategieën is lang niet eenvoudig, en zelfs het correct uitvoeren van een oplossingsrecept uit een boekje kost veel mensen al de grootste moeite. Ook de wiskundige kant van de zaak is veel interessanter: wat zijn de mogelijke draaistanden, hoeveel standen zijn er mogelijk, wat is de structuur van de verzameling van alle standen? Er is daarover al veel gepubliceerd, ook in wiskundige vaktijdschriften. Ik zal er hier een paar aspecten van behandelen.

#### *Astronomische aantallen*

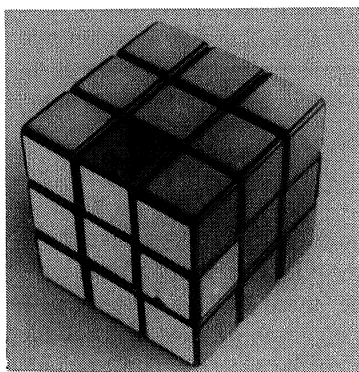
De draaikubus bevat een aantal in elkaar geschakelde blokjes die rondgedraaid kunnen worden: acht hoekblokjes en twaalf ribbeblokjes. Bij elk zijvlak is er ook nog een centraal blokje, maar die zes blokjes zitten vast aan een frame, en kunnen slechts om hun eigen as draaien; zij komen nooit van hun plaats. Bij de ‘beginstand’ (die we verder **start** zullen noemen) is elk zijvlak van één kleur. Omdat de centrale blokjes nooit van hun plaats komen, vormen zij een geschikt ‘coördinatensysteem’, waardoor in elke door elkaar gedraaide stand van de kubus van elk hoek- of ribbeblokje de **start**positie en de **start**oriëntatie vastgesteld kan worden, net zoals je bij de 15-puzzel in elke stand van elke blokje de **start**positie kunt vaststellen. Het aantal standen dat in principe mogelijk is, kun je dus ook gemakkelijk uitrekenen. Er zijn acht hoekblokjes, die elk in drie oriëntaties op elk van de acht posities kunnen zitten, en er zijn twaalf ribbeblokjes die elk in twee oriëntaties op elke positie geplaatst kunnen zijn. Dat geeft dus in totaal het astronomische aantal van  $8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} = 519024039293878272000$  mogelijke standen. Door de kubus te demonteren en daarna weer anders in elkaar te zetten, is elk van die standen te realiseren. Maar niet alle standen zijn door draaien vanuit **start** bereikbaar: het aantal draaistanden is precies twaalf maal zo klein, zoals we zullen zien.

Bij het draaien van de kubus kun je het ‘frame’ van de zes centrale blokjes altijd in dezelfde stand houden. Elke draaiing is dan samengesteld uit draaiingen van de zijvlakken, telkens over een kwartslag of een halve slag. En vanwege de kubussymmetrie is er dus eigenlijk maar één basisbeweging: de draaiing van een zijvlak over een kwartslag. Elke draaistand kan door een combinatie van zulke kwartslagen tot stand worden gebracht.

#### *Posities en permutaties*

Kijken we alleen naar de posities van de blokjes en niet naar hun oriëntatie, dan zien we dat elke kwartslag een combinatie is van een 4-cykel op de hoekblokjes en een 4-cykel op de ribbeblokjes. We weten dat 4-cykels *oneven* permutaties zijn, en dus zijn de pariteiten van de afzonderlijke permutaties op de hoekblokjes en de ribbeblokjes altijd gelijk. Dat geeft een beperking aan het aantal

draaistanden, en de ervaren Rubik-fan weet dat dit ook de *enige* beperking is die aan de posities van de blokjes is opgelegd. Er zijn namelijk draaieries bekend waarmee je een willekeurige 3-cykel op de hoekblokjes of de ribbenblokjes tot stand kunt brengen terwijl de rest van de kubus onveranderd blijft. Omdat het niet moeilijk is om te bewijzen dat je uit 3-cykels *elke* even permutatie kunt samenstellen, kun je dus door geschikte combinaties te nemen ook elke draaistand bereiken waarbij de permutaties op hoeken en ribben beide even zijn. Zijn ze beide oneven, dan is één kwartslag voldoende om ze even te maken. Alle paren permutaties van gelijke pariteit zijn dus bereikbaar.



FIGUUR 4: Een onmogelijke draaipositie van de kubus: één paar ribbeblokjes is verwisseld.

### *Oriëntaties*

Maar aan de oriëntatie van de blokjes hebben we nog geen aandacht besteed. Om daar iets zinnigs over te zeggen, moet je een afspraak maken waardoor je in elke draaistand van elk blokje kunt vaststellen of het 'goed georiënteerd' zit of niet. Markeer daartoe bij elk hoek- of ribbeblokje één zijvlak. Nummer bijvoorbeeld de zes kleuren, en markeer telkens het zijvlak met het hoogste kleurnummer. Via **start** ligt daarmee ook een markering van alle hoek- en ribbe-*posities* vast (met betrekking tot het vaste assenkruis waaraan alle centrale blokjes bevestigd zijn). Bij een willekeurige draaistand kunnen we nu als volgt van elke blokje vaststellen of het 'goed' georiënteerd zit of niet: het blokje zit 'goed' als zijn gemarkeerde kant op dezelfde plaats zit als de gemarkeerde kant van de positie die het op dat moment inneemt. Voor een ribbeblokje zijn er maar twee mogelijkheden: het zit òf 'goed', òf 'fout'. Maar omdat een hoekblokje *drie* zijvlakken heeft, kan het op twee manieren 'fout' zitten: linksom een derde slag gedraaid, of rechtsom (we bekijken de blokjes 'van buiten'). De oriëntatie van zo'n hoekblokje geven we dan aan met resp. +1 of -1, en bij de 'goede' oriëntatie zetten we een 0. De oriëntatie van een ribbeblokje geven we eenvoudig aan met 0 ('goed') of 1 ('fout').

Nu kijken we naar de oriëntatieveranderingen bij één kwartslag van een zijvlak. Omdat er dan maar vier ribbeblokjes en vier hoekblokjes in het spel zijn, is het niet moeilijk om de volgende observaties te verifiëren:



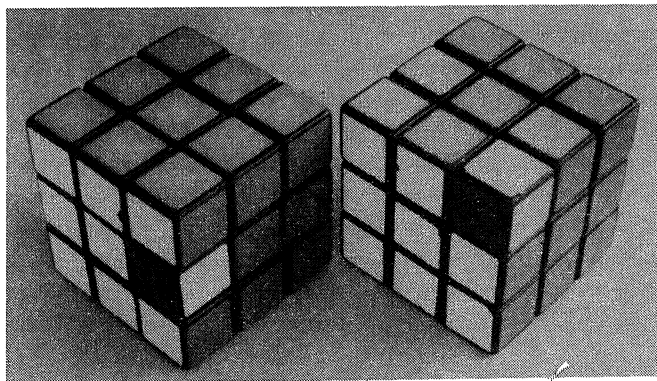
1. Het aantal oriëntatieveranderingen van de ribbeblokjes is altijd *even*.
2. De som van oriëntatiegetallen van de hoekblokjes neemt altijd toe met 0, 3 of  $-3$ .

Omdat bij **start** alle blokjes goed georiënteerd zitten, betekent dit dat bij *iedere* positie die vanuit **start** door draaien bereikbaar is, de som van de oriëntatiegetallen van de ribbeblokjes *even* is, terwijl de som van de oriëntatiegetallen van de hoekblokjes een geheel *drievoud* moet zijn. Dit zijn dus twee nieuwe beperkingen, en de ervaren kubusdraaier weet dat het ook de *enige* oriëntatiebeperkingen zijn. Er zijn namelijk draaieries bekend met als enige effect dat één paar ribbeblokjes wordt omgeklapt, of dat slechts één paar hoekblokjes wordt gedraaid: het ene linksom en het andere rechtsom.

We hebben nu een totaaloverzicht van alle mogelijke draaiposities. Het zijn de posities die voldoen aan de volgende drie eisen:

1. De permutaties op hoekblokjes en ribbeblokjes hebben dezelfde pariteit.
2. De som van de oriëntatiegetallen van de ribbeblokjes is even.
3. De som van de oriëntatiegetallen van de hoekblokjes is een geheel veelvoud van 3.

Dit brengt het totale aantal draaiposities van de kubuspuzzel op  $\frac{1}{12} \times 8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} = 43252003274489856000$ . Nog steeds een astronomisch getal: een rij van zo veel kubussen achter elkaar zou een lengte beslaan van meer dan 60 maal de afstand tot Proxima Centauri, de dichtstbijzijnde ster!



FIGUUR 5: Onmogelijke draaiposities van de kubus: één omgeklapt ribbeblokje, en één gedraaid hoekblokje.

### 3 DE GROEP VAN RUBIK

Bij de draaikubus zijn alle standen onderling gelijkwaardig: je kunt altijd de plakkertjes van de blokjes halen, en ze er weer volgens het **start**-patroon opplakken; voor sommigen is dat de enige oplossing van de puzzel. Anderen

laten de plakkertjes intact, maar pakken een schroevendraaier om de kubus te demonteren en weer goed in elkaar te zetten. Als je zo'n handeling van het uit elkaar halen en weer in elkaar zetten van de kubus 'receptmatig' bekijkt, is het weer net zoiets als een permutatie: het is een *transformatie* (overgang) van de ene stand naar de andere. Zulke transformatierecepten kunnen op elke stand worden toegepast, en ze kunnen dus ook achter elkaar geschakeld worden. Op die manier vormen die transformaties een *groep*  $\mathbf{M}$ , en wel een groep van  $8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} = 519024039293878272000$  elementen: net zo veel elementen als er montagestanden zijn, want elke transformatie uit  $\mathbf{M}$  kun je identificeren met de stand die ontstaat als je haar toepast op **start**. We hebben al gezien dat niet alle montagestanden door draaien vanuit **start** bereikbaar zijn. De transformaties die door draaien gerealiseerd kunnen worden, vormen een normaaldeeler (invariante ondergroep)  $\mathbf{R}$  van index 12 in  $\mathbf{M}$ , de *Rubik groep* van de kubus. Elk element van  $\mathbf{R}$  hoort dus bij een draaiserie; draaiseries die hetzelfde effect hebben, zou je in dit verband met elkaar kunnen identificeren. We zullen de structuur van  $\mathbf{R}$  aan de hand van de normaaldelers ervan nader onderzoeken.

#### *Normaaldelers*

Een ondergroep  $\mathbf{N}$  van een groep  $\mathbf{G}$  heet een *normaaldeeler* (of *invariante ondergroep*) wanneer voor elke  $n \in \mathbf{N}$  en elke  $g \in \mathbf{G}$  geldt dat ook  $g^{-1}ng \in \mathbf{N}$ . Dit brengt met zich mee dat de verzameling van nevenklassen van  $\mathbf{N}$  vanzelf ook een groepsstructuur krijgt; op zo'n manier ontstaat de *factorgroep*  $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ . Zo'n factorgroep legt als het ware een bepaald aspect bloot van de structuur van de groep  $\mathbf{G}$ : de elementen ervan worden erdoor op een 'symmetrische' manier in klassen verdeeld. Het is daarom interessant om bij een gegeven groep een overzicht te krijgen van de verschillende normaaldelers en de wijze waarop ze onderling samenhangen. In 1981 heeft René Schoof alle normaaldelers bepaald van de groep  $\mathbf{R}$  van Rubiks kubus (zie [2], p. 86). In 1984 hebben we samen hierover een artikel [3] gepubliceerd waarin we dit resultaat hebben gegeneraliseerd tot een methode waarmee je bij een vrije grote klasse van 'draaiobjecten' de normaaldelersstructuur van de bijbehorende groep kunt vinden. We zullen hier Schoofs schema van de normaaldelers van  $\mathbf{R}$  nog eens presenteren, en vertellen wat ze in concreto voor betekenis hebben. Voor een aantal bewijzen verwijzen we naar [3]. Daar vindt de geïnteresseerde lezer ook meer voorbeelden.

Vooraf nog een opmerking die direct samenhangt met de definitie van normaaldeeler. Heeft men een keten van ondergroepen

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}$$

en is  $\mathbf{N}$  een normaaldeeler in  $\mathbf{G}$ , dan is  $\mathbf{N}$  ook een normaaldeeler in  $\mathbf{H}$ . Maar als  $\mathbf{N}$  een normaaldeeler is in  $\mathbf{H}$ , hoeft  $\mathbf{N}$  nog geen normaaldeeler te zijn in  $\mathbf{G}$ . In het schema van normaaldelers van  $\mathbf{R}$  dat we zullen geven, is elke normaaldeeler dus tevens normaaldeeler in elke 'tussengroep', maar zo'n tussengroep op zichzelf beschouwd kan nog meer normaaldelers hebben dan degene die in het schema zijn aangegeven.

### Permutaties en oriëntaties

De beschrijving van de elementen van de montagegroep  $\mathbf{M}$  is tamelijk gecompliceerd vanwege het feit dat die elementen niet simpelweg permutaties zijn. Het zijn transformatierecepten waarmee je van de ene stand naar een andere stand kunt overgaan door de kubus eerst te demonteren, en daarna op een andere manier weer in elkaar te zetten. Een overgang van de ene stand naar de andere wordt daarbij niet alleen bepaald door de positieveranderingen van de verschillende blokjes, maar ook door de hun oriëntatieveranderingen. We kunnen een element van  $\mathbf{M}$  daarom het beste beschrijven als een geordend viertal  $(\rho, v, \sigma, w)$ , waarin de permutatie  $\rho$  en het twaalfstal  $v = (v_1, \dots, v_{12})$  resp. de positieverandering en de oriëntatieverandering aangeven van de ribbeblokjes, terwijl de permutatie  $\sigma$  en het achttal  $w = (w_1, \dots, w_8)$  resp. de positieverandering en de oriëntatieverandering van de hoekblokjes beschrijven. Om precies te zijn: we nummeren de posities van de ribbeblokjes en de hoekblokjes op een zekere (willekeurige) wijze, en markeren van elk positie één zijvlak, bijvoorbeeld op de manier waarop we dat hierboven ook al hebben gedaan. Via **start** hoort daar ook een nummering en een markering van de blokjes bij. De permutatie  $\rho$  geeft de positieverandering van de ribbeblokjes aan:  $\rho(i)$  is het nummer van de plaats waarheen het ribbeblokje verhuist dat op plaats  $i$  zit, en  $v_i = 0$  of  $1$  geeft aan of de oriëntatie ervan al dan niet omklapt. Analoog voor de hoekblokjes. Bij de 'getallen'  $v_i$  kunnen we in het vervolg de optelling het beste modulo 2 nemen, en bij de getallen  $w_j$ , die de oriëntatie van de hoekblokjes beschrijven, zullen we modulo 3 rekenen.

Als we de pariteit van een permutatie aangeven met 'sgn', dan kunnen we  $\mathbf{R}$  in termen van de bovenstaande notaties karakteriseren door de drie voorwaarden:

1.  $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$ ,
2.  $\sum v_i \equiv 0 \pmod{2}$ ,
3.  $\sum w_j \equiv 0 \pmod{3}$ .

### De groepsbewerking in $\mathbf{M}$

Hoe werkt de groepsbewerking op de viertallen  $(\rho, v, \sigma, w)$  in  $\mathbf{M}$ ? Met andere woorden, welk viertal hoort bij de samenstelling

$$(\rho, v, \sigma, w)(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{\sigma}, \bar{w}),$$

dat wil zeggen eerst  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{\sigma}, \bar{w})$  toegepast, en daarna  $(\rho, v, \sigma, w)$ ? Bekijk daartoe het effect van deze opeenvolging van transformaties op **start**. Ribbeblokje  $i$  gaat eerst over naar positie  $\bar{\rho}(i)$  met oriëntatie  $\bar{v}_{\bar{\rho}(i)}$ , en daarna naar positie  $\rho\bar{\rho}(i)$  met oriëntatie  $\bar{v}_{\bar{\rho}(i)} + v_{\rho\bar{\rho}(i)}$ . Noem  $j = \rho\bar{\rho}(i)$ , dus  $\bar{\rho}(i) = \rho^{-1}(j)$  en definieer  $\rho\bar{v}$  door  $(\rho\bar{v})_k = \bar{v}_{\rho^{-1}(k)}$  dan wordt de oriëntatieverandering van de samengestelde transformatie beschreven door  $\rho\bar{v} + v$ . Analoog voor de hoekblokjes. Het resultaat is dus

$$(\rho, v, \sigma, w)(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{\sigma}, \bar{w}) = (\rho\bar{\rho}, \rho\bar{v} + v, \sigma\bar{\sigma}, \sigma\bar{w} + w).$$

Merk op dat het eenheidselement van de groep  $\mathbf{M}$  gegeven wordt door het viertal  $(1, 0, 1, 0)$ , waarin 1 staat voor de identieke permutatie, en 0 voor het rijtje dat alleen uit nullen bestaat. Verder geldt dat

$$(\rho, v, \sigma, w)^{-1} = (\rho^{-1}, -\rho^{-1}v, \sigma^{-1}, -\sigma^{-1}w).$$

*De normaaldelers van  $\mathbf{R}$*

In de groep  $\mathbf{R}$  van alle transformaties die door draaien gerealiseerd kunnen worden, bekijken we de volgende normaaldelers:

$$\mathbf{H}_1 = \{(\rho, v, 1, 0) \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{H}_2 = \{(1, 0, \sigma, w) \in \mathbf{R}\}$$

Dat zijn dus alle draaieries die resp. alle hoekblokjes of alle ribbeblokjes onaangetast laten. Vanwege de pariteitsbeperking moeten de permutaties  $\rho$ , resp.  $\sigma$  *even* zijn (want de identieke permutatie 1 is ook even). We definiëren verder

$$\mathbf{V}_1 = \{(1, v, 1, 0) \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{V}_2 = \{(1, 0, 1, w) \in \mathbf{R}\}.$$

Dit zijn de normaaldelers in  $\mathbf{R}$  die resp. alleen maar ribbeblokjes omklappen of alleen maar hoekblokjes kantelen. Tenslotte definiëren we

$$\mathbf{Z}_1 = \{(1, v, 1, 0) \mid v_1 = v_2 = \dots = v_{12}\}.$$

$\mathbf{Z}_1$  bestaat dus uit slechts twee elementen: het eenheidselement en de draaierie die *alle* ribbeblokjes omklapt. Het is duidelijk dat

$$\{1\} \subset \mathbf{Z}_1 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{H}_1$$

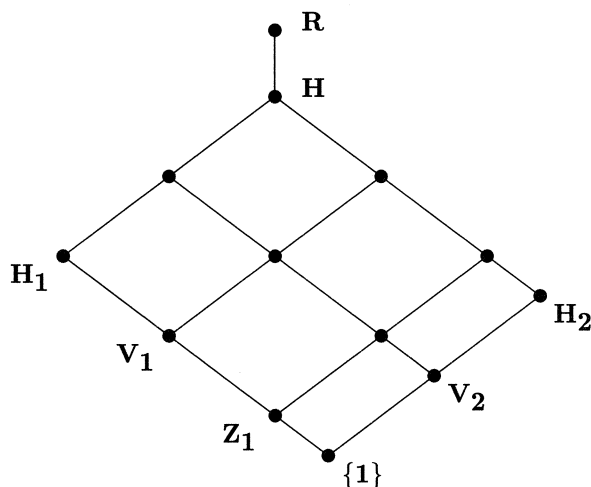
en dat

$$\{1\} \subset \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{H}_2$$

en dat dit ook allemaal normaaldelers zijn in  $\mathbf{H}_1$ , resp.  $\mathbf{H}_2$ , maar het is niet triviaal om aan te tonen dat hier ook *alle* normaaldelers staan van  $\mathbf{H}_1$ , resp.  $\mathbf{H}_2$ . Voor een bewijs daarvan verwijzen we naar [3], p. 274.

Door directe producten te nemen kunnen we uit de bovenstaande normaaldelers in totaal  $4 \times 3 = 12$  normaaldelers in  $\mathbf{R}$  vormen. In figuur 6 zijn ze overzichtelijk gerangschikt: een normaaldeeler is bevat in een andere als er tussen die twee een omhooglopende verbinding is. Dit schema blijkt *alle* normaaldelers van  $\mathbf{R}$  te bevatten. Men kan dat aantonen met behulp van een aantal stellingen die we weer zonder bewijs vermelden. De eerste twee luiden:

1. Als een normaaldeeler  $\mathbf{N}$  van  $\mathbf{R}$  een element  $(\rho, v, \sigma, w)$  bevat met  $\rho \neq 1$ , dan geldt dat  $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{N}$ .
2. Als  $\mathbf{N}$  zo'n element bevat met  $\sigma \neq 1$  dan geldt dat  $\mathbf{H}_2 \subset \mathbf{N}$ .

FIGUUR 6. De normaaldelers van Rubiks groep  $\mathbf{R}$ .

Een direct gevolg hiervan is, dat elke normaaldeler  $\mathbf{N}$  van  $\mathbf{R}$  met  $\mathbf{N} \neq \mathbf{R}$  bevat is in  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$ . Immers, als  $\mathbf{N}$  niet bevat is in  $\mathbf{H}$ , dan moet er een element  $(\rho, v, \sigma, w) \in \mathbf{N}$  zijn waarvoor  $\rho$  en  $\sigma$  beide oneven zijn, dus ongelijk aan 1. Op grond van de bovenstaande stellingen is  $\mathbf{H}$  dan bevat in  $\mathbf{N}$ , en omdat  $\mathbf{H}$  index 2 heeft in  $\mathbf{R}$ , betekent dit dat  $\mathbf{N} = \mathbf{R}$ .

Voor het bewijs van het feit dat figuur 6 alle normaaldelers van  $\mathbf{R}$  geeft, hebben we nu nog drie stellingen nodig:

3. Als  $\mathbf{N}$  een element  $(1, v, \sigma, w)$  bevat met  $v \neq (0, \dots, 0)$  en  $v \neq (1, \dots, 1)$ , dan geldt dat  $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{N}$ .
4. Als  $\mathbf{N}$  een element  $(\rho, v, 1, w)$  bevat met  $w \neq (0, \dots, 0)$ , dan geldt dat  $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{N}$ .
5. Wanneer  $\mathbf{N}$  een element  $(1, v, \sigma, w)$  bevat met  $v = (1, \dots, 1)$ , dan geldt  $\mathbf{Z}_1 \subset \mathbf{N}$ .

De lezer zou zelf eens zijn krachten kunnen beproeven op het bewijs van deze vijf stellingen. In geval van nood zal [3], p. 276 uitkomst kunnen bieden; ze worden daar in een wat algemenere context geplaatst. Overigens, het voltooien van het bewijs van de bewering dat elke normaaldeler  $\mathbf{N}$  van  $\mathbf{R}$  in figuur 6 voorkomt, is met behulp van deze stellingen nog slechts een kwestie van aftellen:

- Bevat  $\mathbf{N}$  een oneven permutatie, dan is  $\mathbf{N} = \mathbf{R}$ .
- Bevat  $\mathbf{N}$  geen oneven permutaties maar wel niet-triviale even permutaties op ribben en hoeken, dan is  $\mathbf{N} = \mathbf{H}$ .

- Bevat  $\mathbf{N}$  alleen maar niet-triviale (even) permutaties op de ribben, en is er een element in  $\mathbf{N}$  dat hoekjes kantelt, dan is  $\mathbf{N} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{V}_2$ .
- Bevat  $\mathbf{N}$  alleen maar niet-triviale (even) permutaties op de ribben, en blijven de hoekjes altijd onaangetast, dan is  $\mathbf{N} = \mathbf{H}_1 \times \{1\} = \mathbf{H}_1$ .
- Bevat  $\mathbf{N}$  alleen maar niet-triviale (even) permutaties op de hoeken, en is er een element in  $\mathbf{N}$  dat een aantal, maar niet alle ribben omklapt, dan is  $\mathbf{N} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{H}_2$ .
- ... (enz.).

### *Slot*

We hebben in dit verhaal voorbeelden gegeven van de manier waarop wiskundige technieken in de recreatieve sfeer gebruikt kunnen worden om puzzels te analyseren. Sommige puzzels lenen zich daar beter voor dan andere. Met name als zo'n puzzel structuur en symmetrie heeft, is er een goede kans dat je met wiskundige middelen een heel eind komt. Maar het mes snijdt aan twee kanten: veel mensen worden gefascineerd door raadsels en puzzels, en daar kun je soms gebruik van maken in het onderwijs. Je vertelt iets wezenlijks over wiskunde wanneer je iemand uitlegt dat wij met ons vak in staat zijn om bepaalde puzzels tot op de bodem te doorgronden. Bij de schuifpuzzel kun je iedereen de 'wiskundige' probleemstelling ('wat zijn de bereikbare standen?') uitleggen. Of je iemand daarna ook de volledige oplossing kunt verklaren, zal afhangen van je eigen didactische gaven, en van de kennis en het doorzettingsvermogen van de toehoorder. Soms kunnen puzzels ook gebruikt worden bij meer geavanceerd wiskunde-onderwijs; Rubik's kubus is daar een heel mooi voorbeeld van. Juist omdat de Rubik groep zo groot en rijk van structuur is, vormt hij ideaal illustratiemateriaal bij een cursus in de groepentheorie. Zaken als ondergroepen, normaaldelers, commutatoren, geconjugeerden, directe producten, het centrum van een groep en nog veel meer, kunnen toegelicht worden met een kubus in de hand. En de kubus en allerlei varianten ervan bieden ook nog voldoende niet-triviale opgeloste en onopgeloste problemen waarmee beginners en gevorderden op een aantrekkelijke wijze hun vaardigheid in het vak kunnen vergroten.

Rest me nog van de vele titels op het gebied van de recreatieve wiskunde er één van harte in uw aandacht aan te bevelen: het encyclopedische meesterwerk *Winning Ways* van Berlekamp, Conway en Guy.

### *Literatuurverwijzingen*

1. Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays*, Academic Press, London, etc., 1982, ISBN 0 12 091101 9 en ISBN 0 12 091102 7 (2 delen).
2. Jan van de Craats, *De magische kubus van Rubik*, De Muiderkring, Bussum 1981, ISBN 90 6082 219 6.
3. J. van de Craats & R.J. Schoof, *On the normal subgroups of Rubik groups*, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4), vol. 2, (1984) 267-280.

## Meetkunde in de Vierde Dimensie

F. van der Blij  
*Ruysdaellaan 6*  
*3723 CC Bilthoven*

### 1. INLEIDING

We bedrijven meetkunde op verschillende manieren. Allereerst is er de klassieke schoolmeetkunde, zowel in het vlak als in de ruimte. Er wordt in geconstrueerd, er wordt in bewezen. Er wordt met hoeken en lengtes gerekend. Er is geen expliciet axiomastelsel. We praten zonder meer over de lengte van een lijnstuk, we zien dat een rechte lijn drie lijnstukken  $AB$ ,  $BC$  en  $CA$  van een driehoek niet in drie verschillende punten kan snijden. Maar we zullen dit in de schoolmeetkunde niet bewijzen. De stelling van Desargues over 10 punten en 10 lijnen kunnen we in de vlakke schoolmeetkunde niet bewijzen. Voor een bewijs moeten we of coördinaten invoeren en dus extra veronderstellingen maken of het vlak in een driedimensionale ruimte inbedden.

Wat nodig is om schoolmeetkunde tot axiomatische meetkunde te maken is te vinden in B.L. van der Waerden: *De logische grondslagen der Euclidische meetkunde* en ook in D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*.

Vervolgens is er de geaxiomatiseerde projectieve meetkunde. Hiervoor is een eenvoudig axiomastelsel, maar de invoering van “lengte” en “hoek” heeft nogal wat voeten in de aarde. Vanuit de projectieve meetkunde is vrij eenvoudig tot affiene meetkunde te komen, door uitverkiezing van “oneindig verre” elementen. Zonder axioma’s te gebruiken werkt “kijkmeetkunde” met perspectief op school op deze manier.

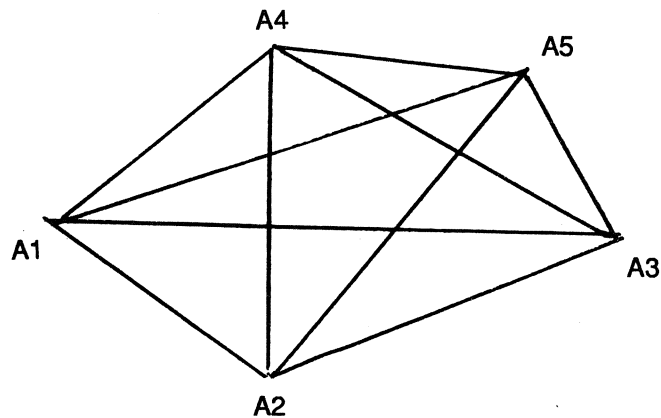
Tenslotte is er coördinaten meetkunde. Punten zijn twee- of drietallen (reële) getallen; lengten worden via de stelling van Pythagoras ingevoerd, hoeken via het inproduct. Door homogenisering van de coördinaten is ook de projectieve meetkunde eenvoudig met coördinaten te beschrijven.

In de meetkunde zijn natuurlijk nog andere werkmethode aan de orde, we noemen slechts topologie, algebraïsche meetkunde en aritmetische meetkunde, die zich niet goed kunnen herkennen in bovenstaande beschrijvingen.

In deze voordracht zullen we ons bezighouden met meetkunde in de vierde dimensie. Bestaat deze eigenlijk wel? Met coördinaten werkend is het niet moeilijk, we werken gewoon met viertallen getallen. Axiomatische projectieve vierdimensionale meetkunde ligt ook voor de hand. Het axiomastelsel voor projectieve driedimensionale meetkunde is direct te generaliseren. En hoe gaat het met de "schoolmeetkunde". Kunnen we ons meetkundige objecten in de vierdimensionale ruimte voorstellen? Door middel van tweedimensionale afbeeldingen werken we vlot met driedimensionale meetkundige objecten. Kunnen we door middel van driedimensionale afbeeldingen, of zelfs door middel van tweedimensionale afbeeldingen van driedimensionale afbeeldingen ons van vierdimensionale meetkundige objecten een voorstelling maken? Poincaré heeft gezegd dat iemand die zich zijn hele leven aan de vierdimensionale ruimte wijdt, zover kan komen dat hij zich deze kan voorstellen.

## 2. ENKELE VOORBEELDEN

Van de rij: driehoek, viervlak, zien we direct de voortzetting naar een figuur met vijf punten,  $A_1, A_2, \dots, A_5$ , met tien ribben  $A_i A_j$ , met tien vlakke driehoeken  $A_i A_j A_k$  en met vijf viervlakken  $A_i A_j A_k A_l$ . We noemen deze vierdimensionale figuur een *simplex*, en durven er zelfs een tweedimensionale afbeelding van te geven.



FIGUUR 1.

Een aardige opgave is zich af te vragen wat je in zo'n figuur zou moeten stippen. We houden het maar op een draadmodel en trekken alle lijnstukken.

We durven snel over het zwaartepunt van zo'n simplex te spreken. De lijnen vanuit  $A_1$  naar het zwaartepunt van viervlak  $A_2 A_3 A_4 A_5$  enzovoorts snijden elkaar in één punt, dat deze zwaartelijnen verdeeld in stukken, die zich verhouden als 1:4. Zowel met ggeneraliseerde schoolmeetkunde als met coördinaten meetkunde is deze stelling direct te bewijzen. Als de hoekpunten van het simplex gegeven worden door de vectoren  $a_1, a_2, \dots, a_5$  is het zwaartepunt  $\frac{1}{5}(a_1 + a_2 + \dots + a_5)$ .



In coördinaten meetkunde is ook de “hyperkubus” (soms tesseract genoemd) eenvoudig in te voeren. Een figuur met 16 hoekpunten  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$  waarbij  $\epsilon_i = 0, 1$ . Zo'n hyperkubus heeft 32 ribben, 24 zijvlakken, die vierkanten zijn, en 8 kubussen als ruimtelijke begrenzingen.

Ook de vierdimensionale “sfeer”, de generalisatie van de cirkel en de bol, de verzameling van alle punten in de vierdimensionale ruimte, die een gegeven afstand tot een vast (middel)punt hebben, is goed voor te stellen.

Er zal een “inhoud” van een “lichaam” zijn, evenredig met de vierde macht van de lineaire maat. Het ligt voor de hand de inhoud van de boven beschreven hyperkubus met zijde 1 gelijk aan 1 te stellen. De inhoud van de vierdimensionale sfeer met straal  $r$  zal dan  $\gamma_4 r^4$  zijn. Maar hoe groot is  $\gamma_4$ ? We weten dat  $\gamma_2 = \pi$ ,  $\gamma_3 = \frac{4}{3}\pi$ , en even nadenken voert tot  $\gamma_1 = 2$ . Raden helpt niet, we moeten gewoon met integraalrekening te werk gaan. Het onverwachte resultaat is  $\gamma_4 = \frac{1}{2}\pi^2$ .

$$\text{(Mocht u meer willen weten, algemeen geldt } \gamma_n = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)},$$

waarin  $\Gamma$  de gammafunctie is, een generalisatie van de faculteit. Voor gehele positieve waarde van het argument geldt  $\Gamma(n + 1) = n!$ . Voor half-tallige waarden van het argument is de uitkomst een rationaal veelvoud van  $\sqrt{\pi}$ . Steeds is  $\gamma_n$  dus een rationaal veelvoud van een gehele macht van  $\pi$ .)

Grote delen van de klassieke vlakke meetkunde en stereometrie kunnen nu generaliseerd worden naar de vierde dimensie. We noemen slechts in- en om-geschreven sfeer van een simplex, inhoud van een simplex, oppervlakte van een sfeer, enzovoorts.

### 3. SNIJDEN, KRUISEN, HOEKEN

Een van de opmerkelijke zaken bij de overgang van twee- naar driedimensionale meetkunde is het optreden van kruisende lijnen. Hoe gaat het met snijden van vlakke objecten in de vierdimensionale ruimte?

We onderscheiden in de vierdimensionale ruimte rechte lijnen, platte vlakken en driedimensionale (deel)ruimten, soms hypervlakken genoemd. We spreken verder korthedshalve over lijnen, vlakken en ruimten.

We komen hetzij via meetkundig inzicht, hetzij via de axioma's van de affiene meetkunde, hetzij via lineaire algebra tot stellingen over snijden. We sluiten de gevallen dat de bestudeerde objecten samenvallen, of dat het ene een echt deel van het andere is, even uit. De bewijzen laten we aan de lezer over.

1. Twee ruimten zijn evenwijdig of snijden elkaar volgens een vlak.
2. Twee vlakken zijn heel of half evenwijdig of snijden elkaar volgens een lijn of snijden elkaar volgens een punt.
3. Twee lijnen zijn evenwijdig of snijden elkaar volgens een punt of kruisen elkaar.

4. Een vlak en een lijn zijn evenwijdig, snijden elkaar in één punt of kruisen elkaar.

De overige gevallen laten we aan de lezer over. We staan even stil bij 2 en 4. Door beschouwingen in de “oneindig verre” driedimensionale ruimte van de beschouwde vierdimensionale ruimte krijgen we eenvoudig enig “inzicht” in de situatie. Twee vlakken bezitten twee oneindig verre lijnen. Als deze lijnen niet samenvallen (de vlakken niet evenwijdig zijn) kunnen ze elkaar snijden of kruisen. In het eerste geval hebben de vlakken of geen punt gemeen, ze heten dan half-evenwijdig; of ze hebben een rechte lijn gemeen. In het laatste geval hebben de vlakken één punt gemeen.

Omdat twee snijdende lijnen in een vlak liggen is de hoek tussen twee (snijdende) lijnen in de vierdimensionale ruimte direct te definiëren, en daarmee is de loodrechte stand van twee lijnen duidelijk. We definiëren nu een lijn loodrecht op een vlak als hij loodrecht staat op alle lijnen van het vlak; loodrecht op een ruimte als de lijn loodrecht staat op alle lijnen van de ruimte.

Hoe definiëren we dat een vlak  $V$  loodrecht staat op een vlak  $W$ ? In de driedimensionale ruimte definiëren we de loodrechte stand van twee vlakken als één lijn uit het ene vlak loodrecht staat op het andere vlak. Of we werken met een standhoek. We zullen deze situatie nu “half-loodrecht” noemen. In de vierdimensionale situatie kunnen twee vlakken echt loodrecht op elkaar staan, d.w.z. iedere lijn van  $V$  staat loodrecht op iedere lijn uit  $W$ . Met coördinaten is deze situatie eenvoudig te illustreren. Alle lijnen in het vlak  $x=0, y=0$  staan loodrecht op alle lijnen in het vlak  $z=0, t=0$ . Een lijn door de oorsprong in het vlak  $x=y=0$  wordt immers gegeven door een vector  $(0,0,a,b)$  en een lijn in het vlak  $z=0, t=0$  door een vector  $(p,q,0,0)$ . Het inproduct van deze vectoren is 0, dus is er loodrechte stand.

Een moeilijke vraag met een onverwacht antwoord is de vraag naar de hoek tussen twee vlakken in het algemene geval dat de twee vlakken één punt gemeen hebben. We zouden de verzameling van alle hoeken tussen één lijn in  $V$  en één lijn in  $W$  kunnen bestuderen. Meetkundig is duidelijk dat er een kleinste positieve waarde in deze verzameling is. (Ook de grootste waarde is niet triviaal.) Als regel zouden we deze twee hoeken samen voor de definitie van de “hoek” tussen twee, elkaar in één punt snijdende, vlakken in de vierdimensionale ruimte kunnen noemen. Analytische berekening van deze extremen vraagt nogal wat werk.

We kunnen natuurlijk ook proberen een “standvlak” van de twee vlakken  $V$  en  $W$  te definiëren en in dit standvlak een standhoek te meten. Het standvlak moet dan zowel  $V$  als  $W$  volgens een lijn snijden, de hoek tussen deze twee lijnen kunnen we de standhoek noemen. Het standvlak moet ook loodrecht op  $V$  en op  $W$  staan. Maar dit kan alleen als we “loodrecht” interpreteren als half-loodrecht.

Aan een vlak  $V$  is toegevoegd een oneindig verre rechte  $v$ . Als  $S$  het vlak  $V$  in een lijn snijdt, snijdt de oneindig verre rechte  $s$  van  $S$  de lijn  $v$ . Het vlak  $S$  staat half-loodrecht op  $V$  als de oneindig verre rechte  $s$  een “loodrecht aan  $v$  toegevoegde” oneindig verre rechte  $v^*$  snijdt. Een vlak dat  $V$  dus half-

loodrecht volgens een lijn snijdt, moet een oneindig verre rechte hebben die  $v$  en  $v^*$  snijdt. Voor het standvlak  $S$  moet gelden dat  $s$  dus de vier lijnen  $v$ ,  $v^*$ ,  $w$  en  $w^*$  snijdt. Nu zijn er in de (oneindig verre) driedimensionale ruimte als regel twee lijnen die vier gegeven lijnen snijden. Dus zijn er als regel twee standvlakken en twee standhoeken!

Een uitvoerige beschrijving van dit fenomeen is onder andere te lezen in Hk. de Vries: De vierde dimensie.

#### 4 REGELMATIGE LICHAMEN

Een regelmatige veelhoek in het vlak bestaat met ieder gewenst aantal hoekpunten en zijden. Regelmatige veelvlakken in de ruimte zijn er slechts vijf, de bekende Platonische: viervlak, zesvlak (kubus), achtvlak, twaalfvlak en twintigvlak. Op verschillende manieren is te bewijzen dat er in de ruimte niet meer dan deze 5 regelmatige lichamen zijn.

Eén bewijs gebruikt dat de hoeken van een regelmatige  $n$ -hoek gelijk aan  $(1 - \frac{2}{n})\pi$  zijn. Stel dat in een hoekpunt van het veelvlak  $k$  veelhoeken samenkomen. Dan moet  $k(1 - \frac{2}{n})\pi < 2\pi$  gelden. Dus moet  $(k - 2)(n - 2) < 4$ ; en we vinden voor  $(k, n)$  alleen de mogelijkheden (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3).

Een heel ander bewijs gebruikt echter niet de regelmatigheid van de veelhoeken, maar alleen dat uitsluitend  $n$ -hoeken gebruikt worden en dat in ieder hoekpunt  $k$  van zulke  $n$ -hoeken samenkomen. Stellen we het aantal vlakken op  $Z$ , dan is het aantal ribben  $\frac{1}{2}nZ$  en het aantal hoekpunten  $\frac{1}{k}nZ$ .

Nu bestaat er een, in wezen topologische, stelling over het verband tussen aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken van een bol-achtig veelvlak. Deze formule van Euler luidt

$$H + Z = R + 2$$

waarin  $H$  het aantal hoekpunten,  $R$  het aantal ribben en  $Z$  het aantal zijvlakken aangeeft.

Passen we deze formule toe dan vinden we

$$\frac{1}{k} n Z + Z = \frac{1}{2} n Z + 2.$$

$$\text{Dus } Z = \frac{4k}{4 - (n-2)(k-2)}.$$

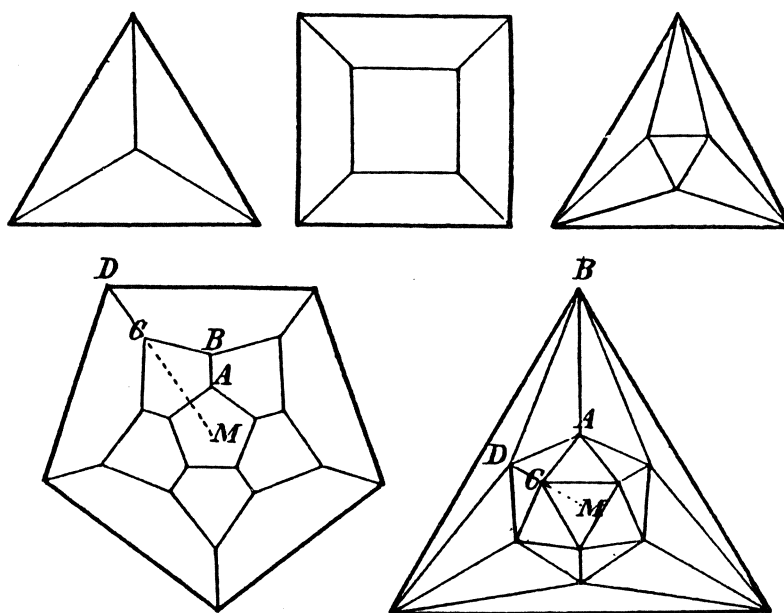
De voorwaarde dat  $Z$  positief moet zijn voert tot  $(n-2)(k-2) < 4$ . We vinden nu direct de aantallen  $H$ ,  $R$  en  $Z$ :

$n$	$k$	$H$	$R$	$Z$
3	3	4	6	4
3	4	6	12	8
3	5	12	30	20
4	3	8	12	6
5	3	20	30	12

De formule  $H + Z = R + 2$  moeten we eigenlijk anders schrijven. De grootheid

$$1 - H + R - Z + 1$$

is een topologische invariant van een veelvlak, genaamd het geslacht. Een bolachtig veelvlak heeft geslacht 0, een torusachtig veelvlak heeft geslacht 2.



FIGUUR 2. Schematische voorstelling van de vijf Platonische regelmatige lichamen.

We onderzoeken nu regelmatig polytopen in de vierdimensionale ruimte. Voor de hand liggen een regelmatig simplex en de hyperkubus. Zijn er nog meer en zo ja welke? We zullen op de topologische manier te werk gaan. Naast de aantallen  $H$ ,  $R$  en  $Z$  komt nu het aantal  $V$  van driedimensionale begrenzende veelvlakken van de polytoop. De definitie van het geslacht van een polytoop is

$$1 - H + R - Z + V = 1.$$

Voor onze regelmatig polytopen eisen we dat het geslacht 0 is, we vinden dan

$$H + Z = R + V.$$

Als begrenzende veelvlakken kunnen we kiezen  $s$ -vlakken ( $s = 4, 6, 8, 12, 20$ ). We eisen dat er  $p$  in ieder hoekpunt samen komen. We moeten nog een extra parameter invoeren, namelijk het aantal veelvlakken dat door een ribbe gaat, we noemen dit aantal  $q$ . We geven een tabel.

$s$	$H$	$R$	$Z$	$V$
4	$\frac{4V}{p}$	$\frac{6V}{q}$	$\frac{4V}{2}$	$V$
	$p$	$q$	$2$	
6	$\frac{8V}{p}$	$\frac{12V}{q}$	$\frac{6V}{2}$	$V$
	$p$	$q$	$2$	
8	$\frac{6V}{p}$	$\frac{12V}{q}$	$\frac{8V}{2}$	$V$
	$p$	$q$	$2$	
12	$\frac{20V}{p}$	$\frac{30V}{q}$	$\frac{12V}{2}$	$V$
	$p$	$q$	$2$	
20	$\frac{12V}{p}$	$\frac{30V}{q}$	$\frac{20V}{2}$	$V$
	$p$	$q$	$2$	

Vullen we dit in de formule  $H + Z = R + V$  in, dan vinden we voor  $s = 4, 6$  en  $12$  de relatie

$$(6 - q)(4 + p) = 24,$$

voor  $s = 8$  de relatie

$$(4 - q)(2 + p) = 8,$$

en voor  $s = 20$  de relatie

$$(10 - 3q)(4 + 3p) = 40.$$

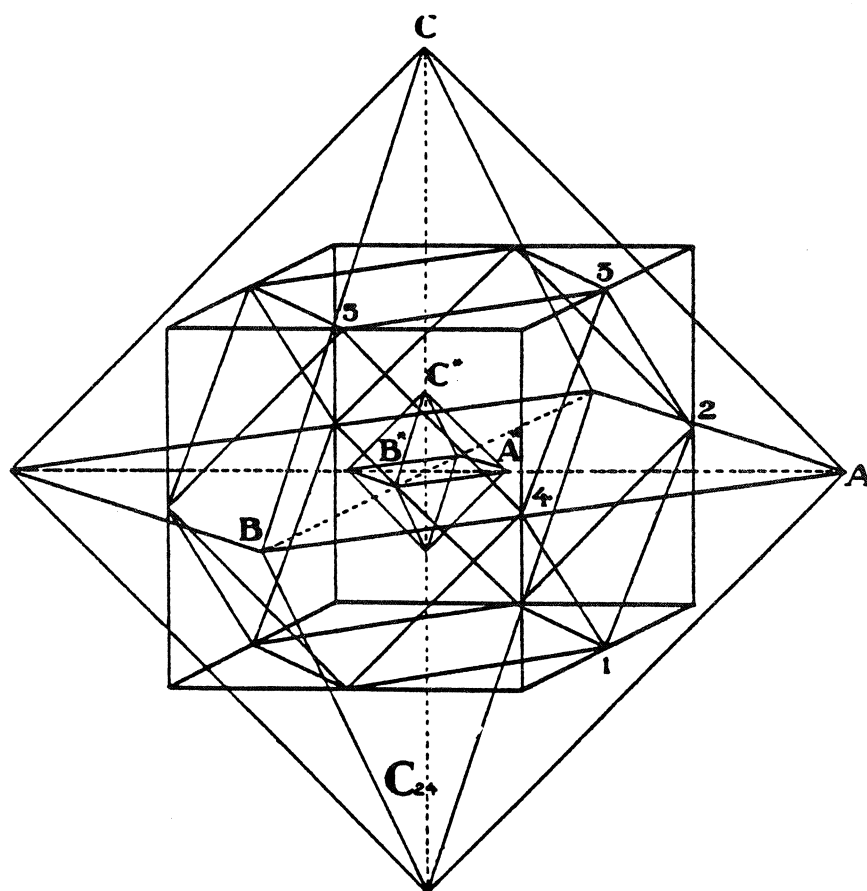
We zien dat de aantallen  $V, H, R$  en  $Z$  hieruit nooit te bepalen zijn, alleen hun verhoudingen, die we even aangeven met  $\bar{H}, \bar{R}, \bar{Z}$  en  $\bar{V}$ . We komen tot de volgende tabel:

$s$	$p$	$q$	$\bar{H}$	$\bar{R}$	$\bar{Z}$	$\bar{V}$	
4	4	3	1	2	2	1	
4	8	4	1	3	4	2	
4	20	5	1	6	10	5	
6	4	3	2	4	3	1	
6	8	4	1	3	3	1	*
6	20	5	2	12	15	5	*
8	6	3	1	4	4	1	
12	4	3	5	10	6	1	
12	8	4	5	15	12	2	*
12	20	5	1	6	6	1	*
20	12	3	1	10	10	1	*

Gebruik makend van aan de hoeken op te leggen eisen, dus geen topologische, maar van metrische regelmaat gebruikmakend zien we dat de vijf met een ster gemerkte combinaties niet tot een regelmatig polytoop in de vierdimensionale ruimte aanleiding geven. Voor het bewijs verwijzen we naar b.v. P.H. Schoute: *Mehrdimensionale Geometrie II*, of naar H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*.

In deze werken staan ook expliciete constructies van de zes regelmatige polytopen die in de vierdimensionale ruimte bestaan. We geven weer een tabel.

$s$	$p$	$q$	$H$	$R$	$Z$	$V$
4	4	3	5	10	10	5
4	8	4	8	24	32	16
4	20	5	120	720	1200	600
6	4	3	16	32	24	8
8	6	3	24	96	96	24
12	4	3	600	1200	720	120

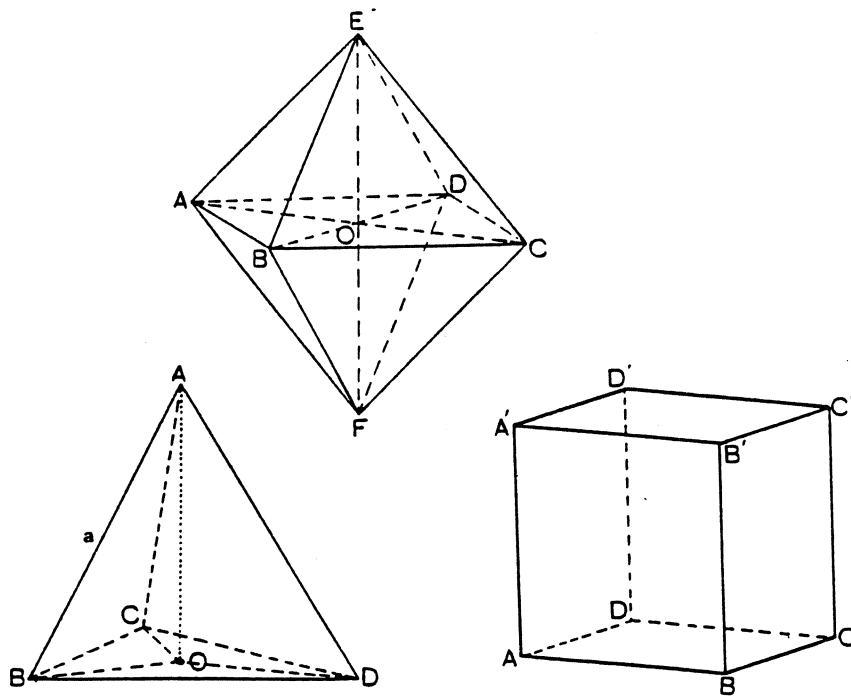


FIGUUR 3. Het regelmatige polytoop met 24 hoekpunten, 96 ribben, 96 vlakken en 24 zijruimten. De acht hoekpunten van de kubus dienen slechts als hulpfiguur.

Voor het geval  $s=6$ ,  $p=8$ ,  $q=4$  kan nog wel een interpretatie gevonden worden, het is de ruimtevulling met kubussen, acht per hoekpunt, vier per ribbe. Dit is een soort ontaard polytoop. Analoog gaf in het driedimensionale geval de situatie met  $(n-2)(k-2)=4$  aanleiding tot een "veelvlak met oneindig veel zijvlakken" wat we interpreteren als een opvulling van het vlak met regelmatige veelhoeken. De gevallen  $n=3$ ,  $k=6$ ;  $n=4$ ,  $k=4$  en  $n=6$ ,  $k=3$  behoren bij de vlakvullingen met regelmatige driehoeken, vierkanten en regelmatige zeshoeken, respectievelijk.

Voor de andere, niet realiseerbare "mogelijkheden" zie ik nog geen verklaring. Evenmin lukt het me om uit de structuur van de wel bestaande polytopen het juiste aantal hoekpunt e.d. te bepalen. In de klassieke boeken over dit onderwerp wordt dit gedaan via constructie van de polytopen rekening houdend met hoeken e.d.

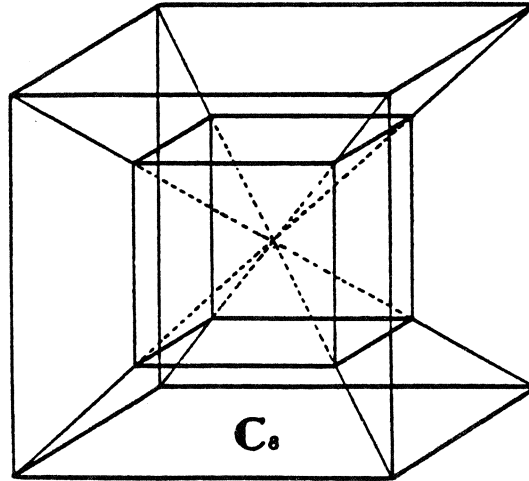
Wellicht is het echter toch mogelijk met zuiver combinatorische middelen de getallen 120, 600, 1200, 720 af te leiden. Ik zal er tussen het schrijven van deze syllabus en de voordracht nog over nadenken.



FIGUUR 4. De drie regelmatige lichamen, die zich tot iedere  $n$ -dimensionale ruimte laten generaliseren.



Het is bekend dat in meer dan vier-dimensionale ruimten slechts drie regelmatige polytopen bestaan. Deze zijn directe generalisaties van het viervlak, de kubus en het achthoek. We verwijzen hiervoor naar de boven genoemde werken van P.H. Schoute en H.S.M. Coxeter.

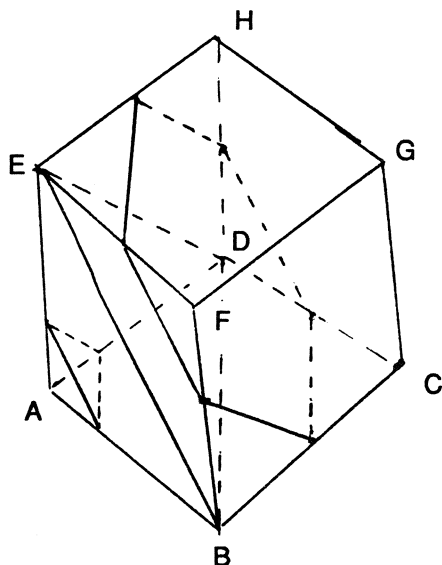


FIGUUR 5. De hyperkubus.

#### 5. DOORSNEDEN VAN DE HYPERKUBUS

Wanneer we een (driedimensionale) kubus doorsnijden met vlakken loodrecht op een lichaamsdiagonaal is de doorsnede een driehoek of een zeshoek. Schuiven we zo'n vlak langs de lichaamsdiagonaal dan begint de doorsnede bij het hoekpunt als een (klein) gelijkzijdig driehoekje dat aangroeit tot de driehoek *BDE*. Daarna wordt de doorsnede een zeshoek (met drie grote en drie kleine zijden).

FIGUUR 6. De kubus met een aantal verschillende doorsneden.



Wanneer we in de middens van de ribben  $BC$ ,  $CD$ ,  $DH$ ,  $HE$ ,  $EF$  en  $FB$  zijn aangekomen is de doorsnede een regelmatige zeshoek geworden. Het verdere verloop is symmetrisch met het beginstuk en eindigt bij het punt  $G$ .

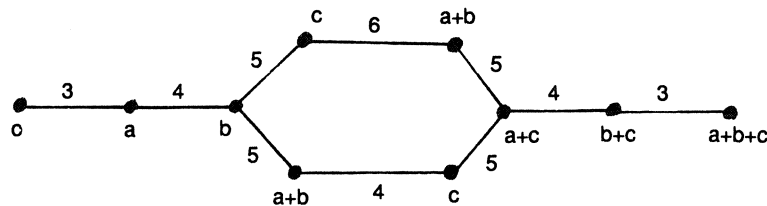
Gebruik makend van de intuïtieve meetkundige werkwijze kunnen we deze opzet naar de vierdimensionale ruimte generaliseren. De doorsnede van de hyperkubus loodrecht op de "lichaamsdiagonaal" (in coördinaten de lijn die  $(0,0,0,0)$  met  $(1,1,1,1)$  verbindt) begint bij het hoekpunt als een klein regelmatig viervlak dat groeit tot het doorsneevlak bij de hoekpunten  $(1,0,0,0)$ ,  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,0)$  en  $(0,0,0,1)$  aangekomen is. Verder gaande snijden we nu van het regelmatig viervlak bij ieder hoekpunt een klein puntje af. Er ontstaat een lichaam met 8 zijvlakken; 4 gelijkzijdige driehoeken en 4 onregelmatige zeshoeken. Wanneer het doorsnedevlak het symmetrie vlak van de hyperkubus, door  $(1,1,0,0)$ ,  $(1,0,1,0)$  enz. is geworden, is de doorsnede een regelmatig achtvlak geworden. Daarna gaat het symmetrisch terug tot de doorsnede in  $(1,1,1,1)$  tot een punt is gereduceerd.

Het is ook aardig om na te gaan hoe de doorsnijding verloopt met onderling evenwijdige vlakken, niet loodrecht op de lichaams diagonaal.

Bezien we eerst het driedimensionale geval. Het is nu handig om met coördinaten te werken. We geven de hoekpunten van de kubus coördinaten  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  met  $\epsilon_i = 0, 1$ . We beschouwen met variabele  $w$  het stelsel vlakken

$$ax + by + cz = w.$$

Zonder bezwaar mogen we veronderstellen  $0 \leq a \leq b \leq c$ . Voor  $w = a$  wordt het hoekpunt  $(1, 0, 0)$  bereikt en bij verder groeiende waarden van  $w$  wordt bij één hoekpunt van de doorsnede-driehoek een hoekje afgesneden. Voor  $w = b$  wordt  $(0, 1, 0)$  bereikt en een tweede hoekje afgesneden. Nu zijn er twee mogelijkheden voor het verdere verloop. Als  $a + b > c$  wordt bij  $(0, 0, 1)$  het derde hoekje afgesneden. Als  $a + b < c$  gebeurt er echter iets anders; bij  $(1, 1, 0)$  vallen twee hoekpunten van de afsnijdriehoekjes samen en bij grotere waarden van  $w$  verdwijnt één zijde van de doorsnee-veelhoek. We hebben het volgende schema:



FIGUUR 7.

Bij de punten staan de waarden van de parameter  $w$  (met naar rechts stijgende waarden), bij de lijnstukjes staat het aantal zijden van de doorsnede-veelhoek. Bij  $w = 0$  en  $w = a + b + c$  is de doorsnede een punt.

Voor de waarden  $w = a, b, c, a + b, a + c, \dots$ , heeft de doorsnede een bijzondere eigenschap. Er zijn bijzondere gevallen als b.v.  $a = b$  of  $a + b = c$ .

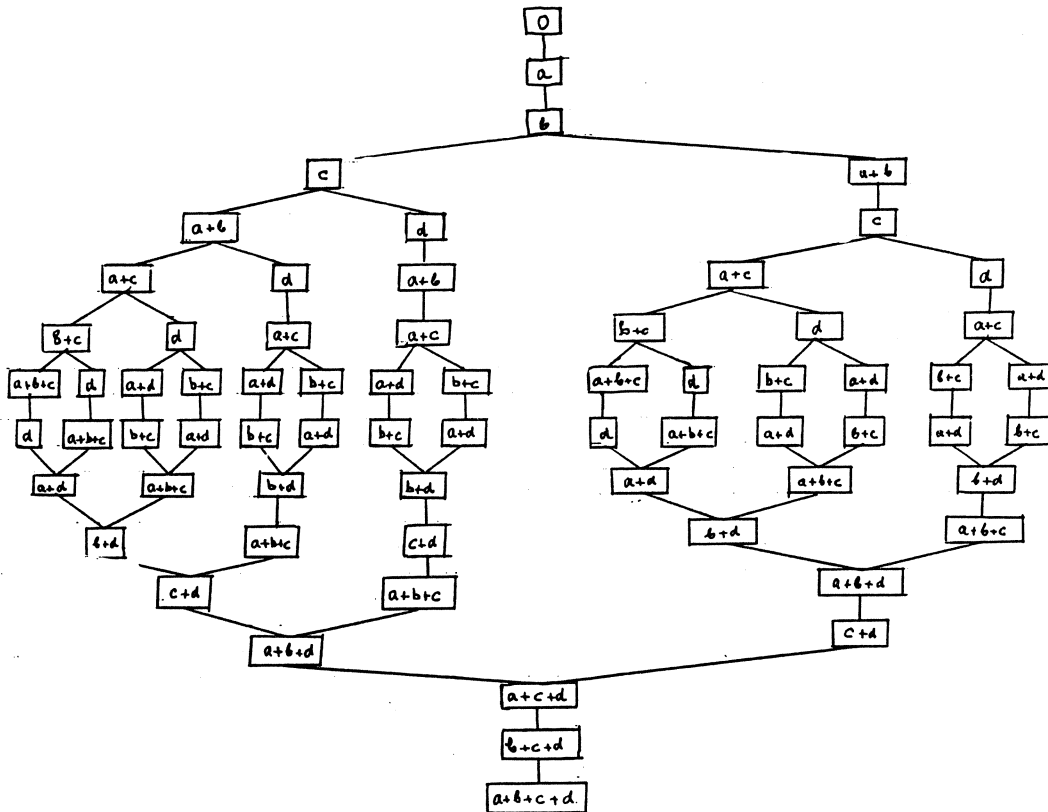
Het is nu duidelijk dat in het vierdimensionale geval met de doorsnijdingen van een hyperkubus met een stel onderling evenwijdige ruimten (hypervlakken) veel gevallen onderscheiden moeten worden.

Voor de coördinaten van de hoekpunten van de hyperkubus kiezen we weer  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$  met  $\epsilon_i = 0, 1$ . De doorsnijdende hypervlakken hebben met variabele  $w$  de vergelijking

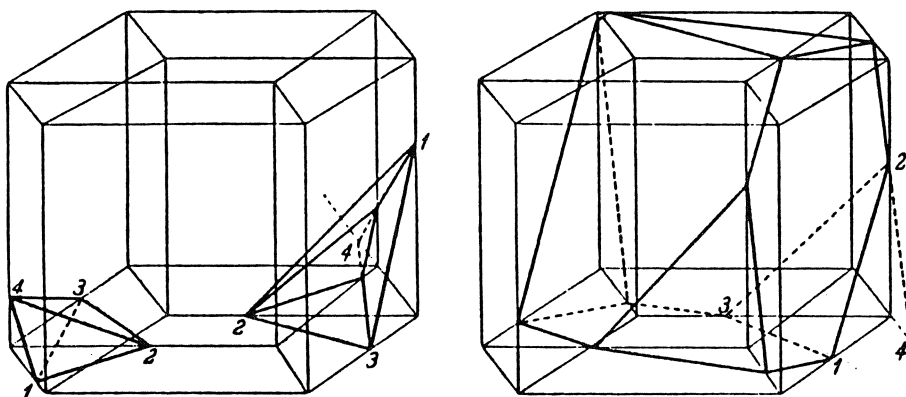
$$ax + by + cz + dt = w.$$

We veronderstellen  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ .

In plaats van twee alternatieven ( $c < a + b$  of  $c > a + b$ ) zijn er nu niet minder dan 14 alternatieven. We beginnen weer met een klein viervlak als doorsnede. Bij  $w = a, b, c$  of  $d$  wordt er bij een hoekpunt een puntje afgesneden. Bij  $w = a + b, a + c$ , enz. gaan de afsnijviervlakjes elkaar ontmoeten. In het totaal zijn zeer veel verschillende veelvlakken als doorsnede mogelijk, alle met maximaal 8 vlakken, terwijl de zijvlakken maximaal zeshoeken zijn.



FIGUUR 8.



FIGUUR 9. De hyperkubus met een aantal verschillende doorsneden.

Op ieder van de trajecten voor  $w$  treedt een bepaald veelvlak als doorsnede op, dat bij het overschrijden van de kritische parameterwaarde  $w$  van structuur verandert, waarbij  $w$  loopt tussen de waarden 0 en  $a + b + c + d$ .

In filmvorm kan men deze processen zichtbaar maken. In de film "The Hypercube" van Thomas F. Banchoff is dit voor symmetrische doorsneden gebeurd. We nemen ons voor deze film in de voordracht tijdens de vacantiecursus te tonen.

De heer W.C. de Leeuw (TU Delft) heeft een fraai computer programma gemaakt waarin "stills" uit zo'n film voor vrij te kiezen parameterwaarden  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  zichtbaar gemaakt kunnen worden. We hopen dit programma eveneens tijdens de vacantiecursus "live" te demonstreren.

Een andere opgave is het volume van het doorsnedeveelvlak als functie van  $w$  te beschrijven. Tussen de kritische parameterwaarden is deze functie een polynoom van de 3<sup>e</sup> graad. In de kritische punten treedt in het algemene geval een discontinuïteit op in de derde afgeleiden. De functie is overigens overal twee maal differentieerbaar. Dr. Kolk (RUU) merkte op dat in de expliciete vorm van deze functie de uit de combinatoriek bekende getallen van Euler voorkomen.

In beginsel is het niet moeilijk de resultaten van deze paragraaf ook in bijzondere situaties en naar hoger dimensionale ruimten te generaliseren.

## 6. VOOR GEVORDERDE LEZERS

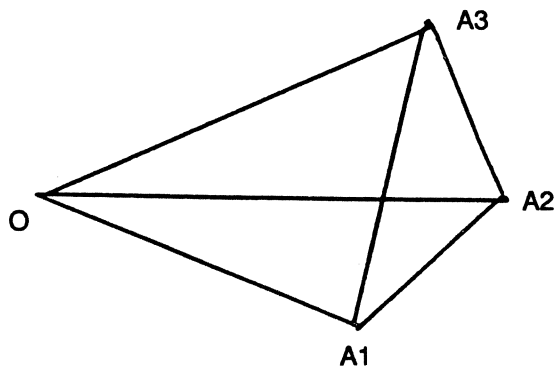
In deze paragraaf willen we enkele zaken uit de minder algemeen bekende klassieke vlakke meetkunde en stereometrie in een vierdimensionale situatie onderzoeken. De kernwoorden zijn hier de cirkel van Feuerbach uit de vlakke meetkunde en het orthogonale viervlak uit de stereometrie, en ook de rechte van Euler uit de planimetrie.

In § 1 merkten we op dat de figuur van een driehoek met drie zwaartelijnen, en die van een viervlak met vier zwaartelijnen zich onmiddellijk laat generaliseren tot een simplex met vijf zwaartelijnen.

De existentie van een in- en van een om-geschreven bol van een viervlak, van een in- en van een om-geschreven sfeer van een simplex geven generalisaties van de vlakke meetkunde stellingen dat de drie hoekdeellijnen en de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan.

Hoe gaat het met generalisaties van de stelling dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan? Wanneer we in een viervlak de lijn door een hoekpunt loodrecht op het overstaande zijvlak een hoogtelijn noemen, zien we met klassieke stereometrie dat de vier hoogtelijnen van een viervlak in het algemene geval *niet* door één punt gaan. (Tussenopmerking: toch is er wel iets bijzonders met deze hoogtelijnen; wat?)

We onderzoeken wanneer de vier hoogtelijnen van een viervlak wel door één punt gaan.



FIGUUR 10.

Uit het feit dat we eisen dat de hoogtelijn uit  $O$ , de hoogtelijn uit  $A_1$  snijdt volgt dat  $OA_1$  in een vlak ligt dat loodrecht op  $A_2A_3$  staat. Dus geldt  $OA_1 \perp A_2A_3$ . Analoog zal  $OA_2 \perp A_1A_3$  en  $OA_3 \perp A_1A_2$ .

Een viervlak waarin ieder paar overstaande ribben loodrecht op elkaar staat noemen we een orthogonaal viervlak. We hebben de stelling:

In een orthogonaal viervlak snijden de vier hoogtepunten elkaar in één punt  $H$ . Door  $H$  gaan ook de drie loodrechte transversalen van de overstaande, elkaar kruisende ribben.

Het bewijs laten we weer aan de lezer over. We formuleren de situatie ook nog in termen van coördinaten meetkunde. We kiezen de oorsprong in  $O$ , de punten  $A_i$  beschrijven we met vectoren  $a_i$ . De eis  $OA_1 \perp A_2A_3$  vertaalt zich als  $(a_1, a_2 - a_3) = 0$ . Dus  $(a_1, a_2) = (a_1, a_3)$ .

Een orthogonaal viervlak is er door gekenmerkt dat

$$(a_1, a_2) = (a_1, a_3) = (a_2, a_3) = p.$$

Het hoogtepunt  $H$  van een orthogonaal viervlak beschrijven we met de vector  $h$ .

Enig rekenen met inproducten leert ons dat het hoogtepunt  $H$  van een orthogonaal viervlak bepaald is door

$$(h, a_i) = p, \quad (i=1,2,3).$$

We schrijven als afkorting  $(a_i, a_i) = \alpha_i$ . Voor het middelpunt  $M(m)$  van de omgeschreven bol van een orthogonaal viervlak geldt

$$(m, m) = (m - a_i, m - a_i), \quad (i=1,2,3).$$

Dus  $(m, a_i) = \frac{1}{2}\alpha_i$ ,  $(i=1,2,3)$ .

Voor het zwaartepunt  $Z(z)$  geldt

$$z = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3).$$

Dus  $(z, a_i) = \frac{1}{4}\alpha_i + \frac{1}{2}p$ . Omdat  $(z - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}h, a_i) = 0$  voor  $i=1,2,3$  zien we dat  $Z, M$  en  $H$  op een rechte lijn liggen en wel zo dat  $MZ = ZH$ .

Dit herinnert ons aan de stelling uit de vlakke meetkunde dat in iedere driehoek  $M, Z$  en  $H$  op een rechte lijn liggen (de rechte van Euler) en wel zo dat  $MZ:ZH = 1:2$ .

Het bewijs van deze vlakke meetkunde stelling is in coördinaten meetkunde geheel analoog aan het boven geschetste bewijs van het driedimensionale geval te geven.

Het ligt voor de hand nu ook het vierdimensionale analogon te bezien.

We noemen een simplex orthogonaal als ieder tweetal elkaar niet snijdende ribben loodrecht op elkaar staat. Voor het simplex  $OA_1A_2A_3A_4$  komt dit in coördinaten meetkunde er op neer dat

$$(a_i, a_j) = p, \quad (i, j=1,2,3,4, i \neq j).$$

Weer geldt voor het hoogtepunt  $H$  dat

$$(h, a_i) = p, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

en voor het middelpunt  $M$  van de omgeschreven sfeer

$$(m, a_i) = \frac{1}{2}\alpha_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nu geldt

$$z = \frac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

en dus

$$(z, a_i) = \frac{1}{5}\alpha_i + \frac{3}{5}p.$$

We vinden dat  $Z$ ,  $M$  en  $H$  op een rechte lijn liggen en wel zo dat  $MZ:ZH=3:2$ .

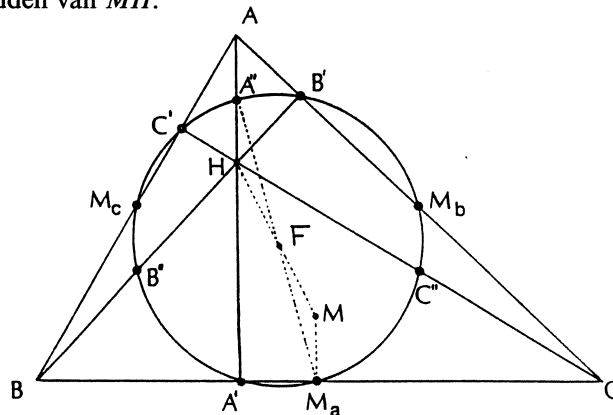
Specialisten van de klassieke vlakke meetkunde weten dat op de rechte van Euler ook nog het middelpunt van de cirkel van Feuerbach ligt. De cirkel van Feuerbach gaat door de middens van de drie zijden van de driehoek. Noemen we het middelpunt van de cirkel van Feuerbach  $F$  dan geldt voor de bijbehorende vector  $f$

$$(f - \frac{1}{2}a_1, f - \frac{1}{2}a_1) = (f - \frac{1}{2}a_2, f - \frac{1}{2}a_2) = (f - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2, f - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2).$$

Omgekeerd

$$(f, a_i) = \frac{1}{4}\alpha_i + \frac{1}{2}p, \quad i=1,2.$$

Dus is  $F$  het midden van  $MH$ .



FIGUUR 11.



Is er nu een bol van Feuerbach door de zes middens van de ribben van een viervlak? Elementaire stereometrie leert dat de hoekpunten van een midden parallellogram, omdat ze op de bol liggen, de hoekpunten van een rechthoek moeten zijn. De bol van Feuerbach bestaat dan en slechts dan als het viervlak orthogonaal is. Het middelpunt van de bol van Feuerbach is nu het zwaartepunt van het viervlak. De reeds meermalen analoog uitgevoerde berekeningen leiden tot de voorwaarde

$$(f, a_i) = \frac{1}{4}\alpha_i + \frac{1}{2}p$$

zowel in het drie- als in het vierdimensionale geval.

Het punt  $F$  ligt dus op de lijn  $MH$  en  $MF = FH$ .

De situatie van de rechte van Euler met daarop de punten  $M, H, F$  en  $Z$  laat zich direct naar het  $n$ -dimensionale geval generaliseren.

In het tweedimensionale geval gaat de cirkel van Feuerbach nog door 6 andere bijzondere punten, namelijk de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek en de middens van de verbindingstukken van het hoogtepunt met de drie hoekpunten. Daarom noemt men de cirkel van Feuerbach ook wel negenpuntscirkel.

Het is eenvoudig in te zien dat de bol van Feuerbach van een orthogonaal viervlak gaat door 24 bijzondere punten (zie b.v. P. Molenbroek: Leerboek der Stereometrie, pag. 238).

De sfeer van Feuerbach in het vierdimensionale geval gaat, als ik het goed geteld heb, door 50 bijzondere punten en mag dus de vijftigpuntsfeer van Feuerbach genoemd worden.

In een orthogonaal  $(n-1)$ -dimensionaal simplex is er een Feuerbach hypersfeer door  $\frac{1}{2}(n^3 - n^2)$  punten.

#### LITERATUUR

1. EDWIN A. ABBOTT, A Square: Flatland. A romance of many Dimensions, Oxford, 1932<sup>4</sup>, vertaald: Platland, Amsterdam, 1920<sup>4</sup>.
2. P.H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie I, II, Leipzig, 1905.
3. HK. DE VRIES, De Vierde Dimensie, Groningen, 1925<sup>2</sup>.
3. NOTHING ALL, Inzicht in de vierde dimensie, Groningen, z.j.
4. R.W. WEITZENBÖCK, Der vierdimensionale Raum, Basel, 1956<sup>2</sup>.
5. H.S.M. COXETER, Regular Polytopes, New York, 1963<sup>2</sup>.
6. LINDA DALRYMPLE HENDERSON, The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art, Princeton, 1983.
7. THOMAS F. BANCHOFF, Beyond the Third Dimension, San Francisco, 1990.



## Symmetrie Problemen

(Symmetrische problemen en problemen in het begrijpen van symmetrie)

Michiel Hazewinkel  
CWI  
POBox 4079  
1009AB Amsterdam

**1. Inleiding.** Het hoofdthema van deze voordracht is symmetrie van meetkundige figuren en ook van meer abstracte mathematische structuren. Veel problemen en vraagstukken in en buiten de wiskunde hebben niet triviale symmetrie ingebouwd. Wat het begrip symmetrie in dezen inhoudt komt verderop ter sprake.

Tot voor kort dachten de wiskundigen en andere wetenschappers dit begrip ‘symmetrie’ adequaat gedefiniëerd te hebben: symmetrie betekent dat er een groep is van transformaties werkend op een collectie van mathematische structuren; en een object uit die collectie heeft niet triviale symmetrie als er niet triviale elementen uit de groep zijn die dat object in zich zelf over voeren (invariant laten). Bijvoorbeeld: de groep kan die zijn van de bewegingen van het Euclidisch vlak en de mathematische structuren die we bekijken kunnen bijvoorbeeld roosters van punten in dat vlak zijn; i.e. één object is het vlak samen met een rooster van punten in dat vlak.

Echter recentelijk is gebleken dat het begrip symmetrie in deze vorm op de helling moet: er zijn allerlei regelmatige/symmetrische structuren die niet gevangen kunnen worden binnen het kader van een groep van transformaties. Dus: ‘symmetrieën zonder groep’. Eén klasse van voorbeelden hiervan komt later in deze voordracht aan de orde: de Penrose werelden; andere voorbeelden zijn de zogenaamde “quantum groepen” (zie bijv.[7]).

Gegeven het feit dat vele natuurlijke vraagstukken symmetrie hebben, lijkt het dus de moeite waard aandacht te besteden aan de vraag in hoeverre en op welke wijze efficiënt gebruik gemaakt kan worden van zulke symmetrie bij het oplossen of bestuderen van zulke vraagstukken. De meeste wetenschappers en leraren, speciaal in de structuur- en natuurwetenschappen, weten op een wat vage manier dat symmetrie en invariantie principes een niet onbelangrijke rol spelen in allerlei situaties. Maar misschien is het toch wel een verrassing te observeren — voor mij zelf was dat indertijd zeker het geval — dat in twee van de belangrijkste tijdschriften in de theoretische natuurkunde, *J. Math. Physics* en *Lett. Math. Physics*, respectievelijk 36% en 54% van de artikelen in 1983 handelden over aspecten van symmetrie. Er wordt dus inderdaad heel wat onderzoek geïnvesteerd in het begrijpen en gebruiken van symmetrie.

In deze voordracht wil ik aandacht besteden aan de volgende aspecten:

- Hebben symmetrische problemen noodzakelijk symmetrische oplossingen?
- Geboorte en sterfte van symmetrie.
- Symmetrie zonder groep.
- Symmetrie en extremaliteit.

Met uitzondering van ‘sterfte van symmetrie’ (beter bekend staande als het ‘breken van symmetrie’), en ‘symmetrie zonder groep’ in het geval van quantum groepen, zijn dit aspecten van symmetrie die nog relatief weinig aandacht gehad hebben, en die vrij snel tot open problemen leiden.

**2. Symmetrische problemen en hun oplossingen.** Er zijn nogal wat functies van meer variabelen, symmetrisch in (een gedeelte van) die variabelen, zodanig dat hun minimum of maximum precies optreedt wanneer al die variabelen gelijk zijn. Enkele voorbeelden volgen.

2.1. Van alle rechthoeken met gegeven omtrek heeft het vierkant het grootste oppervlak.

2.2. Van alle gesloten stuksgewijs gladde krommen van gegeven lengte omvat de cirkel het maximale oppervlak.

(Deze twee ‘problemen’ hebben veel met elkaar te maken; 2.1 is een eindig dimensionale restrictie van het oneindig dimensionale probleem 2.2.)

2.3.  $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \leq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$ , en gelijkheid treedt op precies dan wanneer  $x_1 = \lambda y_1, x_2 = \lambda y_2, \dots, x_n = \lambda y_n$  voor een zekere  $\lambda$ . Dit is de zogenaamde Cauchy – Schwarz – Bunyakovsky ongelijkheid (Bunyakovskii, 1859; Schwarz, 1884); en dus ten onrechte zo genoemd.

2.4. Voor een gegeven gemiddelde waarde  $\bar{x} = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  treedt het minimum van  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  op wanneer alle  $x_i$  gelijk zijn.

Het lijkt duidelijk dat dit geen toeval kan zijn en dat er wellicht een principe achter schuilt. Zoiets als het volgende. Laten  $f(x_1, \dots, x_n)$  en  $g(x_1, \dots, x_n)$  twee symmetrische functies zijn en bekijk het probleem van het maximaliseren of minimaliseren van  $f(x_1, \dots, x_n)$  onder de restrictie  $g(x_1, \dots, x_n) = c$ . Dan geldt voor de oplossing dat  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Het is niet onnatuurlijk te denken dat dit principe zonder meer waar is, en zo af en toe is er nog wel hier en daar in de literatuur een uitspraak te vinden van het type: “By symmetry considerations it follows that ...”, waarmee dan een al dan niet ware versie van dit principe aangeroepen wordt.

In [10] introduceert Waterhouse de naam ‘Purkiss principle’ voor zulke principes en hij bewijst daar een correcte versie (en een generalisatie). Een correcte versie van het Purkiss principe kan als volgt geformuleerd worden.

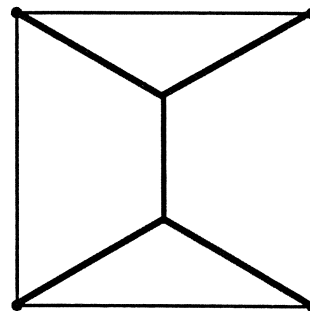
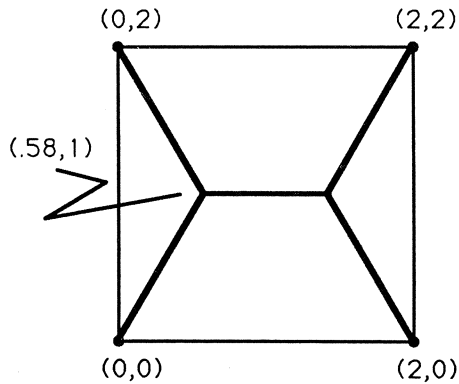
**Purkiss principle.** Laten  $f$  en  $g$  symmetrische functies zijn met continue tweede afgeleiden in een omgeving van een punt  $P = (r, r, \dots, r)$ . Zij  $V$  de verzameling

$$V = \{(x_1, \dots, x_n); g(x_1, \dots, x_n) = g(P)\}$$

Dan heeft de functie  $f$  op  $V$  een lokaal extremum in  $P$  behalve in gedegeneerde gevallen.

(Die gedegeneerde gevallen zijn precies beschreven.)

In zijn algemeenheid is het Purkiss principe zeker niet waar. De hoofd moeilijkheid zit hem in het woord ‘lokaal’. Een beroemd tegenvoorbeeld is het volgende: gegeven vier steden



gelocaliseerd op de vier hoekpunten van een vierkant; wat is het kortste wegennet dat ze alle vier verbindt?

De oplossing is aangegeven in de twee tekeningen op de vorige bladzijde. Merk op dat de oplossing minder symmetrisch is dan het probleem zelf; om dat te compenseren zijn er twee oplossingen en “samen hebben ze de complete symmetrie van het oorspronkelijke probleem”.

Een gedetailleerd bewijs dat de aangegeven oplossing inderdaad de optimale is valt buiten het kader van deze voordracht. Een begin kan gemaakt worden door alle wegen- netten te bekijken van de vorm aangegeven in de figuur hieronder. Een eenvoudige berekening geeft dat de totale lengte van dit wegennet gelijk is aan

$$4\sqrt{1+x^2} + (2-2x)$$

en het minimum daarvan wordt aangenomen voor

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577.$$

Het eerste tegenvoorbeeld tegen het Purkiss principe in de algemene vorm is afkomstig van Bunyakovskii (dezelfde van de ongelijkheid). Zijn voorbeeld betreft de functie

$$f(x, y) = [x^2 + (y-1)^2][(x-1)^2 + y^2]$$

die zijn minimum aanneemt in de punten (1,0) en (0,1) in plaats van in een punt waar  $x = y$ . Nog een ander voorbeeld wordt gegeven door de familie van functies

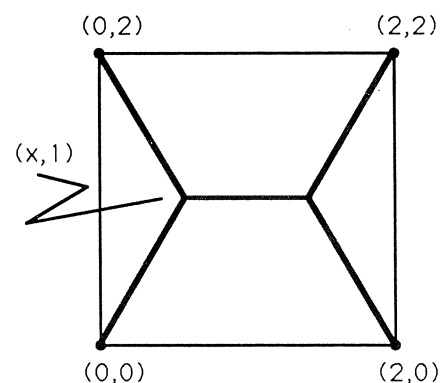
$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - \lambda)^2$$

voor waarden van  $\lambda$  tussen een half en 1.

Er is overigens een goede reden waarom deze eenvoudigste voorbeelden minstens van graad vier zijn: voor graad drie en lager is het Purkiss principe waar (Bunyakovskii).

Ik ben bekend met twee redenen waarom symmetrische problemen soms niet even symmetrische oplossingen hebben. De eerste is ‘bifurcaties’, of te wel de geboorte en dood van symmetrieën terwijl een parameter verandert. Die theorie laat uitstekend zien, waarom in het laatste voorbeeld het Purkiss principe werkt voor  $\lambda$  kleiner dan een half en daarna mis gaat. Dit is het onderwerp van de volgende sectie. In die sectie wordt ook duidelijker waarom voor polynomiale tegenvoorbeelden graad vier of hoger nodig is: voor het type bifurcatie waarbij een maximum (of minimum) verdwijnt zijn minstens drie oplossingen van de stationariteits conditie “afgeleide is nul” nodig.

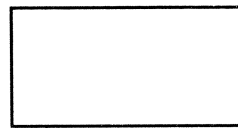
Een tweede reden waarom symmetrie kan verdwijnen ligt in rand conditie voorwaarden: als de rand condities, voor bijv. differentiaal vergelijkingen, niet even symmetrisch zijn als de vergelijking zelf, dan is het logisch dat de symmetrie gebroken raakt. Maar het begrip rand voorwaarden is algemener dan dat en in sectie 5 hieronder, extremaliteit en symmetrie, hoop ik daarop terug te komen. Als voorbereiding daarop is het misschien goed om alvast op te merken



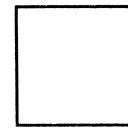
dat veel van de voorbeelden boven ook een iets ander principe illustreren: optimale configuraties tenderen hoog symmetrisch te zijn! Dat is het echt centrale onderwerp van sectie 5.

**3. Geboorte en sterfte van symmetrie.** In deze sectie bekijken we wat er kan gebeuren met de symmetrie groep van een structuur of patroon terwijl het (langzaam) verandert in afhankelijkheid van één of meer parameters. We beginnen met wat voorbeelden.

3.1. *Symmetrie van rechthoeken.* Bekijk een rechthoek met zijden 1 en  $\lambda$ . Als  $\lambda \neq 1$  dan wordt de symmetrie groep voortgebracht door de twee reflecties over de horizontale en verticale as, en de symmetrie groep is de zogenaamde “vier-groep van Klein”, bestaande uit de identiteit, de twee genoemde reflecties, en de samenstelling van die twee reflecties als vierde element. Echter, op het moment dat  $\lambda$  gelijk aan 1 wordt, wordt de symmetrie groep groter en er verschijnt het symmetrie element van een rotatie over 90 graden. Voor die waarde van  $\lambda$  is de symmetrie groep de groep  $D_4$  van acht elementen (die de vier-groep van Klein omvat als een deelgroep).

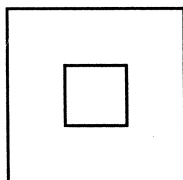


Symmetrie groep  
 $Z/2 \times Z/2$

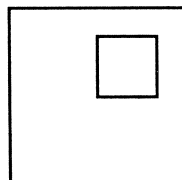


Symmetrie groep  $D_4$

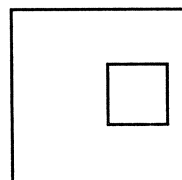
3.2. *Symmetrie van twee vierkanten.* Als een tweede voorbeeld bekijk een klein vierkant in een groter met parallelle zijden, zoals hieronder afgebeeld. In het geval dat het kleine



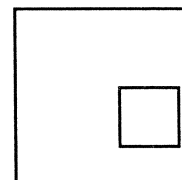
(a)



(b)



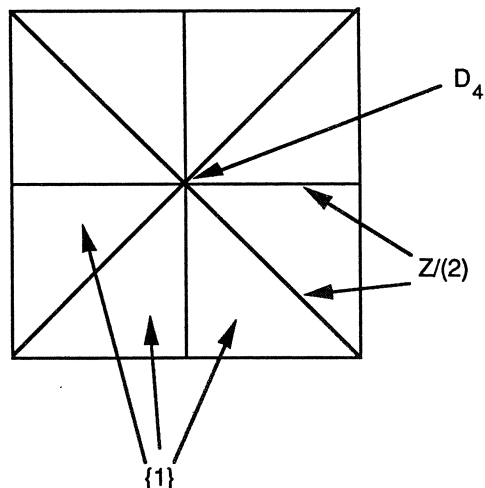
(c)



(d)

vierkant precies in het midden is van het grote hebben we weer een symmetrie groep  $D_4$ .

Dit is de situatie in het geval (a) hierboven. Als het centrum van het kleine vierkant niet in het midden maar op één van de twee diagonalen van het grote vierkant ligt dan is de enige symmetrie een reflectie met die diagonaal als symmetrie as. Dat is geval (b) hierboven. Ligt het centrum van het kleine vierkant op de horizontale of verticale symmetrie as van het grote (geval (c)), dan is de situatie analoog en er is een symmetrie groep  $Z/2$ . Tenslotte, als het centrum van het kleine vierkant noch op één van de diagonalen, noch op één van de symmetrie assen van het grote vierkant ligt, is er geen niet



triviale symmetrie. De situatie wordt dus geheel bepaald door de positie van het centrum van het kleinere vierkant en kan weergegeven worden zoals hierboven.

Beide deze voorbeelden geven het volgende beeld. Laat de parameter langzamerhand veranderen. Dan kan het gebeuren dat de symmetrie groep na enige tijd groter wordt; echter in een klein genoeg omgeving van een gegeven punt is de symmetrie groep nooit groter dan in dat punt, maar het kan wel degelijk gebeuren dat in de onmiddellijke omgeving van een punt de symmetrie groep reduceert tot een kleinere. Dus “plotselinge” verkleining kan, maar plotselinge vergroting niet. Dit is precies het beeld van het “breken van symmetrie” dat intuïtief juist lijkt en dat veel gebruikt wordt in de natuurkunde. Er is ook een mathematische stelling die zegt dat onder zekere condities dit het juiste beeld is. Echter voordat ik die tracht te formuleren is het goed te preciseren wat bedoeld wordt met de phrase “symmetrie van een mathematisch object”.

3.3. *Het begrip “groep van symmetrie”*. Het intuïtieve idee is als volgt. Er is een groep van potentiële symmetrieën en de elementen daarvan kunnen toegepast worden voor het transformeren van een mathematische structuur. Die elementen van de potentiële groep van symmetrieën die een gegeven structuur invariant laten zijn symmetrieën van die structuur. In het geval van voorbeeld 3.2 hierboven zijn de potentiële symmetrieën de starre bewegingen van het platte vlak, reflecties, en combinaties daarvan; de mathematische structuur bestaat uit een paar vierkanten in dat vlak. Laten we een grotere groep van symmetrieën toe als potentiële kandidaten dan kan de symmetrie groep van een object gemakkelijk groter worden.

Het mathematische plaatje is als volgt. Er is een groep  $G$  (de groep van potentiële symmetrieën), die werkt op een verzameling  $M$  (de verzameling van mathematische objecten van de soort die we aan het bekijken zijn; in het geval van voorbeeld 3.2 bestaat  $M$  uit alle paren vierkanten van gegeven groottes parallel binnen elkaar). De phrase “werkt op” betekent dat er een afbeelding  $G \times M \rightarrow M$  is, die met  $(g, m) \mapsto gm$  genoteerd wordt, zodanig dat  $1m = m$ , en  $g(hm) = (gh)m$ . De *isotropie groep* van een element  $m \in M$  is de ondergroep

$$G_m = \{g \in G: gm = m\}$$

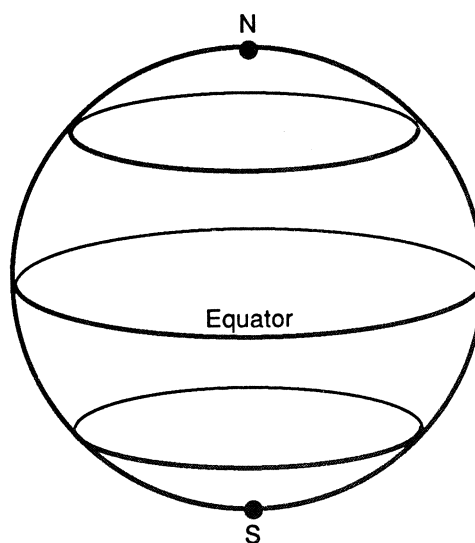
en dat is dus de symmetrie groep van (de mathematische structuur)  $m$ .

Voor het formuleren van preciese uitspraken later zijn nog een paar extra begrippen in deze context nuttig. Een verzameling  $M$  met een werking van  $G$  op zoals boven heet kortweg een  $G$ -verzameling. Twee  $G$ -verzamelingen  $M_1$  en  $M_2$  heten *isomorph* als er een bijectieve afbeelding  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  is zodat  $\alpha(gm) = g\alpha(m)$ . De *baan* van een element  $m$  in een  $G$ -verzameling  $M$  is de deel  $G$ -verzameling

$$Gm = \{gm: g \in G\}$$

Een *stratum* in  $M$ , tenslotte, is de vereniging van alle banen van hetzelfde isomorphie type.

Het één en ander kan goed geïllustreerd worden met het volgende voorbeeld, hierboven afgebeeld. De verzameling  $M$  is de bol en de groep  $G$  is de groep van alle rotaties over de



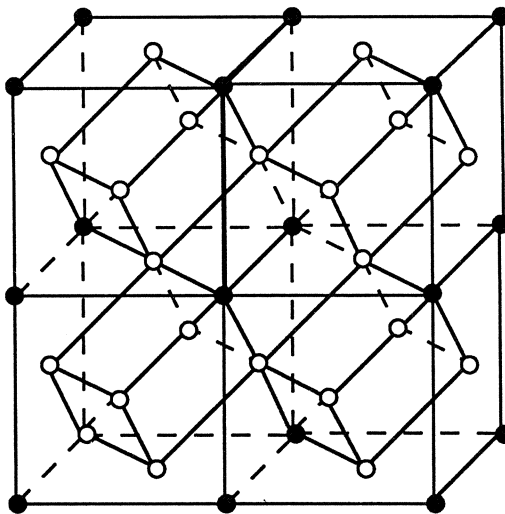
Noord – Zuid as samen met inversie in het centrum van de bol. De banen zijn de verenigingen van twee parrallel cirkels op respectievelijk gelijke noorder en zuider breedte. Er zijn drie strata. Namelijk de vereniging van de noordpool en de zuidpool, de equator, en de hele rest.

3.4. *Het breken van symmetrie.* Met het nu opgebouwde begrippen apparaat kan de volgende stelling geformuleerd worden.

**Stelling, [9].** Zij  $G$  een compacte Lie groep die glad werkt op een compacte gladde variëteit  $M$ . Dan is er voor alle  $m \in M$  een open omgeving  $U$  van  $m$  zodat voor alle  $m'$  in  $U$  de symmetrie groep  $G_{m'}$  bevat is in de symmetrie groep  $G_m$  van  $m$  (op geconjugeerde na).

Hierbij zijn twee ondergroepen  $N_1$  en  $N_2$  van  $G$  geconjugerd als er een element  $g$  van  $G$  is zodat  $N_1 = g^{-1}N_2g$ .

Dit is dus precies zo'n stelling als verwacht kan worden op basis van de voorbeelden 3.1 en 3.2 die we tot nog toe bekeken hebben. De stelling in deze vorm is maar een begin. Er zijn erg veel natuurlijke situaties waarin aan de voorwaarden niet voldaan is. Bijvoorbeeld de verzameling  $M$  kan singulariteiten hebben; de groep  $G$  is vaak niet compact of zelfs maar eindig dimensionaal, ... Het is echter zoets als een 'folk theorem' dat een zelfde stelling ook waar is voor de situatie van een Euclidische groep van bewegingen werkende op mogelijke kristal structuren; dat wil zeggen een euclische ruimte met daarin een eindige of oneindige discrete collectie van punten gespecificeerd die ook nog een eindig aantal verschillende kleuren kunnen hebben, zoals het hierboven



geïllustreerde "face-centered cubic lattice". Echter een echt hard bewijs van zo'n stelling schijnt in de literatuur nog niet voorhanden te zijn. In zijn algemeenheid is het principe: "voldoende kleine veranderingen kunnen alleen maar resulteren in minder symmetrie" zeker niet waar. In [6] beschrijf ik twee tegenvoorbeelden. Het lijkt er op dat er in het algemeen twee soorten symmetrie zijn die een rol kunnen spelen: 'design symmetry' en 'generic symmetry'. De eerste soort is degene waar hierboven aandacht besteed is (en in die situaties is de tweede soort niet aanwezig). De tweede soort is van geheel ander type en treedt op in situaties waarbij de meeste exemplaren van een mathematische structuur een niet triviale symmetrie hebben die in speciale gevallen kan verdwijnen. Een voorbeeld hiervan treedt op bij het bekijken van  $n$ -dimensionale algebras over de complexe getallen die (als algebra) door één element voortgebracht worden. Die zijn van de vorm  $C[X]/f(X)$ , waarbij  $f(X)$  een polynoom is van de graad  $n$ . Als nu dit polynoom  $n$  verschillende wortels heeft dan is de automorphismen groep van de algebra (en dat is de symmetrie groep in deze situatie) gelijk aan de groep  $S_n$  van alle permutaties van  $n$  letters. Echter als twee of meer wortels samen vallen dan zijn niet meer alle wortels van hetzelfde type en een gedeelte van deze symmetrie groep verdwijnt.



In het geval van drie dimensionale algebras (ook algemenere dan de net besprokene) is de situatie geheel uitgezocht in [6]. In dat geval treden er twee tegengestelde verschijnselen op: onder voldoende kleine deformaties neemt de 'design' symmetrie groep af (of blijft gelijk) en de 'generic' symmetrie groep groeit (of blijft gelijk).

Of zoiets algemeen waar is is nog volledig open; er is nauwelijks onderzoek naar gedaan.

**3.5. Bifurcaties en symmetrie.** Bifurcatie theorie houdt zich bezig met het bestuderen van vergelijking die afhangen van een parameter en meer speciaal met de vraag hoe de verzameling van oplossingen kan veranderen als de parameter(s) zich wijzigen. Samen met enkele van de beschouwingen hierboven levert dit het gereedschap voor het begrijpen van wat er mis kan gaan met het Purkiss principe.

Als illustratie kan weer het probleem dienen van het vinden van de maxima van de functie

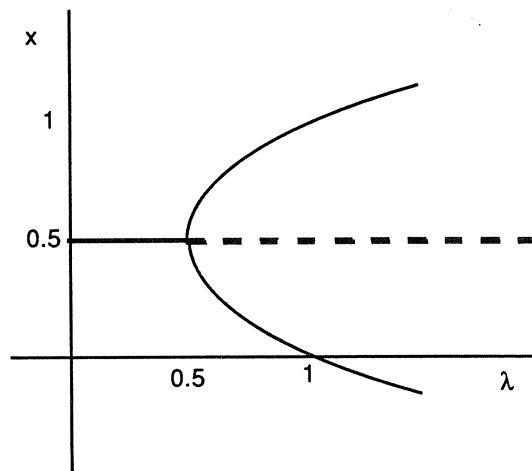
$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - \lambda)^2$$

onder de nevenvoorwaarden

$$x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

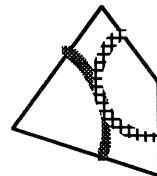
Substitueer  $y = 1 - x$  en neem de afgeleide naar  $x$  om de stationaire punten te vinden. In afhankelijkheid van  $\lambda$  resulteert het plaatje hiernaast. Er is altijd een stationair punt voor  $x = 1/2$  en voor  $\lambda$  kleiner of gelijk

aan  $1/2$  is dit het enige stationaire punt en het is een maximum; zodra  $\lambda$  voorbij een  $1/2$  gaat zijn er drie stationaire punten: twee die met maxima corresponderen en één,  $x = 1/2$ , die een minimum representeert

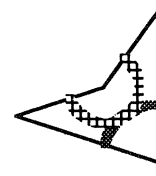


**4. Symmetrie zonder groep.** Zoals ik al in de inleiding opmerkte is er regelmaat (of te wel symmetrie) in een aantal situaties zonder dat daar een groep bij hoort. Er zijn verschillende manifestaties van dit verschijnsel, zeker niet allen van hetzelfde type (voor zover we nu kunnen zien). In deze sectie wil ik aandacht besteden aan één ervan, de zogenaamde Penrose universa of te wel Penrose betegelingen van het platte vlak, voornamelijk van uit het gezichtspunt van hun symmetrie eigenschappen. Voor een (recreationele) inleiding tot de Penrose tegels zie [5], en voor de algebraïsche theorie ervan zie [1,2].

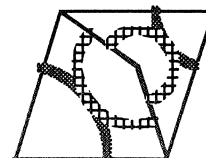
De twee Penrose tegels, althans in hun meest bekende vorm —er zijn oneindig veel variaties— zijn de volgende: een vlieger en een pijl zoals hiernaast afgebeeld. De vlieger heeft hoeken van 72, 72, 72, en 144 graden, en de pijl heeft hoeken van 72, 36, 216, en 36 graden. De vlieger en de pijl passen samen tot een ruit met een scherpe hoek van 72 graden. Ze zijn echter van cirkel



Kite (vlieger)



Dart (pijl)

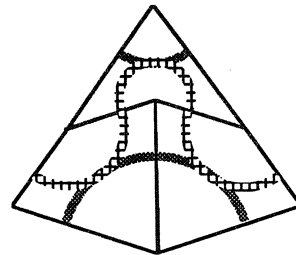


bogen voorzien (met stralen van  $r$ ,  $1$ , en  $1/r$  als de lange zijden lengte  $1+r$  hebben, waarbij  $r$  gelijk is aan de gouden snede lengte  $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , precies om aan te geven dat deze twee tegels bij het maken van een betegeling van het hele vlak juist niet op deze wijze samen gevoegd mogen worden.

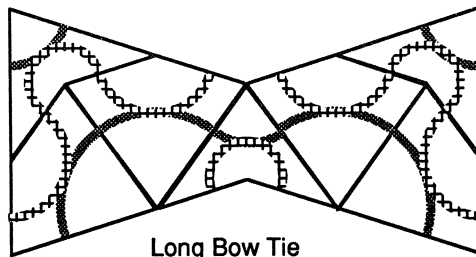
De bedoeling is nu met behulp van deze twee tegels een betegeling van het hele platte vlak te maken op zo'n manier dat de twee verschillend "gekleurde" bogen op iedere tegel op elkaar aansluiten. Hierbij is een betegeling van het vlak door middel van een aantal tegels een volledige overdekking van het vlak met die tegels zodat de tegels elkaar niet overlappen (behalve hun randen). Drie kleine stukjes patroon die telkens weer terug komen zijn hiernaast en hieronder afgebeeld. Op de volgende bladzijde is een stuk van het zogenaamde 'cartwheel' patroon weergegeven.

Het is inderdaad mogelijk het hele vlak op deze manier te betegelen. Deze Penrose betegelingen hebben de volgende eigenschappen.

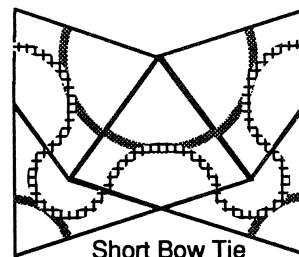
- (1) Elke betegeling is niet periodisch



Ace (Aas)



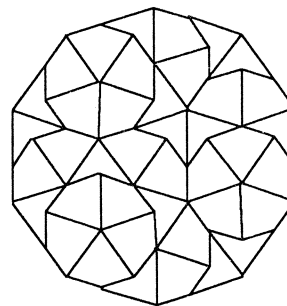
Long Bow Tie  
(Lange strik)



Short Bow Tie  
(Korte strik)

- (2) Er zijn over aftelbaar verschillende betegelingen.

(3) Neem een eindig gebied in een van deze betegelingen van diameter  $D$ , en een willekeurige andere (of dezelfde) betegeling en een punt daarin. Dan is er binnen een radius van  $2D$  van het gegeven punt in de tweede betegeling een exacte kopie te vinden van het eerste gekozen gebied. Dat betekent dus dat alle Penrose universa lokaal niet van elkaar te onderscheiden zijn, hoewel ze globaal verschillend zijn. Dit is een symmetrie eigenschap die niet zonder meer te vangen is binnen het kader van een groep werkend op een verzameling.

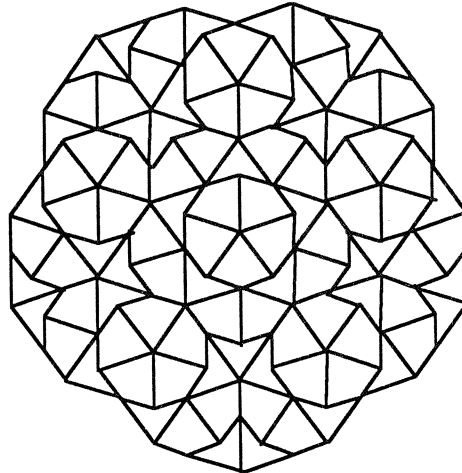


Cartwheel

Het is natuurlijk bekend dat het onmogelijk is het platte vlak te betegelen met regelmatige pentagons of überhaupt met tegels die een orde vijf symmetrie element toelaten. Daaruit is de conclusie getrokken dat crystal structuren met een orde vijf symmetrie niet zouden kunnen bestaan. Ze bestaan echter wel degelijk ('quasi-crystals'), en de Penrose universa, die een sterke neiging hebben tot vijf- en tienvoudige symmetrie, vormen een mogelijk theoretisch model daarvoor. Dat de Penrose universa een sterke neiging tot vijfvoudige bijna symmetrie hebben is te zien aan het zon patroon hieronder en speciaal aan het 'cartwheel' patroon op de daarop volgende twee bladzijden. Met uitzondering van het centrale cartwheel heeft dat patroon een perfecte vijfvoudige rotatie symmetrie. De vijfvoudigheid neiging spreekt ook uit de hoeken

die optreden (36 en 72 graden) en uit de volgende eigenschap.

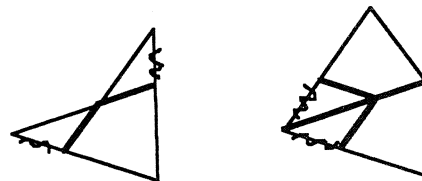
(4) Elk punt ligt binnen een 'cartwheel'. zo bestaat bijvoorbeeld het "zon patroon", of althans het stuk dat hiernaast is afgebeeld uit vijf overlappende cartwheels. In de afbeeldingen op de volgende bladzijden zijn een aantal cartwheels met een wat vettere lijn aangegeven



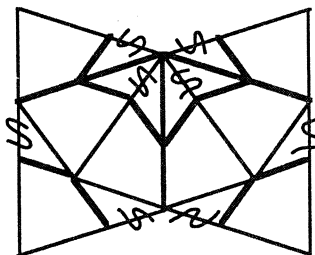
Zon patroon

De sleutel tot deze eigenschappen ligt in nog verdere symmetrie eigenschappen van de Penrose universa. Dit zijn "schalings symmetrie eigenschappen zoals je ook voorkomen bij de zogenaamde fractalen. Ze heten 'inflatie' en 'deflatie' en werken als volgt.

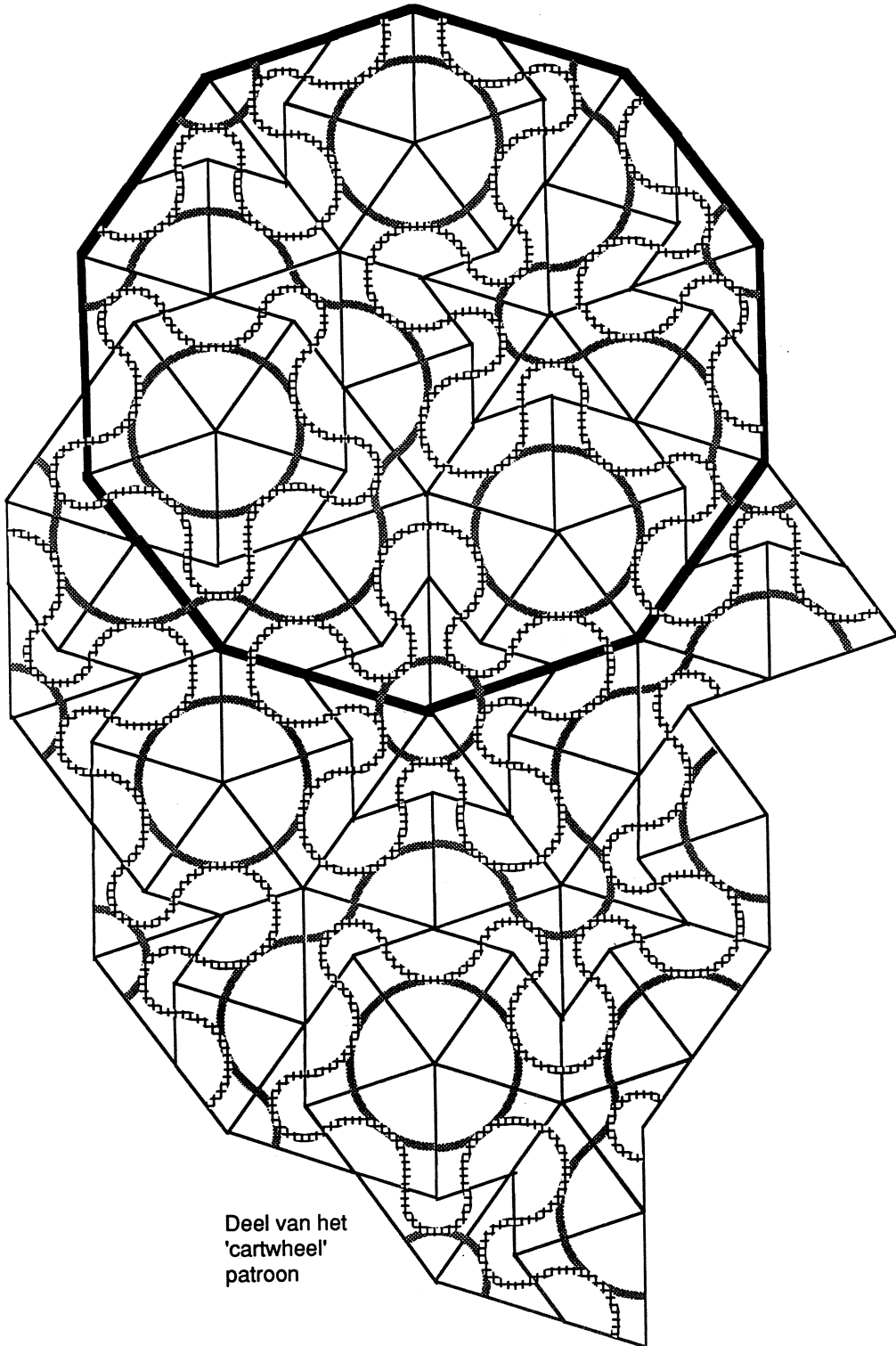
Voor deflatie van een Penrose patroon doet men het volgende. Verleng de korte zijden van elke pijl op de hiernaast aangegeven wijze en verwijder de stukjes van de lange zijden bij de vleugels van de pijl; ook zoals aangegeven. Elke vlieger wordt in tweeën gedeeld en twee extra lijntjes worden toegevoegd en twee andere lijnstukjes weggehaald, zoals ook hiernaast aangegeven. Op deze manier levert elke pijl een kleinere vlieger en twee halve kleinere pijlen en elke vlieger levert twee kleinere vliegers en ook twee halve pijlen. Het is nu eenvoudig na te gaan dat als vliegers en pijlen tegen elkaar aanliggen volgens de betegelings voorschriften van een Penrose universum, dat dan al die halve pijlen samen hele pijlen vormen en dat zo een nieuw Penrose patroon ontstaat met kleinere vliegers en pijlen. De schaal factor is —onvermijdelijkerwijze— natuurlijk weer de gouden ratio. Voor de kleine strik is hiernaast te zien hoe deflatie werkt.



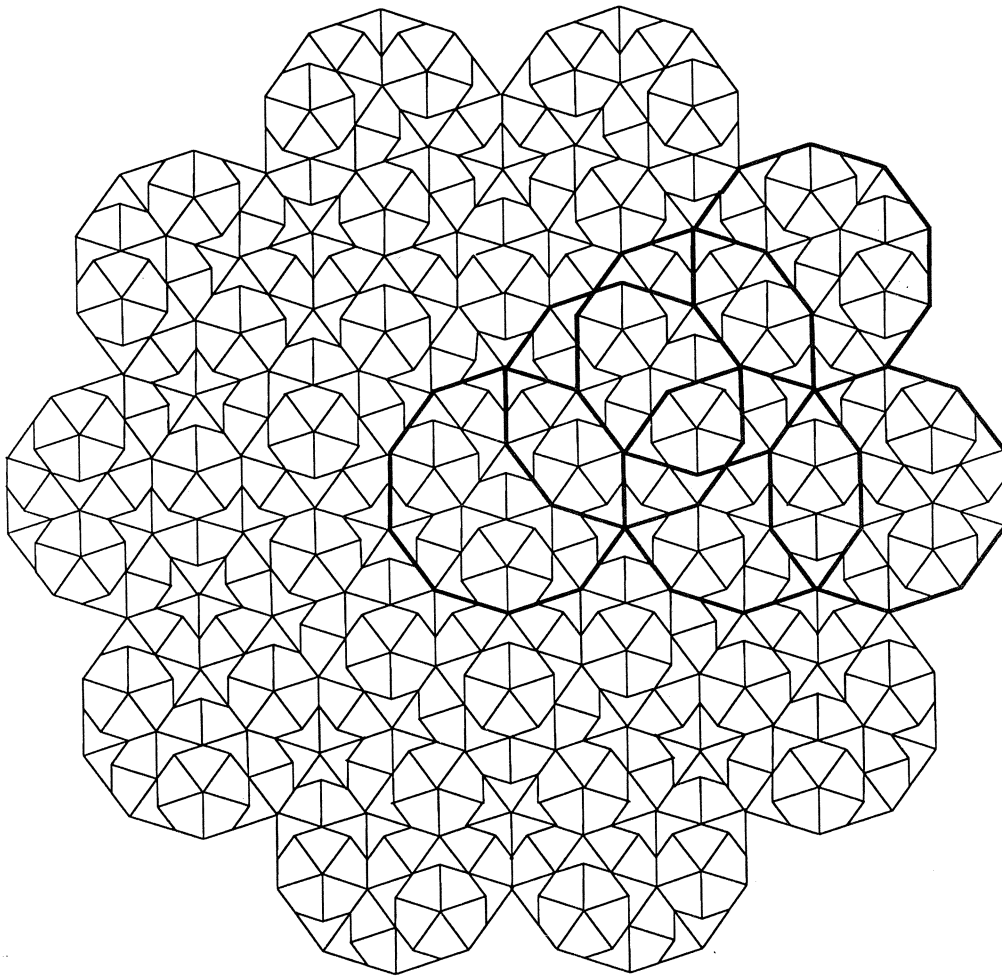
Inflatie is de omgekeerde bewerking: verdeel elke pijl in twee helften en lijm korte zijden van de vliegers en halve pijlen aan elkaar om een nieuwe Penrose betegeling te krijgen met gouden ratio grotere tegels.



**5. Symmetrie en extremaliteit.** Elke keer dat het Purkiss principe werkt, en hoewel dat, zoals we gezien hebben, niet altijd het geval is, is dat toch vaak genoeg om interessant te zijn, hebben we een voorbeeld dat een extremale oplossing hoog symmetrisch is. De rand voorwaarden, in het geval van sectie 2 dus de nevenconditie  $g(x_1, \dots, x_n) = c$  kunnen dat bederven als die niet even symmetrisch zijn. Toch zijn in de praktijk de optimale oplossingen vaak nog bijna hoog symmetrisch; bijvoorbeeld "symmetrisch in het midden maar naar de rand toe moeten wat aanpassingen gedaan worden om aan de rand condities te voldoen. Zoiets treedt

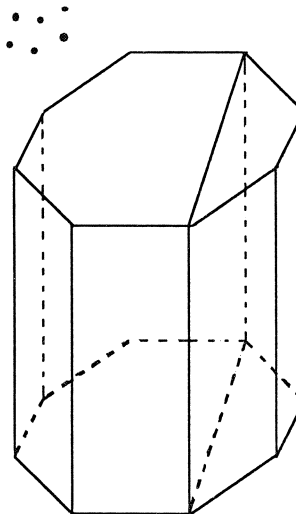


Deel van het  
'cartwheel'  
patroon

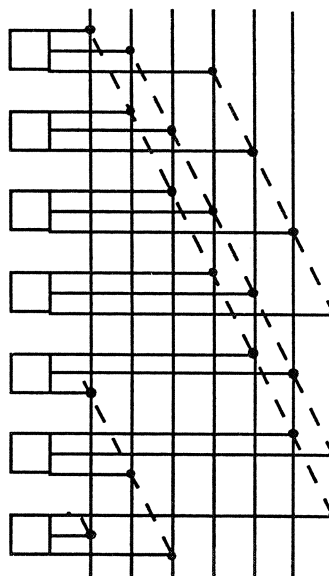


Het 'cartwheel' patroon

bijvoorbeeld op bij optimale groeipaden voor een economie ('turnpike' stellingen; zie [7] voor wat meer details en referenties). Het is ook, weer in de praktijk, niet ongebruikelijk om bij het ontwerp van een groot systeem te beginnen met sterk symmetrische configuraties. Maar het kan ook zijn dat dat gedaan wordt omdat je toch ergens moet beginnen en anders de keuze mogelijkheden helemaal niet te overzien zijn. Hieronder wil ik proberen drie voorbeelden van extremum problemen te beschrijven en iets te zeggen over in hoeverre deze het principe "extremaliteit impliceert symmetrie" illustreren. Meer details en referenties zijn te vinden in [7].



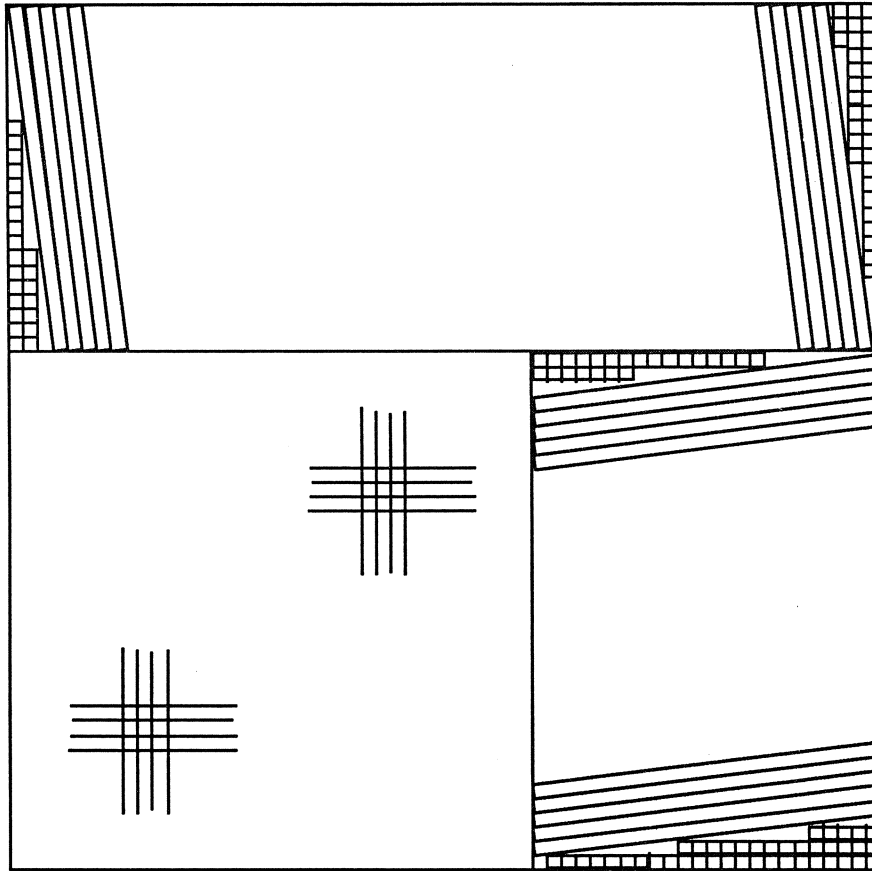
5.1. *Systemen van deelverzamelingen.* Bekijk een eindige verzameling  $X$  en een collectie van deelverzamelingen  $\mathcal{F}$ , zodat twee elementen uit  $\mathcal{F}$  of disjunct zijn of precies  $r$  elementen gemeen hebben (waarbij  $r$  een van te voren gegeven getal is). Voor voldoende grote verzamelingen  $X$  ziet de oplossing er als volgt uit [4]. Schrijf  $X$  als een disjuncte vereniging  $X = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{\lfloor n/r \rfloor} \cup S_0$ , waarbij ieder van de verzamelingen  $S_i$  precies  $r$  elementen heeft en waar  $\lfloor n/r \rfloor$  het grootste gehele getal is kleiner of gelijk aan  $n/r$ . Een maximale verzameling van deelverzamelingen  $\mathcal{F}$  bestaat nu uit alle disjuncte verenigingen  $S_i \cup S_j$  en de één-elementen deelverzamelingen van  $S_0$ . De symmetrie van de situatie kan als volgt graphisch geïllustreerd worden. Teken een regelmatige  $k$ -hoeks cylinder, waarbij  $k = \lfloor n/r \rfloor$ . De verticale ribben stellen de verzamelingen  $S_i$  voor; verder zijn er een aantal losse punten, in de figuur hierboven zijn die links boven aangegeven. De verzamelingen uit  $\mathcal{F}$  zijn nu de losse punten en de vertikale diagonale vlakken (in de figuur is er daar één van getekend). De randverschijnselen die de perfecte symmetrie van de oplossing verstoren worden hier gerepresenteerd door de losse punten. Deze oplossing werkt alleen voor groot genoeg verzamelingen  $X$ ; voor kleine verzamelingen treedt nog een ander randverschijnsel op: namelijk nog betere oplossingen met nog veel meer symmetrie.



5.2. *Shift registers.* We stellen ons het probleem een aantal chips zo te verbinden met 'bussen' dat elke cyclische permutatie van de inhoud van de chips in één schrijf-lees operatie kan geschieden. Het is duidelijk dat daar minstens even veel bussen voor nodig zijn als chips; modulo die restrictie proberen we het aantal 'pins' te minimaliseren (want die zijn duur). Voor zeven chips en zeven bussen ziet de optimale oplossing er uit zoals getekend in de figuur hiernaast. Mathematisch gesproken zit hier een zogenaamde 'verschil verzameling' achter.

Die bestaan niet voor alle natuurlijke getallen — voor  $n \leq 100$  alleen voor  $n = 3, 7, 13, 21, 31, 57, 73, 91$  — en dat geeft weer aanleiding tot randverschijnselen in de vorm van redelijk symmetrische oplossingen met hier en daar wat geknoei.

5.3. *Optimaal pakken van vierkantjes.* Zij gegeven een groot vierkant van zijde  $\alpha$ . De bedoeling is nu in dit vierkant zoveel mogelijk eenheids vierkantjes te pakken. Als  $\alpha$  een natuurlijk getal is is er geen probleem. Als  $\alpha$  geen natuurlijk getal is dan resulteert de voor de hand liggende rechthoekige methode in een lineair verlies van  $2nr + r^2$  als  $\alpha = n + r$ ,  $r \in (0,1)$ . De vraag is of het beter kan en dat is (voor grote  $\alpha$ ) inderdaad het geval. Het basis idee van Erdős en Graham [3] bestaat er uit het grote vierkant te verdelen in een kleiner vierkant van



gehele grootte  $\lfloor \alpha - \alpha^p \rfloor$  en twee rechthoeken, waarbij  $p \in [0,1]$ . Het kleinere vierkant wordt op de natuurlijke wijze volgepakt en de twee rechthoeken hoofdzakelijk met iets scheefstaande kolommen vierkantjes. Als deze truc één keer toegepast wordt is de optimale waarde  $p = 2/3$  en in plaats van een lineair verlies in  $\alpha$  verkrijgt men zo asymptotisch een verlies kleiner dan  $11\alpha^{2/3}$ . Erdős en Graham herhalen essentieel dezelfde truc nog een keer (in een veel moeilijker situatie) en bereiken asymptotisch een verlies kleiner dan  $C\alpha^{7/11}$ . Of deze oplossing optimaal is is onbekend. Interessant, naar mijn smaak, is dat ook hier weer randverschijnselen optreden, en dat hoewel de rand in absolute zin steeds groter wordt, hij naar verhouding met de grootte van het grote vierkant steeds kleiner wordt.

5.4. Tot besluit van deze paragraaf nog een positief resultaat uit [9] wat betreft het principe "extremaliteit impliceert symmetrie

**Stelling.** Zij  $G$  een compacte Lie group glad werkend op een gladde compacte variëteit  $M$ ; laat  $\mathcal{F}$  de verzameling zijn van alle  $G$ -invariante functies op  $M$ . Als in een baan geïsoleerd ligt in zijn stratum dan is die baan kritiek voor alle  $f \in \mathcal{F}$ . En omgekeerd als een baan kritiek is voor alle invariante functies dan ligt die baan geïsoleerd in zijn stratum.

Ik ken twee systematisch optredende verschijnselen die het principe "extremaliteit impliceert symmetrie" kunnen verstoren: bifurcaties en randverschijnselen. Beiden zijn hierboven voor gekomen. Of er nog andere systematische storings mechanismen zijn weet ik niet; iets van een bewijs van het principe is ook nog ver weg. Er is nog heel veel te doen in de wereld van symmetrie.

### Bibliographie

1. N G de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane*. I, *Indagationes Math.*, 43(1981), 39 - 52.
2. N G de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane*. II, *Indagationes Math.*, 43(1981), 53 - 66.
3. P Erdős, R L Graham, On packing squares with equal squares, *J. Comb. Theory A* 19 (1975), 119 -123.
4. Z Füredi, *Set systems with prescribed cardinalities for pairwise intersections*, *Discr. Math.* 40(1982), 53 - 67.
5. Martin Gardner, *Extraordinary non-periodic tiling that enriches the theory of tiles*, *Scientific American*, January 1977(1977), 110 - 121.
6. Michiel Hazewinkel, *Symmetry, bifurcations, and pattern formation (d'après Sattinger, Michel, Thom, and many others)*. In: M Hazewinkel, R Jurkovich and J Paelinck (ed.), *Bifurcation analysis*, Reidel, 1985, 210 -232.
7. Michiel Hazewinkel, *Applied algebra*, CWI report Jan. 1991.
8. M Hazewinkel, *Introductory recommendations for the study of Hopf algebras in mathematics and physics*, *CWI Quarterly*, 1991.
9. Louis Michel, *Applications of group theory to quantum physics*, *Lect. Notes in Physics*, 6(1970), 36 - 143.
10. William C Waterhouse, *Do symmetric problems have symmetric solutions*, *Amer. Math. Monthly*, 90:6(1983), 378 - 397.



## MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek*. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
- 6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatiethorie*. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Jongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassing van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfsystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.



## CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roeper. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (red.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.

