

Vacantiecursus 1988
Differentierekening



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

ISBN 90 6196 355 9
NUGI-code: 811

Copyright © 1988, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam
Printed in the Netherlands

Inhoud

Inleiding	1
<i>A.W. Grootendorst</i>	
Lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten	17
<i>H.J.A. Duparc</i>	
Speciale differentievergelijkingen	33
<i>F. van der Blij</i>	
Discretisaties van differentiaalvergelijkingen	47
<i>R.M.M. Mattheij</i>	
Lineaire differentievergelijkingen in de informatica	65
<i>A.J. van Zanten</i>	
Niet-lineaire differentievergelijkingen in de informatica	81
<i>A.J. van Zanten</i>	

Voorwoord

Deze vacantiecursus heeft als onderwerp 'differentierekening'. Centraal echter staan daarbij de differentievergelijkingen. In het bijzonder zullen de differentiaalvergelijkingen daarbij als 'referentiekader' functioneren. Telkens weer zal het accent liggen op overeenkomst en verschil tussen beide probleemgebieden. Het blijft echter niet bij puur theoretische beschrijvingen. Veel aandacht zal worden geschonken aan het optreden van differentievergelijkingen in allerlei toepassingsgebieden: economie, biologie, numerieke wiskunde, informatica. Een overzicht van het gebodene moge dit verduidelijken.

In de *Inleiding* (gepresenteerd in twee delen) zullen de fundamentele definities gegeven worden alsmede enkele elementaire voorbeelden van differentievergelijkingen en een classificatie daarvan. Daarna zullen die begrippen uit de differentierekening worden behandeld die benodigd zijn voor het oplossen van de onderscheiden typen differentievergelijkingen.

De tweede voordracht *Lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten*, heeft nog een vrij theoretisch karakter, al is die theorie wel gericht op de toepassingen. Opvallend is hier de voortdurende vergelijking met de 'continue-analyse' zoals 'z-transformatie' versus 'Laplace-transformatie' en de parallellie tussen de oplossingsmethoden van de differentievergelijkingen enerzijds en de differentiaalvergelijkingen anderzijds. Ook wordt in deze lezing een verband gelegd met eindige lichamen. Het geheel wordt besloten met een wel zeer praktische toepassing in de schakeltechniek, nl. de schuifregisters.

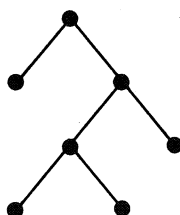
De derde voordracht *Speciale differentievergelijkingen* geeft een aantal voorbeelden uit de praktijk: economie en biologie, zoals groeimodellen die aanleiding geven tot niet-lineaire differentievergelijkingen, bijv. de uit de vorige eeuw stammende Verhulst-vergelijking voor begrensde groei. Een uitgewerkt voorbeeld waarin de differentiaalvergelijking $x^2(t) + [x'(t)]^2 = 1$ gesteld wordt naast de differentievergelijking $x^2(t) + [x(t+1) - x(t)]^2 = 1$ besluit - met resultaten die via een PC zijn verkregen - deze lezing, waarin steeds de differentievergelijking voorkomt in gezelschap van zijn 'continue' familid, de differentiaalvergelijking.

De inhoud van de vierde voordracht laat zich duidelijk aflezen uit de titel *Discretisaties van differentiaalvergelijkingen*. De spreker neemt de lezer mee naar zijn eigen vakgebied: de numerieke wiskunde, en stelt het probleem aan de orde van het benaderen van de oplossing van een differentiaalvergelijking door deze laatste eerst te vervangen door een geschikte differentievergelijking, d.w.z. één die 'daarop lijkt' en vervolgens deze differentievergelijking op te lossen. Daarbij passeren achtereenvolgens de volgende vragen de revue: Hoe construeert men een geschikte bijbehorende differentievergelijking? Hoe zit het

met de fout in de oplossing per stap (lokale fout) en met de cumulatie van de fouten per stap (globale fout)? Hoe staat het met de z.g. stabiliteit? Tenslotte wordt de techniek ook toegepast op een niet-lineaire differentiaalvergelijking, nl. $\dot{x}(t) = -x(t)\sqrt{F-x(t)}$, $F > 0$, $x(0) = F$. Dit voorbeeld wordt in detail uitgewerkt en met computerresultaten verduidelijkt.

In de vijfde voordracht *Lineaire differentievergelijkingen in de informatica*, worden twee problemen behandeld, nl. een telprobleem uit de grammatica van een formele taal en een probleem betreffende complexiteit van algoritmen. Het telprobleem stelt de vraag hoeveel arithmetische expressies een formele taal bezit als men uitgaat van een aantal basissymbolen en een aantal operatoren, waarbij nog zekere beperkende regels gelden. De complexiteit van algoritmen is, ruw gezegd, het aantal bewerkingen dat nodig is om een algoritme uit te voeren. Als voorbeeld wordt behandeld het probleem van de torens van Hanoi. Daarbij is de opgave een stel ringen, die om een paal gerangschikt zijn, in dezelfde volgorde om een andere paal aan te brengen, via een 'hulppaal' maar zodanig dat onderweg nooit een schijf op een kleinere schijf geplaatst mag worden. De vraag is nu wat het minimale aantal verplaatsingen is. Niet alleen wordt dit aantal bepaald, maar ook de manier waarop men te werk moet gaan. Daarbij treedt een verrassend verband aan de dag met de z.g. Gray-codes, d.w.z. binaire rijen die op een bepaalde manier gerangschikt zijn en wel zo, dat elke rij slechts op één plaats verschilt van zijn voorganger. Een voorbeeld daarvan is {000,001,010,011,110,111,101,100}.

De laatste voordracht geeft enkele voorbeelden van problemen die tot niet-lineaire differentievergelijkingen leiden en wel de vraag naar het optreden van bepaalde patronen in binaire rijen en de vraag naar het aantal binaire bomen met een gegeven aantal knopen. Zo kan een binaire boom met 7 knopen de volgende gedaante hebben.



De vraag is nu: hoeveel binaire bomen met n knopen zijn er? Dit probleem leidt tot een niet-lineaire differentievergelijking die met behulp van z.g. genererende functies kan worden opgelost.

A.W. Grootendorst

Inleiding

A.W. Grootendorst

Technische Universiteit Delft

Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica

Julianalaan 132, 2628 BL Delft

1. Hoewel het onderwerp van deze vacatiecursus is aangekondigd als 'Differentie- en Differentiaalvergelijkingen', zullen de differentievergelijkingen een centrale plaats innemen. De differentiaalvergelijkingen zullen meer dienen als model waarnaar de theorie van de differentievergelijkingen is opgebouwd en voortdurend zal gewezen worden op overeenkomst en verschil tussen beide probleemgebieden.

Ruwweg gezegd komen differentievergelijkingen voor in situaties waarin de waarden van een functie bekend zijn in 'discrete punten', d.w.z. voor equidistante waarden van het argument. Dit kan zijn in die gevallen waarin zekere grootheden op equidistante tijdstippen worden gemeten; dit doet zich voor in de natuurkunde, maar ook in de sociologische en economische wetenschappen. Het kan ook zijn dat een probleem in een (aftelbaar) aantal opvolgende stadia wordt beschouwd; hiertoe behoren de telproblemen. Van beide gevallen zullen we voorbeelden geven. Eerst echter een voorlopige definitie van een differentievergelijking, daarna enkele voorbeelden.

2. Een *differentievergelijking* geeft het verband aan waaraan de waarden van een onbekende functie moeten voldoen, maar dan de waarden in een eindig aantal equidistante punten. De algemene gedaante van een differentievergelijking voor de onbekende functie f is dus (als we de onderlinge afstand van die punten op 1 stellen)

$$F\{x, f(x), f(x+1), \dots, f(x+k)\} = 0.$$

In dit geval spreken we van een differentievergelijking van de orde k . Een nadere indeling in typen volgt nog. Vooruitlopend op wat nog komt, voeren we de operator E in, door te definiëren: $Ef(x) := f(x+1)$ en $E^k f(x) := f(x+k)$ ($k=1,2,\dots$). De differentievergelijking krijgt dan de gedaante

$$F\{x, f(x), Ef(x), \dots, E^k f(x)\} = 0.$$

Vaak neemt de onafhankelijk veranderlijke x alleen waarden in $\mathbb{N}$ aan. We schrijven dan a_n i.p.v. $f(x)$ en de differentievergelijking krijgt dan de gedaante

$$F\{n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}\} = 0.$$

Hier spreekt men dan vaak van een recurrente betrekking. In dit laatste geval is de oplossing een rij getallen

$$(a_n) \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

Een heel eenvoudig voorbeeld is

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ met } a_0 = 1, a_1 = 1.$$

Het is duidelijk dat a_n recursief berekend kan worden als a_0 en a_1 bekend zijn. Het streven is echter de oplossing te geven in gesloten vorm. Later zal blijken dat in dit geval geldt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

hetgeen mirabile dictu steeds een natuurlijk getal is!

3. ENKELE VOORBEELDEN

a. Een bekend voorbeeld uit de economie is het volgende:

Het nationale inkomen N_n van een land in een jaar met rangnummer n ($n=0, 1, 2, \dots$) kan men definiëren als de som van de particuliere bestedingen B_n , de particuliere investeringen I_n en de overheidsuitgaven R_n , alle in het jaar n . Er geldt dus

$$N_n = B_n + I_n + R_n.$$

Er zijn economen die ervan uitgaan dat de particuliere bestedingen recht evenredig zijn met het nationale inkomen van het vorige jaar, de particuliere investeringen recht evenredig zijn met de toename van de particuliere bestedingen vergeleken met het vorige jaar en de overheidsuitgaven constant zijn. Er geldt dus voor zekere constanten a , b en c

$$B_n = aN_{n-1}; I_n = b(B_n - B_{n-1}); R_n = c.$$

Dit leidt tot de volgende differentievergelijking voor N_n

$$N_n = aN_{n-1} + b(aN_{n-1} - aN_{n-2}) + c$$

oftewel

$$N_{n+2} = a(1+b)N_{n+1} - abN_n + c \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Men kan dan uitgaande van N_0 en N_1 successievelijk alle N_n berekenen. Het is echter duidelijk dat men liever over een gesloten formule beschikt die N_n geeft als functie van n met a , b en c als parameters. In het bijzonder is men geïnteresseerd in de vraag hoe de ontwikkeling van N_n afhangt

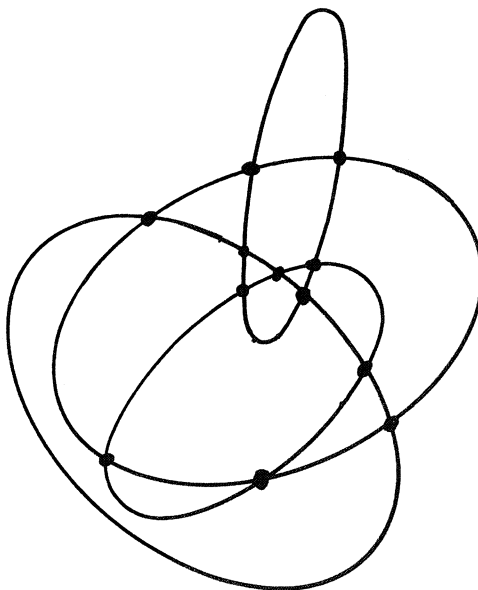
van de parameters a , b en c . Zal N_n om een evenwicht schommelen of explosief stijgen?

In de voordrachten van Prof. van der Blij en Prof. Duparc zal op deze problematiek nader worden ingegaan.

- b. Een belangrijke toepassing vinden de differentievergelijkingen in vele situaties waarin geteld moet worden. Deze doen zich vaak voor in de informatica. In de voordrachten van Dr. van Zanten zullen deze problemen een belangrijke plaats innemen. Hier echter het volgende voorbeeld, waarin de situatie aldus is:

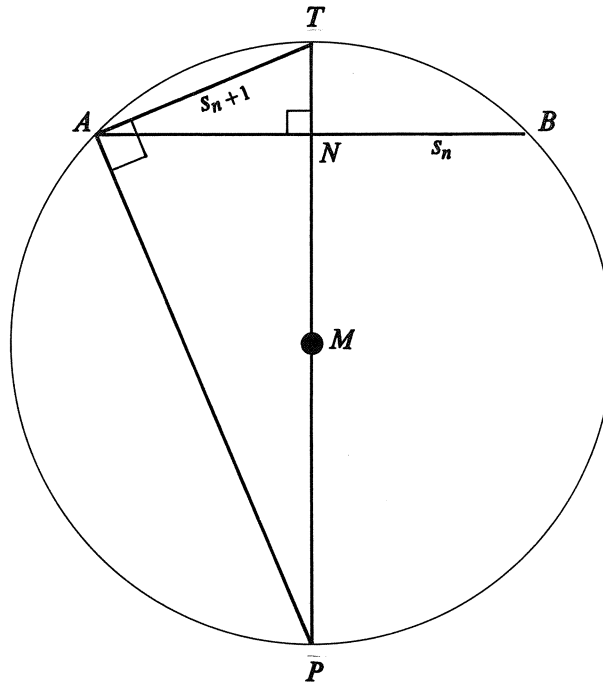
In het platte vlak zijn ovalen getekend en wel zó, dat ieder tweetal ovalen elkaar in precies twee punten snijdt en dat nooit drie of meer ovalen door één punt gaan. De vraag is nu: in hoeveel delen wordt het platte vlak verdeeld door n zodanige ovalen? Indien we dit aantal op a_n stellen, dan is duidelijk dat $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 4$ etc., maar we zijn geïnteresseerd in een differentievergelijking waaraan a_n voldoet. Stel nu dat we n ovalen getekend hebben die, zoals gedefinieerd, het platte vlak verdelen in a_n delen. Het volgende, $(n+1)$ ste ovaal snijdt elk van de aanwezige ovalen in precies 2 punten. Hierdoor worden op de omtrek van dit $(n+1)$ ste ovaal precies $2n$ deelpunten aangebracht (n.b. geen ovalen door één punt). De omtrek van dit laatste ovaal wordt dus in $2n$ segmenten verdeeld. Ieder segment verdeelt een bestaand vlakdeel in twee stukken en geeft dus aanleiding tot het ontstaan van één nieuw vlakdeel. Er geldt dus

$$a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 2).$$



- c. Een voorbeeld uit de elementaire meetkunde: het verband tussen de lengte s_n van een zijde van een regelmatige 2^n -hoek en de zijdelengte s_{n+1} van

een regelmatige 2^{n+1} -hoek. In onderstaande afbeelding is een cirkel met straal 1 getekend. $AB = s_n$; $AT = s_{n+1}$. Men ziet dan onmiddellijk dat



$$s_{n+1}^2 = TN^2 + \frac{1}{4} s_n^2$$

$$s_{n+1}^2 = TN \cdot TP = 2TN$$

waaruit volgt

$$s_{n+1}^4 - 4s_{n+1}^2 + s_n^2 = 0$$

en dus

$$s_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2} \quad (\text{n.b. } s_{2n} < 2).$$

Stelt men nu

$$\sqrt{4 - s_n^2} = u_n$$

dan vinden we

$$u_{n+1}^2 = 2 + u_n \quad (n = 2, 3, \dots; u_2 = \sqrt{2}).$$

Omdat u_{n+1}^2 voorkomt, spreken we hier van een niet-lineaire differentievergelijking. Op de indeling van differentievergelijkingen komen we nog terug.

- d. Als laatste voorbeeld van het optreden van differentievergelijkingen wordt hier vermeld het benaderen van een differentiaalvergelijking door een differentievergelijking. In de voordracht van Dr. Mattheij is dit het centrale thema. Hier - in deze inleiding - beperken we ons tot een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$y'(x) = Ay(x) + B, \quad a \leq x \leq b$$

waarin $A (\neq 0)$ en B constant zijn. De gedachtengang berust hierop dat we het probleem 'discretiseren', d.w.z. we nemen niet alle $x \in [a, b]$, maar beschouwen een eindig aantal waarden $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ met $i = 0, 1, \dots, n$ en $h = \frac{b-a}{n}$ en vervangen de afgeleide $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ door het differentiequotient $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ met h als boven, dus $h = \frac{b-a}{n}$. Stellen we $y_k = a + kh$ dan gaat het nu om de differentievergelijking

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = Ay_k + B \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

dus

$$y_{k+1} = (1+hA)y_k + Bh.$$

De oplossing y_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) hangt dan af van h en de vraag is nu of $\lim_{h \rightarrow 0} y_k$ de oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking 'goed' benadert.

5. In het voorgaande kwamen enkele typen differentievergelijkingen aan de orde, daarom nu aandacht voor een ietwat nauwkeuriger classificatie. Een lineaire differentievergelijking (recurrente betrekking) van de orde k ($k \in \mathbb{N}$; k vast) in de onbekenden a_i heeft de gedaante

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = R(n) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Indien $R(n)=0$ ($n=1, 2, \dots$) dan heet deze vergelijking *homogeen*; indien $R(n)$ niet voor alle n de waarde nul heeft, noemt men de vergelijking *inhomogeen*. Indien alle c_i ($i=0, 1, 2, \dots, k$) onafhankelijk zijn van n , dan spreekt men van een vergelijking met *constante coëfficiënten*. Het is duidelijk dat, zodra $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ gegeven zijn, men met behulp daarvan via de differentievergelijking alle a_i kan berekenen ($i=k, k+1, \dots$).

Men noemt $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ de beginvoorwaarden. Het is nu mogelijk de volgende stellingen te bewijzen.

1. Iedere lineaire combinatie van oplossingen van de homogene lineaire differentievergelijking met ω -functies als coëfficiënten is daarvan ook een oplossing. Voor het begrip ω -functies, zie par. 8.

2. Er bestaan k lineair onafhankelijke oplossingen $a_n^{(h)}$ ($h=1,2,\dots,k$) van de homogene vergelijking. Deze vormen een zgn. fundamenteel stelsel.
3. Iedere oplossing van de homogene differentievergelijking is te schrijven als een lineaire combinatie (met ω -functies als coëfficiënten) van de onder punt 2 bedoelde oplossingen. De coëfficiënten daarbij worden bepaald door de beginvoorwaarden.
4. Als $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}$ een stelsel van k (' ω -onafhankelijke') oplossingen is, dan is iedere oplossing van de homogene differentievergelijking te schrijven als een lineaire combinatie van deze oplossingen met ω -functies als coëfficiënten.
5. Men verkrijgt alle oplossingen van een inhomogene lineaire differentievergelijking door één particuliere oplossing daarvan achtereenvolgens te vermeerderen met alle oplossingen van de bijbehorende homogene vergelijking.

De bewijzen van deze stellingen verlopen analoog aan de bewijzen van de daarmee corresponderende stellingen in de theorie van de differentiaalvergelijkingen. In par. 14 en in de voordracht van Prof. Duparc zal iets gezegd worden over effectieve oplossingsmethoden. De theorie van de niet-lineaire differentievergelijkingen is veel gecompliceerder. Een aantal facetten daarvan vindt men in de voordracht van Prof. van der Blij.

6. Voor een goed begrip van de materie zijn de voornaamste beginselen van de *differentierekening* onontbeerlijk en deze zullen nu aan de orde gesteld worden, althans voor zover zij voor deze vacatiecursus van belang zijn. Het is niet de bedoeling de differentierekening uitputtend te behandelen, zo dit al mogelijk zou zijn.

7. We beginnen met de operatoren Δ en E . Laat een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (evt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) gedefinieerd zijn op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Bij gegeven $h > 0$ definiëren we de differentie-operator Δ aldus

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

waarbij we natuurlijk veronderstellen dat $x+h \in I$. Aangezien h tijdens de beschouwingen vast blijft, zien we ervan af te schrijven Δ_h . In het vervolg nemen we meestal $h=1$. Indien we de Δ -operator een aantal malen achtereenvolgens toepassen, zeg n maal, dan schrijven we dat als Δ^n . Dus

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

en we spreken verder af dat $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Zo geldt bijv. } \Delta^2 f(x) &= \Delta\{f(x+h) - f(x)\} \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x). \end{aligned}$$

Stellen we $h=1$, dan kunnen we met volledige inductie bewijzen dat

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x+n-i).$$

Nauw verwant met de differentie-operator Δ is de verschuivingsoperator E , gedefinieerd door

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Het is dan direct duidelijk dat

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x)$$

hetgeen we vaak noteren als $\Delta f(x) = (E-1)f(x)$. Wanneer we definiëren $E^n = E(E^{n-1})$ en $E^0 = 1$ dan kunnen we bewijzen dat

$$\Delta^n f(x) = (E-1)^n f(x).$$

De analogie met de differentiaalrekening is duidelijk. Tegenover het differentiaalquotient $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ staat nu (met $h=1$) de differentie $\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1}$.

8. REKENREGELS

De analogie met de differentiaalrekening roept direct de vraag op naar de overeenkomst tussen de rekenregels uit de differentierekening en die uit de differentiaalrekening. We lopen deze laatste even door en dan blijken in de differentierekening de volgende regels te gelden

$$\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x) \quad (1)$$

$$\Delta cf(x) = c \Delta f(x) \quad (c \in \mathbb{C}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f(x) \cdot g(x)) &= Ef(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) \\ &= f(x) \cdot \Delta g(x) + E g(x) \cdot \Delta f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot E g(x)}. \quad (4)$$

Bij (2) merken we op dat deze regel niet alleen geldt bij constante c , maar ook indien c vervangen wordt door een functie ω die een periode 1 heeft. Immers

$$\Delta(\omega(x) \cdot f(x)) = \omega(x+1)f(x+1) - \omega(x)f(x) = \omega(x) \cdot \Delta f(x).$$

Het is duidelijk dat deze zgn. ω -functies dezelfde rol spelen als de constanten in de differentiaalrekening. Enkele voorbeelden van ω -functies: $\sin 2\pi x$, $\sin 4\pi x$ etc.

Het bewijs van (3) verloopt als volgt:

$$\begin{aligned} \Delta(f(x) \cdot g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)g(x) \\ &= Ef(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x). \end{aligned}$$

Tussenvoegen van $-f(x)g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)$ zou de tweede gedaante van (3) hebben opgeleverd.

Reeds eerder voerden we (positieve) machten van de operatoren Δ en E in. Het is eenvoudig na te gaan dat daarvoor geldt

$$\Delta^m \cdot \Delta^n = \Delta^{m+n} = \Delta^{n+m} = \Delta^n \cdot \Delta^m$$

$$E^m \cdot E^n = E^{m+n} = E^{n+m} = E^n \cdot E^m$$

$$E^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i$$

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i E^i \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

De beide laatste formules zullen we nodig hebben bij de differentievergelijkingen. Een poging om een fraai analogon van de kettingregel te vinden blijkt te stranden. Als we nl. uitgaan van $g(x)$ en x opvatten als functie van t , zeg $x = f(t)$, dan gaat $g(x)$ over in $g(f(t)) = g^*(t)$, zodat

$$\Delta g^*(t) = g(f(t+1)) - g(f(t))$$

waarvoor we eventueel kunnen schrijven

$$\frac{g(f(t+1)) - g(f(t))}{f(t+1) - f(t)} \cdot \frac{f(t+1) - f(t)}{1}.$$

Maar dat brengt ons niet verder.

9. PSEUDO-MACHTEN

Tot de eenvoudigste functies waarop we de Δ -operator kunnen toepassen, behoort x^n ($n \in \mathbb{N}$). Het resultaat

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i}$$

is echter niet zo eenvoudig als het pendant in de differentiaalrekening. Wanneer we echter uitgaan van de zgn. pseudo-machten, dan wordt de analogie met de differentiaalrekening hersteld. Een pseudo-macht $x^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) wordt daarbij als volgt gedefinieerd

$$x^{(0)} = 1$$

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) \quad (n \geq 1)$$

en we vinden dan dat

$$\begin{aligned} \Delta x^{(n)} &= (x+1)^{(n)} - x^{(n)} \\ &= (x+1)(x)(x-1) \cdots (x-n+2) \\ &\quad - x(x-1) \cdots (x-n+2)(x-n+1) \\ &= x(x-1) \cdots (x-n+2) \cdot n = nx^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Een minder fraaie eigenschap van de pseudo-machten is

$$x^{(m+n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n)}.$$

Deze laatste eigenschap geeft wel een aanzet om $x^{(n)}$ ook voor negatieve gehele n te definiëren. We gaan daarop niet nader in. Verder zij nog vermeld dat het binomium van Newton ook geldt voor pseudo-machten

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{(n-i)} y^{(i)}.$$

Deze regel staat bekend als de formule van Vandermonde en kan eenvoudig d.m.v. volledige inductie worden bewezen.

Tot slot merken we op dat de pseudo-machten lineair uitgedrukt kunnen worden in de gewone machten en omgekeerd. Het eerste volgt direct uit de definitie, het omgekeerde blijkt aldus:

$$\begin{array}{lll} x^{(1)} = & = & x \\ x^{(2)} = x(x-1) & = & x^2 - x \\ x^{(3)} = x(x-1)(x-2) & = & x^3 - 3x^2 + 2x \\ \dots & & \dots \\ x^{(n)} = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) & = & x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n (n-1)! \end{array}$$

De determinant van dit stelsel is 1, dus $x, x^2, x^3, \dots, x^n$ zijn lineair uit te drukken in $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$.

10. DIFFERENTIES VAN ENKELE EENVOUDIGE FUNCTIES

Men kan nu routine-matig op alle bekende functies de Δ -operator toepassen. De resultaten zijn niet altijd even fraai als bij de differentiaalrekening. Om maar eens iets te noemen:

$$\begin{aligned} \Delta \sin x &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \Delta \cos x &= -2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Wel 'mooi' is

$$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x.$$

Men zou kunnen zeggen dat 2^x in zekere zin de rol overneemt van e^x in de analyse. Minder fraai is overigens

$$\Delta a^x = (a-1)a^x.$$

Van belang is ook het volgende resultaat

$$\Delta \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right] = \frac{1}{x}.$$

Dit volgt uit de functionaalvergelijking voor de Γ -functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Dus

$$\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$$

zodat

$$\Delta \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right] = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}.$$

Direct is in te zien dat $\Delta \ln|x| = \ln|1 + \frac{1}{x}|$.

11. DE INVERSE OPERATOR Δ^{-1} ; (ONBEPAALENDE) SOMMATIE

Eenmaal geattendeerd op de analogie tussen de differentierekening en de differentiaalrekening vragen we naar de inverse operator, het pendant van de onbepaalde integraal, d.w.z. we vragen bij een gegeven functie f naar een functie F met de eigenschap: $\Delta F(x) = f(x)$.

We schrijven dan: $F = \Delta^{-1} f$ of $F(x) = \mathfrak{S} f(x) \Delta x$ en noemen F de onbepaalde som of ook de discrete stamfunctie van f . Het bepalen van F noemen we onbepaald sommeren. Direct duidelijk is dat uit $F_1(x) = \Delta^{-1} f(x)$ en $F_2(x) = \Delta^{-1} f(x)$ volgt dat $\Delta(F_1(x) - F_2(x)) = 0$ zodat $F_1(x) = F_2(x) + \omega(x)$ waarin $\omega(x)$ een eerder ingevoerde ω -functie is met een periode h behorende bij Δ .

Zonder veel moeite ziet men in dat

$$\Delta^{-1}(\omega_1 F_1 + \omega_2 F_2) = \omega_1 \Delta^{-1} F_1 + \omega_2 \Delta^{-1} F_2$$

met ω_1 en ω_2 ω -functies. Anders genoteerd

$$\mathfrak{S}\{\omega_1(x)F_1(x) + \omega_2(x)F_2(x)\} \Delta x = \omega_1(x) \mathfrak{S} F_1(x) \Delta x + \omega_2(x) \mathfrak{S} F_2(x) \Delta x.$$

Het pendant van de partiële integratie in de integraalrekening is de partiële sommatie in de sommatierekening

$$\Delta^{-1}(u \Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev \cdot \Delta u).$$

Immers:

$$\Delta(uv) = (\Delta u) Ev + u \Delta v$$

en wanneer men op beide leden de operator Δ^{-1} toepast, dan komt er

$$uv = \Delta^{-1}(Ev \cdot \Delta u) + \Delta^{-1}(u \cdot \Delta v)$$

m.a.w.

$$\Delta^{-1}(u \cdot \Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev \cdot \Delta u).$$

Wegens het ontbreken van een kettingregel is er ook geen pendant van de substitutieregels uit de integraalrekening.

12. SOMMATIE VAN ENKELE EENVOUDIGE FUNCTIES

Uit de eerder afgeleide differenties van een aantal eenvoudige functies zijn uiteraard ook eenvoudige sommaties af te leiden, bijv.

$$\Delta^{-1} 0 = \omega(x)$$

$$\Delta^{-1} 2^x = 2^x + \omega(x)$$

$$\Delta^{-1} x^{(n)} = \frac{1}{n+1} x^{(n+1)} + \omega(x) \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Voor het bepalen van $\Delta^{-1} x^n$ moeten we eerst x^n schrijven als een lineaire combinatie van $x^{(i)}$ ($i=1,2,\dots,n$) en daarna bovengenoemde regel toepassen.

Uit de eerder afgeleide differentie van $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ volgt

$$\Delta^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \omega(x).$$

Een nuttige manier om stamfuncties te bepalen, is die met behulp van reeksen. Stel dat bij gegeven $f(x)$ gevraagd wordt naar $\Delta^{-1} f(x)$ en dat toevallig de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ convergeert. Het is dan eenvoudig in te zien dat $F(x) := -\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ een stamfunctie is. Immers

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n+1) + \sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n) + \sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) = f(x). \end{aligned}$$

Analoog levert de situatie waarin $\sum_{n=1}^{\infty} f(x-n)$ convergeert als stamfunctie op:

$F^*(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f(x-n)$. Immers

$$\begin{aligned} \Delta F^*(x) &= F^*(x+1) - F^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x-(n-1)) - \sum_{n=1}^{\infty} f(x-n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(x-n) - \sum_{n=1}^{\infty} f(x-n) = f(x). \end{aligned}$$

Met behulp van deze methode leidt men gemakkelijk af dat

$$\Delta^{-1} e^x = \frac{e^x}{e-1} + \omega(x)$$

en

$$\Delta^{-1} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{e^{-1}-1} + \omega(x).$$

Het is duidelijk dat de inverse operator E^{-1} niet bijster interessant is:

$$E f(x) = f(x+1), \text{ zodat } E^{-1} f(x) = f(x-1).$$

13. BEPAALDE SOMMATIE

Het ligt voor de hand de parallel tussen de differentierekening en de differentiaalrekening nog verder door te trekken en te vragen of er naast de zoëven geïntroduceerde onbepaalde sommatie ook zoiets als bepaalde sommatie bestaat. Dit is inderdaad het geval. Omdat we daarvan in deze cursus

geen gebruik maken, zullen we het bij een enkele opmerking daarover laten. Indien f een begrensde functie is, gedefinieerd op het interval $I \subset \mathbb{R}$, terwijl verder a en b gehele getallen zijn die tot I behoren en ook geldt $a < b$, dan kunnen we een rechtersom R en een linkersom L definiëren aldus:

$$R = \sum_a^b f(x) \Delta x := \sum_{n=a+1}^b f(n)$$

en

$$L = \sum_a^b f(x) \Delta x := \sum_{n=a}^{b-1} f(n).$$

Men kan dan voor de linkersom een aantal stellingen afleiden die grote overeenkomst vertonen met die welke gelden voor de bepaalde integraal van een begrensde, continue functie die gedefinieerd is op $I \subset \mathbb{R}$.

14. OPLOSSINGSMETHODE MET BEHULP VAN DE KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING
Aan de hand van een voorbeeld geven we een indruk van de wijze waarop een lineaire homogene differentievergelijking met constante coëfficiënten kan worden opgelost. Daartoe gaan we uit van de differentievergelijking

$$a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0.$$

Deze schrijven we in operatorvorm als volgt

$$(E^3 - 9E^2 + 26E - 24)a_n = 0.$$

(Hiermee is dus de operator tussen de haakjes gedefinieerd!) Het pendant van deze differentievergelijking is in de analyse de differentiaalvergelijking

$$y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$$

en de daarmee corresponderende schrijfwijze met behulp van de differentiaaloperator D is

$$(D^3 - 9D^2 + 26D - 24)y = 0.$$

Deze differentiaalvergelijking lossen we op door de differentiaaloperator te ontbinden

$$(D - 2)(D - 3)(D - 4)y = 0$$

met behulp van de wortels van de karakteristieke vergelijking $D^3 - 9D^2 + 26D - 24 = 0$. Wanneer we bedenken dat

$$(D - \alpha)e^{\alpha x} = 0$$

dan zien we de oplossingen: e^{2x} , e^{3x} en e^{4x} , die over $\mathbb{C}$ lineair onafhankelijk zijn, zodat we de algemene oplossing

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{4x}$$

hebben. Op analoge wijze ontbinden we de E -operator en vinden dan

$$(E-2)(E-3)(E-4)a_n = 0.$$

Wanneer we nu bedenken dat $(E-\alpha)\alpha^n = 0$, dan zien we de oplossingen $2^n, 3^n, 4^n$ die over het lichaam van de ω -functies onafhankelijk zijn, zodat de algemene oplossing van de gegeven differentievergelijking luidt (zie ook par. 5, St. 4)

$$\omega_1(n)2^n + \omega_2(n)3^n + \omega_3(n)4^n$$

met ω_i 'ω-functies', die uit de beginvoorwaarden zijn te bepalen. Op de ω-onafhankelijkheid zal Prof. Duparc in zijn voordracht nader ingaan. Het is duidelijk dat deze methode (de methode van de karakteristieke vergelijking) te generaliseren is voor een lineaire homogene differentievergelijking met constante coëfficiënten van willekeurige orde m zolang deze m verschillende wortels heeft. Wanneer de karakteristieke vergelijking complexe wortels heeft, dan komen die in paren onderling toegevoegd complexe wortels voor. Laat zo'n paar zijn $\alpha = a + bi$ en $\bar{\alpha} = a - bi$ oftewel $\alpha = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ en $\bar{\alpha} = R(\cos\phi - i\sin\phi)$, dus

$$\alpha^n = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

en

$$\bar{\alpha}^n = R^n(\cos n\phi - i\sin n\phi).$$

Dan is $\omega_1 \alpha^n + \omega_2 \bar{\alpha}^n$ te schrijven als $\omega_1^* R^n \cos n\phi + \omega_2^* R^n \sin n\phi$. Wanneer de karakteristieke vergelijking een k -voudige wortel heeft ($k \geq 2$), dan krijgt men op deze manier minder dan m verschillende oplossingen en dus te weinig om een algemene oplossing te kunnen construeren. In dat geval moeten we onze toevlucht nemen tot pseudo-machten. Daartoe merken we allereerst op dat

$$\begin{aligned} (E-\alpha)n^{(t)}\alpha^n &= (n+1)^{(t)}\alpha^{n+1} - n^{(t)}\alpha^{n+1} = \{(n+1)^{(t)} - n^{(t)}\}\alpha^{n+1} \\ &= tn^{(t-1)}\alpha^{n+1} \quad (\text{zie par. 9}) \end{aligned}$$

waaruit men algemeen afleidt

$$(E-\alpha)^i n^{(t)}\alpha^n = t(t-1)(t-2)\cdots(t-i+1)n^{(t-i)}\alpha^{n+i}$$

d.w.z.

$$(E-\alpha)^i n^{(t)}\alpha^n = 0 \quad t=0, t=1, \dots, t=i-1$$

en dat levert bij een k -voudige wortel van de karakteristieke vergelijking de k oplossingen van de differentievergelijking:

$$\alpha^n, n\alpha^n, n^{(2)}\alpha^n, \dots, n^{(k-1)}\alpha^n$$

die lineair zijn uit te drukken in $\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \dots, n^{k-1}\alpha^n$. Pakt men het probleem op deze wijze aan, ook in het geval waarin de karakteristieke vergelijking meerdere meervoudige wortels heeft, dan verkrijgt men steeds evenveel verschillende oplossingen als de orde van de differentievergelijking bedraagt en deze blijken een ω-onafhankelijk stelsel te vormen. Voor de

volledige oplossing van een *inhomogene* lineaire differentievergelijking met constante coëfficiënten is blijkens par. 5 St. 9 een particuliere oplossing nodig. Deze vindt men vaak door gewoon 'proberen'.

15. OPLOSSINGSMETHODE MET BEHULP VAN GENERERENDE FUNCTIES

Allereerst de definitie van een genererende (voortbrengende) functie.

Een genererende functie $A(x)$ van een getallenrij (a_n) is een functie waarvan de machtreeksontwikkeling naar x , juist de getallen a_n (in dezelfde volgorde) als coëfficiënten heeft. In formule

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zo zijn de genererende functies van de rijen, gedefinieerd door $a_n = 1$; $a_n = n$; $a_n = \frac{1}{n!}$ resp.

$$\frac{1}{1-x}; \frac{x}{(1-x)^2}; e^x.$$

Ook nu lichten we de methode toe aan de hand van een voorbeeld en wel de differentievergelijking die in par. 3b werd afgeleid i.v.m. het aantal delen waarin de daar gedefinieerde ovals het platte vlak verdelen. Deze differentievergelijking luidt als volgt

$$a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n \geq 1; a_1 = 2).$$

Dit is dus een lineaire, inhomogene differentievergelijking met constante coëfficiënten. We definiëren nu de genererende functie $A(x)$ door

$$A(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Indien we de differentievergelijking links en rechts vermenigvuldigen met x^{n+1} , krijgen we

$$a_{n+1} x^{n+1} = a_n x^{n+1} + 2n x^{n+1}.$$

Sommatie van 1 tot ∞ geeft:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{n+1}$$

en dus

$$A(x) - a_1 x = x A(x) + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$(1-x)A(x) = 2x + 2x \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Nu geldt

$$\frac{2x}{1-x} = 2x\{1+x+x^2+\dots\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$$

en

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{(1-x)^3} &= 2x^2(1-x)^{-3} = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \binom{-3}{n} (-1)^n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} 2 \binom{-3}{n-2} (-1)^{n-2} x^n \end{aligned}$$

dus

$$A(x) = 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \{2 + 2 \binom{-3}{n-2} (-1)^{n-2}\} x^n$$

dus

$$a_1 = 2$$

$$a_n = 2 + 2 \frac{(-3)(-4) \cdots (-n)}{1 \cdot 2 \cdots (n-2)} (-1)^n = 2 + (n-1)n \quad (n \geq 2).$$

Tezamen

$$a_n = 2 + n(n-1) \quad (n \geq 1).$$

Dit is een eenvoudige methode die het bepalen van een particuliere oplossing omzeilt. Deze methode is het analogon van het oplossen van een differentiaalvergelijking d.m.v. reeksontwikkelingen en is ook vaak toepasbaar op niet-lineaire differentievergelijkingen. Het verband tussen deze methode en de z-transformatie zal in de voordracht van Prof. Duparc aan de orde komen.

Lineaire Differentievergelijkingen met Constance Coëfficiënten

H.J.A. Duparc
Insulindeweg 26
2612 EM Delft

1. INLEIDING

De theorie van de differentiaalvergelijkingen wordt gewoonlijk begonnen met het geven van de meest algemene vorm

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ky}{dx^k}) = 0$$

van een differentiaalvergelijking van de orde k . Daaraan worden dan beschouwingen gekoppeld over de algemene oplossing $y=y(x)$ met haar k vrijheidsgraden en over het voorschrijven van verdere voorwaarden (beginvoorwaarden, randvoorwaarden), die al dan niet voeren tot één ondubbelzinnig bepaalde oplossing. Op eenzelfde wijze kan men de theorie van de differentievergelijkingen beginnen met het geven van de meest algemene vorm

$$F(x, u, \Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^k u) = 0 \quad (1)$$

van een differentievergelijking van de orde k . Het gaat daarbij meestal om het vinden van een oplossing $u=u(x)$, voor gehele $x(=n)$, ook wel geschreven $u=u_n$, die aan (1) voldoet. Alvorens hierop verder in te gaan, is het nuttig de vergelijking (1) op grond van de relatie $\Delta u = Eu - u = (E - 1)u$ om te werken tot een vergelijking van het type

$$G(x, u, Eu, E^2u, \dots, E^ku) = 0 \quad (2)$$

een omwerking die in de theorie van de differentiaalvergelijkingen principieel ontbreekt.

De formule (2) leert ons dat bij gegeven $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ in principe $u(k)$ te berekenen is, waarna - uitgaande van $u(1), \dots, u(k)$ - dat evenzeer het geval is met $u(k+1)$, enz. Blijkbaar zijn dus k beginvoorwaarden $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ (ofwel $u(0), \Delta u(0), \dots, \Delta^{k-1}u(0)$) voldoende om de

oplossing $u = u(n) = u_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ te vinden. Hierbij dient nog te worden opgemerkt dat eenzelfde redenering mogelijk is als men voor willekeurige a de waarden van $u(a), u(a+1), \dots, u(a+k-1)$ geeft, waarna in principe $u(a+n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ te vinden is. Voortgaande op deze laatste gedachte, toegepast voor alle a met $0 \leq a < k$, ziet men dat $u(x)$ voor alle $x \geq 0$ in principe te vinden is zodra de waarde van $u(x)$ gegeven is voor $0 \leq x < k$. Hierbij dient te worden opgemerkt dat de uit (2) te vinden waarde van $u(k)$ geenszins behoeft te voldoen aan

$$u(k) = \lim_{x \uparrow k} u(x)$$

aangenomen dat die laatste limiet bestaat. Dat laatste spreekt overigens ook niet vanzelf, want de gegeven waarden van $u(x)$ in het interval $0 \leq x < k$ behoeven a priori geen continue functie weer te geven. En als die functie wel continu is, leert het bovenstaande dat $u(x)$ nog niet continu behoeft te zijn voor $x = k$, evenmin dan voor $x = k+1$, enz.

Moeizame existentietheorema's zoals in de theorie van de differentiaalvergelijkingen, ontmoet men in de theorie der differentievergelijkingen dus niet, aangenomen natuurlijk dat $u(x+k)$ uit (2) oplosbaar is. De keerzijde van de medaille is dat de oplossingen minder fraaie eigenschappen (in casu discontinuïteiten) kunnen bezitten.

Tot slot dient in het kader van eerdere voordrachten nog te worden opgemerkt dat in plaats van de k constanten $c_1, \dots, c_k$ die optreden in de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking van de graad k , bij de analoge differentievergelijkingen k willekeurige periodieke functies $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$ optreden in de algemene oplossing.

Wij illustreren een en ander aan de vergelijking

$$\Delta u = 3x. \quad (3)$$

Men vindt achtereenvolgens

$$u_1 = u_0$$

$$u_2 = u_1 + 3 = u_0 + 3$$

$$u_3 = u_2 + 6 = u_0 + 9$$

.

.

$$u_n = u_{n-1} + 3(n-1) = u_0 + \frac{3}{2}n(n-1).$$

Gaat men in het algemeen uit van een beginwaarde $u(a)$, dan vindt men op analoge wijze

$$u(a+n) = u(a) + 3(na + \frac{1}{2}n(n-1)).$$

Opgave 1. Ga dit na.

Opgave 2. Controleer door substitutie dat deze functie voldoet aan (3).

Opgave 3. Ga na onder welke voorwaarde de oplossing van (3) continu is bij gegeven $u(a)$ voor $0 \leq a < 1$.

Iets anders verloopt het oplossen van de differentievergelijking

$$x\Delta u = 3. \quad (4)$$

Het is duidelijk dat het voor $x=0$ niet mogelijk is $u(x+1)$ uit te drukken in $u(x)$. Het punt $x=0$ heet - net als in de theorie van de differentiaalvergelijkingen - een singulier punt en uit die theorie weet men dat het dan oplossen geblazen is. Gaat men echter uit van $u(a)$ met $a > 0$, dan is vergelijking (4) wel op te lossen. Men vindt

$$u(a+n) = u(a) + 3 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{a+v}.$$

Bij vergelijking (3) valt nog op te merken dat, zodra één oplossing $u^*(x)$ bekend is, voor de algemene oplossing geldt

$$\Delta u = 3x; \quad \Delta u^* = 3x$$

dus

$$\Delta(u - u^*) = 0.$$

Dus $u - u^*$ is een periodieke functie, $\omega(x)$, en $u(x) = u^*(x) + \omega(x)$.

Op deze gedachtengang, die herinnert aan soortgelijke bij inhomogene lineaire differentiaalvergelijkingen, komen we in het vervolg nog terug.

Thans nog enkele opmerkingen over een globale indeling van het vakgebied van de differentievergelijkingen. Deze indeling zouden wij kunnen ontleenen aan de indeling van het gebied van de differentiaalvergelijkingen. Dat voert onder meer tot de volgende onderwerpen:

- I. Homogene vergelijkingen van de eerste orde;
- II. Exacte vergelijkingen;
- III. Lineaire vergelijkingen van de eerste orde;
- IV. Lineaire vergelijkingen van hoger orde;

waarbij nog onderscheid wordt gemaakt tussen homogene en inhomogene en tussen de gevallen dat de coëfficiënten al dan niet constant zijn. Enkele hierbij optredende gevallen treden ook op bij de rubrieken I, II of III.

In het kader van deze vacanti cursus lijkt het niet zo zinvol om lang stil te staan bij de rubrieken I, II en III, maar wel om ons op het grote lokaas, de rubriek IV, te richten. Daarbij komt vanzelf de vraag aan de orde of er in analogie met de theorie van de Laplace-transformaties bij het oplossen van lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten een verwant even nuttig hulpmiddel is. Gelukkig blijkt dit het geval te zijn: het is de z -transformatie, waaraan wij in een intermediair hoofdstuk wat aandacht zullen geven, alvorens nader in te gaan op het oplossen van differentievergelijkingen van het type IV en hun toepassingen in andere gebieden.

2. DE z-TRANSFORMATIE

Alvorens de definitie van de z-transformatie te geven, herinneren wij even aan de Laplace-transformatie. Deze ontstaat door transformatie van een gegeven functie $f(x)$, in een functie $F(s)$ door middel van de integraal

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Ter wille van het dempen eist men daarbij $s \geq 0$, c.q. $\text{Re } s \geq 0$. Natuurlijk moet de functie $f(x)$ aan bepaalde voorwaarden voldoen wil die Laplace-getransformeerde bestaan; soms leidt dat tot verdere eisen voor de variabele s . Van de rekenregels die voor Laplace-transformaties gelden, noemen wij er enkele:

$$\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f) \quad (c \text{ constant})$$

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

Veelal geldt ook

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f) = 0.$$

De derde regel is er oorzaak van dat Laplace-transformaties van nut zijn voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Voorts pleegt men een tabel te maken van een aantal elementaire functies en hun Laplace-getransformeerden.

Ten slotte wijzen wij op een rekenregel bij Laplace-transformaties waar het begrip convolutie een rol speelt. De analogie van de tweede rekenregel voor een produkt van twee functies $f(x)$ en $g(x)$ gaat niet door; in het algemeen geldt helaas

$$\mathcal{L}(fg) \neq \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Men kan zich daarom afvragen of er een functie $h(x)$ bestaat waarvoor geldt

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

Na enig rekenwerk blijkt dat

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

kortweg wel geschreven $h = f * g$; men noemt dit nieuw ingevoerde 'produkt' ook wel de convolutie van f en g .

Wat de Laplace-transformaties betreft, willen wij het laten bij deze korte opsomming. Wij gaan nu over tot de behandeling van het discrete analogon van de Laplace-transformatie, dat men z-transformatie noemt.

Bij een rij u van getallen $u_1, u_2, \dots$ wordt de z-transformatie - enigermate verwant aan de Laplace-transformatie - gedefinieerd door de formule

$$Z(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{-n}.$$

De analogie valt duidelijk op: de integraal uit 'de continue analyse' wordt (natuurlijk) een som, de dempende e -macht wordt een gewone macht (waarvoor ter wille van de demping moet gelden $|z| \geq 1$). De volgende rekenregels zijn duidelijk

$$Z(cu) = cZ(u) \quad (c \text{ constant});$$

$$Z(u+v) = Z(u) + Z(v).$$

Verder geldt

$$\begin{aligned} Z(Eu) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} z^{-n} = z \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} z^{-n-1} \\ &= z \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{-n} - u_1/z \right] = zZ(u) - u_1. \end{aligned}$$

Veelal geldt de relatie

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(u) = 0.$$

Het is de derde relatie die de transformatie van belang doet zijn voor het oplossen van differentievergelijkingen met constante coëfficiënten.

Tenslotte vermelden we nog de convolutie-eigenschap

$$Z(w) = Z(u)Z(v)$$

waarbij

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k}.$$

Opgave 4. Ga dit na.

Er is nog een symbolische schrijfwijze voor de convolutie die soms ook van nut kan zijn. Uit

$$Z(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{-n}$$

volgt wegens

$$u_n = E^{n-1} u_1$$

de formule

$$\begin{aligned} Z(u) &= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} E^{n-1} z^{1-n} u_1 \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-E/z} u_1 = \frac{1}{z-E} u_1. \end{aligned}$$

Bezorgdheid over de toelaatbaarheid van een en ander in strak-analytische zin is ons hierbij vreemd. Wel is het natuurlijk duidelijk dat - als bovenstaand gegoochel toelaatbaar is - verder mag worden geconcludeerd tot

$$(z - E)Z(u) = u_1$$

dus

$$Z(Eu) = z Z(u) - u_1$$

geheel in overeenstemming met het eerder gevondene.

Opgave 5. Ga na of er een verwante symbolische formule voor Laplace-getransformeerden bestaat.

Net als in de theorie van de Laplace-transformaties is het nodig om voor de z -transformaties, naast de hierboven gegeven algemene regels, een tabel te maken van een aantal elementaire functies en hun getransformeerden. Hieronder volgen enkele nuttige formules.

u_n	Zu_n	
a^n	$\frac{a}{z-a}$	$ z > a $
$n^{(k)}$	$\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}$	$ z > 1$
$n^{(k)}a^n$	$\frac{k!za^k}{(z-a)^{k+1}}$	$ z > a $
$\cos na$	$\frac{z \cos a - 1}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z > 1$
$\sin na$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z > 1$

Opgave 6. Bewijs de bovenstaande formules.

3. DE LINEAIRE DIFFERENTIEVERGELIJKING MET CONSTATE COËFFICIËNTEN

Alvorens de in de titel genoemde problematiek aan te pakken, gaan wij even te rade bij de analoge theorie van de differentiaalvergelijkingen, die wij - al is die nu found moeilijker - merkwaardigerwijze al beheersen. Beschouw ter illustratie eens de differentiaalvergelijking

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

In de dagen dat iedereen bij het secundair onderwijs nog een redelijke hoeveelheid Frans moest leren, verbaasde geen student zich er over dat men deze vergelijking in operatorenvorm

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0 \quad (5)$$

schreef, waarbij de D een soort afkorting was voor het begrip (fonction) derivée. Toen leerde men ook kwadratische vormen te ontbinden en kon men de vergelijking (5) in de gedaante

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$$

schrijven. Elke oplossing van de vergelijking

$$(D - \beta)y = 0$$

is dus een oplossing van (5), maar uiteraard niet omgekeerd. Zo'n oplossing kan men als volgt vinden. Uit $y' = \beta y$ volgt $\frac{y'}{y} = \beta$, dus $\ln|y| = \beta x + c$, waaruit tenslotte het welbekende resultaat

$$y = c_1 e^{\beta x}$$

volgt. De algemene oplossing van (5) vindt men vervolgens als lineaire combinatie van basisoplossingen van het hier gevonden type. Deze laatste bewering geldt ook voor lineaire homogene differentiaalvergelijkingen met niet-constante coëfficiënten, zij het dat de basisoplossingen dan meestal van een andere structuur zijn.

Beschouwen wij eens het analoge geval van de lineaire differentievergelijking met constante coëfficiënten

$$(E^2 + a_1 E + a_2)u = 0. \quad (6)$$

Schrijft men deze in de gedaante

$$(E - \alpha)(E - \beta)u = 0$$

dan is iedere oplossing van

$$(E - \beta)u = 0$$

zeker een oplossing van (6). Dit brengt ons op het spoor van die oplossing. Immers men heeft

$$Eu = \beta u, E^2 u = E(\beta u) = \beta Eu = \beta^2 u, E^3 u = \beta^3 u, \dots, E^n u = \beta^n u.$$

Dus

$$u_n = \beta^n u_0$$

en algemener

$$u(a+n) = \beta^n u(a).$$

Door het lineaire karakter van (6) vindt men op de gebruikelijke wijze een oplossing van de gedaante

$$u_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n$$

en algemener

$$u(a+n) = c_1 x^n + c_2 \beta^n.$$

Het is dan nog maar een korte stap om te concluderen tot

$$u(x) = \omega_1(x)\alpha^x + \omega_2(x)\beta^x$$

waarbij $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ hier (evenals in het vervolg) ω -functies zijn.

Opgave 7. Verifieer dat de laatstgevonden uitdrukking voldoet aan de differentievergelijking (6).

Voor niet-reële α en β kan men op de gebruikelijke manier het laatstgevonden resultaat omvormen tot een volledig reël geschreven formule (aangenomen natuurlijk dat a_1 en a_2 reël zijn). Voorts is er nog de bekende complicatie van het geval $\alpha = \beta$. Als eerste basisoplossing heeft men dan uiteraard α^x en alweer net als in 'de continue theorie' vindt men voor een tweede basisoplossing $x\alpha^x$.

Opgave 8. Ga dat na.

In het bovenstaande traden ω -functies op. Wij gaan er hier wat nader op in. Voor het gemak illustreren wij de bijbehorende theorie aan een speciaal geval.

Men noemt drie functies $u(x), v(x), w(x)$ ω -afhankelijk als er drie ω -functies $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)$ bestaan die niet alle drie identiek nul zijn, zodanig dat

$$\omega_1(x)u(x) + \omega_2(x)v(x) + \omega_3(x)w(x) = 0$$

voor alle x (in een zeker gebied). Uit deze relatie volgt

$$\omega_1(x)u(x+1) + \omega_2(x)v(x+1) + \omega_3(x)w(x+1) = 0$$

en

$$\omega_1(x)u(x+2) + \omega_2(x)v(x+2) + \omega_3(x)w(x+2) = 0.$$

Dus na eliminatie van de ω -functies

$$C(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(x+1) & v(x+1) & w(x+1) \\ u(x+2) & v(x+2) & w(x+2) \end{vmatrix} = 0.$$

De determinant $C(x)$, determinant van Casorati genoemd, speelt hier de rol van de verwante determinant van Wronski uit 'de continue analyse'.

Omgekeerd geldt: Als in zeker gebied geldt $C(x)=0$, dan zijn de betrokken functies u, v en w ω -afhankelijk. De volgende redenering kan ons dat globaal doen begrijpen. Uit het nul-zijn van $C(x)$ kan men concluderen dat de onderdeterminanten $U(x), V(x), W(x)$ van de elementen van de eerste rij voldoen aan

$$U(x)u(x+k) + V(x)v(x+k) + W(x)w(x+k) = 0, \quad (k=0,1,2)$$

maar ook dat geldt

$$U^*(x)u(x+k) + V^*(x)v(x+k) + W^*(x)w(x+k) = 0, \quad (k=0,1,2)$$

waarbij $U^*(x)$, $V^*(x)$ en $W^*(x)$ de onderdeterminanten zijn van de elementen van de laatste rij van $C(x)$. Het is direct duidelijk dat

$$U(x) = EU^*(x) \quad \text{enz.}$$

zodat de coëfficiënten U , V en W in de relatie

$$U(x)u(x) + V(x)v(x) + W(x)w(x) = 0 \quad (7)$$

voldoen aan

$$U^*(x) = EU(x), \quad V^*(x) = EV(x), \quad W^*(x) = EW(x)$$

waaruit in het geval dat de matrix $C(x)$ de rang 2 heeft volgt dat in de relatie (7) de coëfficiënten ω -functies zijn.

Opgave 9. Ga na of een dergelijk bewijs mogelijk is in het geval van 'de continue analyse' bij de theorie van de determinant van Wronski.

Beschouwen wij thans nog eens de algemene lineaire homogene differentievergelijking, al dan niet met constante coëfficiënten

$$Lu = (E^2 + a_1 E + a_2)u = 0.$$

Laten $v(x)$ en $w(x)$ hiervan 2 lineair ω -onafhankelijke oplossingen zijn en $u(x)$ een willekeurige oplossing. Uit

$$Lu = 0, \quad Lv = 0, \quad Lw = 0$$

volgt dan door eliminatie van a_1 en a_2 de relatie

$$C(x) = 0.$$

Dus u, v en w zijn ω -afhankelijk, i.e.

$$\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w = 0.$$

Daar v en w ω -onafhankelijk zijn, geldt $\omega_1 \neq 0$, dus

$$u = -\frac{\omega_2}{\omega_1} v - \frac{\omega_3}{\omega_1} w$$

waarmee de algemene structuur van de oplossing van $Lu = 0$ is gevonden.

Als toepassing van het bovenstaande geven wij een approximatiemethode voor het oplossen van bepaalde hogeregraadsvergelijkingen. Veronderstel dat van de vergelijking met wortels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

één wortel de grootste absolute waarde heeft, zodat men kan stellen

$$|\alpha_1| > |\alpha_r|, \quad (r=2, \dots, k).$$

Beschouw nu een differentievergelijking

$$f(E)u_n = 0$$

waarvan de algemene oplossing luidt

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + \dots + c_k \alpha_k^n.$$

Het is niet moeilijk een oplossing te vinden met $c_1 \neq 0$. Kies daartoe bijvoorbeeld als beginvoorwaarden

$$u_0 = u_1 = \dots = u_{k-2} = 0; u_{k-1} = 1.$$

Opgave 10. Ga dat na.

Dan heeft men vervolgens

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c_1 \alpha_1^{n+1} + \dots + c_k \alpha_k^{n+1}}{c_1 \alpha_1^n + \dots + c_k \alpha_k^n}.$$

Dus wegens $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_k / \alpha_1)^n = 0$ voor $k = 2, \dots, k$ kan men concluderen tot het nuttige resultaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_1.$$

De lezer zal stellig hebben vastgesteld dat dit bewijs een modificatie vereist indien onder de wortels $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ gelijke optreden, maar dat in wezen de redenering gehandhaafd kan blijven.

Opgave 11. Controleer dat.

Wij illustreren een en ander aan de rij van Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n; u_0 = 0; u_1 = 1 \quad (8)$$

met de vereiste eigenschappen (de goede beginvoorwaarden; geen dubbele wortels en wat betreft de nulpunten $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ van de karakteristieke vergelijking de relatie $|\alpha| > |\beta|$). Men heeft dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Het bovenstaande geeft ons nog geen schatting voor het verschil tussen $q_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ en α . Dat kan men op de volgende wijze vinden. Uit (8) volgt

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}.$$

Verder heeft men

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

dus

$$q_{n+1} - \alpha = \frac{1}{q_n} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - q_n}{\alpha q_n}.$$

Hieruit volgt en passant dat $q_n < \alpha$ voert tot $q_{n+1} > \alpha$, zodat α wordt ingesloten door q_n en q_{n+1} . Voor het verschil $\delta_n = |q_n - \alpha|$ heeft men

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n}{q_n \alpha}.$$

Uit $q_n > \frac{3}{2}$, $\alpha > \frac{3}{2}$ (er zijn natuurlijk betere schattingen mogelijk) volgt dan

$$\delta_{n+1} < \frac{\delta_n}{(\frac{3}{2})^2} < \frac{\delta_n}{2}$$

zodat

$$\delta_n = |q_n - \alpha| < \frac{|q_1 - \alpha|}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^n}.$$

Zo geldt dus zeker in 2 decimalen nauwkeurig

$$\alpha = q_7 \approx \frac{u_8}{u_7} = \frac{21}{13}$$

hetgeen leidt tot de lang niet slechte benadering $\frac{29}{13}$ voor $\sqrt{5}$.

Wij vermelden nu nog een eigenschap van de inhomogene lineaire differentievergelijking al dan niet met constante coëfficiënten

$$L(u) = (E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k)u(x) = r(x).$$

Is hiervan één particuliere oplossing $u^*(x)$ bekend, dan heeft men voor de algemene oplossing $u(x)$ de relaties $L(u) = r(x)$ en $L(u^*) = r(x)$, dus $L(u - u^*) = L(u) - L(u^*) = 0$, waaruit volgt dat $u - u^*$ een oplossing $u_H(x)$ is van de homogene vergelijking $L(u) = 0$. Dus heeft men $u = u^* + u_H$, analoog aan het welbekende resultaat bij inhomogene differentiaalvergelijkingen.

Wij laten ook nog even zien hoe men de differentievergelijking

$$f(E)u_n = 0$$

met $f(E) = E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k$, waarbij $a_1, \dots, a_k$ constant zijn, met behulp van de z -transformatie kan oplossen. Uit

$$Z(Eu) = zZ(u) - u_1, \quad Z(E^2u) = z^2Z(u) - zu_1 - u_2, \dots$$

volgt na herleiding van

$$Z(f(E)u_n) = 0$$

de betrekking

$$f(z)U = G$$

waarbij $U = Zu$ en waarbij G een polynomiale functie is van $u_1, \dots, u_k$; $a_1, \dots, a_k$. In feite geldt

$$G(z) = \frac{f(z) - f(E)}{z - E} u_1.$$

Opgave 12. Ga dat na.

Door terugtransformatie van de relatie

$$U = Z(u) = \frac{G(z)}{f(z)}$$

vindt men dan de oplossing van de differentievergelijking met beginvoorwaarden $u_1, \dots, u_k$. Dat kan ook via de convolutietheorie. Men concludeert namelijk uit

$$Z(u) = G(z) \cdot \frac{1}{f(z)}$$

dat

$$u = g \star \phi$$

waarbij de functies g en ϕ door terugtransformatie te vinden zijn uit

$$Z(g) = G; \quad Z(\phi) = \frac{1}{f}.$$

Voor de corresponderende inhomogene differentievergelijking

$$f(E)u_n = r(n)$$

bestaat een verwante oplossingsmethode. Toepassing van de z -transformatie op beide leden van de vergelijking voert tot

$$f(z)U = G(z) R(z)$$

waarbij $U = Z(u)$ en $R = Z(r)$. Dus

$$U = \frac{G(z)}{f(z)} + \frac{R(z)}{f(z)}.$$

Terugtransformatie voert tot

$$u = u_H + u_P$$

waarbij (alweer!) u_H een oplossing is van de bijbehorende homogene vergelijking en u_P als particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking voldoet aan

$$Z(u_P) = \frac{1}{f(z)} \cdot R(z)$$

dus

$$u_P = \phi \star r$$

met

$$Z(\phi) = \frac{1}{f(z)}.$$

Wij besluiten dit hoofdstuk met enkele losse opmerkingen.

Bij een lineaire differentievergelijking van de k -de orde met niet-constante coëfficiënten

$$f(E)u_n = r_n$$

geldt behalve de al genoemde eigenschap dat de oplossing u voldoet aan

$$u = u_H + u_P,$$

ook nog de eigenschap dat u_H een lineaire ω -combinatie is van k basisoplossingen. Analoog aan de theorie van Frobenius voor differentiaalvergelijkingen zijn die oplossingen te vinden met reeksontwikkelingen. Ook geldt er een theorie over singuliere punten en het onderscheid tussen regulier en niet-regulier singuliere punten met alle bijbehorende complicaties. Het valt gelukkig buiten het bestek van deze cursus daarop nader in te gaan.

Een verdere opmerking betreft het feit dat lineaire differentievergelijkingen ook op te vatten zijn als recurrente relaties. Zo kwam de rij van Fibonacci reeds bij twee voordrachten ter sprake, met onderling verschillend étiquet. Op bepaalde recurrente relaties willen wij nog ingaan in de volgende paragraaf.

4. RECURRENTE RELATIES IN EINDIGE LICHAMEN

Interessant zijn toepassingen van het bovenstaande waarbij de optredende variabelen niet in het lichaam der reële of complexe getallen liggen maar in het lichaam Z_p (p priem). Daarbij speelt het geval $p=2$ een belangrijke rol, maar eerst geven we de theorie voor willekeurige ondeelbare p .

Daar van de vergelijking

$$f(E)u_n = 0,$$

waarbij het polynoom $f(E)$ een element is van $Z_p[E]$ van de graad k , de oplossingen u_n in Z_p worden bepaald door de gegeven coëfficiënten van $f(E)$ en k beginvoorwaarden $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ (in aantal zijn er daarvoor slechts eindig veel, namelijk p^k mogelijkheden), moet de rij $u_0, u_1, \dots$ zich na ten hoogste p^k stappen herhalen. De rij is dus periodiek en heeft een periode $C_p \leq p^k$, ja zelfs $C_p \leq p^k - 1$, want de beginwaarden $u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$ leveren de nul-rij met periode 1 op. Het kan zijn dat bij een bepaalde keuze van de beginvoorwaarden de rij een kleinere periode dan $p^k - 1$ heeft. Bekijkt men alle aldus te vinden perioden (van deeltcycli), inclusief de nulcyclus, dan zijn deze perioden tezamen gelijk aan p^k . Is er behalve de nulcyclus slechts één verdere (met periode $p^k - 1$ dus), dan noemt men die cyclus ook wel een rij met maximale lengte.

Om de periode C van een rij te vinden, schrijft men de relatie

$$u_{n+c} = u_n$$

in de gedaante

$$(E^C - 1) u_n = 0.$$

Het gaat dan blijkbaar om een verband tussen $f(E)$ en $E^C - 1$. Nu is uit de theorie van de eindige lichamen bekend dat voor een in $Z_p[E]$ irreducibele veelterm $f(E)$ van de graad k geldt dat

$$E^{p^k-1} - 1$$

deelbaar is door $f(E)$, m.a.w.

$$E^{p^k-1} - 1 = Q(E)f(E).$$

Dus

$$(E^{p^k-1} - 1)u_n = Q(E)f(E)u_n = 0.$$

De rij heeft dus zeker een periode $p^k - 1$. Het kan zijn dat de (kleinste) periode C_f kleiner is dan $p^k - 1$, maar wel moet dan volgens een algemene eigenschap van perioden gelden

$$C_f \mid p^k - 1.$$

Opgave 13. Bewijs dat.

Bij een reducibele $f(E)$ in $Z_p[E]$ is de periode van het bijbehorende proces te vinden uit de perioden van de irreducibele delers van $f(E)$. Is bijvoorbeeld $f(E) = g(E)h(E)$ met $g \neq h$, dan geldt voor de perioden

$$C_f = \text{KGV}(C_g, C_h).$$

Opgave 14. Bewijs dat.

Op verdere complicaties hierbij gaan we niet in. Interessant is het geval $p = 2$. Voor irreducibele $f(E)$ van de graad k , in $Z_2[E]$ heeft men dan

$$C_f \mid 2^k - 1.$$

Indien k zo genomen wordt dat $2^k - 1 = M_k$ een ondeelbaar getal van Mersenne is, concludeert men dat

$$C_f = 2^k - 1$$

tenzij men neemt $u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$. Ook het omgekeerde is waar. Is $C_f = 2^k - 1$ dan is f irreducibel. Wij geven een voorbeeld voor $k = 5$ en nemen

$$f(E) = E^5 + E^2 + 1.$$

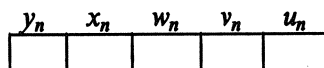
Opgave 15. Ga na dat $E^5 + E + 1$ irreducibel is in $Z_2[E]$.

De aldus gegenereerde rij getallen u_n heeft, omdat $2^5 - 1$ ondeelbaar is, de periode $2^5 - 1 = 31$.

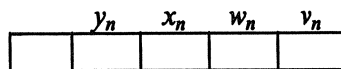
Opgave 16. Ga dat na door uitschrijven van de bedoelde rij.

In de schakeltechniek wordt een en ander in de praktijk verwezenlijkt met behulp van schuifregisters met terugkoppeling. Wij illustreren dit aan het beschouwde voorbeeld.

Men gaat uit van een schuifregister met 5 secties, d.w.z. 5 hokjes, waarbij op het moment n in elk der hokjes een cijfer 0 of 1 zit.



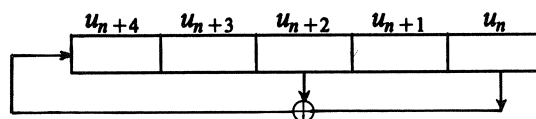
Het meest rechtse hokje bevat het element u_n . Na een puls schuiven alle inhoudende een plaats naar rechts. Het element u_n verdwijnt dus uit het register en het meest linkse vakje dreigt leeg te worden.



Kennelijk geldt $v_n = u_{n+1}$; en analoog concludeert men dan verder tot $w_n = u_{n+2}$, $x_n = u_{n+3}$, $y_n = u_{n+4}$. Om het register niet leeg te laten lopen, dient een getalwaarde u_{n+5} aan het meest linkse hokje te worden gegeven. Doet men dit door optelling (in Z_2) van u_n en u_{n+2} , dus door de formule

$$u_{n+5} \equiv u_{n+2} + u_n \pmod{2}$$

dan krijgt men de bovenbesproken rij getallen u_n . De optelformule voor u_{n+5} geven wij in het schema weer door terugkoppeling



waarbij het plusteken in het kringetje de bedoelde optelling mod 2 weergeeft.

Het is nu niet moeilijk andere dergelijke processen 'in kaart' te brengen. Neemt men daarbij k groter, maar zo dat $f(E)$ irreducibel is in $Z_2[E]$ en zó dat $M_k = 2^k - 1$ een priemgetal is, dan ontstaat een rij nullen en enen met de zeer lange periode $2^k - 1$. Statistici hebben daarbij de verwachting dat deze rij gelijkenis vertoont met een echte aselechte rij nullen en enen. Wij weten beter: de rij heeft een periode (weliswaar een zeer grote periode); men noemt haar pseudo-aselect. Hoe groter k hoe kleiner het onderscheid wordt tussen aselechte en pseudo-aselecte rijen. Vandaar dus de jacht op steeds grotere ondeelbare getallen van Mersenne.

Onnodig te zeggen dat dergelijke rijen een veelvuldig gebruik hebben in

allerlei toepassingen. Wel dient hier te worden opgemerkt dat in vervolg op het bovenstaande natuurlijk verdergaande technieken bestaan om nog 'betere' aselechte rijen te produceren.

Speciale Differentievergelijkingen

F. van der Blij
Ruysdaellaan 6
3723 CC Bilthoven

1. INLEIDING

Een van de toepassingen van de wiskunde in de natuurwetenschappen is het doen van voorspellingen. Het voorspellen komt er vaak op neer dat een functie x van de tijd gegeven is voor $t \leq t_0$ en we de functiewaarden voor $t > t_0$ willen weten. Wanneer we ons tot analytische functies beperken, is dit het vraagstuk van de analytische voortzetting, die onder bepaalde regulariteitseisen eenduidig is. Wanneer we slechts oneindig vaak differentieerbaarheid veronderstellen (of minder) verdwijnt de eenduidigheid.

Soms is een modelbeschrijving van de aangroeiing verondersteld; dan kunnen we in bepaalde gevallen de voortzetting van de functie bepalen.

Zo'n model kan werken met een formule

$$x(t+h) = F[x(t), h, t]; \quad t \leq t_0, \quad 0 < h \leq h_0. \quad (1.1)$$

Wanneer x gegeven is voor $t \leq t_0$, dan wordt x door deze formule bepaald op $(t_0, t_0 + h_0]$. We willen ons hier beperken tot het geval dat geen principieel beginpunt in de tijd gefixeerd is. 'De klok één uur vooruitzetten heeft geen invloed op het groeien van het gras.' We beperken ons tot formules

$$x(t+h) = F[x(t), h]. \quad (1.2)$$

Voorbeelden:

$$x(t+h) = x(t) + \pi \cdot h$$

$$x(t+h) = x(t) \cdot \{x(t) - x(t-h)\}$$

enzovoort.

Er zijn nu twee methoden mogelijk. We kunnen het proces discreet beschrijven; dan fixeren we een tijdseenheid en beschouwen alleen waarden

van t , die een veelvoud van deze eenheid zijn. Gemakshalve kiezen we 1 als tijdseenheid. Dan wordt (1.2) nu

$$x(t+1) = F[x(t)]. \quad (1.3)$$

We schrijven dit ook als

$$x(t+1) - x(t) = G[x(t)] \quad (1.4)$$

en dit is een eerste orde differentievergelijking.

We kunnen het proces ook continu beschrijven. We voeren dan beschouwingen voor $h \rightarrow 0$ in. We beperken ons tot het geval dat

$$\lim_{h \downarrow 0} F[x(t), h] = x(t).$$

Dit is in het eerste boven gegeven voorbeeld wel, in het tweede niet het geval (tenzij ...). We veronderstellen zelfs nog meer

$$F[x(t), h] = x(t) + h \cdot G[x(t), h]$$

met voldoende 'nette' G . Nu voert (1.2) tot

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = G[x(t), h].$$

En limiet-overgang

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} G[x(t), h] = G[x(t)].$$

Gemakshalve beschouwen we dan verder de differentiaalvergelijking

$$x'(t) = G[x(t)]. \quad (1.5)$$

We zullen in het vervolg vaak de differentievergelijking (1.4) en de differentiaalvergelijking (1.5) naast elkaar stellen.

Voor de differentiaalvergelijking (1.5) lijkt een algemene theorie te bestaan. Uit (1.5) volgt

$$\begin{aligned} \frac{x'(t)}{G[x(t)]} &= 1, \\ \int_{t_0}^t \frac{x'(t) dt}{G[x(t)]} &= t - t_0, \\ \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{G[x]} &= t - t_0, \\ K[x(t)] - K[x(t_0)] &= t - t_0, \end{aligned}$$

waarin K een primitieve van $\frac{1}{G}$ is. Wanneer we een passende impliciete-functie-stelling mogen gebruiken, vinden we de expliciete oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x(t) = L[x(t_0), t - t_0].$$

Het lijkt mooier dan het in praktische toepassingen is. Is de primitieve in 'bekende' functies uit te drukken? Is de impliciete-functie-stelling zo toepasbaar dat een expliciet 'bekende' functie L optreedt?

Voor de differentievergelijking is theoretisch iets analoogs te doen met Stieltjes-integralen. Maar wat is het praktische nut?

Er zijn verschillende voor de hand liggende generalisaties. Allereerst stelsels zoals

$$\begin{cases} x(t+h) = F_1[x(t), y(t), h] \\ y(t+h) = F_2[x(t), y(t), h] \end{cases} \quad (1.6)$$

voerend tot differentievergelijkingen

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = G_1[x(t), y(t)] \\ y(t+1) - y(t) = G_2[x(t), y(t)] \end{cases} \quad (1.7)$$

of differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = G_1[x(t), y(t)] \\ y'(t) = G_2[x(t), y(t)]. \end{cases} \quad (1.8)$$

Natuurlijk kunnen de stelsels ook meer vergelijkingen en meer onbekende functies bevatten.

Een andere generalisatie is

$$x(t+1) = F[x(t), x(t-1)];$$

wanneer we aan differenties denken, komen we tot de vorm

$$x(t+1) - x(t) = G[\{x(t) - x(t-1)\}, x(t)].$$

Maar we zouden ook naar differenties van differenties toe kunnen werken

$$\{x(t+1) - x(t)\} - \{x(t) - x(t-1)\} = H[x(t) - x(t-1), x(t)].$$

De hiermee overeenkomende differentiaalvergelijking zou zijn

$$x''(t) = H[x'(t), x(t)].$$

We kunnen op twee ogenschijnlijk verschillende manieren differentievergelijkingen invoeren. Allereerst eenvoudig als

$$P[x(t+n), x(t+n-1), x(t+n-2), \dots, x(t+1), x(t)] = 0. \quad (1.9)$$

Maar we kunnen ook hogere differenties definiëren

$$\Delta_n x(t) = h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x(t + (n-k)h) \quad (1.10)$$

eventueel alleen voor $h=1$.

Dan zouden we differentievergelijkingen

$$P[\Delta_n x(t), \Delta_{n-1} x(t), \dots, \Delta_1 x(t), x(t)] = 0 \quad (1.11)$$

bestuderen. Aardig is nog op te merken dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h x(t) = x^{(n)}(t)$$

waardoor direct met (1.11) een hogere orde differentiaalvergelijking te verbinden is.

De definitie van recurrente rijen, b.v. Fibonacci, vraagt weer eerder naar (1.9), bijvoorbeeld

$$x(t+2) = x(t) + x(t+1).$$

2. LINEAIRE DIFFERENTIE- EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld

$$x(t+1) - x(t) = ax(t), \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

De oplossing is

$$x(t) = A(1+a)^t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

De overeenkomstige differentiaalvergelijking is

$$x'(t) = ax(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

met als oplossing

$$x(t) = Ae^{at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eenzijds hebben de oplossingen dezelfde vorm, anderzijds zijn e^a en $1+a$ toch verschillend. Aardig is om aan (2.1) en (2.2) als groeimodellen te denken. Het getal ' a ' is een soort vruchtbaarheids-constante. Dieren lopen echter niet met een briefje met de ' a ' er op om hun nek. Om de ' a ' te bepalen moeten we de populatie meten.

Duidelijk is dat zowel in het discrete als in het continue geval geldt

$$A = x(0).$$

In het discrete geval vinden we verder

$$(1+a) = \frac{x(1)}{x(0)}$$

en in het continue geval

$$e^a = \frac{x(1)}{x(0)}$$

zodat de oplossingen van (2.1) en (2.2) volledig identiek worden, nl.

$$x(t) = x(0) \cdot \left\{ \frac{x(1)}{x(0)} \right\}^t. \quad (2.3)$$

Even een uitstapje naar het algemene lineaire geval. De differentievergelijking

$$\sum_{k=0}^n a_k \Delta_k x(t) = 0 \quad (2.4)$$

heeft in het algemene geval de oplossing

$$\sum_{l=1}^n c_l (1 + \mu_l)^t \quad (2.5)$$

waarin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de wortels zijn van de vergelijking

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0.$$

We veronderstellen dat deze wortels alle verschillend zijn. De corresponderende differentiaalvergelijking is

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)}(t) = 0 \quad (2.6)$$

met als oplossing

$$\sum_{l=1}^n c_l e^{\mu_l t}. \quad (2.7)$$

De vraag of (2.5) en (2.7) weer in eenzelfde vorm te brengen zijn, zoals in (2.3), laten we aan de lezer over.

We bespreken één voorbeeld wat uitvoeriger.

We beginnen met de differentiaalvergelijking

$$x''(t) = -a^2 x(t). \quad (2.8)$$

De oplossingen zijn, zoals bekend,

$$x(t) = A \cos at + B \sin at. \quad (2.9)$$

Wat is de bijbehorende differentievergelijking? We zijn geneigd te schrijven

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = -a^2 x(t). \quad (2.10)$$

Ook hiervan zijn de oplossingen direct te vinden

$$x(t) = A(1+ia)^t + B(1-ia)^t, \quad A, B \in \mathbb{C}. \quad (2.11)$$

Nu zijn (2.9) en (2.11) zeker niet gelijk, voor $t \rightarrow \infty$ blijft (2.9) begrensd, terwijl (2.11) in het algemeen als $(\sqrt{1+a^2})^t$ groeit!

Bestuderen we echter:

$$x(t+1) - 2x(t) + x(t-1) = -a^2 x(t) \quad (2.12)$$

welke vergelijking even goed de discrete interpretatie van (2.8) zou kunnen zijn, dan vinden we in het geval dat $a^2 \leq 4$ de oplossing

$$x(t) = A_1 \left[\frac{2-a^2+a\sqrt{a^2-4}}{2} \right]^t + B_1 \left[\frac{2-a^2-a\sqrt{a^2-4}}{2} \right]^t. \quad (2.13)$$

Voeren we nu in

$$a = 2 \sin \frac{1}{2} \phi$$

dan gaat (2.13) over in

$$x(t) = A \cos t\phi + B \sin t\phi \quad (2.14)$$

een duidelijk analogon van (2.9). We zouden ook nu weer de constanten A, B en a of ϕ uit kunnen drukken in beginvoorwaarden.

Tot slot nog een opmerking. De vergelijking

$$x'(t) = ax(t)$$

voert voor een onbekende ' a ' tot de vergelijking

$$x''(t) \cdot x(t) = x'(t) \cdot x'(t). \quad (2.15)$$

Dezelfde eliminatieprocedure toegepast op de differentievergelijking voert tot

$$x(t+2) \cdot x(t) = x(t+1) \cdot x(t+1) \quad (2.16)$$

of, met differentiequotienten geschreven,

$$\Delta_2 x(t) \cdot x(t) = \{\Delta_1 x(t)\}^2.$$

Passen we hetzelfde procédé toe op (2.8) dan vinden we de differentiaalvergelijking

$$x'''(t) \cdot x(t) = x''(t) \cdot x'(t). \quad (2.17)$$

Eliminatie van ' a ' uit (2.10) levert

$$x(t+3) \cdot x(t) - 2x(t+2) \cdot x(t) - x(t+2)x(t+1) + 2\{x(t+1)\}^2 = 0$$

of ook

$$\Delta_3 x(t) \cdot x(t) = \Delta_2 x(t) \cdot \Delta_1 x(t). \quad (2.18)$$

Eliminatie van ' a ' uit (2.12) levert

$$x(t+3) \cdot x(t+1) - x(t+2) \cdot x(t) - \{x(t+2)\}^2 + \{x(t+1)\}^2 = 0.$$

Ook deze is weer met hogere differenties uit te schrijven

$$\Delta_3 x(t) \cdot [\Delta_1 x(t) + x(t)] = \Delta_2 x(t) \cdot [\Delta_2 x(t) + \Delta_1 x(t)]. \quad (2.19)$$

Qua vorm lijkt (2.18) beter op (2.17), maar de oplossing van (2.12) doet vermoeden dat (2.19) een betere generalisatie is. Het zou aardig zijn in een concrete toepassing, waarin als continu model (2.17) (of (2.8)) gebruikt wordt, de echte differentievergelijking op te stellen. Ook is het natuurlijk mogelijk (2.8) te vervangen door

$$\begin{cases} z'(t) = -a^2 x(t) \\ x'(t) = z(t) \end{cases}$$

en van hieruit naar differentievergelijkingen te gaan. Teken we een lijnelementenveld in het (x, z) -vlak dan wordt alles duidelijk. In het continue geval lopen we in de faseruimte over een ellips. Discretisering laat ons van ellips naar een meer naar buiten gelegen ellips springen, zodat een naar oneindig divergerende puntrij ontstaat. Afdwingen van een 'behoudswet'

$$a^2 x^2(t+1) + z^2(t+1) = a^2 x^2(t) + z^2(t)$$

kan wellicht boeiende resultaten opleveren!

3. NIET-LINEAIRE DIFFERENTIEVERGELIJKINGEN

De bekende Verhulst-vergelijking* voor begrensde groei luidt als differentiaalvergelijking

$$x'(t) = ax(t) \cdot (1 - x(t)), \quad a > 0. \quad (3.1)$$

De oplossing is de zogenaamde logistische functie

$$x(t) = \frac{Ae^{at}}{1 + Ae^{at}}. \quad (3.2)$$

Kiezen we een beginwaarde $x(0)$ tussen 0 en 1 dan zal $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, de functie x is dan monotoon stijgend. Kiezen we een beginwaarde $x(0)$ groter dan 1, dan zal eveneens $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, de functie x is dan echter monotoon dalend.

De constante A is eenvoudig in $x(t_0)$ uit te drukken. Kiezen we $x(0) = x_0$ dan is $A = \frac{x_0}{1 - x_0}$. Willen we 'a' uitdrukken in b.v. $x(0) = x_0$ en $x(1) = x_1$ dan komen er moeilijkheden als $x_0 \in (0, 1)$ en $x_1 > 1$. De formele oplossing is immers

$$e^a = \frac{x_1(1 - x_0)}{x_0(1 - x_1)}.$$

De Verhulst-differentievergelijking is

$$x(t+1) - x(t) = a \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)). \quad (3.3)$$

Nu kan het heel anders gaan. Bij een beginwaarde $x(0)$ op $(0, 1)$ kan $x(1)$ immers groter dan 1 worden. Dan wordt $x(2)$ kleiner dan $x(1)$, misschien zelfs kleiner dan 1. Zou het geval $x(2) = x(0)$ kunnen optreden zodat $x(t)$ tussen twee waarden blijft schommelen? We beschouwen het stelsel 'gewone' vergelijkingen voor $x(1)$ en $x(0)$

$$\begin{cases} x(1) = x(0) + a \cdot x(0) \cdot (1 - x(0)) \\ x(0) = x(1) + a \cdot x(1) \cdot (1 - x(1)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Naast de triviale oplossingen $x(0) = x(1) = 0$ en $x(0) = x(1) = 1$ vinden we voor $a^2 \geq 4$ nog de oplossing

* P.F. Verhulst (1804-1849)

$$\begin{cases} x(0) = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2-4}}{2a} \\ x(1) = \frac{(a+2) \mp \sqrt{a^2-4}}{2a} \end{cases} \quad (3.5)$$

In het speciale geval $a = 3$ blijkt de differentievergelijking expliciet op te lossen. De vergelijking

$$x(n+1) = 4x(n) - 3\{x(n)\}^2 \quad (3.6)$$

heeft als oplossing

$$x(n) = \frac{4}{3} \sin^2(2^n \phi) \quad (3.7)$$

waarbij ϕ bepaald wordt door

$$x(0) = \frac{4}{3} \sin^2 \phi.$$

De juistheid van deze oplossing is direct te verifiëren! Voor $x(0) \in [0, \frac{4}{3}]$ is er een oplossing. Wanneer $x(0)$ zo gekozen wordt dat ϕ een rationaal veelvoud van π is, zal deze oplossing periodiek zijn, voor andere waarden van $x(0)$ is er geen periodiek maar chaotisch gedrag.

Passen we (3.5) toe voor $a = 3$ dan vinden we

$$x(0) = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{6}$$

en dus

$$\sin^2 \phi = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}, \quad \phi = \frac{k\pi}{5}, \quad k \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

Opmerking. Voor toepassingen heeft bovenstaand voorbeeld zonder meer geen betekenis. Om in een model een periodiek proces aan te treffen zal de periode een 'aantrekker' moeten zijn. Kleine verstoringen moeten vanzelf gecorrigeerd worden. In de natuur en in computersimulaties zullen verschillen tussen rationale en niet-rationale getallen geen betekenis hebben. Bij instabiele periodieke verschijnselen zal door kleine storingen de periodiciteit snel verloren gaan. In paragraaf 5 zullen we hier nog op terug komen.

We bespreken een tweede voorbeeld. De differentiaalvergelijking

$$x'(t) = ax^2(t) \quad (3.8)$$

heeft als oplossing

$$x(t) = \frac{x(t_0)}{1 - a \cdot x(t_0) \cdot (t - t_0)}.$$

We veronderstellen $a > 0$, $x(t_0) > 0$; dan heeft de differentiaalvergelijking een monotoon stijgende oplossing die voor $t \rightarrow t_0 + \frac{1}{ax(t_0)}$ tot oneindig nadert.

Bij de overeenkomstige differentievergelijking

$$x(t+1) - x(t) = ax^2(t) \quad (3.9)$$

kan het niet gebeuren dat voor eindige t de oplossing oneindig wordt. De oplossingen van (3.8) en (3.9) zullen dus essentieel verschillend zijn. We kunnen dit verschillende gedrag weer uit het lijnelementenveld begrijpen. De integraalkrommen zijn hyperbolen met verticale asymptoten. De differentiaaloplossing volgt één hyperbooltak. Bij de oplossing van de differentievergelijking kunnen we van één hyperbool op een andere overspringen.

Beschouwen we (zonder verlies van algemeenheid) de differentievergelijking met $a = 1$

$$x(t+1) = x(t) + x^2(t).$$

Duidelijk is dat voor $x(0) > 0$ de oplossing monotoon stijgend is. De groei wordt zelfs zeer sterk. Laat $x(0) = \epsilon > 0$. Dan geldt

$$x(1) = \epsilon(1 + \epsilon),$$

$$x(t+1) = [1 + x(t)]x(t) \geq (1 + \epsilon)x(t).$$

Dus

$$x(t) \geq (1 + \epsilon)^t x(0).$$

Voor $t \geq t_0$ geldt dus $x(t) > p > 1$. Vervolgens

$$x(n) > x^2(n-1)$$

$$x(n) > x^k(t_0) \text{ met } k = 2^{n-t_0}.$$

Dus $\log(\log x(n))$ groeit sneller dan een eerste graads functie van n .

4. EEN UITGEWERKT VOORBEELD

We gaan uit van de differentiaalvergelijking

$$x^2(t) + [x'(t)]^2 = 1. \quad (4.1)$$

Duidelijk is dat door

$$x(t) = \sin(t - t_0) \quad (4.2)$$

een oplossing gegeven wordt. We hadden de vergelijking als volgt kunnen oplossen

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x^2(t)}} = \pm 1,$$

$$\arcsin x(t) - \arcsin x(t_0) = \pm(t - t_0).$$

Uit het lijnelementenveld zien we dat een differentieerbare oplossing ook

gegeven wordt door

$$\begin{cases} x(t) = -1 & \text{voor } t \leq t_0 - \frac{\pi}{2} \\ x(t) = \sin(t - t_0) & \text{voor } |t - t_0| \leq \frac{\pi}{2} \\ x(t) = 1 & \text{voor } t \geq t_0 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

Deze oplossing is echter niet twee keer differentieerbaar. Zoeken we oplossingen die in geïsoleerd gelegen punten niet differentieerbaar behoeven te zijn, dan zijn zeer vreemde oplossingen te construeren. Het 'lijnelementenveld' wordt namelijk gegeven door

$$x'(t) = \pm \sqrt{1 - x^2(t)}.$$

Door een punt (t, s) met $|s| < 1$ gaan twee lijnelementen met richtingscoëfficiënten $\pm \sqrt{1 - s^2}$. We kunnen in het punt aankomen met richting $\sqrt{1 - s^2}$ en vertrekken met richting $-\sqrt{1 - s^2}$. Zo blijkt een hakenkromme samengesteld uit stukken sinusoiden een bijna overal differentieerbare oplossing te leveren. Terwijl in de niet-differentieerbare punten zowel de rechter als de linker afgeleide aan de differentiaalvergelijking voldoen.

Wanneer we van de differentiaalvergelijking overstappen naar de differentievergelijking vervallen mogelijke eisen van differentieerbaarheid. We bestuderen nu de differentievergelijking

$$[x(t+1) - x(t)]^2 + x^2(t) = 1. \quad (4.4)$$

Dus

$$x(t+1) = x(t) \pm \sqrt{1 - x^2(t)}.$$

Starten we met een $x(0) \in (-1, +1)$ dan vinden we twee mogelijke waarden voor $x(1)$. Maar slechts één van deze twee ligt in het interval $(-1, +1)$ en laat dus voortzetting toe. Een oplossing die voor alle $t \geq 0$ gedefinieerd is wordt dus gegeven door

$$x(t+1) = x(t) - \operatorname{sgn} x(t) \cdot \sqrt{1 - x^2(t)}$$

waarin

$$\operatorname{sgn} y = 1, \quad y > 0,$$

$$\operatorname{sgn} y = -1, \quad y < 0,$$

$$\operatorname{sgn} 0 = 0.$$

(Verhelderend is een grafiek van $(y-x)^2 + x^2 = 1$.) Het gedrag van deze oplossing hangt sterk van de beginwaarde af. Zo geldt voor

$$x(0) = \frac{1}{5}\sqrt{5}, \quad x(1) = -\frac{1}{5}\sqrt{5}, \quad x(2) = \frac{1}{5}\sqrt{5}, \quad \text{enz.}$$

Aardig is het om naar langere cycli te zoeken.

Het ligt voor de hand een iets algemener probleem te onderzoeken

$$[x'(t)]^2 + a^2[x(t)]^2 = a^2. \quad (4.5)$$

We zien weer direct de oplossing

$$x(t) = \sin a(t - t_0).$$

En verder is het gedrag geheel analoog aan het geval $a = 1$. De differentievergelijking:

$$x(t+1) = x(t) \pm a \sqrt{1-x^2(t)} \quad (4.6)$$

vertoont een heel ander gedrag van de oplossingen.

We bezien eerst het geval $a > 1$. De grafiek van $(y-x)^2 + a^2x^2 = a^2$ laat zien dat voor $x(0)$ 'dicht bij' 0 geldt

$$x(1) = x(0) + a \sqrt{1-x^2(0)} > 1$$

en

$$x(1) = x(0) - a \sqrt{1-x^2(0)} < -1$$

zodat geen voortzetting mogelijk is. Maar ook hier is een periode 2 aanwezig

$$x(0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}, \quad x(1) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}}.$$

Het lijkt niet eenvoudig het gedrag bij een willekeurige beginwaarde te voorspellen.

Vervolgens bezien we het geval $0 < a < 1$. Uit de grafiek van $(y-x)^2 + a^2x^2 = a^2$ zien we nu dat er beginwaarden $x(0)$ zijn zodat zowel

$$x(1) = x(0) + a \sqrt{1-x^2(0)}$$

als

$$x(1) = x(0) - a \sqrt{1-x^2(0)}$$

in het interval $(-1, +1)$ liggen en dus voortzetting toelaten. Het zou interessant zijn voor gegeven beginwaarde $x(0)$ de gehele boom van vertakkingen te kunnen voorspellen. In dit geval wordt door

$$x(t+1) = x(t) - a \cdot \text{sgn } x(t) \cdot \sqrt{1-x^2(t)}, \quad |x(0)| < 1$$

in ieder geval een voor alle $t > 0$ gedefinieerde oplossing gegeven.

Opmerking. Voor computerfanaten en/of bifurcatiespecialisten is het aardig het volgende programma te laten lopen.

Kies een willekeurige $x(0)$ tussen 0 en 1. Itereer

$$x := x - a \cdot \text{sgn}(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

flink wat keren (b.v. enkele honderden).

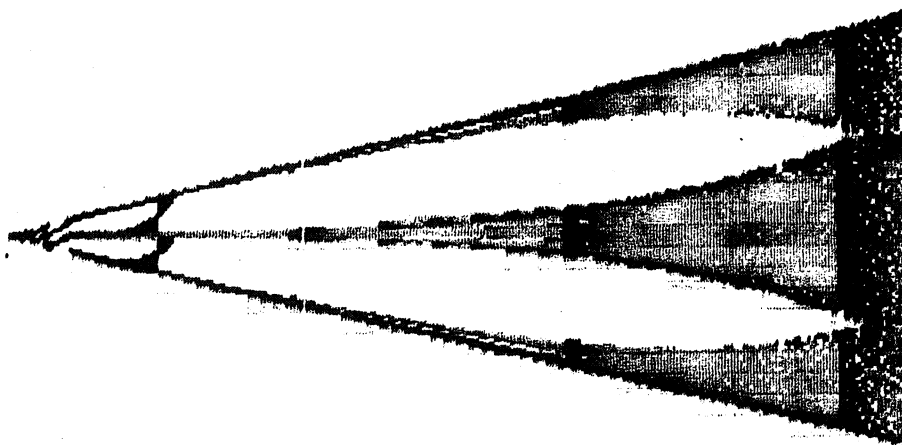
Itereer vervolgens nog vele honderden malen

$$x := x - a * \text{sgn}(x) * \sqrt{1 - x^2}$$

maar plot nu voor iedere iteratie het punt met coördinaten (a, x) .

Voer dit uit voor passend veel waarden van a van 0 opklimmend naar 1.

Een eenvoudig huiscomputerplaatje



De omgeving van $a=0$ lijkt nader onderzoek te rechtvaardigen. Vergroting voor $a=0$ tot $a=0.1$ levert



Een theoretische explicatie van deze figuren laten we aan de lezer over!

5. MORAAL

Het verhaal van de kettinglijn is typisch. Het is een mechanisch probleem dat we met een stel (differentie)vergelijkingen (één voor iedere schakel van de ketting) op kunnen lossen. Ter wille van de eenvoud stappen we over op een differentiaalvergelijking, door de schakellengte in gedachten tot nul te laten naderen. Wanneer we een tabellenboek voor de cosinus hyperbolicus hebben, is de kettinglijn bekend. Willen we deze niet gebruiken dan zullen we de bijbehorende differentiaalvergelijking numeriek op moeten lossen, wat in vele gevallen er op neer komt dat we er een differentievergelijking van maken. En het gaat allemaal goed.

Maar we zagen in de vorige paragrafen dat bij differentievergelijkingen essentieel andere fenomenen kunnen optreden dan bij de corresponderende differentiaalvergelijkingen.

In de werkelijke wereld van biologische groei door voortplanting, van loonrondes en belastingwetten zijn duidelijk discrete processen aan de orde. Beschrijving met continue modellen kan er toe leiden dat in werkelijkheid optredende chaos niet begrepen wordt. Differentiaalstelsels van het type (1.8) zijn zeer gebruikelijk. Het loont de moeite het gedrag van overeenkomstige stelsels (1.7) te onderzoeken. We willen er echter nogmaals met nadruk op wijzen dat invariante punten en cycli alleen betekenis voor de toepassingen hebben (en alleen in computersimulaties gezien worden) als ze 'aantrekkers' zijn. Zo heeft de differentievergelijking

$$x(n+1) - x(n) = ax(n)[1 - x(n)]$$

voor $1 < a < 2$ één aantrekkend invariant punt 1. En voor $2 < a < \sqrt{6}$ één aantrekkende cyclus van twee punten

$$\frac{1}{2a} \{(a+2) + \sqrt{(a+2)(a-2)}\} \text{ en } \frac{1}{2a} \{(a+2) - \sqrt{(a+2)(a-2)}\}.$$

Voor $a = 2\sqrt{2}$ is er een aantrekkende cyclus van drie punten. Voor a dicht in de buurt van 3 is er complete chaos, hoewel er, zoals we boven reeds zagen, voor speciale beginwaarde $x(0)$ periodieke banen zijn. Deze zijn echter niet aantrekkend. Computersimulatie laat zien dat deze periodieke oplossingen niet stabiel zijn; ten gevolge van afrondingen in het rekenproces verdwijnt de periodiciteit als regel snel.

Discretisaties van Differentiaalvergelijkingen

R.M.M. Mattheij

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

1. INLEIDING

Stel men wenst de beweging van een vloeistof onder zekere omstandigheden te beschrijven. Indien het om niet-extreem kleine volume-eenheden gaat (ter grootte orde van de gemiddelde molecuulafstand) kan dit heel bevredigend gedaan worden door het aantal moleculen per volume-eenheid, de *dichtheid*, als een *continue* grootheid te beschouwen. Ondanks het *discrete aspect* van het verschijnsel vinden we zo differentiaalvergelijkingen die deze beweging beschrijven als een proces dat continu afhankelijk is van een grootheid als afstand (oppervlakte, volume).

Zoals bekend worden debet- en creditrente berekend door bijvoorbeeld maandelijks of jaarlijks het saldo te verarmen/verrijken met een zeker bedrag dat bepaald wordt door een percentage van het saldo aan het begin of eind van de maand (of het jaar) te nemen. Noemen we het saldo op tijdstip t (in jaren) $x(t)$ en vindt de bijschrijving n maal per jaar plaats (over gelijke perioden), dan krijgen we de volgende relatie, bij zekere *rentevoet* $r(t)$,

$$x\left(t + \frac{1}{n}\right) = x(t) + \frac{1}{n}r(t)x(t) \quad (1.1a)$$

of, anders geschreven,

$$\frac{x\left(t + \frac{1}{n}\right) - x(t)}{\frac{1}{n}} = r(t)x(t). \quad (1.1b)$$

Bij de berekening van de rente zou ook de (nog niet betaalde) rente over zo'n periode betrokken kunnen worden; dit levert het volgende model

$$x(t + \frac{1}{n}) = x(t) + \frac{1}{n}r(t + \frac{1}{n})x(t + \frac{1}{n}) \quad (1.2a)$$

ofwel

$$\frac{x(t + \frac{1}{n}) - x(t)}{\frac{1}{n}} = r(t + \frac{1}{n})x(t + \frac{1}{n}). \quad (1.2b)$$

Intuïtief is duidelijk dat het onderscheid tussen (1.1) en (1.2) minder wordt naarmate n groter wordt. Door n naar ∞ te laten gaan, kunnen we de toename van het saldo continu aflezen. Zowel (1.1b) als (1.2b) geven dan de *differentiaalvergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x(t). \quad (1.3)$$

In het verhaal hieronder zullen we juist de *omgekeerde weg volgen*. Voor differentiaalvergelijkingen als (1.3) (en veel ingewikkeldere) zoeken we een *discretisatie*, in feite een differentievergelijking die 'op de differentiaalvergelijking lijkt' en die bruikbaar is om numeriek de oplossing te benaderen. Uit bovenstaande voorbeelden volgt dat differentievergelijkingen soms op een natuurlijke wijze passen bij een differentiaalvergelijking, maar ook dat discretisaties mogelijkwijs aanleiding geven tot verschillende interpretaties.

Bekijken we nu meer algemeen het volgende *beginwaardeprobleem*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.4a)$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ (gegeven).} \quad (1.4b)$$

We nemen aan dat de oplossing x van (1.4) bestaat en eenduidig is op een voldoende groot gebied. Verder nemen we aan dat x daar voldoende glad is, d.w.z. $x^{(p)}$ bestaat voor door ons gewenste waarden van p . Door bijvoorbeeld $\frac{dx}{dt}$ te benaderen met $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, voor Δt eindig, krijgen we formeel uit (1.4a)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \doteq f(t, x). \quad (1.5)$$

Nemen we $f(t, x) = r(t)x(t)$, dan zien we uit (1.1b) en (1.2b) dat (1.5) voor meer dan één uitleg vatbaar is. Echter, beide keuzen zijn 'redelijk', d.w.z. zowel (1.1b) als (1.2b) geven in de limiet de differentiaalvergelijking (1.3) terug. Dit levert een eerste belangrijke constatering op. We hebben kennelijk een *locale* netheids eis: voor iedere t moeten (1.4a) en (1.5) op elkaar lijken en wel zo dat (1.5) overgaat in (1.4a) als $\Delta t \rightarrow 0$. Voor een goede benadering van de *oplossing* $x(t)$ moeten we echter meer aantonen; immers als we een differentievergelijking praktisch gebruiken, maken we in beginsel bij iedere stap een zgn. *locale* fout; we moeten er dus voor zorgen dat de *globale* fout na zeg i stappen, d.w.z. de totale fout in de benadering van $x(t_0 + i\Delta t)$, nog acceptabel is.

Hieronder gaan we eerst nader in op het probleem hoe we geschikte differentievergelijkingen bij (1.4a) kunnen construeren (paragraaf 2). Daarna beschouwen we het probleem van locale fouten en hun contaminaties in de globale fout (paragraaf 3). Vervolgens laten we zien welke problemen er desondanks nog kunnen ontstaan bij sommige methoden t.a.v. gevoeligheden ten opzichte van kleine foutjes (die we altijd maken in een numerieke implementatie); dit *stabiliteits*-probleem wordt behandeld in paragraaf 4. Tenslotte demonstreren we in paragraaf 5 aan de hand van een niet-lineair probleem wat zoal kan gebeuren (bij onnadenkend) gebruik van numerieke methoden.

2. CONSTRUCTIE VAN DIFFERENTIEVERGELIJKINGEN

Zoals gezegd is (1.5) voor meerdere interpretaties vatbaar. Omdat we ons realiseren dat de feitelijk berekende *discrete oplossing* van (1.5) hoogstwaarschijnlijk niet overeen zal komen met de exacte, spreken we eerst een notatie af. Laat $h(=\Delta t)$ de (voorlopig) constante *stapgrootte* zijn, d.w.z. de afstand tussen twee opeenvolgende steunpunten t_i, t_{i+1} , met $t_i = t_0 + ih$. Laat x_i de *benadering* van $x(t_i)$ aangeven, verkregen m.b.v. de differentievergelijking.

Als eerste mogelijkheid bekijken we een zgn. *voorwaartse differentie*

$$\Delta x(t_i) \doteq (x_{i+1} - x_i). \quad (2.1a)$$

Dit levert via (1.5) de *voorwaartse Euler-formule* op

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i). \quad (2.1b)$$

Merk op dat we x_{i+1} direct kunnen vinden, indien x_i voorhanden is; deze formule is dan ook zgn. *expliciet* (cf. (1.1b)).

Daarnaast bestaat er een *achterwaartse differentie*

$$\Delta x(t_i) \doteq (x_i - x_{i-1}) \quad (2.2a)$$

hetgeen de *achterwaartse Euler-formule* oplevert

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) \quad (2.2b)$$

(waarbij we het resultaat op $t = t_{i+1}$ i.p.v. $t = t_i$ beschouwen ter vergelijking met (2.1b)); zie ook (1.2b). In (2.2b) kunnen we x_{i+1} niet direct bepalen uit x_i . Deze formule heet daarom *impliciet*. Merk op dat (2.2b) een vergelijking in x_{i+1} is; er zijn numerieke methoden voorhanden zoals *successive substitutie* en *Newton's methode* om x_{i+1} benaderd op te lossen. Overigens, indien f lineair van x afhangt, zoals in (1.3), kunnen we dit probleem eenvoudig omzeilen: Bijvoorbeeld (1.2a) met $\frac{1}{n} = h$, maken we expliciet door te schrijven

$$x(t+h) = x(t)/(1-hr(t+h)) \quad (2.2c)$$

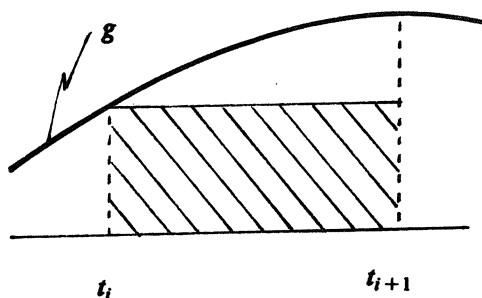
aannemende dat $hr(t+h) \neq 1$.

We zouden zo nog een aantal mogelijkheden kunnen uitproberen. We doen 't echter systematischer. Schrijf (1.4a) als een *integraalvergelijking*

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.3)$$

Als we de integrand in (2.3) opvatten als een functie van τ , i.e. $f(\tau, x(\tau)) =: g(\tau)$, kunnen we via verstandige benaderingen van g een numerieke formule voor het rechterlid van (2.3) krijgen die dan weer bruikbaar is om een differentievergelijking ter benadering van $x(t)$ te construeren. We bekijken drie eenvoudige gevallen

Geval 1: Benader $g(\tau)$ door $g(t_i)$. De integraal in (2.3) wordt dan benaderd door de gearceerde rechthoek in Figuur 2.1.



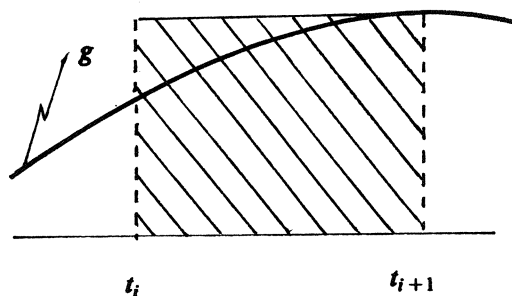
Figuur 2.1

Dit geeft de formule

$$x_{i+1} = x_i + hg(t_i) = x_i + hf(t_i, x_i) \quad (2.4)$$

(dit is precies (2.1b)).

Geval 2: Benader $g(\tau)$ door $g(t_{i+1})$. De gearceerde rechthoek in Figuur 2.2 is dan de benadering voor de integraal in (2.3).



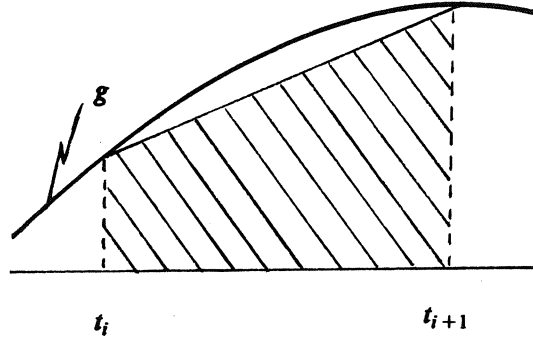
Figuur 2.2

Dit geeft de formule

$$x_{i+1} = x_i + hg(t_{i+1}) = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) \quad (2.5)$$

(dit is precies (2.2b)).

Geval 3: Benader $g(\tau)$ door $\frac{(t_{i+1}-t)g(t_i) + (t-t_i)g(t_{i+1})}{h}$ (d.w.z. de rechte die $g(\tau)$ in $\tau = t_i, t_{i+1}$ snijdt); zie Figuur 2.3.



Figuur 2.3

Dit geeft de formule

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2}g(t_i) + \frac{h}{2}g(t_{i+1}) \\ &= x_i + \frac{h}{2}[f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Uit bovenstaande prent kan men zien waarom deze formule de *trapezium-formule* heet.

(Merk op dat (2.6) ook gevonden kan worden als lineaire combinatie van (2.4) en (2.5), en wel door beide te voorzien van een weegfactor $\frac{1}{2}$.)

Bovenstaande gevallen zijn speciale voorbeelden van differentievergelijkingen die m.b.v. *numerieke integratie* ('kwadratuurformules') gevonden kunnen worden. Het zijn alle zgn. *éénstapsmethoden* ('eerste orde'). Door, meer algemeen, op slimme wijze tussenpunten op (t_i, t_{i+1}) te gebruiken, kunnen we zeer nauwkeurige formules vinden (in termen van locale fouten), de zgn. *Runge-Kutta-formules*. Een andere voor de hand liggende manier om $g(\tau)$ te benaderen is een n de graads polynoom te bepalen dat gelijk is aan $g(\tau)$ voor $\tau = t_{i+1}, t_i, \dots, t_{i-n}$. Dit geeft zgn. *meerstapsmethoden*. Evenmin als op de constructie van bovengenoemde Runge-Kutta-methoden zullen we hier verder op ingaan.

3. LOCALE EN GLOBALE FOUTEN

Beschouw eens de voorwaartse Euler-formule (2.1b). Stel dat we $x(t_i)$ exact kennen; dan zouden we m.b.v. (2.1b) een benadering op t_{i+1} krijgen gelijk aan

$$\tilde{x}(t_{i+1}) := x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)). \quad (3.1)$$

De afwijking

$$\delta_i^h := \tilde{x}(t_{i+1}) - x(t_{i+1}) \quad (3.2)$$

noemen we de *locale discretisatiefout*. In Figuur 3.1 zien we dat δ_i^h te vinden is door vanuit $[t_i, x(t_i)]$ de raaklijn aan de functie $x(t)$ te trekken en op $t = t_{i+1}$ deze te vergelijken met $x(t_{i+1})$. We kunnen deze fout als volgt bepalen.

Ontwikkel $x(t_{i+1})$ rond t_i in een Taylor-reeks

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(\tau_i), \quad \tau_i \in (t_i, t_{i+1}). \quad (3.3)$$

M.b.v. (3.1), (3.2) en (3.3) vinden we dan (N.B. $x'(t_i) = f(t_i, x(t_i))$)

$$\delta_i^h = \frac{h^2}{2}x''(\tau_i). \quad (3.4)$$

Op soortgelijke wijze vinden we voor de terugwaartse Euler-formule

$$\delta_i^h = -\frac{h^2}{2}x''(\theta_i), \quad \theta_i \in (t_i, t_{i+1}) \quad (3.5)$$

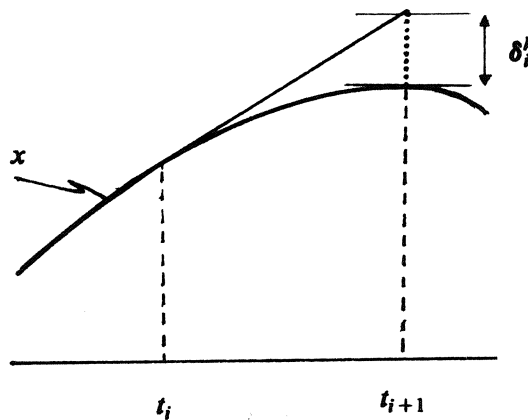
en voor de trapeziumformule

$$\delta_i^h = -\frac{h^3}{12}x'''(\eta_i), \quad \eta_i \in (t_i, t_{i+1}). \quad (3.6)$$

We geven nu wat precieser aan wat we bedoelen als we zeggen dat een differentievergelijking 'goed lijkt' op een differentiaalvergelijking.

Definitie 3.7. Een differentievergelijking heet *consistent* met de differentiaalvergelijking (1.4a) indien

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t_i \text{ vast}}} \frac{\delta_i^h}{h} = 0.$$



Figuur 3.1

De notatie δ_i^h is ietwat ongelukkig omdat i hier geen feitelijke functie heeft (men mag t i.p.v. t_i denken, en $t+h$ i.p.v. t_{i+1}). Het delen door h ligt voor de hand omdat we immers onze differentievergelijkingen in paragraaf 2 alle met h vermenigvuldigd hebben! Merk tenslotte op dat voor beide Euler-formules geldt dat $\frac{\delta_i^h}{h} = O(h)$ en voor de trapeziumformule dat $\frac{\delta_i^h}{h} = O(h^2)$. De lokale fout voor laatstgenoemde formule gaat 'sneller' naar 0 als $h \rightarrow 0$ dan bij de Euler-formules, hetgeen de trapeziumformule in principe aantrekkelijker maakt.

Uiteraard is de aanname dat we $x(t_i)$ kennen niet reëel. Zoals opgemerkt in paragraaf 1 stapelen we fout op fout en hebben we een situatie als in Figuur 3.2, waar de getekende kromme lijnen alle integraalkrommen zijn (dus voldoen aan de differentiaalvergelijking (1.4a)), maar die bepaald worden door de *locale beginwaarde* x_{i-2} etc. Laten we een oplossing van (1.1) die door het punt $[t_i, x_i]$ gaat, aangeven met $x^i(t)$. Dan hebben we dus (cf. (3.1))

$$x_{i+1} = x^{i+1}(t_{i+1}) = x^i(t_i) + hf(t_i, x^i(t_i)) = x_i + hf(t_i, x_i). \quad (3.8)$$

We vinden de lokale fout δ_i^h dan als

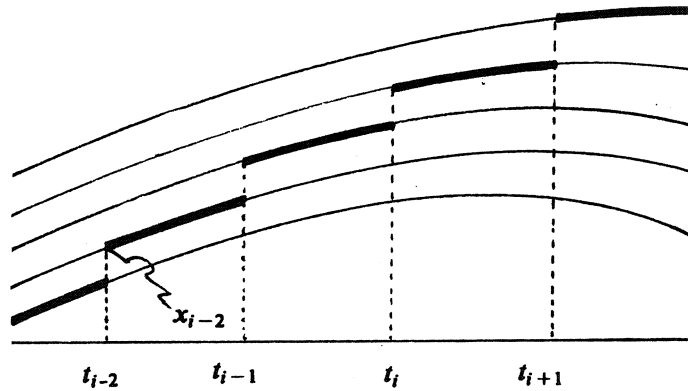
$$\delta_i^h := x^i(t_{i+1}) - x^{i+1}(t_{i+1}) = x^i(t_{i+1}) - x_{i+1}. \quad (3.9a)$$

Voor de voorwaartse Euler-formule geldt (zie (3.4))

$$\delta_i^h = \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} x^i(\tau_i), \quad \tau_i \in (t_i, t_{i+1}). \quad (3.9b)$$

We kunnen nu de *globale discretisatiefout* e_i^h aangeven, die gedefinieerd is als

$$e_i^h := x(t_i) - x_i. \quad (3.10)$$



Figuur 3.2

We hebben daartoe de volgende

Stelling 3.11. (*Globale fout bij voorwaartse Euler-methode*). Zij $t_0 + ih \leq T$ en zij C zodanig dat $|x''(t)| \leq C$, $t \in (t_0, T)$

(a) Laat $-L \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq 0$ en $h \leq \frac{2}{L}$.

Dan geldt $|e_i^h| \leq iCh^2 \leq (t_i - t_0)Ch$.

(b) Laat $0 \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq L$.

Dan geldt $|e_i^h| \leq \frac{e^{L(t_i - t_0)} - 1}{L} Ch$.

BEWIJS. Er geldt, cf. (3.9),

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + h\hat{\delta}_i^h,$$

met $\hat{\delta}_i^h := \frac{h^2}{2}x''(\hat{\tau}_i)$, $\hat{\tau}_i \in (t_i, t_{i+1})$. Anticiperend op de juistheid van het resultaat van de stelling, ziet men m.b.v. een Taylor-ontwikkeling direct in dat $\hat{\delta}_i^h = \delta_i^h + O(h^2)$. Derhalve is $\hat{\delta}_i^h$ in goede orde gelijk aan de lokale discretisatie fout. M.b.v. de middelwaarde-stelling vinden we

$$e_{i+1}^h = 1 + h \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, \xi_i) e_i^h + h\hat{\delta}_i^h, \quad \xi_i \in (x_i, x(t_i)).$$

Indien we noteren

$$K = \max |1 + h \frac{\partial f}{\partial x}|$$

dan krijgen we

$$|e_{i+1}^h| \leq K |e_i^h| + Ch^2$$

zodat

$$|e_i^h| \leq \sum_{j=0}^{i-1} K^j Ch^2 = \frac{1-K^i}{1-K} Ch^2.$$

In geval (a) is $K \leq 1$, zodat $\frac{1-K^i}{1-K} \leq i$.

In geval (b) nemen we $K = 1 + Lh$ en gebruiken we dat $1+t \leq e^t$. $\square$

Uit Stelling 3.11 concluderen we het volgende: Zij $t \leq T$ een vast punt. Laten i en h zodanig zijn dat $ih = t$. Dan geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_i^h = x(t).$$

Er treedt dus *convergentie* op van de benaderende naar de exacte oplossing (en wel 1ste orde in h ; zie stelling). Merk de bijzondere asymptotiek hierbij op: Indien $h \rightarrow 0$, moet $i \rightarrow \infty$! Iets dergelijks valt ook voor andere formules te

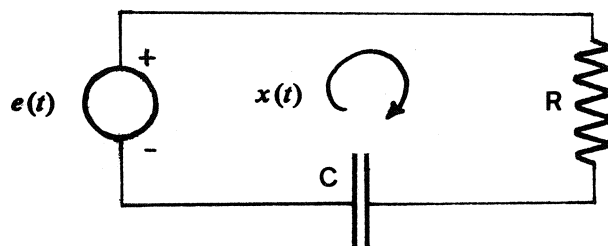
bewijzen; we laten dit hier echter achterwege.

Tenslotte merken we op dat het niet nodig is dat alle tijdstappen even groot zijn (dus $t_{i+1} - t_i$ constant). In het *niet-equidistante* geval (vaak nuttig en nodig om de methode efficiënter te maken) kan men een stelling analoog aan 3.11 bewijzen.

4. STABILITEIT VAN DE GEBRUIKTE METHODEN

In paragraaf 3 zagen we dat we inderdaad een oplossing x willekeurig goed kunnen benaderen, mits we een eindig interval hebben en we h klein genoeg nemen. Bij nader inzien is het resultaat toch enigszins teleurstellend: in stelling 3.11a is er een inperking voor h , die aan een eigenschap van de *differentiaalvergelijking* en niet van de *oplossing* gekoppeld is. Ter herinnering: de lokale fout δ_i^h hangt alleen af van de *gladheid van de oplossing*. Intuïtief zouden we graag betrekkelijk grote tijdstappen maken indien de oplossing maar glad genoeg is. We bekijken daartoe een voorbeeld.

Beschouw het volgende circuit



Figuur 4.1

Hierbij is $e(t)$ een spanningsbron, R een weerstand en C een condensator. Voor de stroom $x(t)$ kan m.b.v. de wet van Kirchhoff aangetoond worden dat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{R} \frac{de(t)}{dt}. \quad (4.1)$$

Zo vinden we voor $R = 5$ ohm, $C = 10^{-3}$ farad en $e(t) = 2000t$ volt de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -200x(t) + 400. \quad (4.2a)$$

Als we aannemen dat er op $t=0$ geen stroom loopt, hebben we de beginvoorwaarde

$$x(0) = 0. \quad (4.2b)$$

De oplossing van (4.2) kunnen we direct vinden; er geldt

$$x(t) = 2(1 - e^{-200t}). \quad (4.3)$$

Op $t = 0.078$ wijkt $x(t)$ minder dan 10^{-6} af van 2; m.a.w. op $[0.078, \infty)$ is $\tilde{x}(t) \equiv 2$ een goede benadering voor $x(t)$ indien men fouten $\leq 10^{-6}$ toelaat. Stel

nu dat we $x(t)$ op zekere punten t numeriek willen benaderen teneinde een grafiek te kunnen tekenen d.m.v. lijnstukjes die de punten $[t_i, x_i]$ verbinden. Op een tijdschaal in cm en een potlood/pendikte van ≤ 1 mm lijkt een globale fout ≤ 0.01 voldoende (nauwkeuriger kunnen we toch niet tekenen). Als we gemakshalve aannemen dat we $x(0.078)$ voldoende nauwkeurig kennen, vinden we voor C in Stelling 3.11, $C \cong 0.01$. Om de fout bij één stap met de voorwaartse Euler-methode ≤ 0.01 te laten zijn, moet dus idealiter gelden (cf. (3.2), (3.3))

$$\frac{h^2}{2} |x''(\tau)| \leq 10^{-2}. \quad (4.4)$$

Nu geldt voor de exacte oplossing dat $|x''(\tau)| \leq 10^{-2}$ voor $\tau > 0.078$. Als we nu aannemen dat de feitelijk gevonden waarde na 1 stap nog steeds dicht bij de exacte ligt (een aanname die we aan het eind van deze paragraaf nog op redelijkheid zullen nagaan), dan concluderen we dat $h = 1.4$ een redelijke keus zou zijn. (Omdat $|x''(t)|$ sterk dalend is, zou de stapgrootte verderop nog groter gekozen kunnen worden op grond van deze redenering). Merk op dat deze stapgrootte *niet toegestaan* is in stelling 3.11a; immers $\frac{\partial f}{\partial x} = -200$, dus $h \leq 0.01$. Helaas is deze beperkende voorwaarde ook noodzakelijk. Bekijk maar eens wat er gebeurt indien we een aantal stappen met $h = 1.4$ zouden doen. Zij daartoe $t_N := 0.078$ en laat x_N en $\bar{x}_N$ beide goede benaderingen van $x(t_N)$ zijn, zeg

$$\bar{x}_N = x_N + \epsilon, \quad \epsilon \text{ klein.} \quad (4.5)$$

Stel we berekenen nu $\{x_i\}_{i \geq N}$ en $\{\bar{x}_i\}_{i \geq N}$ met behulp van de differentievergelijking die we vinden voor (4.2a):

$$x_{i+1} = (1 - 200h)x_i + 400h \quad (4.6a)$$

$$\bar{x}_{i+1} = (1 - 200h)\bar{x}_i + 400h \quad (4.6b)$$

zodat, met $h = 1.4$,

$$\bar{x}_{i+1} - x_{i+1} = -279(\bar{x}_i - x_i), \quad i \geq N \quad (4.7a)$$

$$\bar{x}_N - x_N = \epsilon. \quad (4.7b)$$

Derhalve

$$\bar{x}_i - x_i = (-279)^{i-N} \epsilon, \quad i \geq N. \quad (4.8)$$

Indien ϵ bijvoorbeeld een afrondfout is, gemaakt bij het invoeren van $x_N (\approx 2)$, dan is voor een computer met 14-cijferige mantisse, $\epsilon \approx 10^{-14}$; we zien dat voor $i - N \geq 6$ het verschil tussen $\bar{x}_i$ en x_i al groter dan 1 is! Dit nu is een voorbeeld van *numerieke instabiliteit*. Uit (4.6) halen we dat de differentievergelijking alleen numeriek bruikbaar is, indien geldt

$$|1 - 200h| \leq 1. \quad (4.9)$$

In dit geval komt dit precies overeen met de voorwaarde in stelling 3.11a. Men

vraagt zich wellicht af waarom we ons over dit verschijnsel druk maken, aangezien numerieke berekeningen bij dit voorbeeld overbodig zijn (de oplossing staat immers gegeven in (4.3)). Voor iets ingewikkelder problemen zijn numerieke methoden echter vaak noodzakelijk. Het hierboven geconstateerde conflict (ondanks mogelijk kleine locale fouten toch geen grotere stapgrootten geoorloofd bij een grote (Lipschitz) constante L) blijft ook dan bestaan. Dit verschijnsel duidt men wel aan met *stijfheid*.

Bekijken we nu eens de achterwaartse Euler-formule voor (4.1)

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{1+200h} + \frac{400h}{1+200h}. \quad (4.9)$$

In paragraaf 3 zagen we dat de uitdrukking voor de locale discretisatiefout bij de achterwaartse Euler-formule van eenzelfde soort was als bij de voorwaartse Euler-formule (cf. (3.4) en (3.5)). Hieronder zullen we aannemelijk maken dat we inderdaad dicht bij de exacte oplossing blijven in een *stijf* probleem. Hieruit volgt dat (4.4) dan toepasbaar is bij berekening van één stap op $[0.078, \infty)$. Een storingsanalyse als in (4.6)–(4.8) leert ons dat er voor *numerieke stabiliteit* moet gelden.

$$\left| \frac{1}{1+200h} \right| \leq 1. \quad (4.10)$$

Deze eis is echter voor alle h vervuld, zodat we bijv. $h = 1.4$ hier wel zouden kunnen gebruiken! Samengevat, zij gegeven het modelprobleem

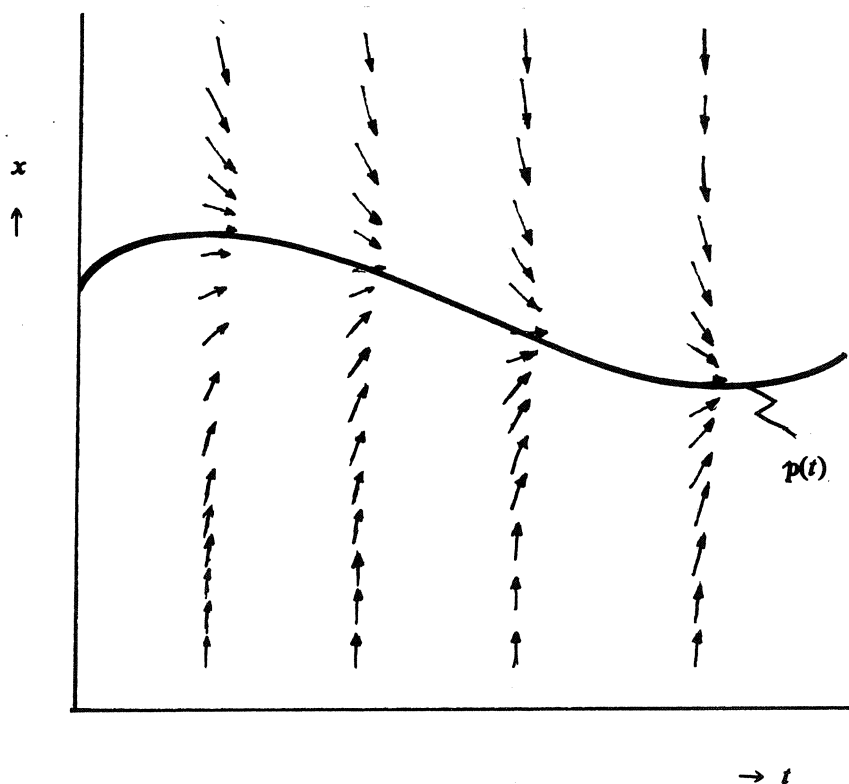
$$\frac{dx}{dt} = \lambda(x - p(t)), \quad \lambda < 0. \quad (4.11)$$

Dan hebben we de volgende

Eigenschap 4.12.

- a) De voorwaartse Euler-formule is *numeriek stabiel* als $|1 - \lambda h| \leq 1$, i.e. $h \leq -\frac{2}{\lambda}$.
- b) De terugwaartse Euler-formule is *numeriek stabiel* als $\left| \frac{1}{1 + h\lambda} \right| \leq 1$, voor alle h .

Het is ook intuïtief duidelijk dat de ene methode andere stabiliteits-eigenschappen heeft dan de andere. Laat daartoe p een langzaam variërende functie zijn, en $|\lambda| \gg 1$. In Figuur 4.2 hebben we d.m.v. lijnstukjes aangegeven welke richting een integraalkromme van (4.11) in een zeker punt heeft (deze figuur geeft het *richtingsveld* weer). We zien dat deze sterk naar de kromme $x(t) = p(t)$ 'wijzen' en wel sterker naarmate ze er verder vanaf zijn.



Figuur 4.2

Dit verschijnsel betekent dat (4.11) een *asymptotisch stabiele oplossing* y bezit, met $|y(t) - p(t)| = O(\frac{1}{\lambda})$ voor alle t ; i.h.b. geldt $x(t) - y(t) \rightarrow 0$ en wel zeer snel als $t > \frac{1}{\lambda}$.

Doen we nu één stap met de voorwaartse Euler-formule, dan worden we min of meer sterk naar boven of beneden gestuurd (zie de meetkundige interpretatie in paragraaf 3, i.h.b. Figuur 3.1). Dit betekent, gaande van t_i naar t_{i+1} , dat we een aanmerkelijke afstand tot de exacte oplossing $x(t_{i+1})$ krijgen. Bij volgende stappen wordt dit alleen maar dramatischer. Bovendien zien we uit het richtingsveld in Figuur 4.2 dat $\{x_i\}$ op den duur sterk rond de exacte oplossing zal slingeren!

Bij de terugwaartse Euler-formule zoeken we op $t = t_{i+1}$ een punt $[t_{i+1}, x_{i+1}]$ waarvan de raaklijn door dat punt aan een integraalkromme door dat punt ook door het punt $[t_i, x_i]$ gaat (we zoeken a.h.w. 'terug'). Daardoor wordt ten eerste bevorderd dat x_{i+1} niet te ver van $x(t_{i+1})$ kan komen te liggen. Dit betekent dat $x^i(t)$ in goede benadering geïdentificeerd mag worden met $x(t)$ (cf. paragraaf 3, i.h.b. (3.8)) zodat de lokale fout bij één stap op

$[0.078, \infty)$ inderdaad wel aan (4.4) zal voldoen.

5. EEN NIET-LINEAIR PROBLEEM

De theorie uit de vorige paragrafen wordt aanzienlijk ingewikkelder, en vaak ook minder scherp, voor niet-lineaire problemen. Daarom beperken we ons hier tot één, maar wel illustratief, voorbeeld.

Bij de analyse van solitaire golven (die als speciale oplossingen optreden van de Korteweg-de Vries-vergelijking) vindt men na vereenvoudiging de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -x(t)\sqrt{F-x(t)}, \quad F > 0 \quad (5.1a)$$

met als beginwaarde

$$x(0) = F. \quad (5.1b)$$

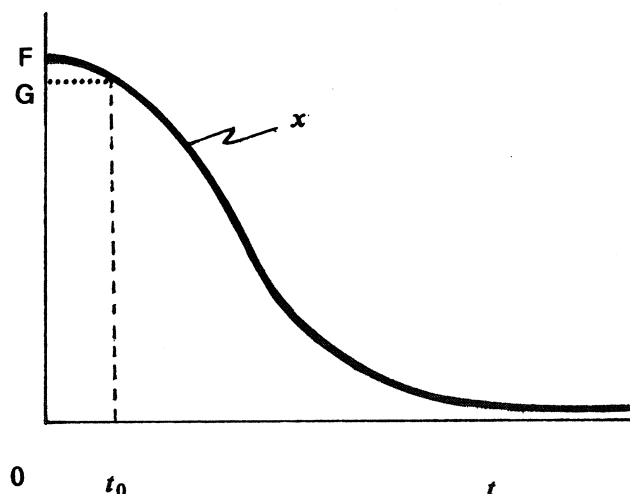
Dit beginwaardeprobleem is meerduidelijk; men ziet direct dat $x(t) \equiv F$ een oplossing is. Door een punt $t_0 > 0$ te nemen en $x(t_0) < F$ voor te schrijven

$$x(t_0) := G < F \quad (5.1c)$$

krijgen we een beginwaardeprobleem waarvan de oplossing bestaat en eenduidig is. Van dit laatste probleem kennen we ook de exacte oplossing

$$x(t) = \frac{F}{\cosh^2(\frac{t}{2}\sqrt{F})} \quad (5.2)$$

zodat de oplossing er ongeveer uitziet als in Figuur 5.1.



Figuur 5.1

I.h.b. zien we dat $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Dus asymptotisch geldt

$$x'(t) \doteq -\sqrt{F}x, \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Ook kan men via (5.2) inzien dat hogere afgeleiden naar nul gaan voor $t \rightarrow \infty$. Feitelijk hebben we dus asymptotisch een probleem als in paragraaf 4.

Gebruiken we de voorwaartse Euler-formule voor (5.3) dan krijgen we

$$x_{i+1} = x_i - hx_i \sqrt{F - x_i}. \quad (5.4)$$

Om de differentievergelijking (5.4) nader te analyseren voeren we in

$$\phi(\xi) := \xi(1 - h\sqrt{F - \xi}) \quad (5.5)$$

en beschouwen we (5.4) als een successief substitutieproces met ϕ als iteratiefunctie. Omdat we weten dat (5.3) een oplossing heeft met $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = F$ (nl. $x(t) \equiv F$) en één met $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, onderzoeken we de *vaste punten* van ϕ , dus die punten ξ waarvoor $\phi(\xi) = \xi$. Nu is

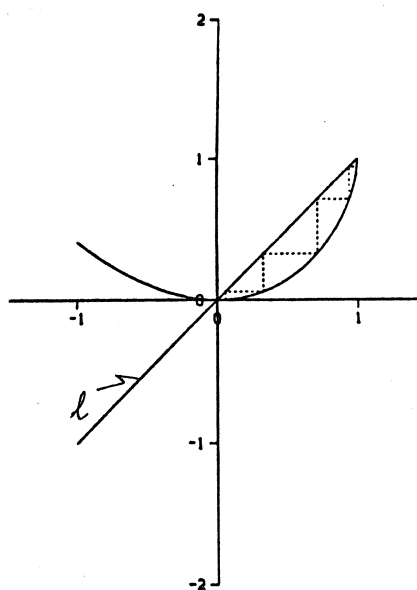
$$\phi(\xi) = \xi \Leftrightarrow \xi = F \text{ of } \xi = 0 \quad (5.6)$$

($\xi = F$ en $\xi = 0$ hebben duidelijk verband met het asymptotisch gedrag van $x(t)$, $t \rightarrow \infty$). Verder merken we op dat $\phi'(0) = 1 - h\sqrt{F}$ en $\phi'(F) = \infty$. Hiermee kunnen we het gedrag van de oplossing $\{x_i\}$ van (5.4) beschrijven.

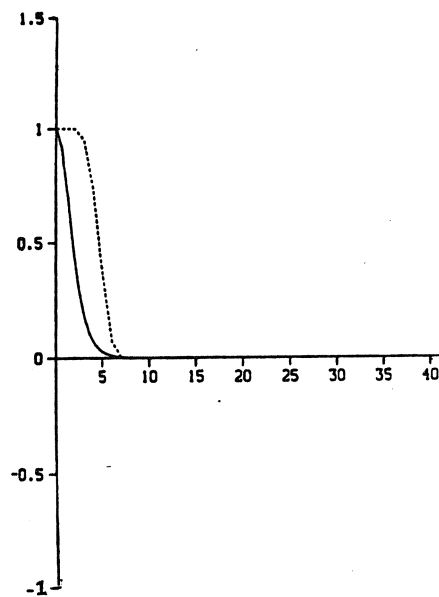
In een grafiek tekenen we de functie $\phi(\xi)$ en de lijn ℓ die door de oorsprong gaat en richtingscoëfficiënt 1 heeft. Gegeven een waarde x_0 , trekken we een verticale lijn vanuit de ξ -as totdat we ϕ snijden; vandaar een horizontale lijn totdat we ℓ snijden; de projectie op de ξ -as is dan x_1 . Vanuit dit laatste punt herhalen we de procedure. Meetkundig is het dan duidelijk dat we naar het vaste punt $\xi = 0$ convergeren, indien $|\phi'(0)| < 1$; bovendien, indien $|\phi'(0)| > 1$ kan er geen convergentie optreden. Derhalve

Eigenschap 5.7. De voorwaartse Euler-formule (5.4) geeft een asymptotisch juiste oplossing indien $|1 - h\sqrt{F}| < 1$, i.e. als $h < \frac{2}{\sqrt{F}}$.

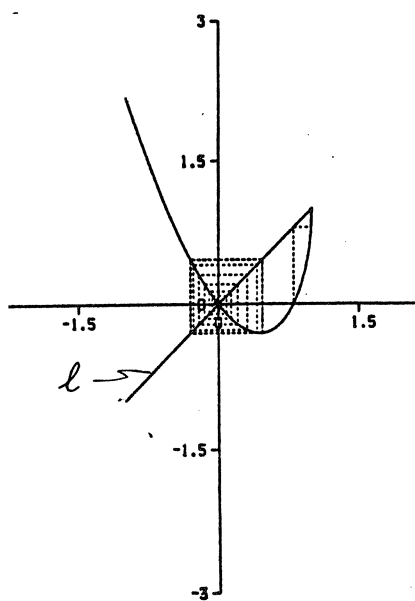
Deze eigenschap kan men als een *stabiliteitsvoorwaarde* zien (en lijkt op de voorwaarde in stelling 3.11a, indien we L bepalen voor de differentiaalvergelijking (5.3)). In de Figuren 5.2a en 5.2b hebben we in een grafiek zowel het successieve substitutie proces alsook het feitelijke resultaat van de berekeningen grafisch weergegeven voor $F=1$, $h=1$. We constateren dat Eigenschap 5.7 bevestigd wordt. In Figuur 5.3a en b hebben we hetzelfde gedaan, maar nu voor $F=1$, $h=2.25$ (dus $h > \frac{2}{\sqrt{F}}$). Merk op dat de oplossing aanvankelijk convergeert, daarna instabiel opblaast, en uiteindelijk hevig oscillerend verder gaat (ogenschijnlijk zelfs periodiek!).



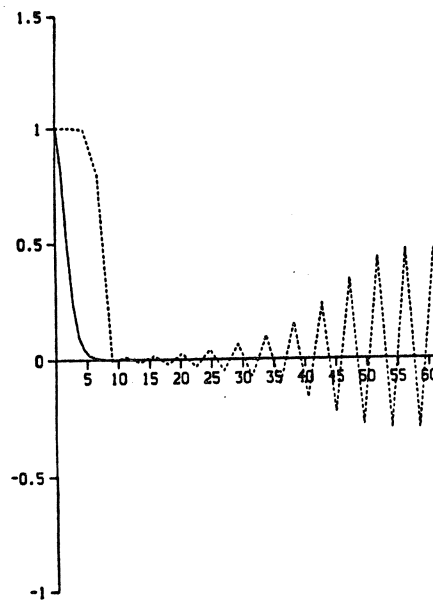
Figuur 5.2a Voorw. E $F=1$, $h=1$



Figuur 5.2b Voorw. E $F=1$, $h=1$



Figuur 5.3a Voorw. E $F=1$, $h=2.25$



Figuur 5.3b Voorw. E $F=1$, $h=2.25$

Beschouwen we nu de terugwaartse Euler-formule

$$x_{i+1} = x_i - hx_{i+1} \sqrt{F - x_{i+1}}. \quad (5.8)$$

We kunnen dit niet zo eenvoudig in een expliciete vorm krijgen als in het lineaire geval (zie paragraaf 4). We kunnen echter vaak x_{i+1} vinden d.m.v. successieve substitutie

$$\eta_{i+1} \equiv x_i - h\eta_i \sqrt{F - \eta_i} \quad (5.9)$$

met bijv. $\eta_0 = x_0$. Indien h klein genoeg is, convergeert dit proces zeker naar de oplossing x_{i+1} van (5.8). Een alternatief is om (5.8) te schrijven als $\pi(x_{i+1}) = 0$ en het nulpunt x_{i+1} van π m.b.v. de methode van Newton te bepalen. We gaan hier niet verder op in, maar trachten, net als bij de voorwaartse Euler-methode, uit te vinden hoe we het gedrag van $\{x_i\}$ kunnen analyseren. Definieer hiertoe een iteratiefunctie $\omega(\eta)$

$$\omega(\eta) := \eta(1 + h\sqrt{F - \eta}). \quad (5.10)$$

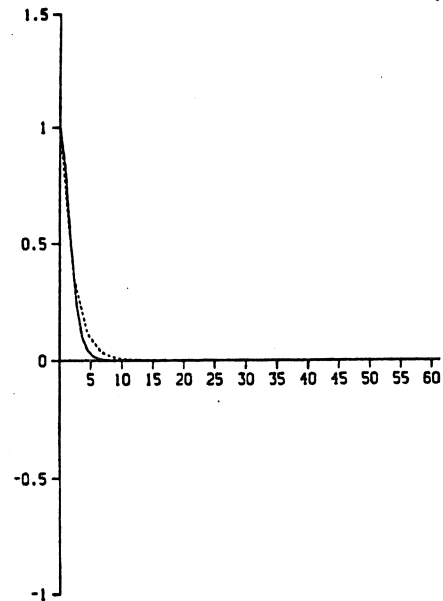
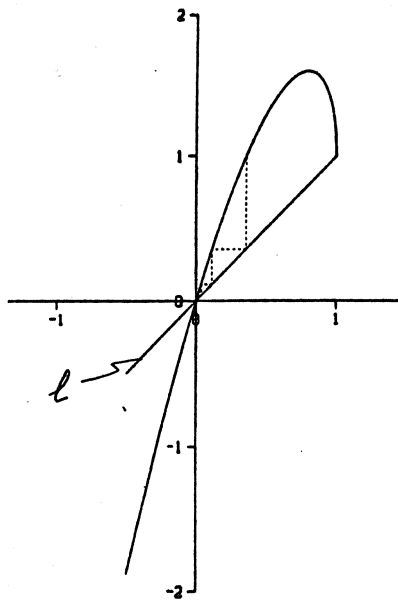
Indien $\eta = x_{i+1}$ willen we kennelijk $\omega(x_{i+1}) = x_i$ (cf. (5.8)). We hebben dus de iteratiefunctie van het inverse successieve substitutieproces. Een meetkundige interpretatie is mutatis mutandis als bij ϕ te geven. Merk bijv. op dat $|\omega'(\eta)| > 1$ voor alle η , zodat we meteen vinden

Eigenschap 5.11. De terugwaartse Euler-formule (5.8) geeft voor elke stapgrootte h een asymptotisch juiste oplossing.

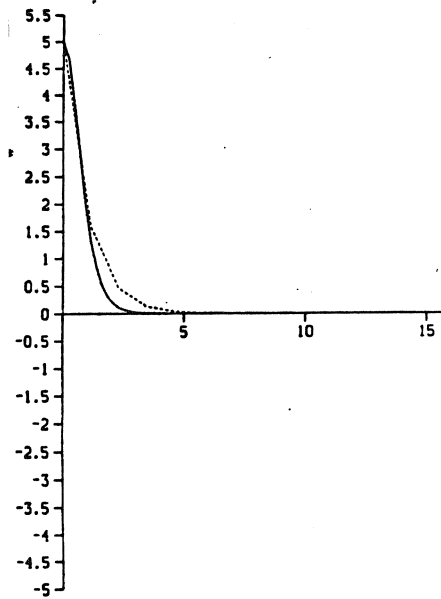
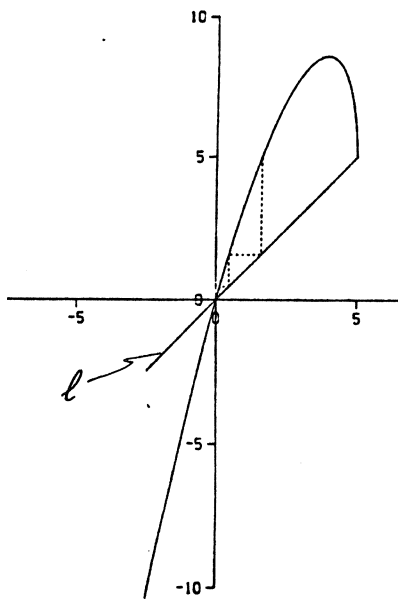
In Figuur 5.4a en b hebben we dit weergegeven voor het geval $F = 1$, $h = 2.25$ (instabiel bij de voorwaartse variant) en in Figuur 5.5a en b voor $F = 5$, $h = 1.15$.

De globale fout kunnen we (in ieder geval bij de voorwaartse Euler-formule) schatten m.b.v. Stelling 3.11. Merk echter op dat een constante stapgrootte niet aantrekkelijk is, omdat deze aanvankelijk zeer klein zou moeten zijn. Aangezien echter $x''(t) \rightarrow 0$, is voor grote t het probleem *stijf*, zodat we de terugwaartse Euler-formule moeten gebruiken en wel met steeds groter wordende stappen.

Over hoe dit praktisch gedaan kan worden, zijn boeken vol te schrijven. De geïnteresseerde lezer zij verwezen naar de literatuur.



Figuur 5.4a Terugw. E . $F=1$, $h=2.25$ Figuur 5.4b Terugw. E . $F=1$, $h=2.25$



Figuur 5.5b Terugw. E . $F=5$, $h=1.15$

Figuur 5.5a Terugw. E . $F=s$, $h=1.15$

LITERATUUR

Er bestaat een uitbundige literatuur over numerieke behandeling van differentiaalvergelijkingen. Hieronder geven we een selectie van leerboeken en monografieën voor hen die zich verder willen verdiepen in het onderwerp. Momenteel wordt er gewerkt aan een boek in de (Nederlandstalige) Epsilon serie. Tenslotte zijn de vele dictaten die op universiteiten en hogescholen voor handen zijn, vaak zeer geschikt om eventuele verdere leerstof uit te halen.

I. Gewone differentiaalvergelijkingen; beginwaardeproblemen

- C.W. GEAR, *Numerical Initial-Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
 J. HALL, J.M. WATT (eds.), *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, London, 1976.
 P. HENRICI, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
 J.D. LAMBERT, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1973.

II. Gewone differentiaalvergelijkingen; randwaardeproblemen

- U.M. ASCHER, R.M.M. MATTHEIJ, R.D. RUSSELL, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

III. Partiële differentiaalvergelijkingen

- A.R. MITCHELL, D.F. GRIFFITHS, *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 1980.
 G.D. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, London, 1971.
 R. WAIT, A.R. MITCHELL, *Finite Element Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1985.

Lineaire Differentievergelijkingen in de Informatica

A.J. van Zanten

*Technische Universiteit Delft
Postbus 356, 2600 AJ Delft*

1. INLEIDING

Zoals reeds verscheidene malen is opgemerkt, komen differentievergelijkingen (recurrente betrekkingen) voor in allerlei disciplines.

Een toepassingsgebied bij uitstek is de informatica. De reden daarvoor ligt voor de hand. Anders dan in de meer conventionele natuurwetenschappen, waar men veelal werkt met (geïdealiseerde) variabelen die continu kunnen veranderen en daarom leiden tot differentiaalvergelijkingen, werkt men in de informatica meestal met discrete (niet-continue) variabelen. Dit vindt natuurlijk zijn oorzaak in het 'discrete karakter' van de apparatuur (bits, bytes, geheugenplaatsen) en van de vorm van communicatie tussen mens en machine (karakters, woorden, strings, programma's). De wijze waarop differentievergelijkingen tot stand komen, is vrijwel altijd dezelfde. Men heeft zekere objecten, die recursief gedefinieerd zijn in de parameters van die objecten (getallen, functies, woorden, procedures, datastructuren). Kwantitatieve eigenschappen van de objecten geven dan via de recursieve definitie aanleiding tot differentievergelijkingen.

In het nu volgende worden een aantal voorbeelden gegeven van deze gang van zaken. Hopelijk zal duidelijk worden dat het formuleren en oplossen van de differentievergelijkingen, het recursief berekenen van de betrokken grootheden en het met volledige inductie bewijzen van de juistheid van een en ander, alle nauw met elkaar samenhangen.

2. EEN TELPROBLEEM UIT DE GRAMMATICA VAN EEN FORMELE TAAL

2.1. Definities

Formele talen, waarvan computertalen voorbeelden zijn, worden op een streng formele en meestal recursieve wijze gedefinieerd. Evenals bij gewone natuurlijke talen spreekt men van de grammatica van een formele taal. Zo'n grammatica bevat grammaticale begrippen die vergelijkbaar zijn met begrippen als onderwerp, lijdend voorwerp etc., waaruit weer grotere taaleenheden zijn te construeren.

Als voorbeeld beschouwen we een formele taal, waarvan de basissymbolen (te vergelijken met letters in een gewone taal) zijn: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, +, *, /. De komma's en de punt in deze opsomming zijn scheidingstekens en behoren niet tot de taal. Als grammaticale begrippen voert men o.a. in:

cijfer: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

getal: elke rij van één of meer cijfers

operator: +, *, /

Voorts is er het begrip aritmetische expressie, die altijd een van de volgende gedaanten heeft:

(i) getal operator getal

(ii) eerder gedefinieerde aritmetische expressie operator getal

met als enige uitzondering, dat nergens in een aritmetische expressie mag staan /0, al of niet gevolgd door een operator of cijfer. Dit laatste is er natuurlijk voor bedoeld, om het 'delen door 0' te voorkomen.

Duidelijk is dat deze definitie in verband met (ii) recursief van aard is. De hier gekozen omschrijving is overigens minder formeel dan de doorgaans in officiële grammatica's gebruikte notatie. Met de gegeven regels is een aritmetische expressie altijd volledig uit te drukken in de basissymbolen. Geoorloofde aritmetische expressies zijn: 2, $2*3$, 23, $2+3/5+0$, $2*000$, etc. Niet geoorloofd zijn: $+8$, $0/0$, $2/0+1$, $7*+9$, etc., en ook niet een rij als 7/05, hetgeen we in onze 'gewone taal' nog wel als een correcte deling van 7 door 5 zouden accepteren.

2.2. Aantal aritmetische expressies

We vragen ons nu af hoe groot het totale aantal grammaticaal correcte aritmetische expressies is met n basissymbolen.

Zij a_n dit aantal. De correcte expressies ter lengte n eindigen ofwel op 2 cijfers ofwel op een operator en een cijfer. De eerste situatie kan alleen maar optreden als de eerste $n-1$ symbolen al een correcte aritmetische expressie vormen. Van dit type zijn er dus $10a_{n-1}$: achter de eerste $n-1$ symbolen kunnen we elk van de 10 cijfers zetten. De tweede situatie treedt slechts op als de eerste $n-2$ symbolen een correcte expressie vormen. Van dit type zijn er $29a_{n-2}$, omdat we als laatste twee symbolen kunnen nemen: $+0$, $+1$, ..., $+9$, $*0$, $*1$, ..., $*9$, $/1$, $/2$, ..., $/9$.

Dus hebben we de volgende differentievergelijking

$$a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}, \quad n > 2$$

met beginvoorwaarden $a_1 = 10$, $a_2 = 100$. De karakteristieke vergelijking luidt

$$\alpha^2 - 10\alpha - 29 = 0$$

met als oplossingen $\alpha_{1,2} = 5 \pm 3\sqrt{6}$. Dus geldt $a_n = \lambda(5+3\sqrt{6})^n + \mu(5-3\sqrt{6})^n$, waarin λ en μ zo gekozen moeten worden dat aan de beginvoorwaarden is voldaan. Na een korte berekening vindt men voor $n \geq 1$

$$a_n = \frac{5}{3\sqrt{6}}[(5+3\sqrt{6})^n - (5-3\sqrt{6})^n].$$

3. COMPLEXITEIT VAN ALGORITMEN

3.1. Algoritmen

Een *algoritme* is een stel zorgvuldig geformuleerde regels of opdrachten, die bij uitvoering de oplossing geven van een of ander probleem. Men kan ook spreken van recept of handleiding. Een algoritme die in een computertaal geformuleerd is, heet doorgaans *programma*. Onder de *complexiteit* van een algoritme (programma) verstaat men zeer in het algemeen het totale aantal bewerkingen, dat wordt verricht bij uitvoering van de algoritme. Deze definitie is echter in hoge mate vaag. Wat moet men precies onder een bewerking verstaan? Dit begrip zal erg afhankelijk zijn van de (programmeer)taal waarin de algoritme is geschreven en van de variabelen of algemener van de datastructuren die men gebruikt. Een bepaalde bewerking in een algoritme, bijvoorbeeld een machtsverheffing kan op machineniveau in vele deelbewerkingen uiteenvallen. In het uiterste geval zou men dus alle machine-instructies moeten tellen. Zo ver hoeft men gelukkig niet te gaan als men alleen maar een schatting wil hebben van het aantal bewerkingen of het asymptotisch gedrag wil weten van dat aantal als functie van de parameters van de algoritme. Het is dan voldoende om de zogenaamde *basisbewerkingen* te tellen, die karakteristiek zijn voor de algoritme of voor het type probleem waarvoor deze algoritme is ontworpen.

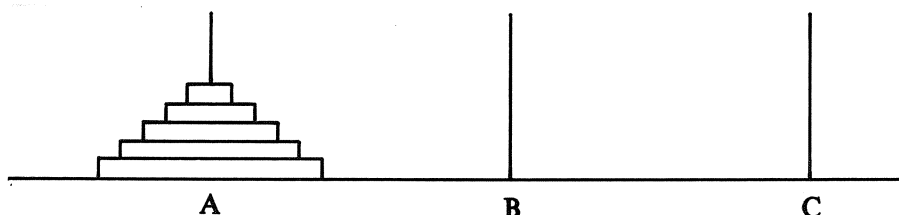
Wij geven hiervan een eenvoudig voorbeeld in de volgende paragraaf.

3.2. Torens van Hanoi

Het betreft een probleem uit de puzzelsfeer - voor sommigen welbekend - namelijk het probleem van de torens van Hanoi.

Gegeven zijn drie palen A , B en C . Om paal A zitten n schijven, die allemaal een verschillende diameter hebben. De schijven zijn zo gestapeld, dat van boven naar onderen de diameter steeds toeneemt.

De opgave luidt nu, de schijven naar paal C over te brengen, zo dat ze daar op dezelfde wijze zijn gestapeld als nu om A . Men mag slechts één schijf tegelijk verplaatsen en het mag nooit gebeuren dat een grotere schijf op een kleinere ligt. Paal B mag bij het overbrengen als hulppaal gebruikt worden.



Het bewijs van het bestaan van een oplossing voor dit probleem voor elke waarde van n is verbluffend eenvoudig. Stel dat er een oplossing is voor $n - 1$ schijven. Breng dan de bovenste $n - 1$ schijven op de voorgeschreven wijze van paal A naar paal B , waarbij paal C als hulppaal wordt gebruikt. Breng dan de n de schijf naar C en vervolgens de $n - 1$ schijven die nog om paal B zitten naar paal C , met A als hulppaal. Omdat het probleem voor $n = 1$ triviaal is en een oplossing heeft door de ene schijf direct van A naar C te verplaatsen is hiermee niet alleen het bestaan van een oplossing aangetoond, maar is ook op recursieve wijze een oplossing (algoritme) beschreven!

Als inleiding tot bovenstaand probleem wordt vaak verteld hoe een tempelpriester ergens in Zuid-Oost-Azië zijn dagen doorbrengt met een stapel van 64 gouden ringen op deze wijze te verplaatsen en dat op het ogenblik dat hij dit karwei voltooid zal hebben de wereld zal vergaan. De vraag naar de complexiteit van de beschreven algoritme is dus zeker niet van enige maatschappelijke relevantie ontbloomt!

Vanzelfsprekend definiëren we hier als basisbewerking het verplaatsen van een ring. Zij a_n het totale aantal verplaatsingen. Uit de recursieve opbouw van de algoritme volgt dan dat

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, & n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking luidt

$$\alpha - 2 = 0$$

met als enige karakteristieke wortel $\alpha_1 = 2$. Omdat $a_n = -1$ een (particuliere) oplossing is van de differentievergelijking luidt de algemene oplossing

$$a_n = A2^n - 1.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt tenslotte $2A - 1 = 1$, dus $A = 1$ en

$$a_n = 2^n - 1.$$

Voor grote waarden van n is de term -1 in het rechterlid natuurlijk volstrekt onbelangrijk en er geldt dan $a_n \approx 2^n$. Men spreekt daarom van een exponentiële algoritme. Het aantal bewerkingen neemt in zo'n geval zeer snel toe. Een goed ingewerkte monnik, die de algoritme kent en per seconde 1 verplaatsing kan uitvoeren, zal in zijn leven toch zeker niet meer dan 30 ringen kunnen verwerken, ook al werkt hij dag en nacht door.

3.3. Een recursieve procedure

Nog afgezien van de bewerkelijkheid is de algoritme, zoals in 3.2 geformuleerd, ook niet goed uitvoerbaar, althans niet voor mensen. We zullen, om dit nog wat beter in te zien, de algoritme op een korte en bondige wijze opschrijven. De manier van opschrijven zal sterk verwant zijn aan formuleringen, die in echte programmeertalen gebruikt worden.

We geven de algoritme de naam hanoi of nog wat uitgebreider hanoi (n, A, B, C) om aan te geven, dat hij n ringen zal verplaatsen van paal A naar paal C met B als hulppaal (n, A, B en C heten wel de *parameters* van de algoritme). Onder de naam schrijven we nu de definitie van de algoritme:

hanoi (n, A, B, C)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{als } n = 1 & \text{dan verplaats ring van } A \text{ naar } C \\ \text{anders} & \left\{ \begin{array}{l} \text{hanoi } (n-1, A, C, B); \\ \text{verplaats ring van } A \text{ naar } C; \\ \text{hanoi } (n-1, B, A, C) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Men kan eenvoudig nagaan, dat hier in essentie dezelfde oplossing staat als die in het begin gegeven is. Als $n=1$ is, dan hoeft men slechts de ene ring te verplaatsen. Als $n>1$ is, moet men eerst $n-1$ ringen verplaatsen van A naar B met C als hulppaal, de laatste ring van A naar C brengen en vervolgens $n-1$ ringen van B naar C verplaatsen met A als hulppaal.

Een algoritme als deze, die afhangt van parameters, die men naar believen waarden kan geven, heet ook wel *procedure*. In dit geval spreekt men zelfs van recursieve procedure, omdat in de definitie de naam van de procedure zelf weer opduikt, zij het met andere parameterwaarden. Men zegt ook wel, dat de procedure zichzelf aanroept.

Stel dat men 10 ringen wil verplaatsen. De oplossing wordt dan gegeven door hanoi ($10, A, B, C$). Bij de uitvoering hiervan wordt echter hanoi ($9, A, C, B$) aangeroepen en even later ook nog hanoi ($9, B, A, C$) (aanroepen op het 1ste niveau). Bij uitvoering van deze procedures worden echter weer aangeroepen hanoi ($8, A, B, C$) en hanoi ($8, C, A, B$), respectievelijk hanoi ($8, B, C, A$) en hanoi ($8, A, B, C$) (aanroepen op het 2de niveau).

Voortdurend wordt de parameterwaarde van n verlaagd en gaat men een niveau dieper. Uiteindelijk worden de parameterwaarden van n gelijk aan 1 en houdt de recursie op. Inmiddels is het aantal bewerkingen (verplaatsingen) zo groot geworden en hun volgorde zo ingewikkeld, dat het voor een menselijke uitvoerder niet doenlijk is om dat allemaal te onthouden. Mensen kunnen slechts 'enkele niveaus diep denken'. Het uitvoeren van een recursieve algoritme is een typische computeractiviteit. De hier gegeven procedure is daarom uitstekend geschikt voor simulatie van het probleem op een computer.

Blijft over de vraag of het toch mogelijk is de algoritme zodanig te formuleren, dat een mens er ook mee uit de voeten kan. Het liefst een

formulering, waarbij de te verrichten verplaatsingen achter elkaar worden opgenoemd (*iteratieve algoritme*).

Inderdaad blijkt zoiets te kunnen, maar op een wel zeer onverwachte wijze. Ter voorbereiding bespreken we in de nu volgende paragraaf een probleem, dat daar ogenschijnlijk niets mee te maken heeft.

4. GRAY-CODES

4.1. Binaire representatie en codes

Iedereen is vertrouwd met de binaire representatie van gehele getallen. Als $N \in \mathbb{N}$, dan is N op éénduidige wijze te schrijven als

$$N = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \dots + b_0$$

met

$$b_{n-1} = 1, b_0, b_1, \dots, b_{n-2} \in \{0, 1\}.$$

Men zegt dat

$$b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$$

de binaire representatie van N is. Ook spreekt men wel van het binaire getal $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$ van lengte n en met waarde N . Eventueel kan men links van b_{n-1} nog extra nullen zetten. Hierdoor verandert wel de lengte, maar niet de waarde. Naar goed gebruik in de informatica noemt men b_i het *i*de bit van het binaire getal.

Als voorbeeld sommen we hier alle binaire getallen van lengte 3 op, zodanig dat ze achtereenvolgens de waarden 0,1,...,7 representeren:

000
001
010
011
100
101
110
111

We zouden deze 8 'bitwoorden' kunnen zien als coderingen van de getallen 0,1,...,7. In dit verband spreekt men ook wel van *codewoorden* en men noemt de verzameling van codewoorden een *code*. Hierboven staat dus een 3-bits code. Bezien we de rij codewoorden van boven naar beneden, dan valt op dat bij overgang naar een volgend codewoord er soms 2 bits veranderen en soms slechts 1. Als we vanuit het laatste woord weer terugkeren naar het eerste, veranderen er zelfs 3 bits. Men kan zich afvragen of er voor de getallen 0,1,...,7 ook een 3-bits code bestaat, zodanig dat elk tweetal opeenvolgende codewoorden in slechts 1 bit-positie verschillen. Dit kan inderdaad, zoals de volgende 3-bits code laat zien:

000
001
011
010
110
111
101
100

In het algemeen noemt men een n -bits code met 2^n woorden een *Gray-code*, als de rangschikking van de woorden zodanig is, dat elk tweetal opeenvolgende woorden in precies 1 bit-positie van elkaar verschillen. Als het laatste en het eerste woord ook nog in 1 bit-positie verschillen, dan spreekt men van een *cyclische Gray-code*.

4.2. De binair-gespiegelde Gray-code

Voor een vaste waarde van n bestaan er in het algemeen vele Gray-codes. De bekendste is echter wel de zogenaamde binair-gespiegelde Gray-code G_n , kortweg aangeduid als *de* Gray-code. We spreken af, dat we de woorden van G_n rangschikken in een $(2^n \times n)$ -matrix

$$G_n = \begin{pmatrix} g_0^n \\ g_1^n \\ \vdots \\ g_{2^n-1}^n \end{pmatrix}$$

waarin

$$g_i^n := g_{i,n-1}^n g_{i,n-2}^n \dots g_{i,0}^n$$

het i de codewoord voorstelt ($0 \leq i \leq 2^n - 1$). De 3-bits code van het laatste voorbeeld is de code G_3 . Hierin is bijvoorbeeld $g_1^3 = 001$ en $g_7^3 = 100$.

Algemeen definiëren we nu recursief

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad G_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & g_0^n \\ 0 & g_1^n \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & g_{2^{n-1}}^n \\ 1 & g_{2^n-1}^n \\ 1 & g_{2^n-2}^n \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & g_0^n \end{bmatrix}, \quad n > 0. \quad (4.1)$$

Uit de definitie volgt onmiddellijk voor $n = 1$, dat

$$G_2 = \begin{bmatrix} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

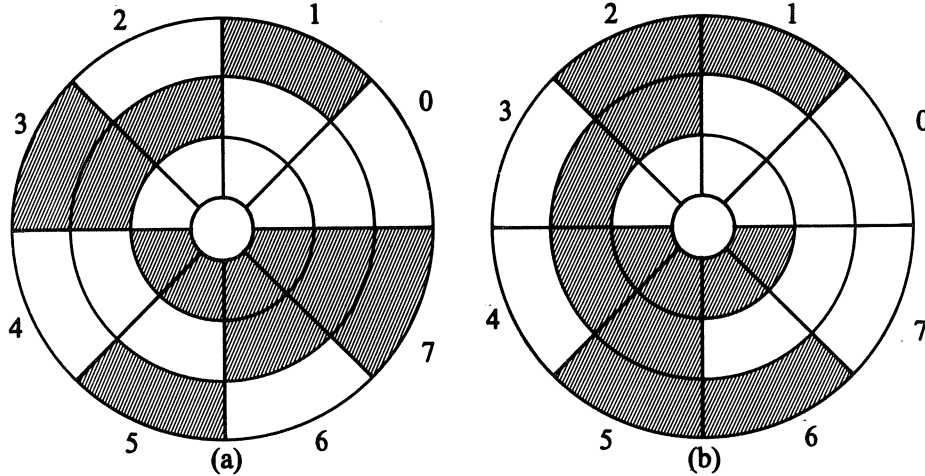
De reeds genoemde code G_3 volgt hieruit weer door nogmaals de definitie toe te passen.

Men ziet eenvoudig in, dat de aldus gedefinieerde codes G_n voor alle $n > 0$ de gewenste eigenschap hebben en dat ze zelfs cyclisch zijn. Deze Gray-codes zijn zowel van theoretisch als van praktisch belang.

4.3. Enkele toepassingen

Een praktische toepassing treedt aan de dag, wanneer men alle binaire getallen van lengte n wil laten afdrukken. Wil men dat zo efficiënt mogelijk doen, dan is het zaak dat na het afdrukken van een bepaald getal het daarna af te drukken getal er zo weinig mogelijk van verschilt. Een verandering van 1 bit per woord elke keer is dan het minimum wat men kan verwachten. Een afdruk algoritme gebaseerd op de Gray-code zal daarom het meest efficiënt zijn. Voor grote waarden van n kan men zo een aanzienlijke besparing van tijd bereiken.

Een andere toepassing vindt (vond) men bij bepaalde afleesapparatuur. Stel dat één of andere fabrieksmachine zich in 8 toestanden kan bevinden. Deze toestanden corresponderen met de 8 sectoren op een draaibare schijf. De sectoren zijn bedekt met stroken geleidend materiaal (om een 1 te representeren) of niet bedekt, in welk geval ze niet geleidend zijn (om een 0 te representeren). Het aflezen van de toestand gebeurt door middel van elektrische stroompjes, die via de geleidende delen van de schijf naar 3 vaste metalen borstels (zie figuur) lopen, die met de schijf contact maken.



Zonder verder op technische bijzonderheden in te gaan, zal het duidelijk zijn, dat bij het aflezen fouten gemaakt kunnen worden als de borstels zich op de grens van twee sectoren bevinden. Bij schijf *a*, gebaseerd op de natuurlijke ordening van 0,1,...,7 zouden de borstels op de lijn tussen 1 en 2 af kunnen lezen: 001, 000, 011 of 010. Bij schijf *b*, gebaseerd op de cyclische Gray-code zijn er slechts de mogelijkheden 001 en 011. De kans op fouten is bij schijf *b* dus geringer.

4.4. Overgangsrijen

We onderzoeken nu de n -bits Gray-code wat nader. Voor vaste n is er de mogelijkheid, om de code nog op een andere manier te genereren dan in de definitie is aangegeven. Daartoe voeren we het begrip *overgangsrij* in. We nummeren de kolommen van de matrix G_n met de getallen 0,1,..., $n-1$ van rechts naar links en spreken af, dat het getal t_i , $0 \leq i \leq 2^n - 2$, die ene kolom aangeeft in het woord g_i^n , waarin bij overgang naar het woord g_{i+1}^n de verandering optreedt. De rij getallen

$$T_n := (t_0, t_1, \dots, t_{2^n-2})$$

heet de overgangsrij van G_n . Voor G_3 hebben we dus als overgangsrij $T_3 = (0, 1, 0, 2, 0, 1, 0)$. Met volledige inductie is eenvoudig in te zien, dat T_n als volgt kan worden vastgelegd

$$\begin{cases} T_1 = (0), \\ T_{n+1} = (T_n, n, T_n), \quad n > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Kent men de rij T_n , dan kan men uitgaande van $g_0^n = 00\dots 0$ alle woorden van G_n produceren.

Behalve de definiërende relaties (4.1) is er een alternatieve definitie van G_n , waarvan op vrij eenvoudige wijze de equivalentie met (4.1) kan worden bewezen. Met het oog op de toepassing in paragraaf 5 geven we ook deze definitie. Zijn $g_0^n, g_1^n, \dots, g_{2^n-1}^n$ weer de woorden van G_n , dan geldt

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{n+1} = \begin{bmatrix} g_0^n & 0 \\ g_0^n & 1 \\ g_1^n & 1 \\ g_1^n & 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad n > 0. \quad (4.3)$$

Hieruit volgt, dat we voor de overgangsrij T_{n+1} kennelijk ook kunnen schrijven

$$T_{n+1} = (0, t_0 + 1, 0, t_1 + 1, \dots, 0, t_{2^n-2} + 1, 0) \quad (4.4)$$

waarin $t_0, t_1, \dots, t_{2^n-2}$ de getallen van T_n zijn.

4.5. Een niet-recursieve constructie van G_n

Een voor de hand liggende vraag is of men ook direct het ide woord g_i^n van G_n kan opschrijven, zonder dat men eerst alle voorafgaande woorden produceert.

Wij vermelden hier alleen het resultaat. We schrijven voor het ide code-woord g_i^n van G_n

$$g_i^n = g_{i,n-1} g_{i,n-2} \dots g_{i,1} g_{i,0} \quad (4.5)$$

waarbij we, in tegenstelling met een eerder gebruikte notatie, in het rechterlid de boven-indices n hebben weggelaten (zie ook de appendix). Zij voorts de binaire representatie van het rangnummer i gelijk aan

$$b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0 \quad (4.6)$$

dan geldt

$$g_{i,k} = b_{k+1} + b_k \pmod{2}, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (4.7)$$

als we nog invoeren $b_n = 0$. Het bewijs van deze betrekking kan met behulp van recurrente betrekkingen worden gegeven, maar is wat technisch van aard. De geïnteresseerde lezer wordt hiervoor naar de appendix verwezen.

Betrekking (4.7) kan men nog op de volgende wijze als praktijkregel formuleren:

$$\begin{array}{rcl} i: & b_{n-1} & b_{n-2} \dots b_1 & b_0 \\ \lfloor \frac{i}{2} \rfloor: & 0 & b_{n-1} \dots b_2 & b_1 \\ \hline & & & \oplus \\ g_i^n: & g_{i,n-1} & g_{i,n-2} \dots g_{i,1} & g_{i,0} \end{array}$$

Zo is het 6de codewoord van G_3 :

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \end{array} \oplus$$

5. EEN VERRASSEND VERBAND

We denken nog eens even terug aan de 'onmenselijke' algoritme voor het probleem van de torens van Hanoi. We geven de n schijven de nummers $0, 1, \dots, n-1$ van klein naar groot. Onze algoritme vereiste $2^n - 1$ verplaatsingen. Deze verplaatsingen nummeren we met de getallen $0, 1, \dots, 2^n - 2$.

Stel dat bij de i de verplaatsing schijf d_i verplaatst wordt. De vraag naar welke paal laten we nog even in het midden. We definiëren dan de *verplaatsingsrij* D_n als

$$D_n := (d_0, d_1, \dots, d_{2^n-2}).$$

Bij uitvoering van de algoritme moest men eerst de bovenste $n-1$ schijven verplaatsen, dan de grootste schijf, die hier nummer $n-1$ heeft, en vervolgens weer de eerste $n-1$ schijven. Dit geeft aanleiding tot de recursieve betrekking

$$\begin{cases} D_1 = (0), \\ D_n = (D_{n-1}, n-1, D_{n-1}), \quad n > 1. \end{cases}$$

Vergelijking met (4.2) uit de vorige paragraaf leert, dat de verplaatsingsrij D_n identiek is aan de rij T_n , de overgangsrij van de Gray-code G_n .

Op het eerste gezicht lijkt dit op niet meer dan een leuk verband tussen beide problemen. Als we de overgangsrij T_n kennen, weten we dus welke schijf we elke keer moeten verplaatsen. Nog niet duidelijk is echter waar de schijf naar toe moet. Bovendien lijkt het alsof de recursiviteit van de algoritme alleen maar verschoven is naar het recursief bepalen van de overgangsrij T_n .

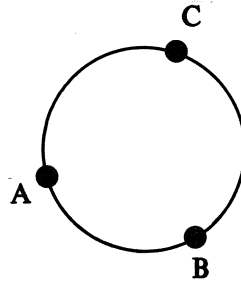
Gelukkig kennen we nog de andere uitdrukking (4.4) voor T_n , die ons voor D_n levert

$$D_n = (0, d_0+1, 0, d_1+1, 0, \dots, 0, d_{2^{n-1}-2}+1, 0)$$

en waarin $(d_0, d_1, \dots, d_{2^{n-1}-2})$ de verplaatsingsrij D_{n-1} is, $n > 1$.

Hieruit volgt, dat de kleinste schijf om de andere keer verplaatst moet worden. Daar tussendoor moeten andere schijven met nummers $d_0+1, d_1+1, \dots$ verplaatst worden. Deze nummers zijn echter onbelangrijk, omdat er steeds maar één schijf is die echt verplaatst *kan* worden zonder dat hij op een kleinere schijf terecht komt. En wel is dit de kleinste van de twee topschijven van de stapels waar 0 *niet* op ligt. Bovendien kan deze schijf maar naar één paal toe, daar ook hij anders bovenop een kleinere schijf komt te liggen.

Het enige overgebleven probleem is nog waar schijf 0 elke keer naar toe moet. Hiervoor blijkt een eenvoudig voorschrift te bestaan. Denk de 3 palen A, B en C op de omtrek van een cirkel geplaatst.



Als n even is, moeten we schijf 0 steeds zo verplaatsen, dat deze de cirkel in positieve richting (tegen de wijzers van de klok in) doorloopt. Is n oneven, dan moet de cirkel door schijf 0 in negatieve richting worden doorlopen. Het bewijs van dit voorschrift kan men weer eenvoudig met volledige inductie geven.

Aldus is onze 'onmenselijke' recursieve algoritme gereduceerd tot een zogenaamde iteratieve algoritme, met een wel zeer menselijk trekje: er hoeft bij de uitvoering nauwelijks meer nagedacht te worden!

APPENDIX

In paragraaf 4 was de Gray-code G_n gedefinieerd als een rij van alle 2^n binaire getallen van lengte n (bitwoorden), die op een zeer speciale manier gerangschikt zijn. In vorige hoofdstukken zagen we, hoe rijen natuurlijke getallen soms in een genererende functie kunnen worden ondergebracht, zodanig dat deze getallen als coëfficiënten verschijnen bij ontwikkeling van die functie als machtreeks.

Iets dergelijks beogen wij voor de woorden van G_n . Ons doel is een genererende functie af te leiden, die bij ontwikkeling als machtreeks de codewoorden van G_n als 'coëfficiënten' levert. Een voordeel van zo'n functie is, dat men op handige wijze kan manipuleren met de codewoorden en op betrekkelijk eenvoudige wijze sommige eigenschappen kan afleiden.

Aangezien het hier codewoorden betreft en (in eerste instantie) geen natuurlijke getallen zullen we iets anders te werk moeten gaan dan bij 'gewone' genererende functies. In plaats van met de codewoorden zelf zullen we werken met zekere polynomen, die één-éénduidig met de codewoorden corresponderen. Bij het woord $g_i^n := g_{i,n-1}g_{i,n-2}, \dots, g_{i,0}$ definiëren we het polynoom

$$G_i^n(x) := g_{i,n-1}x^{n-1} + g_{i,n-2}x^{n-2} + \dots + g_{i,0}. \quad (\text{A.1})$$

In plaats van $g_{i,j}^n$ is hier voor het gemak geschreven $g_{i,j}$, met weglaten van de bovenindex n . Dit kan zonder al te grote bezwaren, daar de bits van het idee woord g_i^n (i vast) eigenlijk onafhankelijk zijn van n , mits $i \leq 2^n - 1$. Het enige dat er gebeurt als n toeneemt is, dat er extra nullen aan de linkerkant worden toegevoegd (zie 4.1).

De getallen $g_{i,j}$, $0 \leq j \leq n-1$, zijn allemaal gelijk aan 0 of 1. We vatten deze getallen op als elementen van het lichaam $GF(2)$, hetgeen er in de praktijk eenvoudig op neer komt, dat we ze optellen en vermenigvuldigen modulo 2. Men zegt, dat de polynomen uit (A.1) polynomen over $GF(2)$ zijn. De code G_n vatten we nu op als de rij polynomen $G_i^n(x)$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

Uit (4.4) volgt voor $i \geq 1$ en $n > 0$, dat

$$\begin{cases} G_i^{(n+1)}(x) = G_{i-1}^{(n+1)}(x) + 1, & i \text{ oneven,} \\ G_i^{(n+1)}(x) = G_{i-1}^{(n+1)}(x) + x[G_{i/2}^{(n)}(x) + G_{i/2-1}^{(n)}(x)], & i \text{ even,} \\ G_0^{(n)}(x) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Bedenk dat in verband met het rekenen mod 2 er geen verschil meer is tussen '+1' en '-1'. We merken nog op dat er in (A.2) recursie is naar zowel n als naar i . We voeren in de hulppolynomen

$$H_i^{(n)}(x) = G_i^{(n)}(x) + G_{i-1}^{(n)}(x), \quad 1 \leq i \leq 2^n - 1, \quad n > 0. \quad (\text{A.3})$$

Uit (A.2) volgen voor $n > 0$ de recurrente betrekkingen

$$\begin{cases} H_i^{(n+1)}(x) = 1, & i \text{ oneven,} \\ H_i^{(n+1)}(x) + xH_{i/2}^{(n)}(x) = 0, & i \text{ even.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Als generalisatie van genererende functies voor getallen voeren we nu in een

genererende functie voor de polynomen $H_i^{(n)}(x)$:

$$\mathcal{H}^{(n)}(x, y) := \sum_{i=1}^{2^n-1} H_i^{(n)}(x) y^i. \quad (\text{A.5})$$

Omdat geldt (zie (A.2) en (A.3)) dat

$$G_i^{(n)}(x) = H_1^{(n)}(x) + H_2^{(n)}(x) + \dots + H_i^{(n)}(x) \quad (\text{A.6})$$

volgt door op de gebruikelijke wijze met de sommatie-operator $\frac{1}{1+y}$ te vermenigvuldigen, dat de volgende functie een genererende functie is van de 'woorden' $G_i^{(n)}(x)$

$$\mathcal{G}^{(n)}(x, y) = \frac{\mathcal{H}^{(n)}(x, y)}{1+y}. \quad (\text{A.7})$$

We introduceren nu de *orde* van een positief geheel getal l als het aantal factoren 2 die in l zijn bevat ofwel

$$\text{ord}(l) = k \Leftrightarrow 2^k | l, 2^{k+1} \nmid l. \quad (\text{A.8})$$

Uit (A.4) en (A.5) volgt dan

$$\mathcal{H}^{(n)}(x, y) = \sum_{\text{ord}(l)=0} y^l + x \sum_{\text{ord}(l)=1} y^l + \dots + x^{n-1} \sum_{\text{ord}(l)=n-1} y^l. \quad (\text{A.9})$$

De sommaties over l in (A.9) lopen vanaf 1 tot en met $2^n - 1$. Echter kunnen we deze zonder bezwaar naar ∞ laten doorlopen en bovendien kunnen we alle soortgelijke termen met hogere machten van x toevoegen. De extra termen dragen toch niet bij tot de coëfficiënt van $x^k y^i$ als $0 \leq k \leq n-1$ en $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Het voordeel is dat we dan een genererende functie krijgen, die gemakkelijker hanteerbaar is. In plaats van (A.9) beschouwen we dus

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{\text{ord}(l)=0} y^l + x \sum_{\text{ord}(l)=1} y^l + \dots. \quad (\text{A.10})$$

We gaan dit nog wat handiger schrijven. Er geldt

$$\frac{1}{1+y^{2^k}} = 1 + y^{2^k} + y^{2^{k+1}} + \dots, \quad (\text{A.11})$$

waarbij alle machten van y optreden, waarvan de exponent deelbaar is door 2^k . Tellen we nu hierbij op de ontwikkeling van $\frac{1}{1+y^{2^{k+1}}}$, dan is duidelijk dat alleen die exponenten overblijven waarvan de orde gelijk is aan k ofwel

$$\sum_{\text{ord}(l)=k} y^l = \frac{1}{1+y^{2^k}} + \frac{1}{1+y^{2^{k+1}}} = \frac{y^{2^k}}{1+y^{2^{k+1}}}. \quad (\text{A.12})$$

Dus geldt

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_k \frac{x^k y^{2^k}}{1+y^{2^{k+1}}}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_k \frac{x^k y^{2^k}}{(1+y^{2^{k+1}})(1+y)}. \quad (\text{A.14})$$

De functie $\mathcal{G}(x,y)$ bevat dus *alle* informatie over *alle* Gray-codes G_n !

We zullen tenslotte de vraag beantwoorden hoe het *ide* codewoord van G_n ofwel hoe $G^{(n)}_i(x)$ er precies uitziet. Daartoe moeten we $\mathcal{G}(x,y)$ naar machten van x en y ontwikkelen. De coëfficiënt van x^k in $G^{(n)}_i(x)$ (dit is het k de bit $g_{i,k}$ in het *ide* codewoord) is namelijk gelijk aan de coëfficiënt van $x^k y^i$ in deze ontwikkeling (gevolg van (A.6) en (A.7)). In het voorafgaande bleek dat die coëfficiënt gelijk is aan 0 of 1 al naar gelang het totale aantal getallen l met $l \leq i$ en $\text{ord}(l)=k$ even dan wel oneven is.

Stel dat i binair wordt voorgesteld als

$$b_n b_{n-i} \dots b_{k+1} b_k \dots b_0$$

waarin $b_n = 0$.

Het totale aantal getallen l met $l \leq i$ en $2^k | i$ is

$$\lfloor \frac{i}{2^k} \rfloor = b_n 2^{n-k} + \dots + b_{k+1} 2 + b_k.$$

Analoog is het totale aantal getallen l met $l \leq i$ en $2^{k+1} | i$ gelijk aan

$$\lfloor \frac{i}{2^{k+1}} \rfloor = b_n 2^{n-k-1} + \dots + b_{k+1}.$$

Dus is het gezochte aantal gelijk aan

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{i}{2^k} \rfloor - \lfloor \frac{i}{2^{k+1}} \rfloor &= b_n (2^{n-k} - 2^{n-k-1}) + \dots + \\ &+ b_{k+2} (2^2 - 2) + b_{k+1} (2 - 1) + b_k = b_{k+1} + b_k \pmod{2}. \end{aligned}$$

We concluderen dat

$$g_{i,k} = b_{k+1} + b_k \pmod{2}. \quad (\text{A.15})$$

Niet-lineaire Differentievergelijkingen in de Informatica

A.J. van Zanten
Technische Universiteit Delft
Postbus 356, 2600 AJ Delft

1. BITPATRONEN

1.1. Definities

We beschouwen bitrijen van lengte n . Onder een *patroon* verstaan we één of meer op elkaar volgende nullen en enen zoals 01 of 1011.

We zeggen, dat een bepaald patroon optreedt op de k de plaats in een bitrij, als het laatste bit van het patroon op de k de plaats in de rij staat.

Als voorbeeld nemen we het patroon 010 en de bitrij

110101010101.

Overeenkomstig onze afspraak treedt het patroon op in de rij op de 5de plaats. We maken nu een aanvullende afspraak in verband met het tellen van het aantal keren, dat een patroon in een rij voorkomt, namelijk dat patronen elkaar niet mogen overlappen. Een patroon moet eerst in zijn geheel zijn opgetreden alvorens men verder mag zoeken naar een volgend patroon in de rij.

Zo treedt in ons voorbeeld het patroon 010, behalve op de 5de plaats, ook nog op de 9de plaats op, maar niet op de 7de en ook niet op de 11de plaats.

1.2. Aantal bitrijen met een patroon op de n de plaats

Zij nu a_n het aantal bitrijen van lengte n , waarin het patroon 010 optreedt op de n de plaats. We kunnen vrij eenvoudig een lineaire differentievergelijking afleiden voor a_n . Daartoe beschouwen we *alle* rijen van lengte n , met 010 op de laatste 3 plaatsen

$\underbrace{\bullet \bullet \bullet \dots \bullet}_{n-3} 010$

Omdat op de eerste $n-3$ plaatsen overal zowel een 0 als een 1 mag staan, zijn er in totaal 2^{n-3} van zulke rijen. Deze verzameling rijen valt uiteen in 2 disjuncte deelverzamelingen:

- (i) bitrijen met het patroon 010 op de n de plaats;
- (ii) bitrijen met het patroon 010 niet op de n de plaats.

Van type (i) zijn er per definitie a_n . Van type (ii) zijn er a_{n-2} . Immers, als een rij eindigt op 010 maar als 010 niet op de n de plaats staat, kan dit alleen maar veroorzaakt worden doordat het patroon op de $(n-2)$ de plaats staat. Dus vinden we als differentievergelijking

$$\begin{cases} a_n + a_{n-2} = 2^{n-3}, & n > 2, \\ a_1 = a_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

De vergelijking is lineair, heeft constante coëfficiënten en het bekende rechterlid is uiterst geschikt om met succes een particuliere oplossing te zoeken. De standaardmethode met karakteristieke wortels ligt dus zeer voor de hand. Omdat het ons echter eigenlijk begonnen is om een ander probleem, dat we straks nog zullen formuleren, gaan we hier aan de slag met genererende functies. We voeren in

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

met daarbij de afspraak $a_0 = 1$. Deze keuze voor a_0 is hier volstrekt willekeurig, maar zal later van voordeel blijken te zijn. Let er op, dat met $a_0 = 1$ de differentievergelijking géén geldigheid verkrijgt voor $n = 2$!

We bepalen de functie $A(x)$ nu op de gebruikelijke wijze. Uit (1) volgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n &= \sum_{n=3}^{\infty} 2^{n-3} x^n, \\ A(x) - 1 + x^2[A(x) - 1] &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n, \\ (x^2 + 1)A(x) &= x^2 + 1 + \frac{x^3}{1-2x}, \\ A(x) &= \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}. \end{aligned}$$

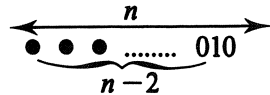
Is men geïnteresseerd in de numerieke waarden van de coëfficiënten a_n , dan is *breuksplitsing* verder de weg die bewandeld moet worden. Dit leidt tot

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-2x+x^2}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{5} \frac{x-2}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \frac{1}{5} (x-2) \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n. \end{aligned}$$

Hieruit kan men zonder veel moeite de waarde van a_n berekenen.

1.3. Aantal bitrijen met een patroon voor het eerst op de n de plaats

De volgende vraag die wij onszelf stellen is om het aantal bitrijen te bepalen van lengte n , zodanig dat opnieuw het patroon 010 optreedt op de n de plaats en dat dit *de eerste keer* is dat het patroon in die rij optreedt. Met andere woorden, de rijen hebben de gedaante



en op de eerste $n-2$ plaatsen treedt nergens het patroon 010 op.

Zij b_n het gevraagde aantal. We beschouwen *alle* rijen van lengte n met 010 op de n de plaats. Hiervan zijn er a_n (zie het hiervoor behandelde probleem). Bij b_n van deze rijen gebeurt dit optreden voor het eerst op de n de plaats. Als 010 niet voor het eerst op de n de plaats optreedt, gebeurt dit kennelijk al eerder. Het patroon kan natuurlijk niet op de $(n-1)$ ste plaats optreden, maar ook niet op de $(n-2)$ de plaats, hoewel het $(n-2)$ de bit een 0 is. Immers, dan zou het patroon niet op de n de plaats kunnen optreden in verband met 'overlap'. Het patroon kan echter wel optreden op de k de plaats met $3 \leq k \leq n-3$. Er zijn b_k rijen mogelijk met het patroon voor het eerst op de k de plaats. Daarachter staat dan steeds een bitrij van lengte $n-k$ en met 010 op de $(n-k)$ de plaats. Hiervoor zijn a_{n-k} mogelijkheden. Het totale aantal rijen met het patroon 010 op de n de plaats en voor het eerst op de k de plaats is dus $b_k a_{n-k}$. We vinden zo de volgende differentievergelijking

$$a_n = b_n + b_{n-3}a_3 + b_{n-4}a_4 + \dots + b_3a_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

De vergelijking is bilineair in de a - en b -variabelen.

Gebruik nu de beginvoorwaarden $b_1 = b_2 = 0$, $b_0 = 0$ (keuze), $a_1 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$ (zie vorig probleem) en er komt

$$a_n = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_1b_{n-1} + a_0b_n, \quad n \geq 3.$$

Hier herkent men de coëfficiënten van het produkt van

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{en} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Op de bekende wijze krijgen we

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} (a_n b_0 + \dots + a_0 b_n) x^n$$

ofwel

$$A(x) - 1 = A(x)B(x)$$

en dus is

$$B(x) = 1 - \frac{1}{A(x)} = \frac{x^3}{1 - 2x + x^2 - x^3}.$$

Met breuksplitsing zijn dan weer de getallen b_n te berekenen.

Na een ogenblik nadenken zal het duidelijk zijn dat het afgeleide verband tussen $A(x)$ en $B(x)$ ook voor een willekeurig patroon van p bits geldig blijft, mits men maar definieert $a_0 = 1$ en $b_0 = 0$.

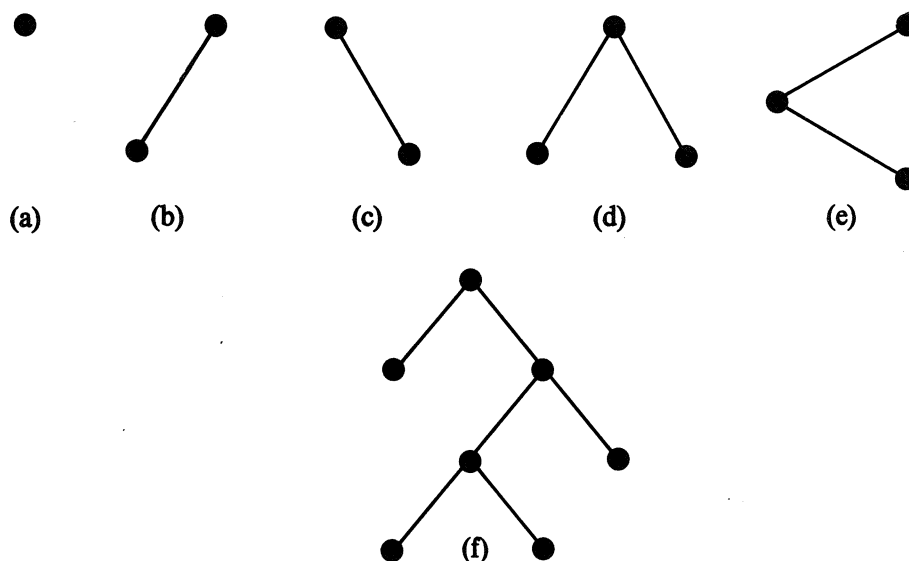
2. BINAIRE BOMEN

Ons laatste probleem is echt niet-lineair van karakter. Van het voorgaande zou men nog kunnen zeggen dat het tot een verkapte lineaire differentievergelijking leidt, zij het met niet-constante coëfficiënten, zodra men de getallen a_i , $i \geq 3$, heeft uitgerekend.

2.1. Definities

Eerst weer een definitie. Een *binaire boom* T is of leeg of het is een knoop, waaraan twee binaire bomen T_l en T_r hangen, die respectievelijk 'linker' en 'rechter' subboom worden genoemd.

Met deze definitie ziet men gemakkelijk in, dat de volgende structuren verschillende binaire bomen voorstellen



In de figuren worden de knopen voorgesteld door stippen. De verbindingslijnen tussen de knopen heten takken; hiermee zijn de subbomen aan de knopen bevestigd. (Strikt genomen horen de takken niet tot de boom.) Merk nog op dat (b) en (c) *verschillende* bomen voorstellen. In (b) is de rechter subboom leeg en in (c) de linker subboom. Boom (a) is een boom bestaande uit 1 knoop. Links van (a) staat ook nog een boom (de lege boom)!

2.2. Aantal binaire bomen op n knopen

Hoe groot is nu het totale aantal binaire bomen met n knopen? Noem dit aantal a_n . Gaat men uit van de *wortel* van de boom, dat wil zeggen vanuit de beginknoop waaruit men de hele boom kan opbouwen door er steeds nieuwe

subbomen aan te hangen (afbouwen zou een beter woord zijn), dan kan men hieraan een linker subboom met k knopen bevestigen en een rechter subboom met $(n - k - 1)$ knopen. We vinden dus als differentievergelijking

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}, & n \geq 1, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Deze vergelijking is wezenlijk niet-lineair, maar kwadratisch. Stellen we $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dan herkent men in het rechter lid de coëfficiënten van het produkt $A(x)A(x)$. We vinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} x^n$$

ofwel

$$A(x) - 1 = x \{A(x)\}^2.$$

De functie $A(x)$ voldoet dus aan de vierkantsvergelijking

$$x \{A(x)\}^2 - A(x) + 1 = 0$$

met als oplossingen

$$A(x) = \frac{1}{2x} (1 \pm \sqrt{1-4x}).$$

De binomiaalontwikkeling van $\sqrt{1-4x}$ geeft

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k \\ &= 1 - \frac{1}{2}(4x) + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!} (4x)^2 - \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{3!} (4x)^3 + \dots \end{aligned}$$

De coëfficiënt van x^k in het rechterlid is gelijk aan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^k} \frac{4^k}{k!} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3) &= -\frac{2^k}{k!} \frac{(2k-2)!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)} \\ &= -\frac{2^k}{k!} \frac{(2k-2)!}{2^{k-1} (k-1)!} = -\frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1}. \end{aligned}$$

Wegens het minteken in de laatste uitdrukking vervalt het plusteken in de uitdrukking voor $A(x)$ en we vinden uiteindelijk

$$A(x) = \frac{1}{2x} \{1 - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

De getallen $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, $n \geq 0$, staan bekend als de getallen van Catalan.

Voor grote waarden van n geldt $a_n \approx \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$, hetgeen enig inzicht verschaft in het gedrag van a_n . Zo is $a_{10} > 10^4$ en $a_{30} > 3 \cdot 10^{15}$!

2.3. Verwante problemen

De getallen van Catalan duiken soms op de meest onverwachte plaatsen op. Beschouw de som van n getallen (n -term):

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} + w_n.$$

Als een computer (of een persoon) slechts 2 getallen tegelijk kan optellen, is het noodzakelijk om aan te geven in welke volgorde de n termen moeten worden opgeteld. Men geeft dit meestal aan door haakjes aan te brengen.

Zo kan de vierterm $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ op de volgende manieren van haakjes worden voorzien:

$$((w_1 + w_2) + (w_3 + w_4)), (((w_1 + w_2) + w_3) + w_4),$$

$$((w_1 + (w_2 + w_3)) + w_4), (w_1 + ((w_2 + w_3) + w_4)),$$

$$(w_1 + (w_2 + (w_3 + w_4))).$$

We bepalen nu het totale aantal manieren b_n om de n -term van haakjes te voorzien.

Splits $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ in $w_1 + w_2 + \dots + w_k$ en $w_{k+1} + w_{k+2} + \dots + w_n$ ($1 \leq k \leq n-1$). Er zijn b_k manieren om de eerste som van haakjes te voorzien en b_{n-k} manieren voor de tweede. Dit geeft aanleiding tot de betrekking

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

Hierin is per definitie $b_1 = 1$. Definieren we ook nog $b_0 = 0$ dan kunnen we schrijven

$$b_n = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

Met $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ is dit om te zetten in

$$\{B(x)\}^2 - B(x) + x = 0$$

met als oplossing

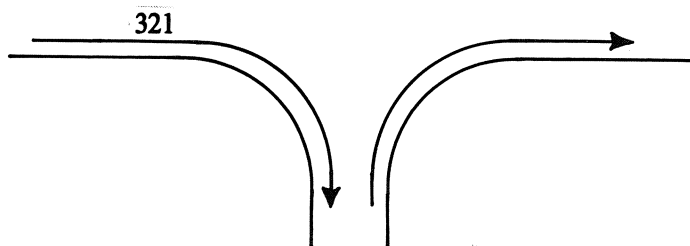
$$B(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

Natuurlijk kan men ook direct het aanbrengen van haakjes proberen te interpreteren als de constructie van een binaire boom.

Een tweede concrete situatie, waar de getallen van Catalan een rol spelen is

bij de verwerking van een zogenaamde *stapel* of *stack*. Men heeft een rij van objecten - vaak *invoerrij* genoemd - die achtereenvolgens op een stapel kunnen worden gezet. Op elk ogenblik kan echter het bovenste element van de stapel er weer afgehaald worden en in de zogenaamde *uitvoerrij* worden geplaatst. Een dergelijk systeem wordt ook wel een LIFO-systeem genoemd (last in first out).

Als voorbeeld nemen we een invoerrij 321.



Zet men eerst alle drie objecten op de stapel en haalt men ze er dan weer af, dan verschijnt de uitvoerrij 123. Men kan ook eerst 1 en 2 op de stapel zetten, 2 er af halen, 3 op de stapel zetten en tenslotte 3 en 1 er af halen. Dat geeft de rij 132. Men kan eenvoudig nagaan, dat de enige permutatie van 321 die niet als uitvoerrij kan optreden de permutatie 213 is. Van de 6 permutaties van 321 zijn er dus 5 mogelijk als uitvoerrij.

De vraag is nu aldus. Gegeven een invoerrij van n objecten, hoeveel verschillende uitvoerrijen zijn dan mogelijk?

Noem het gevraagde aantal c_n , $n \geq 1$. We verdelen de invoerrij als volgt

$$n \dots k+1 \mid k \mid k-1 \dots 1.$$

Uitvoerrijen met k achteraan (dat is in dit verband op de meest linkse plaats) verkrijgt men door eerst de rij $k-1 \dots 1$ op één of andere wijze te verwerken (c_{k-1} mogelijkheden), vervolgens k op de stapel te zetten, de rij $n \dots k+1$ op de één of andere wijze te verwerken en tenslotte k als laatste object van de stapel te halen.

Dit geeft aanleiding tot de volgende differentievergelijking

$$c_n = \sum_{k=1}^n c_{k-1} c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}, \quad n \geq 1$$

met per definitie $c_0 = 1$.

Deze vergelijking met bijbehorende beginvoorwaarde is zelfs geheel identiek aan die voor binaire bomen. De genererende functie $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ is dus ook identiek aan de functie $A(x)$.

LITERATUUR

1. R.P. GRIMALDI (1984). *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison-Wesley, Reading (Mass.).
2. E.L. LIU (1968). *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, first edition.
3. E.M. REINGOLD, J. NIEVERGELT, DEO NARSINGH (1977). *Combinatorial Algorithms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
4. M. TOWNSEND. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park (Cal.).

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek*. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
- 6 K.K. Koksmas. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Jongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van nabuigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfsystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.

CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codex*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988: *Differentierekening*. 1988.