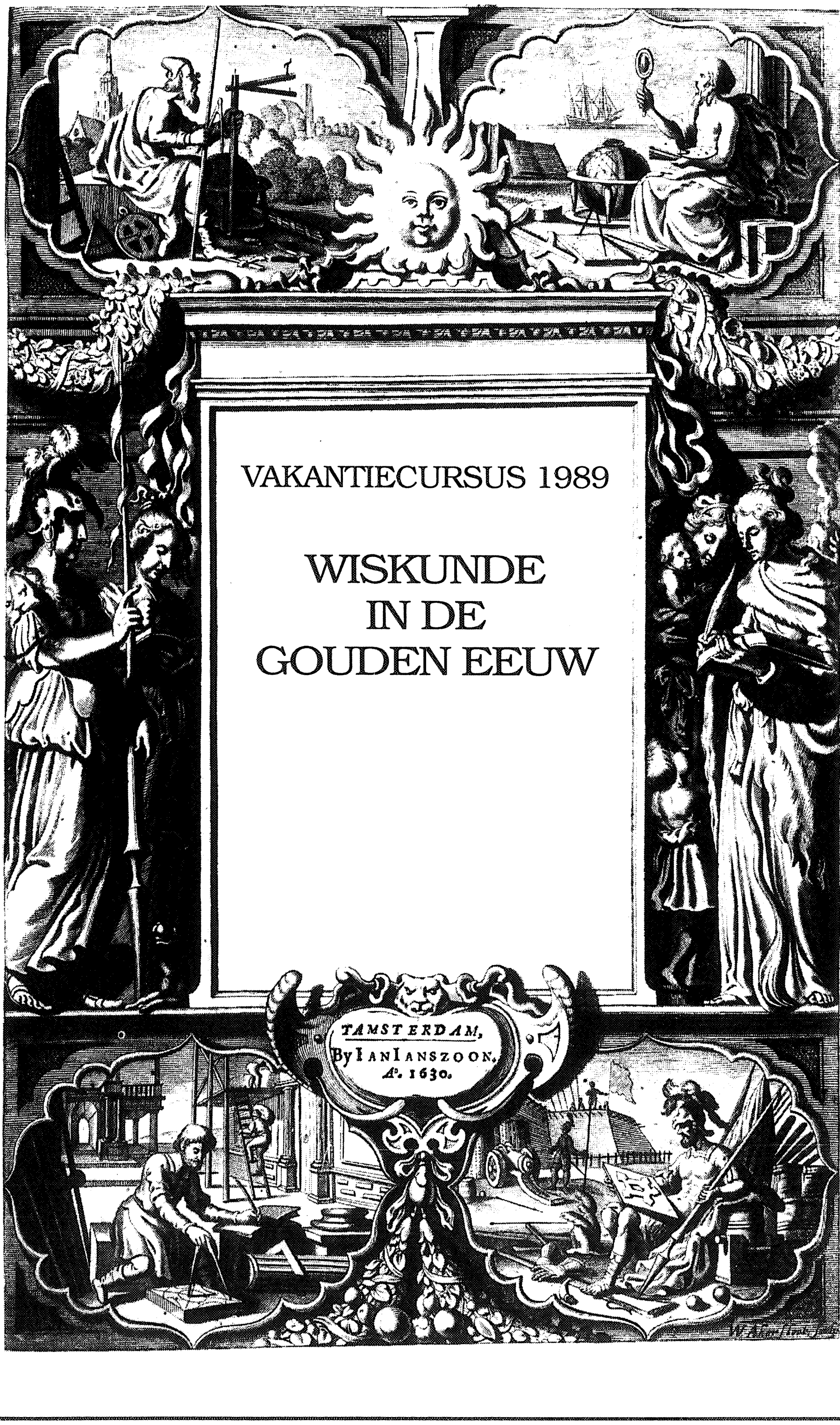
VAKANTIECURSUS 1989

# WISKUNDE IN DE GOUDEN EEUW



**Centrum voor Wiskunde en Informatica**
Centre for Mathematics and Computer Science
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands

The CWI is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Research (N.W.O).

CWI Syllabus 25

# Vacantiecursus 1989
# Wiskunde in de Gouden Eeuw

**Centrum voor Wiskunde en Informatica**
Centre for Mathematics and Computer Science

1980 Mathematics Subject Classification: 01A45.
ISBN 90 6196 378 8
NUGI-code: 811

# Ten Geleide

Voor U ligt de syllabus van de vacantiecursus 1989, georganiseerd door het CWI, de 43ste in een reeks, begonnen in 1946 en slechts één maal onderbroken—in 1954—in verband met het Internationale Mathematische Congres dat toen in Amsterdam werd gehouden.

Als onderwerp is ditmaal gekozen: 'Wiskunde in de Gouden Eeuw'. De titel geeft een beperking in de tijd aan, een beperking tot de Lage Landen, zoals diezelfde titel misschien zou kunnen suggereren, is niet beoogd. Ook is het niet wel mogelijk een juist beeld te geven van de ontwikkeling van de wiskunde in die tijd zonder daarbij de natuurwetenschappen te betrekken.

Deze overwegingen geven de organisatoren enig houvast: Er zou naast een algemene inleiding zeker een voordracht moeten zijn over het verband tussen de wiskunde en de natuurwetenschappen in die tijd. Voor de rest moesten er keuzen gemaakt worden en die zijn, zoals altijd, vrij arbitrair.

De uitkomst van deze keuze was: een voordracht over de essentie van de *Géométrie* van Descartes, getiteld: 'Descartes en het begin van de analytische meetkunde' en een lezing over het werk van Desargues, met als titel 'Het Brouillon project van Desargues', een werk dat, hoewel verschenen twee jaren na de *Géométrie* van Descartes, toch eerst in de 19de eeuw de aandacht kreeg die het verdiende.

Daarnaast is er een voordracht die de toehoorders meeneemt door de tien decennia van de eeuw aan de hand van tien vraagstukken, uit elk decennium één. De kennismaking met de praktijk van alledag blijft echter niet beperkt tot deze lezing: in de cursus is ook plaats ingeruimd voor eigen activiteit van de deelnemers. Er zullen vraagstukken uit de 17de eeuw worden uitgereikt waarop men ter plekke zijn krachten kan beproeven, uiteraard gevolgd door een nabespreking.

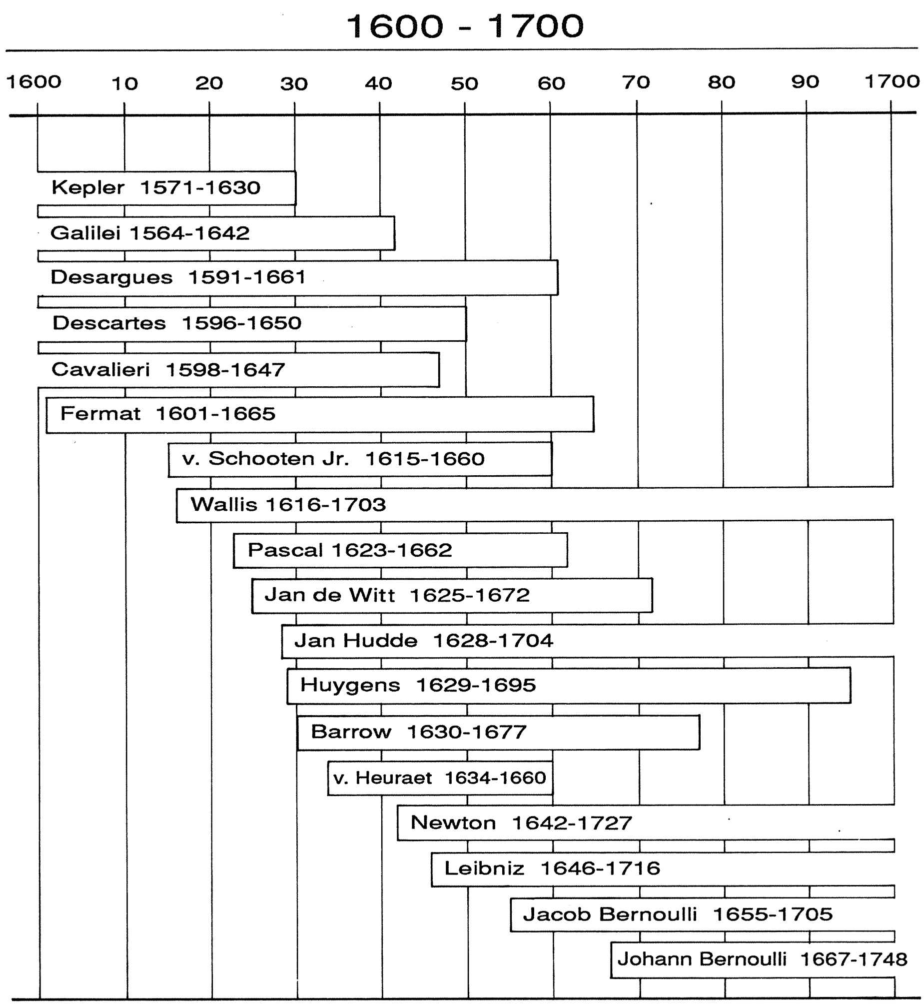
Nieuw voor deze cursus is ook het visuele aspect: een selectie van videofilms behorende tot het bezit van de Engelse 'Open University' zal vertoond worden en van gesproken commentaar worden voorzien.

Zoals U ziet, heeft deze cursus een gevarieerd karakter. De organisatoren hopen dan ook dat hierdoor een groot aantal belangstellenden aanwezig zal zijn en niet alleen dat, maar ook dat zij van de cursus veel mee naar huis zullen nemen wat zij weer aan hun leerlingen kunnen doorgeven.

Tenslotte een bijzonder woord van hartelijke dank aan de medewerksters en de medewerkers van het CWI die zich zoveel moeite getroost hebben deze syllabus in zo fraaie uitvoering—en op tijd—te realiseren.

A.W. Grootendorst

# Inhoud


1600 - 1700
1600
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1700
Kepler 1571-1630
Galilei 1564-1642
Desargues 1591-1661
Descartes 1596-1650
Cavalieri 1598-1647
Fermat 1601-1665
v. Schooten Jr. 1615-1660
Wallis 1616-1703
Pascal 1623-1662
Jan de Witt 1625-1672
Jan Hudde 1628-1704
Huygens 1629-1695
Barrow 1630-1677
v. Heuraet 1634-1660
Newton 1642-1727
Leibniz 1646-1716
Jacob Bernoulli 1655-1705
Johann Bernoulli 1667-1748

FIGUUR 1

# Inleiding

A.W. Grootendorst

1. Bij het verdelen van de taken, verbonden aan de vacantiecursus voor leraren in 1989, is het mij toebedeeld de inleiding daarvan te verzorgen. Voor een klein gedeelte heb ik mij al van die taak gekweten door in de folder die deze cursus onder de aandacht moest brengen, een indruk te geven van de opzet van de cursus.

Een goede inleiding eist echter meer en stelt mij voor de moeilijke taak een beeld te schetsen van datgene wat er omging in de wereld van de wiskunde in de 17de eeuw en voor een deel ook van wat daaraan voorafging.

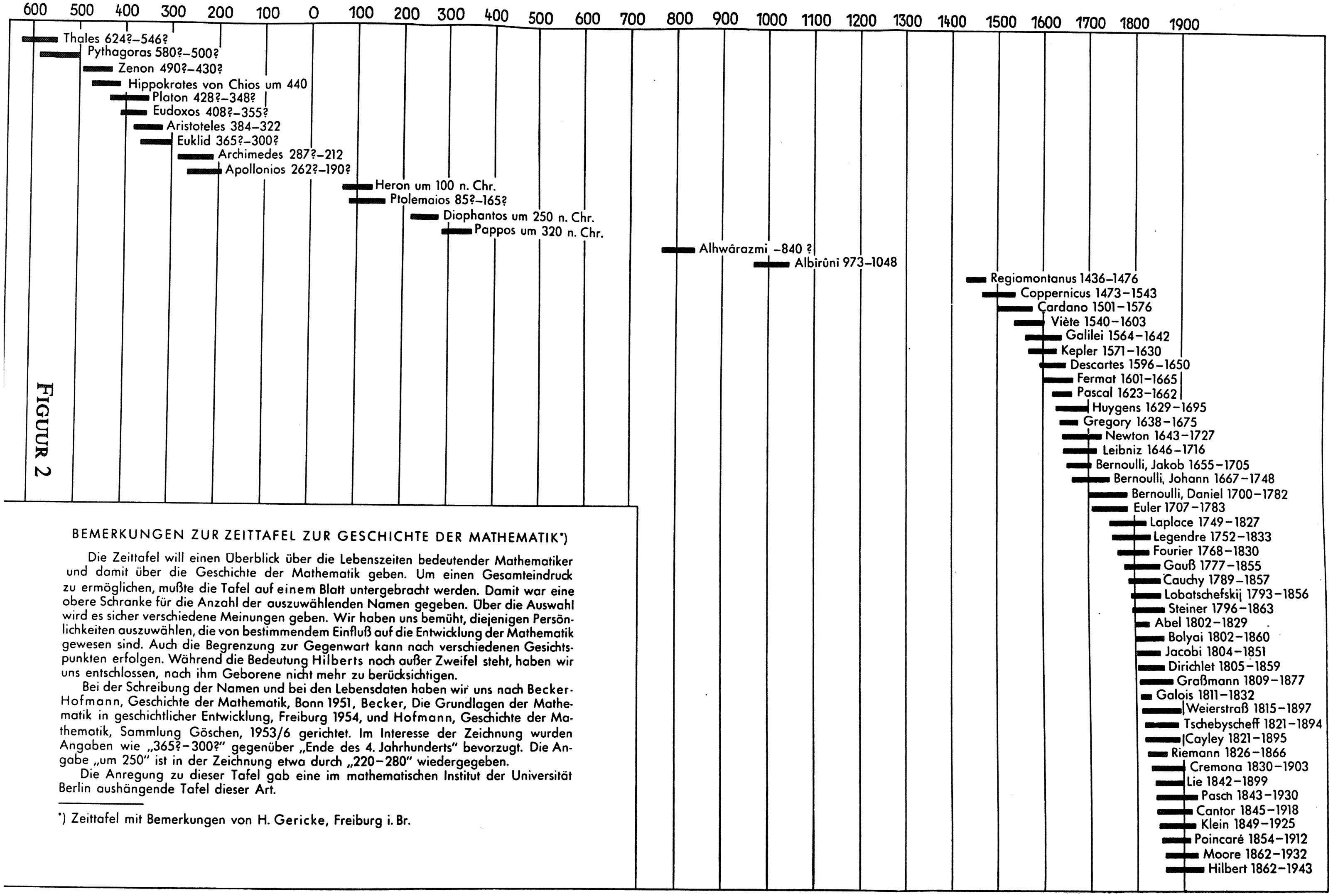
Nu is het uiteraard onmogelijk om in drie kwartier samen te vatten wat er gedurende een eeuw gebeurde in de wiskunde. Een sterke beperking tot de hoofdlijnen is dus geboden. Zoals U bekend is, zullen enkele hoofdmomenten door de andere sprekers worden uitgewerkt, maar ook daarbij moest een keuze worden gemaakt.

2. De beoefening van de wiskunde is in de loop van de geschiedenis een aantal malen gedurende perioden die honderden jaren duurden, onderbroken geweest. Een goede indruk daarvan verkrijgt men als men de tijdbalk in Figuur 2 beziet die ontleend is aan Behnke's *Grundzüge der Mathematik* [1]: een kloof in de Griekse periode tussen circa 200 voor Chr. en 100 na Chr. en een enorme onderbreking tussen circa 400 na Chr. en 1400 na Chr. met in die periode slechts een opleving tegen het einde van het eerste millennium in de Oosterse wereld.

Vooral in West-Europa stond de wiskundebeoefening gedurende de donkere middeleeuwen op een zeer laag peil. Wel had Boethius (480-524) in het voorwoord tot zijn *De Institutione Arithmetica* gewezen op het universele belang van de wiskunde, maar dat betekende nog niet dat het niveau van de beoefening daarvan erg hoog was. Van de verstarring getuigt ook het feit dat het genoemde boek van Boethius gedurende circa 1000 jaren dienst deed als belangrijkste leerboek op dat gebied (het bevatte o.a. de tafel van tien!). In de scholen, verbonden aan kerken of kloosters, nam de studie van de theologie en de logica een overheersende plaats in; de wiskunde stond in hoofdzaak in dienst van het vaststellen van de kalender en van astrologische berekeningen, mede ten behoeve van de heelmeesters.

3. Toen in de 13de eeuw werken van Aristoteles (384-322) bekend werden in de Westerse Wereld, trad er verandering op en wel via de belangstelling van de filosofen. Deze gingen zich, geïnspireerd door hun Aristotelische studies, bezighouden met wat men zou kunnen noemen het kwantificeren van verande-

FIGUR 2




BEMERKUNGEN ZUR ZEITTAFEL ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK*)

Die Zeittafel will einen Überblick über die Lebenszeiten bedeutender Mathematiker und damit über die Geschichte der Mathematik geben. Um einen Gesamteindruck zu ermöglichen, mußte die Tafel auf einem Blatt untergebracht werden. Damit war eine obere Schranke für die Anzahl der auszuwählenden Namen gegeben. Über die Auswahl wird es sicher verschiedene Meinungen geben. Wir haben uns bemüht, diejenigen Persönlichkeiten auszuwählen, die von bestimmendem Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik gewesen sind. Auch die Begrenzung zur Gegenwart kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Während die Bedeutung Hilberts noch außer Zweifel steht, haben wir uns entschlossen, nach ihm Geborene nicht mehr zu berücksichtigen.

Bei der Schreibung der Namen und bei den Lebensdaten haben wir uns nach Becker-Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn 1951, Becker, Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg 1954, und Hofmann, Geschichte der Mathematik, Sammlung Göschen, 1953/6 gerichtet. Im Interesse der Zeichnung wurden Angaben wie „365?–300?" gegenüber „Ende des 4. Jahrhunderts" bevorzugt. Die Angabe „um 250" ist in der Zeichnung etwa durch „220–280" wiedergegeben.

Die Anregung zu dieser Tafel gab eine im mathematischen Institut der Universität Berlin aushängende Tafel dieser Art.

*) Zeittafel mit Bemerkungen von H. Gericke, Freiburg i. Br.

ringen, dus met begrippen als snelheid en versnelling, zij het dan ook op zeer primitieve wijze, maar zij legden de grondslag voor de belangstelling voor deze onderwerpen, een belangstelling die in de door ons beschouwde 17de eeuw een centrale plaats zou gaan innemen.

De lectuur van de werken van Aristoteles gaf ook aanleiding tot het bestuderen van het oneindige, zowel 'het oneindig kleine, als het oneindig grote' (*Physica*, III, 203a) en het 'samenhangende' (d.w.z. het continue). Dit leidde er o.a. toe dat de filosofen van het Merton College in Oxford zich in de 14de eeuw gingen bezighouden met oneindige reeksen, zoals

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

(natuurlijk geheel verbaal, zonder symbolen), waarvoor zij op ingenieuze wijze aantoonden dat deze 2 tot 'som' heeft. Ook de divergentie (avant la lettre) van de ons zo vertrouwde harmonische reeks $1+½+⅓+¼+\cdots$ toonden zij aan op de elementaire wijze waarop wij dit ook nu nog doen. Hier zien wij al de eerste tekenen van het wijken van de angst voor het oneindige, de 'horror infiniti', waarop wij later terugkomen.

Een zeer belangrijk moment in die tijd is het schuchter opkomen van grafieken bij Nicole Oresme (ca. 1320-1382). Hij zag in dat continu veranderende grootheden, zoals afstanden en snelheden, voorgesteld kunnen worden door rechte lijnen (continua). Hij hanteerde termen als longitudo (lengte) en latitudo (breedte) die ongeveer de rol van onze abscis en ordinaat vervulden.

4. De opleving van de wiskunde kort voor en gedurende de 16de eeuw voltrok zich in hoofdzaak op het terrein van de algebra.

Hier worden slechts genoemd Girolamo Cardano (1501-1576) en François Viète (1540-1603). Cardano, beroemd door zijn *Ars Magna* (1545) waarin de derde- en vierde-graadsvergelijkingen worden behandeld; Viète ook wel genoemd de 'Vader van de Algebra', auteur van de *In Artem Analyticam Isagogè* (1591). 'Ars Analytica' is hier algebra en dat was in die tijd in hoofdzaak het oplossen van vergelijkingen. De belangrijkste verdienste van Viète is wel dat hij het gebruik van letters in de algebra introduceerde: consonanten $B, C, D, \ldots$ voor bekende grootheden, vocalen $A, E, I, O, U$ voor de bekenden.

Later introduceerde Descartes (1596-1650) het gebruik van de letters aan het einde van het alfabet voor onbekende grootheden en die aan het begin van het alfabet voor bekende grootheden. Het gebruik van letters opende uiteraard de mogelijkheid voor generalisatie. Naast het gebruik van letters deden veel andere symbolen hun intrede, vaak lokaal gebonden, veelal wisselend in de tijd. Het zou zeer lang duren voordat er op dit gebied althans enige stabiliteit en uniformiteit heerste. Voor dit boeiende onderwerp zij de lezer verwezen naar het interessante boek van Cajori [9]. Enkele details: ons gelijkteken '=', ingevoerd door Robert Recorde (1510-1558) in 1557 ondervond lange tijd sterke concurrentie van het teken, '$\propto$' geïntroduceerd door Descartes in 1637 in zijn *Géométrie.* Het feit dat Newton (1642-1727) en Leibniz (1646-1716) het teken van Recorde gebruikten, leidde ertoe dat dit teken vanaf het begin van de 18de eeuw de overhand kreeg. Een extra complicatie was ook dat men nog geen haakjes kende. Men loste dit probleem op door de coëfficiënten van een bepaalde variabele onder elkaar te plaatsen. Zie b.v. Figuur 3 voor de coëfficiënten van $x^3$: $-b-z$. Interessant is ook m.b.t. notaties Figuur 4 waar een met □ aangegeven rechthoek keurig netjes de Latijnse uitgang 'lo' (voor: rectangulo) krijgt. Figuren 3 en 4 zijn ontleend aan de hierna te noemen brieven van Hudde resp. Van Heuraet.

Iuxta generalem Methodum

eſt $\dfrac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty z$

vel $2baax + aaxx - bx^3 \infty baaz + x^3z$

ſeu $\begin{array}{l} -bx^3 + aaxx + 2baax - baaz \infty 0 \\ -z \end{array}$

FIGUUR 3

Propter rectum angulum NCQ, erit CM ad CQ, ut MN ad NC. Atqui MN eſt ad NC, ut SX ad ST. Quare erit SX ad ST, ut CM ad CQ. Et quia CM eſt ad CQ, ut Σ ad MI, erit & SX ad ST, ut Σ ad MI, ac proinde rectangulum ſub SX ſive YZ & MI ſive Y*b* æquale rectangulo ſub ST & Σ. Eodem modo demonſtrabitur, rectangulum *ce* eſſe æquale □$^{lo}$ ſub TV & Σ, & □*d*F $\infty$ □VE, Σ, & □*a*Y $\infty$ □$^{lo}$ ſub RS & Σ. Quapropter omnia hæc rectangula ſimul ſumpta æqualia erunt rectangulo ſub Σ & alia recta æqualia omnibus tangentibus ſimul ſumptis. Vnde cum illud verum ſit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis conſtans, ſi eorum numerus in infinitum augeatur, deſinat in ſuperficiem AGHIKLF, ac tangentes ſimiliter in lineam curvam ABCDE, liquet ſuperficiem AGHIKLF æqualem eſſe rectangulo ſub Σ & recta æquali curvæ ABCDE. Quod erat demonſtrandum.

FIGUUR 4

5. Ter afsluiting van de opmerkingen die de situatie aan het begin van de 17de eeuw moeten illustreren, een enkel woord over de toen aanwezige kennis van de getallen.

Allereerst de negatieve getallen: deze werden nog ternauwernood erkend. Een negatieve wortel van een vergelijking werd door Descartes nog een 'radix falsus', een valse wortel genoemd en niet als zodanig geteld. Pascal (1623-1662) vond het verminderen van nul met een (positief) getal zinloos. Een van de weinigen die negatieve getallen zinvol achtten, was Albert Girard (1595-1632).

Ook de irrationale getallen (het grote struikelblok voor de Griekse wiskunde) werden ternauwernood als 'echte' getallen aanvaard, maar wel als meetkundige grootheden, geheel in de lijn van de Griekse traditie. Simon Stevin (1548-1620), de auctor intellectualis van de decimale schrijfwijze, en John Wallis (1616-1703) aanvaardden deze echter ten volle. Toch werd er in het algemeen zonder scrupules mee gerekend.

De complexe getallen veroorzaakten echter nog grotere problemen. Reeds Cardano en Bombelli (1526-1572) werden ermee geconfronteerd bij het oplossen van hogere-machtsvergelijkingen, waar juist de reële wortels optreden als uitdrukkingen in complexe getallen. U begrijpt de verbijstering in de 16de eeuw toen een vergelijking als $x^3=15x+4$, die ten duidelijkste 4 als wortel heeft, met Cardano's methode deze wortel leverde in de gedaante die wij zouden schrijven als

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

waarvan de eerste term b.v., toen geschreven werd als

$$R.c.2p : Rm:121.$$

In de 17de eeuw zou Newton (1642-1727) als praktisch bezwaar tegen de complexe getallen aanvoeren dat zij geen fysische betekenis hadden, hetgeen, in die tijd althans, geheel juist was.

6. Na deze vluchtige schets van enkele ontwikkelingen in de tijd voorafgaande aan het tijdperk dat bij ons centraal staat, de 17de eeuw, rijst de vraag waarin deze eeuw zich onderscheidde van de voorafgaande periode. Kort gezegd komt het hierop neer dat men het fundamentele belang inzag van de wiskunde voor de natuurwetenschappen en dat de mathematische beschrijving van de natuur de mystieke en theologische beschouwingen daarover verdrong. Maar ook binnen de wiskunde voltrokken zich essentiële veranderingen zowel van methodologische als van technische aard. M.b.t. het eerst genoemde punt zij gewezen op de religieuze achtergrond: men geloofde dat God het heelal mathematisch had ontworpen. Een belangrijke stap in de nieuwe richting werd gezet door Kepler (1571-1630) die het door Copernicus (1473-1543) ontworpen heliocentrische wereldbeeld van een mathematische beschrijving voorzag met zijn drie beroemde wetten:

1° De planeten bewegen zich in ellipsvormige banen, waarbij de zon in een van de brandpunten staat.

2° De voerstralen die de zon met een planeet verbinden, doorlopen in gelijke tijden gelijke oppervlakten (perkenwet).

3° Wanneer $a$ de halve lange as van een planetenbaan is en $T$ de omlooptijd, dan is $\frac{a^3}{T^2}$ voor alle planeten constant.

Als pikant detail zij opgemerkt dat zijn 'bewijs' van de perkenwet twee fouten bevatte die elkaar opheffen! In de tweede helft van de eeuw zou Newton deze drie wetten exact afleiden uit zijn algemene gravitatiewet.

7. De nieuwe opvattingen over de natuurwetenschappen zijn zeer duidelijk uitgesproken door René Descartes en door Galileo Galilei (1564-1642). Descartes legde deze vast in zijn voorname werk *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences,* verschenen in Leiden in 1637. Hij gaat er van uit dat de mens over zekere, ontwijfelbaar juiste, intuïties beschikt. Deze zijn de mens ingegeven door God en dus juist, daar God de mens niet zal bedriegen. Uit deze a-priori-waarheden moeten door deductie de geldende waarheden worden afgeleid, naar wiskundig model. Hierdoor en ook omdat hij sterk twijfelde aan de betrouwbaarheid van de zintuigen had Descartes weinig behoefte aan experimenten, hoewel hij wel biologische proeven heeft gedaan.

8. De gedachten van Descartes liepen voor een gedeelte parallel met die van Galilei, maar verschilden toch in een aantal opzichten daarvan. Ook Galilei was er van overtuigd dat de natuur mathematisch is opgebouwd. Bekend is zijn uitspraak die—kort samengevat—er op neer komt dat 'het boek der natuur geschreven is in de taal van de wiskunde'. Ook hij zag in die constructie Gods hand. Maar—en daarin verschilde hij duidelijk van Descartes—hij meende dat de basisbeginselen van de kennis van de natuur ontleend moesten worden aan de uitkomsten van experimenten.

Hij bleef daarbij echter aanhanger van de mathematische methode en dus van de deductieve methode. In deze opvattingen konden later Christiaan Huygens (1629-1695) en Isaac Newton (1642-1727) zich geheel vinden. Tenslotte zij opgemerkt dat Galilei zijn taak louter descriptief zag en geen causale verklaring pretendeerde te geven. In deze opvatting had hij Descartes als tegenstander, maar zou Newton hem steunen.

De opvatting dat de natuur mathematisch beschreven moet worden, is door Newton op magistrale wijze neergelegd en uitgewerkt in zijn *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* dat in 1687 als een van de belangrijkste werken aller tijden het einde van de eeuw markeert. Over dit verband wiskunde-natuurwetenschappen, zal dr. de Pater ons uitvoerig berichten.

9. Na deze opmerkingen over de betekenis die men toekende aan de wiskunde voor de natuurwetenschappen, rijst natuurlijk de vraag hoe het dan wel toeging in de wiskunde in de 17de eeuw. Welnu, daaraan is juist deze vacantiecursus gewijd.

Als voornaamste vernieuwing in het begin van deze eeuw—en het zal in deze cursus meermalen benadrukt worden—moet men wel noemen de algebraïsering van de meetkunde, leidende tot de Analytische Meetkunde, geïnitieerd door Descartes met zijn *Géométrie* een onderdeel van de reeds genoemde *Discours.*

Aan deze *Géométrie* is de voordracht van prof. Bos gewijd. Hij zal ons duidelijk maken dat dit geschrift in hoofdzaak een filosofisch, methodologisch karakter heeft. Overigens heeft de algebraïsering de gehele eeuw gekenmerkt, ook in de tweede grote vernieuwing van de 17de eeuw: de creatie van de differentiaal- en integraalrekening door Newton and Leibniz, onafhankelijk van elkaar en elk op eigen wijze: Newton werd geleid door de fluxierekening, bij Leibniz vormden de differentialen het uitgangspunt. De kern van het verschil in aanpak is duidelijk uiteengezet in de hoofdstukken 8 en 9 van de omvangrijke bijdrage van dr. van Maanen. Hier zij slechts opgemerkt dat Newton's aanpak in eerste instantie fysisch was: bij hem stond het begrip snelheid centraal. Leibniz, ongetwijfeld geleid door zijn belangstelling voor het sommeren van reeksen, nam de sommatie als uitgangspunt. De kern van wat Newton en Leibniz op dit gebied tot grote vernieuwers maakt, is dat zij het verband legden tussen differentiëren en integreren als inverse bewerkingen, welk verband wordt vastgelegd in de 'hoofdstelling van de integraalrekening':

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t).$$

Hierin onderscheidde hun werk zich van de—veelal ad-hoc—technieken met behulp van de 'indivisibilia' aan het begin van de eeuw. Opgemerkt zij nog dat men al delen van het werk van Barrow (1630-1677), de leermeester van Newton, kan interpreteren in de geest van de hoofdstelling van de integraalrekening. Het is zeer te betreuren dat uit de uitzonderlijke prestaties van Newton en Leibniz ook een uitzonderlijk felle ruzie is ontstaan die zich niet alleen in het persoonlijke vlak heeft afgespeeld, maar ook geleid heeft tot een schisma in de wiskunde: de 'Engelse' wiskunde en de 'Continentale' wiskunde, de eerste meer meetkundig getint, de tweede meer analytisch, welke laatste uiteindelijk 'won'.

Aanleiding tot deze twist was o.a. dat Newton—altijd zeer terughoudend met publiceren—zijn werk over de 'calculus' pas in 1687 openbaar maakte, terwijl de 'Nova Methodus', waarmee Leibniz zijn ontdekking in slechts zes pagina's wereldkundig maakte, in 1684 het licht zag. Een felle prioriteitsstrijd, waarin beschuldigingen van plagiaat niet ontbraken, laaide op, met de reeds genoemde onverkwikkelijke gevolgen.

Op de situatie m.b.t. de infinitesimaaltechnieken in het begin van de eeuw kom ik nog terug. Een derde belangrijk gebeuren in de 17de eeuw is de opkomst van de projectieve meetkunde. Ook hiervan zijn al aanzetten aan te wijzen in de 15de eeuw: de schilders hadden behoefte aan perspectieve technieken. Uit die periode moge de naam van Leone Battista Alberti (1404-1472) en zijn werk *Della Pittura* (1435) volstaan. Deze problematiek werd in de 17de eeuw weer opgenomen, waarbij dan in de eerste plaats genoemd moet worden

Desargues (1591-1661) met zijn zgn. *Brouillon project d'une atteinte aux Evénements des rencontres du Cône avec un plan*†, publiceerde. Ook dit is, evenals het werk van Descartes, een poging om de Euclidische meetkunde te vernieuwen. De lezing van dr. Hogendijk heeft dit geschrift tot onderwerp en zal U de inhoud en de strekking ervan duidelijk maken. Van degenen die hun krachten op dit onderwerp beproefd hebben, noem ik hier slechts Pascal en de la Hire (1640-1718). Wellicht mede omdat het boek van Desargues zo moeilijk toegankelijk was, raakte het onderwerp in de vergetelheid en zou het tot de 19de eeuw duren voordat er weer belangstelling voor kwam.

Als laatste belangrijke onderwerp dat in de 17de eeuw vorm kreeg, noem ik de waarschijnlijkheidsrekening. Over mogelijke uitkomsten bij het werpen met meerdere dobbelstenen en andere combinatorische problemen was reeds in de 16de eeuw geschreven o.a. door Cardano, Tartaglia (1500-1557) en Galilei. Een probleem dat in de 17de eeuw in de belangstelling stond, was het verdelen van de inzet bij het onderbreken van het spel. Hieraan werd o.a. door Fermat en Pascal gewerkt. Het belangrijkste werk over waarschijnlijkheidsrekening is echter Huygens' *Tractaet handelende van Reeckening in Speelen van Geluck* (1660), waarin het begrip 'mathematische verwachting' wordt geïntroduceerd. Jan de Witt paste de waarschijnlijkheidsrekening toe op levensverzekeringen: *Waerdye van Lijf-renten naar proportie van Los-renten* (1671). Het werk van Huygens werd later weer opgenomen door Jakob (I) Bernoulli (1654-1705) met diens *Ars Conjectandi,* postuum uitgegeven in 1713. Helaas was er in deze cursus geen ruimte voor een afzonderlijke voordracht over dit onderwerp. Belangstellenden worden verwezen naar de sub [19], [21] en [25] genoemde literatuur.

10. Zoals opgemerkt, ontstond de 'calculus' van Newton en Leibniz in de tweede helft van de 17de eeuw. Daaraan was echter heel wat voorafgegaan in de eerste helft van de eeuw. Een aantal vraagstukken stond in de belangstelling: berekening van de lengte van een kromme, oppervlakte- en inhoudsberekeningen, bepalingen van maxima en minima en constructies van raaklijnen en normalen (o.a. i.v.m. de optica).

Inhouden en oppervlakten werden berekend via de methode van de zgn. 'indivisibilia', waarbij men zich een lichaam of oppervlak opgebouwd dacht uit 'oneindig veel, oneindig kleine' delen. Op dit terrein werkten Kepler, Galilei en Cavalieri (1598-1647). Kepler hield zich nl. niet alleen bezig met 'hemelse' zaken, maar schreef ook een boek getiteld: *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615), handelende over de inhoud van wijnvaten. De methoden van Kepler en Cavalieri verschilden o.a. in de wijze van het verdelen van een lichaam of een oppervlak. Kepler verdeelde een lichaam in 3-dimensionale delen, Cavalieri verdeelde een lichaam in vlakjes, een oppervlak in lijntjes, hetgeen uiteraard zeer riskant is, hetgeen ook blijkt uit de fout die Kepler maakte toen hij zich bij het bewijs van de perkenwet van een soortgelijke tactiek

† Vertaald: 'Ruwe schets van een opstel over wat er gebeurt als een kegel een plat vlak 'ontmoet', (d.w.z. snijdt of raakt).

bediende. Een typische toepassing van de methode van Kepler: verdeel een bol in 'pyramiden' met de top in het middelpunt. Plausibel is dan:

$$I_{\text{Bol}} = \frac{1}{3} R \cdot Opp_{\text{Bol}}.$$

Cavalieri kon met zijn methode op aanschouwelijke wijze inhouden met elkaar vergelijken (principe van Cavalieri).

Voor één detail uit die tijd zou ik aandacht willen vragen omdat het daarbij gaat om een resultaat dat destijds in allerlei publicaties zonder meer bekend werd ondersteld. Het gaat daarbij om een kromme die bij de eerste oppervlakteberekeningen grote aandacht kreeg, nl. die met vergelijking $y=x^t$, waarbij $t$ ook gebroken mocht zijn. Voor natuurlijke $t$ vereist de berekening van de oppervlakte onder deze kromme (in onze notatie bijv. $\int_0^1 x^t dx$) kennis van

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^t+2^t+\cdots+n^t}{n^{t+1}}$$

(verdeel daartoe het traject $[0,1]$ in $n$ gelijke delen). Dit vereist weer kennis van sommen van de gedaante $\Sigma_{i=1}^{n} i^t$. Deze werden bepaald o.a. door Fermat (1601-1665) en Pascal. Voor gebroken $t$ is door John Wallis (1606-1703) experimenteel, d.w.z. door extrapolatie uit resultaten van vele voorbeelden, het resultaat $\int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$ afgeleid. Dit resultaat was zo zeer gemeengoed dat Neil (1637-1670) en Van Heuraet dit bij hun berekeningen van lengten van krommen zonder toelichting gebruikten. Zie ook [13] en [15]. Het kenmerkende van deze methode is dat, hoewel de wijze van benaderen geheel past in de Griekse stijl, de door de Grieken geëiste strengheid geheel afwezig is.

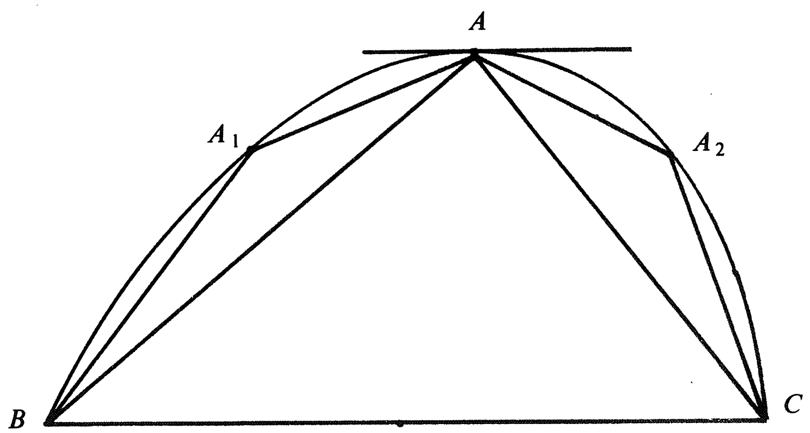
11. Een belangrijke doorbraak in de 17de eeuw was ook de overwinning van de 'horror infiniti', de afschuw voor het oneindige, die de Griekse wiskunde zozeer had beheerst. Er is al op gewezen dat reeds in de middeleeuwen de filosofen van het Merton college zich hadden beziggehouden met oneindige reeksen. Het vrijere omgaan met het oneindige, echter op een niet stevig gefundeerde basis en met alle vaagheid die daaruit voortvloeide, zou zich in de 17de eeuw voortzetten. Zo was het ontwikkelen van een functie in een machtreeks een belangrijke techniek in het werk van Newton: $\sin x, \cos x$, binomiaalreeks. Een typisch voorbeeld: wanneer Newton wil integreren $\frac{a^2}{b+x}$, dan 'deelt hij uit', vindt:

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^3}x^2 - \cdots$$

en integreert daarna—sans scrupules—term voor term en zegt dan dat men voor $b \approx x$ slechts een paar termen nodig heeft voor een acceptabele benadering. Beroemd is Mercator (1620-1687, niet de kartograaf!) door zijn machtreeksontwikkeling van $\log(1+x)$. Voor Leibniz waren de oneindige reeksen en de daaruit af te leiden reeksen van opeenvolgende verschillen, een bron van inspiratie voor zijn infinitesimaalrekening.

In dit verband is het interessant te zien hoe de Grieken zich redden zonder over te gaan op het oneindige, zonder limietovergang dus. Als voorbeeld neem ik de bepaling van de oppervlakte van een paraboolsegment door Archimedes (Figuur 5). Hierin is $ABC$ een paraboolsegment, waarbij de raaklijn in $A$ evenwijdig aan de koorde $BC$ loopt. Via een gedachtenexperiment, berustend op de hefboomwet, had Archimedes plausibel gemaakt dat de oppervlakte van het paraboolsegment moest zijn: $\frac{4}{3}$ *Opp.*$\Delta ABC$, maar met dit vermoeden neemt hij geen genoegen en dus levert hij een exact bewijs. Dit was nl. zijn methode: eerst via aanschouwelijke (meestal mechanische) redeneringen een idee van de stelling te verwerven en daarna een exact bewijs. Hij schrijft dat ook expliciet in een brief, gericht aan Eratosthenes†:

'... want veel dat mij door de mechanica duidelijk geworden is, werd naderhand bewezen door de wiskunde, omdat de behandeling door die (d.w.z. de mechanische) methode nog niet door een bewijs gesteund is; het is namelijk gemakkelijker een bewijs te leveren wanneer men door die methode vooraf een voorstelling van de stand van zaken heeft verkregen, dan zonder een voorlopige voorstelling.'




FIGUUR 5

Om zijn doel te bereiken, benadert hij de oppervlakte van het segment in een aantal stappen. Eerst door $\Delta\, ABC$ (nulde stap); daarna beschrijft hij in de resterende twee paraboolsegmenten op analoge wijze de driehoeken $BA_1A$ en $AA_2C$ ($A_1$ en $A_2$ bepaald, analoog aan $A$) etc. Vervolgens toont hij aan dat de totale oppervlakte van de per stap toegevoegde driehoeken juist gelijk is aan $1/4$ van de oppervlakte van de bij de voorgaande stap toegevoegde driehoeken.

† Deze brief werd eerst in 1906 ontdekt door Heiberg.

Stelt men de oppervlakte van $\Delta ABC$ op $D$, dan geldt dus dat na $n$ stappen ($n=0,1,2,\ldots$) de totale oppervlakte van de benaderende driehoeken is¶:

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n})D$$

De som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}$ bepaalt hij dan op zijn eigen wijze door allereerst op te merken dat $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3\cdot 4^n}=\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$, waardoor men de volgende reductie krijgt:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3\cdot 4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

zodat de gezochte som gelijk is aan $\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}$. Nu komt het typische: Archimedes laat nu niet $n$ naderen tot oneindig en dus $\frac{1}{3\cdot 4^n}$ tot nul, maar hij laat zien dat voor de gezochte oppervlakte $S$ van het paraboolsegment zowel $S>\frac{4}{3}D$ als $S<\frac{4}{3}D$ tot een ongerijmdheid leidt (een dubbele 'reductio ad absurdum' dus). Deze redenering is typisch voor de Griekse wiskunde en het is een van de innovaties van de 17de eeuw dat deze strenge methode werd verlaten. Door het loslaten van deze strengheid bij het gebruik van oneindige reeksen kwam men echter tot meer resultaten. De 'vigor' won het van de 'rigor'. Overigens zij opgemerkt dat Christiaan Huygens vooral aanvankelijk deze strenge methode van de dubbele reductio ad absurdum veel gebruikte o.a. bij het bepalen van zwaartepunten en bij zijn theorie van evoluten en involuten.

12. Bij een terugblik op de wiskunde in de 17de eeuw kan men er als Nederlander niet omheen speciale aandacht te geven aan de wiskundebeoefening in de Lage Landen. Wederom, gezien de beperkte tijd, moet ik hierover kort zijn. Gaarne verwijs ik naar het proefschrift van dr. J.A. van Maanen [17].

Een centrale figuur was Frans van Schooten Jr. (1615/6-1660), opvolger van zijn vader Frans van Schooten Sr. (1581/2-1645) als hoogleraar aan de Leidse Universiteit en zelf opgevolgd door zijn broer Petrus van Schooten (1634-1679). Behalve door zijn eigen bijdragen is Frans v. Schooten Jr. bekend geworden als pleitbezorger van de Cartesiaanse wiskunde, met name door zijn vertalingen uit het Frans in het Latijn van de *Géométrie* van Descartes (daardoor kon men dit werk tenminste lezen!). In de tweede editie van deze Latijnse *Geometria* (1659/1661) nam hij ook bijdragen op van leden van de kring van mathematici die hij om zich heen verzameld had: de brief over de bepaling van de lengte van een kromme, getiteld: *Epistola de Transmutatione Curvarum*

¶ We geven het bewijs in onze notatie. De gedachtengang is echter exact die van Archimedes in zijn *Tetragonismos parabolès XXIII.*

*Linearum in Rectas* (1659) door Henricus van Heuraet. Zie hiervoor [13] en [15]. Dit was de eerste lengtebepaling van een kromme, onafhankelijk van en anders dan de methode van Neil. Zelfs Descartes dacht, zich beroepend op een uitspraak van Aristoteles, dat dit niet mogelijk was! Verder nam Van Schooten twee brieven op van de Amsterdamse burgemeester J. Hudde (1628-1704) *Epistola Prima de Reductione Aequationum* (1657), over het oplossen van hogere-machtsvergelijkingen en de *Epistola Secunda de Maximis et Minimis* (1658). In laatstgenoemde brief komt de bekende 'regel van Hudde' voor het bepalen van dubbele wortels van een vergelijking voor. Zie ook [14] en [15]. Overigens zij opgemerkt dat Hudde, hoewel amateur-wiskundige en als zodanig slechts actief van 1654 tot 1663, door Newton hoog gewaardeerd werd. Een derde toevoeging door Van Schooten was het werk van de bekende Raadpensionaris Jan de Witt (1625-1672), getiteld: *Elementa Curvarum Linearum*, het eerste leerboek van de analytische meetkunde!

Tot de genoemde kring van mathematici rond Van Schooten Jr. behoorde ook Christiaan Huygens. Diens werk op mathematisch gebied betreft in de eerste plaats zeer ingenieuze toepassingen (die duidelijk meetkundig getint zijn) en in mindere mate algemene methoden en theorieën. Zijn werk is een duidelijke demonstratie van de gedachte dat de natuur mathematisch verklaard en beschreven moet worden. Huygens' prestaties beperken zich echter niet tot het gebied van de wiskunde. Hij kan met recht een universeel genie genoemd worden. Een goed inzicht in zijn verdiensten krijgt men uit het sub [2] genoemde werk.

Uit het voorgaande blijkt dat de wiskundebeoefening in ons land in de 17de eeuw grotendeels en gedurende lange tijd (1611-1679) werd beheerst door leden van één familie: de Van Schootens. Dat hierdoor verstarring dreigde, zal niemand verbazen. Daarbij kwam nog dat men hier te lande (Huygens vertoefde in zijn bloeitijd in Frankrijk) later in de eeuw steeds minder oog had voor problemen buiten de 'zuivere' wiskunde, waardoor de voedingsbodem schraler werd. Zo raakte tegen het einde van de eeuw de wiskunde in de Lage Landen in verval en schreef een mathematicus vanuit Utrecht aan Leibniz 'Mathematica hic frigent' (de wiskunde hier verstart). (Zie hiervoor [17]).

13. Bij een bespreking van de 17de eeuw kan een enkel woord over de verspreiding van de kennis in die periode niet achterwege blijven. Boeken waren nog relatief schaars, een voorname vorm van communicatie was de brief. In de wereld van de internationale correspondentie werd een centrale plaats ingenomen door de Franse geleerde pater Marin Mersenne (1588-1648) een levenslange vriend van Descartes, behorende tot de Ordo Minorum.

Vanwege zijn centrale rol wordt hij ook wel 'de secretaris-generaal van geleerd Europa' genoemd. De mededeling van een resultaat aan Mersenne, stond gelijk met publicatie daarvan. Een soortgelijke rol werd later vervuld door Henry Oldenburg (ca. 1618-1677), werkzaam in Londen.

Tot de belangrijkste gebeurtenissen op dit gebied in de 17de eeuw moet men ook rekenen de oprichting van een aantal academies, d.w.z. genootschappen waar geleerden elkaar ontmoetten. Vaak werden zij door de landelijke vorsten met hun gezag en financiën gesteund. Genoemd worden hier: de Italiaanse Accademia dei Lincei (1601); de Franse Académie Royale des Sciences (1666), ontstaan uit de kring van geleerden rond de eerder genoemde Mersenne; de Royal Society of London (1662), ontstaan uit de kring rond John Wallis. De eerste voorzitter hiervan was de bekende Samuel Pepys, wiens naam dan ook prijkt op het titelblad van de door dit Genootschap uitgegeven *Principia* van Newton. Zeer belangrijk was de Academie van Wetenschappen in St. Petersburg (1724), waaraan o.a. Euler verbonden was.

De betekenis van deze genootschappen was drieërlei: allereerst waren zij ontmoetingsplaatsen voor vakgenoten, maar vaak ook boden zij financiële steun aan geleerden die er een vaste 'research-betrekking' vonden. Van bijzonder groot belang waren deze academies echter ook door het uitgeven van tijdschriften.

De rol van de universiteiten was zeker in het begin van de eeuw voor de wiskunde van zeer ondergeschikte betekenis.

14. Tot slot nog het volgende. Zoals ik al meerdere malen zei, moest er een zeer beperkte keuze gemaakt worden uit de veelheid van onderwerpen die in de 17de eeuw aan de orde zijn geweest. U had misschien wel een voordracht verwacht over het getallentheoretische werk van Fermat, meer over de waarschijnlijkheidsrekening, meer over de bijdragen van onze landgenoten, zeker meer expliciete aandacht voor 'onze' Christiaan Huygens, voor de wiskundige-theoloog Pascal, voor de laatste 'homo universalis' Leibniz, om maar enkelen te noemen. Dat was niet mogelijk. U moet deze lezing dan ook maar zien als een protrepticon, een aansporing, en deze cursus als een 'opwekkingsbijeenkomst' en wij hopen van onze kant dat er van deze cursus zoveel inspiratie uitgaat dat deze U aanzet tot verdere, zelfstandige studie, niet alleen van de 17de eeuw, maar van de bronnen van uw en mijn vak in het algemeen. De syllabus en de daarin genoemde literatuur kunnen daarbij leidraad zijn.

Er is echter meer: wat ik al eerder schreef in de folder die deze cursus aankondigde, wil ik volgaarne herhalen: Het is de hoop en de stellige verwachting van de organisatoren van deze cursus, dat niet alleen de deelnemers zelf daardoor verrijkt worden, maar ook dat zij veel mee naar huis zullen nemen wat zij ook aan hun leerlingen kunnen doorgeven.

Het is mijn persoonlijke ervaring dat de studenten in hoge mate geïnteresseerd zijn in de oorsprong van de gehanteerde begrippen, in de ontwikkeling van de theorie die zij nagenoeg steeds in zo'n afgeronde vorm krijgen 'voorgeschoteld'. Zij willen ook wel eens 'in de keuken kijken'. Voor ons als docenten is mede daarom zicht op de geschiedenis van eminent belang: wat toen moeilijk was voor de allergrootsten (denkt U maar eens aan het irrationale getal!) zal voor onze jongens en meisjes toch ook wel echte problemen opleveren, problemen waar wij niet omheen kunnen (en mogen).

Als we dit—de overdracht aan uw leerlingen—mede zouden kunnen bereiken, dan zou een dubbel doel gediend zijn en dan zouden wij, als organisatoren, dubbel tevreden zijn.

Ik wens U een heel prettige voortzetting van de cursus.

LITERATUUR

De met * gemerkte nummers zijn bijzonder geschikt voor een eerste kennismaking.


1. H. BEHNKE et al. Grundzüge der Mathematik, Göttingen 1962.
2. H.J.M. BOS et al. Studies on Christiaan Huygens, Lisse 1980.
3. H.J.M. BOS, Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, Arch. Hist. Ex. Sci., **14**, p. 1-90, 1974.
4. N. BOURBAKI, Eléments d'histoire des Mathématiques, Paris 1963.
5. C.B. BOYER, History of Analytic Geometry, New York 1956.
6.* C.B. BOYER, A History of Mathematics, New York etc. 1968.
7.* C.B. BOYER, The History of the Calculus, New York 1959.
8.* D.M. BURTON, The History of Mathematics, Boston etc. 1985.
9.* F. CAJORI, A History of Mathematical Notations, Chicago 1952.
10. Dictionary of Scientific Biography, New York 1970-1978.
11. E.J. DIJKSTERHUIS, De Mechanisering van het Wereldbeeld, Amsterdam 1950.
12.* C.H. EDWARDS JR., The Historical Development of the Calculus, New York 1979.
13. A.W. GROOTENDORST en J.A. VAN MAANEN, Van Heuraet's Letter (1659) on the Rectification of Curves, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) XXX (1982) p. 95-113.
14. A.W. GROOTENDORST, Johan Hudde's *Epistola Secunda de Maximis et Minimis,* Nieuw Archief voor Wiskunde (4) dl. 5 (nov. 1987) p. 303-334.
15.* A.W. GROOTENDORST, Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde, Delft 1988.
16.* M. KLINE, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York 1972.
17.* J.A. VAN MAANEN, Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands, Utrecht 1987.
18. M.S. MAHONEY, The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665), Princeton 1973.
19. L.E. MAISTROV, Probability Theory, A Historical Sketch, New York 1974.
20.* W.M. PRIESTLEY, Calculus: An Historical Approach, New York etc. 1979.
21. O.B. SHEYNIN, Early History of the Theory of Probability, Arch. Hist. Ex. Sci., **17** (1977) p. 201-259.
22.* D.J. STRUIK, Het land van Stevin en Huygens, Nijmegen 1979.
23.* D.J. STRUIK, Geschiedenis van de wiskunde, Nijmegen 1980.
24. D.J. STRUIK, A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Princeton 1986.
25. M.A. TODHUNTER, The History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace, Cambridge (1865), reprint New York (1949).

# De zeventiende eeuw in tien wiskundige problemen uit tien decennia

J.A. van Maanen

## Wat dit verhaal voorstelt, en vooral wat het niet voorstelt

Hoe geschiedenis van de wiskunde te schrijven als het thema een periode is? Een globaal overzicht geven van de gebeurtenissen uit die periode is een mogelijkheid. Eén onderdeel van de wiskunde, een deel van de periode of het werk van één wiskundige gedetailleerd bestuderen is een andere mogelijkheid. Beide hebben hun beperkingen. De eerste heeft het nadeel dat directe wiskundige activiteit op de achtergrond raakt, en met de tweede loop je het risico van een te lokale en statische aanpak.
De hier gedane keuze voor het presenteren van 10 problemen uit 10 decennia is ingegeven door mijn wens om beide heren enigszins aan hun trekken te laten komen. Door de keuze van de problemen zal, naar ik hoop, duidelijk worden dat de wiskunde in de 17de eeuw een bijna niet te beschrijven ontwikkeling heeft doorgemaakt. En in elk van de problemen op zich is sprake van directe wiskundige activiteit.
Verder is het goed om te weten dat ik een aantal normen zal respecteren (bijvoorbeeld met betrekking tot de wijze waarop ik historische teksten zal behandelen) en een aantal met voeten zal treden. De selectie van de problemen is niet (wiskundig, geografisch of in welk opzicht dan ook) representatief, maar is bepaald door een combinatie van gangbare overtuigingen onder historici van de wiskunde (bravo!), toevalligheden (foei!) en persoonlijke voorkeur (foei, foei!). Zo staan problemen uit publikaties die de wiskunde wezenlijk veranderd hebben (zoals de *Géométrie* (1637) van Descartes en de *Nova methodus* (1684) waarin Leibniz voor het eerst zijn ontdekking van de differentiaalrekening wereldkundig maakte) naast uiterst elementaire opgaven. Waarom ook niet? Iedereen begint wiskunde te bedrijven op het elementaire niveau, en van al die tal- en naamlozen voegt slechts een enkeling iets nieuws aan het bestaande toe.
Tien keer over de schouder kijken van mensen die, de een zo'n tien jaar na de ander, met wiskunde bezig zijn, meer ga ik eigenlijk in dit verhaal niet doen.

# 1 1601–1610: Maurits, Stevin en gelijkvormigheid

## 1.1 Achtergrond

Simon Stevin (1548–1620) vestigde zich in 1581 na enige omzwervingen vanuit Vlaanderen in Leiden. Kort daarop verscheen een aantal invloedrijke werken van zijn hand, waaronder in 1585 zijn boekje (pamflet haast) *De Thiende* over de invoering van decimale breuken. Maar ook op andere terreinen dan publiceren was Stevin zeer actief. Hij gaf technische adviezen, beoordeelde uitvindingen en examineerde landmeters, om maar enkele bezigheden te noemen. Veel invloed had hij ongetwijfeld door zijn contact (vanaf 1593) met de stadhouder, Prins Maurits. Stevin heeft Maurits onderwijs gegeven en hem daarnaast in allerlei zaken geadviseerd. Van belang voor de wiskunde in de Nederlanden was het leerplan dat Stevin op verzoek van Maurits opstelde voor de Ingenieursschool, die in 1600 aan de Leidse universiteit verbonden werd. Er werd 'duytsche mathematyque' onderwezen: praktische rekenkunde en meetkunde, landmeten en vestingbouwkunde, en dit alles in de landstaal, in tegenstelling tot de universiteit waar Latijn de officiële taal was. Het onderwijs aan de Ingenieursschool heeft sterk bijgebragen tot de popularisering van de wiskunde in de Nederlanden. Datzelfde kan gezegd worden van Stevins boeken. Zo heeft zijn *Wisconstighe gedachtenissen* uit 1605, dat een neerslag vormt van "t'ghene daer hem in gheoeffent heeft DEN DORLUCHTICHSTEN Hoochgheboren Vorst ende Heere, Maurits Prince van Oraengien, Grave van Nassau ..." en waaruit het nu volgende probleem afkomstig is, door de invoering van een Nederlandstalige wiskundige terminologie (van Stevin zijn termen afkomstig als: driehoek, evenredig(heid), evenwijdig, gegeven, kegelsnede, kromme (lijn), meetkunde, middellijn, middelpunt, noemer, omtrek, scherphoekig, stomphoekig, vierkant) een stempel gedrukt op de wiskunde-beoefening in Nederland. Sterker nog, want zonder Stevin hadden we in Nederland waarschijnlijk vandaag de dag nog steeds mathematica bedreven, want ook de term wiskunde stamt van Stevin.

## 1.2 Het probleem

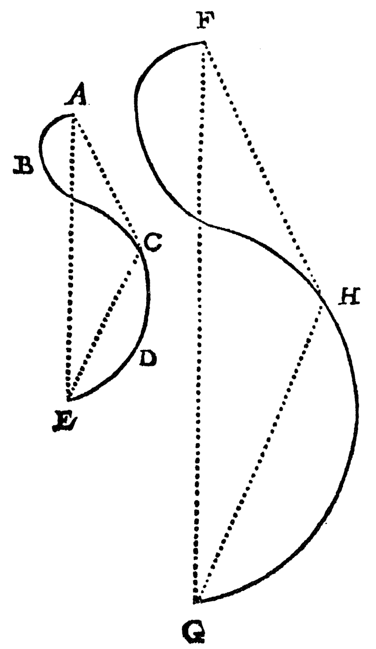
Bron: Simon Stevin, *Tweede stuck der wisconstighe ghedachtnissen. Van de Meetdaet*, Leiden (Jan Bouwensz) 1605, pp. 26–27.
Geraadpleegde exemplaren: UB Leiden: 670 A 16 en 1216 A 19. De geciteerde passages zijn niet opgenomen in het verzamelde werk van Stevin [Stevin 1958].

"15 VOORSTEL.

Te teyckenen een lini ghelijck met een ghegheven cromme lini van onbepaelde ghedaente.

> TGHEGHEVEN. Laet $ABCDE$ een cromme lini sijn van ongeschickte form, niet wesende van ghedaente als eenighe der voorgaende, maar onbepaelt; Voort sijn $F,G$, twee punten lijckstandich mette punten $A,E$.
> TBEGHEERDE. Wy moeten van $F$ tot $G$ een lini teyckenen, gelijck mette lini $ABCDE$." [p. 26]

Onder "ghelijck" moet ons huidige *gelijkvormig* verstaan worden. Ook "lijckstandich" gebruiken we tegenwoordig niet meer; in onze terminologie zijn de punten $A$ en $E$ van het origineel en de punten $F$ en $G$ van het beeld *overeenkomstige* of *corresponderende* punten van de twee gelijkvormige figuren. Stevin zelf gaat als volgt te werk (zie fig. 1). Eerst maakt hij met een draaiing lijnstuk $FG$

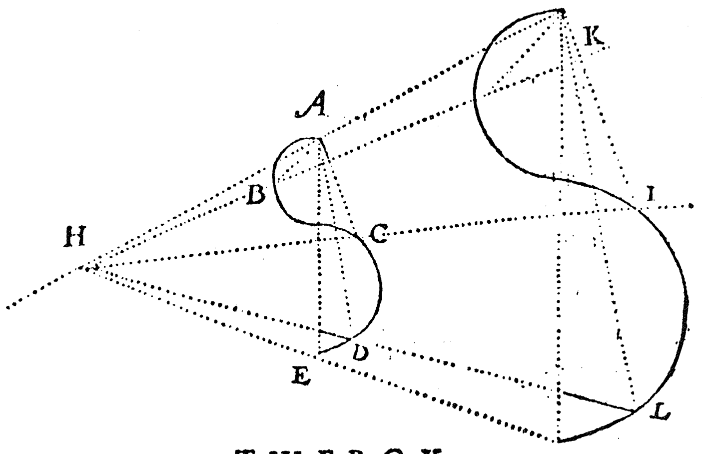



Figuur 1: facsimile van de figuur uit de *Meetdaet*, p. 26

evenwijdig aan lijnstuk $AE$. Dan neemt hij een punt $C$ op kromme $ABCDE$. Door $F$ trekt hij een rechte $l$ evenwijdig aan $AC$ en door $G$ een rechte evenwijdig aan $EC$ die $l$ snijdt in $H$. $H$ is het punt van het beeld dat correspondeert met het punt $C$ van het origineel. Door op dezelfde wijze voldoende veel punten van het beeld te construeren en deze met rechte "linikens" te verbinden vindt Stevin een figuur die niet "merckelick of hinderlick" meer afwijkt van het eigen-

## Ander manier van vverck.

Sijn VORSTELICKE GHENADE heeft hier toe noch verdocht en doen opteyckenen een ander manier van wercking deur trecking van seker linien uyt een punt buyten de form: Om welcke by voorbeelt te verclaren laet andermael A B C D E een cromme lini sijn alsvooren; F, G, twee lijckstandighe punten mette punten A, E, wederom alsoo ghestelt dat de verdochte lini van F tot G, evewijdeghe sy mette verdochte van A tot E.




T W E R C K.

Ick treck deur de twee lijckstandighe punten F, A, een oneyndelicke rechte lini F A H, sghelijcx een ander rechte lini deur de twee lijckstandighe punten G, E, ontmoetende die oneyndelicke in H: Ghenomen nu dat ick inde begeerde lini van F tot G, wil vinden een lijckstandich punt met C, ick treck deur C de oneyndelicke lini H I, daer na A C, en uyt t'pvnt F, een evewijdeghe mette selve A C ontmoetende die oneyndelicke in H: T'welck soo sijnde, I is een punt inde begheerde lini, lijckstandich met C inde ghegheven. Nu ghelijck hier gevonden is t'punt I, salmen vinden meer ander punten, als neem ick K, L, lijckstandighe met B D, en ander dierghelijcke, soo veel tot dat de rechte linikens van d'een tot d'ander, gheen merckelick of hinderlick verschil en hebben vande cromme diese eyghentlick souden wesen, en men heeft t'begheerde. De lichticheyt des wercx hier uyt volghende, is datmen in alle oneyndelicke linien ghetrocken van H deur de ghegeven lini daert valt, altijt heeft een begheert lijckstandich punt, mettet punt der ghemeene sne vande ghegheven cromme lini, en die oneyndelicke, waer af t'bewijs is als t'voorgaende. TBESLVYT. Wy hebben dan gheteyckent een lini ghelijck met een ghegheven cromme lini van onbepaelde ghedaente na den eysch. I

C 2 TVVEE-

Figuur 2: facsimile van de geciteerde passage uit de *Meetdaet*, p. 27

lijke beeld van $ABCDE$. Tenslotte deelt hij nog mee dat hij de constructie van het punt $H$ aan Euclides heeft ontleend (*Elementen* VI, 18).

Daarop volgt de door Prins Maurits bedachte oplossing van het probleem (afgebeeld in fig. 2), die door Stevin geprezen wordt om de "lichticheyt des wercx":

"Ander manier van werck.

Sijn VORSTELICKE GHENADE heeft hier toe noch verdocht en doen opteyckenen een ander manier van wercking deur trecking van seker linien uyt een punt buyten de form: Om welcke by voorbeelt te verclaren laet andermael $ABCDE$ een cromme lini sijn alsvooren; $F$, $G$, twee lijckstandighe punten mette punten $A$, $E$, wederom alsoo ghestelt dat de verdochte[1] lini van $F$ tot $G$, evenwijdeghe sy mette verdochte van $A$ tot $E$. [Nu volgt bij Stevin de bijbehorende figuur; zie daarvoor fig. 2]

### TWERCK

Ick treck deur de twee lijckstandighe punten $F$, $A$, een oneyndelicke rechte lini $FAH$, sghelijcx een ander rechte lini deur de twee lijckstandighe punten $G$, $E$, ontmoetende die oneyndelicke in $H$: Ghenomen nu dat ick in de begeerde lini van $F$ tot $G$, wil vinden een lijckstandich punt met $C$, ick treck deur $C$ de oneyndelicke lini $HI$, daer na $AC$, en uyt t'punt $F$, een evenwijdeghe mette selve $AC$ ontmoetende die oneyndelicke in $H$[2]: T'welck soo sijnde, $I$ is een punt inde begheerde lini, lijckstandich met C inde ghegheven. Nu ghelijck hier gevonden is t'punt $I$, salmen vinden meer ander punten, als neem ick $K$, $L$, lijckstandighe met $B$, $D$, en ander dierghelijcke, soo veel tot dat de rechte linikens van d'een tot d'ander, gheen merckelick of hinderlick verschil en hebben vande cromme diese eyghentlick souden wesen, en men heeft t'begheerde. De lichticheyt des wercx hier uyt volghende, is datmen in alle oneyndelicke linien ghetrocken van $H$ deur de ghegeven lini daert valt, altijt heeft een begheert lijckstandich punt, mettet punt der ghemeene sne vande ghegheven cromme lini, en die oneyndelicke, waer af t'bewijs is als t'voorgaende[3]. TBESLUYT. Wij hebben dan gheteyckent een lini ghelijck met een ghegeven cromme lini van onbepaelde ghedaente na den eysch."

---

[1]= denkbeeldige

[2]Stevin zelf geeft $H$; lees hiervoor $I$.

[3]Hiermee bedoelt Stevin de constructie die hij zelf had gegeven (hierboven geschetst).

# 2 1611-1620: Cardinael meet de hoogte van een toren met een spiegel en een stok

## 2.1 Achtergrond

Veel zeventiende-eeuwse Nederlandse wiskundigen hebben rekenen en elementaire meetkunde geleerd uit de boekjes van Cardinael. Sybrandt Hansz. Cardinael (1578-1647) was afkomstig uit Harlingen en vestigde zich in 1605 als "Reeckenmeester tot Amsterdam". De rekenmeester was een vrij gevestigd ondernemer die thuis school hield en die tegen directe betaling zijn leerlingen rekenen en meetkunde onderwees, maar ook praktijkgerichte vakken zoals navigatie en boekhouden. Cardinael is onder meer bekend omdat Vondel een gedichtje op hem schreef. Hij stond in zijn tijd goed aangeschreven, maar was blijkbaar wel wat eenzijdig, anders zou Vondel Cardinaels leerlingen niet als volgt gewaarschuwd hebben[4]:

> Aen zijn scholieren.
>
> De Vriesche Euklides hangt alleen
> van cijfferletters hecht aan een,
> Bewaart toch Sybrandt met u allen
> Bewaart dien Rekenschat getrou
> Viel Kardinael van't plat, hij zou
> Aen cijfferletters stucken vallen.

Naast een pamflet tegen het Copernicaanse wereldbeeld (1635) schreef Cardinael een rekenmethode (rond 1640) en een boekje *Hondert Geometrische questien met hare solutien* (eerste druk rond 1614). De problemen uit dit boekje, waaronder ook het hieronder behandelde, begeven zich op het niveau dat volgde op het basisonderwijs in de meetkunde. Dit basisonderwijs bestond uit een selectie uit de *Elementen* van Euclides aangevuld met een aanzienlijke serie constructieproblemen met passen en liniaal.
Cardinaels boekje was populair. Het werd herdrukt en in het Duits vertaald, er zijn handgeschreven copieën van bekend[5] en het kwam met een gunstig oordeel voor in de lijst van aanbevolen leerboeken die Stampioen in 1644 opstelde voor de op dat moment 15-jarige Christiaan Huygens. Over het algemeen betreffen de 'Questien' een figuur waarvan de afmetingen van een aantal elementen (lijnstukken, hoeken) gegeven zijn terwijl de afmetingen van een aantal andere elementen bepaald moeten worden. In de Questien 87 tot en met 97 vinden we echter ook een serie constructieproblemen met passer en liniaal.

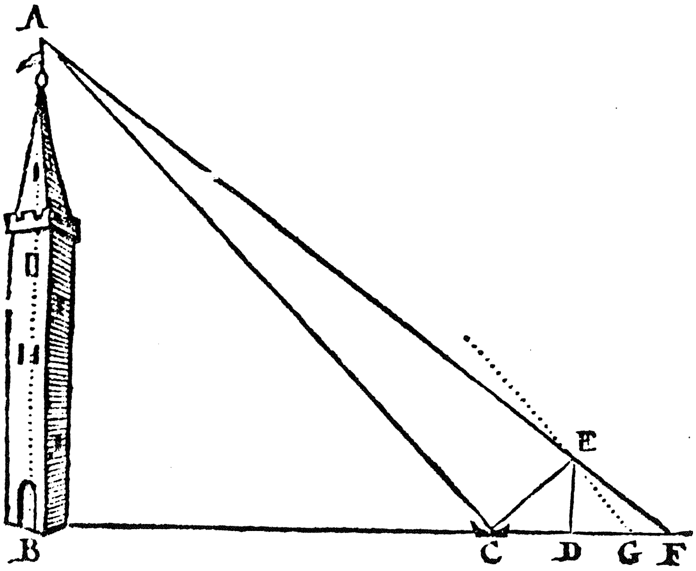
---

[4] Geciteerd door Wijnman [Wijnman 1933/34], die als vindplaatsen noemt: Vondel, *Werken* (ed. Sterck) IV (1930), p.601 en *Verscheide Gedichten* (1644), p.342

[5] Zie [Van Maanen 1987], pp.174-177

hooghte van de Toren A B te meten/ so ben ick inde rech-
te linie C B recht achterwaers ghegaen van de spieghel
C, tot in D 8, voeten/alsoo dat ick over een stock D E in de
spieghel ghesien hebbe het top des torens A, ende sonder
de stock te verroeren/ ben ick noch achterwaerts gegaen
neghen voeten tot in F, also dat ick in F met mijn gesicht
over de stock E D het top des Torens A gesien hebbe. De
vraghe is dan / so de stock E D lanck is 6 voeten/hoe veel
voeten sulcken Toren hoogh is?

Om de hooghte van desen Toren te vinden / soo treck
ick C D 8 van D F 9/ rest 1 voor G F. Nu spreeckt G F 1/
ghevet my E D 6 voeten/ wat sal my gheven C F 17? en-
de sal komen 102 voeten voor de hooghte des Torens A
B. De reden van sulcken werck is:om dat den trianghel
C D E, van een proportie is als A B C, ende de trianghel




E D F van een proportie als A B F, daerom als wy nu E
D G ghelijck maecken C D E, soo is E G F noch van een
proportie als A C F, om dat E G paralelle is met A C, also
dat van ghelijck G F staet teghen E D, also staet oock C F
tegen A B, de torens hooghte.

XIII.

Figuur 3: tweede deel van de geciteerde passage; UB Leiden: 2361 F 13, p. 14

## 2.2 Het probleem

Bron: Sybrandt Hansz. Cardinael, *Hondert Geometrische questien met hare solutien*, Amsterdam (Jan Jansz.) [ca. 1614, herdruk ca. 1620]

Geraadpleegde exemplaren: UB Leiden: 2361 F 13 (p.13-14) en UB Utrecht: P oct. 1097 (p.16-17; het Utrechtse exemplaar wijkt in spelling, lay-out en paginering van het Leidse af).

> « XII.
> Hebbende geleyt op een seecker plaets (als bij exempel in desen in C) een Spieghel/ om daer door de [p. 14] hooghte van de Toren $AB$ te meten/ So ben ick inde rechte linie $CB$ recht achterwaers ghegaen van de spieghel $C$, tot in $D$ 8, voeten/ alsoo dat ick over een stock $DE$ in de Spieghel ghesien hebben het top des torens $A$, ende sonder de stock te verroeren/ ben ick noch achterwaerts gegaen neghen voeten tot in $F$, also dat ick in $F$ met mijn gesicht over de stock $ED$ het top des Torens $A$ gesien hebbe. De vraghe is dan/ so de stock $ED$ lanck is 6 voeten/ hoe veel voeten sulcken Toren hoogh is?
> Om de hooghte van desen Toren te vinden/ soo treck ick $CD$ 8 van $DF$ 9/ rest 1 voor $GF$. Nu spreeckt $GF$ 1/ gheven mij $ED$ 6 voeten/ wat sal mij gheven $CF$ 17? ende sal komen 102 voeten voor de hooghte des Torens $AB$. De reden van sulcken werck is: om dat den trianghel $CDE$ van een proportie is als $ABC$, ende trianghel [op deze plaats staat bij Cardinael de bijbehorende figuur; zie daarvoor het facsimile in fig. 3] $EDF$ van een proportie als $ABF$, daerom als wij nu $EDG$ ghelijck maecken $CDE$, soo is $EGF$ noch van een proportie als $ACF$, om dat $EG$ paralelle is met $AC$, also dat dan ghelijck $GF$ staet teghen $ED$, also staet oock $CF$ tegen $AB$, de torens hooghte."

## 2.3 Commentaar

De oplossing spreekt bijna voor zich. Door op $DF$ een punt $G$ te nemen met $DG = CD = 8$ heeft Cardinael twee congruente driehoeken $\triangle CDE$ en $\triangle GDE$ gekregen. Omdat licht uit $A$ door de spiegel $C$ naar $E$ wordt teruggekaatst geldt: $\angle ACB = \angle ECD$, en wegens de congruentie $\triangle CDE \cong \triangle GDE$ geldt ook: $\angle ECD = \angle EGD$, zodat $\angle ACB = \angle EGD$. De lijnen $AC$ en $EG$ zijn dus evenwijdig, en de driehoeken $\triangle ACF$ en $\triangle EGF$ zijn gelijkvormig (1).
Omdat ook $\triangle ABF$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn (2), volgt de evenredigheid:

$$\frac{AB}{DE} \underset{(2)}{=} \frac{AF}{EF} \underset{(1)}{=} \frac{CF}{GF}.$$

Nu zijn $DE = 6$, $CF = 17$ en $GF = 1$ gegeven, zodat $AB$ berekend kan worden: $AB = 102$.
Twee zaken verdienen nog enig commentaar. De eerste is het gebruik van de zogeheten regel van drieën, in de zeer klassieke formulering '$a$ geeft mij $b$, wat zal mij $c$ geven' van de evenredigheid $a : b = c : x$, waaruit de vierde evenredige berekend wordt via $x = \frac{bc}{a}$. In het elementaire wiskundeonderwijs nam het oefenen met deze regel eeuwenlang een belangrijke plaats in (meer daarover in [Wansink 1987/79], pp. 2-7).
Wat verder opvalt is de terminologie, die nog niet door Stevin beïnvloed is. Cardinael gebruikt hier nog de na Stevin langzaam in onbruik geraakte termen "trianghel", "proportie" en "paralelle", zoals hij het op andere plaatsen ook over "perpendiculum" en "diameter" heeft.

# 3 1621-1630: een driehoekig doorkijkje

## 3.1 Achtergrond

Het derde probleem is er opnieuw een uit de vlakke meetkunde en opnieuw is het van Nederlandse hand. Was er dan geen wiskunde van belang buiten de Nederlanden, en waren er geen interessante problemen buiten de meetkunde?
Op beide vragen past een bevestigend antwoord. Neem bijvoorbeeld Kepler. In 1609 had hij in zijn *Astronomia nova* het Copernicaanse wereldbeeld verfijnd door te stellen dat planeten geen cirkels om de zon beschrijven maar ellipsen (met de zon in een van de brandpunten). In zijn *Nova stereometria doliorum vinariorum* ('Nieuwe stereometrie van wijnvaten', 1615) voerde hij de inhoudsbepaling uit van allerlei omwentelingslichamen, en daarmee gaf hij een nieuwe impuls aan het onderzoek dat tegen het einde van de eeuw zou uitmonden in de uitvinding van de integraalrekening. Een tweede interessante ontwikkeling buiten Nederland en buiten de vlakke meetkunde was de ontdekking van de logaritme door de Schotse baron Napier (*Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio*, Edinburg 1614). De logaritmen die door Briggs theoretisch in een beter hanteerbare vorm gebracht waren en verder in tafels praktisch uitgewerkt waren, brachten veel complexere berekeningen dan voorheen mogelijk waren binnen het bereik van wiskundigen en astronomen. En zo zou er nog meer te noemen zijn.

Vanwaar dan toch zo'n sterke voorkeur voor de meetkunde en voor de Nederlanden?
Een belangrijke reden is dat dit verhaal vooral geschreven is voor leraren, en dat de praktisch gerichte meetkunde uit het begin van de zeventiende eeuw voor hen een inspiratiebron bij uitstek is. Wie 'rijke contexten' zoekt voor zijn wiskundeonderwijs (en wie $\frac{\text{m}}{\text{d}}$oet dat tegenwoordig niet?) kan daaraan zijn hart ophalen. Daar komt natuurlijk een zekere dosis luiheid bij, want Nederlandstalige bronnen hoeven nu eenmaal niet vertaald te worden en er is goed aan te komen. Maar het doorslaggevende argument is wel dat de vooraanstaande positie die de Nederlandse wiskundigen tegen het midden van de eeuw hadden gebaseerd was op een sterk ontwikkelde meetkundige ondergrond. Maatschappelijk gezien was meetkunde in het begin van de eeuw, met al zijn landmeetkundige, bouwkundige en militaire activiteiten, een 'eerste levensbehoefte'. Wetenschappelijk gezien was de door de maatschappelijke vraag ontstane praktische meetkunde het beginpunt van de ontwikkeling van zeer fundamentele wiskunde. We komen daar bij de bespreking van latere decennia nog op terug.

Het centrum van de wiskunde in de Nederlanden in de zeventiende eeuw was de Leidse Universiteit (opgericht in 1575) en de daaraan sinds 1600 verbonden Ingenieursschool waaraan volgens Stevins leerplan "duytsche mathematyque" onderwezen werd. Verschillende namen van professoren en studenten uit die periode klinken ons vandaag nog steeds bekend in de oren: Willebrord Snell (hoogleraar aan de Universiteit van 1613 tot 1626, wiens naam verbonden is aan de 'wet van Snellius' voor de lichtbreking), Ludolf van Ceulen (hoogleraar aan de Ingenieursschool van 1600 tot 1610, wiens benadering van $\pi$ in 35 decimalen lange tijd de nauwkeurigste bleef) en Christiaan Huygens (die in Leiden studeerde van 1645 tot 1647 en die een van de leidende Europese wis- en natuurkundigen was). Minder bekend is tegenwoordig de naam Van Schooten, terwijl juist Frans van Schooten Sr (1581/2–1645) en zijn zoons Frans Jr (1615/6–1660) en Pieter (1634–1679) het gezicht van de wiskunde in Leiden voor een groot deel bepaald hebben. Zo'n 70 jaar gaven ze onderwijs aan de Ingenieursschool en een deel van die periode ook aan de Universiteit, waarbij vooral Frans Jr de recente ontwikkelingen op de voet volgde en in publicaties verwerkte (meer daarover in paragraaf 5). Van Frans Sr is alleen een goniometrisch tabellenboekje in druk verschenen dat ook een korte uitleg bevat over het gebruik van de tabellen. De eerste druk verscheen in 1627 (in Amsterdam bij Willem Jansz. Blaeu), en aan het grote aantal herdrukken af te meten is het boekje zeer populair geweest. Gelukkig zijn echter verschillende manuscripten van de hand van Frans Sr bewaard gebleven, waaruit we een goed beeld kunnen krijgen van het door hem gegeven onderwijs. Uit een van deze manuscripten (UB Leiden, Hs. *BPL* 1013), dat rond 1623 geschreven werd en dat vlakke meetkunde, driehoeksmeting, landmeten, wijnroeien en vestingbouw behandelt en daarmee Stevins richtlijnen nauwkeurig volgt, komt het aanstonds te bespreken probleem.

De keuze van het probleem is ingegeven door de opvallende figuur die Van Schooten er bij geeft. Uit allerlei details in het manuscript blijkt dat hij bij het illustreren van een serie problemen over driehoeksmeting hulp gehad heeft van twee verschillende tekenaars.

Bij sommige problemen (zoals "Te meeten de Hoochte van een toren $AB$, op een Bergh staende $\cdots$" en dergelijke) is het door Frans Sr zelf getekende meetkundige diagram door een van de tekenaars tot een landschap uitgewerkt. Deze tekenaar wist echter niet van ophouden, want toen Frans Sr overging op een serie abstract geformuleerde problemen (zie de tekst in §3.2; het probleem staat niet in een context) ging hij in twee gevallen, op f.88$^{\mathrm{V}}$ en f.89$^{\mathrm{V}}$, door met illustreren. Als vorm nam hij het 'doorkijkje', waarbij hij de door Van Schooten reeds getekende driehoek als raamwerk nam.

Wie was deze tekenaar? Aan de kwaliteit van de illustraties is te zien dat het een professional was. De tekeningen doen zelfs enigszins aan Rembrandt denken, en dat is misschien niet eens toeval. Rembrandt was, toen Van Schooten in Leiden het handschrift schreef, zo'n 17 jaar oud en woonachtig in Leiden. Het zal Rembrandt wel niet zelf geweest zijn, daarvoor lijkt de tekening te vol en te geordend, te minutieus. Misschien was het iemand uit zijn omgeving? Misschien was het Joris van Schooten (1587–1651), een broer van Frans Sr en een van Rembrandts eerste leraren? Voer voor kunsthistorici dunkt me.

Met die constatering keren we terug naar de wiskunde; over naar het probleem!

## 3.2 Het probleem

Bron: Frans van Schooten Sr, Handschrift over elementaire vlakke meetkunde met toepassingen (rond 1623), UB Leiden: Hs. *BPL* 1013 f.89$^{V}$.

[Zie voor de bijbehorende figuur het facsimile in fig. 4]

> Den inhoudt deses tryangels *ABC* is 1000 roeden, ende de syden *AB*: *AC* en *BC* tot malcander geproportioneert als 13, 14 en 15, Vrage de lengte van de selve syden, en houcken des Tryangels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Basis *CE* | 15 · *DE* | 15 *DE* | | |
| | $\underline{13}$ · *DC* | $\underline{13\ DC}$ | | 14 Basis *CE* |
| 14 ——— | 28 somme ——— | 2 differ̄ komt *HE* – | | $\underline{4}$. differentie |
| | | | Rest | $\underline{10}$ *CH* |
| | | | | 5 *CF* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Multip̄ | 14 | Basis *CE* | $\underline{5}$ |
| met | $\underline{6}$ | Helft der perp̄ *DF* | 25 quadraet *CF* |
| komt | 84 | tryangel *CDE* | $\underline{169}$ quadraet *CD* |
| | | | $\underline{1\vert 44}$ quadraet *DF* |
| | | | 1\| 2 perpen̄ *DF* |

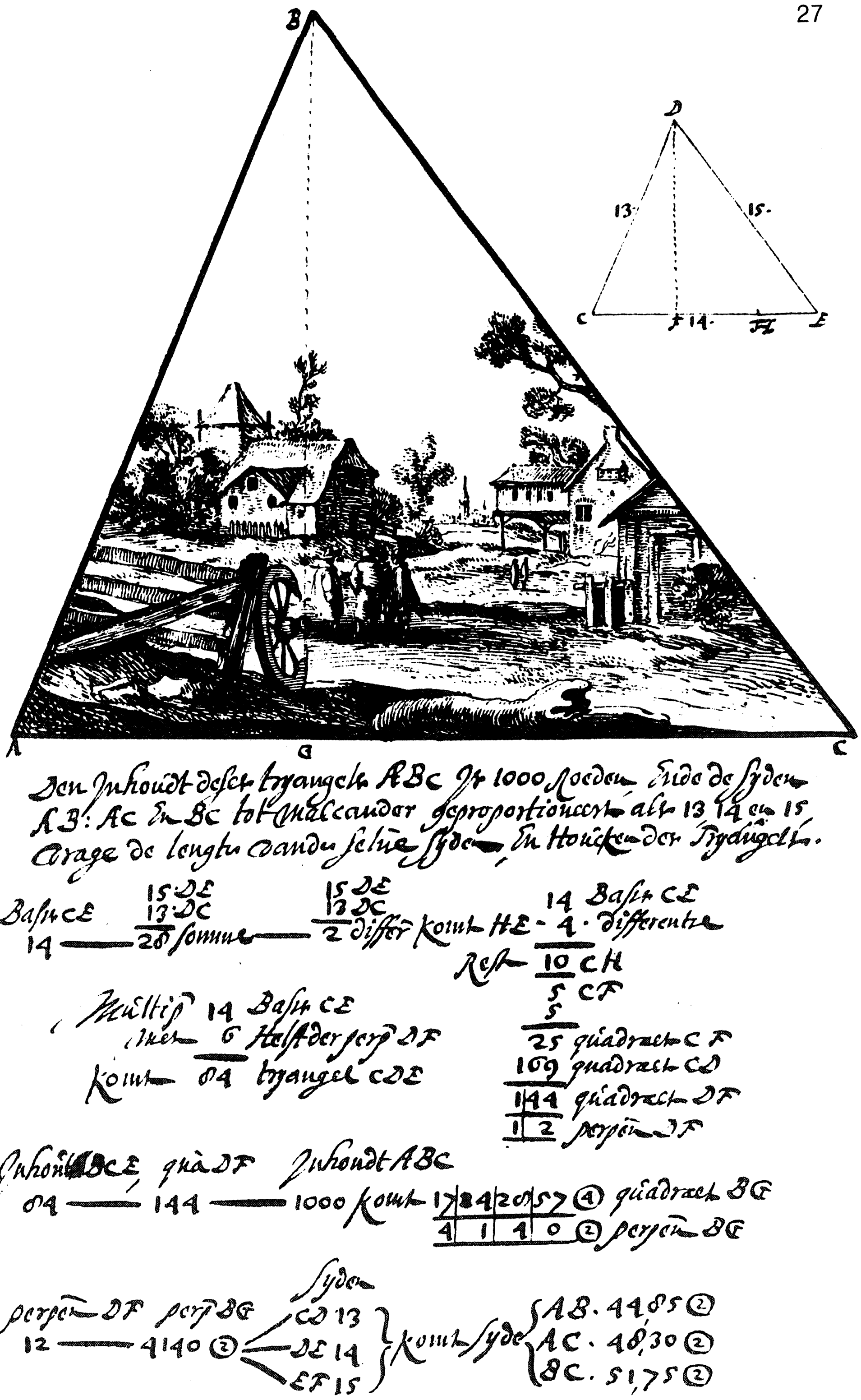
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Inhoudt *DCE* | qua *DF* | Inhoudt *ABC* | | |
| 84 ——— | 144 ——— | 1000 komt | $\underline{17\vert\ 14\vert\ 28\vert\ 57}$ | ④ quadraet *BG* |
| | | | $\underline{4\vert\ \ 1\vert\ \ 4\vert\ \ 0}$ | ② perpen̄ *BG* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | syden | | |
| perpen̄ *DF* | perp̄ *BG* | *CD* 13 | | *AB* · 44,85 ② |
| 12 ——— | 4140 ② | *DE* 14 | komt syde | *AC* · 48,30 ② |
| | | *EF* 15 | | *BC* · 51,75 ② |

## 3.3 Commentaar

Gevraagd wordt de lengten van *AB*, *AC* en *BC* te berekenen als de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan 1000 en als verder gegeven is dat $AB : AC : BC = 13 : 14 : 15$.

Tegenwoordig zouden we voor de eerste stap van de oplossing (het bepalen van de lengte van een hoogtelijn in de $13 - 14 - 15$-driehoek $\triangle CDE$; zie Van Schootens figuur in het facsimile, fig. 4) de cosinusregel gebruiken. Die geeft $\cos\angle C = \frac{5}{13}$. Als *DF* de hoogtelijn uit *D* is volgt daaruit $CF = 5$ en dat betekent: $DF = 12$.



Den Inhoudt deser tryangels ABC Is 1000 Roeden Ende de syden
AB: AC En BC tot malcander geproportioneert als 13 14 en 15
vrage de lengte vanden selve syden, En Houcken der Tryangels.

Basis CE 14 —— 15 DE / 13 DC / 28 somme —— 15 DE / 13 DC / 2 differ Komt HE · 4 · differentie

14 Basis CE
4 differentie
Rest 10 CH
5 CF
5
25 quadraet CF
169 quadraet CD
144 quadraet DF
12 perpen DF

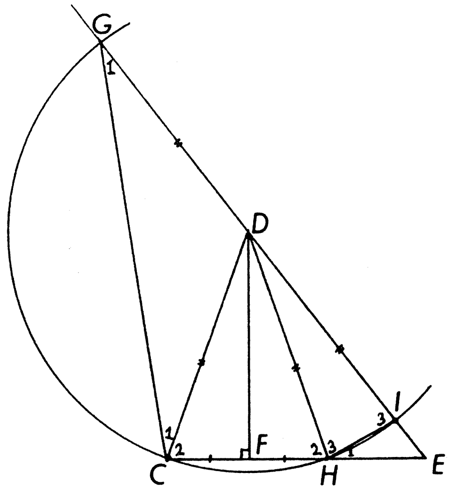
Multip 14 Basis CE
met 6 Helft der perp DF
Komt 84 tryangel CDE

Inhoudt DCE quà DF Inhoudt ABC
84 —— 144 —— 1000 Komt 17|14|20|57 ④ quadraet BG
4|1|1|0 ② perpen BG

perpen DF perp BG Syden
12 —— 4140 ② CD 13, DE 14, EF 15 Komt syde AB · 44,85 ②, AC · 48,30 ②, BC · 51,75 ②

Figuur 4: het probleem in zijn originele vorm; UB Leiden, *BPL* 1013 f. 89v

In het begin van de zeventiende eeuw ging men (Cardinael bijvoorbeeld ook) anders te werk. We zien dat ook in dit geval. Om de hoogte $DF$ van $\triangle CDE$




Figuur 5: $\frac{CE}{DE+DC} = \frac{DE-DC}{HE}$

te berekenen trekt Van Schooten (zie fig. 5) $DF$ en tekent een punt $H$ op $FE$ zodat $CF = FH$. Uit de symmetrie van $\triangle CDH$ volgt dan dat $DH = DC = 13$. Dan berekent hij $HE$ ($HE = 4$) via de evenredigheid

$$\frac{CE}{DE+DC} = \frac{DE-DC}{HE} \qquad (*)$$

die hij blijkbaar als stelling kent (zoals wij de cosinusregel), want een bewijs geeft hij niet.

Een elementair meetkundig bewijs van (*) wordt gesuggereerd door het optreden van lijnstukken met lengte $DE + DC$ en $DE - DC$.
Construeer op het verlengde van $DE$ aan de kant van $D$ een punt $G$ zo dat $DG = DC$ en op $DE$ een punt $I$ zo dat $DI = DC$. Dan geldt: $GE = DE + DC$ en $IE = DE - DC$.
Omdat $DI = DH = DC = DG$ liggen $I, H, C$ en $G$ op de cirkel met middelpunt $D$ en straal $DC$. De macht van $E$ ten opzichte van deze cirkel is $CE \cdot HE = GE \cdot IE$, ofwel $CE \cdot HE = (DE + DC) \cdot (DE - DC)$, hetgeen direkt Van Schootens evenredigheid oplevert. En wie het zonder de macht van een punt ten opzichte van een cirkel wil doen kan de evenredigheid afleiden uit de gelijkvormigheid[6]

$$\triangle CEG \backsim \triangle IEH.$$

[6]Het bewijs dat de driehoeken behalve de hoeken $E$ nog twee paar gelijke hoeken heben vraagt, althans zonder 'hoeken en bogen', een kleine omweg: vierhoek $CHIG$ kan gesplitst

Uit $HE = 4$, $CE = 14$ en $CF = FH$ volgt $CF = \frac{1}{2}(14 - 4) = 5$. Vervolgens berekent Van Schooten in de rechthoekige driehoek $\triangle CDF$ de zijde $DF$ (12) en daarmee de oppervlakte van $\triangle CDE = 84$ ("Multip[liceert] 14 (Basis $CE$) met 6 (Helft der perp[endiculaer] $DF$), komt 84 tryangel $CDE$"). Als $DF$ eenmaal bekend is gaan Van Schootens oplossing en de 'hedendaagse' gelijk op. De driehoeken $\triangle DEC$ en $\triangle ABC$ zijn gelijkvormig; hun oppervlakten (84 en 1000) verhouden zich als de kwadraten van overeenkomstige lijnstukken ($DF^2 = 144$ en $BG^2$; $BG$ is de hoogtelijn uit $B$ in $\triangle ABC$). Voor $BG^2$ vindt Van Schooten hieruit $1724,2857$ zodat $BG = 41,40$. De zijden $AB, AC$ en $BC$ verhouden zich tot $13, 14$ en 15 als $BG$ tot $DF$, en daaruit berekent hij tenslotte de zijden van $\triangle ABC$ (zie verder §3.2).

Interessant in deze tekst is het gebruik en de notatie van decimale breuken. Voor $\frac{144000}{84}$ en voor $\sqrt{\frac{144000}{84}}$ geeft Van Schooten als decimale benadering $1714,2857$ en $41,40$; hij noteert dat in 1625 volgens Stevins *Thiende* (1585) als 17142854 ④ en 4140 ② , maar $AB = 44,85$ schrijft hij al zeer modern als $44,85$ ② , waarin de moderne notatie met de decimale komma gemengd is met de vroegste, door Stevin geïntroduceerde schrijfwijze.

Maar het mooiste blijft natuurlijk het Rembrandt-achtige doorkijkje.

worden in de gelijkbenige driehoeken $\triangle GDC$, $\triangle CDH$ en $\triangle HDI$. De som van de basishoeken van deze driehoeken is dus 360°. Maar de basishoeken zijn twee aan twee gelijk ($\angle G_1 = \angle C_1$; $\angle C_2 = \angle H_2$; $\angle H_3 = \angle I_3$) zodat $\angle G_1 + \angle H_2 + \angle H_3 = 180°$ en dus $\angle G_1 = 180° - (\angle H_2 + \angle H_3) = \angle H_1$.

# 4 1631-1640: Descartes over de normaal aan de ellips

## 4.1 Achtergrond

In 1637 zag de wiskunde er ineens anders uit, al duurde het wel enige tijd voordat ze in haar nieuwe gedaante algemeen aanvaard werd. Drie duizend jaar lang waren meetkunde en algebra gescheiden disciplines geweest, tot, in 1637, Descartes' *Géométrie* verscheen. Descartes (1596-1637) liet daarin zien hoe meetkundige objecten algebraïsch beschreven kunnen worden (een kromme in het platte vlak, bijvoorbeeld, door een vergelijking in twee onbekenden) en dat omgekeerd oplossingen van sommige algebraïsche problemen meetkundig geconstrueerd kunnen worden.

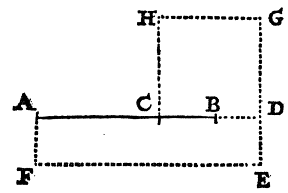
Een van de grondideeën van de *Géométrie*[7] is dat algebra gebruikt kan worden om meetkundige constructieproblemen op te lossen. De analyse van een constructieprobleem (het opsporen van de constructiestappen) was erkend lastig. Soms bracht een listige hulplijn uitkomst, maar elk nieuw probleem vroeg weer een nieuwe listigheid. Met wat ervaring kon je een heel eind komen, maar dat nam de behoefte aan een algemeen geldig 'recept' niet weg. Descartes beschrijft zo'n recept in de *Géométrie* (p.300-301). Het komt kort gezegd neer op het volgende: vertaal het meetkundige probleem in een vergelijking, los de vergelijking op, en vertaal de oplossing in constructiestappen. De eerste keer dat Descartes het recept toepast, doet hij dat om een open constructieprobleem uit de Griekse oudheid, het 'probleem van Pappus' op te lossen. De oplossing is vrij gecompliceerd, en daarom zullen we de werking van het recept bekijken aan de hand van een voorbeeld van Frans van Schooten Jr. Het is afkomstig uit een van de verhelderende commentaren die hij schreef bij de *Géométrie* (meer daarover in §5).

Van Schooten draagt het volgende constructieprobleem aan:[8] "Een gegeven lijnstuk $AB$, met ergens daarop $C$, zo door te trekken tot $D$ dat de rechthoek met zijden $AD$ en $DB$ gelijk is aan het vierkant op zijde $CD$."

Volgens voorschrift van Descartes maakt Van Schooten een figuur (zie fig. 6) waarin hij aanneemt dat hij $D$ al gevonden heeft, en hij stelt de relevante lijnstukken met letters voor: $AC = a$, $CB = b$ en $BD = x$. De zijden van de rechthoek met zijden $AD$ en $BD$ ($ADEF$ in fig.6) zijn dan: $AD = a + b + x$ en $BD = x$, zodat de oppervlakte gelijk is aan $(a + b + x)x$. Evenzo is de oppervlakte van het vierkant op zijde $CD$ gelijk aan $(b + x)^2$. Het meetkundige probleem ($BD$ te construeren zodanig dat rechthoek en vierkant gelijke oppervlakte hebben) is nu te vertalen in een algebraïsch probleem: $x$ op te lossen

[7] Zie voor een uitvoeriger beschouwing over de structuur van de *Géométrie* de bijdrage van H.J.M. Bos aan deze bundel

[8] F. van Schooten; (ed.) *Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem ... in Latinam versa, & Commentariis illustrata ...* (2 delen), Amsterdam 1659–1661; deel 1 p.149.




Figuur 6: de figuur bij het probleem, *Geometria* 1659 p.149

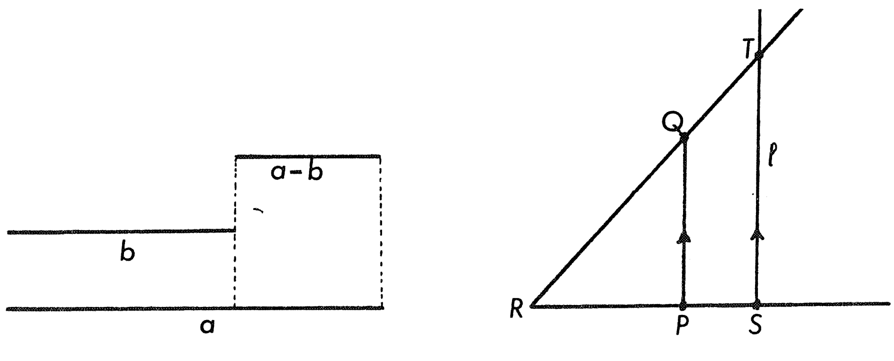
uit

$$(a + b + x)x + (b + x)^2.$$

Dit geeft

$$x = \frac{b^2}{a - b}.$$

Tenslotte moet deze uitdrukking voor $BD$ nog in constructiestappen vertaald worden. Van Schooten merkt daartoe op dat $x$ moet voldoen aan de evenredigheid $x : b = b : (a - b)$, zodat een constructie met twee gelijkvormige driehoeken voldoet (zie fig.7). Dat zou als volgt kunnen (Van Schooten voert de constructie zelf niet uit). Eerst wordt $\triangle PQR$ getekend met zijden $PR = a - b$ en $QR = b$ ($PQ$ vrij). Vervolgens wordt op $PR$ (of, als $b > \frac{1}{2}a$, op zijn verlengde) het




Figuur 7: Meetkundige constructie van $x$

punt $S$ genomen zodat $RS = b$ en door $S$ wordt evenwijdig aan $PQ$ een lijn $\ell$ getekend, die $RQ$ (of zijn verlengde) snijdt in $T$. Dan voldoet $RT = x$ aan $x : b = b : (a - b)$. Tot zover Van Schootens voorbeeld, terug naar 1637.

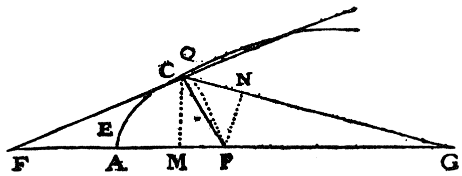
Descartes had in zijn recept gesteld (*Géométrie* p.300): "Men moet evenveel vergelijkingen vinden als men onbekende lijnstukken heeft aangenomen." Het door Van Schooten gegeven voorbeeld voldoet daaraan, maar wat te doen als er meer onbekenden zijn dan vergelijkingen? Daarop had Descartes als antwoord (p.300): "Dan kan men naar believen bekende lijnstukken nemen voor alle onbekenden waarmee geen vergelijking correspondeert". Als het probleem bijvoorbeeld leidt tot één vergelijking in twee onbekenden, die in navolging van Descartes sinds 1637 $x$ en $y$ genoemd worden, dan mag men voor $y$ zelf een lijnstuk nemen en daarna ligt $x$ door de vergelijking vast (zo doet Descartes het althans zelf, p.313).
De volgende, volstrekt nieuwe stap in de *Géométrie* is het idee dat een paar lijnstukken $x$ en $y$ ten opzichte van coördinaatassen ("lignes principales") een punt bepaalt, en dat de oplossingen van een vergelijking in twee onbekenden een kromme opleveren: "Wanneer men achtereenvolgens oneindig veel verschillende grootheden neemt voor het lijnstuk $y$, dan zal men er ook oneindig veel vinden voor het lijnstuk $x$ , & zo zal men een oneindige veelheid aan verschillende punten hebben (...) door middel waarvan men de gevraagde kromme zal beschrijven". (p.313) Daarmee kreeg het begrip 'kromme' de nieuwe inhoud van meetkundige interpretatie van een vergelijking in twee onbekenden.
Maar Descartes ging verder. Want krommen hadden al een lange geschiedenis, en ook daarin speelden constructieproblemen een belangrijke rol. Een daarvan boeide Descartes in hoge mate, en wel de constructie van normalen. Hij was namelijk zeer geïnteresseerd in geometrische optica (een verhandeling daarover, onder de titel *Dioptrique*, verscheen in 1637, samen met de *Géométrie* en nog een stuk, als aanhangsel bij Descartes' filosofische hoofdwerk *Discours de la méthode*) en in de doorgang van lichtstralen door lenzen. De constructie van de gebroken lichtstraal vereiste nu juist de constructie van de normaal op het lensoppervlak. Opnieuw paste Descartes algebra toe om dit in principe meetkundige constructieprobleem te analyseren. Want de weg van 'vergelijking in $x$ en $y$' naar 'kromme' die hij net ontdekt had, kon ook in omgekeerde richting afgelegd worden. Als hij over een kromme iets wilde weten, zo zag Descartes in, dan kon hij nu ook gebruik maken van haar vergelijking.
Eigenlijk is het onvoorstelbaar dat al deze nieuwe ideeën in één tekst in één lange aaneenschakeling op elkaar volgden. Voor de lezer van vandaag, die opgegroeid is met de koppeling van algebra en meetkunde, is de nu volgende bepaling van de normaal aan de ellips (hopelijk) goed te volgen, en misschien maakt ze alleen een wat omslachtige indruk. Maar welke indruk zal ze op een lezer hebben gemaakt voor wie algebra en meetkunde tot 1637 twee verschillende werelden waren geweest?

## 4.2 Het probleem

Bron: René Descartes, 'La Géométrie', essay (pp.297-413) bij *Discours de la méthode* ..., Leiden (Jean le Maire) 1637, herdrukt in facsimile met Engelse vertaling in [Smith & Latham 1954]. Geciteerd zijn fragmenten van pp.342–343 en 345–348.

"Algemene methode om de rechte lijnen te vinden die de gegeven krommen of hun raaklijnen onder een rechte hoek snijden.

Zij $CE$ de kromme; gevraagd wordt een rechte lijn te trekken door het punt $C$, die rechte hoeken met haar maakt. Ik neem aan dat het gevraagde reeds uitgevoerd is, & dat $CP$ de gezochte lijn is, die ik doortrek tot aan het punt $P$, waar ze de rechte lijn $GA$ ontmoet, die

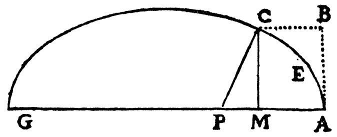



Figuur 8: de bijbehorende figuur uit de *Géométrie*, p.342

volgens mijn aanname dienst doet als referentielijn voor alle lijnstukken van de kromme $CE$: zodat ik met $MA$ (of $CB$) $= y$, & $CM$ (of $BA$) $= x$, een of andere vergelijking heb, die de betrekking uitdrukt die tussen $x$ en $y$ bestaat. Verder maak ik $PC = s$, & $PA = v$, ofwel $PM = v - y$, & wegens de rechthoekige driehoek $PMC$ heb ik dat $ss$, hetgeen het kwadraat van de hypotenusa is, gelijk is aan $xx + vv - 2vy + yy$, die de kwadraten van de twee [rechthoeks]zijden zijn. Dat wil zeggen, ik heb $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ ofwel $y = v + \sqrt{ss - xx}$, en met behulp van deze vergelijking elimineer ik uit de andere vergelijking die voor mij de betrekking uitdrukt die alle punten van de kromme $CE$ hebben ten opzichte van de punten van de rechte $GA$, een van de twee onbepaalde grootheden $x$ of $y$. Hetgeen gemakkelijk te doen is door overal $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ te substitueren voor $x$, en het kwadraat van deze som voor $xx$, & zijn derde macht voor $x^3$, & net zo voor de overige machten, als het er om gaat $x$ te elimineren; ofwel [p.343] als het om $y$ gaat, door daarvoor $x + \sqrt{ss - xx}$ te substitueren, of het kwadraat of de derde macht daarvan, etc. voor $yy$ of $y^3$ etc. Zodat er steeds na afloop één vergelijking overblijft waarin nog maar één enkele onbepaalde, $x$, of $y$, voorkomt.

Zoals wanneer $CE$ een Ellips is, en wanneer $MA$ het stuk van zijn middellijn is, waarbij $CM$ als ordinaat hoort, en die $r$ heeft

> als latus rectum en $q$ als latus transversum, dan heeft men wegens Stelling 13 van Boek I van Appolonius $xx = ry - \frac{r}{q}yy$, en als men




Figuur 9: de bijbehorende figuur uit de *Géométrie*, p.343.

> daaruit $xx$ elimineert blijft over $ss - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q}yy$, ofwel $yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ gelijk aan niets. Want het is hier beter om de som als een geheel te beschouwen dan hem in de vorm te brengen waarin de ene kant gelijk is aan de andere".

Vervolgens voert Descartes dit eliminatieproces ook uit voor twee andere krommen (pp.344-345) en dan beschrijft hij wat er met de vergelijking moet gebeuren die na de zojuist beschreven eliminatie van $x$ of $y$ resulteert (p.345):

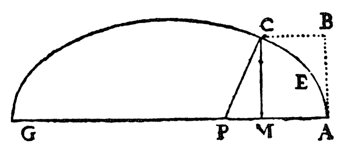
> "Welnu, nadat men een dergelijke vergelijking heeft gevonden, moet men die — in plaats van haar te gebruiken om de grootheden $x$, of $y$, of $z$ aan de weet te komen, die reeds gegeven zijn, omdat het punt $C$ gegeven is — gebruiken om $v$, of $s$, te vinden, die immers het gevraagde punt $P$ bepalen. En hiertoe moet men zich realiseren dat, indien dit punt $P$ voldoet aan de eis, de cirkel waarvan $P$ het middelpunt zal zijn, & die door het punt $C$ zal gaan, op die plaats de kromme $CE$ zal raken zonder haar te snijden: maar dat als dit punt $P$ ook maar iets dichter bij of iets verder van het punt [p.346] $A$ ligt dan zou moeten, de cirkel de kromme niet alleen in het punt $C$ zal snijden maar noodzakelijk ook in een ander punt".

Hierna betoogt Descartes dat de twee gevallen (de cirkel raakt de kromme in $C$ of de cirkel snijdt de kromme in $C$ en heeft in de omgeving van $C$ nog een snijpunt met de kromme) weerspiegeld worden in de structuur van de resulterende vergelijking. Alleen als de resulterende vergelijking een van de twee gegeven coördinaten van $C$ als dubbelwortel heeft, raakt de cirkel de kromme in $C$ en is $CP$ de normaal, en anders snijdt de cirkel de kromme in $C$. Daarmee is de normaalconstructie een algebraïsch probleem geworden: het bepalen van de parameters $v$ en $s$ zodat de resulterende vergelijking een gegeven getal als dubbelwortel heeft. Terug naar de *Géométrie* (p.347):

"Voorts moet men bedenken dat een vergelijking, als er twee gelijke wortels in voorkomen, van dezelfde gedaante moet zijn als de vergelijking die men krijgt door de grootheid die men als onbekende heeft aangenomen min de bekende grootheid die daaraan gelijk is met zichzelf te vermenigvuldigen, en die men vervolgens - als deze laatste uitdrukking niet hetzelfde aantal dimensies [dwz dezelfde graad] heeft als de voorgaande [dwz de resulterende vergelijking] vermenigvuldigt met een andere veelterm die het ontbrekende aantal dimensies heeft. Zo kan men dan tenslotte afzonderlijke vergelijkingen opstellen tussen elk van de termen van de ene uitdrukking, & elk van de termen van de andere.
Zoals ik bijvoorbeeld zeg dat de eerste hieronder gevonden vergelijking,[9] te weten

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$$

dezelfde gedaante moet hebben als die die ontstaat door $e$ gelijk aan $y$ te maken, & door $y - e$ met zichzelf te vermenigvuldigen, waaruit ontstaat $yy - 2ey + ee$, zodat men afzonderlijk elk van hun termen kan vergelijken. Omdat de eerste term, die $yy$ is, in beide vergelijkingen hetzelfde is, is de tweede, die in de ene $\frac{qry-2qvy}{q-r}$ is, gelijk aan de tweede van de andere die $-2ey$ is. Als men daaruit de grootheid $v$ wil bepalen, die voor het lijnstuk $PA$ staat, dan heeft men $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ofwel (omdat we $e$ gelijk aan $y$ hebben




Figuur 10: de bijbehorende figuur uit de *Géométrie*, p.347

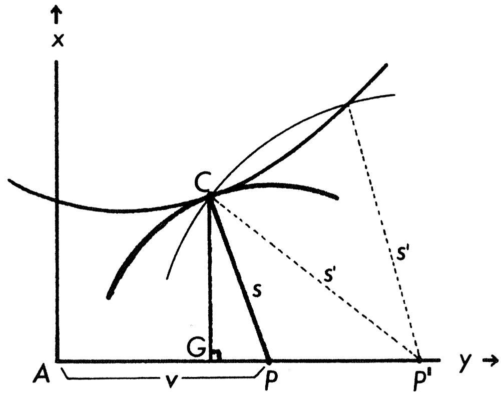
verondersteld) $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. En [p.348] op dezelfde wijze zou men ook $s$ kunnen vinden via de derde term $ee = \frac{qvv-qss}{q-r}$, maar omdat de grootheid $v$ het punt $P$ voldoende bepaalt en $P$ het enige is wat we zoeken, hoeft men niet verder om nog verder te gaan".

[9]Hoewel het tweede lid ontbreekt gebruikt Descartes hier toch de term "équation".

## 4.3 Commentaar

In een enigszins gemoderniseerde parafrase komt Descartes' methode op het volgende neer. Hij heeft een algebraïsche kromme $K$ gegeven door de vergelijking $f(x,y) = 0$, en een punt $C(x_0, y_0)$ op $K$, waarin hij de normaal aan $K$ wil bepalen.

Hij bekijkt de verzameling cirkels die door het vaste punt $C$ gaan en die hun




Figuur 11: Descartes' normalenmethode

middelpunt op de $y$-as[10] hebben (zie fig. 11).

Laat $P(0, v)$ het middelpunt van zo'n cirkel zijn en $PC = s$ de straal. Als $CP$ de normaal is moeten $v$ en $s$ zodanig zijn dat het stelsel

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x^2 + (y-v)^2 = s^2 \end{cases} \qquad (I)$$

twee samenvallende snijpunten $(x_0, y_0)$ heeft. Als dus, zoals Descartes doet, $x$ uit (I) geëlimineerd wordt, dan moet de resulterende vergelijking in $y$ het gegeven getal $y_0$ als dubbelwortel hebben. Op grond daarvan moeten $v$ en $s$ bepaald worden.

Laat na eliminatie van $x$

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0 \qquad (II)$$

de uit (I) resulterende vergelijking zijn. Deze heeft een dubbelwortel $y = y_0$ (Descartes schrijft $y = e$, en bij hem is $e$ dus één verder vast te houden waarde

[10] In Descartes' eigen figuur, fig. 9, is $A$ de oorsprong en lijn $AG$ (de horizontale as van de ellips) de positieve $y$-as. Descartes had nog geen conventies over de oriëntatie van het assenstelsel, dat bij hem ook niet noodzakelijk rechthoekig is.

die $y$ kan aannemen. De notatie $e$ voor het grondtal van de natuurlijke logaritme dateert pas uit de achttiende eeuw) en moet dus van de gedaante

$$(y-y_0)^2P(y)=0 \qquad (III)$$

zijn. In (III) is $P$ een veelterm van graad $n-2$, waarin de kopcoëfficiënt 1 is en de overige $n-2$ coëfficiënten nog niet vastliggen. Door nu de $n$ coëfficiënten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ van (II), waarin de twee parameters $s$ en $v$ voorkomen, te vergelijken met de overeenkomstige coëfficiënten van (III), waarin de $n-2$ nog onbekende coëfficiënten van $P$ voorkomen, vindt Descartes een stelsel van $n$ vergelijkingen in $n$ onbekenden. Omdat de plaats van $P$ alleen van $v$ afhangt hoeft uit dit stelsel alleen $v$ opgelost te worden.

Om dit principe op de ellips toe te passen stelde Descartes een vergelijking van de ellips op. De vergelijking $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, is een directe vertaling van een door Apollonius (c.262 - c.190 v. Chr) in meetkundige termen geformuleerde eigenschap van de ellips. De 'latus rectum' $r$ en 'latus transversum' $q$ zijn de lijnstukken die in de klassieke meetkundige definitie de ellips vastleggen. Het voert te ver om hier verder op de klassieke theorie van kegelsneden in te gaan[11] maar het zal duidelijk zijn dat de vanzelfsprekendheid waarmee Descartes de vergelijking poneert hem door veel van zijn lezers niet in dank afgenomen zal zijn.

De stappen zijn nu duidelijk:

$$\begin{cases} x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \\ x^2+(y-v)^2 = s^2 \end{cases} \qquad (I)$$

heeft een dubbele oplossing $(x_0, y_0)$. Eliminatie van $x$ uit (I) geeft

$$y^2 + \frac{qr-2qv}{q-r}y + \frac{qv^2-qs^2}{q-r} = 0 \qquad (II)$$

en omdat (II) een dubbele wortel $y_0$ heeft, heeft (II) de gedaante

$$(y-y_0)^2 = y^2 - 2y_0y + y_0^2 = 0 \qquad (III).$$

Vergelijking van de coëfficiënten van $y$ in (II) en (III) geeft

$$\frac{qr-2qv}{q-r} = -2y_0,$$

waaruit $v$ bepaald moet worden:

$$v = y_0 - \frac{r}{q}y_0 + \frac{r}{2}.$$

Eigenlijk zou nu de normaal nog geconstrueerd moeten worden, maar dat doet Descartes niet meer, want "het is altijd gemakkelijk om ze [dwz. de constructies] te vinden" (p.351).

[11] Zie voor een uitgebreidere inleiding bijvoorbeeld [Grootendorst 1988], pp.49–63

# 5 1641-1650: Frans van Schooten Jr over de normaal aan de conchoïde.

## 5.1 Achtergrond

Descartes sprak in de *Géométrie* bij herhaling in raadselen. Volgens eigen zeggen deed hij dat bewust, getuige bijvoorbeeld de fameuze slotzin van de *Géométrie* (er zouden talrijke andere voorbeelden aan toe te voegen zijn): "En ik hoop dat volgende generaties [Descartes: "nos neveux"] me dankbaar zullen zijn, niet alleen voor de zaken die ik hier uiteengezet heb; maar ook voor die die ik hier bewust heb weggelaten om hun het plezier te laten ze zelf te ontdekken". (p.413) Het lijkt onwaarschijnlijk dat deze wens om volgende generaties te stimuleren Descartes' enige motief geweest is voor alle weglatingen en voor de complexe structuur van zijn werk. Een zekere mate van trots en duivelse pret (in de zin van 'voor mij is dit natuurlijk geen probleem, maar jij, lezer, bent een knappe jongen (m/v) als je erachter komt hoe deze vork in de steel zit') zal hem waarschijnlijk niet vreemd geweest zijn. Wat Descartes bewogen heeft om de *Géométrie* op deze manier te schrijven doet echter niet ter zake. Aan het belang van het werk doet het niets af, en wel vaker (zie ook de paragrafen 9 en 10) moesten grootse ideeën eerst voor het grote publiek toegankelijk gemaakt worden voordat ze daar ingang vinden.

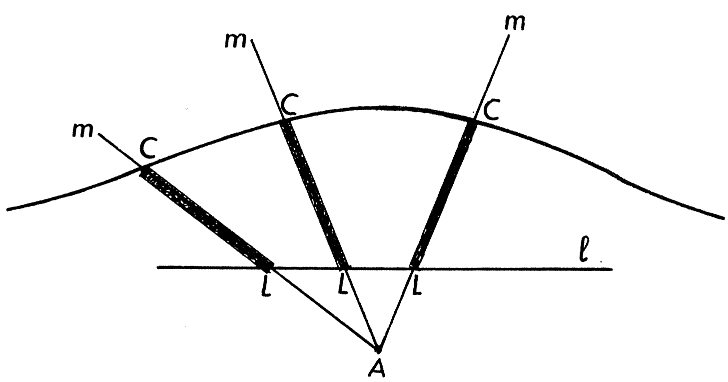
Het grote publiek heeft de rijkdom aan nieuwe ideeën van Descartes leren kennen door de werken van Frans van Schooten Jr. Hij werd in 1615 of 1616 in Leiden geboren en studeerde onder meer bij zijn vader. Tijdens zijn studie leerde hij Descartes kennen, die hem als tekenaar inschakelde bij de uitgave van de drie essays bij de *Discours de la méthode.* In 1635 reeds nam Frans Jr tijdens ziekte van zijn vader diens lessen aan de Ingenieursschool waar. Na een reis door Europa (1641-1643), die hem in contact bracht met verschillende buitenlandse wiskundigen en die hem in staat stelde om in Parijs manuscripten van Fermat in te zien en te copiëren, gaf Frans Jr opnieuw lessen aan de Ingenieursschool. Ook gaf hij privé-onderwijs aan de broers Constantijn en Christiaan Huygens. In 1646 volgde hij aan de Ingenieursschool zijn vader op, die in 1645 overleden was.

Van Schooten was de grote vertolker van Descartes' werk. Al voor de publikatie had hij de *Géométrie* leren kennen, en daarna begon hij stap voor stap de problemen te overwinnen die het werk stelde. Enerzijds zag hij de grote kracht van de *Géométrie* in, maar anderzijds merkte hij dat de vele hiaten, de visionaire elementen en de onregelmatige opbouw de overdracht van de inhoud niet bevorderden. Op twee verschillende niveaus heeft hij zijn leven lang gewerkt om dat gemis te compenseren. In de eerste plaats werkte hij aan de wiskundige inhoud en in de tweede plaats droeg hij het belang ervan in zijn omgeving uit, (modern gezegd deed hij aan verbetering van het produkt in combinatie met een goede marketing). Zijn werk aan de wiskundige inhoud van de *Géométrie* had vier aspecten:

- Van Schooten vertaalde de *Géométrie* uit het Frans in het Latijn en vergrootte daarmee internationaal gezien de toegankelijkheid aanzienlijk,
- hij schreef een commentaar op de inhoud. Daarin lichtte hij passages toe (we hebben dat in §4.1 reeds gezien), hij leverde ontbrekende bewijzen, bracht vereenvoudigingen en verbeteringen aan, verwees naar relevante literatuur en droeg bij tot de fundering van een aantal begrippen,
- hij ontwikkelde een aantal verspreid in de *Géométrie* voorkomende theorieën op systematische wijze en
- hij exploreerde de nieuwe mogelijkheden die Descartes' werk bood. Hij zocht naar generalisaties, beantwoordde open vragen, wierp nieuwe problemen op en breidde de theorie uit.

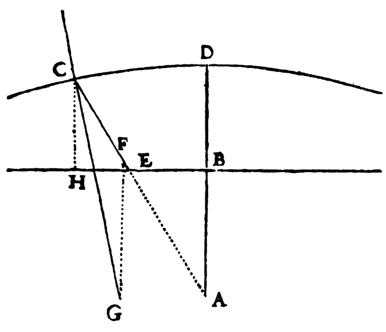
Deze werkzaamheden resulteerden in 1649 in een Latijnse editie van de *Géométrie*, aangevuld met commentaar. In 1659 en 1661 verscheen daarvan in twee delen een nieuwe uitgave, waarin de commentaren uitgebreid waren, en waarin werk van een aantal van Van Schootens studenten (Van Heuraet, Hudde, Huygens en De Witt) opgenomen was. Deze laatste editie die in 1683 opnieuw uitgebracht werd, diende als studiemateriaal voor de nieuwe generatie wiskundigen die in het laatste kwart van de zeventiende eeuw met de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening het voortouw overnamen, en was kortom een van de fundamentele wiskundeteksten van de eeuw.
Van Schooten overleed in 1660. Hij werd opgevolgd door zijn halfbroer Pieter, die echter niet in staat was om op de door Frans Jr gelegde fundamenten voort te bouwen. In 1660 was de wiskunde in de Nederlanden (althans: in de kringen rond Frans Jr) klaar voor de stap naar de differentiaaltekening, en in 1670 was er niet veel meer van over dan de praktische wiskunde uit het begin van de eeuw.

Het probleem dat Frans Jr in 1649 uitwerkt betreft een hiaat in de *Géométrie*. Descartes had voor drie verschillende krommen (waaronder de ellips, zie §4) de ligging van de normaal algebraïsch bepaald. De meetkundige constructie van de normalen had hij als "altijd gemakkelijk" (p.351) afgedaan en niet uitgevoerd. Aansluitend daaraan gaf hij voor een vierde kromme wèl de meetkundige constructie van de normaal, maar dit keer zonder de algebraïsche afleiding erbij te vermelden, die naar zijn zeggen wel binnen het bereik van zijn lezers zou moeten liggen.
De kromme is de conchoïde van Nicomedes (geb. c. 270 v. Chr.). De conchoïde kan getekend worden met een apparaatje waaruit de definitie direct blijkt (zie fig. 12). Het bestaat uit een lat $\ell$ die op het vel van tekening ligt, en een tweede lat $m$ die kan draaien rond het punt $A$, waarin het ene uiteinde van $m$ bevestigd




Figuur 12: de conchoïde

is. Langs $m$ beweegt een schuifje $LC$ waarvan het ene uiteinde $L$ lat $\ell$ volgt. De stift in het andere uiteinde $C$ tekent de conchoïde. De positie van $A$ (de pool) ten opzichte van lat $\ell$ (de asymptoot) en de lengte van het schuifje $LC$ (het interval) leggen de conchoïde vast. In de Oudheid bestond belangstelling voor de conchoïde omdat allerlei constructies die men met passer en liniaal niet direct kon vinden met behulp van een conchoïde-trekker wel uitvoerbaar waren (de driedeling van de hoek en de verdubbeling van de kubus, bijvoorbeeld[12]). Descartes beschreef in de *Géométrie* (pp.351-352) de constructie van de normaal in een punt $C$ van de conchoïde met pool $A$, asymptoot $BH$ en interval $BD = EC$, waarbij $BD$ loodrecht op de asymptoot staat en $E$ het snijpunt is van de asymptoot met $CA$ (zie fig. 13). Pas, zei hij, op $CA$ lijnstuk $CF$ af




Figuur 13: de normaal in $C$ aan de conchoïde ; *Géométrie* p.351

dat even lang is als $CH$, de afstand van $C$ tot de asymptoot. Zet vervolgens,

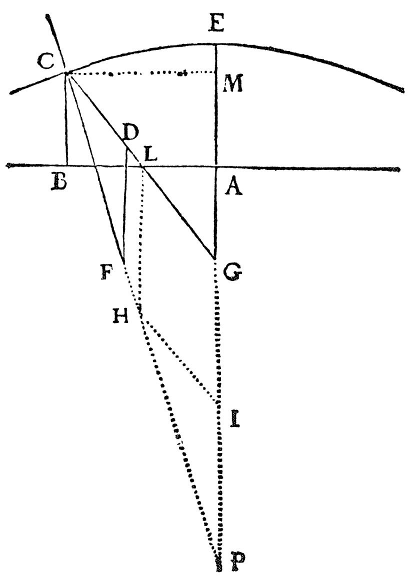
[12]Zie [Thomas 1967/8], deel 1 pp.297-309

loodrecht op de asymptoot lijnstuk $FG = EA$ uit. Dan snijdt $CG$ de conchoïde loodrecht. De keuze van de conchoïde past volkomen in Descartes' opzet om aan de hand van problemen uit de oudheid te laten zien dat hij met zijn nieuwe methode echt verder kwam dan "Les Anciens". En inderdaad was er, zoals we zullen zien, een knappe jongen nodig om het hiaat op te vullen.

## 5.2 Het probleem

Bron: F. van Schooten (ed.), *Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem Cum Notis Florimondi de Beaune ... In linguam Latinam versa, & commentariis illustrata ...*, Leiden (Jean le Maire) 1649, pp. 219-223
Geraadpleegde exemplaren: UB Leiden: 535 F 14, UB Utrecht; 596 E 1

Van Schooten beschouwt de conchoïde met pool $G$, asymptoot $AB$ en interval $AE = LC$ (zie fig. 14), en herhaalt eerst in cursief schrift de tekst van Descartes die hij gaat commentariëren:




Figuur 14. De conchoïde in de *Geometria* 1649, p.219. Van Schooten gebruikt andere letters dan Descartes!

> *"Men behoeft slechts op rechte $CG$ lijnstuk $CD$ te nemen, gelijk aan $CB$, die loodrecht op $AB$ staat; en vervolgens uit punt $D$ lijnstuk $DF$ te trekken, evenwijdig aan $AG$, en gelijk aan $GL$: op deze wijze zal men het punt $F$ verkrijgen, waardoor de gevraagde lijn $CP$* [de normaal] *getrokken zal kunnen worden".*

Het probleem is dus te bewijzen dat deze constructie inderdaad de normaal oplevert. Van Schooten[13]:

> "Omdat in dit voorbeeld de berekening veel korter is als het punt $P$, waardoor de gevraagde lijn $CP$ moet gaan, op rechte $AG$ gezocht wordt, dan wanneer het op lijn $AB$ gezocht wordt, en omdat bovendien de aangegeven constructie daar gemakkelijker uit kan worden aangetoond, daarom heb ik besloten de kortere berekening hier toe te voegen, en de constructie aan de hand daarvan toe te lichten.
> Zij dus $GA = b$, $AE = LC = c$, $CM = AB = x$, $MA = BC = y$, $AP = v$, & $PC = s$; dan zal voor het gehele lijnstuk $PM$ gelden: $PM = v + y$. Als het kwadraat daarvan, $vv + 2vy + yy$ afgetrokken wordt van het kwadraat van lijnstuk $PC = ss$, dan zal het kwadraat van lijnstuk $CM$ overblijven: $ss - vv - 2vy - yy$. En omdat $CM = x$ en zijn kwadraat $= xx$ zal gelden: $xx = ss - vv - 2vy - yy$.
> Op dezelfde wijze zal, als in de rechthoekige driehoek $BCL$ van het kwadraat van $LC(= cc)$ het kwadraat van $BC(= yy)$ afgetrokken wordt het kwadraat van rechte $BL$ overblijven $= cc - yy$, en daarom is $BL = \sqrt{cc - yy}$. Als die van $AB = x$ afgetrokken is zal overblijven $AL = x - \sqrt{cc - yy}$. [p.220]
> Verder zijn de driehoeken $CMC$ & $GAL$ gelijkvormig, zodat $GM$ tot $MC$ (ofwel $b+y$ tot $x$) staat als $GA$ tot $AL$ (ofwel $b$ tot $x - \sqrt{cc - yy}$). Daarom zal het produkt van de uiterste termen gelijk zijn aan het produkt van de middelste termen, namelijk
>
> $$bx + xy - \sqrt{b^2c^2 + 2bc^2y + (c^2 - b^2)y^2 - 2by^3 - y^4} = bx$$
>
> & nadat aan beide kanten $bx$ weggehaald is geeft dit
>
> $$xy = \sqrt{b^2c^2 + 2bc^2y + (-b^2 + c^2)y^2 - 2by^3 - y^4}.$$
>
> Om vervolgens het wortelteken te doen verdwijnen, kwadratere men beide leden, en om $xx$ te elimineren substituere men in plaats daarvan $ss - vv - 2vy - yy$; dit zal opleveren de vergelijking
>
> $$ssyy - vvyy - 2vy^3 - y^4 = b^2c^2 + 2bc^2y + (-b^2 + c^2)y^2 - 2by^3 - y^4.$$

[13] In het volgende citaat is het teken $\propto$ ('is gelijk') vervangen door = en bij een produkt van twee factoren waarvan er een uit meer termen bestaat is de haakjes-notatie gebruikt, terwijl Van Schooten de termen van zo'n factor onder elkaar plaatst. Van Schootens $\begin{matrix} -2ef \\ +e^2 \end{matrix}\ y$ wordt hier dus weergegeven als $(-2ef + e^2)y$. De notaties $aa$ en $a^2$ worden in het origineel beide gebruikt, en zijn hier conform het origineel overgenomen.

Als daarin aan beide kanten $y^4$ wordt verwijderd, en als de termen zo overgebracht worden dat de termen met $y^3$ aan de ene kant komen en de overige termen aan de andere kant, en als tenslotte beide zijden door $2b - 2v$ gedeeld worden, dan zal de volgende vergelijking ontstaan:

$$y^3 = \frac{1}{2b - 2v}\left\{(-b^2 + c^2 - s^2 + v^2)y^2 + 2bc^2y + b^2c^2\right\}.$$

Verander, omdat $2v$ groter is dan $2b$, alle tekens + & −, en schrijf

$$y^3 = \frac{1}{2v - 2b}\left\{(b^2 - c^2 + s^2 - v^2)y^2 - 2bc^2y - b^2c^2\right\}$$

en als vervolgens alle termen naar een kant overgebracht zijn, zal gelden[14] :

$$y^3 + \frac{1}{2v - 2b}\left\{(-b^2 + c^2 - s^2 + v^2)y^2 + 2bc^2y + b^2c^2\right\} = 0 \ [p.221]$$

Deze vergelijking laat zien welke betrekking de punten van de Conchoïde $CE$ hebben tot de punten van rechte $BA$. Omdat in de vergelijking $y$ gegeven is, omdat immers punt $C$ gegeven is, blijft over om de grootheden $v$ & $s$ [bij Van S. staat $v$ & $y$] te vinden die het gezochte punt $P$ bepalen. Hiertoe stel ik een andere vergelijking op, die even veel dimensies heeft, en die twee waarden voor $y$ oplevert die gelijk zijn aan elkaar. Ik neem daartoe $y = e$, ofwel $y - e = 0$, hetgeen gekwadrateerd geeft $yy - 2ey + e^2 = 0$, een vergelijking die twee gelijke wortels heeft. Die vermenigvuldig ik vervolgens met $y + f$, om haar te laten opklimmen tot een nieuwe vergelijking met drie dimensies, en van dezelfde gedaante als de voorgaande, & er ontstaat de vergelijking $y^3 + (f - 2e)y^2 + (-2ef + e^2)y + e^2f = 0$. De termen daarvan vergelijk ik een voor een met de termen van de voorgaande

$$y^3 + \frac{1}{2v - 2b}\left\{(-b^2 + c^2 - s^2 + v^2)y^2 + 2bc^2y + b^2c^2\right\} = 0$$

En omdat beide vergelijkingen dezelfde eerste term hebben, vergelijk ik de tweede met de tweede, en de overige termen met de overige. We stellen dus $\frac{b^2c^2}{2v-2b} = e^2f$, we delen beide kanten door $e^2$, en er komt $f = \frac{b^2c^2}{2ve^2-2be^2}$. Op gelijke wijze onstaat $\frac{2bc^2}{2v-2b}y = (-2ef+e^2)y$, ofwel $\frac{bc^2}{v-b} = -2ef + e^2$, en als daarin voor $f$ de eerder gevonden waarde $\frac{b^2c^2}{2ve^2-2be^2}$ wordt ingevuld, dan heeft men $\frac{bc^2}{v-b} = \frac{-b^2c^2}{2ve-2be} + e^2$, ofwel met gelijke noemers $\frac{-bc^2e}{ve-be} = \frac{b^2c^2+be^3-e^3v}{ve-be}$. Nu laten we de noemers

[14]In het origineel staat in de nu volgende vergelijking als beginterm ten onrechte $y^2$.

> weg, brengen de termen zodanig over dat de term $e^3v$ aan de ene kant en de overige termen aan de andere [p.222] kant komen en we delen beide leden door $e^3$. Het resultaat zal zijn $v = b + \frac{bcc}{ee} + \frac{bbcc}{e^3}$. Ofwel, door $y$ te substitueren op de plaats van $e$, $v = b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$."

Hiermee heeft Van Schooten het algebraïsche deel van Descartes' normalenmethode uitgevoerd. Hij moet nu nog bewijzen dat de gevonden uitdrukking voor $v$ correspondeert met Descartes' meetkundige constructie. Zie voor deze laatste stap §5.3.

## 5.3 Commentaar

Het is een stevig hiaat dat Van Schooten hier opvult. Eerst moet hij de vergelijking van de conchoïde $K$ afleiden. Hij vindt

$$x^2y^2 = (c^2 - y^2)(y + b)^2.$$

(deze vergelijking laat ook punten $(x, y)$ toe met $y < 0$. De conchoïde heeft namelijk nog een tak onder de $x$-as — het schuifje $LC$ is dan naar de pool toegericht — maar deze tak laten Descartes en Van Schooten buiten beschouwing). Met $P(0, -v)$ als middelpunt en $CP = s$ als straal heeft hij de cirkel $x^2 + (y + v)^2 = s^2$, zodat het stelsel

$$\begin{cases} x^2y^2 = (c^2 - y^2)(y + b)^2 \\ x^2 + (y + v)^2 = s^2 \end{cases} \qquad (I)$$

de coördinaten $(x_0, y_0)$ van het gegeven punt $C$ als dubbele wortel heeft. Verder volgt hij het in §4.3 beschreven procedé. Eliminatie van $x$ uit (I) resulteert in

$$y^3 + \frac{1}{2v - 2b}\{(c^2 - b^2 + v^2 - s^2)y^2 + 2bc^2y + b^2c^2\} = 0 \qquad (II),$$

en deze vergelijking heeft $y_0$ als dubbelwortel. Ze moet dus vergeleken worden met

$$(y - y_0)^2 \cdot P(y) = 0,$$

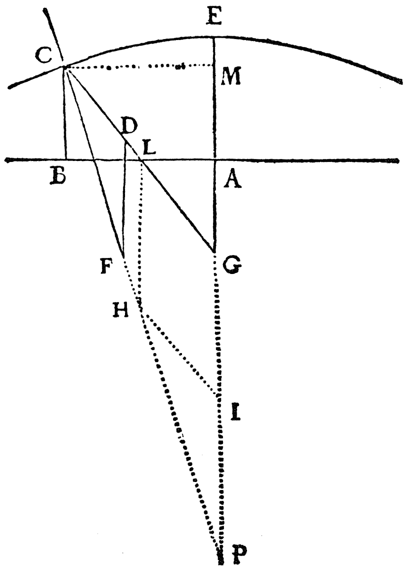
en om de "dimensies" gelijk te maken neemt Van Schooten $P(y) = y + f$ ($f$ nog nader te bepalen). Vergelijking (II) moet dus identiek zijn aan

$$(y - y_0)^2(y + f) = y^3 + (f - 2y_0)y^2 + (-2y_0f + y_0^2)y + y_0^2f = 0 \qquad (III)$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van (II) en (III) leidt tot:

$$v = b + \frac{bc^2}{y_0^2} + \frac{b^2c^2}{y_0^3}. \qquad (IV)$$

Deze uitdrukking moet tenslotte nog meetkundig geïnterpreteerd worden. Van Schooten construeert eerst het punt $F$ zoals Descartes had aangegeven (pas op




Figuur 15. Constructie van $v = AP$; *Geometria* 1649, p.219

$CG$ lijnstuk $CD$ af met $CD = CB = y_0$ en zet $DF = GL$ uit evenwijdig aan $AG$; zie fig.15). Vervolgens verlengt hij $CF$ tot deze de $y$-as (lijn $AG$) snijdt in $P$. Door $L$ trekt hij een lijn evenwijdig aan de $y$-as, die $CP$ snijdt in $H$ en door $H$ een lijn evenwijdig aan $CG$ die de $y$-as snijdt in I.
$GL$ is via de gelijkvormigheid $\triangle BCL \sim \triangle AGL$ te bepalen:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{AG}{BC} \Leftrightarrow \frac{GL}{c} = \frac{b}{y_0}, \text{ dus } GL = \frac{bc}{y_0}.$$

$LH$ en $IP$ volgen uit $\triangle CDF \sim \triangle CLH \sim \triangle HIP$, waarin $DF = GL = HI$ en $CD = CB$ wegens de constructie. Dat geeft

$$\frac{DF}{CD} = \frac{LH}{CL} = \frac{IP}{HI} \Leftrightarrow \frac{GL}{CB} = \frac{LH}{CL} = \frac{IP}{GL}$$

en dus

$$LH = \frac{bc^2}{y_0^2} \text{ en } IP = \frac{GL}{CL} \cdot LH = \frac{b}{y_0} \cdot LH = \frac{b^2c^2}{y_0^3}.$$

$AP$ is dus in $b, c$ en $y_0$ uit te drukken:

$$AP = AG + GI + IP = AG + LH + IP = b + \frac{bc^2}{y_0^2} + \frac{b^2c^2}{y_0^3},$$

en dit komt overeen met de in (IV) gevonden uitdrukking voor $v$. $AP$ is dus de normaal, en hiermee sluit het bewijs.

In de 1659-editie van de *Geometria* breidde Van Schooten zijn commentaar nog sterk uit. De stap van vergelijking (II) naar vergelijking (IV) kon sterk vereenvoudigd worden door de regel van Hudde toe te passen die een eenvoudig criterium gaf voor het herkennen van een dubbele wortel in een vergelijking[15] .

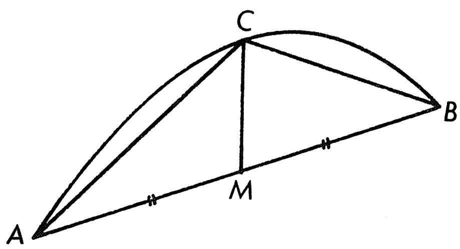
Van Schooten heeft de *Géométrie* geordend en er leerbare wiskunde van gemaakt. Niet groots, wel 'knap'.

[15] Zie daarover verder: [Grootendorst 1988], pp. 77–106 en [Van Maanen 1987], pp.76-80, want dat kwam pas een decennium later.

# 6 1651-1660: Huygens bepaalt de oppervlakte onder de cissoïde

## 6.1 Achtergrond

Ook de integraalrekening had in de zeventiende eeuw uitgebreide voorlopers, die zelf weer voortbouwden op technieken uit de Griekse oudheid voor het bepalen van oppervlakte en inhoud. Zeer bedreven in deze technieken was Christiaan Huygens (1629-1695). Zijn vader, de dichter-staatsman Constantijn Huygens, had hem in samenwerking met een aantal privé-leraren onderwezen. Voor de wiskunde waren dat Stampioen en Frans van Schooten Jr. Bij deze laatste studeerde Christiaan later ook in Leiden. Zo raakte hij thuis in de klassieke meetkunde en algebra, maar via Van Schooten leerde hij al zeer vroeg ook de nieuwe analytische meetkunde kennen. In de commentaren bij de Latijnse editie van Descartes' *Géométrie* uit 1649 heeft Van Schooten al bijdragen van Huygens opgenomen.
Een type probleem dat rond 1650 in heel Europa sterk de aandacht trok, ook van Huygens, was de quadratuur van gesloten vlakke krommen. Daarbij was het de bedoeling om uit de parameters van de kromme (in de klassieke zin waren dat geen getallen maar lijnstukken, zoals in het geval van een cirkel de straal) met passer en liniaal een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als die kromme. In de klassieke zin werd niet met oppervlakte, dat wil zeggen via de reële getallen gewerkt, maar waren de kromme en het vierkant als meetkundige objecten GELIJK aan elkaar. Sommige quadratuurproblemen, zoals de quadratuur van de cirkel, waren sinds de oudheid open gebleven, maar van sommige krommen was de quadratuur wel bekend. Zo had Archimedes (c. 287-212 v. Chr.) de quadratuur van het paraboolsegment gevonden. Hij be-

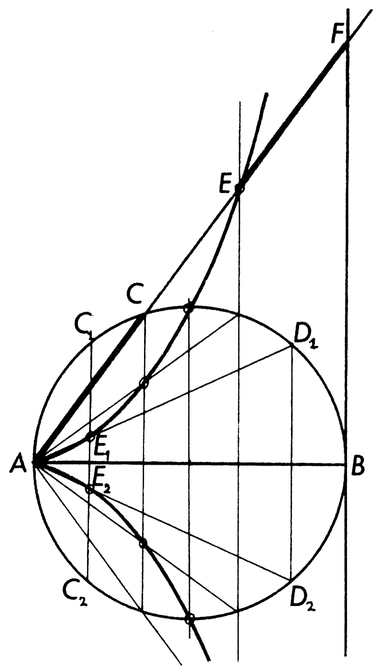



Figuur 16: het paraboolsegment is $\frac{4}{3}$ maal zo groot als $\triangle ABC$

wees dat het paraboolsegment $\frac{4}{3}$ maal zo groot is als de ingeschreven driehoek $\triangle ABC$; $C$ is het snijpunt van de parabool met de lijn door $M$ (het midden van lijnstuk $AB$) evenwijdig aan de as van de parabool, zie fig. 16.
Omdat uit $\triangle ABC$ direct met passer en liniaal een vierkant te construeren is dat $\frac{4}{3}$ maal zo groot is als $\triangle ABC$, is de quadratuur van het paraboolsegment dus bekend.

Allerlei recente ontdekkingen stimuleerden Huygens vanaf 1657 om verschillende krommen te bestuderen waarvan de quadratuur nog onbekend was. Vooral de constatering uit 1641 van Torricelli (1608-1647) dat de oppervlakte van het vlakdeel tussen een hyperbool en zijn asymptoot oneindig is (denk aan $\lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{1}{x}\,dx = \lim_{p\to\infty} \ln p = \infty$) terwijl het omwentelingslichaam van de hyperbool om zijn asymptoot eindige inhoud heeft (denk aan $\lim_{p\to\infty}\int_1^p \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{p\to\infty} \pi(-\frac{1}{p}+1) = \pi$) intrigeerde Huygens zeer. Zijn onderzoekingen op dit gebied zijn goed te volgen in correspondentie met de Luikse geestelijke en wiskundige Sluse (1622-1685), die zelf in zijn brieven met verschillende ontdekkingen voor de dag kwam.

In navolging van Torricelli onderzochten Huygens en Sluse de quadratuur van een andere kromme met een asymptoot, de cissoïde, die door Diocles (c. 100 v. Chr.) ingevoerd was in zijn verhandeling over brandspiegels, en die verder interessant was omdat men hem kon gebruiken voor de verdubbeling van de kubus. De cissoïde wordt als volgt gedefinieerd (zie fig. 17).




Figuur 17: de cissoïde van Diocles

Definitie: Een punt van de cissoïde krijgt men door op een cirkel met middellijn $AB$ (de genererende cirkel) vanuit $A$ en $B$ gelijke bogen $\overset{\frown}{AC_1}$, $\overset{\frown}{AC_2}$ en $\overset{\frown}{BD_1}$ en $\overset{\frown}{BD_2}$ af te passen en de snijpunten van lijn $C_1C_2$ met de lijnen $AD_1$ en $AD_2$ te bepalen. Deze snijpunten zijn punten van de cissoïde. Door de lengte van de af te passen bogen te variëren kan men willekeurig veel punten van de krommen construeren.[16]

Hieronder zal de volgende eigenschap van de kromme gebruikt worden. Als een lijn door $A$ de cirkel snijdt in $C$, de cissoïde in $E$ en de asymptoot in $F$, dan is $AC = EF$ (dit volgt direct uit de gelijkheid van de bogen $\overset{\frown}{AC}$ en $\overset{\frown}{BD}$ en de evenwijdigheid $C_1C_2//D_1D_2//BF$). Huygens bewijst op 28 mei 1658 dat het oneindig uitgestrekte vlakdeel, begrensd door de cissoïde, de asymptoot en lijnstuk $AB$, anderhalf maal zo groot is als de genererende cirkel, en dus EINDIG is (een oneigenlijke integraal avant la lettre).

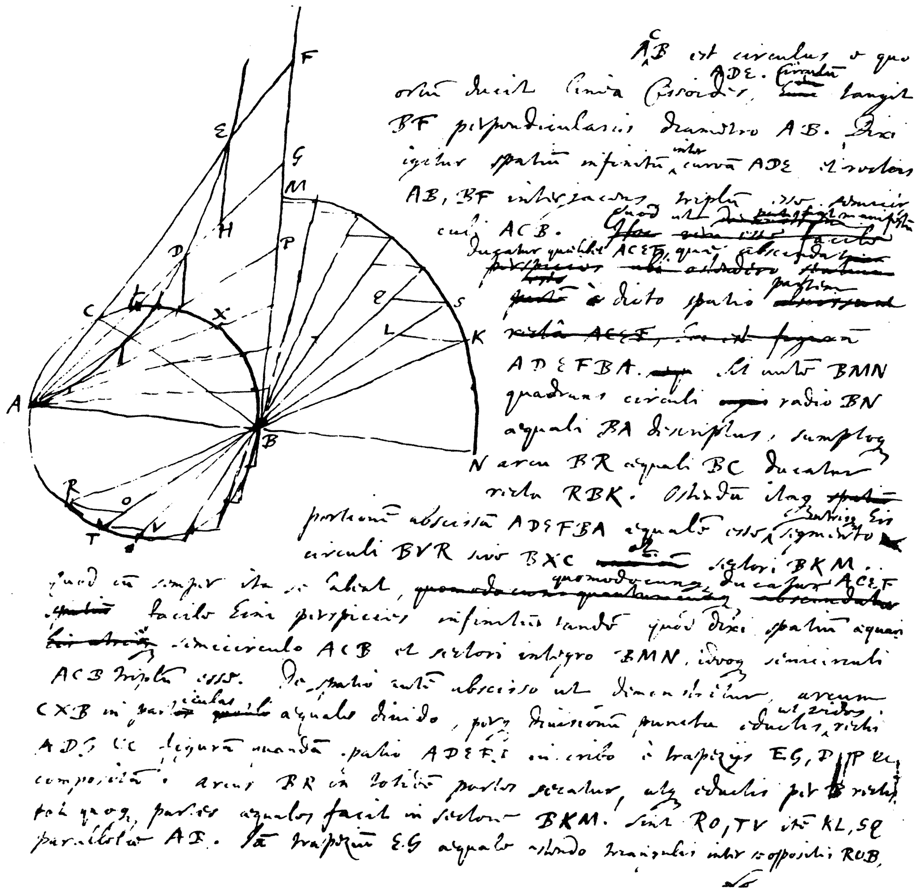
## 6.2 Het probleem

Bron: brief van Huygens aan Sluse van 28 mei 1658, gepubliceerd in: Christiaan Huygens, *Oeuvres Complètes* (Den Haag 1888–1950), T.2 pp.178-179 naar het briefontwerp van Huygens dat bewaard wordt in de Universiteitsbibliotheek te Leiden (Hs. *Hug.* 45, Huygens aan Sluse 28 mei 1658). In fig. 18 is een gedeelte van het briefontwerp in facsimile weergegeven.

Gevraagd wordt de quadratuur van het vlakdeel begrensd door de cissoïde, haar asymptoot en de middellijn van de genererende cirkel. In een eerdere brief, op 5 april 1658 (*Oeuvres Complètes*, T.2 p.164), had Huygens het resultaat al zonder bewijs aan Sluse meegedeeld. Op 28 mei 1658 geeft hij het volgende bewijs (vertaald uit het Latijn; zie voor de bijbehorende figuur fig. 18).

> "$ACB$ is de cirkel waaruit de Cissoïde $ADE$ ontstaat. Lijn $BF$, loodrecht op middellijn $AB$, raakt de cirkel. Ik heb dus gezegd dat het oneindige oppervlak, liggend tussen de kromme $ADE$ en de rechten $AB$ en $BF$, drie maal zo groot is als de halve cirkel $ACB$. Trek terwille van het bewijs willekeurig de lijn $ACEF$, die van het genoemde oppervlak het deel $ADEFBA$ afsnijdt. Zij verder met straal $BN$ gelijk aan $BA$ een kwart cirkel $BMN$ beschreven, en trek, nadat boog $BR$ gelijk genomen is aan boog $BC$, de rechte $RBK$. Dan zal ik aantonen dat het afgesneden stuk $ADEFBA$ gelijk is aan de volgende twee oppervlakken tezamen: cirkelsegment $BVR$ (ofwel $BXC$) en sector $BKM$. En omdat dit altijd het geval zal zijn, hoe

[16] De cissoïde is algebraïsch. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel met $A(0,0)$ en $B(a,0)$ is de vergelijking $y^2(a-x) = x^3$ ; zie ook §8, waar Newton essentieel gebruik maakt van de vergelijking. De kromme heeft een cusp in $A$ en een asymptoot (de raaklijn in $B$ aan de genererende cirkel).



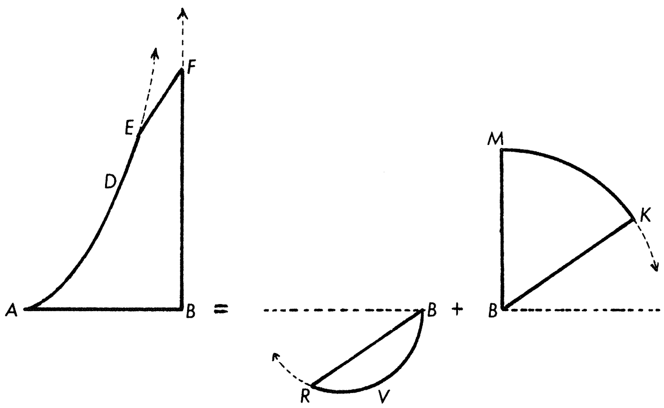

**Figuur 18: Huygens' ontwerp voor zijn brief aan Sluse van 28 mei 1658 (UB Leiden Hs. *Hug.* 45), passage van "*ACB* is de cirkel waaruit de Cissoïde *ADE* ontstaat.." tot "... trapezium *EG* gelijk is aan de tegenover elkaar liggende driehoeken *ROB*".**

lijn $ACEF$ ook getrokken wordt, zult u hieruit gemakkelijk inzien dat het door mij omschreven oneindige oppervlak gelijk is aan de halve cirkel $ACB$ met daarbij de gehele sector $BMN$, en dat het dus drie maal de halve cirkel $ACB$ is.
Om nu het bewijs te leveren voor het afgesneden stuk deel ik boog $CXB$ in gelijke deeltjes, en door via de verdeelpunten, zoals u ziet, de rechten $ADG$ etc. te trekken vorm ik in het oppervlak $ADEFB$ een ingeschreven figuur, die opgebouwd is uit de trapezia [met diagonalen] $EG$, $DP$ etc. Boog $BR$ wordt in evenveel delen verdeeld, en dat levert door uit de verdeelpunten via $B$ rechten te trekken ook een verdeling van sector $BKM$ in hetzelfde aantal gelijke delen. Laten nu $RO$ en $TV$, en ook $KL$ en $SQ$ evenwijdig zijn aan $AB$. Ik laat nu zien dat het trapezium $EG$ gelijk is aan de tegenover elkaar liggende driehoeken $ROB$ en $BKL$; evenzo trapezium $DP$ aan de twee driehoeken $TVB$ en $BSQ$ etc. Daaruit zult u de rest gemakkelijk begrijpen.
Dat trapezium $EG$ gelijk is aan de $\triangle^{\text{en}} ROB$ en $BKL$ bewijs ik als volgt. Vierkant $AF$ is gelijk aan de vierkanten $FB$ en $BA$, waarvan $FB$ weer gelijk is aan de vierkanten $FC$ en $CB$. Dus vierkant $AF$ is gelijk aan de drie vierkanten $FC$, $CB$ en $BA$. Daarom nu is een driehoek die op zijde $AF$ beschreven is (namelijk $AFG$) gelijk aan de som van de drie daaraan gelijkvormige driehoeken, beschreven op de rechten $FC$, $CB$ en $BA$. Ofwel op de rechten $AE$, $BR$ en $BK$. Want $AE$ is gelijk aan $FC$ wegens de eigenschap van de Cissoïde, en wegens de constructie geldt $BR = BC$ en $BK = BA$. De drie driehoeken op de rechten $AE$, $BR$ en $BK$ die gelijkvormig zijn aan $AFG$ zijn $AEH$, $BRO$ en $BKL$. Dus deze drie zijn samen gelijk aan die ene driehoek: $AFG$. En wanneer aan beide kanten driehoek $AEH$ afgetrokken wordt, dan blijft trapezium $EG$ over, dat dus gelijk is aan de twee driehoeken $BRO$ en $BKL$, hetgeen gesteld was. Combineer nu hieruit de rest van het bewijs volgens wat ik hierboven heb gezegd."

## 6.3 Commentaar

Enige toelichting lijkt op zijn plaats. Huygens bewijst dat (de oppervlakte van) het oneindig uitgestrekte vlakdeel begrensd door de cissoïde, de asymptoot $BF$ en lijnstuk $AB$ drie maal (de oppervlakte van) de halve cirkel $ACB$ is. Hij gebruikt twee maal een limietovergang.

Voor de eerste neemt hij een punt $F$ op de asymptoot en trekt lijn $AF$ die de cirkel snijdt in $C$ en de cissoïde in $E$. $AF$ snijdt van het oneindige vlakdeel een eindig stuk ($ADEFB$) af. Huygens bepaalt eerst de oppervlakte van dit eindige vlakdeel, en kijkt dan wat er gebeurt als $F$ over de asymptoot naar oneindig gaat. Het eindige vlakdeel, zegt hij, is even groot als segment $BVR$ van de linker cirkel plus sector $BKM$ van de rechter. Daaruit volgt de stelling,




Figuur 19: $ADEFB$ = segment $BVR$+ sector $BKM$

want als $F$ naar oneindig gaat, loopt $R$ over de linker cirkel naar $A$ en $K$ over de rechter naar $N$. Het oneindige vlakdeel tussen cissoïde en asymptoot is dus gelijk aan de halve cirkel $BVA$ plus de kwart cirkel $BMN$, en deze laatste is gelijk aan de hele cirkel met middellijn $AB$, want de straal van de rechter cirkel is twee maal de straal van de linker. In totaal geeft dat dus drie maal de halve genererende cirkel.

De tweede limietovergang neemt hij door in het (eindige) vlakdeel $ADEFB$ een veelhoek in te schrijven waarvan hij het aantal hoekpunten naar oneindig laat gaan. De 'eindige' veelhoek kan Huygens transformeren in twee andere veelhoeken, de ene ingeschreven in segment $BVR$, de andere in sector $BKM$. Bij de limietovergang gaan deze laatste twee over in segment $BVR$ en sector $BKM$, en dat is juist wat hij nog nodig heeft.
Het bewijs draait in feite om de transformatie van de ingeschreven veelhoek van $ADEFB$. De veelhoek (zie §6.2 voor de constructie; zie ook fig. 18 voor de bijbehorende figuur) is opgebouwd uit trapezia. Trapezium $EFGH$, zegt Huygens, is gelijk aan de som van $\triangle ROB$ en $\triangle BKL$ en de andere trapezia zijn op soortgelijke wijze te transformeren in twee driehoeken. Een bewijs van deze identiteit is het laatste wat nog nodig is. In het bewijs gebruikt Huygens het principe van het 'optellen van gelijkvormige figuren'. Omdat de oppervlakten van twee gelijkvormige figuren zich verhouden als de kwadraten ("vierkanten") van twee overeenkomstige lijnstukken zijn die twee figuren op te tellen tot één nieuwe figuur, gelijkvormig met de eerste twee; het kwadraat van het overeenkomstige

lijnstuk in deze nieuwe figuur is gelijk aan de som van de kwadraten van de overeenkomstige lijnstukken uit de eerste twee. In een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden gelijk zijn aan de overeenkomstige lijnstukken uit de eerste twee figuren is de hypotenusa dus het overeenkomstige lijnstuk van de som van die figuren.
Trapezium $EFGH$ is een deel van $\triangle AFG$. Omdat $AB \perp BF$ en $BC \perp AF$ (want $C$ ligt op de cirkel met middellijn $AB$) geldt:

$$AF^2 = FB^2 + BA^2 \text{ en } FB^2 = FC^2 + CB^2$$

zodat

$$AF^2 = FC^2 + CB^2 + BA^2.$$

Nu is $EF = AC$ (eigenschap van de cissoïde, zie §6.1) en dus ook $FC = AE$. Verder geldt $CB = BR$ (want $R$ is geconstrueerd door boog $\overset{\frown}{BR}$ gelijk te maken aan boog $\overset{\frown}{BC}$) en $BA = BK$ (zo is de rechter cirkel gedefinieerd).
$AF^2$ gaat daarmee over in

$$AF^2 = AE^2 + BR^2 + BK^2.$$

Nu zijn $AF, AE, BR$ en $BK$ overeenkomstige lijnstukken in de gelijkvormige driehoeken $\triangle AFG$, $\triangle AEH$, $\triangle BRO$ en $\triangle BKL$ (dat deze driehoeken gelijkvormig zijn volgt uit het feit dat de gelijke bogen $\overset{\frown}{BC}$ en $\overset{\frown}{BR}$ in gelijke "deeltjes" verdeeld zijn) zodat het principe van 'optellen van gelijkvormige figuren' toegepast kan worden. Het resultaat is:

$$\triangle AFG = \triangle AEH + \triangle BRO + \triangle BKL$$

Aan beide kanten $\triangle AEH$ weghalen levert wat nog te bewijzen was:

$$\text{trapezium } EFGH = \triangle BRO + \triangle BKL.$$

Het bewijs is een toonbeeld van vernuft. Het zou, naar klassiek Grieks model, nog iets strenger kunnen en op een andere plaats (in een brief aan Wallis) bewijst Huygens inderdaad streng dat het eindige vlakdeel $ADEFB$ niet groter kan zijn dan segment $BVR$ plus sector $BKM$, en ook niet kleiner. Het hier gepresenteerde bewijs is echter toegankelijker en verdient daarom op deze plaats de voorkeur.

Opvallend is dat deze quadratuur speciaal voor de cissoïde ontworpen werd. Elke kromme vroeg weer een nieuwe techniek. Steeds sterker kwam daardoor de vraag op naar één algemene quadratuurmethode, die voor alle typen krommen zou werken. Met zijn quadratuur van de cissoïde verrijkte Huygens met andere woorden de voedingsbodem waarop aan het einde van de eeuw de integraalrekening ontstond.

# 7 1661-1670: de drie kannen van de organist

## 7.1 Inleiding

Sommige problemen zijn van alle tijden, en het zou gek zijn als zo'n evergreen hier zou ontbreken. Bovendien kan de boog niet altijd gespannen blijven, en staat ons voor de laatste drie decennia nog aardig wat te wachten, dus is het nu tijd voor een van de "Mathematische Vermaecklyckheden" uit 1663 van Wijnant van Westen, "Mathematicus ende Organist der Stadt Nijmegen". Het is een uit allerlei Franse bronnen bijeengeraapt allegaartje van "ghenuchelijcke ende boertighe Werck-stucken", variërend van "Te raden verscheyden getallen teffens, die yemandt alleen, ofte verscheyden persoonen ghedocht hebben" via "Om te vinden een middel, om te doen sien eenen jaloerschen in een kamer, het gene sijne Vrouwe doet in een andere, niet tegenstaende de interpositie van de muer" tot "Een maniere om Polver ofte Bus kruyt te maken, tot Canon ofte grof Geschut". Het arsenaal van Van Westen was dus rijk gesorteerd.
De problemen zijn van het type waarmee men vrienden en kennissen kan verbazen en waarmee leerlingen hun leraar kunnen uitdagen in de laatste les voor de vakantie[17]. Ze worden doorverteld, soms schrijft iemand ze op en verschijnen ze in druk, en sommige ervan doorstaan op deze wijze de tand des tijds[18].
Van Westen noemt zelf een aantal auteurs uit wier werk hij put, zoals Bachet (1581-1638) en Cardano (1501-1576), maar we mogen gerust aannemen dat sommige problemen nog veel verder teruggaan in de tijd. Van één probleem is dat in elk geval zeker, en dat is het beroemde probleem van de veerman die een wolf, een kool en een geit moet overzetten (*Vermaecklykheden* deel 1 p.32: "Van de Wolf, van de Hinde, ende van de Buys-kool. Op de strande van een seeckere Riviere, vinden sich by gheval te samen een Wolf, een Hinde ende een Buys-kool. Hoe sal een seecker Schipper, daer zijnde, de selve aen de ander zijde konnen voeren, een voor een, soo dat, noch de Wolf in sijn absentie schade doe aen de Hinde, noch de Hinde aen de Buys-kool?"). Het komt al voor in de *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Opgaven om de geest van jongelingen te scherpen) van Alcuinus van York (735-804).

Ook de wiskunde heeft traditie, een zeer rijke en oude zelfs. Het kan geen kwaad om daar in de klas af en toe eens wat over te vertellen. En wie dat maar onzin vindt kan ook de wiskundige invalshoek nemen. Wat, bijvoorbeeld, zit er achter de keuze van de getallen $8, 5$ en $3$ in het probleem uit §7.2. Met het drietal $10, 6$ en $4$ kun je geen twee porties van $5$ maken. Met het drietal $10, 7$ en $3$ wel. Met het drietal $12, 9$ en $3$ kan iedereen twee porties van $6$ maken, maar met $14, 9$ en $3$ twee porties van $7$? Of telt dat niet omdat $14 \neq 9 + 3$?

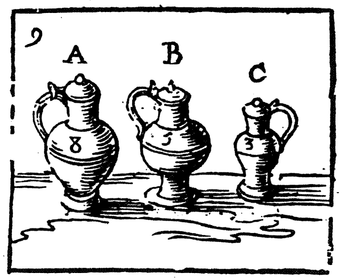
[17] Van het laatste type is het probleem uit §7.2. Leerlingen uit een tweede klas kwamen ermee aanzetten, en kort daarop kwam ik het opnieuw tegen, maar nu in de *Mathematische Vermaecklyckheden* uit 1663.

[18] Een mooie verzameling 'Unterhaltungsmathematik' is te vinden in [Tropfke 1980].

## 7.2 Het probleem

Bron: Wynant van Westen, *Mathematisch̲e Vermaecklyckheden Verdeylt in III. Deelen*, Arnhem (By Jacob van Biesen) 1662-1663, deel 1. pp. 25-26 Geraadpleegd exemplaar: uit eigen kast.

IX. WERCKSTUCK.




Figuur 20: *Vermaecklyckheden*, deel 1 p. 25

> Om 8. kannen Wijns te deelen in twee even deelen, sonder meer als dese drie onghelijcke kruycken te ghebruycken, d'eene van 8. kannen, d'andere van 5. ende de laetste van 3. kannen.
>
> Laet de drie Letteren $ABC$ de drie Kruycken beteeckenen, te weten $A$ van 8. kannen, $B$ van 5. ende $C$ van 3. kannen. Voor eerst schenckt uyt $A$ de Kruyck $B$ vol, ende uyt $B$ schenckt $C$ vol; daer nae doet $C$ in $A$: Ende 't gheene noch in $B$ overigh is, te weten twee kannen, schenckt die in $C$. Vult nu wederom $B$ uyt $A$, ende 't gene alsoo in $B$ is, doet daer van $C$ voort vol. De wijle dan in $C$ [p.26] alreede twee kannen waren, soo volght dat daer uyt $B$ die vijf kannen hadde, maer een in $C$ geschoncken is, ende daerom in $B$ vier kannen zijn gebleven, het welcke de rechte helft is, gelijck begeert is."

Vervolgens merkt Van Westen nog op dat het ook nog zo kan: $(a,b,c) = (8,0,0) \to (5,0,3) \to (5,3,0) \to (2,3,3) \to (2,5,1) \to (7,0,1) \to (7,1,0) \to (4,1,3) \to (4,4,0)$.

## 7.3 Commentaar

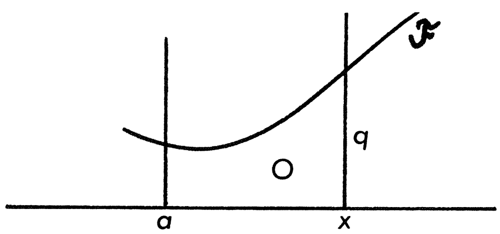
Geen commentaar.

# 8 1671-1680: van quadratuur naar integratie, de cissoïde in de handen van Newton

## 8.1 Achtergrond

Dertien jaren scheiden de quadratuur van de cissoïde door Huygens (1658), die we in §6 gezien hebben, van de integratie (1671) van de bijbehorende functie $v(x) = x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ door Newton. Tussen deze twee oplossingen van hetzelfde probleem zit een wereld van verschil. Terwijl Huygens met een stevig portie meetkundig vernuft teruggreep op de klassieke Griekse opvatting van quadratuur, markeert Newtons oplossing het begin van een nieuw tijdperk, het tijdperk van de differentiaal- en integraalrekening. Was Huygens nog aangewezen op het uitdenken van nieuwe listen voor elke nieuwe kromme die hij bestudeerde, Newton beschikte vanaf 1666 over een algoritme dat algemeen geldig was.

Isaac Newton (1642-1727) ontwikkelde eind 1665 voor het berekenen van raaklijnrichtingen (fluxies) een methode, die equivalent was met de tien jaar later door Leibniz ontwikkelde differentiaalrekening. Bovendien zag hij kort daarna in dat het berekenen van de oppervlakte onder een kromme en het berekenen van fluxies inverse problemen waren. Hij beschikte, met andere woorden, over de hoofdstelling van de integraalrekening (zie fig. 21): als de oppervlakte onder



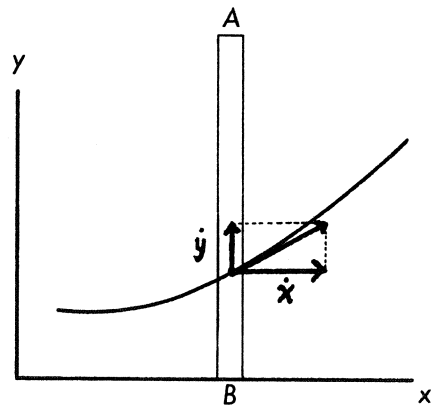

Figuur 21: $\frac{d}{dx}O(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ (ofwel, volgens Newton) $\dot{O} = q$

$q = f(x)$ voorgesteld wordt door $O(x)$, dan is $q$ de fluxie van $O$. Voor de integratie van de cissoïde $v(x) = x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ hoefde hij dus niet meer te doen dan een functie $s$ zoeken die voldeed aan $s'(x) = v(x)$.

Om de tekst in §8.2 te kunnen doorgronden moeten we ons eerst een aantal elementen van de fluxierekening eigen maken[19]. Newtons aanpak was sterk op fysische intuïtie gebaseerd, vooral met betrekking tot de begrippen 'beweging' en 'snelheid'. Een hedendaagse parallel van wat hij deed biedt de moderne techniek van het tekenen van krommen met behulp van een plotter. Stellen

[19]De nu volgende presentatie daarvan volgt op de voet [Edwards 1979], pp.191-212.

we ons een plotter voor die bestaat uit een arm die loodrecht op de $x$-as heen en weer kan bewegen en een tekenstift $P$ die langs deze arm beweegt. De be-




Figuur 22

weging van de stift heeft dus twee componenten: $x = f(t)$ en $y = g(t)$, en de snelheid waarmee de stift beweegt is de vectoriële som van de snelheden van de twee componenten. De snelheid in de $x$-richting noemt Newton de fluxie van de plaatsfunctie $x$. Aanvankelijk noteert hij deze fluxie met $P$, maar later koos hij voor de notatie $\dot{x}$, die de fluxie direct aan de plaatsfunctie $x$ koppelt. Deze notatie, die in de natuurkunde nog steeds zeer gebruikelijk is voor het aanduiden van afgeleiden naar de tijd, wordt hier in het vervolg aangehouden.

Voor de snelheden van de componenten heeft Newton dus:

$$\begin{cases} P = \dot{x} = f'(t) \\ q = \dot{y} = g'(t) \end{cases}$$

en de gezochte raaklijnrichting in $P$ is dus $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Als de beweging van $P$ in de $x$-richting eenparig verloopt is de fluxie $\dot{x}$ constant, en er geldt $x = \dot{x}t$. Een niet eenparige beweging beschouwt Newton als eenparig op elk oneindig klein tijdsinterval ("infinitely little line") $o$. Als $P$ de kromme $K$ beschrijft, dan groeit $x$ gedurende $o$ aan met constante snelheid $\dot{x}$. De toename is dus $\dot{x}o$ zodat $x$ na $o$ gegroeid is tot $x + \dot{x}o$. Zo groeit ook $y$ aan tot $y + \dot{y}o$. Als $K$ bijvoorbeeld de parabool $ay = x^2$ is, dan liggen de punten $(x, y)$ en $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ beide op $K$. Dat houdt in

$$a(y + \dot{y}o) = (x + \dot{x}o)^2 \qquad (I)$$

Newton[20] [*NMP* I, p.415]: "In de eerste plaats verdwijnen nu steeds die termen die geen factor $o$ hebben, want die vormen de gegeven vergelijking" [hier: $ay =$

[20]De nu volgende citaten stammen uit de *October 1666 Tract on Fluxions*, een manuscript dat in 1967 door D.T. Whiteside gepubliceerd werd in deel I van zijn achtdelige editie van

$x^2$]. Uit (I) volgt dus

$$a\dot{y}o = 2x\dot{x}o + o^2 \qquad (II)$$

Newton: "In de tweede plaats verdwijnen ook die termen waarvan de graad in $o$ hoger is dan 1, omdat ze oneindig veel kleiner zijn dan de termen die van de eerste graad zijn in $o$." De term $o^2$ verdwijnt dus, zodat (II) overgaat in:

$$a\dot{y}o = 2x\dot{x}o \qquad (III)$$

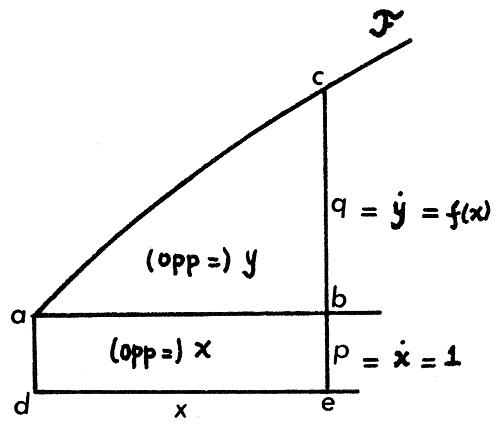
Newton: "In de derde plaats zullen de nog overblijvende termen, na deling door $o$, de vorm hebben die ze ... zouden moeten hebben." Voor de parabool $ay = x^2$ is deze vorm $a\dot{y} = 2x\dot{x}$, en daarmee is de raaklijnrichting bekend:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2x}{a}. \qquad (IV)$$

Met behulp van het door hem in 1665 ontdekte binomium kon Newton voor een willekeurig natuurlijk getal $n$ machten als $(x + \dot{x}o)^n$ uitwerken, en daarmee was hij in staat om $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ te bepalen voor willekeurige krommen die door een polynoomvergelijking in $x$ en $y$ beschreven werden. Termen als $x^m y^n$ in de vergelijking van K leverden in de fluxievergelijking $(\dot{y} \cdot ny^{n-1}x^m + \dot{x} \cdot mx^{m-1}y^n)\, o$ als lineaire term in $o$.
De meeste rekenregels voor het differentiëren waren voor Newton zo vanzelfsprekend dat hij ze wèl in voorbeelden gebruikte maar niet expliciet formuleerde. De kettingregel, bijvoorbeeld, was in zijn aanpak min of meer ingebouwd. Dat is goed te zien in §8.2 waar Newton de fluxie berekent van $h(x) = \frac{x}{3}\sqrt{ax - x^2}$. Hij doet dat via $g(x) = h^2(x) = \frac{ax^3 - x^4}{9}$. Uit $g = h^2$ volgt $\dot{g} = 2\dot{h}h$ zodat $\dot{h} = \frac{\dot{g}}{2h}$, en wegens $\dot{g} = \frac{3ax^2 - 4x^3}{9}\dot{x}$ vindt hij dus $\dot{h} = \frac{3ax - 4x^2}{6\sqrt{ax - x^2}}\dot{x}$. Omdat hij er in dit geval bovendien van uitgaat dat de beweging van $P$ met constante snelheid 1 in de $x$ − richting plaatsvindt (d.w.z. $\dot{x} = 1$) laat Newton bovendien $\dot{x}$ weg. Hij noteert dus: $\dot{h} = \frac{3ax - 4xx}{6\sqrt{ax - xx}}$.

De hoofdstelling van de integraalrekening sluit hier zeer vanzelfsprekend op aan. Newton beschouwt een kromme $ac$ die ten opzichte van de $x$ − as $ab$ gegeven is door de vergelijking $q = f(x)$. Hij neemt aan dat het lijnstuk $bc$ met constante snelheid ($\dot{x} = 1$) naar rechts beweegt (zie fig. 23), en dat $y$ de oppervlakte van het vlakdeel is dat door $ab$, $bc$ en de kromme begrensd wordt. Ook $x$ is in de figuur als oppervlakte aanwezig, namelijk als oppervlakte van de rechthoek

Newtons wiskundige manuscripten *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge 1967-1981. Naar deze editie wordt verder verwezen met de afkorting *NMP* gevolgd door deel- en bladzijnummer(s). Het gekozen voorbeeld wijkt af van Newtons eigen voorbeeld, de kromme $x^3 - abx + a^3 - dy^2 = 0$; *NMP* I, pp.414-415.



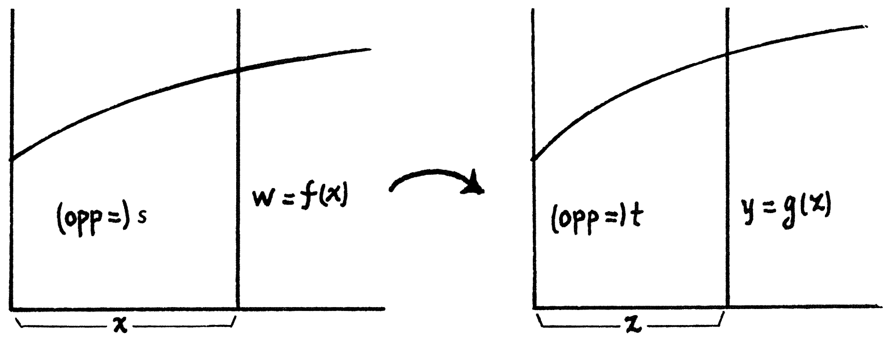

Figuur 23: $\dot{y} = f(x)$

met zijden $ab = x$ en $ad = 1 = \dot{x}$. Daarmee is $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de verhouding geworden van de groeisnelheden van de oppervlakten $y$ en $x$, en die verhouding, zegt Newton zonder nadere toelichting omdat het meteen uit de figuur af te lezen is, is gelijk aan $\frac{bc}{be} = \frac{q}{1}$. En dus is $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ ofwel $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$.

Deze ontdekking maakte het Newton mogelijk om de quadratuur van de kromme $q = f(x)$ te berekenen, eenvoudigweg door een functie $y$ te zoeken (de primitieve, of, in Newtons terminologie de 'fluent') waarvan de gegeven functie $q$ de fluxie is. Al snel ontwikkelde hij voor het berekenen van primitieven geavanceerde technieken. In het grote overzicht van zijn differentiaal- en integraalrekening uit 1671 ('De Methodis Serierum et Fluxionum', *NMP* III, pp. 32– 353), dat pas in 1736, na zijn dood dus, gedrukt werd en waaruit de tekst in §8.2 afkomstig is, paste hij bijvoorbeeld al de substitutiemethode en een equivalent van partiële integratie toe.

De substitutiemethode vraagt nog enige toelichting, die echter voornamelijk betrekking heeft op het door Newton gebruikte formalisme. Hij heeft een functie $w = f(x)$ waarvan hij de oppervlakte $s$ zoekt (zie fig. 24). Hij neemt een tweede functie $y = g(z)$, die de oppervlaktefunctie $t$ heeft, en merkt op dat $\dot{s} = \dot{x}w$ en $\dot{t} = \dot{z}y$. Als nu de twee oppervlaktefuncties gelijk zijn ($s = t$, dus ook $\dot{s} = \dot{t}$) en als $x$ met constante snelheid $\dot{x} = 1$ groeit, dan geldt dus:

$$w = \dot{s} = \dot{t} = \dot{z}y, \text{ ofwel } y = \frac{w}{\dot{z}}.$$




Figuur 24: integratie door substitutie

Door nu voor $z$ een bijectieve functie van $x$ te nemen ($z = \phi(x)$) vindt hij de vergelijking

$$y = \frac{w}{\dot{z}} = \frac{f(x)}{\dot{\phi}(x)} = \frac{f(\phi^{-1}(z))}{\dot{\phi}(\phi^{-1}(z))}$$

van een kromme $y = g(z)$ die, op grond van de constructie, dezelfde oppervlaktefunctie heeft als $w = f(x)$.

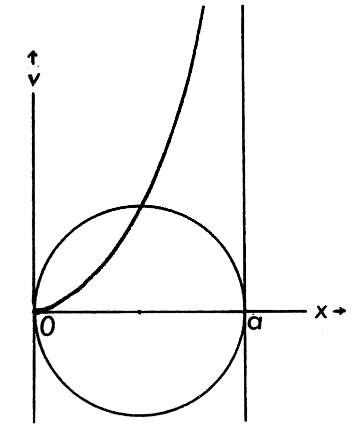
We zullen zien hoe al deze ingrediënten samenkomen in Newtons integratie van de cissoïde.

## 8.2 Het probleem

Bron: D.T. Whiteside (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge 1967–1981, vol. III, pp. 202–204, naar het handschrift University Library Cambridge (UK), Ms. Add. 3960.14, pp. 73–74

Het probleem betreft de herleiding van de quadratuur van de cissoïde $v = \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}$ tot de quadratuur van een andere, bekende kromme, vergelijkbaar met de herleiding van een integraal tot een standaardintegraal via een substitutie.

> "VOORB 4. En verder, als de Cissoïde $\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}} = v$ gegeven is, waarbij andere, eraan gerelateerde figuren gevonden moeten worden, en als we daartoe aannemen dat
>
> $$\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} + \frac{2}{3}s = t,$$
>
> stel dan $\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} = h$ en noem zijn fluxie $\dot{h}$ [Newton: $k$], dan zal er gelden $h + \frac{2}{3}s = t$, en daaruit volgt wegens Prob 1, $\dot{h} + \frac{2}{3}\dot{s} = \dot{t}$




Figuur 25: de cissoïde $v = \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}$

[Newton schrijft niet $\dot{s}$ en $\dot{t}$ maar $p$ en $q$]. Voorts geeft de vergelijking $\frac{ax^3-x^4}{9} = hh$ wegens Prob 1 $\frac{3axx-4x^3}{9} = 2\dot{h}h$, en als je daaruit $h$ elimineert zal er komen $\dot{h} = \frac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$. En omdat bovendien $\frac{2}{3}\dot{s}$ $\left(= \frac{2}{3}v\right) = \frac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$ zal daarom gelden $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}} = \dot{t}$.
Neem nu, om $z$ en $\dot{z}$ [Newton: $r$] te bepalen, $\sqrt{aa-ax} = z$, dan ontstaat er met behulp van Prob 1 $-a = 2\dot{z}z$. En daarom is

$$y\left(= \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{-zx}{\sqrt{ax-xx}} = \sqrt{\frac{zzx}{a-x}} = \sqrt{ax}\right) = \sqrt{aa-zz}$$

[zie §8.3 over het verdwijnen van het minteken].
Omdat dit de vergelijking van een cirkel is, zal men dus een koppeling hebben tussen de oppervlakten van de cirkel en de Cissoïde.
En net zo, als je aangenomen had $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-xx} + \frac{1}{3}s = t$ en $x = z$, dan was er uitgekomen $y = \sqrt{az-zz}$, opnieuw de vergelijking van een cirkel."

## 8.3 Commentaar

Wat gebeurt hier, wat doet Newton precies? Dat zijn de vragen 'in eerste termijn'.
In de eerste plaats blijkt uit de toevoeging $\left(= \frac{2}{3}v\right)$ achter $\frac{2}{3}\dot{s}$ dat s de gezochte primitieve van $v(x) = \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}$ is. Blijkbaar zoekt Newton een functie $t(x)$ zodanig, dat

$$\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2} + \frac{2}{3}\int^x v(\xi)\,d\xi = t(x) \qquad (1)$$

en daartoe berekent hij uit (1) eerst $\dot{t}$. Daarvoor is nog de fluxie $\dot{h}$ van $h(x) = \frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}$ nodig, en in §8.1 hebben we gezien hoe Newton die berekent. Hij vindt $\dot{h}(x) = \frac{3ax-4x^2}{6\sqrt{ax-x^2}}$. Dat komt mooi uit, want de fluxie van $\frac{2}{3}s = \frac{2}{3}\int^x v(\xi)\,d\xi$ is gelijk aan $\frac{2}{3}v = \frac{4x^2}{6\sqrt{ax-x^2}}$, zodat uit (1) volgt:

$$\dot{t} = \frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}} \qquad (2)$$

[Voor beantwoording in tweede termijn signaleren we de vraag: waarom komt het zo mooi uit, wat zit hier achter?]
Voor het bepalen van een primitieve van $\dot{t}$ past Newton zijn substitutiemethode toe. Hij substitueert $z = \sqrt{a^2 - ax}$, en zijn regel (zie §8.1) zegt hem dat de oppervlakte onder $w(x) = \dot{t}(x)$ gelijk is aan de oppervlakte onder $y(z) = \frac{\dot{t}(z)}{\dot{z}}$. Om $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}$ in $z$ uit te drukken, drukt Newton $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}$ eerst in $x$ uit (met behulp van $2\dot{z}z = -a$, hetgeen volgt uit $z^2 = a^2 - ax$):

$$\begin{aligned}\frac{\dot{t}}{\dot{z}} &= \frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}} \cdot \frac{-2z}{a} = -\frac{zx}{\sqrt{ax-x^2}} = (-)\sqrt{\frac{z^2x^2}{ax-x^2}} \\ &= (-)\sqrt{\frac{z^2x}{a-x}} = (-)\sqrt{\frac{(a^2-ax)x}{a-x}} = (-)\sqrt{ax}\end{aligned}$$

en daarna via $z^2 = a^2 - ax$ in $z$:

$$\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = (-)\sqrt{ax} = (-)\sqrt{a^2 - z^2} = y(z).$$

De oppervlakte onder de cissoïde is daarmee herleid tot de oppervlakte tussen de cirkel $y = \sqrt{a^2 - z^2}$. In de voor ons gebruikelijke, door Leibniz ingevoerde notatie ziet het resultaat er als volgt uit (zie ook de vergelijkingen (1) en (2)):

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx &= \lim_{p\uparrow a}\int_0^p \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{p\uparrow a}\left\{ -\frac{x}{2}\sqrt{ax-x^2}\,\Bigg|_0^p + \frac{3}{2}\int_0^p \frac{ax}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx \right\} \\ (\text{subst. } z &= \sqrt{a^2-ax}\text{ , dat geeft } x=0 \leftrightarrow z=a\ ;\ x=a \leftrightarrow z=0) \\ &= \lim_{p\downarrow a}\frac{3}{2}\int_p^0 -\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \frac{3}{2}\int_0^a \sqrt{a^2-z^2}\,dz \qquad (3)\end{aligned}$$

Omdat de genererende cirkel van de cissoïde $v(x) = \frac{x^2}{ax-x^2}$ straal $\frac{1}{2}a$ heeft en $\int_0^a \sqrt{a^2-z^2}\,dz$ de oppervlakte is van een kwart cirkel met straal $a$, vindt Newton de door Huygens gevonden quadratuur (3 maal de quadratuur van de halve genererende cirkel), die hij via het werk van Wallis kende[21], terug.

[21] De transmissie van het probleem is door Whiteside gedocumenteerd in *NMP* III, pp. 202–204, n. 428. Dat Huygens wel degelijk een bewijs voor zijn quadratuur had, vermeldt de noot ten onrechte niet.

Er is in Newtons tekst, nadat hij de substitutie uitgevoerd heeft, nog iets vreemds aan de hand met de mintekens. Na de stap $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{-zx}{\sqrt{ax-xx}}$ laat Newton de mintekens verder weg. De verklaring schuilt waarschijnlijk in het feit dat hij niet vermeldt welk effekt de substitutie op de grenzen van het integratiegebied heeft. De oriëntatie van de grenzen draait bij de substitutie $z = \sqrt{a^2 - ax}$ namelijk om, en kan hersteld worden door $z$ te vervangen door $-z$; deze laatste substitutie doet $y$ in $-y$ overgaan, en zit dus wellicht verborgen in de stap "$\frac{-zx}{\sqrt{ax-xx}} = \sqrt{\frac{zzx}{a-x}}$"?
De laatste alinea van §8.2 laat ik, met de volgende woorden van Descartes, aan de lezer: "Ik zal me niet ophouden om dit in detail uit te leggen, en wel omdat ik u het plezier zou ontnemen om het op eigen kracht te vinden ..." (*Géométrie* p. 301). Het is de moeite waard, de ontknoping is mooi!

Rest ons, in tweede termijn, de vraag waarom het zo mooi uitkomt. Daar zit een soort partiële integratie achter. Ervaring met het berekenen van fluxies leerde Newton dat $k(x) = x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}$ in de buurt van $s$, de gezochte primitieve van $v(x) = x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, komt (zoals $x \sin x$ in de buurt komt van de primitieve van $x \cos x$, maar nog een correctieterm vereist). Immers:

$$\dot{k} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\dot{s}$$

ofwel

$$s = 3\int x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}\,dx - 2x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} \qquad (4).$$

Nu moet de integraal $\int x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ nog via de substitutie $z = \phi(x)$ overgaan in een standaardintegraal $\int y(z)\,dz$ met $y(z) = \frac{w}{\dot{z}}$. Maar omdat de integrand $w(x) = \sqrt{x(a-x)}$ al een halve cirkel voorstelt heeft Newton met vergelijking (4) zijn standaardintegraal eigenlijk al gevonden.
Tot zover de analyse, maar Newton presenteert in zijn tekst (zeer klassiek) de synthese en niet de analyse. In voor de synthese hoeft hij met (4) als beginpunt alleen de volgorde van de stappen om te keren. Hij definieert eenvoudigweg $t = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}s$, en weet uit (4) al dat de fluxie van $t$ mooi uitkomt: $\dot{t} = w(x) = x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}$, en dat $\int w(x)\,dx$ (of, na de pro forma substitutie $z = x$ $\int \sqrt{z(a-z)}\,dz$ ) de gezochte standaardintegraal is. Hiermee is de achtergrond van de aanname uit de laatste alinea van Newtons tekst gereconstrueerd. De aanname $t = \frac{x}{3}\sqrt{ax-xx} + \frac{2}{3}s$ uit het begin van de tekst is langs analoge (maar iets bochtiger) weg tot stand gekomen (voor details leze men de zeer aannemelijke verklaring van Whiteside in *NMP* III, pp. 202-204, n. 428).

# 9 1681-1690: breking van licht, uit de *Nova methodus* van Leibniz

## 9.1 Achtergrond

De differentiaal- en integraalrekening zoals wij die tegenwoordig kennen stamt van Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Omdat zijn begrippenapparaat en notaties de eeuwen doorstaan hebben is het werk dat hij op dit gebied gedaan heeft nog steeds goed te volgen. Ter illustratie van deze bewering blijft deze inleiding op de tekst uit §9.2 (een fragment uit de eerste publikatie op het gebied van de differentiaalrekening uit de geschiedenis van de wiskunde, uit 1684) zeer kort[22].
Deze eerste publikatie was een tijdschriftartikel van 8 pagina's (waarvan één de figuren bevat; de volledige titel volgt zo meteen). Meteen aan het begin van het artikel voert Leibniz het begrip differentiaal ("differentia", letterlijk: verschil) in. Als $y$ een functie van $x$ is worden de differentialen $dy$ en $dx$ als volgt ingevoerd: eerst wordt "een of ander willekeurig aangenomen lijnstuk"

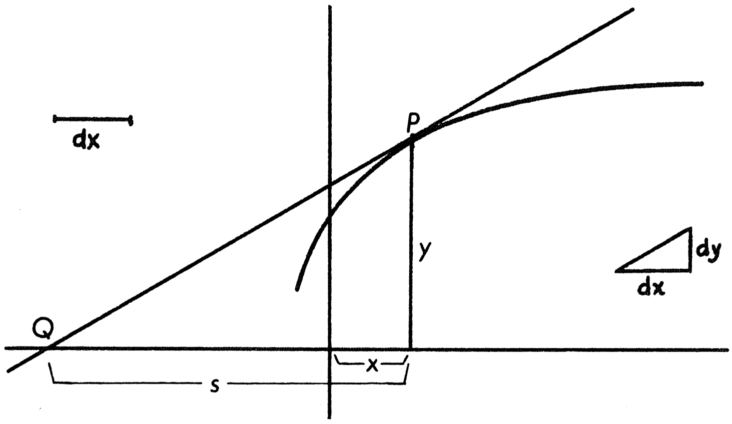
*NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G.G. L.*

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, v, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum v (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Figuur 26: de eerste $dx$; *Nova methodus*, p. 467

$dx$ genoemd (zie fig. 26); $dx$ is dus een willekeurig lijnstuk met eindige lengte. Vervolgens wordt $dy$ aan deze $dx$ gekoppeld met gebruikmaking van het begrip 'raaklijn', dat niet gedefinieerd maar intuïtief aangenomen wordt: $dy$ is het lijnstuk dat zich tot het vast gekozen lijnstuk $dx$ verhoudt als $y$ tot de subtangent $s$ (zie fig. 27). Met andere woorden, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn wordt

[22] Dat het fragment nog steeds goed leesbaar is, neemt niet weg dat de ontwikkelingsgeschiedenis van Leibniz' differentiaalrekening diep gaat en zeer enerverend is. Zie daarover Ch. 9 van [Edwards 1979] en de daar op p. 267 genoemde publikaties.




Figuur 27: definitie $dy$ via $dy : dx = y : s$

als bekend aangenomen, en $dy$ moet dan voldoen aan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s} = \mathrm{rc}_{PQ}.$$

Zonder bewijzen en zonder enige verwijzing naar het feit dat in die bewijzen infinitesimalen gebruikt worden, volgen dan de volgende rekenregels (de keuze van de letters is hier enigszins aangepast):

$$\begin{array}{ll} d(y+z) = dy + dz & d(y-z) = dy - dz \\ d(yz) = y\,dz + z\,dy & d(a) = 0 \ \ (a \text{ constant}) \\ d(ax) = a\,dx & y = z \Rightarrow dy = dz \end{array}$$

De regel voor $d\left(\frac{y}{z}\right)$ wijkt enigszins van de thans gebruikelijke af vanwege het feit dat Leibniz de subtangent $s$, ongeacht de oriëntatie, altijd positief neemt; hij geeft dus voor $d\left(\frac{y}{z}\right)$ twee mogelijkheden waartussen gekozen moet worden met gebruikmaking van de grafiek:

$$d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{\pm y\,dz \mp z\,dy}{z^2}.$$

Verder is er de regel $d\,x^a = ax^{a-1}\,dx$, voor een willekeurig rationaal getal $a$. Dit is belangrijk, zegt Leibniz, want hiermee zijn ook wortels en gebroken functies aan te pakken (zijn voorbeelden zijn: $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3\,dx}{x^4}$, $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,dx$). Tegenwoordig ziet dit er zo vanzelfsprekend uit, maar als we een ogenblik terugdenken aan de in 1680 vigerende tangenten- en normalenmethoden (zoals die

van Descartes in §§4 en 5), die alleen op veeltermen in $x$ en $y$ toegepast konden worden, zodat eerst alle wortelvormen en breuken weggewerkt moesten worden voordat je ze kon gebruiken, dan was deze regel voor $dx^a$ van zeer groot belang. Leibniz bracht dat duidelijk tot uitdrukking in de titel van zijn artikel: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus* ("Een nieuwe methode voor maxima en minima, alsook voor raaklijnen, die niet stokt bij gebroken of irrationale grootheden, & een opmerkelijke rekenwijze daarvoor").
Ook maxima en minima worden dus behandeld ($v(x)$ heeft een extreem, zegt Leibniz, als $dv = 0$), evenals buigpunten (dan moet gelden: $d(dv) = 0$). Ook de kettingregel ontbreekt niet; hij wordt algemeen geformuleerd en met een aantal voorbeelden toegelicht.

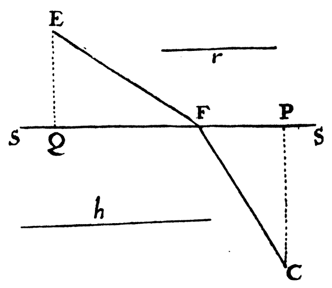
Al deze elementen komen samen in het fragment uit §9.2, waar Leibniz de brekingswet van Snellius afleidt uit het principe van Fermat: licht kiest tussen twee punten de snelste weg. In een homogeen medium plant licht zich volgens dit principe dus rechtlijnig voort, aan een grensvlak tussen twee homogene media wordt het gebroken volgens de regel dat de sinussen van de hoeken die de normaal maakt met de invallende en de uittredende lichtstraal omgekeerd evenredig zijn met de dichtheden van de twee media. Een bewijs? Zie het volgende fragment[23].

## 9.2 Het probleem

Bron: G.W. Leibniz, 'Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus', *Acta Eruditorum* 3(1684), pp. 467–473; het geciteerde fragment staat op pp. 471–472. Herdrukt onder andere in C.I. Gerhardt (ed.), *Leibnizens mathematische Schriften* Bd. 5, Halle 1858, pp. 220–226. Ook beschikbaar in vertaling: Engels ([Struik 1969], pp. 272–280; [Fauvel & Gray 1987], pp. 428–434) en Duits [Kowalewski 1908].
Geraadpleegd exemplaar: UB Leiden 1456 B 2. Uit dit exemplaar zijn de facsimiles van fragmenten uit het originele artikel afkomstig.

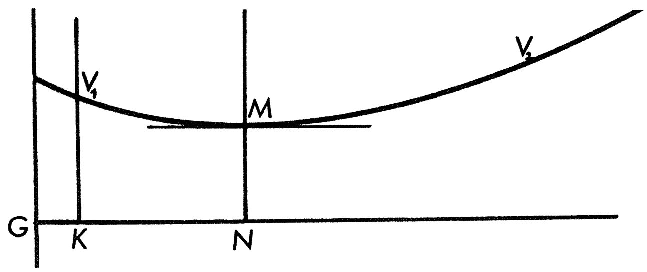
> "Laat twee punten C & E gegeven zijn, & een rechte SS in hetzelfde vlak als deze punten; gevraagd wordt een punt $F$, zo te nemen op lijn $SS$ dat, als $CF$ en $FE$ getrokken worden, de som van de rechthoek met zijden $CF$ en een gegeven [lijnstuk] $h$ en de rechthoek met zijden $FE$ en een gegeven [lijnstuk] $r$, de kleinste is van alle mogelijke. Dat wil zeggen, als $SS$ twee media scheidt, & $h$ stelt de dichtheid van het medium (water, bijvoorbeeld) aan de kant van $C$ voor, en $r$ de

[23] Zie ook [Andersen 1983] over de voorgeschiedenis van het probleem en over Fermats eigen oplossing.




Figuur 28: de twee media met hun grenslijn $SS$; *Nova methodus*, naast p. 467

dichtheid van het medium (lucht, bijvoorbeeld) aan de kant van $E$, dan zoeken we het punt $F$ zodanig, dat de weg van $C$ naar $E$ langs $F$ de gemakkelijkste van alle mogelijke wegen is. Laten we aannemen dat alle mogelijke sommen van rechthoeken, of alle weerstanden van de mogelijke wegen, voorgesteld [p. 472] worden door de ordinaten $KV$, loodrecht op $GK$, van kromme $VV$, die we $w$ zullen noemen, en dat hun minimum NM gezocht wordt. Omdat




Figuur 29: de kromme $VV$ $(w = h\sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2} + r\sqrt{e^2 + x^2})$

de punten $C$ & $E$ gegeven zijn, zullen ook hun loodrechte afstanden tot $SS$ gegeven worden, namelijk $CP$ (die we $c$ zullen noemen) & EQ (ofwel $e$) & bovendien $PQ$ (ofwel $p$).

Lijnstuk $QF$ nu, dat gelijk is aan $GN$ (of $AX$), zullen we $x$ noemen, & we zullen $f$ nemen voor $CF$ & $g$ voor $EF$; dan zal gelden: $FP = p - x$; $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ [Leibniz gebruikt de afkorting "aequ." waar wij = schrijven; zie fig. 30] of, afgekort $= \sqrt{l}$; $g = \sqrt{ee + xx}$ of, afgekort, $= \sqrt{m}$. We zullen dus hebben $w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, en van deze vergelijking is de vergelijking van de

Data ſint duo puncta C & E, & recta SS in eodem cum ipſis plano; quæritur punctum F in recta SS ita ſumendum, ut junctis CF, FE, ſit aggregatum rectangulorum, CF in datam h, & FE in datam r, omnium poſſibilium minimum, hoc eſt ſi SS ſit mediorum ſeparatrix, & h repræſentet denſitatem medii, ut aquæ, a parte C & r denſitatem medii ut aeris, a parte E, quæritur punctum F tale, ut via a C ad E per F ſit omnium poſſibilium facillima. Ponamus omnia iſta rectangulorum aggregata poſſibilia, vel omnes viarum poſſibilium difficultates, re-

Ooo præ-



præſentari per ipſas KV, curvæ VV ordinatas ad rectam GK normales, quas vocabimus ω, quærique minimam earum, NM. Quia dantur puncta C & E, dabuntur & perpendiculares ad SS, nempe CP (quam vocabimus c) & EQ (quam e) & præterea PQ (quam p) ipſam autem QF quæ ſit æqualis ipſi GN (vel AX) vocabimus x, & CF, f; & EF, g; fiet FP, p -- x; f æqu. √ cc + pp -- 2 p x + xx, ſeu compendio √ l, & g æq. √ ee + xx ſeu compendio √ m. Habemus ergo ω æqu. h √ l + r √ m, cujus æquationis æquatio differentialis (poſito dω eſſe 0, in caſu minimæ) eſt 0 æqu. -- h d l : 2 √ l -- r d m : 2 √ m per regulas calculi noſtri traditas; jam d l eſt -- 2 d x -- p + x, & d m eſt 2 x d x, ergo fit: h p -- x : f æqu. r x : g. quod ſi jam hæc accommodentur ad dioptricam, & ponantur f & g, ſeu CF & EF æquales, quia eadem manet refractio in puncto F quantacunque ponatur longitudo rectæ CF, fiet h p -- x æqu. r x, ſeu h : r :: x : p -- x, ſeu h ad r ut QF ad FP, hoc eſt ſinus angulorum incidentiæ & refractionis FP & QF erunt reciproce ut r & h, denſitates mediorum in quibus fit incidentia & refractio. Quæ denſitas tamen non reſpectu noſtri, ſed reſpectu reſiſtentiæ, quam radiis lucis faciunt, intelligenda eſt. Et habetur ita demonſtratio calculi, alibi a nobis in his ipſis Actis exhibiti, quando generale Opticæ, Catoptricæ & Dioptricæ fundamentum exponebamus. Cum alii doctiſſimi Viri multis ambagibus venati ſint, quæ hujus calculi peritus tribus lineis impoſterum præſtabit.

Figuur 30: Het probleem in de *Nova methodus*, pp. 471–472 differentialen volgens de regels van onze "calculus" (omdat $dw = 0$ in geval van een minimum)

$$0 = h\,dl : 2\sqrt{l} + r\,dm : 2\sqrt{m}$$

[in het origineel hebben beide termen van het rechterlid een minteken]. Maar $dl = -2(p-x)\,dx$ & $dm = 2x\,dx$, en daaruit volgt: $h(p-x) : f = rx : g$.
Als we dit nu toepassen op de dioptrica, & als we $f$ & $g$, ofwel $CF$ & $EF$, even groot nemen (want de breking in het punt $F$ blijft dezelfde, hoeveel er ook voor de lengte van het lijnstuk $CF$ genomen wordt), dan geldt

$$h(p-x) = rx \text{ ofwel } h : r = x : (p-x),$$

ofwel $h$ staat tot $r$ als $QF$ tot $FP$, dat wil zeggen: de sinussen van de hoek van inval en de brekingshoek $FP$ & $QF$ [Leibniz neemt CF als lengte-eenheid] zijn omgekeerd evenredig met $r$ en $h$, de dichtheden van de media waarin de inval en de [uittreding na] breking plaatsvinden. De dichtheid moet, vanzelfsprekend, niet gezien worden als de door onszelf ondervonden dichtheid, maar als de dichtheid voortkomend uit de weerstand die de lichtstralen ondervinden. (...)
Andere zeer geleerde Heren hebben langs vele omslachtige wegen gezocht naar datgene wat iemand die thuis is in deze "calculus" in drie regels te voorschijn kan toveren."

## 9.3 Commentaar

Er is eigenlijk nauwelijks commentaar nodig bij dit fragment, althans niet ter verduidelijking van de inhoud. Leibniz behoort met zijn *Nova methodus* tot onze tijd. Dat zijn tijdgenoten meer moeite hadden met de 'nieuwe methode' zal geen verbazing wekken, maar gelukkig had ook Leibniz, evenals Descartes, volgelingen in de nieuwe generaties wiskundigen die in samenwerking met hem zijn methode verder ontwikkelden (Jakob en Johann Bernoulli) en propageerden (l'Hôpital). Over die fase gaat de volgende, afsluitende paragraaf van dit artikel.
Over de periode 1665–1690 zou nog zeer veel te zeggen zijn, over de vraag hoeveel Leibniz van Newtons werk geweten kan hebben, bijvoorbeeld. Of over het feit dat de ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening gepaard ging met de invoering van tal van nieuwe wiskundige objecten (fluxies, differentialen) en notaties, en het belang van deze nieuwe notaties. Of over het bezwaar dat klassiek geschoolde wiskundigen (Huygens bijvoorbeeld) hadden tegen het algoritmisch oplossen van raaklijn- en quadratuurproblemen. Of over de filosofische kritiek op het werken met infinitesimalen, die niet lang op zich liet wachten. Maar we zouden slechts over de schouder van Leibniz meekijken, en niet in zulke verten.

# 10 1691-1700: een fysisch probleem uit de *Analyse des infiniment petits* van l'Hôpital

## 10.1 Inleiding

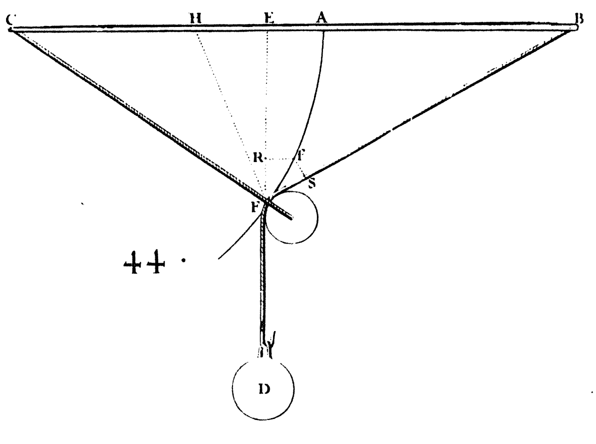
Dezelfde positie die Van Schooten had ten opzichte van Descartes' *Géométrie* nam Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704) in ten opzichte van de *Nova Methodus* van Leibniz. Hij schreef het eerste leerboek over differentiaalrekening (*Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*, Parijs 1696), waarin hij de 'nieuwe methode' op systematische wijze opbouwde en waarin hij, thematisch geordend in 10 hoofdstukken, een grote hoeveelheid toepassingen gaf.
L'Hôpital had zelf, nadat hij als autodidact aan de wiskunde was begonnen, omstreeks 1691 de differentiaalrekening geleerd in privélessen van Johann Bernoulli, die na 1684 met zijn broer Jakob in nauw contact met Leibniz diens ideeën verder uitgewerkt had. De markies en zijn leraar sloten een overeenkomst dat de laatste de eerste tegen betaling zijn nieuwste ontdekkingen zou meedelen. De *Analyse des infiniment petits* bevat dus bepaald niet alleen eigen werk van L'Hôpital, iets waar de auteur overigens aan het eind van zijn voorwoord openlijk voor uitkwam: "Overigens erken ik veel te danken te hebben aan de inzichten van de heren Bernoulli, vooral aan die van de jongste [Johann], die tegenwoordig professor is in Groningen. Ik heb zonder scrupules gebruik gemaakt van hun ontdekkingen en van die van de heer Leibniz. Daarom ben ik ermee accoord dat zij voor zich opeisen wat ze er maar van willen, en ik ben tevreden met wat ze voor me over zullen willen laten." Na de dood van L'Hôpital openbaarde Johann Bernoulli inderdaad hoe de *Analyse des infiniment petits* tot stand gekomen was. Hij eiste voor zichzelf de ontdekking op van de stelling (*Analyse* §163) dat $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ (als $f(a) = g(a) = 0$, $f$ en $g$ in een omgeving van $a$ differentieerbaar zijn, en als $g'(a) \neq 0$), maar te laat, want die draagt tot op heden de naam van L'Hôpital. De claim van Bernoulli (in de *Acta Eruditorum* van augustus 1704) leverde argwaan op bij tijdgenoten, maar de briefwisseling tussen Bernoulli en L' Hôpital die in 1955 gepubliceerd werd ([Bernoulli 1955]) toont inderdaad het bestaan van de overeenkomst aan, en bevat een brief van 22 juli 1694, waarin Bernoulli de markies de stelling van 'L'Hôpital' meedeelt. De eerste druk van de *Analyse* verscheen anoniem. Misschien vermoedde de auteur toch problemen met de auteursrechten?

De *Analyse* geeft in hoofdstuk 3 ('De maximis & minimis', de enige hoofdstuktitel in het Latijn, maar zo heette het onderwerp nu eenmaal overal) een lange serie extreme waarde problemen. De afleiding van de wet van Snellius volgens het voorbeeld van Leibniz (zie §9) is een van die problemen (H3 voorbeeld 11 = §59). De didactische kwaliteiten van L'Hôpital (of van Johann Bernoulli, zo men wil) blijken uit de context waarin hij het probleem plaatst: 'Een reiziger moet, om van een gegeven plaats $C$ een andere gegeven plaats $F$ te bereiken zijn weg kiezen door twee verschillende terreinen, gescheiden door een rechte lijn $AEB$. Gegeven is dat hij in het terrein waar $C$ in ligt in een gegeven tijd $c$ een afstand $a$ aflegt; in het andere gebied, waar de plaats $F$ in ligt, legt hij in dezelfde tijd $c$ een afstand $b$ af. Gevraagd wordt het punt $E$, waar hij lijn $AEB$ moet passeren, om in de kleinst mogelijke tijd uit $C$ in $F$ aan te komen."

Dit probleem en ook het volgende (zowel in de *Analyse* als hier) maakten deel uit van de strategie die L'Hôpital volgde om zijn lezers te overtuigen van het nut en de kracht van de differentiaalrekening (meer daarover in §10.3).

## 10.2 Het probleem

Bron: *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*, Parijs (de l'Imprimerie Royale) 1696; anoniem gepubliceerd, latere drukken verschenen wel onder de naam van L'Hôpital. Fragment van pp. 51-52, en figuur 44 van plaat 4.
Geraadpleegd exemplaar: UB Leiden: 1413 D 13




Figuur 31: de bijbehorende figuur uit de *Analyse* (plaat 4, figuur 44)

"Zij $F$ een katrol die vrij hangt aan het eind van een in $C$ bevestigd touwtje $CF$, en $D$ een gewicht. $D$ hangt aan het touwtje $DFB$, dat over katrol $F$ heen loopt en bevestigd is in $B$, zo dat de punten $C$ en $B$ op dezelfde horizontale lijn $CB$ gelegen zijn. Men veronderstelt dat de katrol en de touwtjes geen gewicht hebben; & men vraagt op welke plaats het gewicht $D$ of de katrol $F$ zich zullen ophouden.

> Het is duidelijk uit de beginselen van de Mechanica dat het gewicht $D$ de laagst mogelijke positie onder de horizontale lijn $CB$ zal innemen; waaruit volgt dat de loodlijn $DFE$ een *maximum* moet zijn. Noem de gegeven lijnstukken $CF = a$, $DFB = b$, $CB = c$, & neem als onbekende $CE = x$. Dan zal men hebben $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$ & $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$, hetgeen een *maximum* moet zijn; en uitgaande van haar differentiaal $\frac{c\,dx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}} = 0$, waaruit men afleidt $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, [p.52] vindt men na deling door $x - c$, $2cxx - aax - aac = 0$. Een van de twee wortels levert voor $CE$ een zodanige waarde dat de loodlijn $ED$ via de katrol $F$ & het gewicht $D$ loopt wanneer deze in rust zijn."

## 10.3 Commentaar

L'Hôpital heeft dit probleem waarschijnlijk opgenomen omdat het op twee manieren pleit voor de toepassing van differentiaalrekening.

In de eerste plaats sprak hij er de aanhangers van de klassieke methoden voor het bepalen van extremen mee aan. Kenmerkend is zijn bespreking van die methoden in het voorwoord van de *Analyse* (Préface p.4):

> ... *Descartes* ging verder waar de Ouden opgehouden waren, en meteen aan het begin gaf hij de oplossing van een Probleem waarvan *Pappus* zei (*Collectio Mathem. begin van Boek 7*) dat ze er allemaal op vastgelopen waren. Men weet tot waar hij de Analyse [lees: Algebra, j.v.m.] en de Meetkunde gebracht heeft, & hoe zeer het resultaat van hun samensmelting de oplossing van tal van Problemen gemakkelijk maakt, die vóór zijn tijd niet aan te vatten leken. Maar omdat hij zich voornamelijk richtte op het oplossen van vergelijkingen, had hij slechts aandacht voor krommen voor zover ze hem konden dienen om er de wortels van vergelijkingen mee te vinden: zodat hij — omdat hij daarvoor genoeg had aan de gangbare Analyse — er niet op uit was om er een andere voor in de plaats te zoeken. Toch heeft hij niet nagelaten om haar [de gewone algebra, j.v.m] te gebruiken voor het opsporen van de Raaklijnen; & de Méthode die hij daarvoor ontdekte kwam hem zo mooi voor dat hij zonder moeite stelde (*Géométrie* Boek 2), dat *dit Probleem het nuttigste [Préf. p.5] & het meest algemene was, niet alleen wat hij kende, maar zelfs wat hij ooit had willen kennen in de Meetkunde.*

Er waren meer raaklijnmethoden, zo vervolgt L'Hôpital met verwijzing naar Fermat en Barrow, maar steeds moest men, "evenals in de méthode van Descartes, eerst de voorkomende breuken verwijderen en alle worteltekens laten verdwijnen om zich ervan te kunnen bedienen" (Préf. p.5). En daarin schuilt de kracht van Leibniz' methode: "die werkt zowel voor transcendente als voor algebraïsche krommen; worteltekens storen hem niet & zijn zelfs soms handig." Het tiende hoofdstuk van de *Analyse* is er zelfs speciaal aan gewijd om aan te tonen dat Leibniz' methode "alles oplevert wat men kan krijgen met de methode van *Descartes* en *Hudde*" (Préf. p.8), maar dat de differentiaalrekening nog veel en veel meer geeft. Steeds weer komt dit thema terug. In het hoofdstuk 'De maximis et minimis' neemt L'Hôpital zelfs letterlijk een probleem uit een commentaar van Van Schooten over (*Analyse* p.44 $\equiv$ *Geometria* 1659 p.263).

> "Het lijnstuk $AB$ in een punt $E$ in twee stukken te snijden, zo dat het produkt van het kwadraat van het ene deel ($AE$) met het andere ($EB$) het grootste is van alle op deze wijze gevormde produkten."

Van Schooten[24] noemt $AB = a$ en $AE = x$ zodat $EB = a - x$. Te maximaliseren is dus de vorm $x^2(a-x) = ax^2 - x^3$. Daarvoor past Van Schooten de dubbelwortelmethode van Descartes toe: wil $b^3$ het maximum zijn, dan moet de vergelijking $ax^2 - x^3 = b^3$ twee samenvallende wortels $x_0$ hebben. Dus zoekt hij getallen $x_0, b$ en $f$ zo, dat $x^3 - ax^2 + b^3$ van de vorm $(x-x_0)^2(x+f)$ is. Vergelijking van coëfficienten geeft

$$\begin{cases} -2x_0 + f = -a & (I) \\ x_0^2 - 2x_0 f = 0 & (II) \\ x_0^2 f = b^3 & (III) \end{cases}$$

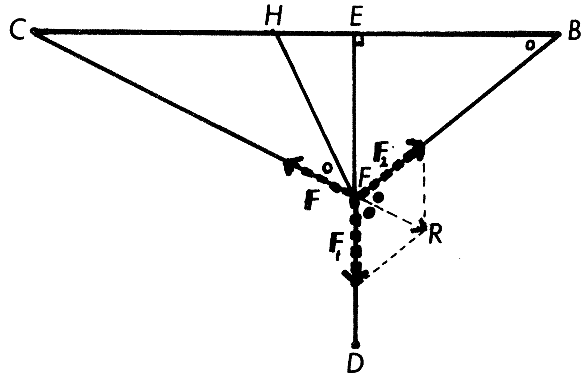
Omdat $x_0 = 0$ geen maximum oplevert moet wegens (II) gelden $f = \frac{1}{2}x_0$, en substitutie hiervan in (I) geeft $x_0 = \frac{2}{3}a$, zodat uit (III) volgt dat het maximum $b^3$ gelijk is aan $\frac{4}{27}a^3$.

Met de regel van Hudde had Van Schooten $x_0$ sneller kunnen bepalen, maar het snelst is en blijft de weg die L'Hôpital gaat in navolging van Leibniz (en Johann Bernoulli niet te vergeten): bekijk de kromme $y = \frac{1}{a^2}(ax^2 - x^3)$. Stel $dy = \frac{1}{a^2}(2ax\,dx - 3x^2\,dx) = 0$, dat geeft $AE = x = \frac{2}{3}a$. En overtuigender dan met het maximaliseren van $DFE = b - \sqrt{a^2 + c^2 - 2cx} + \sqrt{a^2 - x^2}$ kan de kracht van de 'nieuwe methode' tegenover "toute cette variété des méthodes', (Préf. p.8) natuurlijk moeilijk aangetoond worden.

Klassiek werden problemen als het probleem uit §10.2 echter aangepakt via de regel dat de katrol in $F$ in evenwicht is als de in $F$ aangrijpende krachten elkaar opheffen. Om de aanhangers van deze techniek voor de differentiaalrekening te winnen laat L'Hôpital zien dat toepassing van het krachtenevenwicht ook kan, en dat er hetzelfde uitkomt. Het kost alleen meer moeite, en de oplossingsmethode is lang niet zo algemeen. We keren even terug naar het probleem.

[24]Er is alleen een verschil in de namen van de punten. Van Schooten werkt met een lijnstuk $AC$ dat in $B$ gesneden wordt. Bij L'Hôpital wordt voor het extreem - zoals steeds - het punt $E$ gezocht, en heet het lijnstuk $AB$. Ik zal hier de notatie van Van Schooten aan die van L'Hôpital aanpassen.

De gegevens (zie fig. 31) zijn zoals eerder:
$CF = a$, $BF + FD = b$ en $BC = c$. Gezocht wordt $CE = x$ zo, dat de krachten in $F$ elkaar opheffen. Nu werkt op $F$, wegens het gewicht in $D$, een kracht $\vec{\mathbf{F}}_1$ in de richting van $D$ en door de werking van de katrol een even grote spankracht $\vec{\mathbf{F}}_2$ in de richting van $B$. Alleen als de resultante van $\vec{\mathbf{F}}_1$ en $\vec{\mathbf{F}}_2$ in het verlengde van $CF$ ligt, heffen de krachten in $F$ elkaar op (zie fig. 32), en omdat $\mid \vec{\mathbf{F}}_1 \mid = \mid \vec{\mathbf{F}}_2 \mid$




Figuur 32: Evenwicht in $F$ als $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$ in het verlengde van $CF$ ligt.

betekent dit dat diagonaal $FR$ van het krachtenparallellogram hoek $BFD$ in twee gelijke hoeken deelt, èn in het verlengde van $CF$ ligt.
Omdat $\angle BFR = \angle DFR$ zijn ook de supplementen van deze hoeken gelijk[25]:

$$\angle BFC = \angle DFC. \quad (1)$$

Neem nu op $CE$ het punt $H$ zo, dat $\angle CFH = \angle CBF$. Dan zijn $\triangle CFH$ en $\triangle CBF$ gelijkvormig, zodat

$$\frac{CH}{CF} = \frac{CF}{CB}$$

waaruit $CH$ volgt: $CH = \frac{a^2}{c}$, en dus $HE = x - \frac{a^2}{c}$. Verder zijn $\triangle ECF$ en $\triangle EFH$ gelijkvormig ($\angle FHC = \angle BFC$ wegens $\triangle CFH \sim \triangle CBF$, dus $\angle EFC = 180° - \angle DFC \overset{(1)}{=} 180° - \angle BFC = 180° - \angle FHC = \angle EHC$, en in beide driehoeken is $\angle E = 90°$), en dus:

$$\frac{EF}{EH} = \frac{EC}{EF}\text{, ofwel } \frac{y}{x - \frac{a^2}{c}} = \frac{x}{y}.$$

[25] L'Hôpital gaat ook van deze gelijkheid van hoeken uit, maar geeft een iets andere afleiding. Vanaf hier volgen we hem weer op de voet.

Gecombineerd met $y^2 = a^2 - x^2$ (wegens $\angle CEF = 90°$) volgt hieruit $a^2 - x^2 = x^2 - \frac{a^2}{c}x$, en dus moet $x = CE$ een oplossing zijn van de eerder gevonden vergelijking (zie §10.2)

$$2x^2c + a^2x - a^2c = 0.$$

Opnieuw een overtuigend bewijs van de kracht en de algemeenheid van de 'nieuwe methode'!

# Besluit

De in het begin gewekte indruk, dat er weinig lijn in dit verhaal zou zitten, is niet helemaal uitgekomen. Verschillende karakteristieken van de zeventiende-eeuwse wiskunde zijn er namelijk zeker in aanwezig. Ik noem er een paar:

- de opkomst van algebraïsch-analytische algoritmen (de analytische meetkunde, de differentiaal- en integraalrekening), die op den duur meetkundige technieken vervingen. Eigenlijk eindigt daarmee het tijdperk van de klassieke Griekse wiskunde en begint de moderne wiskunde.
- de ontwikkeling van nieuwe notaties (door Descartes, Newton en Leibniz)
- de belangrijke rol die Frans van Schooten Jr rond het midden van de eeuw gespeeld heeft in de opbouw en de verspreiding van de analytische meetkunde
- de verschuiving — in elk geval in de Nederlanden — van praktisch georiënteerde naar meer abstrakte wiskunde.

Wie terugkijkt op deze tien problemen zal zich wellicht afvragen wat de toepasbaarheid ervan binnen het wiskundeonderwijs is. Laat ik daar tot besluit nog iets over zeggen. Sommige problemen zijn meteen te gebruiken, sommige na enige aanpassingen en sommige absoluut niet. Het probleem van de lichtbreking heeft (met 'mooie' getallen) op mijn school een som opgeleverd voor een mondeling schoolonderzoek Wiskunde A, voor een drietal leerlingen die naast Wiskunde A ook Wiskunde B en Natuurkunde in hun pakket hadden. De hoogtemeting met een stok en een spiegel door Cardinael lijkt in een derde of vierde klas Havo/VWO bruikbaar, zeker als de historische context benadrukt wordt en de leerlingen de tekst in de oorspronkelijke editie voorgelegd krijgen (in projektvorm met de sektie Nederlands?). Andere problemen leveren misschien weer stof voor een verhaal (Maurits' gelijkvormigheidsconstructie, bijvoorbeeld, of Huygens' quadratuur). Maar belangrijker nog lijkt me dat we, door over tien schouders mee te kijken, ook meer kijk gekregen hebben op de waarde van de begrippen, notaties en technieken die wij zelf hanteren. Differentiëren en integreren, bijvoorbeeld, zijn minder vanzelfsprekend dan we geneigd zijn te denken. Wiskunde is iets bijzonders, iets verbazingwekkends. Hopelijk is dat hetgene wat van dit verhaal zal doorklinken (liefst tot in de klas)!

# Dank

Graag bedank ik hierbij de medewerkers van de Dousa-kamer van de Leidse Universiteitsbibliotheek voor hun medewerking bij de selektie en reproduktie van de illustraties. De conservator van de afdeling 'Westerse Handschriften' ben ik zeer erkentelijk voor zijn toestemming om hier de figuren 4 en 18 te reproduceren.

# Literatuur

**[Andersen 1983]** K. Andersen, 'The mathematical technique in Fermat's deduction of the law of refraction', *Historia Mathematica* 10(1983), pp. 48–62

**[Baron 1969]** M.E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Oxford 1969

**[Bernoulli 1955]** O. Spiess (ed.), *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* (Bd. I), Basel 1955

**[Bos 1974]** H.J.M. Bos, 'Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, *Archive for history of exact sciences* 14(1974), pp. 1–90

**[Boyer 1959]** C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York $^{3}$1959

**[Boyer 1968]** —, *A History of Mathematics*, New York etc. 1968

**[Dijksterhuis 1943]** E.J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, 's-Gravenhage 1943

**[Edwards 1979]** C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, New York 1979

**[Fauvel & Gray 1987]** J. Fauvel; J. Gray, *The History of Mathematics: A Reader*, Houndmills/Londen 1987

**[Grootendorst 1988]** A.W. Grootendorst, *Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde*, Delft 1988

**[Heinekamp 1986]** A. Heinekamp (ed.), '300 Jahre „Nova methodus" von G.W. Leibniz (1684–1984)', *Studia Leibnitiana* Sonderheft 14(1986)

**[Kowalewski 1908]** G. Kowalewski (ed.), *Leibniz über die Analysis des Unendlichen*, Leipzig (Ostwald Klassike No. 162) 1908

**[Van Maanen 1987]** J.A. van Maanen, *Facets of seventeenth century mathematics in The Netherlands*, Utrecht (dissertatie) 1987

**NMP** D.T. Whiteside (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (8 vols), Cambridge 1967–1981

**[Smith & Latham 1954]** D.E. Smith, M.L. Latham (eds), *The Geometry of René Descartes. With a facsimile of the first edition*, New York 1954

**[Stevin 1958]** *The principal works of Simon Stevin* (Vols *II*A, *II*B Mathematics, edited by D.J. Struik), Amsterdam 1958

**[Struik 1977]** D.J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, Amsterdam $^2$1977 (oorspr. Eng. ed.: New York 1948, 1$^e$ Ned. ed.: Utrecht/Antwerpen 1965)

**[Struik 1979]** —, *Het land van Stevin en Huygens*, Nijmegen $^3$1979

**[Struik 1986]** — (ed.), *A Source Book in Mathematics*, Princeton $^2$1986 (1$^e$ ed.: Cambridge MA 1969)

**[Thomas 1967/8]** I. Thomas (ed.), *Selections illustrating the History of Greek Mathematics* (2 vols), Londen etc. (Loeb Classical Library No. 335, 362) 1967/8

**[Tropfke 1980]** J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, Bd I, Berlijn $^4$1980

**[Wussing & Arnold 1975]** H. Wussing, W. Arnold (eds), *Biographien bedeutender Mathematiker*, Berlijn 1975

**[Wansink 1978/9]** J.H. Wansink, 'De regel van drieën, volgens Bartjens, een didactisch fossiel', *Euclides* 54(1978/9), pp. 2–7

**[Westfall 1980]** R.S. Westfall, *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*, Cambridge etc. 1980

**[Wijnman 1933/4]** H.F. Wijnman, 'De Amsterdamsche rekenmeester Sybrandt Hansz Cardinael', *Het boek* Niewe Reeks 22(1933/4), pp. 73–94

# Descartes en het Begin van de Analytische Meetkunde

H.J.M. Bos

(1) Als we de geschiedenis van de wiskunde in de zeventiende eeuw van verre bezien, dan zijn er twee hoogtepunten: het ontstaan van de *Analytische Meetkunde* in de 1630'er jaren, vooral door het werk van Descartes en Fermat, en de schepping van de *Differentiaal- en Integraalrekening* door Newton en Leibniz in de periode 1665-1685. Bij beide vernieuwingen ging het erom redenaties die voordien alleen meetkundig werden gevoerd—in proza weergegeven argumenten met betrekking tot een meetkundige figuur—symbolisch weer te geven met behulp van een serie formules, waarbij de logische stappen de vorm kregen van algebraïsche afleidingen. Beide zijn daarmee voorbeelden van een proces dat heel sterk de zeventiende-eeuwse wiskunde heeft bepaald: de verbinding van algebra en meetkunde, van figuur en formule.

Wat betreft de analytische meetkunde is het belangrijkste moment geweest de publikatie in 1637 van Descartes' *Géométrie,* want die verhandeling en de latere van uitvoerig commentaar voorziene Latijnse vertalingen ervan verspreidden de nieuwe techniek onder de zeventiende-eeuwse wiskundigen. In het volgende zal ik ingaan op de vraag wat dat boek inhield en wat Descartes ermee voorhad.

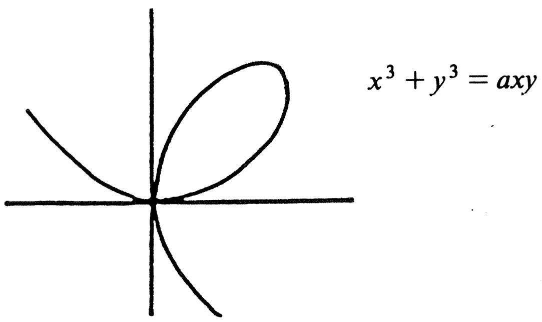
(2) Descartes' eigen interesses waren vooral filosofisch van aard. Twee thema's stonden centraal in zijn filosofisch denken: de vraag naar *methode* en die naar *waarheid en zekerheid.* De *Géométrie* was niet een losstaand boek, het was een verhandeling die als appendix was opgenomen bij Descartes' filosofische hoofdwerk, de *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*† (Verhandeling over de methode om het verstand goed te sturen en de waarheid te zoeken in de wetenschappen), dat in 1637 in Leiden verscheen. Descartes zag zijn meetkundige studie als een voorbeeld van toepassing van een filosofische methode om zekere kennis te verkrijgen. Dat dat voorbeeld een wiskundig voorbeeld was is niet verwonderlijk want Descartes putte inspiratie uit de wiskunde; in de *Discours* schrijft hij met bewondering over de 'lange ketens van redeneringen' ('longues chaînes de raisons') die de wiskundigen gebruiken om resultaten af te leiden; bij iedere stap, iedere schakel in de keten, blijft de zekerheid bewaard; het resultaat is even

† DESCARTES, R., *La Géométrie* (een der 'essays' bij) *Discours de la méthode,* Leiden 1637 (pp. 297-413). De *Géométrie* is het eenvoudigst toegankelijk in: D.E. SMITH and M.L. LATHAM (eds.), The geometry of René Descartes, New York (Dover) 1954; deze editie bevat een facsimile van de oorspronkelijke tekst en een vertaling in het Engels. De *Discours* raadpleegt men het best in DESCARTES, R., *Discours de la méthode, texte et commentaire par Etienne Gilson,* Paris (J. Vrin) 1925 (er zijn ook latere edities).

zeker als de uitgangspunten. Maar hoe kon men van die axioma's weten dat ze zeker waren? Descartes gaf een criterium voor zekere kennis: als men bij zorgvuldige en langdurige overdenking tenslotte een helder en duidelijk ('clair et distinct') beeld voor ogen heeft van een zaak dan mag men er zeker van zijn dat dat beeld overeenkomt met de waarheid.

De meetkunde was in Descartes' tijd nog sterk bepaald door de klassieke Griekse meetkunde. Euclides' *Elementen*† vormden de algemeen aanvaarde grondslag van alle meetkundige studies; daar zag Descartes ook de lange ketens van redeneringen die hij zo bewonderde. Hogere meetkunde, zoals de theorie van kegelsneden en de bepaling van oppervlakten en inhouden van figuren, werd geleerd uit de werken van Apollonius en Archimedes. Slechts incidenteel werden resultaten bereikt die essentieel uitgingen boven het Griekse mathematische erfgoed.

(3) Uit het samengaan van Descartes' filosofische interesses en de interesses van het toenmalige vakgebied meetkunde ontsproot de *Géométrie,* het boek dat in grote mate bijdroeg tot de analytische meetkunde, het boek waarin we de belangrijkste aanzet vinden voor het idee dat meetkundige figuren, in het bijzonder krommen, corresponderen met algebraïsche objecten, namelijk vergelijkingen in twee variabelen. Zo correspondeert bijvoorbeeld de kromme in Figuur 1, die later naar Descartes genoemd is (het 'folium', blad, van Descartes) met de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$. Door deze correspondentie kan men figuren bestuderen door de bijbehorende vergelijking te beschouwen en omgekeerd kan men over vergelijkingen veel te weten komen door de figuren te bestuderen waarmee ze corresponderen.




FIGUUR 1

(4) Maar, als men de *Géométrie* opslaat met het idee een boek over analytische meetkunde in handen te hebben dan wordt men met vele puzzels

† Over de *Elementen* zie DIJKSTERHUIS, E.J., *De Elementen van Euclides,* Groningen 1929-1930. De tekst zelf is het eenvoudigst te raadplegen in HEATH, TH.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* New York (Dover) 1956 (oorspr. ed. 1908).

geconfronteerd. Ik noem er een paar: (1) Er staan geen axioma's, stellingen en nauwelijks bewijzen in de *Géométrie.* Op het eerste gezicht is het dus zeer onduidelijk in welk opzicht de *Géométrie* past in Descartes' beeld van de wiskunde waarin zekerheid verkregen wordt door ketens van redeneringen. (2) Men kan zich ook afvragen in hoeverre het idee dat een kromme weergegeven wordt door een vergelijking (en vice versa) voldoet aan Descartes' criterium van zekerheid. Een vergelijking levert een impliciete definitie van een kromme: punten waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen behoren tot de kromme, andere niet. Maar kent men de kromme dan ook? Hoe moet men zich, vanuit de vergelijking, de krommen 'helder en duidelijk' voor ogen brengen? (3) De analytische meetkunde dient vooral voor de studie van krommen; echter in de vroeg-moderne meetkunde was er eigenlijk relatief weinig belangstelling voor krommen; er was meer aandacht voor problemen omtrent rechtlijnige figuren (driehoeken e.d.). Maar voor zulke problemen is analytische meetkunde geen geschikte methode. (4) De *Géométrie* bevat een uitgebreide theorie over vergelijkingen in één onbekende, hun wortels, het gedrag van de coëfficiënten bij substituties en dergelijke. Het is op het eerste gezicht volledig onduidelijk wat deze theorie van doen heeft met analytische meetkunde, die immers vergelijkingen in twee variabelen betreft. — En tenslotte is er, wat ik zelf het meest curieuze aspect van het boek vind, de demarcatie van de meetkunde: (5) Descartes stelt met grote nadruk dat sommige objecten wel tot de meetkunde behoren en andere niet. In het bijzonder meent hij dat sommige krommen wel en andere zeker niet in de meetkunde gebruikt mogen worden. Hij werkt dus met een principiële *demarcatie* van de meetkunde. Die demarcatie blijkt te zijn: alles wat algebraïsch is (algebraïsche krommen met name) is toelaatbaar in de meetkunde, maar niet-algebraïsche zaken, transcendente krommen bijvoorbeeld, horen niet in de meetkunde thuis. Welnu, waarom zou algebra het criterium voor een zo principiële afgrenzing van de meetkunde leveren?

(5) Dat zijn voorlopig genoeg puzzels en we kunnen, om ze op te lossen, niet beter doen dan de *Géométrie* te lezen. De eerste zin van het werk luidt:

> Alle problemen van de meetkunde kunnen eenvoudig in zulke termen herschreven worden dat het daarna slechts nodig is om de lengte van zekere rechte lijnstukken te kennen, om de problemen te construeren†.

Die eerste zin maakt goed duidelijk waarover het volgens Descartes in de meetkunde gaat: om het oplossen van problemen, en dat oplossen betekent construeren. Descartes zag dus meetkunde als probleem oplossen. Die opvatting was niet ongewoon in zijn tijd; vele meetkundigen beschouwden toen de meetkundige theorie in zekere zin als voltooid en zagen hun taak vooral in het

† Tous les Problesmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire (p. 297).

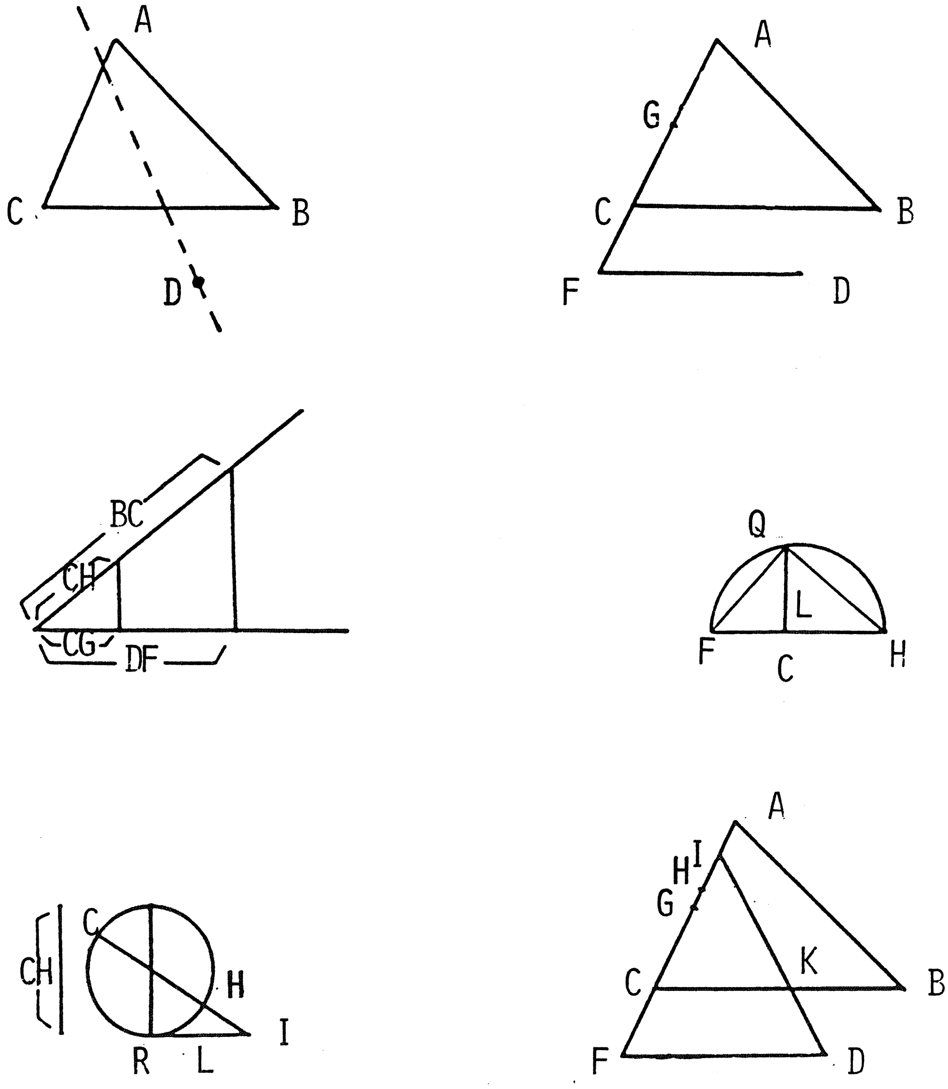
toepassen van de klassieke stellingen bij het oplossen van problemen. Op ons komt zo'n visie wat ongewoon over, wij zouden wellicht eerder verwachten dat meetkunde gezien werd als de studie van een axiomatisch deductief systeem van stellingen en bewijzen, of als de onderneming om nieuwe eigenschappen van allerlei meetkundige objecten te vinden. Voor Descartes was meetkunde echter problemen oplossen en we zullen, om het boek te begrijpen, moeten nagaan wat voor problemen hij op het oog had, en wat hij bedoelde met het construeren van de oplossingen.

(6) We kunnen dat het beste doen door een voorbeeld te geven van een probleem met een constructie. Als voorbeeld kies ik een probleem uit de *Geometria practica* (Praktische meetkunde) van Christoph Clavius, dat in 1604 verscheen.[†] Descartes heeft dat boek vrijwel zeker gelezen en het voorbeeld is karakteristiek voor het soort problemen dat omstreeks 1600 veel werd bestudeerd. Het probleem betreft de verdeling van een driehoek in twee gelijke delen. Figuur 2 geeft de gang van zaken weer; ik beschrijf het probleem en de constructie die Clavius voorschrijft stapsgewijs:

**Probleem**. Gegeven een driehoek ABC en een punt $D$; er wordt gevraagd een lijn door $D$ te construeren die de driehoek in twee gelijke delen verdeelt. (Clavius behandelde het geval dat de lijn $DA$ de driehoek verdeelt in delen waarvan het rechter kleiner dan het linker is; de gevraagde lijn zal dan dus links van $A$ lopen—andere gevallen gaan analoog.)
**Constructie**. (1) Trek een lijn door $D$ evenwijdig aan $CB$; die snijdt het verlengde van $AC$ in $F$; deel $AC$ middendoor in $G$. (2) Neem $H$ op $CA$ zo dat $CH$ de vierde evenredige is van $DF$, $BC$, en $CG$ (dat wil zeggen $DF:BC=CG:CH$). Deze constructie kon Clavius aan zijn lezers overlaten, hij staat namelijk bij Euclides (*Elementen* 6-12). Euclides schrijft voor dat men $DF$, $BC$ en $CG$ afpast langs de benen van een willekeurige hoek als in de figuur; men verbindt de uiteinden van $BC$ en $DF$ en trekt een evenwijdige lijn door het uiteinde van $CG$, die lijn bepaalt op het andere been de gevraagde $CH$. (3) Bepaal de middelevenredige $L$ van $FC$ en $CH$ (dat wil zeggen het lijnstuk L met de eigenschap $FC:L=L:CH$). Ook dit was een standaardconstructie (*Elementen* 6-13) en werd als volgt uitgevoerd: pas $FC$ en $CH$ af langs een rechte; trek een halve cirkel met FH als middellijn; richt een loodlijn op in $C$ die de cirkelboog snijdt in $Q$; $CQ$ is de gevraagde middelevenredige $L$. (4) Bepaal $I$ op $CA$ zo dat rechthoek $(CI,HI)$ = vierkant $(L,L)$, dat wil zeggen $CI\cdot HI=L^2$. Clavius verwees hier naar een constructie die hij had uitgewerkt in zijn uitgave van Euclides *Elementen*[¶] als commentaar bij Stelling 36 uit boek 6. Die constructie verliep zo: trek $RI=L$ en daarop loodrecht in $R$ een lijn gelijk aan $CH$; trek een cirkel met de laatstgenoemde lijn als middellijn; trek een lijn door $I$ en het middelpunt van die cirkel, die lijn snijdt de cirkel in $H$

† CLAVIUS, C., *Geometria practica*, Rome 1604, boek VI, Prop. 12, pp. 294-295.
¶ *Euclidis Elementorum libri XV (-)* (ed. C. Clavius), Rome 1589.

en $C$; $CI$ en $HI$ voldoen aan de gevraagde relatie. (5) Trek een lijn door $D$ en $I$, die snijdt $CB$ in $K$; $DI$ is de gevraagde lijn; dat wil zeggen driehoek $CKI = \frac{1}{2}$ diehoek ABC. — Na de constructie uitgelegd te hebben leverde Clavius het bewijs dat de uitkomst inderdaad correct was.†




FIGUUR 2

† Kort samengevat is het bewijs als volgt (de nummers verwijzen naar de constructiestappen): $CI \times IH =^{(4)} L^2 =^{(3)} CF \times CH$. Dus $IH : CH = CF : CI$, zodat $(IH + CH) : CH = (CF + CI) : CI$, dat wil zeggen $CI : CH = IF : CI = FD : CK$ (gelijkvormige driehoeken). Dus $CK \times CI = FD \times CH =^{(2)} CG \times BC = \frac{1}{2} AC \times BC$, en daarom driehoek $CKI = \frac{1}{2}$ driehoek ABC.

(7) Er zijn een aantal dingen die opvallen aan dit voorbeeld en die karakteristiek zijn voor de vroeg-moderne traditie van meetkundige problemen. Allereerst: Clavius presenteert de oplossing apodictisch: zo moet het, de meester doet het voor en bewijst ook nog dat het klopt, de leerling kan weinig anders doen dan in bewondering de stappen volgen. Wat Clavius niet weergeeft is hoe hij de constructie *gevonden* heeft; je leert hieruit niet hoe je zelf dit soort problemen zou kunnen oplossen, er is geen *vindmethode,* geen *analyse.* Waarschijnlijk zat er wel zo'n methode achter Clavius' oplossing, maar de constructie en het bewijs verraden die niet.

We zien ook wat een wonderlijke activiteit eigenlijk het probleemoplossen in deze stijl is. De taak van de wiskundige, als hij een probleem voorgelegd krijgt, is blijkbaar om een formalistische procedure op te schrijven, die aan zekere regels voldoet, maar daarbij ook erg abstract blijft. Er wordt verwezen naar handelingen, die echter niet feitelijk uitgevoerd worden—niemand verwacht dat men werkelijk met papier, potlood, passer en liniaal alle stappen uitvoert—een abstract ritueel. Als de procedure volgens de regels, de riten, opgeschreven is, heeft de meetkundige zijn taak volbracht. Het is duidelijk dat in zo'n onderneming de *regels* waaraan voldaan moet worden van groot belang zijn—als men aan de regels tornt, veranderen de oplossingen. Wat waren deze regels? Twee waren er duidelijk: men moest zo mogelijk met *passer en liniaal* construeren, en de constructie moest *zo eenvoudig mogelijk* zijn. Clavius' constructie voldoet aan beide eisen; alle stappen kunnen met passer en liniaal uitgevoerd worden en men kan zich ervan overtuigen dat de constructie niet essentieel eenvoudiger kan.

(8) De eerste eis was in zoverre problematisch dat meetkundigen al in de Griekse oudheid ondervonden hadden dat sommige problemen niet met passer en liniaal construeerbaar zijn. Dat was in het bijzonder het geval bij de drie zogeheten 'klassieke' problemen, de trisectie van de hoek, de constructie van twee middelevenredigen, en de quadratuur van de cirkel (zie Figuur 3). Bij de trisectie wordt gevraagd een willekeurige gegeven hoek in drie gelijke delen te delen. Bij het probleem van twee middelevenredigen gaat het erom bij twee gegeven lijnstukken $a$ en $b$ twee andere $x$ en $y$ te construeren zodat $a$, $x$, $y$ en $b$ een meetkundige reeks vormen, dus $a : x = x : y = y : b$; de $x$ en $y$ zijn de twee 'middelevenredigen' van $a$ en $b$. (Bij stap 3 in Clavius' constructie kwamen we de gewone middelevenredige tegen, dat is een $x$ met $a : x = x : b$.) De quadratuur van de cirkel, tenslotte, vraagt een vierkant de construeren met oppervlakte gelijk aan dat van een gegeven cirkel.

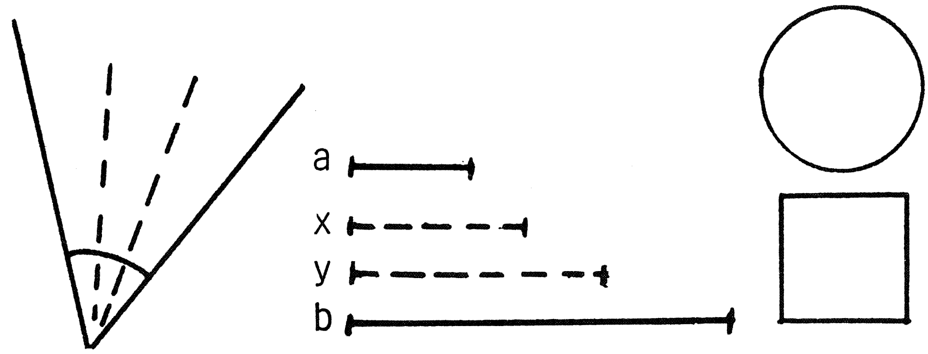
Met de genoemde voorbeelden van problemen kunnen we begrijpen dat de meetkunde zich omstreeks 1600 geconfronteerd zag met twee belangrijke methodologische problemen, namelijk:

1. Het ontbreken van een *analyse,* dat wil zeggen een vindmethode. Er was geen vaste leidraad om constructies te vinden in plaats van de ongestructureerde trucs, het geluk of de kunst die achter constructies zoals die van Clavius leek te steken.

2. De vraag hoe men moest construeren als het met passer en liniaal niet ging—zoals in het geval de 'klassieke problemen'.

Meetkundigen waren zich terdege bewust van het bestaan van deze twee vragen, ze zochten naar antwoorden en kwamen daarbij tot verschillende, soms tegenstrijdige uitkomsten.

Descartes' *Géométrie* kan het best begrepen worden als zijn eigen uitwerking van antwoorden op deze twee vragen, vanuit zijn filosofische overtuigingen. Het doel, de structuur en de inhoud van het boek worden grotendeels daardoor bepaald. Het zoeken naar antwoorden leidde hem ook naar de analytische meetkunde, maar de weg daar naar toe was verre van rechtstreeks.

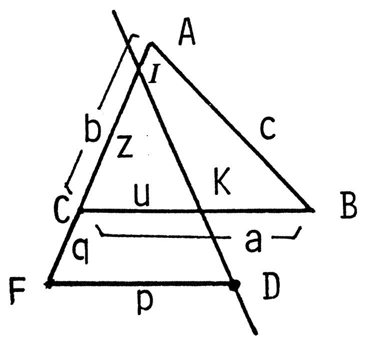



FIGUUR 3

(9) Laat ik eerst Descartes' ideeën over *analyse* bespreken. Descartes liet zien dat men meetkundige problemen kon analyseren met behulp van algebra en zo op methodische wijze een constructie kon vinden. De algebra werd gebruikt om een meetkundig probleem te vertalen in een algebraïsch probleem, namelijk een vergelijking in één onbekende. Ik kan het beste aan het voorbeeld van de driehoeksdeling laten zien hoe dat in zijn werk ging. Descartes zelf behandelde dat probleem niet, maar zijn handleiding voor analyse is zo duidelijk dat ik die stap voor stap kan toepassen. Descartes schreef voor dat men moest beginnen met aan te nemen dat het probleem al opgelost was en namen te geven aan bekende en onbekende lijnstukken in de figuur. Noem dus (zie Figuur 4) de gegeven lijnstukken $CA=b$, $CB=a$, $AB=c$, $DF=p$, $CF=q$, en de onbekende $CI=z$ en $CK=u$. Daarna moeten de gegeven en de vereiste relaties tussen die lijnstukken opgeschreven worden als vergelijkingen. Dat levert het volgende: omdat de driehoek $CKI$ en $FDI$ gelijkvormig zijn, geldt $(q+z):p=z:u$, en dus

$$pz=u(q+z). \qquad (1)$$

De verdeling in gelijke delen impliceert dat oppervlakte $CAB$ : oppervlakte $CIK=2:1$. Nu geldt (*Element VI* $-23$) dat oppervlakten van driehoeken die een hoek gemeen hebben een verhouding hebben gelijk aan de samengestelde verhoudingen van de zijden langs die hoek, dus $ab:uz=2:1$, zodat $uz=\frac{1}{2}ba$.




FIGUUR 4

(2)

We hebben nu twee vergelijkingen in twee onbekenden. Descartes schreef voor dat in dat geval een van de onbekenden geëlimineerd moet worden zodat een vergelijking in één onbekende overblijft. We elimineren $u$ en krijgen een kwadratische vergelijking in $z$:

$$z^2 = \frac{\frac{1}{2}ba}{p}z + \frac{\frac{1}{2}ba}{p}q; \tag{3}$$

als we nu $z$ kennen kunnen we de gevraagde deellijn trekken. De afsluiting van de oplossing moet dus zijn dat we de wortel $z$ van de vergelijking constructueren. In ons geval kan dit ook; Descartes legt uit hoe men in het algemeen wortels van kwadratische vergelijkingen met passer en liniaal kan construeren en zijn procedé kunnen we rechtstreeks op de gevonden vergelijking (3) toepassen. Het is nu verrassend dat, als we dat doen (ik laat het hier om plaatsredenen achterwege), we vrijwel precies Clavius' constructie terugvinden!

(10) Het kan ook gebeuren dat het bij het elimineren niet lukt tot één vergelijking in één onbekende te komen omdat er meer onbekenden dan relaties zijn. In dat geval, zegt Descartes, heeft het probleem oneindig veel oplossingen en als het om de constructie van punten gaat vormen die punten een meetkundige plaats. Die oplossingen kan men afzonderlijk construeren door aan één of meer van de overgebleven onbekenden willekeurige waarden toe te kennen zodat men toch een vergelijking in één onbekende overhoudt en de constructie afhandelt als in het normale geval. In de *Géométrie* laat Descartes dit zien in het geval van het zognaamde probleem van Pappus. Dat is een locus probleem† dat in het gebruikelijke geval tot een kwadratische vergelijking in twee variabelen leidt. Descartes toont aan dat de oplossingslocus dan een

† Het probleem is, modern weergegeven, als volgt: Er zijn $k$ lijnen $L_i$ in het vlak gegeven, $k = 2n$ of $k = 2n+1$, $n \geq 2$. Noem $d_i(P)$ de afstand van een punt $P$ tot de lijn $L_i$. Gevraagd wordt de meetkundige plaats (locus) der punten $P$ waarvoor, voor een zeker getal $\alpha$, geldt $d_1(P)$. $d_2(P) \cdots d_n(P) = \alpha d_{n+1}(P) \cdots d_k(P)$. Het bedoelde gebruikelijke geval betreft vier lijnen ($k = 4$); het werd al in de Griekse oudheid behandeld.

kegelsnede is en hij laat zien dat men, vanuit de vergelijking, de aard van de kegelsnede en zijn ligging in het vlak kan bepalen.

(11) In hoeverre was nu dit gebruik van algebra het antwoord op de methodologische vraag naar een methode voor de *analyse* van problemen? Descartes' regels leiden inderdaad, zonder trucs of verborgen slimmigheden naar een vergelijking en daarmee verwijderde hij heel wat mysterie uit de kunst van het probleemoplossen. Maar bij de stap van vergelijking naar constructie lag nog een groot probleem. Zolang de graad van de vergelijking niet hoger was dan 2 was de constructie van de wortels mogelijk met passer en liniaal. Maar wat te doen als men op een vergelijking van hogere graad uitkwam? Dat gebeurt bijvoorbeeld bij het probleem van de twee middelevenredigen. Als we daar volgens Descartes' voorschrift de vergelijking voor de eerste, $x$, van de twee middelevenredigen afleiden krijgen we

$$x^3 = a^2 b.$$

Die vergelijking is algebraïsch makkelijk oplosbaar, de oplossing is

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Maar die oplossing vertelt ons niets over hoe we die $x$ moeten construeren. En als de graad van de vergelijking groter dan 4 is, ligt de zaak in zekere zin nog hopelozer, dan is er geen algemene algebraïsche formule meer voor de wortels, zodat we langs die weg zeker geen constructie van de wortel zullen vinden. De conclusie is dat de algebra *niet* een volledig antwoord levert op de vraag naar een analytische methode; wat nog ontbreekt is een methode voor het meetkundig construeren van wortels van hogere-graadsvergelijkingen. En het is ook duidelijk dat bij dit construeren de tweede methodologische vraag ook beantwoord moet worden: hoe te construeren als het met passer en liniaal niet kan.

(12) Intussen mogen we de waarde van Descartes' algebraïsche analyse voor probleem oplossen niet onderschatten; hij bracht inderdaad, zoals hij zich vanuit zijn filosofische interesse had voorgesteld, methode en ordening in het gebied. De methode is hierboven uitgelegd; de ordening hield in dat problemen die tot dezelfde, of dezelfde soort, vergelijkingen leidden gelijksoortig waren; in het bijzonder waren problemen welker vergelijkingen dezelfde graad hadden gelijksoortig. Met dit laatste gegeven kon Descartes een ordening van problemen die uit de Griekse wiskunde bekend was, preciseren en verfijnen. Dit alles sloot mooi aan bij Descartes' algemene filosofische ideeën over methode; in het hoofdwerk uit 1637, de *Discours* had hij bijvoorbeeld als een der onderdelen van de juiste methode aangegeven dat men het probleem dat men wil onderzoeken eerst opdeelt in de eenvoudigste onderdelen, dat men die door naamgeving ordent en hun onderlinge relaties inventariseert, om zo de helderste gedachtengang te vinden die voert van de gegevens tot het gevraagde.

Welnu, dat is precies wat in de meetkunde gedaan wordt door de nieuwe analyse met behulp van algebraïsche symboliek.

(13) Maar, zoals gezegd, algebra leverde niet een directe leidraad voor het resterende deel van het probleem oplossen: de constructie van de wortels van de vergelijking. Natuurlijk moest Descartes wel aangeven hoe hij zich dat voorstelde en in verband daarmee moest hij een antwoord geven op de tweede methodologische vraag die we hierboven genoemd hebben: hoe moet men construeren als het met passer en liniaal niet lukt? Die vraag was niet nieuw in Descartes' tijd. Al in de oudheid moet hij gesteld zijn, maar een eenduidig antwoord was er niet. Sommige meetkundigen stelden zich het gebruik van speciale instrumenten voor, andere construeerden met behulp van zekere krommen (we zullen hieronder zien wat dat betekende), weer andere kozen zekere basisconstructies die ze per postulaat mogelijk veronderstelden. Descartes moest dus een keus maken. Hij deed dat door de volgende regels op te stellen:

* Constructies mogen uitgevoerd worden met cirkels en rechten (passer en liniaal) en zo nodig met hogere-orde krommen;
* Maar niet met alle krommen.

Om duidelijk te maken wat hij bedoelde, behandel ik twee voorbeelden. Beide zijn oplossingen van het trisectie probleem; de eerste maakt gebruik van cirkel en parabool, Descartes heeft die zelf gevonden en achtte hem zeker geometrisch acceptabel; de tweede maakt gebruik van een spiraal en was volgens Descartes niet aanvaardbaar in de meetkunde. Ze zijn als volgt:

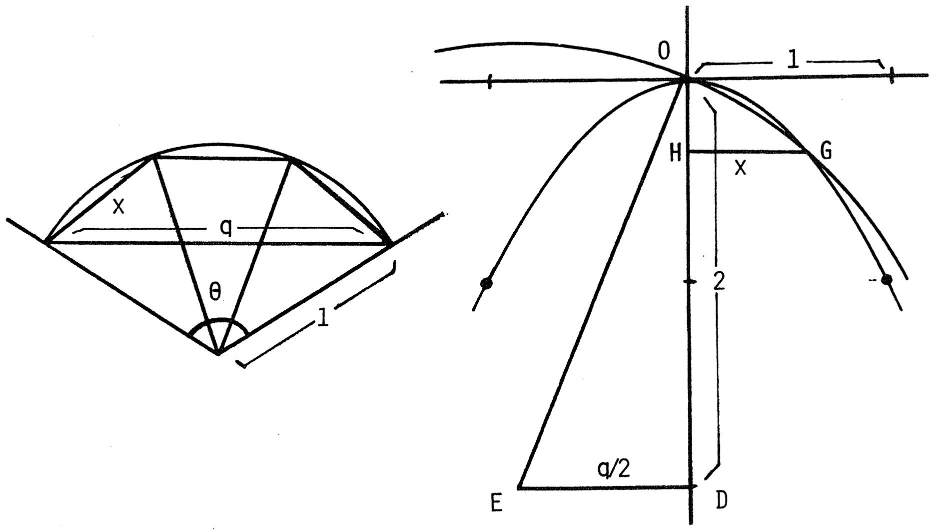
**Probleem** (trisectie): Gegeven (zie Figuur 5) een hoek $\theta$; gevraagd wordt die hoek in drie gelijke delen te delen, dus een hoek ter grootte $\theta/3$ te construeren.
**Analyse**: Beschouw een cirkelboog met straal 1 binnen de gegeven hoek; omdat de hoek gegeven is, is ook de koorde $q$ van die boog gegeven; noem de koorde van een derde deel van die boog $x$; trek verdere lijnen als in de figuur. Uit de gelijkvormigheid van een aantal driehoeken valt nu eenvoudig af te leiden dat $x$ voldoet aan de vergelijking

$$x^3 - 3x + q = 0.$$

Descartes past nu een door hem gevonden algemene constructie voor de wortels van derde-graads vergelijkingen toe, die in dit geval het volgende levert:

**Constructie**† (1) Trek twee onderling loodrechte assen door $O$. (2) Trek een parabool met verticale as, top in $O$ en met 'latus rectum' gelijk aan 1. (Het opgeven van de waarde van de 'latus rectum' was de klassieke manier om een parabool nader te bepalen; in dit geval komt het er op neer dat de parabool gaat door de twee punten onder de horizontale as die op afstand 1 van beide

† *Géométrie* pp. 396-397.




FIGUUR 5

assen liggen.) (3) Markeer een punt $D$ op de verticale as op afstand 2 beneden $O$; trek door $D$ naar links een loodlijn $DE$ op de as ter lengte $q/2$: trek een cirkel met middelpunt $E$ en straal $EO$. (4) De cirkel snijdt de parabool behalve in $O$ in nog drie punten $G$ (twee ervan vallen buiten de tekening); trek vanuit die punten loodlijnen $GH$ op de as. (5) De loodlijn vanuit het punt $G$ dat het dichtst bij $O$ ligt op de rechter helft van de parabool is de gevraagde $x$ (de andere twee loodlijnen hebben te maken met trisectie van $\theta \pm 2\pi$). (6) Gebruik nu $x$ om de punten te vinden die de boog in hoek $\theta$ in drie gelijke delen delen en construeer zo de verdeling van $\theta$. (Bewijs: De parabool heeft vergelijking $y = x^2$ (waarbij de positieve $y$-richting naar beneden wordt genomen); het valt eenvoudig na te rekenen dat de $x$-coördinaten van de snijpunten van die parabool met de geconstrueerde cirkel moeten voldoen aan de in de analyse afgeleide vergelijking.)

De essentiële stap in de constructie is het doorsnijden van de parabool met de cirkel. Hier zien we wat bedoeld werd met construeren door middel van krommen. Bij passer en liniaal constructies werkt men in wezen ook met krommen (namelijk rechten en cirkels); Descartes heeft hier dus dat arsenaal van constructiemiddelen uitgebreid met de parabool. Hij gaat er dan verder vanuit dat men parabolen kan trekken en hun snijpunten met cirkels en rechten kan bepalen. Zoals gezegd laat hij ook nog andere krommen toe, maar niet alle. Zo bijvoorbeeld niet de spiraal. Trisectie zou met behulp van de spiraal wel mogelijk zijn, namelijk als volgt:

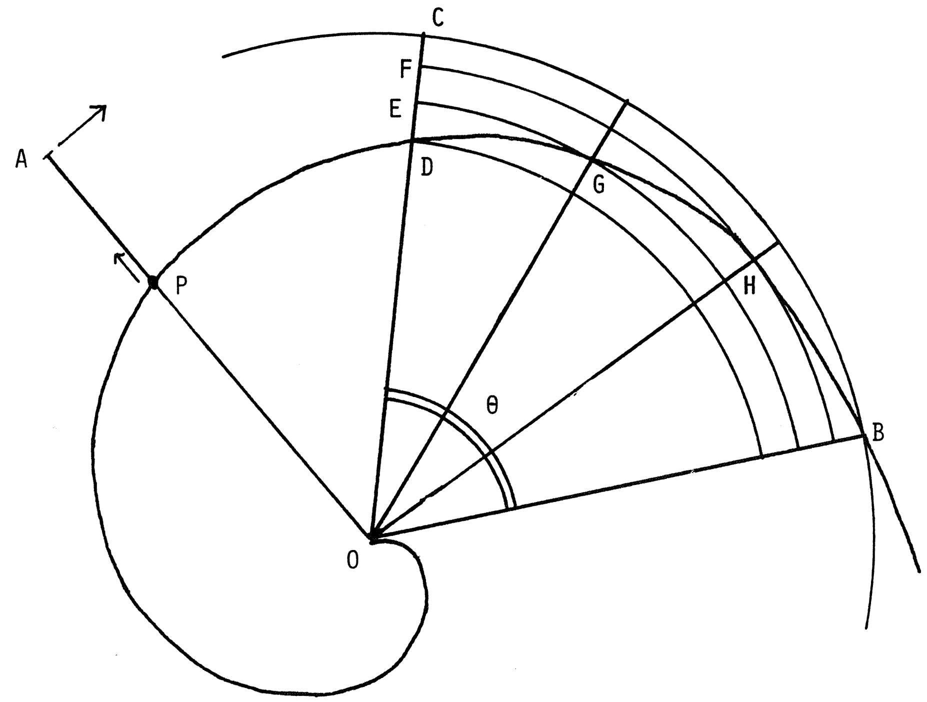
**Constructie** (trisectie met spiraal; teruggaand op Archimedes): (1) Trek een Archimedische spiraal (zie Figuur 6); d.w.z. trek een kromme die als volgt ontstaat: Een lijn OA roteert met vaste hoeksnelheid om het punt $O$; tegelijkertijd beweegt op $OA$ een punt $P$ uniform van $O$ naar $A$; bij de gecombineerde beweging beschrijft $P$ een kromme; dat is de spiraal; neem verder aan dat na één volledige omloop van $OA$, $P$ vertrekkend uit $O$ beland is in $B$. (2) Pas de gegeven hoek $\theta$ af vanaf $OB$, dus $\theta = \angle BOC$, waarbij $OC = OB$; $OC$ snijdt de spiraal in $D$; deel $DC$ in drie gelijke delen (dat kan met passer en liniaal) met deelpunten $E$ and $F$; trek cirkels rond $O$ met stralen $OE$ en $OF$, zij snijden de spiraal in $G$ en $H$; trek $OG$ en $OH$. (3) $OG$ en $OH$ delen $\angle\theta$ in drie gelijke delen. (Bewijs: Tijdens de beweging waardoor de spiraal ontstaat beweegt de straal uniform van $OC$ naar $OB$ in een zeker tijdsinterval; in dat zelfde interval beweegt $P$ uniform van $D$ naar $C$. Na 1/3 van dat tijdsinterval is de straal op 1/3 van hoek $\theta$ aangekomen en $P$ op 1/3 van CD. Dus is $\angle COG$ het derde deel van de gegeven hoek.)—Het is duidelijk dat op dezelfde manier de hoek ook in vier, vijf of een willekeurig ander aantal gelijke delen deelbaar is.

Welnu, deze laatste constructie, die al in de oudheid was bedacht, accepteerde Descartes niet, en hij was niet de enige die aan de meetkundige toelaatbaarheid ervan twijfelde. Daar was ook wel een reden voor: de constructie gaat ervan uit dat zo'n gecompliceerd proces als de combinatie van bewegingen die de spiraal beschrijft mogelijk is. Die combinatie van bewegingen is zozeer toegesneden op het probleem van hoekdeling dat men even goed direct zou kunnen postuleren dat trisectie, ja zelfs willekeurige hoekdeling, mogelijk was. Maar het is natuurlijk niet bevredigend om, als men de trisectie wil oplossen, simpelweg te postuleren dat de constructie mogelijk is en het daarbij te laten.

(14) Hoe dan ook, Descartes meende dat constructies zoals die met de spiraal (er waren meer van dergelijke constructies in omloop) niet toegelaten konden worden in de meetkunde. Hij zag zich daardoor gesteld voor twee nadere methodologische vragen. De eerste was:

> Wat is het criterium voor aanvaardbaarheid van krommen als middel van constructie?

Dit is de demarcatievraag; het antwoord erop moet de grenzen van het toelaatbare in de meetkunde bepalen. Verder blijft, ook bij het gebruik van aanvaardbare krommen als constructiemiddel, de eis bestaan dat de eenvoudigste constructie gevonden moet worden, dat wil zeggen de constructie die de eenvoudigste toelaatbare krommen gebruikt—maar wat is eenvoudig? De tweede vraag was dan ook:




FIGUUR 6

> Met welk criterium kan men bepalen of de ene kromme eenvoudiger is dan de andere?

Descartes' antwoord op de eerste vraag was:

> Krommen zijn aanvaardbaar als zij beschreven worden door aanvaardbare combinaties van aanvaardbare bewegingen.

Dat antwoord verplaatst het probleem alleen maar: wat zijn aanvaardbare combinaties van aanvaardbare bewegingen? Descartes legt dat uit en geeft voorbeelden, onder meer de beschrijving van een zekere derde graads krommen die hij gebruikt als hulpmiddel bij de constructie van wortels van vergelijkingen; die kromme heeft later de naam 'Cartesische parabool' gekregen. De beschrijving is als volgt:

**Constructie** ('Cartesische parabool', bewegingsconstructie)† (1) In het grondvlak (zie Figuur 7) zijn twee assen getekend die elkaar loodrecht snijden in $O$; op de horizontale as ligt links van $O$ het punt $D$; $DA$ is een liniaal die kan

† *Géométrie*, pp. 335-338.

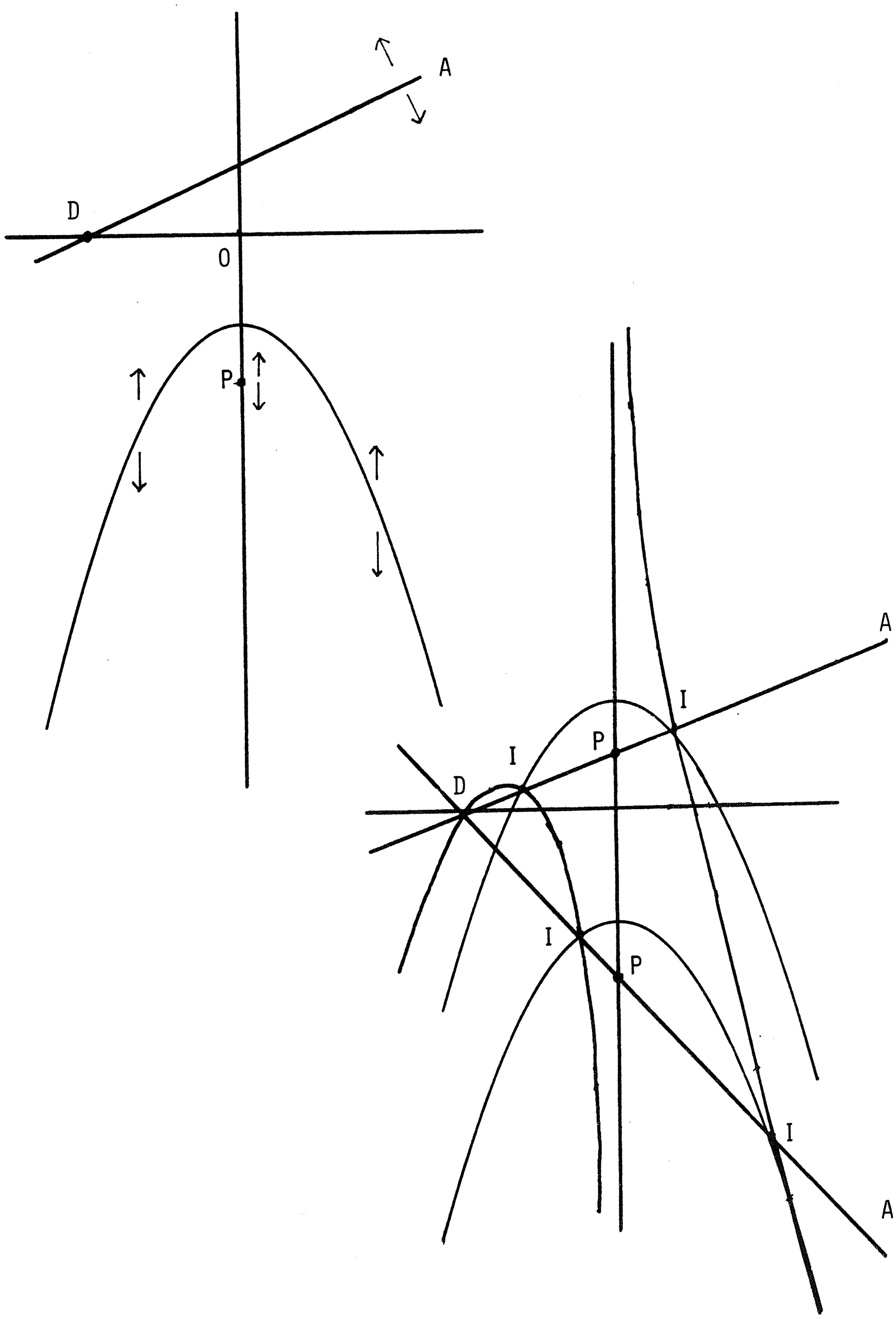
draaien rond $D$. (2) Op een vlak dat over het grondvlak kan schuiven, is een parabool getekend; op de as van de parabool ligt een punt $P$ met vaste afstand tot de top; het vlak van de parabool kan op zo'n manier over het grondvlak schuiven dat de as van de parabool over de verticale as heen en weer beweegt. (3) De liniaal $DA$ wordt langs het punt $P$ gelegd en gedurende de beweging blijft de liniaal langs $P$ gaan (men kan zich bijvoorbeeld voorstellen dat in $P$ een pin is aangebracht die, als de parabool opwaarts beweegt de liniaal mee duwt); in ieder positie heeft de liniaal twee snijpunten $I$ met de parabool. (4) Gedurende de beweging beschrijven de punten $I$ een nieuwe kromme; dit is de kromme die Descartes bedoelt.

De bewegingen van de beide krommen (in dit geval de rechte lijn en de parabool) zijn volgens Descartes aanvaardbaar in de meetkunde, en hun combinatie is dat ook omdat, zoals hij zegt, de ene beweging de andere volledig bepaalt (de beweging van de parabool bepaalt die van de liniaal of omgekeerd).

(15) Deze keuze van Descartes behoeft wel wat nadere verklaring. Ik zal een paar punten van commentaar geven. Een meetkundig probleem vraagt om een oplossing, een constructie, die exact en zeker is. Te meer moeten de constructiemiddelen die zekerheid in zich bergen. We mogen dus concluderen dat de aanvaardbare combinaties van bewegingen, zoals in het voorbeeld, naar Descartes' mening voldeden aan het criterium van zekerheid, namelijk dat men zich die beweging helder en duidelijk kan voorstellen. Inderdaad is dat de achtergrond van Descartes' keuze en hier zien we dan ook hoe zijn filosofische inzichten hem leidden bij keuzen in de wiskunde. Dit werpt ook nader licht op een van de in het begin genoemde puzzels; de afwezigheid van de 'lange ketens van redeneringen' in de *Géométrie*. In de zin van lange logische deducties zijn die er inderdaad niet, maar wel in de zin van reeksen opeenvolgende bewegingen die, met behoud van zekerheid, nieuwe krommen vormen uit eerder beschreven krommen en zo nieuwe constructiemiddelen leveren.

Is het Desartes nu met dit criterium voor aanvaardbaarheid van krommen gelukt de spiraal en de andere krommen, waarvan hij het gebruik niet aanvaardbaar vond, uit te sluiten? Inderdaad meent Descartes dat de bewegingscombinatie die de spiraal beschrijft niet aanvaardbaar is omdat in dat geval de ene beweging niet de andere op kenbare wijze bepaalt. De beide bewegingen die samen de spiraal beschrijven zijn namelijk verbonden door een relatie die op een of andere wijze afhangt van de verhouding $\pi$ (zoals Descartes het zegt: de verhouding van omtrek en diameter van de cirkel). Dat is een verhouding tussen een krom en een recht lijnstuk en Descartes is ervan overtuigd dat die verhouding onkenbaar is—op die (voor ons niet meer overtuigende) basis sluit hij de spiraal uit.

Echter, Descartes' criterium, hoe overtuigend of weinig overtuigend het ook mag zijn, is niet erg bruikbaar; het is bij een gegeven kromme niet eenvoudig na te gaan of hij wel door een aanvaardbare bewegingscombinatie beschreven




FIGUUR 7

kan worden. Dat zag Descartes ook in en met een lang, ingewikkeld en niet geheel sluitend argument leidde hij af:

> Aanvaardbare krommen zijn precies die, die algebraïsche vergelijkingen hebben.

Zo heeft hij dan de cartesiaanse demarcatie van de meetkunde bereikt: Alleen algebraïsche objecten zijn toegelaten in de meetkunde. Aanvaardbare krommen zijn bijvoorbeeld de parabool, ellips, hyperbool, conchoïde, cissöide,† Cartesische parabool; niet aanvaardbaar zijn de spiraal, de quadratrix en de cycloïde. Ik kan hier niet nader op de argumenten voor de demarcatie ingaan, maar ik moet wel benadrukken dat Descates de zaak zeer serieus nam en dat zijn argumenten, hoewel niet sluitend, zeker gedegen, en ook vaak zeer interessant zijn.

(16) Er bleef nog de vraag naar eenvoud van de construerende krommen over: volgens welk criterium kan men vaststellen welke van twee krommen de meest eenvoudige is? Descartes gaf hierop het volgende antwoord: Een kromme is eenvoudiger naarmate de graad van zijn vergelijking lager is. Hij gaf weinig nadere argumenten daarvoor; hij koos zonder meer voor een algebraïsch criterium, wat, omdat het om een meetkundige eigenschap gaat—eenvoud van krommen in verband met hun rol als constructiemiddel—weinig overtuigend is. De gang van zaken is een voorbeeld van een zekere ongemakkelijke spanning tussen algebraïsche en meetkundige elementen, die vaker in de *Géométrie* voorkomt.

(17) Die spanning tussen algebraïsche en meetkundige criteria mag een bezwaar zijn geweest, toch had Descartes' eindresultaat ook grote voordelen, want nu, nadat hij in al de eerder genoemde methodologische kwesties antwoorden had gegeven, beslissingen had genomen, nu was hij dan ook in staat om een duidelijke en heldere procedure te omschrijven voor het oplossen van meetkundige problemen. Die procedure was, schematisch aangegeven, als volgt:

> (1) Herschrijf het probleem als een vergelijking.

De procedure daarvoor hebben we besproken aan de hand van het voorbeeld van de driehoeksdeling.

> (2) Reduceer, zo nodig, die vergelijking tot een irreducibele vergelijking.

Dit heeft te maken met de standaardconstructies in punt (4) hieronder; als men niet eerst de vergelijking reduceert, komt men uit op een constructie met

† Zie voor de conchoïde en de cissoïde de bijdrage van J.A. van Maanen aan deze bundel.

een meer ingewikkelde kromme dan noodzakelijk is.

> (3) Herschrijf die vergelijking, door middel van substituties, in een standaardvorm.

Het betreft hier lineaire substituties $x = y - a$ of $x = ay$; de substituties, en hun inversen, corresponderen met meetkundige constructies die met passer en liniaal uitgevoerd kunnen worden.

> (4) Construeer de wortels van deze standaardvergelijking volgens standaardconstructies. Construeer met behulp van de gevonden wortels de oplossing van het probleem zelf.

Descartes werkte dit punt uit voor vergelijkingen van graad $\leqslant 6$. Ik zal op de standaardvormen der vergelijkingen hier niet ingaan. Wat de constructies betreft, die waren als volgt:

> (i) Voor vergelijkingen met graad 1 en 2: met rechten en cirkels.
> (ii) Voor vergelijkingen van graad 3 en 4: met een parabool, cirkels en rechten. (De boven behandelde constructie van de trisectie is een voorbeeld: de constructie voor vierde-graadsvergelijkingen was niet veel ingewikkelder.)
> (iii) Voor vergelijkingen van graad 5 en 6: met een Cartesische parabool, cirkels en rechten.

Verder ging Descartes niet; hij beweerde dat het principe nu wel duidelijk was en dat men de procedure zelf kon voortzetten voor hogeregraadsvergelijkingen. Als hij dat werkelijk dacht, onderschatte hij het probleem sterk. Veel zeventiende-eeuwse wiskundigen hebben zich beziggehouden met dit soort hogere-graadsconstructies; daarbij bleek dat Descartes' procedure niet zo vanzelfsprekend en in elk geval niet eenduidig voortzetbaar was.

De procedure voor het construeren levert een verklaring van een van de puzzels die we aan het begin noemden, de achtergrond van de algebraïsche theorie van vergelijkingen en hun wortels in de *Géométrie*. Als men precieser nagaat welke zaken Descartes daar behandelt† dan blijkt dat ze allemaal nodig zijn of voor de reductie bij stap (2) of voor het herschrijven van de vergelijking in standaardvorm bij stap (3).

(18) Ik zal het wat betreft de bedoeling en opzet van Descartes' *Géométrie* hierbij laten. Maar er moet nog wel iets gezegd worden over de analytische meetkunde, want de vraag rijst: waar is de analytische meetkunde in dit geheel? Waar is de equivalentie van kromme en vergelijking? Zoals ik de opzet en bedoeling van Descartes' *Géométrie* heb weergegeven is er weinig van

† Dit betreft het gedeelte van de *Géométrie* pp. 371-389.

analytische meetkunde te bekennen. Toch komt die equivalentie in het boek voor en wel op drie manieren. Allereerst bij de behandeling van locus problemen, dus problemen die oneindig veel oplossingen hebben en waarvan de oplossingen een meetkundige plaats, een locus, vormen. Die locus is een rechte of een kromme lijn en als men Descartes' procedure volgt, verkrijgt men de vergelijking (in twee variabelen) van die locus. Zoals boven vermeld liet Descartes aan het voorbeeld van het probleem van Pappus zien dat in het geval van kwadratische vergelijkingen de locus een kegelsnede is en hij toonde hoe men met behulp van de vergelijking de aard en de ligging van de kegelsnede kan bepalen. Ten tweede komt de equivalentie naar voren bij het demarcatieprobleem; Descartes zegt immers dat alleen die krommen acceptabel zijn in de meetkunde waarvan de vergelijkingen algebraïsch zijn; hij gebruikt hier dus de equivalentie van kromme en vergelijking. Ten derde is er een gedeelte van de *Géométrie* dat eigenlijk tamelijk buiten de algemene structuur van het boek valt. Hier geeft Descartes een methode aan om met behulp van de vergelijking raaklijnen aan een kromme te bepalen.† Hij gebruikt daarbij dat een kromme en een aan die kromme rakende cirkel twee samenvallende snijpunten moeten hebben zodat de vergelijking voor de $x$-coördinaten van die snijpunten twee samenvallende wortels moet hebben.

Men ziet dat deels op natuurlijke wijze, deels als zijlijn, het hoofdthema van de analytische meetkunde inderdaad in de *Géométrie* voorkwam; maar niet als centraal thema, veeleer als haast onverwacht resultaat van een programma dat primair was gericht op het oplossen van meetkundige constructieproblemen.

(19) Hoe komt het nu dat, hoewel de kerngedachte van de analytische meetkunde geen centrale plaats in het boek inneemt, de *Géométrie* toch als een van de belangrijkste beginpunten van die theorie aangemerkt kan worden? Dat komt omdat latere lezers van het boek zich vooral door de algebraïsche technieken lieten inspireren en weinig interesse toonden in de methodologische problemen die voor Descartes zo belangrijk waren geweest. Voor zover men deze methodologische zaken overnam, deed men dat dogmatisch maar zonder enthousiasme: Descartes had de gang van zaken bij meetkundig construeren vastgelegd en zo was dat. De technische vernieuwingen, met name het gebruik van algebra in de meetkunde, werden echter geestdriftig opgenomen en uitgewerkt en daarbij bleek zeer snel hoe vruchtbaar de relatie tussen kromme en vergelijking was.

De *Géométrie* is daarmee een voorbeeld van een zeer merkwaardig verschijnsel in de geschiedenis van de wiskunde, namelijk van een boek dat als het ware zijns ondanks invloed uitoefent. De filosofische en methodologische vragen die Descartes ertoe brachten het boek te schrijven werden nauwelijks overgenomen, de technieken die hij voor de beantwoording van die vragen ontwikkelde echter des te meer.

† Meer hierover in J.A. van Maanen's bijdrage aan deze bundel.

(20) Tot slot nog dit. De *Géométrie* is een groots boek. Dat zeg ik met enige nadruk omdat uit mijn bespreking de indruk achter zou kunnen blijven dat Descartes als wiskundige verstrikt was in een achterhaalde vraagstelling en daardoor een boek vol overbodige methodologie schreef. Zo is het niet. De *Géométrie* bevat naast methodologie ook veel knappe wiskunde, waarop ik nu niet uitvoerig ben ingegaan. Maar ik meen ook dat de dingen waarop ik hier de nadruk heb gelegd, vragen omtrent constructie die nu niet meer in de wiskunde worden gesteld, toch van belang zijn bij onze beoordeling van het boek. Zonder deze kant van het werk serieus te nemen zijn het doel, de opzet en een groot deel van de inhoud van de *Géométrie* niet te begrijpen. verder zijn Descartes' antwoord op die vragen, hoewel onvolledig en niet geheel sluitend, toch van grote intellectuele kwaliteit. Het was werkelijk een briljante geest die hier worstelde met zeer moeilijke vragen. Hoewel die vragen nu achterhaald lijken, kunnen we ons zeker realiseren dat ze in zijn tijd vanzelfsprekend waren en inderdaad beantwoord moesten worden. En we kunnen, door ons opnieuw in die vraagstelling te verdiepen, een briljante intellectuele prestatie zien en bewonderen.

# De Relatie tussen de Natuurwetenschappen en de Wiskunde in de 17de Eeuw

C. de Pater

## Inleiding

In deel 4V-1 (p. 28) van de methode *Getal en Ruimte* maken de leerlingen van 4 VWO kennis met praktische toepassingen van tweede-graadsfuncties. Een voor de hand liggende vraag is dan natuurlijk: hoe kom je er in een concreet geval achter of je nu wel of niet met een functie te maken hebt? Het antwoord in het boek luidt:

1. Zorg voor een groot aantal metingen.
2. Zet ze uit in een grafiek.
3. Ga na of (een deel van) de kromme door de getekende punten de vorm van een parabool heeft.

Daar hoort uiteraard een voorbeeld bij. De auteurs hebben een duik in de geschiedenis genomen en daarin de valwet van Galileo Galilei (1564-1642) opgediept. Ik citeer nu letterlijk:

> 'Op deze manier heeft de beroemde Italiaanse natuurkundige Galilei de oplossing gevonden van het probleem van de vrije val. Het probleem was: hoe hangt bij een vallend voorwerp de gevallen afstand af van de tijdsduur van de val. Het verhaal gaat dat Galilei kleine loden kogeltjes liet vallen van de gaanderijen van de Scheve Toren van Pisa. Nauwkeurige metingen brachten hem op het spoor van de formule $s=5t^2$. Hierin is $s$ de valafstand in meters en $t$ de tijd in seconden.'

Welnu, één ding is zeker, Galilei heeft zijn valwet—$s$ is evenredig met $t^2$, dus zonder evenredigheidsconstante—niet recht-toe-recht-aan door valproeven gevonden, maar door een hypothetisch-deductieve redenering, gevolgd door een indirecte toetsing. Bovendien gaat het boek voorbij aan een heel wezenlijk punt, namelijk dat Galilei zijn wet afleidde voor een geïdealiseerde vrije val in vacuüm.

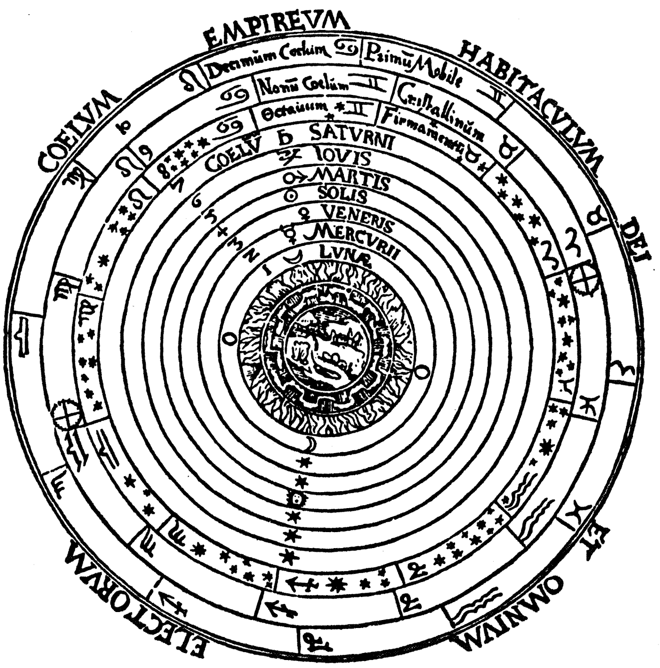
Er valt hier dus historisch nogal wat recht te zetten. U hoort er straks meer over. Eén ding blijft in het verhaal van het boek in elk geval overeind staan: het gaat hier om een natuurkundig verschijnsel dat door een mathematische wet beschreven wordt. Hierop wordt door de auteurs niet speciaal gewezen. Ze schrijven tenslotte voor leerlingen van de twintigste eeuw, voor wie wis- en natuurkunde onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Maar deze nauwe band is niet zo vanzelfsprekend als het voor ons lijkt. Eeuwenlang zijn beide vakgebieden gescheiden gehouden en ging het er in de fysica helemaal niet om wiskundige relaties op te sporen. Dat men pas in de zeventiende eeuw bewust op zoek ging naar een mathematische wet voor de valbeweging en tevens behoefte had aan experimentele toetsing, hangt ten nauwste samen met de omslag die toen optrad in het denken over de natuur en de natuurwetenschap, inclusief een andere kijk op de verhouding tussen wiskunde en natuurkunde. Men spreekt nu algemeen over de zeventiende-eeuwse wetenschapsrevolutie, die haar eind- en hoogtepunt vond in het werk van Isaac Newton (1642-1727).

### ARISTOTELES

Een fysica zonder wiskunde en experiment mag dan voor ons nauwelijks meer voorstelbaar zijn, ze is er wel eeuwenlang geweest. Ik doel hier uiteraard op de fysica, beter de natuurfilosofie van de Griekse wijsgeer Aristoteles (384-322 v. Chr.). Geen enkele Griekse denkwijze heeft zo lang en zo krachtig de natuurwetenschap gestempeld als de zijne. In de astronomie en de fysica is deze invloed merkbaar tot ver in de zeventiende eeuw, in de chemie en de biologie zelfs tot in de achttiende eeuw. In de Middeleeuwen heeft zijn filosofie het Europese geestesleven vrijwel onbeperkt beheerst. Nog in Galilei's tijd werd aan nagenoeg alle universiteiten in Europa een fysica gedoceerd en beoefend die geheel op Aristotelische leest geschoeid was. Ondanks de toenemende kritiek en de nieuwe inzichten die in de zestiende eeuw naar voren kwamen, was het denkkader van de Griekse filosoof aan deze onderwijsinstellingen bijna geheel intact gebleven. Het lijkt me dan ook zinvol u eerst wat van zijn natuurbeschouwing te laten proeven om des te scherper te zien welke veranderingen er in de zeventiende eeuw plaatsgrijpen.

De fysica van Aristoteles is te typeren als een kosmo-fysica, omdat ze van de gedachte uitgaat dat we leven in een kosmos, dat wil zeggen, in een doelmatig ingericht heelal, een levend organisme, waarin alle processen dienen om het in stand te houden. Zijn methode is sterk deductief en rationalistisch, ondanks haar empirische grondslag. Hij ontleent zijn grondbeginselen aan de naïeve, alledaagse ervaring en acht zich, zonder verder onderzoek, in staat de hele kosmos trefzeker te deduceren. Ook Aristoteles huldigt namelijk de oer-Griekse gedachte dat de menselijke rede in staat is de rationele orde in de natuur volledig te doorgronden.

De Griekse filosoof neemt een eindig, bolvormig heelal aan, dat weliswaar als kosmisch organisme een eenheid vormt, maar dat toch in twee scherp gescheiden gebieden is opgedeeld: een bovenmaans deel dat bestaat uit één onvergankelijk element, de ether, en een ondermaans deel dat is opgebouwd uit vier elementen, aarde, water, lucht en vuur, die kwalitatief verschillend zijn en in elkaar kunnen overgaan. In het middelpunt van de wereld staat de aarde, die met een laag oceaanwater bedekt is. Daaromheen bevindt zich lucht, terwijl deze weer door een vuursfeer omgeven is. Overigens is deze concentrische rangschikking van de vier elementen in het onvolmaakte ondermaanse niet ten volle gerealiseerd. Buiten deze vier 'schillen' liggen de rond de aarde wentelende hemelbollen van het bovenmaanse, eerst de zeven van achtereenvolgens de maan, Mercurius, Venus, de zon, Mars, Jupiter en Saturnus, dan de sfeer van de vaste sterren en als laatste nog een negende hemel, het




FIGUUR 1. Een wereldbeeld op Aristotelische grondslag. Er is hier een tiende hemel toegevoegd. (P. Apianus, Cosmographia, 1535)

zogenaamde Eerst Bewogene (Primum Mobile). Dit bovenmaanse deel van de kosmos is volmaakt en onveranderlijk, terwijl de ondermaanse wereld het toneel van ontstaan en vergaan is.

Behalve een drastische wijziging van dit algemene wereldbeeld in de zestiende, maar vooral in de zeventiende eeuw, vindt er een ingrijpende verandering van de fysica plaats, die zich manifesteert in een totale vernieuwing van de Aristotelische bewegingsleer. Daarover wil ik dan ook nog enkele opmerkingen maken. De kosmologie van de Griekse filosoof heeft verstrekkende gevolgen voor wat we nu mechanica noemen. Allereerst maakt hij een streng onderscheid tussen hemelse en aardse bewegingen, terwijl er voor het ondermaanse nog een essentiële tweedeling is in natuurlijke en gedwongen bewegingen. De natuurlijke beweging in het bovenmaanse, tevens de enige die daar mogelijk is, is de eenparige cirkelbeweging. Daarentegen is de natuurlijke beweging in het ondermaanse rechtlijnig, naar omhoog of naar omlaag. In nauw verband hiermee hanteert Aristoteles de begrippen licht en zwaar als kwaliteiten die in de lichamen zetelen en de natuur van een lichaam mede bepalen.

Elk ondermaans lichaam is of licht of zwaar en bevindt zich in zijn natuurlijke plaats in rust of tracht daar te komen. Een zwaar lichaam, zoals een vallende steen, streeft van nature naar het middelpunt van de wereld, terwijl een licht lichaam, zoals opstijgende rook, juist in tegenovergestelde richting naar de maansfeer wil bewegen. De bovengenoemde rangschikking van de elementen staat hiermee in verband: aarde en water zijn van nature zwaar, lucht en vuur van nature licht. Vandaar dat de aarde zich in rust in het wereldcentrum bevindt en de vuursfeer aan de maansfeer grenst.

Komt de natuurlijke beweging dus tot stand door een aandrang van binnenuit, elke gedwongen beweging, zoals de worp van een steen of het draaien van een wiel, is een tegennatuurlijke beweging en deze eist een oorzaak van buitenaf. Daarbij is werking-op-afstand uitgesloten: Aristoteles eist voor elke beweging een blijvend met het bewegend lichaam verbonden beweger, hetzij een levensbeginsel (de ziel) bij een levend wezen, hetzij een in het lichaam zetelende eigenschap zoals de zwaarte er een is, hetzij een uitwendige beweger voor gedwongen bewegingen. Anders gezegd: voor elke gedwongen beweging is een uitwendige 'kracht' nodig om de beweging te onderhouden.

Het zal duidelijk zijn dat de beweging bij Aristoteles niet, zoals bij de klassieke fysica van Newton, een toestand is, maar een toestandsverandering en als zodanig verklaring behoeft. Daarnaast is er nog een belangrijk verschil: een beweging kan volgens Aristoteles alleen plaatsvinden in een medium. Niet alleen acht hij de beweging in een ledig onmogelijk, maar een vacuüm in fysische zin, als een werkelijk zijnde, kan niet eens bestaan. Een ledig is voor de Griekse filosoof niet meer dan een abstracte ruimte die thuishoort in de geometrie. Het is voor hem onmogelijk een werkelijk bestaand, fysisch lichaam te plaatsen in een abstracte, lege ruimte. Wie dat wel doet, verwart fysica en geometrie. Wat het nut van meetkunde ook is, ze draagt niets bij aan de fysica, die immers handelt over reële lichamen.

Het laat zich dus verstaan dat in Aristoteles' beschouwingen over val en worp het medium alle aandacht krijgt, met name uiteraard de lucht. Het onderscheid tussen wiskunde en natuurkunde komt hierbij scherp naar voren. Aristoteles erkent namelijk dat, als er beweging in een vacuüm mogelijk zou zijn, alle lichamen daarin even snel zouden vallen. Maar deze mathematische waarheid, wijst hij meteen als fysisch absurd van de hand, omdat een ledig immers niet bestaat en de fysica het 'volle' verschijnsel bestudeert. De ervaring leert duidelijk dat lichamen met ongelijke snelheid vallen: kijk maar naar de steen en het veertje.

Aristoteles doet hierover zelfs enkele—ongecontroleerde—kwantitatieve uitspraken, die erop wijzen dat hij een evenredigheid aannam tussen gewicht en (gemiddelde) valsnelheid. Reeds in de zevende eeuw verwierp Johannes Philoponos deze evenredigheid als absurd, omdat hij in de praktijk slechts geringe verschillen constateerde. Weliswaar erkende later ook Galilei dat lichamen met verschillend gewicht niet precies tegelijk neerkwamen, maar dat verhinderde hem niet de door Aristoteles afgewezen 'mathematische waarheid' van de gelijke eindsnelheden in vacuüm als natuurwet te postuleren. Dat laat zien hoezeer bij hem het denken over de relatie tussen wis- en natuurkunde is veranderd.

### Impetustheorie

Hoe fout de Aristotelische fysica in onze ogen ook mag zijn, ingebed in het geheel van zijn filosofie vormt het een hecht doortimmerd coherent en consistent systeem, dat eeuwenlang tegen detailkritiek bestand bleek. Een hecht bouwwerk wankelt niet, wanneer men er een paar stenen uitslaat. Dat betekent intussen niet dat er binnen het kader van Aristoteles' eigen opvattingen geen zwakke plekken in zouden zitten. Juist zijn opvattingen over val en worp hebben zijn commentatoren in Oudheid en Middeleeuwen, en later ook Galilei, voortdurend beziggehouden. Een van deze problemen kwam zojuist al ter sprake. Ik noem er nog twee:

1. Hoe wordt de worpbeweging onderhouden, nadat de hand het geworpen lichaam heeft losgelaten?
2. Waarom is de valbeweging versneld?

De eerste vraag heeft te maken met de eis van Aristoteles dat er bij een gedwongen beweging een uitwendige beweger moet zijn die blijvend met het lichaam verbonden is. We spraken hier al eerder over. Volgens de Griekse filosoof onderhoudt de lucht de beweging van een geworpen lichaam, zodra het contact met de werper verbroken is. Weer was het Philoponos die op deze verklaring kritiek uitte. De alledaagse waarneming wijst er volgens hem veeleer op dat lucht de beweging remt dan dat ze die onderhoudt. De gedachte kwam bij hem op dat de werper aan een geworpen lichaam een inwendig aandrijvend vermogen (impetus) meegeeft, die het lichaam verder voortstuwt en dus zowel gevolg als oorzaak van beweging is. Vooral in de veertiende eeuw werd deze gedachte tot een impetus-theorie uitgewerkt door de zogenaamde Parijse terministen (o.a. Johannes Buridan en Nicole Oresme). Hiermee werd ook verklaard waarom de valbeweging versneld is, een probleem dat Aristoteles in feite nooit had opgelost. De zwaarte, het streven naar het middelpunt van de kosmos, doet een lichaam vallen en door deze valbeweging verwerft het lichaam impetus, die op zijn beurt weer als een soort aanvullende zwaarte het lichaam nieuwe beweging meegeeft, waardoor de val versneld wordt.

In zeker opzicht lijkt de impetus op de newtoniaanse traagheids'kracht'. De wat vage kwantitatieve gegevens die bij Buridan te vinden zijn, maken het ook mogelijk aan impuls of energie te denken. Maar identificatie met een van deze begrippen is uitgesloten; daarvoor zijn de verschillen te groot.

De impetusfysica is stellig een verbetering ten opzichte van de oorspronkelijke Aristotelische inzichten. Ze heeft echter, ondanks de invloed die er vanuit ging, niet tot een doorbraak geleid. Daarvoor bleef deze theorie toch teveel binnen de oude Aristotelische kaders. Om die te doorbreken was een totaal andere kijk op de wereld nodig, een omslag in het denken. Die doorbraak kwam in de zeventiende-eeuwse wetenschapsrevolutie.

### Mathematisering en Pythagoreïsch-Platonisme

Deze natuurwetenschappelijke omwenteling kwam straks al even ter sprake, maar ik kan nu na de behandeling van Aristoteles duidelijker aangeven wat ze inhoudt. Allereerst gaat het om een radicale wijziging van het wereldbeeld. Het oude, organistische wereldbeeld van Aristoteles en de Middeleeuwse Scholastiek wordt vervangen door een mechanistisch wereldbeeld, waarin de wereld niet langer als een organisme, maar als een machine wordt gezien. Zelfs dieren worden dikwijls beschreven als gecompliceerde machines. Vooral de Franse filosoof Descartes huldigt het standpunt dat elke natuurwetenschappelijke theorie een mechanisch model van de werkelijkheid zou moeten leveren, dat desgewenst door iemand in elkaar gezet zou kunnen worden om zo de natuurwerking te demonstreren. In dit wereldbeeld speelt het verklaren vanuit evident geachte beginselen een even grote rol als bij Aristoteles, maar de eis wordt nu dat alle processen worden verklaard met behulp van contactwerking van bewegende deeltjes.

Naast deze mechanisering vindt er ook een mathematisering van de natuur en de natuurwetenschappen plaats. De bekende wetenschapshistoricus Alexandre Koyré spreekt over de wetenschapsrevolutie als de afbraak van de Aristotelische kosmos en de geometrisering van de ruimte, in die zin dat de concrete, reële wereld wordt vervangen door de abstracte, drie-dimensionale Euclidische ruimte, waarmee dan onlosmakelijk de gedachte is verbonden dat het de belangrijkste taak van de fysica wordt de natuurverschijnselen met mathematische wetten te beschrijven. Een dergelijke mathematisering (geometrisering) vinden we bij Galilei, zonder dat er bij hem sprake is van een uitgewerkte mechanistische natuurverklaring.

Mechanisering en mathematisering liggen niet zonder meer in elkaars verlengde. Aanvankelijk bestaan er in de zeventiende eeuw zelfs grondige meningsverschillen tussen onderzoekers die willen volstaan met een mathematische beschrijving van de verschijnselen, zonder zich verder om de oorzaak ervan te bekommeren, en anderen voor wie een mechanistische natuurverklaring de eigenlijke taak van de fysica is, die in elk geval aan een mathematische beschrijving vooraf dient te gaan. Men kan zelfs stellen dat het dogmatisch mechanicisme remmend op de mathematisering heeft gewerkt. Pas bij Newton vindt er op dit punt een vruchtbare synthese plaats.

Voordat ik dieper op deze interessante kwestie inga, moet ik eerst nog een laatste duik in het verleden nemen. Het denkbeeld om een nauwe band te smeden tussen wiskunde en natuurwetenschap was namelijk volstrekt niet nieuw. In de zesde eeuw voor Christus stelde de school van de Pythagoreeërs dat het wezen van alle dingen en verschijnselen schuilt in maat en getal. Ook bij Plato (429-348 v.Chr.) speelde de wiskunde een belangrijke rol, met name ook voor zijn kennisleer. De Atheense wijsgeer kende alleen realiteit toe aan een bovenzintuiglijke wereld, alleen voor de geest toegankelijk, van ideale vormen—ideeën—waarvan de dingen in onze wereld slechts vage, schaduwachtige afspiegelingen zijn. Ware kennis heeft dan ook betrekking op de ideeën en niet op de zintuiglijk waarneembare wereld. De wiskunde staat daarom model voor een ware wetenschap, omdat zij bij hem geen betrekking heeft op fysische objecten, maar op ideale geometrische vormen en getallen.

Deze visie van Plato is van groot belang geweest voor de astronomie. Net zo min als de wiskunde zich met zichtbare objecten bezighoudt, dient de ware astronomie zich met waarneembare bewegingen bezig te houden. Wanneer we ware astronomische kennis willen verwerven, moeten we volgens hem de hemelverschijnselen terzijde laten, omdat immers al het zichtbare aan verandering onderhevig is. Ware astronomie handelt over de ideale, onveranderlijke cirkelbeweging van ideale punten aan een denkbare hemel, die in de plaats van de waarneembare hemel gesteld wordt. En de astronomische praktijk dan? Welnu, grillige planetenbanen kunnen de ware bewegingen van goddelijke hemellichamen niet zijn. Het is daarom de taak van de astronomen de verschijnselen te 'redden' (niet de theorie!) door middel van combinaties van eenparige cirkelbewegingen.

Dit laatste heeft Aristoteles van zijn leermeester Plato overgenomen, hoezeer hij ook verder in zijn (hemel)fysica van hem afweek. We moeten echter wel beseffen dat het leggen van een of ander geometrisch 'raster' over de waargenomen verschijnselen voor Aristoteles geen natuurkunde is, maar wiskunde. Als het over hemelfysica gaat, breekt hij zich niet het hoofd over in- of aanpassing van waarnemingen, maar over de oorzaak van de eeuwige, eenparige cirkelbewegingen. Een probleem dat hij voor de buitenste sfeer van de kosmos, het Primum Mobile, 'oplost' met behulp van een immateriële Eerste Beweger. Op grond van de eeuwigheid en de onveranderlijkheid van de hemelsferen komt hij tot de conclusie dat de—in zijn fysica noodzakelijke—bewegers van de planeten eveneens immateriële substanties moeten zijn, de zogenaamde intelligenties, die in de Middeleeuwen met engelen geïdentificeerd worden. De astronomie van Aristoteles, of liever zijn hemelfysica, wordt hier tot een rationele theologie, die ons langs rationele weg inlicht over de goddelijke intelligenties.

Dit verschil tussen fysica en wiskunde, tussen fysische werkelijkheid en mathematisch model is van essentieel belang. Als Galilei later in conflict komt met de Aristotelische wetenschap en de rooms-katholieke kerk, is dat niet vanwege zijn verdediging van het heliocentrische stelsel als zodanig, maar vanwege de pretentie (die ook Copernicus zelf had) dat het hier niet slechts om een handig geometrisch model gaat, waarmee de verschijnselen beter te redden zijn (mathematische hypothese), maar om de werkelijkheid (fysische hypothese). Tegen het Copernicanisme als mathematisch model bestond geen enkel bezwaar.

Dankzij het gezag van Plato en Aristoteles hebben de astronomen tweeduizend jaar lang gepoogd de hemelverschijnselen te redden door geometrische modellen waarin alleen combinaties van (eenparige) cirkelbewegingen gebruikt werden. Het bekendste en meest uitgewerkte systeem was dat van Ptolemaeus (150 n. Chr.), dat in de Middeleeuwen voor de astronomische praktijk algemeen gebruikt werd. Ondanks het feit dat Ptolemaeus een centrale aarde aannam, is er vanwege de vrijheden die hij zich wat betreft het invoeren van bepaalde hulppunten veroorloofde, altijd een zekere spanning blijven bestaan tussen de Aristotelische fysica en de Ptolemaeïsche astronomie. Het Copernicaanse stelsel betekende weliswaar een drastische verandering in de positie van de aarde en de zon, maar de eenparige cirkelbeweging was er onverkort in gehandhaafd, consequenter zelfs dan in het Ptolemaeïsche systeem. Ook Galilei is er zijn hele leven nooit van afgestapt, ook niet toen de astronoom Johannes Kepler (1571-1630) er in 1609 wel mee brak.

De introductie van de wiskunde in de natuurwetenschap door het Platonisme is van grote betekenis geweest. Op dit punt is er verwantschap met het Pythagoreïsme. Het streven naar mathematisering wordt in de geschiedenis van de natuurwetenschappen dan ook meermalen als Pythagoreïsch-Platonisme aangeduid. Dat dit mathematiserende Platonisme in de Oudheid slechts beperkt vruchtbaar is gebleken, komt met name door Plato's metafysica met zijn sterke minachting voor het stoffelijke in het algemeen en voor het experiment in het bijzonder. Waar de mathematische behandeling slaagde, betreft dit dan ook gebieden als de statica, hydrostatica en geometrische optica, waarvoor men slechts weinig empirische gegevens nodig heeft om de optredende verschijnselen af te beelden in een mathematisch systeem (lichtstralen zijn lijnen etc.). De gebruikte axioma's waren weliswaar van fysische aard, maar overigens onderscheidde de aanpak zich in niets van de Euclidische meetkunde.

Vooral Archimedes (287-212 v. Chr.) is bekend geworden door zijn puur mathematische behandeling van de statica (hefboomevenwichten, zwaartepuntsbepalingen). Ook de hydrostatica wordt door hem op basis van aan de Aristotelische fysica ontleende axioma's zuiver wiskundig opgebouwd. Als hij de naar hem genoemde wet over de opwaartse kracht heeft afgeleid, deduceert hij daaruit wel een groot aantal stellingen over de stabiliteit van drijvende omwentelingsparaboloïden, maar empirische verificatie achtte hij blijkbaar niet nodig. Daar is althans hier en elders in zijn werken niets van te vinden. Ook lijkt hij als 'wetenschapper' niet in eenvoudige fysische toepassingen geïnteresseerd te zijn, ondanks het feit dat hij als ingenieur oorlogswerktuigen ontwierp voor de verdediging van zijn vaderland Syracuse. De opkomst van de moderne mechanica in de zestiende eeuw hangt ten nauwste samen met een hernieuwde belangstelling voor Archimedes, wiens werken algemeen toegankelijk werden, toen er in 1544 voor het eerst een volledige uitgave van verscheen, een jaar na het boek van Copernicus.

Ongetwijfeld staat deze uitgave in verband met een herwaardering van het mathematische denken in de zestiende eeuw. Een andere belangrijke factor in dit proces is de herleving van het Pythagoreïsch-Platonisme. Ook toen het gezag van Aristoteles zo groot geworden was dat zijn filosofie het hele Middeleeuwse geestesleven beheerste, was deze mathematiserende stroming nooit geheel verdwenen. In de Renaissance, als de kritiek op Aristoteles toeneemt en men teruggrijpt op andere autoriteiten, krijgt ze door een opleving van het Pythagoreïsme en het (Neo)platonisme nieuwe impulsen. Wat de natuurwetenschap betreft, loopt dit enerzijds uit op onvruchtbare getallenmystiek en dito geometrische symboliek, zoals bij Robert Fludd (1574-1637), maar anderzijds ook op een bijzonder vruchtbare mathematisering bij onderzoekers als Galilei en Kepler.

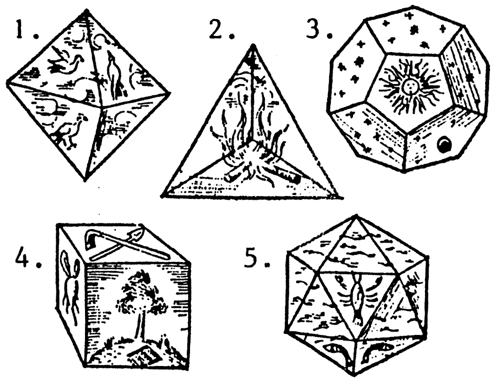
## Kepler

Bij Kepler komen we trouwens beide aspecten tegen: aan de ene kant koesterde hij zijn mystiek-mathematische ideeën, maar aan de andere kant onderwierp hij ze met eindeloos geduld aan de nodige controlerende berekeningen. Hij was een hartstochtelijk Copernicaan, omdat het heliocentrische stelsel in zijn ogen het best beantwoordde aan de eis dat de wereld door God volgens een eenvoudig en elegant mathematisch grondplan gemaakt was. Wat schoonheid en eenvoud is, wordt hier bepaald door de wiskunde.

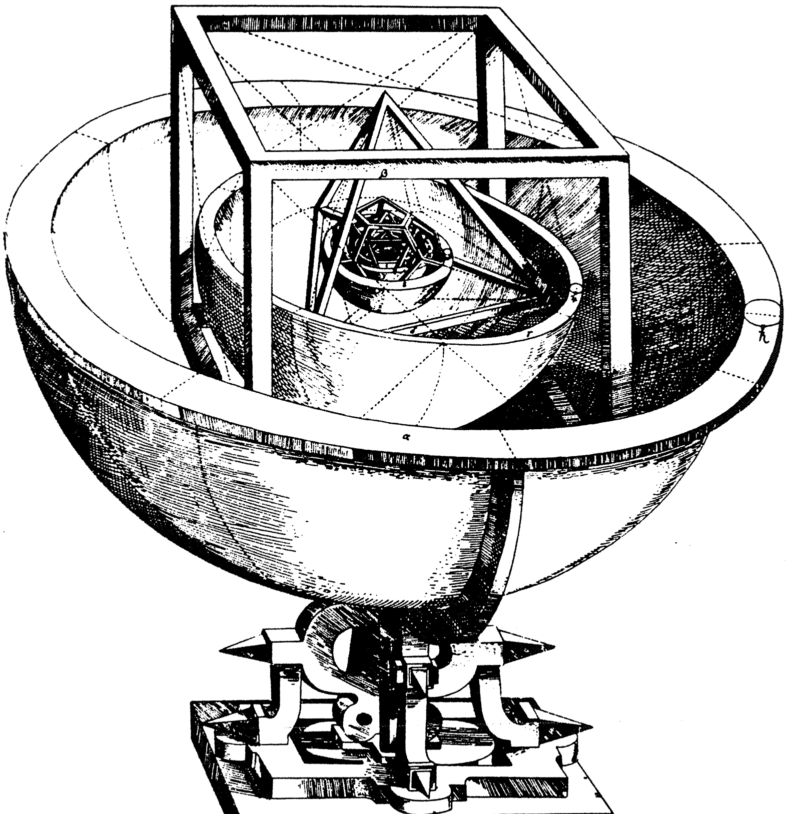
Het is geheel in de geest van Plato, wanneer we Kepler in zijn *Mysterium Cosmographicum* (1596) horen zeggen dat de mathematische harmonieën in de geest van God ons de oorzaak aan de hand doen, waarom getal, maat en beweging van de hemellichamen zijn zoals ze zijn. In dit werk ontvouwde hij zijn inzichten in de bouw van de kosmos. In een poging van het zonnestelsel een model op schaal te geven, vroeg hij zich af of er mogelijk een verband bestond tussen het gegeven dat er juist vijf regelmatige veelvlakken bestaan (Platonische lichamen) en zes planeten, zoals men toen, de aarde meegerekend, meende. Hij construeerde een model volgens de reeks Mercurius—octaëder—Venus—icosaëder—aarde—dodekaëder—Mars—tetraëder—Jupiter—hexaëder (kubus)—Saturnus, waarbij een planeet de in- en omgeschreven bol levert van resp. het voorgaande en volgende veelvlak. Keplers vreugde kende geen grenzen: hij was er van overtuigd Gods scheppingsplan ontdekt te hebben.

Al gauw moest hij echter erkennen dat zijn mathematisch model van het heelal niet volledig met de waarnemingen overeenstemde. Nu had hij op zijn Platonische weg kunnen voortgaan en kunnen stellen dat de stoffelijke wereld nu eenmaal slechts een gebrekkige kopie is van het goddelijk bouwplan, en vervolgens overgaan tot de orde van de dag. Echter, de christelijke gedachte dat de stoffelijke wereld evenzeer van God komt als de in haar afgedrukte ideeën, overwon het Platonische denkbeeld dat de stof de zuivere afspiegeling van de ideeën belemmert. Kepler corrigeerde zijn model daarom in zoverre dat hij de concentrische sferen verving door bolschalen van een nog nader te bepalen dikte om ervoor te zorgen dat de baan van een planeet binnen de erbij behorende sfeer geplaatst kon worden.

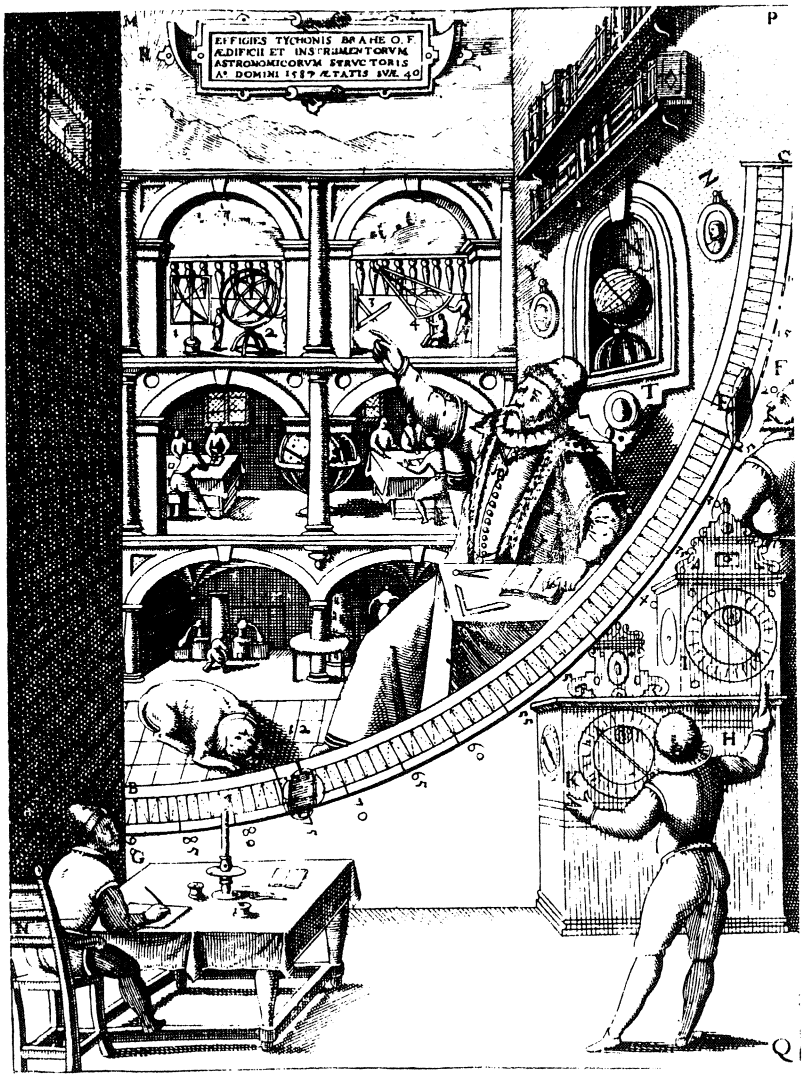
Om het probleem van de schaaldikte voor de planeet Mars verder door te rekenen werd hij in 1600 assistent van de bekende Deense astronoom Tycho Brahe (1546-1601) die toen in de buurt van Praag woonde. Na de dood van Tycho wist hij diens beroemde en voor hem onmisbare waarnemingen in handen te krijgen om zijn plan uit te voeren. Het lukte hem na veel rekenwerk de planeet Mars in een excentrische cirkel om de zon te laten lopen binnen een foutenmarge van acht boogminuten, waarmee hij binnen de toen algemeen geaccepteerde tien boogminuten bleef. Toch nam Kepler er geen genoegen mee, want hij wist dat Tycho's waarnemingen zo nauwkeurig waren dat diens foutenmarge verkleind was tot twee boogminuten, een resultaat dat nog nooit eerder was bereikt. Hij nam toen de opzienbarende stap om het tweeduizend jaar oude dogma van de eenparige cirkelbeweging los te laten en over te gaan op de ellipsbaan. Kepler was zich het revolutionaire van zijn daad zeer wel bewust. Het boek waarin hij dit beschreef, heette niet voor niets *Astronomia Nova* (Nieuwe astronomie). Het verscheen in 1609 en er is alle reden om de 'echte' omwenteling in de astronomie in dat jaar te laten beginnen en niet in 1543, het jaar waarin Copernicus' *De Revolutionibus* (Over de omwentelingen) verscheen. Immers, het heliocentrisch stelsel van Copernicus zelf was voor de




FIGUUR 2. De vijf Platonische lichamen. 1. octaëder 2. tetraëder 3. dodekaëder 4. kubus (hexaëder) 5. icosaëder.



FIGUUR 3. Keplers model van het heelal. De buitenste (halve) sfeer is die van Saturnus (Mysterium Cosmographicum, 1596).

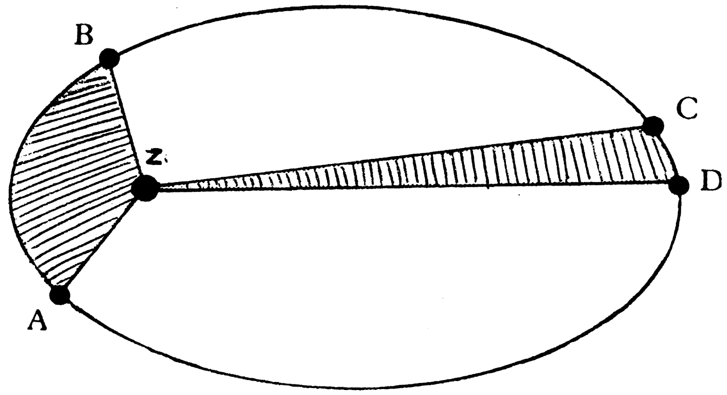



FIGUUR 4. Het grote muurkwadrant van Tycho Brahe (met omhoog wijzende arm) op zijn sterrenwacht Uraniborg op het eiland Hveen (Denemarken).

astronomische praktijk nauwelijks eenvoudiger dan dat van Ptolemaeus. Pas Keplers ellipsen brachten de beoogde vereenvoudiging aan.

Tot zijn grote vreugde kwam de verloren gegane eenparigheid op andere wijze terug in wat thans de tweede wet van Kepler heet, de zogenaamde perkenwet, die zegt dat de voerstraal die vanuit de zon naar de planeet wijst, in gelijke tijden gelijke oppervlakken (perken) doorloopt. Voor de volledigheid vermeld ik hier Keplers derde wet, die in zijn *Harmonice Mundi*

(Wereldharmonie) van 1619 is te vinden: het kwadraat van de omlooptijd van een planeet is evenredig met de derde macht van de gemiddelde afstand tot de zon. Kepler heeft hier als eerste de Euclidische meetkunde binnen de fysica gehaald. Want zijn wetten zijn voor hem niet alleen geometrische constructies om in Platonische zin de verschijnselen te redden, maar ze zijn voor hem wezenlijk in de natuur gerealiseerd.




FIGUUR 5. Keplers tweede wet (1609). De zon staat in *Z*. De sectoren (perken) *AZB* en *CZD* hebben dezelfde oppervlakte.

Nog belangrijker misschien dan zijn resultaten (de drie wetten) is zijn methode. Deze wijkt zozeer af van die van zijn voorgangers dat de bekende wetenschapshistoricus E.J. Dijksterhuis stelt dat Kepler voor ons de deur opende die ons uit de zaal van de antieke en Middeleeuwse natuurwetenschap in die van de nieuwe, thans 'klassiek' genoemde natuurwetenschap brengt. Het is daarom belangrijk genoeg enkele kenmerken ervan te noemen:

1. Hij voert zelfstandig natuuronderzoek uit, los van de traditie en los van de autoriteit van filosofie en theologie.
2. Doorlopend past hij een mathematische denkwijze toe, zowel in het opstellen als in het uitwerken van zijn hypothesen.
3. Consequent toetst hij de uit de hypothesen gededuceerde gevolgtrekkingen aan een tot de hoogste graad van nauwkeurigheid opgevoerde empirie.

Zoals we al zagen, was Keplers keuze voor mathematische hypothesen en wetten het gevolg van zijn diepste overtuiging dat God zich bij de schepping van de wereld door mathematische overwegingen heeft laten leiden, door zich te richten op bepaalde 'wereldvormende verhoudingen'. Tevens heeft Hij de menselijke geest zo geschapen dat deze in staat is kwantitatieve relaties te onderkennen. Dat is volgens Kepler zelfs de eigenlijke functie van de menselijke geest, precies zoals het oog er is om te zien en het oor om te horen. Het mathematische systeem dat naar aanleiding van de waargenomen verschijnselen door ons wordt opgesteld, bevat daardoor alles wat de mens van de natuur aan de weet kan komen, zodat hij er zeker van kan zijn dat hij een blik slaat in het goddelijk scheppingsplan.

Kepler wilde echter niet alleen de bouw van en de bewegingen in het planetenstelsel mathematisch beschrijven, hij wilde er ook bewust een fysische verklaring van geven. In de volledige titel van zijn *Nieuwe astronomie* wordt dan ook uitdrukkelijk vermeld dat het om hemelfysica gaat. Zonder in details te treden vermeld ik hier alleen dat Kepler de planetenbeweging zag als een gevolg van een meesleepeffect van de zon. De zon, als hart en motor van het heelal, draait om haar as en sleept door transversale magnetische kracht de planeten mee. Hoewel hij lange tijd heen en weer geslingerd werd tussen een organistische en een mechanistische natuurbeschouwing, zette hij toch de eerste stap op weg naar een ingrijpende verandering in het denken, in de richting namelijk van een mechanistische natuurverklaring: het was niet langer de ziel van de zon, maar haar (magnetische) kracht die de planeten bestuurde. De natuur was voor hem niet langer een goddelijk, bezield wezen, maar een uurwerk, waarin hij dan toch weer de aarde als een levend, door eb en vloed ademhalend wezen is blijven zien, terwijl de gedachte aan planeetgeesten—de intelligenties van Aristoteles—hem nog tot 1621 bleef bezighouden.

### GALILEI

Met zijn hemeldynamica heeft Kepler geen blijvende resultaten geboekt, onder andere omdat zijn fysica teveel in de Aristotelische sfeer bleef. Met name miste hij een juist inzicht in de traagheid van de materie. Juist op dit punt heeft Galilei baanbrekend werk verricht, al was ook zijn traagheidsbegrip slechts bij benadering correct. De Italiaanse onderzoeker is algemeen bekend geworden als de grote verdediger van het Copernicanisme, maar afgezien van zijn astronomische waarnemingen zijn zijn verdiensten voor de astronomie beperkt. Zo heeft hij nooit de wetten van Kepler aanvaard: hij bleef vasthouden aan het aloude dogma van de eenparige cirkelbeweging. Wel is zijn strijd voor Copernicus een stimulans geweest voor zijn fysica, omdat hij gedwongen was de fysische bezwaren tegen het Copernicanisme—opgevat dus als fysische realiteit!—te weerleggen. Het zijn primair nieuwe fysische inzichten geweest die de bezwaren tegen het Copernicanisme van hun kracht hebben beroofd. En daar heeft Galilei in belangrijke mate aan bijgedragen.

In het licht van de eeuwenlange discussies over val en worp, die ik al eerder ter sprake bracht, is het niet verwonderlijk dat ook Galilei zich hiermee intensief heeft beziggehouden, temeer daar de studie van de worp ook voor de praktijk van belang was (kogelbaan). Terwijl echter zijn voorgangers met al hun—soms scherpe—kritiek op de Griekse filosoof toch binnen de oude kaders bleven, is de Italiaanse natuuronderzoeker de eerste die er op belangrijke punten zó duidelijk doorheen breekt, dat er goede redenen zijn de 'moderne' (klassieke) fysica bij hem te laten beginnen.

Dat Galilei zich in belangrijke mate aan de bewegingsleer van Aristoteles ontworsteld heeft, is met name te danken aan de mathematische inslag van zijn denken en de bekoring die het Copernicaanse wereldbeeld op hem heeft uitgeoefend. Zijn mathematiserend denken bracht hem al vroeg onder invloed van Archimedes. Dat had als gevolg dat hij, wat het belang van de wiskunde betreft, ondubbelzinnig partij koos vóór Plato en tegen Aristoteles:

> 'Als u voor de wiskunde een superieure status opeist, of sterker nog er een reële waarde en een overheersende positie in de fysica aan toekent, dan bent u een Platonist. Als u daarentegen in de wiskunde een abstracte wetenschap ziet die van minder waarde is dan die welke zich met het werkelijk zijnde bezighoudt (fysica en metafysica), als u in het bijzonder beweert dat de fysica geen andere basis behoeft dan ervaringen... dan bent u een Aristoteliaan.'

Op één belangrijk punt gaat Galilei, evenals Kepler, echter wezenlijk verder dan Plato. Ware kennis heeft bij de Griekse wijsgeer altijd betrekking op wat eeuwig en onveranderlijk is, op de wereld van de eeuwige ideale vormen, nooit op de schaduwachtige, veranderlijke wereld van het zintuiglijk waarneembare. Maar juist deze fundamentele scheiding tussen fysica en wiskunde wordt door Galilei opgeheven. De waarheid die getal en lijn ons verschaffen, is niet beperkt tot de wereld van de arithmetica en de geometrie, maar ze strekt zich ook uit tot het wezen van de dingen in de empirisch waarneembare wereld, die voortdurend verandert. Galilei is ten diepste mathematisch realist: hij is ervan overtuigd dat het boek der natuur in mathematische letters geschreven is. Het universum ligt weliswaar altijd als een boek voor ons open maar we kunnen het alleen begrijpen als we de taal kunnen ontrafelen waarin het is geschreven:

> 'Het is geschreven in de taal van de wiskunde en haar letters zijn driehoeken, cirkels en andere geometrische figuren, zonder welke het menselijkerwijs onmogelijk is er ook maar een woord van te begrijpen; zonder deze letters wandelt men rond in een donker labyrint.'

De natuur is voor Galilei vatbaar voor exacte en nauwkeurige mathematische behandeling. Tegenover de Aristotelische opvatting dat mathematische abstracties in het concrete nooit geldig zijn en dat men door te abstraheren geen fysica bedrijft, stelt Galilei dat

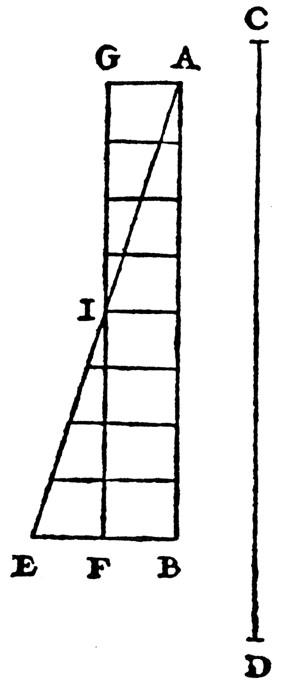
> 'als de geometrische filosoof in concreto de effecten zou willen waarnemen die hij in abstracto heeft bewezen, moet hij de belemmeringen van de materie te boven komen, en ik verzeker u, als hij weet hoe dat moet, dan zullen de dingen niet minder exact blijken te zijn dan de berekeningen. De fouten zitten niet in het abstracte, noch in het concrete, noch in de meetkunde, noch in de natuurkunde, maar in de rekenaar die niet weet hoe hij zijn berekeningen kloppend moet krijgen.'

Het zal uit het bovenstaande duidelijk zijn dat Galilei de 'bladzijde' uit het boek der natuur waarop de valbeweging voorkomt, heel anders 'leest' dan Aristoteles en de Scholastieke filosofen. Hij wil (voorlopig) de vraag waarom een lichaam valt en wat het doel van de valbeweging is, laten rusten en zich uitsluitend op de 'hoe'-vraag werpen. Om daar een mathematisch antwoord op te kunnen geven, begint hij in het valverschijnsel het ideale van het waargenomene te scheiden. Vanaf Aristoteles was men de val altijd in zijn 'volle omvang' blijven beschouwen, mèt inachtneming van de rol van het medium. Galilei poogde zich echter een voorstelling te vormen van de valbeweging in vacuüm.

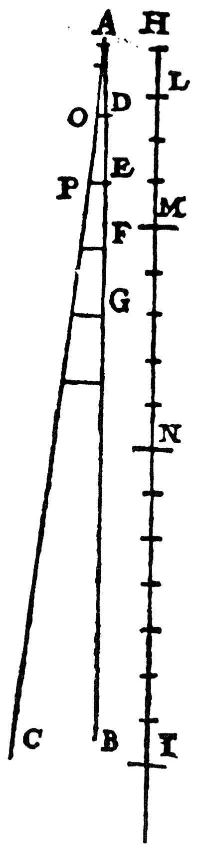
Hij verwierp het Aristotelische onderscheid tussen licht en zwaar en nam aan dat alle lichamen van nature zwaar zijn. Waargenomen 'lichtheid' was het gevolg van opwaartse druk in de zin van de wet van Archimedes. In vacuüm zouden alle lichamen vallen, en wel even snel, zodat hij met de specifieke eigenschappen van een vallend lichaam geen rekening behoefde te houden. Hij kon zich dus beperken tot het vinden van een mathematische voorstelling van de valbeweging. Hij liet zich daarbij leiden door de gedachte dat de natuur zo eenvoudig mogelijk werkt. Een dergelijk criterium is blijkbaar niet eenduidig bepaald, want drie keer veranderde hij van mening. Pas de derde voorstelling in zijn *Discorsi* (1638) was de juiste: de snelheid van de val neemt in gelijke tijden met gelijke hoeveelheden toe, ofwel de snelheid (dat wil zeggen, de gemiddelde snelheid over een bepaald traject) is evenredig met de tijd die sinds het begin van de val is verlopen. Anders gezegd: met als enig empirisch gegeven dat de val versneld is, postuleerde hij dat deze versnelling in vacuüm constant is. Dat is dus een heel andere start dan *Getal en Ruimte* ons wil doen geloven!

Galilei leidt nu uit deze als axioma aangenomen evenredigheid langs meetkundige weg af dat de afgelegde weg evenredig is met het kwadraat van de benodigde tijd. Het is opmerkelijk dat hij hiervoor een geometrische voorstelling gebruikt die terug te vinden is bij de eerder genoemde Parijse terminist Nicole Oresme. Eerst bewijst hij een hulpstelling. In Figuur 6 wordt de valafstand voorgesteld door het lijnstuk $CD$, de daarvoor benodigde valtijd door lijnstuk $AB$ en de in $D$ verkregen snelheid door $EB$. $F$ is het midden van $BE$. Met behulp van de methode der indivisibilia, waarbij een vlakke figuur uit een onbepaald aantal evenwijdige lijnen opgebouwd gedacht wordt, bewees Galilei dat $opp.BFGA = opp.BEA$, ofwel dat de weg die in een bepaalde tijd vanuit rust in eenparig versnelde beweging wordt afgelegd, gelijk is aan de weg die in dezelfde tijd wordt afgelegd in een eenparige beweging waarvan de snelheid gelijk is aan de helft van de eindsnelheid van de gegeven versnelde beweging.

Met behulp van een soortgelijke figuur (Figuur 7) bewijst hij de wet $s(:)t^2$. De tijden van de beweging langs de willekeurig gekozen wegen $HL$ en $HM$ worden voorgesteld door de lijnstukken $AD$ en $AE$. De snelheden in $L$ en $M$ door $DO$ en $EP$. Door toepassing van de bovengenoemde hulpstelling over de manier waarop een eenparig versnelde beweging door een eenparige te vervangen is, vindt hij dat $HL$ en $HM$ in dezelfde tijden $AD$ en $AE$ doorlopen zouden zijn in eenparige bewegingen met snelheden van resp. $\frac{1}{2}DO$ en $\frac{1}{2}EP$. Op grond van de eerder afgeleide stelling voor eenparige bewegingen dat de wegen samengesteld evenredig zijn met de snelheden en de tijden (d.w.z. $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{t_1}{t_2}$), kan hij dus nu concluderen dat voor de wegen $HL$ en $HM$ de volgende verhouding geldt: $\frac{HL}{HM} = \frac{\frac{1}{2}OD}{\frac{1}{2}PE}\cdot\frac{AD}{AE}$. Op grond van het aangenomen axioma geldt $\frac{OD}{PE} = \frac{AD}{AE}$ en bijgevolg $\frac{HL}{HM} = \frac{AD^2}{AE^2}$, waarmee het




FIGUUR 6




FIGUUR 7

bewijs voltooid is. Een typisch Pythagoreïsch trekje is nog dat uit deze wet wordt afgeleid dat bij een valbeweging vanuit rust de afgelegde wegen in opvolgende gelijke tijden zich als de rij der oneven getallen verhouden.

Vanwege de onuitvoerbaarheid van rechtstreekse valproeven, zoekt Galilei naar een vervangend experiment, dat overigens niet in vacuüm, maar in de open lucht wordt uitgevoerd. Hij maakt eerst met behulp van slingerproeven het zogenaamde postulaat van de gelijke eindsnelheden aannemelijk: als een lichaam langs schuine vlakken valt (in vacuüm), dan hangt de eindsnelheid alleen van de verticale hoogte af. Dankzij dit postulaat kon hij het valexperiment vertragen door een metalen bal in een zwak hellende goot te laten rollen. Opmerkelijk is de uitspraak van Galilei in de *Discorsi* dat hij wel een proef gedaan heeft, maar dat de natuurlijke rede hem er reeds van overtuigd had dat het verschijnsel zou moeten verlopen, zoals het ook inderdaad verliep. Dit Platonisch trekje is waarschijnlijk de reden dat hij verder in zijn boek geen metingen opgeeft. Toch is zijn methode in principe dezelfde als die van Kepler: na (mentale) analyse van de verschijnselen worden een of meer hypothesen opgesteld, door deductie wordt een mathematische wet afgeleid en deze wordt door experimenten getoetst, al lijkt hij dit laatste soms min of meer overbodig te vinden.

DESCARTES

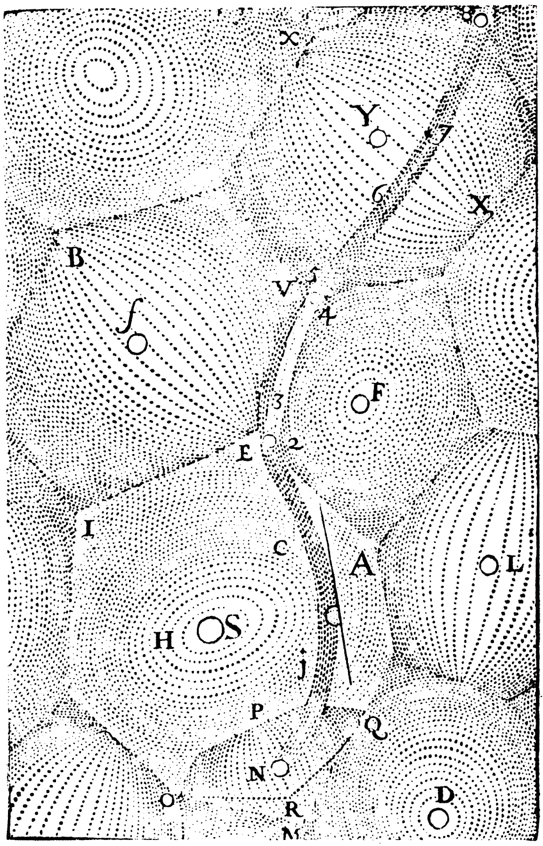
Als Galilei in 1638 deze resultaten publiceert in zijn *Discorsi e dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze* (Gesprekken en wiskundige bewijzen betreffende twee nieuwe wetenschappen), wordt er in het bouwwerk van de Aristotelische filosofie opnieuw een bres geslagen. Inmiddels was er een jaar eerder reeds een boekje verschenen dat de definitieve instorting van dit gebouw inluidde, het *Discours de la Méthode* van de Franse filosoof René Descartes (1596-1650). Zijn hoofdwerk *Principia philosophiae* verscheen in 1644. Dit werk bevat zijn kosmologische systeem.

Waren Kepler en Galilei ervan overtuigd dat de structuur van onze buitenwereld in wezen mathematisch van aard is en dat er tussen het denken van de mens en deze buitenwereld harmonie bestaat, Descartes gaat nog een stap verder. Voor hem zijn wiskunde en fysica ten diepste identiek. De natuurwetenschap moet op dezelfde wijze als de wiskunde gededuceerd worden uit grondbeginselen die de menselijke geest als evident beschouwt. Volgens de Franse filosoof zijn dat grootte, vorm en beweging, ofwel materie en beweging, want het wezen van een stoffelijk object is niets anders dan zijn grootte en geometrische vorm. Materie en uitgebreidheid zijn volkomen identiek. Dat heeft direct vier noodzakelijke consequenties:

1. Er is slechts één soort materie (er zijn immers geen kwalitatieve verschillen).
2. Een vacuüm is onbestaanbaar.
3. Het heelal is onbegrensd.
4. Atomen bestaan niet, want de materie is immers onbeperkt deelbaar.

De fysica die Descartes voor ogen staat, is een deductieve wetenschap die men zou kunnen typeren als een Euclidische geometrie van bewegende ruimtedelen. Hij is dan ook niet zozeer geïnteresseerd in het doorvorsen van de natuur, zoals zij zich in haar contingent karakter aan ons vertoont, als wel in het probleem hoe de natuurverschijnselen uit de grondbeginselen gededuceerd kunnen worden. Daarbij mag alleen gebruik gemaakt worden van druk en botsing van bewegende deeltjes van alle mogelijke groottes en vormen.

Er blijven dan natuurlijk twee vragen over: hoe bewegen de deeltjes en wat zijn hun vormen en groottes? Op dit punt meent Descartes de vrije hand te hebben. Volgens hem had God Zijn schepping op oneindig veel manieren tot stand kunnen brengen en daarom mogen wij vrijelijk hypothesen opstellen over vormen, groottes en bewegingen, mits we de verschijnselen ermee kunnen verklaren. Van dat recht heeft hij een royaal gebruik gemaakt. Voor de beweging stelde hij een aantal axioma's op (o.a. de later door Newton overgenomen traagheidswet), die ik hier verder laat rusten. Voor de materiedeeltjes nam hij drie ordes van grootte aan: grove zichtbare materie, onzichtbare bolletjes hemelmaterie en onvergelijkelijk fijn verdeelde subtiele materie van alle mogelijke vormen. Om te voorkomen dat elke beweging in zijn 'gevuld' heelal tot in de verste uithoeken gevolgen zou hebben, maakte Descartes veelvuldig gebruik van de—niet-noodzakelijk cirkelvormige—rondgaande beweging van deeltjes in wervels of kolken. Deze werveltheorie speelt met name een




FIGUUR 8. De wervels van het zonnestelsel volgens Descartes (Principia philosophiae, 1644) S is de zon; F,*f* etc. zijn vaste sterren. De punten 1,2,...,7 vormen de baan van een komeet.

belangrijke rol in zijn hemelmechanica. Elk hemellichaam heeft een wervel hemelmaterie om zich heen. De wervel die rond de zon beweegt, sleept de planeten mee om de zon en de wervel van de aarde voert de maan met zich mee. Talloze fysische en chemische verschijnselen worden verklaard met wervels subtiele materie.

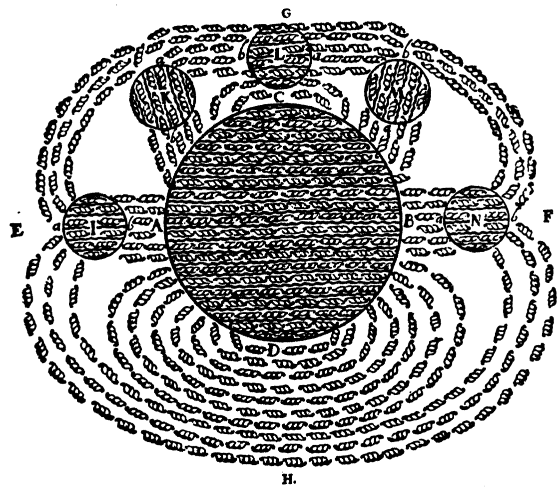
Wie nu verwacht dat Descartes met zijn geometrische beginselen op zoek gaat naar mathematische wetten en deze deduceert, komt bedrogen uit. Weliswaar heeft hij de juiste brekingswet afgeleid en zeven botsingswetten gegeven (waarvan er zes fout bleken te zijn), maar in het algemeen komt hij niet verder dan vage functionele afhankelijkheden (bijvoorbeeld: hoe verder een planeet van de zon af is, hoe groter de omlooptijd is), zonder dat zelfs gezócht wordt naar een mathematische betrekking. De fysica van Descartes is alleen wiskundig wat betreft haar deductieve methode (Euclidische redeneertrant) en haar ontologie (de identificatie van materie en uitgebreidheid).

Door bij ieder verschijnsel hypothesen ad hoc te bedenken over de grootte van de bewegende deeltjes was Descartes in staat alle bekende verschijnselen te deduceren. Zijn onbeperkte vertrouwen in het vermogen van de menselijke geest om beginselen op te sporen in zichzelf en in zijn deducerend vermogen, maakte dat hij nauwelijks geïnteresseerd was in experimentele toetsing. Hoewel hij in theorie erkende dat zijn methode hypothetisch was en dat er ook andere verklaringen mogelijk waren dan de zijne, was hij er toch van overtuigd dat een geslaagde deductie de zekerheid met zich meebracht dat zijn verklaring de juiste was. De natuur lijkt bij Descartes geheel transparant te zijn voor de menselijke rede.

De Cartesiaanse fysica is mechanistisch van aard. Ze gebruikt immers geen andere verklaringsprincipes dan die ook in de mechanica gebruikt worden, namelijk grootte, vorm, hoeveelheid (als voor haar onmisbare mathematische begrippen) en beweging (die haar specifieke onderwerp is). Evenals Galilei maakt Descartes onderscheid tussen primaire, geometrische eigenschappen en secundaire, zoals kleur, reuk, smaak, hardheid, gladheid en andere, die alleen bestaan in de geest van het waarnemend subject en verklaring behoeven in termen van primaire eigenschappen. In het bijzonder wordt dus alles uit de fysica verbannen wat ook maar iets te maken heeft met de oude organistische natuurbeschouwing. Voor bezieldheid, zoals Kepler daar nog mee worstelde, is in Descartes' systeem geen plaats. Zelfs de dieren zijn niet meer dan ingewikkelde machines.

Veel aandacht besteedt Descartes daarom aan de verklaring van het magnetisme. Dat was namelijk in de oude natuurfilosofie het prototype van een verschijnsel dat op bezieldheid wees. Om zijn ideeën ingang te doen vinden, was een geslaagde mechanistische verklaring voor hem van groot belang. Met behulp van gedraaide 'wokkelvormige' deeltjes subtiele magnetische materie, die via bijpassende kanaaltjes ongehinderd door magnetische stoffen kan bewegen, verklaart hij de magnetische aantrekking en afstoting en alle andere bij magneten waargenomen verschijnselen, die in extenso worden opgesomd. Ook hier valt weer op dat hij geen enkele poging doet door eigen onderzoek nieuwe experimentele gegevens te verzamelen. Van het speuren naar mathematische wetten is evenmin een spoor te vinden.

De vraag naar de oorzaak van een verschijnsel was voor Descartes blijkbaar even belangrijk als voor Aristoteles. Alleen zijn antwoorden waren radicaal anders dan die van de Griekse filosoof. Het feit dat Galilei ervan afgezien had om de oorzaak van de val te onderzoeken, werd dan ook door Descartes als een ernstige tekortkoming gezien. Galilei had volgens hem meer orde in zijn werk moeten brengen door eerst zijn begrippen te analyseren, met name 'zwaarte' en 'ledig'. Ze zijn volgens Descartes van zintuiglijke oorsprong en hadden herleid moeten worden tot de zuiver intellectuele begrippen 'uitgebreidheid' en 'beweging'. M.a.w. hij eiste een mechanistische verklaring van de zwaarte, die ook door Galilei nog als een wezenlijke eigenschap van een lichaam werd beschouwd. Descartes heeft zelf voor het eerst in de geschiedenis




FIGUUR 9. Cartesiaanse verklaring van het magnetisme (1644). De magnetische materiedeeltjes ('wokkels') gaan bij A,B,C,D door de poriën van de aarde (polen: A,B) en door die van de mageneten J,K,L,M,N.

zo'n verklaring gegeven: Om de aarde bevindt zich een wervel hemelmaterie en subtiele materie, waarvan de deeltjes centrifugaal willen ontwijken. De Cartesiaanse wereld is 'vol', dus dat kan alleen als andere deeltjes plaatsmaken. Lichamen die uit grove materie bestaan, worden dus naar beneden gedrukt en dat ervaren wij als zwaarte.

Wat het ledig betreft, Descartes weigert Galilei te volgen in diens idealisering van het valprobleem tot een vrije val in vacuüm. Wie van een ledig uitgaat, begint volgens hem verkeerd. In een ledig heeft een lichaam in de Cartesiaanse wereld immers geen zwaarte, omdat die geen eigenschap van een lichaam is, maar het gevolg van botsingen met deeltjes. Door een vacuüm aan te nemen wordt behandeling van het probleem van de vrije val niet gemakkelijker, maar juist onmogelijk. Uit alles blijkt dat Descartes het verschijnsel niet wil isoleren, maar in zijn volle omvang wil behandelen, dat wil zeggen, deduceren uit door hem evident geachte grondbeginselen. De mathematisering van het niet-geïdealiseerde verschijnsel zou trouwens zijn krachten ver te boven gaan.

Hoewel de Franse filosoof slechts zelden tot mathematisch geformuleerde natuurwetten kwam, ging er van zijn natuurfilosofie een geweldige bekoring uit, omdat hier voor het eerst een stelsel van natuurverklaring werd geboden dat even universeel was als dat van Aristoteles. Velen waren er met hem van overtuigd dat zijn wereldbeeld in beginsel voltooid was en dat er nog slechts detailarbeid nodig was, waarvoor alleen een beroep gedaan behoefde te worden op mathematische en mechanische inzichten.

GASSENDI

Hoewel het systeem van Descartes de meeste bekendheid heeft gekregen, waren er ook andere mechanistische theorieën. De belangrijkste ervan is afkomstig van zijn tijdgenoot Pierre Gassendi (1592-1655), die in het verzinnen van allerlei ad hoc-mechanismen ter verklaring van de verschijnselen voor Descartes niet onderdoet. Op twee belangrijke punten verschilt hij echter van hem. Dat betreft allereerst de deelbaarheid van de materie. Gassendi is de pleitbezorger geworden van het antiek atomisme van Democritus (ca. 460-ca. 370 v. Chr.) en Epicurus (341-270 v. Chr.), dat hij met succes gekerstend heeft: God heeft blijkbaar in den beginne, gezien de constante factoren in het natuurgebeuren, ondeelbare, onveranderlijke deeltjes geschapen (atomen) van allerlei vormen, groottes en met allerhande bewegingen. Het heelal is in deze conceptie een lege ruimte waarin de atomen bewegen.

In de tweede plaats is bij Gassendi de natuurkunde niet het terrein van de noodzakelijke deducties uit even noodzakelijke beginselen. Ten diepste is hij een scepticus: de kennis van het wezen van de dingen ligt buiten ons bereik. Daarom moeten we in de wetenschap niet trachten dit wezen te doorgronden, maar moeten we volstaan met het beschrijven van de verschijnselen, al hield hij zich daar, gezien zijn verklaringswoede, in de praktijk bepaald niet aan. Evenals bij Descartes vinden we bij hem weinig belangstelling voor mathematische wetten en experimenteel onderzoek. Waar echter de natuur niet meer als rationeel te doorgronden wordt beschouwd, komt wel meer ruimte voor het doen van experimenten. Dat werd in het begin van de zeventiende eeuw bepleit door de Engelse staatsman en filosoof Francis Bacon (1561-1626), die de mening dat de menselijke ratio de natuur in haar wezen kan kennen, als overmoed hekelde en een krachtig pleidooi voerde voor uitgebreid empirisch onderzoek, zonder daarbij overigens oog te hebben voor de betekenis van de wiskunde. Mede door de invloed van Bacon en Gassendi, zijn meerderen die een mechanistische natuurbeschouwing aanhangen, het belang van experimenteel onderzoek gaan inzien. Deze groep heeft echter weinig oog voor de betekenis van de wiskunde en verzet zich tegen een te sterk Pythagoreïsch-Platonisme.

De belangrijkste vertegenwoordiger van deze mechanistische filosofie met een sterk empirische inslag is de Engelse onderzoeker Robert Boyle (1627-1691). Hij smeedde elementen van het Gassendisme en het Cartesianisme om tot een nieuwe corpusculairtheorie, waarin een belangrijke rol voor het experiment was weggelegd, maar aan de wiskunde (ondanks de 'wet van Boyle'!) nauwelijks aandacht werd geschonken. Boyle zag niet zozeer in de mathematische structuur het wezen van de materie als wel in haar corpusculaire opbouw. De door God geschapen deeltjes vormen de letters van het boek der natuur, letters die door hun beweging tot woorden aaneengesmeed worden.

Ook de bekende Nederlandse wis- en natuurkundige Christiaan Huygens (1629-1695) was atomist, maar dan wel met een sterk cartesiaanse inslag wat zijn natuurfilosofie betreft. Men zou kunnen zeggen dat hij verder ging waar Descartes stopte, namelijk het daadwerkelijk afleiden van talloze mathematische verbanden. In dat opzicht leek Huygens meer de erfgenaam van Galilei, die hij prees om zijn inzicht dat de wiskunde noodzakelijk was voor de vooruitgang in de natuurkunde. Wat betreft de eis van een strikt mechanistische natuurverklaring, daarin bleef hij een discipel van Descartes. Hij verklaarde uitdrukkelijk

> 'de ware filosofie [te zullen volgen] waarin men de oorzaak van alle natuurverschijnselen door middel van mechanisch redenen begrijpt; dat moet men naar mijn mening doen, of alle hoop opgeven ooit iets in de fysica te begrijpen.'

Toen Newton de onhoudbaarheid van Descartes' werveltheorie van het planetensysteem had aangetoond, deed Huygens dan ook hardnekkige pogingen om haar te verbeteren. Wel had hij een open oog voor de al te uitbundige fantasieën van Descartes en diens geringschatting van de empirie. Bovendien achtte hij de pretentie van de Franse filosoof te hoog wat betreft de Euclidische zekerheid die deze meende te mogen opeisen voor zijn deducties uit evident geachte eerste beginselen.

### De Newtoniaanse synthese

We hebben in het voorgaande kennis gemaakt met een drietal benaderingen van de natuur, zowel wat betreft haar structuur als de wijze waarop we kennis over haar moeten verwerven: mathematisering, mechanisering en (heuristisch) experimenteel onderzoek. Galilei accentueert de mathematisering, Gassendi een mechanistische natuurverklaring, terwijl men Descartes in beide kampen zou kunnen onderbrengen. Daarnaast beklemtonen Bacon en Boyle het doen van uitgebreide reeksen waarnemingen en experimenten. Het staat vast dat zowel het krampachtig zoeken naar ultieme mechanismen ter verklaring van de verschijnselen, alsmede het verzamelen van eindeloze reeksen heuristische experimenten, remmend gewerkt heeft op het zoeken naar mathematische wetten zoals Kepler en Galilei dat deden. Zelfs bij Huygens die dankzij zijn mathematisch vernuft en fysisch inzicht zoveel wetten afleidde, zien we deze remming: zijn hemelmechanica strandde vanwege onoplosbare problemen met cartesiaanse materiewervels. In hem vond het strenge mechanicisme zijn hoogtepunt, maar door de complexiteit ervan bleek dat de grenzen van haar mogelijkheden bereikt waren.

Het eindpunt van de mechanisering van het wereldbeeld en het beginpunt van de thans klassiek genoemde natuurkunde wordt gevormd door de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Wiskundige beginselen van de natuurfilosofie, 1687) van Newton, kortweg *Principia* geheten. Bij hem vond een synthese plaats tussen de bovengenoemde benaderingen van de natuur, die werden omgesmeed tot een experimenteel-mathematische fysica op basis van een gewijzigd mechanistisch wereldbeeld. Aan de gangbare grondbegrippen hiervan—materie en beweging—voegde Newton het belangrijke en vruchtbaar gebleken begrip 'kracht' toe. Hij nam het bestaan aan van krachten tussen deeltjes die een verandering in hun bewegingstoestand veroorzaakten, zonder dat contactwerking waarneembaar of aantoonbaar was.

Deze aanname leidde tot een tweede element in de Newtoniaanse synthese. Reeds Descartes en Gassendi zagen het heelal als een wereldmachine en doorbraken daarmee de Aristotelische tweedeling in een onder- en bovenmaans gebied. Echter, wat de mathematisering betreft, zijn deze beide gebieden nog gescheiden, immers de hemelbewegingen gehoorzamen blijkbaar aan de wetten van Kepler, terwijl op aarde de valwet van Galilei geldt. Aan deze 'mathematische tweedeling' wordt een eind gemaakt door Newtons gravitatiewet dat tussen elk tweetal lichamen, hoe klein ook, een aantrekkende kracht bestaat, evenredig met de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand ertussen. De wetten van Kepler en Galilei zijn in deze universele wet opgenomen, zodat nu de definitieve synthese tussen hemelse en aardse mechanica tot stand is gekomen.

Hoewel Newton betoogde dat het bestaan van een aantrekkende kracht uit de verschijnselen zonneklaar bewezen was, gaf hij er geen mechanistische verklaring voor. Hij benadrukte dat hij zijn krachten slechts als mathematische en niet als fysische entiteiten beschouwde. Evenals voor de cartesianen was ook voor hem werking-op-afstand een onmogelijkheid. Maar hij weigerde hierover mechanismen op de manier van de Cartesianen te verzinnen, buiten de waarneming om: 'Hypothesen verzin ik niet'. Op dit punt accepteerde Newton in de lijn van Gassendi en ook van Galilei dat het de taak van de natuuronderzoeker is de verschijnselen te beschrijven, ook al is het wezen van de dingen hem onbekend of niet volledig bekend.

Mede omdat vele volgelingen de aantrekking wèl als fysische kracht beschouwden, dus als een wezenlijke eigenschap van de materie, was er aanvankelijk fel verzet tegen, o.a. van Huygens en Leibniz, die immers de gravitatie als een 'occulte eigenschap' uit de Middeleeuwen van de hand wezen en een mechanisme ervoor eisten. Geleidelijk ebde de kritiek echter weg omdat Newtons systeem bleek te werken. Een onbegrepen kracht werd daardoor de hoeksteen van de klassieke mechanica. Het afzien van het zoeken naar mechanismen gaf de onderzoekers na Newton de gelegenheid al hun inspanningen te richten op het zoeken naar mathematische wetten, daarbij gesteund door de snelle ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening, waarvan in de zeventiende eeuw nog weinig gebruik gemaakt was, maar die in de achttiende eeuw een onmisbaar hulpmiddel.

Newton's methode is gebleven—verfijnd, gepreciseerd, maar niet verworpen:

1. Analyseer de verschijnselen zorgvuldig. Herleid ze tot mathematisch geformuleerde grondbeginselen, de natuurwetten.
2. Gebruik deze beginselen om er de natuurverschijnselen mee te verklaren.
3. Deduceer uit de grondbeginselen nieuwe mathematische relaties en onderwerp die aan experimentele toetsing of toetsing door waarneming.

Het vinden van mathematische wetten is sinds Newton de taak van de natuurkunde gebleven, evenals de gedachte dat zorgvuldig uitgevoerde experimenten het laatste woord behoren te hebben.

Ik ben begonnen met kritiek op *Getal en ruimte*. Afgezien van de historische misser, is het duidelijk dat de 'probeermethode' van het boek in de natuurkunde zelden werkt. Ik zou het overigens toejuichen, wanneer in wiskundemethodes meer aandacht geschonken zou worden aan het heden en verleden van de (mathematische) fysica. Momenteel spelen de natuurkundige toepassingen in de wiskunde A-leerstof slechts een marginale rol, terwijl ze in het wiskunde B-programma zelfs vrijwel geheel ontbreken. Meer aandacht voor het gebruik van de wiskunde in de fysica, juist ook aan de hand van historische voorbeelden, zou kunnen bijdragen tot een beter verstaan van de verhouding tussen wis- en natuurkunde en de 'status' van mathematisch geformuleerde natuurwetten. Een probleem dat ook vandaag nog actueel is.

## Literatuur

F.G. Backbier, *Wiskunde in dienst van de natuurwetenschap* (Utrecht, 1960).

I.B. Cohen, *The Birth of a New Physics* (Harmondsworth, 1987; 1st ed. 1960).

E.J. Dijksterhuis, *De mechanisering van het wereldbeeld* (Amsterdam, 1950, 1977[3]).

E. Glas, *Wiskunde en samenleving in historisch perspectief* (Muiderberg, 1981).

M. Heidelberger, S. Thiessen, *Natur und Erfahrung* (München, 1981).

R. Hooykaas, *Geschiedenis van de Natuurwetenschappen van Babel tot Bohr* (Utrecht, 1971, 1976[2]).

M. Kline, *Mathematics and the Search for Knowledge* (New York/Oxford, 1985, 1986[2]).

A. Koyré, *Newtonian Studies* (London, 1965).

D.J. Struik, *Het land van Stevin en Huygens* (Amsterdam, 1958; Nijmegen, 1979[3]).

# Het Brouillon Project van Desargues

J.P. Hogendijk

In de zeventiende eeuw heeft de wiskunde een totaal ander aanzien gekregen, en twee ontwikkelingen zijn in dit proces heel belangrijk geweest. Ten eerste: het feit dat René Descartes in de *Géométrie* (1637) op systematische manier algebra en algebraïsche notaties invoerde bij het oplossen van meetkundige problemen. Hierbij legde hij voor het eerst in de geschiedenis een verband tussen (algebraïsche) vergelijkingen in twee onbekenden en (meetkundige) krommen. Ten tweede: de ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening door Newton en Leibniz. Hierdoor werd het mogelijk algebraïsche rekenmethoden te hanteren bij het oplossen van problemen die met limieten (in zeventiende eeuwse taal: met het oneindig kleine) in verband staan. Deze beide ontwikkelingen hebben veel te maken met algebraïsche notatie.

Dit is niet het geval in het onderwerp van deze lezing, dat, gezien binnen de 17de eeuwse context, in de periferie ligt en pas in de negentiende eeuw een vervolg kreeg. We zullen een boek bespreken van een Franse wiskundige, Girard Desargues, dat in 1639 verscheen, twee jaar na de *Géométrie* van Descartes. Het boek van Desargues draagt de merkwaardige titel *Brouillon project d'une atteinte aux Evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (vrij vertaald: Ruwe schets van een essay over de resultaten van de ontmoetingen van een kegel met een vlak)[1]; we zullen het afkorten met *Brouillon Project.* In zijn *Brouillon Project* wilde Desargues, net als Descartes, een deel van de Griekse meetkunde vernieuwen, maar in tegenstelling tot Descartes gebruikte Desargues daarbij geen algebra. De nieuwe methode van Desargues was gebaseerd op het invoeren van oneindig verre punten en rechten in de meetkunde.

Modern gezegd komt dit op het volgende neer: Elke rechte heeft precies één punt dat op oneindig verre afstand ligt; dit punt ligt dus naar beide kanten oneindig ver weg. Twee evenwijdige lijnen ontmoeten elkaar in hun oneindig verre punt. In elk plat vlak ligt precies één oneindig verre rechte, en op deze oneindig verre rechte liggen alle oneindig verre punten van de 'gewone' rechten in het vlak.

Deze aannamen worden misschien als gewoon ervaren door degenen die met projectieve meetkunde bekend zijn, maar wanneer men geen projectieve meetkunde kent (en kennis van projectieve meetkunde wordt hier niet verondersteld) zijn oneindig verre punten en lijnen allesbehalve vanzelfsprekend. In de Griekse meetkunde, die in de tijd van Desargues de toon aangaf, zijn ze ondenkbaar. De invoering van oneindig verre punten en lijnen is daarom een grote stap die tot allerlei vragen aanleiding geeft.

Allereerst kan men zich afvragen, hoe Desargues op het idee gekomen is. Het standaard-antwoord daarop is, dat hij geïnspireerd is door zijn werk in perspectief; men kan daarbij denken aan het feit dat een stel parallelle lijnen in het horizontale vlak op een schilderij lijken te convergeren naar een oneindig ver punt op een oneindig verre horizon. Dit is bij nadere beschouwing toch niet zo vanzelfsprekend, want waarom zou in het horizontale vlak inderdaad een oneindig verre lijn voorkomen die op de horizon op het schilderij wordt afgebeeld? Of en in hoeverre perspectief inspiratie geweest is voor het *Brouillon Project* wordt tegenwoordig onderzocht door Dr. Kirsti Andersen uit Aarhus (Denemarken), specialiste in de geschiedenis van de perspectief.

De tweede vraag is, of Desargues wel de eerste was. Hij was niet de eerste die oneindig verre punten beschouwde, want in 1604 schreef Kepler dat de parabool twee brandpunten heeft, waarvan er één in het oneindige ligt[2]. Kepler's oneindig verre brandpunt is een fraai filosofisch denkbeeld, maar het bleef in zekere zin steriel, omdat hij er geen enkel wiskundig resultaat mee kon afleiden. De eerste die wel concrete resultaten verkreeg met behulp van oneindig verre punten was Desargues. Het middel dat hij daarvoor gebruikte was centrale projectie, iets wat bij Kepler niet of nauwelijks voorkomt. In elk geval was Desargues de eerste die oneindig verre lijnen heeft ingevoerd. Er is trouwens geen reden aan te nemen dat hij bij de invoering van oneindig verre punten door Kepler beïnvloed is.

Voordat ik de derde vraag stel, die het centrale thema van deze lezing zal zijn, wil ik een beeld schetsen van het *Brouillon Project* dat uit moderne (overigens uitstekende) historische studies wel eens impliciet naar voren komt[3]. Het lijkt soms dat Desargues in het *Brouillon Project* te werk ging als een wiskundige die voor zijn plezier nieuwe begrippen definieerde (oneindig verre punten en lijnen) en er allerlei mooie stellingen mee afleidde. Deze mooie stellingen en de methodes van Desargues zijn tegenwoordig heel belangrijk in de projectieve meetkunde, maar in de tijd van Desargues was het belang niet duidelijk, dus Desargues was zijn tijd ver vooruit. In dit beeld zit zeker een kern van waarheid, want Desargues zal ongetwijfeld plezier gehad hebben in het afleiden van zijn stellingen en hij was inderdaad zijn tijd ver vooruit. Maar volgens mij is het niet zo dat Desargues de oneindig verre punten en lijnen 'zomaar' definieerde. Hiermee komen we aan de centrale vraag van deze lezing:

*Welk nut hadden oneindig verre punten en lijnen voor Desargues?*

Mijn antwoord is in het kort: In de tijd van Desargues bestond er een moeilijke theorie over kegelsneden, die beschreven werd in de *Conica* van Apollonius van Perga (200 v. Chr.). Dit is een groot werk dat oorspronkelijk uit 8 delen bestond. De eerste vier delen hiervan waren in 1566 in Latijnse vertaling gepubliceerd door Commandino. De voornaamste motivatie van het *Brouillon Project* van Desargues in het algemeen en van de oneindig verre punten en lijnen in het bijzonder, is dat deze oneindig verre punten en lijnen de theorie van Apollonius veel eenvoudiger en inzichtelijker kunnen maken.

De theorie van Apollonius is tegenwoordig een tamelijk onbekend onderwerp en daarom wordt het verband tussen het *Brouillon Project* van Desargues en de *Conica* van Apollonius naar mijn smaak niet altijd voldoende benadrukt.

Dat dit verband bestaat en zeer belangrijk is, blijkt ook uit het feit dat het *Brouillon Project* een aantal snieren bevat die bedoeld zijn voor Apollonius[4]. Desargues noemt de naam van Apollonius of de *Conica* echter niet, zodat alleen de goede verstaander begrijpt wat er bedoeld wordt. We kunnen hieraan toevoegen dat het *Brouillon Project* ook delen bevat die weinig of niets met oneindig verre punten en lijnen te maken hebben, maar die wel verklaard kunnen worden uit de aanname dat Desargues alles wat Apollonius gedaan had opnieuw (en beter) wilde doen.

Hier en daar in het *Brouillon Project* refereert Desargues ook aan onderwerpen in de theorie van kegelsneden die niets met de *Conica* te maken hebben, of aan kwesties die in zijn tijd onderwerp van discussie waren, maar over het geheel gezien zijn er maar weinig delen van het *Brouillon Project* die niet te zien zijn als een reactie op de *Conica* van Apollonius.

De rest van deze lezing bestaat uit: een kort biografisch overzicht van Desargues, daarna een schets van de theorie van Apollonius, voorzover hier van belang, en dan een uiteenzetting over de manier waarop Desargues deze theorie met behulp van oneindig verre punten en lijnen in zijn *Brouillon Project* vereenvoudigde. Dit laatste deel is weer gesplitst in een inleiding en een samenvatting van het *Brouillon Project.*

We beginnen met een kort biografisch overzicht[5]. Girard Desargues werd geboren in Lyon in 1591. Over het begin van zijn leven is weinig bekend. Vanaf omstreeks 1630 werkte hij in Parijs en hij kwam daar in contact met vele andere geleerden. Hij nam regelmatig deel aan de discussiegroep van geleerden die in 1635 werd opgericht door Père Mersenne. Via Mersenne kwam hij in 1637 in contact met René Descartes. Desargues en Descartes hebben lang met elkaar in verbinding gestaan en hun verschillende aanpakken van de meetkunde waren hierbij geen enkele belemmering; in tegendeel, Descartes en Desargues hadden grote bewondering voor elkaars werk.

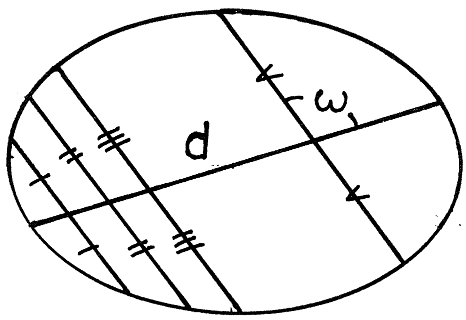
Tussen 1636 en 1647 publiceerde Desargues over perspectief, meetkunde, zonnewijzers, mechanica, steenhouwen en muziek, en in 1639 verscheen zijn *Brouillon Project.* Vanaf 1640 werd hij (voornamelijk in verband met zijn werk in perspectief) het onderwerp van allerlei controverses. Waarschijnlijk als gevolg hiervan trok hij zich na 1645 steeds meer uit het wetenschappelijk leven terug en hij hield op met publiceren. Desargues was een bekwaam architect; het is bekend dat hij in Lyon ingewikkelde trappen ontworpen heeft. In het algemeen schijnt hij vooral geïnteresseerd geweest te zijn in het toepasbaar maken en toegankelijk maken van wiskunde, meer nog dan in wiskunde als onderwerp vant theoretische bespiegeling. Desargues stierf in de omgeving van Lyon in 1661.

Nu volgt een overzicht van de van belang zijnde delen van de theorie van kegelsneden van Apollonius[6], die Desargues vereenvoudigd en gegeneraliseerd heeft.

Een kegel ontstaat bij Apollonius op de volgende manier: we bekijken een cirkel en een vast punt $T$, niet in het vlak van de cirkel. Alle rechten door $T$ die ook door een punt van deze basiscirkel gaan, vormen het oppervlak van een kegel.

Wanneer we de kegel met een vlak evenwijdig aan de basiscirkel snijden, is de snijfiguur weer een cirkel. Als de kegel een rechte kegel is (dat wil zeggen, als de loodrechte projectie van $T$ op het vlak van de basiscirkel het middelpunt van deze cirkel is), kan alleen een vlak evenwijdig aan de basiscirkel de kegel in een cirkel snijden. Als de kegel niet recht is, is er nog één andere schare evenwijdige vlakken die de kegel in cirkels snijden. Alle andere vlakken die niet door $T$ gaan, snijden de kegel in een figuur die geen rechte en geen cirkel is. Zo'n figuur heet een kegelsnede.

De begrippen diameter en ordinaat spelen een centrale rol in de theorie van Apollonius. We noemen een recht lijnsegment met eindpunten op de kegelsnede een koorde van die kegelsnede (Figuur 1). Een rechte $d$ heet een *diameter* van een kegelsnede als hij alle koorden met een vaste richting middendoor deelt. De helften van de koorden heten *ordinaten* van de diameter. De hoek $\omega$ tussen diameter en ordinaten is per definitie constant, deze hoek heet de ordinaatshoek. De hoek $\omega$ kan recht zijn (de diameter heet dan *as*), maar dat hoeft niet.

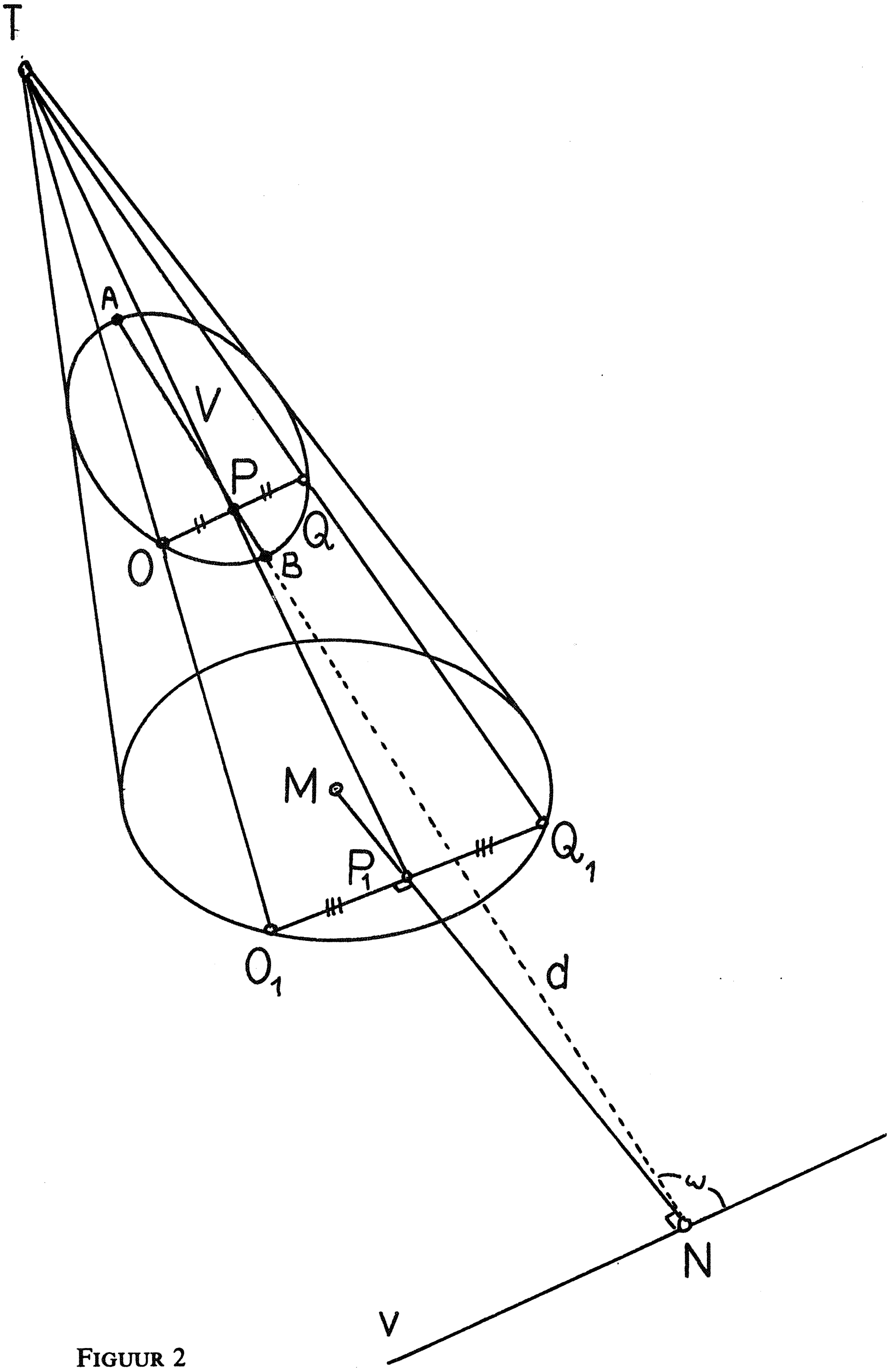



FIGUUR 1

Apollonius bewijst als volgt, dat elke kegelsnede een diameter heeft (Figuur 2): stel de kegelsnede ontstaat door de kegel met een vlak $V$ te snijden. Stel de basis van de kegel is een cirkel met middelpunt $M$. Laat $V$ het vlak van de cirkel in $v$ snijden, laat de loodlijn $MN$ op $v$ neer, en laat vlak $TMN$ vlak $V$ in $d$ snijden (modern: $d$ is de centrale projectie van $MN$ op $V$). Als nu $O_1P_1Q_1$ een koorde van de cirkel is, loodrecht op $MN$, dan $O_1P_1 = P_1Q_1$. Laat $TO_1$, $TP_1$, $TQ_1$ vlak $V$ in $O$, $P$ en $Q$ snijden. Wegens $O_1Q_1 \,/\!/ v /\!/ OQ$ volgt nu $OP = PQ$. Conclusie: $d$ is een diameter van de kegelsnede, de ordinaten zijn evenwijdig aan $v$. De ordinaatshoek $\omega$ hoeft niet recht te zijn[7].

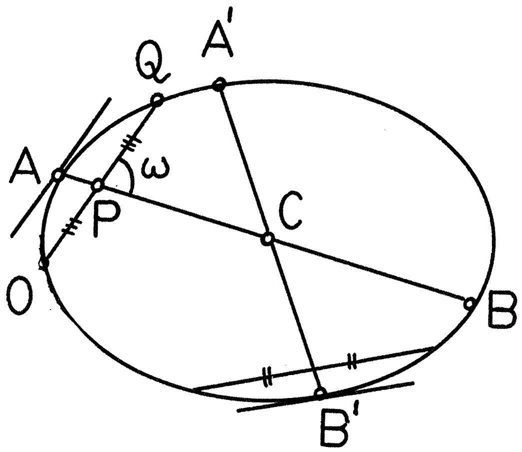
Apollonius bewijst nu ook nog een resultaat, dat ik gemakshalve in de vereenvoudigde vorm (*Conica* 1:20-21) voor de ellips zal weergeven: de ordinaten $PQ$ voldoen aan

$$PQ^2/PA \cdot PB = \alpha/AB \tag{1}$$




FIGUUR 2

voor een constant lijnsegment $\alpha$ (de 'parameter' of 'latus rectum'), die alleen van het vlak $V$ en de kegel afhangt op een manier die er hier niet toe doet (Apollonius construeert $\alpha$ expliciet in Figuur 2). Modern zou men (1) een vergelijking kunnen noemen. $A$ en $B$ zijn de snijpunten van $d$ met de kegelsnede, zie Figuur 3. Apollonius gebruikte uiteraard geen algebraïsche notatie, hij spreekt over de verhouding van het vierkant met zijde $PQ$ tot de rechthoek met zijden $PA$ en $PB$. Ook bewijst hij (in *Conica* 1:17,32), dat de kegelsnede in $A$ en $B$ raaklijnen heeft die evenwijdig zijn aan de ordinaten van $d$. Noem $C$ het midden van $AB$.




FIGUUR 3

De vraag rijst of de kegelsnede nog andere diameters heeft. Apollonius bewijst dat elke lijn $A'CB'$ door $C$ een diameter van de kegelsnede, de ordinaten zijn evenwijdig aan de raaklijnen in $A'$ en $B'$, en ze voldoen ook aan een vergelijking (1), waarin in plaats van $\alpha$ nu een andere constante $\alpha'$ voorkomt (die door Apollonius expliciet uit $\alpha$, $AB$ en $\omega$ geconstrueerd wordt). Apollonius doet er vele pagina's over, deze stelling en allerlei voorbereidende hulpstellingen te bewijzen. Hij gebruikt daarbij geen stereometrie. Het hele bewijs speelt zich af in het vlak van Figuur 3 en het berust in feite alleen op 'vergelijking' (1) en op zeer scherpzinnige en ingewikkelde redeneringen, waarop ik hier niet zal ingaan. Het punt $C$, waardoor de diameters gaan, heet het middelpunt van de kegelsnede. Tot slot bewijst hij dat elke kegelsnede een as heeft (d.w.z. een diameter met ordinaatshoek $\omega = 90°$) en hij laat met behulp hiervan zien dat elke kegelsnede in een vlak $V$ als doorsnede van een rechte kegel met $V$ kan worden verkregen.

Deze aanpak van Apollonius is niet alleen bewerkelijk maar ook onelegant. De hele theorie wordt eerst aan de 'oorspronkelijke' diameter $d$ van Figuur 2 opgehangen, maar daarna blijken er veel meer diameters te zijn en tenslotte blijkt dat de keuze van $d$ zelf op een toevalligheid berust. Dat wil zeggen: $d$ (ofwel: lijn $AB$ in Figuur 3) is niet bepaald door de kegelsnede, maar alleen door de manier waarop die kegelsnede werd ingevoerd door het vlak met een kegel te doorsnijden. Het is echter duidelijk, en het blijkt ook uit de *Conica,* dat dezelfde kegelsnede uit verschillende kegels wordt verkregen. Het is daarom vreemd dat één blijkbaar willekeurige diameter $d$ zo speciaal is, en dat er bijna een heel boek voor nodig is om de andere diameters te vinden. Het zou veel mooier zijn, wanneer alle diameters en ook het middelpunt $C$ van de kegelsnede direct in de stereometrische Figuur 2 terug te vinden zouden zijn, het liefst met een kort en inzichtelijk bewijs. Een passage in een brief aan Mersenne van 4 april 1638 suggereert dat Desargues door deze en dergelijke gedachten is geleid[8].

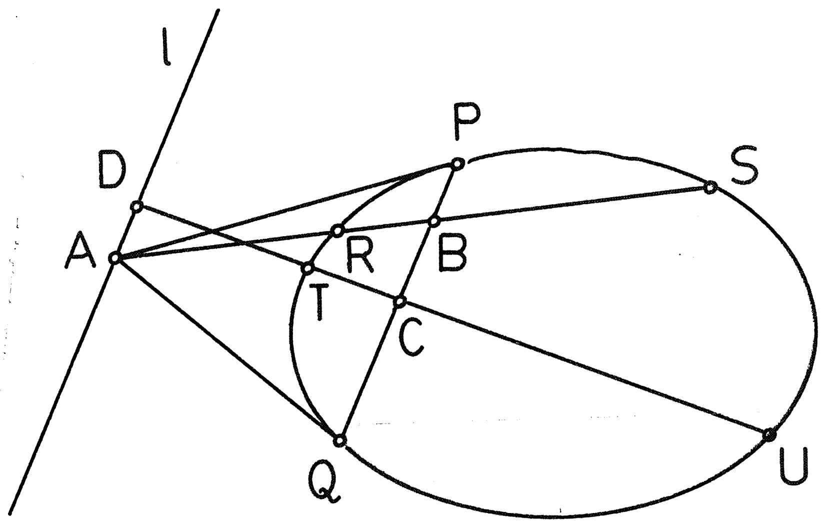
Desargues' aanpak van dit probleem begint ermee, dat hij algemene begrippen definieert, waarvan diameter en ordinaat bijzondere gevallen zijn. Hierbij werd hij geholpen door de volgende stellingen die Apollonius verderop in de *Conica* had bewezen (III:37) (Figuur 4):

Als $AP$ en $AQ$ twee raaklijnen aan een kegelsnede zijn, $ARBS$ een rechte die de kegelsnede snijdt in $R$ en $S$ en de koorde $PQ$ in $B$, dan $AR:RB = AS:SB$.

Als $C$ het midden is van $PQ$ en $DTCU$ is een rechte die de kegelsnede snijdt in $T$ en $U$ en de lijn $l$ door $A$ evenwijdig aan $PQ$ in $D$, dan $CT:TD = CU:UD$.

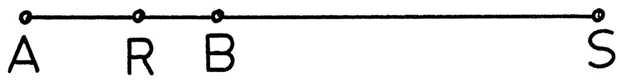
Ik ga nu over van Apollonius naar Desargues, maar trek me nu nog niets aan van de volgorde in het *Brouillon Project.* Het doel is hier alleen een achtergrond te schetsen voor de vernieuwingen van Desargues.

Desargues zag in dat bepaalde configuraties in Figuur 4 belangrijk zijn en hij voerde daarvoor namen in (het geven van namen is soms een heel belangrijke stap in de ontwikkeling van de wiskunde).




FIGUUR 4

Vier punten $A$, $R$, $B$, $S$ op een rechte, als in Figuur 5, zodat $AR:RB = AS:SB$ noemt hij *vier punten in involutie* (het zou netter zijn te spreken van twee puntenparen $(A,B)$ en $(R,S)$ in involutie. Modern zegt men ook wel: vier punten in harmonische ligging. Merk op: als $A,B$ en $R,S$ in involutie zijn, dan is ook $RA:AS = RB:BS$, dus $(R,S)$ en $(A,B)$ zijn ook in involutie). Als we $R$ en $S$ vasthouden en $A$ naar oneindig laten lopen, dan nadert $B$ het midden van $RS$. Daarom zegt Desargues dat het oneindig verre punt van $RS$, het midden van $RS$ en $R$, $S$ ook *vier punten in involutie* zijn. In Figuur 4 zijn ook $C$, $T$, $D$ en $U$ vier punten in involutie.




FIGUUR 5

In Figuur 4 hebben het punt $A$ en de rechte $PQ$ de eigenschap dat alle lijnen door $A$ die de kegelsnede in twee punten $R$ en $S$ snijden, $PQ$ in een punt $B$ snijden zodat vier punten in involutie ontstaan. Maar ook punt $C$ en de rechte $l$ hebben een dergelijke eigenschap: alle lijnen door $C$ die de kegelsnede in twee punten $T$ en $U$ snijden, snijden de rechte $l$ in een punt $D$ zodat er weer vier punten in involutie ontstaan. Desargues vat deze twee situaties nu samen onder de definitie: een lijn ($PQ$ of $l$) heet een *transversaal* (traversal) van een kegelsnede en een punt heet het bijbehorende *doel* (but) als alle rechten door het doel die de kegelsnede in twee punten snijden de transversaal in een punt snijden, zodat vier punten in involutie ontstaan. De rechten door het doel die de kegelsnede snijden (en waarop dus de vier punten in involutie liggen) noemt hij *ordinalen*. Dus $PQ$ is *transversaal* met *doel* $A$ en $ARBS$ is een hierbij horende *ordinaal*, en $l$ is een *transversaal* met doel $C$ en $DTCU$ is een hierbij horende *ordinaal*. (De namen 'transversaal' en 'doel' komen overeen met de moderne 'poollijn' en 'pool').

Deze definitie is ook geldig als het doel $A$ oneindig ver weg is; dan is $RB = BS$ voor elke rechte door het oneindig verre punt $A$, dus $PQ$ is een diameter. In dit speciale geval komen de *transversaal* en de *ordinalen* dus overeen met de diameter en de ordinaten van Apollonius. Als het *doel* $C$ het middelpunt van de kegelsnede is, dan is de bijbehorende *transversaal* $l$ de oneindig verre rechte (immers dan hebben we voor elke lijn door $C$: $CT = CU$ als in Figuur 4).

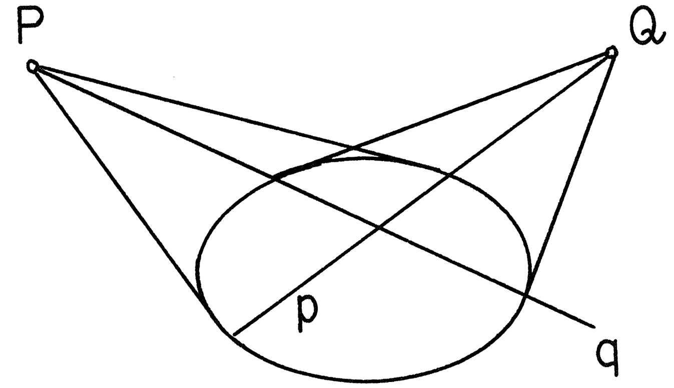
Wat heeft dit nu voor gevolgen voor de theorie van Apollonius?

Apollonius bewijst op moeizame manier: elke lijn door het middelpunt van de kegelsnede is diameter van de kegelsnede.

Desargues ziet dit als speciaal geval van een algemenere stelling (Figuur 6, getekend voor het geval $p$ en $q$ de kegelsnede snijden):

Als $P$ *doel* is van *transversaal* $p$ en $P$ ligt op een lijn $q$, die *transversaal* is met doel $Q$, dan ligt $Q$ op $p$ (2).

Immers, stel $P$ in Figuur 6 is het middelpunt, dan is $p$ de oneindig verre rechte. Laat nu $q$ een rechte zijn door $P$, dan moet volgens (2) $Q$ op $p$ liggen, dus $Q$ is oneindig ver weg, dus alle *ordinalen* van $q$ zijn ordinaten in de zin van Apollonius.

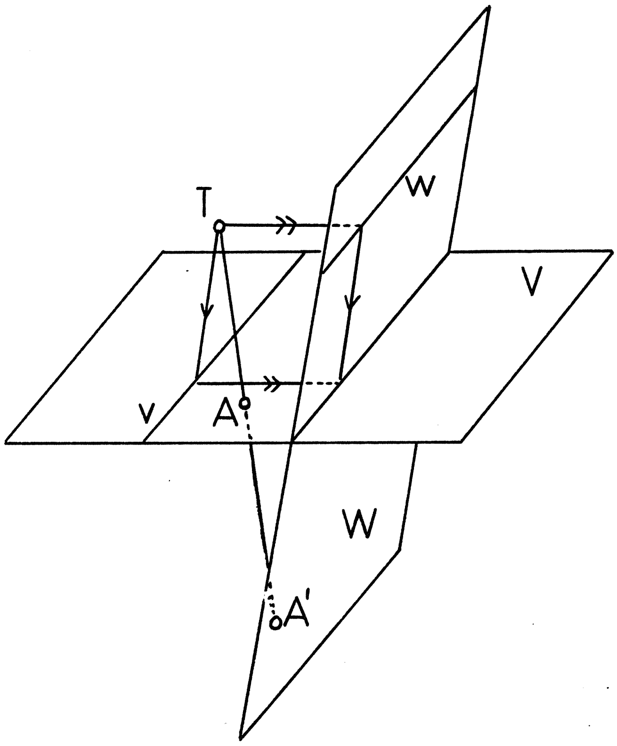



FIGUUR 6

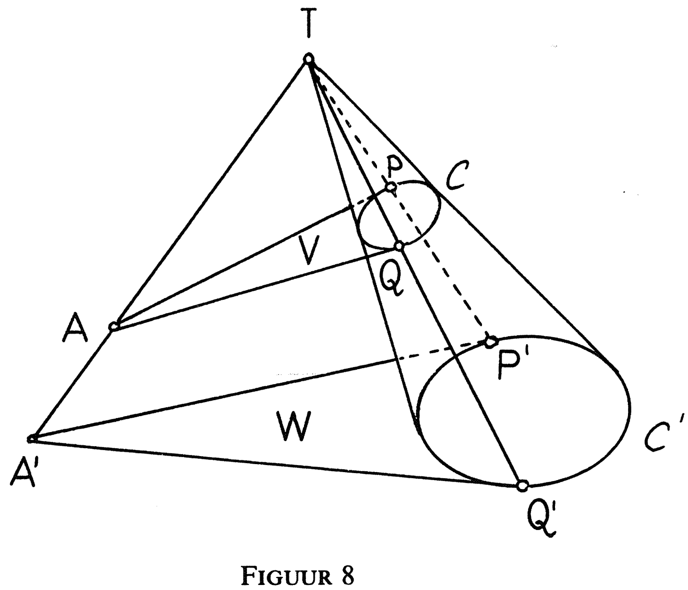
Dus Desargues wil nu bewijzen: Als $P$ *doel* is van *transversaal* $p$ en $P$ ligt op een lijn $q$ die *transversaal* is met doel $Q$, dan ligt $Q$ op $p$.

Zo gezien lijkt het, dat de aanpak van Desargues (die immers een algemenere stelling wil bewijzen dan Apollonius) nog meer werk zal kosten dan die van Apollonius. Maar dit is niet het geval, want de begrippen die Desargues noemt (*transversaal* en *doel*) zijn zoals dat modern heet: invariant onder centrale projectie.

Figuur 7 dient ter illustratie van dit begrip (waarvoor Desargues zelf trouwens nog geen naam heeft; de woorden afbeelding, centrale projectie, enz. komen dus bij hem niet voor). In Figuur 7 zijn een vlak $V$, een vlak $W$ en een punt $T$ buiten $V$ en $W$ te zien. De centrale projectie van $V$ op $W$ met projectiecentrum $T$ is de afbeelding die aan elk punt $A$ van $V$ het snijpunt $A'$ van $TA$ en $W$ toevoegt. Merk op dat als $V$ en $W$ elkaar snijden, de oneindig verre rechte van $V$ op een gewone rechte ($w$ in Figuur 7) in $W$ wordt afgebeeld, en er is ook één gewone rechte $v$ in $V$ die op de oneindig verre rechte van $W$ wordt afgebeeld. In Figuur 8 kunnen we vermoeden dat de begrippen *doel* en *transversaal* invariant zijn onder centrale projectie. Als $\mathcal{C}$ een kegelsnede is in $V$ die ontstaat uit een kegel met top $T$ en punt $A$ buiten de kegel is *doel* voor *transversaal* $PQ$ (met $P,Q$ op de kegelsnede), dan zijn $AP$ en $AQ$ raaklijnen. Het beeld $\mathcal{C}'$ is uiteraard ook een kegelsnede en $APT$ en $AQT$ zijn raakvlakken, dus $A'P'$ en $A'Q'$ zijn ook twee raaklijnen, dus $A'$ is *doel* voor *transversaal* $P'Q'$. Voor punten $A'$ binnen de kegel werkt deze redenering niet, maar dan kunnen we eruit komen als we weten dat de centrale projecties van vier punten in involutie ook weer vier punten in involutie zijn. Hoe dan ook, als we weten dat 'doel' en 'transversaal' behouden blijven onder centrale projectie, hoeft




FIGUUR 7




FIGUUR 8

stelling (2) in principe alleen voor een cirkel bewezen te worden (dit is eenvoudig) en dan is hij automatisch geldig voor elke kegelsnede.

Het voorgaande diende om een achtergrond te schetsen van het *Brouillon Project*, het is niet bedoeld als samenvatting ervan. Desargues zet de theorie nog iets algemener op dan we zouden verwachten. Toch is de bovenstaande inleiding hopelijk niet overbodig, al is het alleen maar om de toegang tot het *Brouillon Project* te vergemakkelijken. Desargues definieert vele nieuwe begrippen, waarvan de meeste overbodig zijn, en verder is het *Brouillon Project* in Griekse stijl geschreven, en daarbij rommelig en onlogisch opgezet (het boek heeft wel structuur, maar die blijkt niet onmiddellijk). Het resultaat hiervan is een voor ons nogal moeilijk verteerbaar eindprodukt, dat ik nu gedeeltelijk zal trachten samen te vatten. Verwijzingen zoals (Taton, p. 101) zijn naar de modernste editie van het *Brouillon Project* door R. Taton (1951)[1].

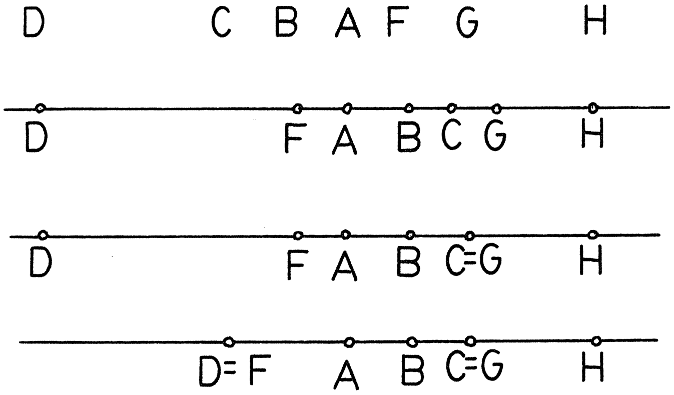
Desargues begint met het invoeren van oneindig verre punten en lijnen. Dit doet hij als volgt (Taton, p. 101):

Een *rangschikking* (ordonnance) van rechte lijnen is een stel lijnen dat hetzij door hetzelfde punt gaat, hetzij evenwijdig is. In het eerste geval heet het snijpunt het *doel* (but) van de snijdende lijnen. In het tweede geval, zegt Desargues, ligt het *doel* op oneindig verre afstand aan beide kanten.

Een *rangschikking* (ordonnance) van vlakken is een stel vlakken die elkaar alle in dezelfde lijn snijden, of die alle parallel zijn. In het eerste geval noemt Desargues de snijlijn de *as* (essieu) van de rangschikking van vlakken; in het tweede geval zegt hij dat de *as* aan alle kanten op oneindig verre afstand ligt.

Daarna volgt een grote hoeveelheid definities en stellingen over punten op één rechte lijn, dan stellingen voor rechte lijnen in één vlak, en pas als deze behandeld zijn, ongeveer halverwege het boek, worden de cylinder, de kegel en de kegelsnede ingevoerd.

We beginnen met de theorie van punten op de rechte. Desargues begint met een twintigtal definities. Hij bekijkt eerst een configuratie van een punt $A$ en drie paren punten $(B,H);(C,G);(D,F)$ op een rechte, zodat $A$ tussen elk van beide punten van elk paar ligt (Figuur 9, bovenaan), of $A$ in geen enkel geval tussen de twee punten van een paar ligt (Figuur 9, de drie onderste gevallen), en zodat verder




FIGUUR 9

$$AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF \tag{3}$$

(d.w.z. de rechthoek met zijden $AB$, $AH$ is gelijk aan de rechthoek met zijden $AC$ en $AG$, etc.).

Voor deze configuratie voerde hij een nieuwe terminologie in, waarbij hij geïnspireerd werd door het bos.

De configuratie zelf heet een *boom*. Punt $A$ heet de *stronk* en de rechte lijn die de drager van de configuratie is, heet de *stam*. De lijnstukken $AB$, $AH$, $AC$ enz. heten *takken*, punten $B$, $H$, $C$ enz. heten *knopen*. Twee punten van hetzelfde paar heten *gekoppelde knopen*, de takken $AB$, $AH$ heten *gekoppelde takken*. Een lijnstuk zoals $BG$ (met eindpunten knopen die niet gekoppeld zijn) heet *loot van een twijg* die bovendien *gevouwen* is *tegen de stam*. (In de studie van het vlak zullen we straks ook twijgen tegenkomen die niet tegen de stam gevouwen zijn). Zo volgt er nog een tiental definities. Om te voorkomen, dat de lezer(es) door de bomen het bos niet meer ziet, zullen we deze overslaan, maar nog wel de opmerking maken dat punt $A$ zelf gekoppeld is aan het oneindig verre punt van de rechte. Het kan voorkomen dat één of twee paar gekoppelde knopen samenvallen (bijvoorbeeld $C = G$, of $C = G$ en $D = F$ onderaan in Figuur 9); Desargues spreekt dan van *gemiddelde knopen*.

Desargues bewijst als eerste belangrijke stelling dat de drie paren punten voldoen aan

$$BC \cdot BG / HC \cdot HG = BD \cdot BF / HD \cdot HF \tag{4}$$

en dat omgekeerd uit (4) volgt, dat er een punt $A$ is dat aan (3) voldoet; dit punt $A$ is gedefinieerd door

$$BA / HA = BC \cdot BG / HC \cdot HG \tag{5}$$

Desargues had al eerder een hulpdefinitie gegeven: twee puntenparen heten *gemengd* als er tussen twee punten van één van de paren precies één punt van het andere paar ligt; als dit niet zo is heten ze ongemengd. In elk van de situaties in Figuur 9 geldt voor de drie paren $(B,H);(C,G);(D,F)$ dat elk tweetal ervan gemengd is, of elk tweetal ongemengd. Nu volgt de definitie van involutie:

Drie puntenparen $(B,H);(C,G);(D,F)$, die aan eigenschap (4) voldoen, en zodat de paren corresponderende punten alle gemengd of alle ongemengd zijn, heten *zes punten in involutie* (Taton p. 110); involutie betekent letterlijk 'inwikkeling'. Het is mij niet helemaal duidelijk welke associatie Desargues hierbij gehad heeft; misschien, dat er uit die zes punten, of eigenlijk, uit de drie paren knopen, zich straks drie paren twijgen zullen 'ontwikkelen' (vergelijk Figuur 10 hieronder). In ieder geval gebruikt Desargues het begrip 'involutie' niet in de zin van afbeelding, zoals tegenwoordig gedaan wordt (deze afbeelding voegt dan aan een punt $B$ zijn corresponderende punt $H$ toe). Hij spreekt wel van vier paren punten die in involutie *met elkaar* zijn (hetgeen betekent dat elk drietal paren in involutie is) en van willekeurig veel paren in involutie (Taton p. 157), maar *boom* is zijn basisbegrip. Verderop in het *Brouillon Project* (Taton p. 157) spreekt hij dan ook van soorten bomen, waar moderne wiskundigen over soorten involuties zouden spreken. Desargues redeneerde blijkbaar als volgt: als ik zes punten in involutie heb, dan behoren deze zes punten tot een boom die door deze punten uniek bepaald is (immers $A$ is bepaald) en deze boom kan verder worden uitgebreid. Aan elk van de bomen in Figuur 9 kan men bijvoorbeeld nog een paar $E,K$ toevoegen zodat $AE \cdot AK = AB \cdot AH$ etc. Zo correspondeert in een boom elk punt op de stam (inclusief het oneindig verre punt) met precies één ander punt. Het oneindig verre punt kan ook één van zes punten in involutie zijn; $A$, het oneindig verre punt, $B,H$ en $C,G$ in Figuur 9 zijn zes punten in involutie, die voldoen aan (5).

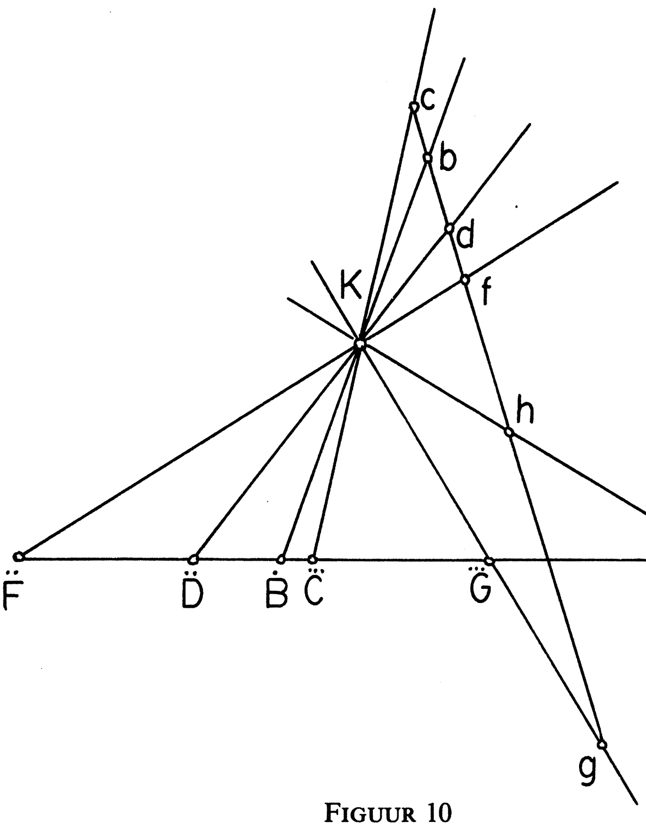
In de situatie waarin twee puntenparen samenvallen (de onderste mogelijkheid in Figuur 9) noemt Desargues de punten *vier punten in involutie*. Merk op dat de *stronk* $A$ dan het midden van $CD$ is wegens $AC \cdot AG = AD \cdot AF$. De definiërende eigenschap volgt dan uit (4); $BC/HC = BD/HD$, of $H$ is het oneindig verre punt en $BC = BD$ ($B$ valt dan samen met de *stronk* $A$, die het midden van $CD$ is). Merk op dat als alleen vier punten in involutie gegeven zijn, de boom nog niet bepaald is; immers we zouden ook $B$ en $H$ als *gemiddelde knopen* kunnen opvatten, de *stronk* wordt dan het midden van $BH$.

We zullen de verdere stellingen over punten op een rechte overslaan en uit de behandeling van rechten in het vlak alleen de belangrijkste stelling citeren. Modern gezegd zegt deze: als zes punten op een rechte in involutie liggen en de rechte wordt door een centrale projectie op een andere rechte afgebeeld, dan liggen de zes beelden ook in involutie. Desargues zegt het zo (Figuur 10, Taton pp. 126-127):

'Wanneer op een rechte stam $GH$ door 3 paren knopen $BH$, $DF$, $CG$ die in involutie liggen, drie paren uitgespreide twijgen $FK$, $DK$, $BK$, $HK$, $CK$, $GK$ gaan, die alle tot dezelfde rangschikking horen met doel $K$, dan worden die drie paren twijgen samen *twijgensysteem* (ramée) van een boom genoemd, en elk (paar) geeft op een willekeurige andere rechte *cb*... in hun vlak één van drie paren knopen van een involutie *bh*, *df*, *cg*.' Figuur 10 is ontleend aan Desargues (een hulplijn is weggelaten); merk op, dat Desargues puntenparen aangeeft door kleine puntjes. In het bewijs onderscheidt hij twee gevallen: $K$ op oneindige afstand, en $K$ op eindige afstand, en hij merkt op dat wanneer bijvoorbeeld $KB /\!/ bc$, de stelling waar is, met dien verstande dat het punt $b$ op oneindige afstand ligt. Het bewijs is verder oninteressant, het berust op de stelling van Menelaos en evenredigheden. Zonder oneindig verre punten is het helemaal niet mogelijk de stelling zo algemeen te formuleren; er zouden dan allerlei uitzonderingsgevallen bekeken moeten worden.

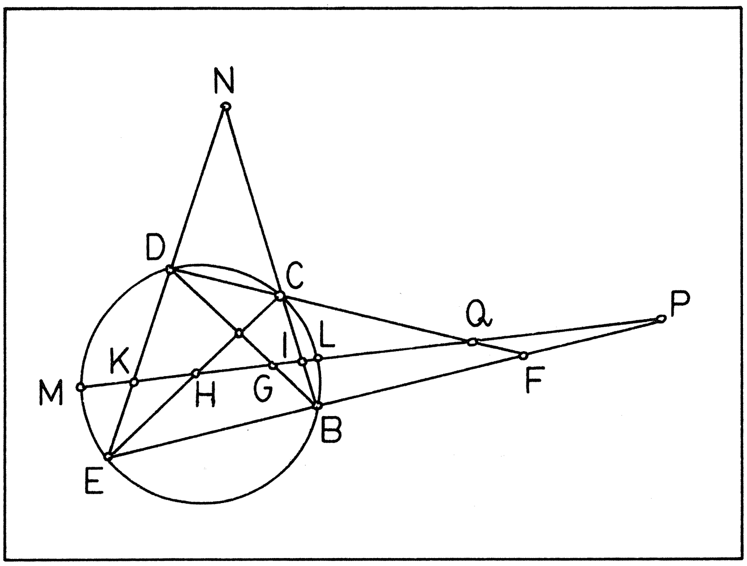
We slaan weer van alles over en passeren nu het punt waarop Desargues kegelsneden invoert. Hij vat cylinder en kegel samen onder het algemene begrip *rol* (de achterliggende gedachte is dat een cylinder een kegel is met top in het oneindige). Hij spreekt dan ook niet over een kegelsnede, maar over een *rolsnede* (coupe de rouleau). De basis van zo'n rol is een cirkel. Het snijvlak mag ook door de top gaan en Desargues vat twee snijdende of evenwijdige lijnen soms ook op als een kegelsnede.

Dan komt er een stelling, die tegenwoordig wel 'stelling van Desargues' wordt genoemd (maar het is niet de bekende 'stelling van Desargues' die in de tegenwoordige axiomatische opbouw van de meetkunde een grote rol speelt).



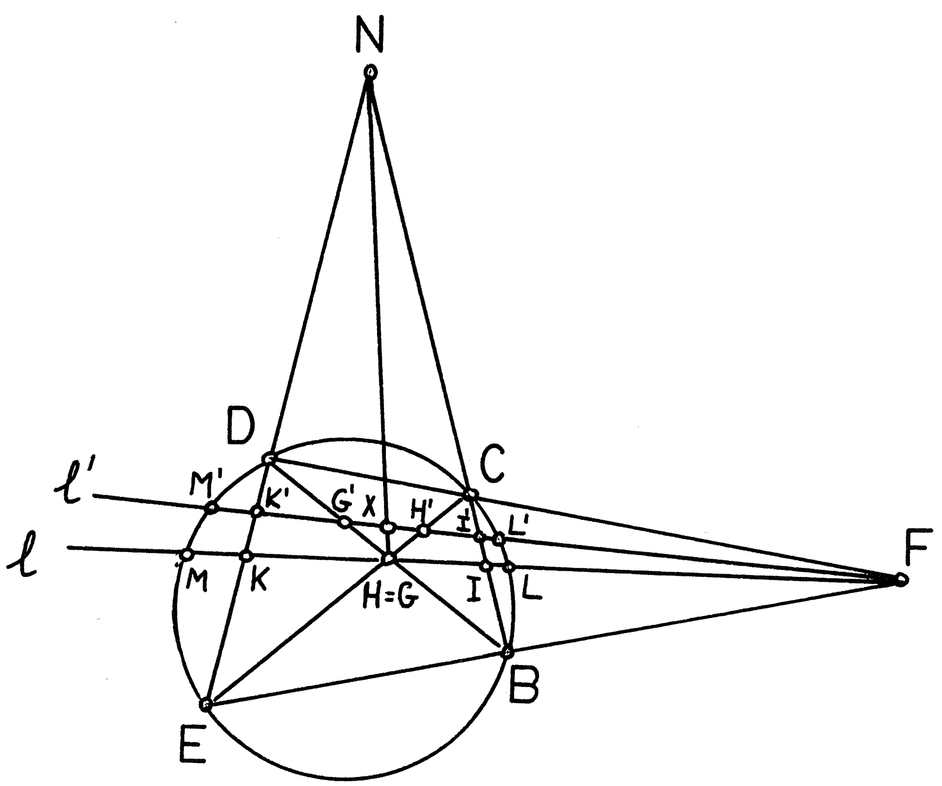

FIGUUR 10

Desargues bekijkt een configuratie die later de volledige vierhoek zou worden genoemd en die bestaat uit een vierhoek *BCDE* met de diagonalen *BD*, *CE* en de snijpunten *N* en *F* van *BC* en *ED*, *BE* en *CD* (Figuur 11). Hij bewijst dat als deze configuratie door een willekeurige rechte wordt gesneden in *P*,*Q*;*I*,*K*;*G*,*H*, deze zes punten in involutie zijn. (Dit resultaat was feitelijk in de Griekse oudheid al bekend en wordt vermeld in de *Collectio* van Pappus van Alexandrië, die in het Latijn vertaald was in 1575; Pappus had echter geen naam voor de configuratie). Desargues maakt dan de extra veronderstelling dat *B*, *E*, *D* en *C* op een cirkel liggen. Deze cirkel snijdt de rechte door *P* en *Q* in punten *L* en *M* en hij bewijst (met gebruikmaking van stellingen over de cirkel in de *Elementen* van Euclides, zie kader) dat *L*,*M*;*P*,*Q*;*I*,*K*;*G*,*H* in involutie zijn met elkaar (d.w.z. elk drietal paren is in involutie). Hieruit concludeert hij onmiddellijk dat hetzelfde waar is voor *B*, *E*, *D* en *C* op een willekeurige kegelsnede in plaats van een cirkel. Dit is correct, want een kegelsnede is de centrale projectie van de cirkel en in een vorige stelling is bewezen dat de centrale projecties van zes punten in involutie ook zes punten in involutie zijn. Natuurlijk blijft de stelling ook gelden als punten door de centrale projectie op oneindig verre punten geprojecteerd worden.




FIGUUR 11

*Details uit het bewijs van de Stelling van Desargues.*
De stelling van Menelaos levert
$IQ/IP = (CQ/CF)\cdot(BF/BP)$ en $KQ/KP = (DQ/DF)\cdot(EF/EP)$
Dus
$(IQ\cdot KQ)/(IP\cdot KP) = (CQ\cdot DQ)/(CF\cdot DF)\cdot(BF\cdot EF)/(BP\cdot EP)$
Door verwisseling van $C$ en $D$ krijgen we op dezelfde manier
$(GQ\cdot HQ)/(GP\cdot HP) = (DQ\cdot CQ)/(DF\cdot CF)\cdot(BF\cdot EF)/(BP\cdot EP)$
Dus $(IQ\cdot KQ)/(IP\cdot KP) = (GQ\cdot HQ)/(GP\cdot HP)$. Dus $Q,P$; $I,K$; $G,H$ zijn zes punten in involutie. Als nu $B$, $C$, $D$ en $E$ op een cirkel liggen die door de rechte in $L$ en $M$ wordt gesneden, dan volgt uit Euclides' *Elementen* (III; 35-36)
$QL\cdot QM = QC\cdot QD$, $PL\cdot PM = PB\cdot PE$, en $FC\cdot FD = FB\cdot FE$; merk op dat deze stelling ook geldt voor $F$, $Q$, $P$ binnen de cirkel. Nu volgt $(QL\cdot QM)/(PL\cdot PM) = (QC\cdot QD)/(PB\cdot PE) =$
$(QC\cdot QD/FC\cdot FD)\cdot(FB\cdot FE/BP\cdot EP) = (IQ\cdot KQ)/(IP\cdot KP)$.
Conclusie: $I,K;G,H;L,M;Q,P$ zijn in involutie met elkaar.




FIGUUR 12

Uit deze stelling kan men de noodzakelijke theorie van *doel* en *transversaal* (pool en poollijn) nu heel eenvoudig afleiden. Als we de snijdende rechte $LM$ in Figuur 11 ($l$ in Figuur 12) door $F$ en het snijpunt van de diagonalen $BD$, $CE$ laten gaan, blijkt dat de vier punten $F = P = Q$, $L$, $G = H$ en $M$ vier punten in involutie zijn. Trekken we nu een andere snijdende rechte $l'$ door $F$ als in Figuur 12, dan krijgen we vier puntenparen in involutie: $L',M';I',K';G',H';F,F$. Punt $F$ is dus een *gemiddelde knoop* van de *boom* op $l'$ die door de puntenparen bepaald is (modern gezegd: $F$ is een dubbelpunt van de involutie op $l'$). De andere *gemiddelde knoop* is het snijpunt $X$ van $NG$ en $l$ (dit zien we doordat $F$, $I$, $G$, $K$ via de centrale projectie van $l$ op $l'$ met centrum $N$ op $F$, $I'$, $X$, $K'$ worden afgebeeld. Ik heb hier Desargues' redenering vereenvoudigd; hij leidt alles opnieuw met evenredigheden af). De conclusie is dat $NG$ een *transversaal* is met *doel F*. Desargues concludeert dat analoog $FG$ ook een *transversaal* is met *doel N*, en dat $FN$ een transversaal is met doel $G$ (hij heeft in het voorgaande nergens gebruikt dat $F$ buiten de kegelsnede ligt en dus mag hij $F$ met $G$ verwisselen). Uit deze feiten wordt ook duidelijk hoe we een transversaal met willekeurig gegeven doel kunnen construeren en het doel van een gegeven transversaal kunnen vinden. Ook concludeert hij, dat als $GN$ de transversaal van $F$ is en $GF$ de transversaal van $N$, $FN$ de transversaal van $G$ is. Als we nu voor $FN$ de oneindig verre rechte nemen, dan is $G$ het middelpunt van de kegelsnede en er volgt nu (omdat $F$, $L'$, $X$ en $M'$ vier punten in involutie zijn) $L'X = XM'$ etc. Zo zien we in, dat elke rechte ($NG$) door het middelpunt een diameter van de kegelsnede is; de ordinaten zijn evenwijdige lijnen die elkaar in het oneindig verre punt $F$ ontmoeten. Desargues geeft ook nog expliciet de stereometrische constructie van het middelpunt: als een kegel door een snijvlak $V$ gesneden wordt, beschouwt hij het vlak $V' /\!/ V$ door de top $T$ van de kegel; stel $s$ is de snijlijn van het vlak van de basis van de kegel en $V'$. Ten opzichte van de basis van de kegel is $s$ de transversaal van een doel $S$. Met behulp van het voorgaande is gemakkelijk in te zien, dat het snijpunt van $ST$ en $V$ het middelpunt van de kegelsnede in $V$ is. En hiermee heeft Desargues een stereometrische constructie van het middelpunt van een kegelsnede gegeven en een inzichtelijk bewijs van het feit dat elke lijn door dit middelpunt een diameter van de kegelsnede is. Vergeleken met Apollonius is de theorie nu veel helderder en eenvoudiger geworden.

De centrale projectie is bij het bewijs essentieel en Desargues was zich bewust van het belang van dit principe. Zo zegt hij dat als je een eigenschap van één kegelsnede hebt, je daaruit vaak met deze methode (waarvoor hij zoals gezegd geen naam invoert) een eigenschap van een andere kegelsnede kunt afleiden. Hij gaat zelfs zover te zeggen, dat het onderscheid tussen ellips, parabool en hyperbool niet wezenlijk is en dat de namen te maken hebben met aspecten die 'hors d'elles & de leur nature' zijn, niet te maken hebben met hun eigenlijke aard (Taton, p. 138).

De rest van het *Brouillon Project* is in hoofdzaak gewijd aan het verbeteren en nieuw opzetten van andere gedeelten van de theorie van Apollonius. Desargues kan eenvoudig bewijzen dat bij elke diameter de ordinaten aan een vergelijking (1) voldoen (Figuur 3). Hij bewijst namelijk een veel algemenere stelling en laat zien dat de stelling van Apollonius er een 'speciaal geval van een speciaal geval van een speciaal geval' (Taton, p. 164) van is. Daarna geeft hij stellingen over brandpunten, die aan Apollonius zijn ontleend (Apollonius of de *Conica* worden niet genoemd). De bewijzen van Desargues zijn wel wat eleganter, maar er worden geen essentieel nieuwe methoden gebruikt. De stellingen zijn gebaseerd op de aanname dat elke kegelsnede een as heeft, iets wat Apollonius wel maar Desargues nog niet heeft bewezen. Aan het eind van het *Brouillon Project* staat een lange en duistere stelling, waarin o.a. wordt bewezen dat twee punten binnen een gegeven kegelsnede kunnen worden geprojecteerd op de brandpunten van een andere kegelsnede. Desargues zegt dat hij bij het bewijs van deze stelling hulp heeft gehad van een andere wiskundige, een zekere Pujos, over wie verder bijna niets bekend is. De betekenis van deze stelling is door moderne historici verschillend uitgelegd, maar naar mijn idee zou de stelling in verband kunnen staan met pogingen van Desargues te bewijzen dat een kegelsnede assen heeft (dit heeft hij nog niet gedaan). Op dit punt is Desargues er in het *Brouillon Project* niet in geslaagd Apollonius te verbeteren.

Het is misschien goed aan het eind van dit overzicht de relatie tussen Desargues en Apollonius nog eens te karakteriseren. Desargues wilde de theorie van Apollonius opnieuw en veel eenvoudiger opzetten, en dit is hem voor een deel uitstekend gelukt. Zijn methoden hierbij (oneindig verre punten en lijnen, centrale projectie, definitie van involutie, transversaal, doel) zijn zeer origineel. Vanuit onze tijd gezien is het ook duidelijk dat de doelen die Desargues wilde bereiken wel voor een groot deel door Apollonius bepaald waren. Dit doet natuurlijk niets af aan de originaliteit van de methode.

In de zeventiende eeuw is het werk van Desargues maar door weinig wiskundigen begrepen en nog minder wiskundigen zijn erdoor geïnspireerd: Blaise Pascal[9], Philippe de la Hire, wellicht ook (direct of indirect) Isaac Newton. Het *Brouillon Project* is ook sterk bekritiseerd in een geschrift uit 1640 van een zekere Jean De Beaugrand. Oorspronkelijk was deze bevriend met Desargues, maar de relatie was nogal bekoeld nadat Desargues een boek van De Beaugrand had bekritiseerd. In zijn kritiek drijft De Beaugrand de spot met de vele nieuwe termen die Desargues invoert (zo suggereert hij een verband tussen de term involutie (=inwikkeling) en 'ingewikkeldheid') en hij probeert te bewijzen dat de stellingen in het *Brouillon Project* afgeleid kunnen worden uit de boeken van Pappus en Apollonius. In het bijzonder leidt De Beaugrand de involutiestelling van Figuur 11 af uit stellingen in de *Conica*. Het ontgaat De Beaugrand daarbij totaal, dat het nieuwe in het *Brouillon Project* in de methode ligt en niet in de resultaten. Aan het eind van zijn geschrift noemt De Beaugrand de reden waarom hij het geschreven heeft: Desargues had hem namelijk gezegd dat zijn *Brouillon Project* verre te prefereren was boven de *Conica* van Apollonius[10]. De Beaugrand was hierdoor kennelijk zeer geschokt.

De Beaugrand was niet de enige aan wie het belang van het *Brouillon Project* ontging. Terugkijkend kan men zich afvragen door welke oorzaken de ideeën van Desargues in de 17de eeuw nauwelijks aansloegen[11]. Een van de oorzaken is zeker de moeizame stijl van het *Brouillon Project*, met alle afschrikwekkende definities van bomen, stammen en twijgen, en het feit dat pas na tweederde van het boek duidelijk wordt waar het allemaal voor dient. Ook is belangrijk, dat het *Brouillon Project* in een oplage van maar 50 exemplaren gedrukt is (er is tegenwoordig maar één exemplaar van de originele oplage bekend, dat in 1950 in Parijs is ontdekt). Het boek is totaal verloren geweest van ca. 1680 tot 1845, toen de Franse meetkundige Chasles in een boekhandel in Parijs een handgeschreven afschrift vond, dat gemaakt was door Philippe de la Hire in 1679. Er is nog een mogelijke reden voor het feit dat de ideeën van Desargues in de zeventiende eeuw veel minder gewaardeerd werden dan in de negentiende eeuw. In de zeventiende eeuw werden centrale projectie en oneindig verre punten en lijnen alleen in verband met kegelsneden toegepast en het was onduidelijk wat er nog meer mee gedaan kon worden (alleen Newton gebruikte deze methoden aan het eind van de 17de eeuw bij de studie van kubische krommen). De aandacht was in de zeventiende eeuw meer bij de nieuwe resultaten die met behulp van de algebra konden worden verkregen. In de 19de eeuw waren er veel meer objecten in de meetkunde bekend waarop de methoden van Desargues konden worden toegepast en verder ontdekte Möbius kort voor 1827 dat het mogelijk is, oneindig verre punten en lijnen met behulp van (homogene) coördinaten te beschrijven, zodat je ze net als gewone punten en lijnen met algebra kunt behandelen[12]. De oneindig verre punten en lijnen verloren daardoor veel van hun mysterieuze karakter. Het feit dat deze inzichten ten tijde van Desargues nog niet aanwezig waren, is wellicht een extra oorzaak dat zijn ideeën in zijn tijd niet op hun waarde werden geschat.

De eerste die in de negentiende eeuw de waarde van Desargues' werk inzag was Jean-Victor Poncelet, de grondlegger van de moderne projectieve meetkunde, in zijn *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. Hij schreef dit boek in 1822, dus voordat het *Brouillon Project* weer teruggevonden werd. Poncelet baseerde zijn oordeel vooral op de kritiek van De Beaugrand en trok daar de juiste conclusie uit, namelijk dat De Beaugrand eigenlijk niets van Desargues had begrepen. Toen het *Brouillon project* in 1845 weer ontdekt werd, bleek dat Poncelet volkomen gelijk had gehad. Sindsdien wordt Desargues beschouwd als een van de grote wiskundigen van de zeventiende eeuw.

## NOTEN

1. De standaarduitgave van het *Brouillon Project* van Desargues is in R. Taton, *L'Oeuvre Mathématique de Desargues*, Parijs 1951 (voortaan geciteerd als Taton; gebaseerd op het enig bekende gedrukte exemplaar van het *Brouillon Project*). Een oudere uitgave is N. Poudra, *Oeuvres de Desargues réunies et analyseés*, Parijs 1864, 2 delen. De Engelse vertaling in J. Field, J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues* is betrouwbaar, maar de figuren bevatten een aantal onjuistheden, zodat men het beste de figuren uit het boek van Taton erbij kan gebruiken (kennis van het Frans is daarvoor uiteraard niet noodzakelijk). Wiskundig gezien is het helderste de Duitse vertaling in G. Desargues, *Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene*, übers. M. Zacharias (Leipzig 1922, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 197).
   Artikelen over Desargues en het *Brouillon Project* zijn in het Nederlands: H. de Vries, Desargues, in *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 14 (1926/27), pp. 365-380 en 15(1927/28) pp. 1-14, herdrukt in H. de Vries, *Historische Studiën*, deel 2, Groningen 1934, pp. 22-50. Een lijst van artikelen in andere talen is aan het eind van het artikel van René Taton, Desargues, in *Dictionary of Scientific Biography* deel 4 (1971), pp. 46-51; zie ook noot 3.
2. Zie J. Field, J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, pp. 185-188.
3. Goede historische werken zijn bijvoorbeeld: K. Fladt, *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Grades* (Stuttgart 1963), pp. 41-42; H. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, New York 1966 (herdruk van de uitgave uit 1903) pp. 180-185; J.L. Coolidge, *A history of the conic sections and the quadric surfaces*, Oxford 1945, pp. 28-32.
4. Details zullen worden uitgewerkt in een artikel dat t.z.t. als preprint zal verschijnen.
5. De beste biografie is in R. Taton, *L'Oeuvre mathématique de Desargues*.
6. De beste inleiding tot de *Conica* is nog steeds T.L. Heath, *Apollonius of Perga, treatise on conic sections*, Cambridge 1896.

7. In H. de Vries, Desargues (*Historische Studiën* deel 2, p. 38) staat ten onrechte vermeld dat Apollonius de kegel alleen met vlakken $V$ sneed waarvoor de 'driehoek door de as' *TMN* loodrecht op het grondvlak staat. $V$ mag echter een willekeurig vlak zijn, niet door de top. Hetzelfde misverstand staat al in M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles 1837, § 20-21. Chasles geloofde zelfs, dat de grootste verdienste van Desargues is, dat hij de kegel met een willekeurig vlak $V$ sneed (hetgeen Apollonius in feite al had gedaan).
8. Taton p. 84: Desargues schrijft aan Mersenne dat hij de leer der kegelsneden ontwikkelt 'sans employer pour cela aucun des triangles par l'essieu (*TMN* in Figuur 2) ny faire distinction d'un principal diamètre d'avec les autres'.
9. In het eind van 1639 (op 16-jarige leeftijd) had Pascal de methoden van Desargues al zo goed begrepen, dat hij de volgende beroemde stelling gevonden had: als $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ en $B_3$ zes punten op een kegelsnede zijn (een zogenaamde mystieke zeshoek) en $A_1A_2$ en $B_1B_2$ snijden elkaar in $C_3$, $A_2A_3$ en $B_2B_3$ snijden elkaar in $C_1$, en $A_3A_1$ en $B_3B_1$ snijden elkaar in $C_2$, dan liggen $C_1$, $C_2$ en $C_3$ op één rechte lijn. Zie voor de geschiedenis van deze stelling H. de Vries, Historische Studiën deel 1, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 11 (1923/4) 1-24, 188-210, 295-330, herdrukt in *Historische Studiën* deel 1 (Groningen 1926).
10. De brief van De Beaugrand is gepubliceerd in N. Poudra, *Oeuvres de Desargues réunies et analysées*, vol. 2, Parijs 1864, pp. 355-378.
11. Grotendeels ontleend aan J. Field, J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, pp. 43-46.
12. Zie voor de geschiedenis hiervan H. de Vries, De oudste homogene coördinaten, in *Historische Studiën* deel 1, Groningen 1926.

# Open University Video Film 'Newton and Leibniz'

H.J.M. Bos

Sinds 1974 verzorgt de Engelse Open University een studie-onderdeel 'History of Mathematics'. De eerste versie, die tot 1987 is gebruikt, omvatte als lesmateriaal radioprogramma's, speciale teksten en voorgeschreven boeken. In de tweede versie, vanaf 1987, is het materiaal geheel herschreven, er is een (zeer fraaie) bloemlezing van primaire en secundaire bronnen uitgebracht [1] en er zijn TV-programma's toegevoegd.

Een van die TV-programma's betreft de ontdekking (of liever de creatie) van de differentiaal- en integraalrekening door Newton en Leibniz. De presentator, dr. J. Gray, voert de kijker mee naar de twee lokaties waar de aantekeningen bewaard worden die Newton en Leibniz bij hun studies maakten: de bibliotheek van Trinity College, Cambridge, en de Niedersächsische Landesbibliothek in Hannover.

Gray laat ons in de manuscripten meelezen hoe Newton, de technieken van Descartes combinerend met eigen ideeën over de bewegingen waardoor krommen beschreven worden, resultaten bereikt die equivalent zijn met differentiëren, integreren en met de hoofdstelling, die zegt dat die bewerkingen elkaars inverse zijn.

Ook Leibniz bereikte resultaten die daarmee equivalent zijn, maar ze zagen er heel anders uit. Leibniz zag variabelen niet als bewegend (zoals Newton) maar bracht ze in verband met reeksen. Verder hechtte Leibniz grote waarde aan notatie en formalisme. De nog steeds gebruikte $d$ en $\int$ komen van hem en de kijker ziet de teksten waarin Leibniz die symbolen voor het eerst in de betekenis van differentiaal en integraal neerschreef.

Tijdens de cursus zal deze film vertoond worden, voorzien van enig nader commentaar.

1. FAUVEL, J. en J. GRAY (eds), History of Mathematics, A Reader, London (MacMillan), 1987.

## *CWI SYLLABI*

1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde.* 1984.

2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories.* 1984.

3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions.* 1984.

4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1.* 1984.

5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2.* 1984.

6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories.* 1985.

7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening.* 1985.

8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization.* 1985.

9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations.* 1985.

10 Vacantiecursus 1986: *Matrices.* 1986.

11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes.* 1986.

12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener.* 1986.

13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2.* 1987.

14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school.* 1987.

15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen.* 1987.

16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1.* 1988.

17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987.* 1988.

18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening.* 1988.

19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX.* 1988.

20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1.* 1988.

21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2.* 1988.

22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3.* 1988.

23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (red.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer.* 1989.

24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde.* 1989.

25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw.* 1989.

## MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis.* 1965.

1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening.* 1965.

1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek.* 1966.

1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden.* 1966.

1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde.* 1966.

1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1.* 1968.

1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2.* 1977.

1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1.* 1968.

1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2.* 1970.

1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3.* 1971.

1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie.* 1968.

2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1.* 1967.

2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2.* 1968.

3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1.* 1967.

3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2.* 1968.

3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3.* 1968.

4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen.* 1968.

5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde.* 1968.

6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60.* 1969.

7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1.* 1969.

7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2.* 1969.

8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen.* 1969.

9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1970.

9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1970.

10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening.* 1970.

11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren.* 1971.

12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra.* 1971.

13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8.* 1971.

14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie.* 1971.

15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1972.

15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1973.

15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3.* 1975.

16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren.* 1973.

16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60.* 1973.

17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1.* 1973.

17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2.* 1973.

17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3.* 1976.

18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971.* 1973.

19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens.* 1973.

20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen.* 1976.

21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid.* 1975.

22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid.* 1976.

23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1.* 1976.

23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2.* 1977.

24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden.* 1974.

25 *Colloquium structuur van programmeertalen.* 1976.

26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1.* 1976.

26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2.* 1976.

27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden.* 1976.

28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems.* 1976.

29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B.* 1976.

29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2.* 1977.

30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen.* 1983.

31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie.* 1976.

32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfsystemen.* 1976.

33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren.* 1977.

34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek.* 1977.

35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics.* 1978.

36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen.* 1977.

37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren.* 1978.

38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I.* 1979.

38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II.* 1979.

39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen.* 1978.

40 J. van Tiel. *Convexe analyse.* 1979.

41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations.* 1979.

42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen.* 1980.

43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus).* 1980.

44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations.* 1980.

45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur.* 1980.

46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1.* 1981.

46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2.* 1981.

47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices.* 1981.

47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations.* 1981.

47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I.* 1981.

47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II.* 1981.

47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I.* 1981.

47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II.* 1981.

47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation.* 1981.

48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1.* 1982.

48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2.* 1982.

49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups.* 1982.

50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie.* 1982.

51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie.* 1983.