MC SYLLABUS

9.1

MC SYLLABUS

9.1

COLLOQUIUM ELLIPTISCHE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

EXISTENTIE EN UNICITEIT VAN OPLOSSINGEN

DEEL 1

DOOR

T. M.T. COOLEN
G. J. R. FÖRCH
E.M. DE JAGER
H.G.J. PIJLS

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM
1969

Voorwoord

In januari 1969 is op het Mathematisch Centrum een colloquium over partiële differentiaalvergelijkingen van het elliptische type gestart onder leiding van prof.dr. E.M. de Jager en prof.dr. H.A. Lauwerier. Dit boekje is het eerste deel van een verslag dat van dit colloquium zal verschijnen, en bestrijkt de periode t/m juni 1969.

A priori schattingen voor oplossingen van elliptische differentiaalvergelijkingen, en de existentie en uniciteit van oplossingen vormen de belangrijkste onderwerpen van dit eerste deel. Hoofdstuk 1 is een eerste inleiding in de theorie van de elliptische differentiaalvergelijkingen. In hoofdstuk 2 wordt het maximumprincipe voor harmonische functies behandeld, en een daarmee samenhangend bewijs van existentie van oplossingen van randwaardeproblemen voor de vergelijking van Poisson gegeven. In hoofdstuk 3 komen we nog eens terug op het maximumprincipe, maar nu voor algemene tweede orde elliptische vergelijkingen, en wordt voorts op de theorie van Schauder ingegaan. Hoofdstukken 4 en 5 tenslotte benaderen elliptische differentiaalvergelijkingen vanuit de functionaalanalyse. In hoofdstuk 4 wordt enerzijds getracht aan te geven hoe men vanuit de "klassieke" theorie komt tot het beschouwen van functieruimten en tot het uitbreiden van het begrip oplossing, en anderzijds die delen van de theorie van distributies en Hilbertruimten samengevat, die voor de uiteenzetting in hoofdstuk 5 van Hilbertruimte-methoden nodig blijken te zijn.

De inhoud van dit boekje is ontleend aan voordrachten die gegeven zijn door

E.M. de Jager	(hoofdstuk 1),
G.J.R. Förch	(hoofdstukken 2 en 3),
T.M.T. Coolen	(secties 4.1 t/m 4.3) en
H.G.J. Pijls	(secties 4.4, 5.1 t/m 5.4),

en die door T.M.T. Coolen en H.G.J. Pijls bewerkt en tot een systematisch geheel samengevoegd zijn.

September 1969.

Inhoud

Notaties

$\mathbb{R}^n$	n-dimensionale reële Euclidische ruimte met norm $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, $x = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
gebied Ω	open samenhangende verzameling in $\mathbb{R}^n$
normaalgebied Ω	begrensde enkelvoudig samenhangende open verzameling in $\mathbb{R}^n$, waar de integraalstelling van Gauss geldt
$\bar{\Omega}$	afsluiting van Ω in $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	rand van Ω
$\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$	afstand van $x\in\mathbb{R}^n$ tot $\partial\Omega$
$\mathrm{diam}(\Omega)$	diameter van Ω
$\Omega_1\subset\subset\Omega_2$	$\bar{\Omega}_1$ compact en $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$
B^n of S	bol in $\mathbb{R}^n$: $\{x \mid \|x-x_0\| \leq r\}$
D_i	$= \frac{\partial}{\partial x_i}$
p,q	multi-indices : $p = (p_1,\ldots,p_n)$ met $p_i \geq 0$, geheel
$\|p\|$	$= \sum_{i=1}^{n} p_i$
D^p	$= D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n}$
x^p	$= x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$
$p \leq q$	$p_i \leq q_i$ voor $i = 1,\ldots,n$
$\mathrm{supp}(f)$	drager van de functie f : $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \mid f(x)\neq 0\}}$.
$C^0(\Omega)$	ruimte van alle continue (reëel- of complexwaardige) functies op Ω
$C^m(\Omega)$	ruimte van de m maal continu differentieerbare functies op Ω
$C^{m+\alpha}(\Omega)$	$(0 < \alpha < 1)$ ruimte van de m maal continu differentieerbare functies waarvan de afgeleiden van de m-de orde Höldercontinu met exponent α zijn
$\|\|u\|\|_{p,m}$	zie p. 43
$\|\|u\|\|_{p,m+\alpha}$	zie p. 43
$C_{p,m}(\Omega)$	zie p. 43
$C_{p,m+\alpha}(\Omega)$	zie p. 43
$C^\infty(\Omega)$	ruimte van alle oneindig vaak differentieerbare functies op Ω

$C_c^\infty(\Omega)$	ruimte van alle oneindig vaak differentieerbare functies met compacte drager bevat in Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	$C_c^\infty(\Omega)$ met topologie
$\mathcal{D}'(\Omega)$	duale van $\mathcal{D}(\Omega)$, ruimte van alle distributies in Ω
$\langle u,\phi\rangle$	als $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dan schrijven we: $u(\phi) = \langle u,\phi\rangle$
$\mathcal{S}$	ruimte van alle sneldalende functies op $\mathbb{R}^n$, p. 68.
$\mathcal{S}'$	duale van $\mathcal{S}$, ruimte van alle tamme distributies in $\mathbb{R}^n$
$L^2(\Omega)$	ruimte van alle meetbare functies u op Ω, waarvoor
$\lVert u\rVert_{0,\Omega}$	$\lVert u\rVert_{0,\Omega} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^2\, dx\right)^{1/2} < \infty$, met als inproduct
$(u,v)_{0,\Omega}$	$(u,v)_{0,\Omega} \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\, dx$
$H^m(\Omega)$	zie p. 84
$\lVert u\rVert_{m,\Omega}$	zie p. 84
$(u,v)_{m,\Omega}$	zie p. 84
$H_0^m(\Omega)$	zie p. 86
$\lVert u\rVert'_{m,\Omega}$	zie p. 87
u^h	zie p. 114
$H^m_{loc}(\Omega)$	zie p. 117
$\hookrightarrow$	injectie (eeneenduidige afbeelding)

Zij Ω een normaalgebied in $\mathbb{R}^n$.

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$	normale afgeleide; ν is de naar binnen gerichte normaal

<u>Stelling van Gauss</u>

$$\int_\Omega D_i\, u\, dx = -\int_{\partial\Omega} u \cdot \nu_i\, d\sigma.$$

Hierbij is $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ de naar binnen gerichte normaal, met $\sum_{i=1}^n \nu_i^2 = 1$; of zwakker: $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $u \in C_1^0(\Omega)$, $\int_\Omega D_i\, u\, dx < \infty$.

Divergentiestelling

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial\Omega} [\sum_{i=1}^{n} (-1)^i F_i \, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n]$$

$$= - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial \nu} d\sigma$$

$$= - \int_{\partial\Omega} F_\nu \, d\sigma .$$

Hierbij $F_i \in C^1(\bar{\Omega})$, en $\widehat{dx_i}$ moet worden weggelaten.

Eerste identiteit van Green

$$\int_{\Omega} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u\Delta v] dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{\partial\Omega} [\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n]$$

ofwel

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v) dx_1 \dots dx_n = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma .$$

Hierbij $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^2(\bar{\Omega})$; of, zwakker: $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, en $\int u\Delta v dx < \infty$.

Tweede indentiteit van Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx_1 \dots dx_n = - \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma .$$

Hierbij $u,v \in C^2(\bar{\Omega})$.

Zie bijv. Hellwig, p. 3-7.

1. INLEIDING

1.1. Doelstelling van het colloquium

De theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen werd ontwikkeld onder de invloed van problemen uit de mathematische fysica, waar het mathematisch model van een fysisch verschijnsel dikwijls leidt tot een partiële differentiaalvergelijking, waarvan de oplossing bovendien nog aan bepaalde randvoorwaarden moet voldoen. Voor de meer eenvoudige randwaardeproblemen, waarbij de partiële differentiaalvergelijking lineair is en constante coëfficiënten heeft en waarbij zowel de rand als de randcondities van eenvoudige vorm zijn, staan ons vele technieken voor de oplossing ter beschikking en deze technieken zijn tot de standaardleerboeken doorgedrongen en algemeen bekend (bijv. de technieken van de Fourier-reeksen, de integraaltransformaties en de Greense functie).

In de praktijk ontmoet men echter ook randwaardeproblemen, waar deze technieken niet meer of niet meer zo gemakkelijk zijn toe te passen. We denken aan lineaire partiële differentiaalvergelijkingen met niet-constante coëfficiënten, niet lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, ingewikkelde randvoorwaarden, e.d. De fundamentele vragen naar de existentie en de ondubbelzinnigheid van de oplossing en naar de continue afhankelijkheid van de oplossing van de randvoorwaarden (kortom: de vraag naar het "goed gesteld" zijn van het randwaardeprobleem) zijn dan niet langer eenvoudig te beantwoorden. De techniek hoe een oplossing te constueren is niet langer recht toe recht aan; dikwijls moet men de hulp van een computer inschakelen, maar hiervoor is dan toch wel a priori enige kennis van de oplossing noodzakelijk, opdat de berekening op de computer met succes kan worden uitgevoerd; we denken hier bijvoorbeeld aan schattingen voor de grootte van de oplossing en zijn afgeleide, gedrag van de oplossing in de omgeving van singuliere punten van de rand. Voor vele van dergelijke vragen zijn in de laatste twintig à dertig jaar theorieën ontwikkeld. Deze theorieën zullen we, voor zover deze differentiaalvergelijkingen van het elliptische type betreft, in dit colloquium nader bekijken en we zullen ons ook afvragen, wat wij als toegepast wiskundigen in de praktijk aan deze theorie hebben. Er bestaat een immense hoeveelheid literatuur op dit gebied en we zullen trachten het essentiële uit deze literatuur te halen.

Voor lineaire partiële differentiaalvergelijkingen is een uitgebreide hoeveelheid resultaten geboekt; voor niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen staat de theorie pas aan een aarzelend begin; het zijn juist deze niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen die voor de toegepaste wiskunde zo belangrijk zijn; hopelijk kunnen we ook aan deze differentiaalvergelijkingen onze aandacht geven.

1.2. Elliptische partiële differentiaalvergelijkingen

Het begrip ellipticiteit

De partiële differentiaalvergelijking

$$\sum_{|p|\leq m} u_p(x)\, D^p u = f(x) \tag{1.1}$$

waarin $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, p_i niet-negatief geheel,

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

$$D^p = \frac{\partial^{p_1}\partial^{p_2}\ldots\partial^{p_n}}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}},$$

$a_p(x)$ en $f(x)$ reële functies,

heet <u>elliptisch</u> in een gebied G van $\mathbb{R}_n$, indien in elk punt $x \in G$ geldt, dat de zgn. <u>karakteristieke vorm</u>

$$Q(x,\xi) = \sum_{|p|=m} a_p\, \xi^p \tag{1.2}$$

definiet is; hierin is

$$\xi^p = \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2} \dots \xi_n^{p_n} .$$

We merken op, dat de orde m van elliptische partiële differentiaalvergelijkingen met reële coëfficiënten altijd even is. In het geval, dat (1.1) van de tweede orde is, gaat (1.1) en de conditie (1.2) over in

$$(1.1^*) \quad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x)$$

en

$$(1.2^*) \qquad Q(x,\xi) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, \xi_i\, \xi_k .$$

In dit colloquium zullen we ons voornamelijk bezighouden met elliptische partiële differentiaalvergelijkingen van de 2e orde. De differentiaalvergelijkingen (1.1) en (1.1^*) zijn van het lineaire type; indien de coëfficiënten a_p ook van u en/of zijn afgeleiden afhankelijk zijn, dan krijgen we te maken met een niet-lineaire elliptische differentiaalvergelijking; de definitie van ellipticiteit blijft dezelfde als in het lineaire geval, maar bij gegeven gebied Ω is het nu in het algemeen niet mogelijk a priori de ellipticiteit van de differentiaalvergelijking vast te stellen, omdat de karakteristieke vorm onbekende coëfficiënten bevat (de waarden van a en zijn afgeleiden zijn nog onbekenden).

Normaalvormen van lineaire elliptische differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten

We beschouwen een willekeurige partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante reële coëfficiënten:

$$(1.3) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + e\, u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Het <u>hoofddeel</u> van (1.3) is het deel, waarin alleen afgeleiden van de tweede orde voorkomen, i.e.

(1.4) $$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = (\mathrm{grad}_x, A\ \mathrm{grad}_x\ u)$$

waarbij A de matrix van de coëfficiënten a_{ik} voorstelt.

De karakteristieke vorm behorende bij (1.3) luidt:

(1.5) $$Q(\xi) = (\xi, A\xi)$$

met $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

Zonder de algemeenheid te zeer te schaden mag men de matrix A symmetrisch veronderstellen; verder nemen we aan dat $\det(A) \neq 0$. Met behulp van de lineaire homogene niet singuliere reële transformatie $y = Tx$ ($y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$) kan (1.4) gebracht worden in de vorm

(1.6) $$(\mathrm{grad}_x, A\ \mathrm{grad}_x\ u) = (\mathrm{grad}_y\ TAT^* \ \mathrm{grad}_y\ u)$$

met bijbehorende karakteristieke vorm

(1.7) $$(\eta, TAT^* \eta).$$

Hieruit volgt dat het definiet zijn van de karakteristieke vorm behouden blijft onder lineaire niet singuliere reële transformaties T van de coördinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Immers met behulp van $\xi = T^* \eta$ volgt uit het definiet zijn van $(\xi, A\xi)$ het definiet zijn van $(\eta, TAT^* \eta)$. Dus de ellipticiteit is een echte karakteristiek van een differentiaalvergelijking van de tweede orde. Door voor T^* de hoofdassen-transformatie te kiezen gaat (1.6) over in

(1.8) $$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}$$

en (1.7) in:

$$(1.9) \qquad \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \ldots + \lambda_n \eta_n^2 \,.$$

Indien de partiële differantiaalvergelijking (1.3) elliptisch is, dan bezitten alle λ_i $(i = 1,\ldots,n)$ hetzelfde teken en door tenslotte de coördinaten y_i met $\sqrt{|\lambda_i|}$ te vermenigvuldigen wordt (1.3) uiteindelijk gebracht in de vorm:

$$(1.10) \qquad \Delta u + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + e\,u = f(y)$$

waarin Δ de Laplace operator in n dimensies voorstelt. Substitutie in (1.10) van

$$u = \exp\{-\tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} c_l\, y_l\} v(y)$$

levert tenslotte

$$(1.11) \qquad \Delta v + pv = g(y)$$

waarin p een constante is en

$$g(y) = f(y) \exp\{+\tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} c_l\, y_l\}.$$

De vergelijking (1.11) kan dus beschouwd worden als de meest algemene elliptische differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten. (1.11) heet ook wel de normaalvorm van (1.3).

Van de differentiaaloperator in het linkerlid van (1.11) weten we reeds erg veel; geheel anders ligt de problematiek bij elliptische differentiaalvergelijkingen met variabele coëfficiënten.

Normaalvormen van lineaire elliptische differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in twee onafhankelijke variabelen met variabele coëfficiënten

Ook differentiaalvergelijkingen van dit type kunnen tot een eenvoudige normaalvorm worden teruggebracht door een geschikte coördinaten transformatie. De partiële differentiaalvergelijking zij gegeven door

$$(1.12)\quad a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+ f(x,y)\,u(x,y) = g(x,y)\ ,$$

waarin we de coëfficiënten $a(x,y)$, $b(x,y)$ en $c(x,y)$ continue differentieerbaar en niet tegelijkertijd gelijk aan nul veronderstellen. Voert men nieuwe coördinaten

$$(1.13)\qquad \xi = \phi(x,y) \qquad \text{en} \qquad \eta = \psi(x,y)$$

in met ϕ en ψ twee maal differentieerbaar, dan wordt het <u>hoofddeel</u> van (1.12), namelijk

$$(1.14)\qquad L[a] = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

overgevoerd in het hoofddeel

$$(1.15)\qquad \Lambda[u] = \alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

met

$$(1.16)\qquad \begin{cases} \alpha = a\,\phi_x^2 + 2b\,\phi_x\,\phi_y + c\,\phi_y^2 \\ \gamma = a\,\psi_x^2 + 2b\,\psi_x\,\psi_y + c\,\psi_y^2 \\ \beta = a\,\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\,\phi_y\psi_y \end{cases}$$

en derhalve

$$(1.17)\qquad \alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^2 = (ac - b^2)\,\left\{\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right\}^2 .$$

Het hoofddeel van een partiële differentiaalvergelijking is dat deel van de vergelijking, waarin slechts de afgeleiden van de hoogste orde voorkomen.

Uit (1.17) volgt onmiddellijk dat elke niet singuliere transformatie het teken van $(ac - b^2)$ invariant laat en derhalve levert het teken van $(ac - b^2)$ een karakterisatie van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. De karakteristieke vormen corresponderende met (1.14) en (1.15) zijn respectievelijk

$$(1.18) \qquad Q(x,y;l,m) = al^2 + 2blm + cm^2$$

en

$$(1.19) \qquad Q(\xi,\eta;\lambda,\mu) = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2,$$

waarbij (1.18) en (1.19) in elkaar overgevoerd kunnen worden met behulp van de transformatie

$$(1.20) \qquad l = \lambda\phi_x + \mu\psi_x \qquad \text{en} \qquad m = \lambda\phi_y + \mu\psi_y.$$

Hieruit volgt weer, dat het definiet zijn van de karakteristieke vorm behouden blijft onder alle niet singuliere transformaties van de coördinaten x en y. Als $ac - b^2 > 0$ dan is de karakteristieke vorm definiet (differentiaalvergelijking is van elliptisch type), als $ac - b^2 < 0$ dan is de karakteristieke vorm indefiniet (differentiaalvergelijking is van hyperbolisch type), en als $ac - b^2 = 0$ is dan is de karakteristieke vorm semidefiniet (differentiaalvergelijking is van parabolisch type). Voor een elliptische partiële differentiaalvergelijking is de karakteristieke vorm $Q(x,y;l,m) = 1$ de vergelijking van een ellips, voor een hyperbolische partiële differentiaalvergelijking is de karakteristieke vorm $Q(x,y;l,m) = 1$ de vergelijking van een hyperbool en voor een parabolische partiële differentiaalvergelijking is de karakteristieke vorm $Q(x,y;l,m) = 1$ de vergelijking van een parabool. Door de functies $\xi = \phi(x,y)$ en $\eta = \psi(x,y)$ geschikt te kiezen kan het hoofddeel van de partiële differentiaalvergelijking (1.12) in een zo eenvoudig mogelijke vorm gebracht worden; deze vorm heet de normaalvorm. We zullen de verschillende normaalvormen hier kort bespreken:

(i) Hyperbolische geval: $ac - b^2 < 0$.

De vergelijking

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{1.21}$$

heeft twee verschillende reële oplossingen $\lambda = \lambda_1$ en $\lambda = \lambda_2$. Indien de functies $\xi = \phi(x,y)$ en $\eta = \psi(x,y)$ oplossingen zijn de partiële differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \tag{1.22}$$

dan wordt het hoofddeel van de partiële differentiaalvergelijking (1.12) uitgedrukt in (ξ,η) coördinaten

$$\Lambda[u] = 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} . \tag{1.23}$$

De lijnen $\xi = \phi(x,y) =$ constant en $\eta = \psi(x,y) =$ constant zijn de zgn. karakteristieken der p.d.v. (1.12).

(ii) Parabolische geval: $ac - b^2 = 0$.

De vergelijking (1.21) heeft twee samenvallende oplossingen. Stel de wortel van (1.21) zij λ. We laten $\xi = \phi(x,y)$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Hieruit volgt $\alpha = 0$; wordt nu $\eta = \psi(x,y)$ zodanig gekozen, dat $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ is, dan volgt verder uit (1.17) dat $\beta = 0$ is en het hoofddeel van de partiële differentiaalvergelijking (1.12) uitgedrukt in (ξ,η) coördinaten wordt

$$\Lambda[u] = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} . \tag{1.24}$$

(iii) Elliptische geval: $ac - b^2 > 0$.
De vgl. (2.21): $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ heeft toegevoegd complexe wortels λ_1 en λ_2. Indien we veronderstellen dat de coëfficiënten $a(x,y)$, $b(x,y)$ en $c(x,y)$ analytisch zijn in x en y en we laten de mogelijkheid open voor analytische $\phi(x,y)$ en $\psi(x,y)$, dan mogen we

$$\phi_x - \lambda_1 \phi_y = 0 \quad \text{en} \quad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0$$

beschouwen als differentiaalvergelijkingen in complexwaardige coördinaten x en y. De nieuwe variabelen ξ en η worden toegevoegd complex. Geheel als voorheen in het hyperbolische geval krijgt men weer de normaalvorm

(1.23) $$\Lambda[u] = 2\beta\, u_{\xi\eta}.$$

Stelt men tenslotte

(1.25) $$\rho = \frac{\xi + \eta}{2} \quad \text{en} \quad \sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} \quad (\rho \text{ en } \sigma \text{ dus reëel})$$

dan gaat (1.23) over in

(1.26) $$\Lambda[u] = \frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}\right] = \frac{1}{2}\beta\, \Delta u.$$

Dus het hoofddeel van elke lineaire elliptische differentiaalvergelijking van de tweede orde is de Laplace-operator, waar we reeds veel van weten. De normaalvorm (1.26) is afgeleid onder de conditie dat de coëfficiënten $a(x,y)$, $b(x,y)$ en $c(x,y)$ analytisch zouden zijn, hetgeen wel een beetje erg veel gevraagd is.

De normaalvorm (1.26) geldt echter onder veel algemenere voorwaarden voor de coëfficiënten a, b en c; we dienen dan anders te werk te gaan. We eisen dat onze transformatiefuncties $\phi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ voldoen aan de voorwaarden

$$\alpha = \gamma \quad \text{en} \quad \beta = 0$$

d.w.z. aan de differentiaalvergelijkingen:

$$(1.27)\qquad \begin{cases} a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \\ \text{en} \\ a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y = 0. \end{cases}$$

Vermenigvuldigen we de tweede formule met 2i en tellen we het resultaat op bij de eerste vergelijking, dan krijgen we:

$$a(\phi_x + i\psi_x)^2 + 2b(\phi_x + i\psi_x)(\phi_y + i\psi_y) + c(\phi_y + i\psi_y)^2 = 0.$$

Derhalve

$$(1.28)\qquad \phi_x + i\psi_x = \lambda(\phi_y + i\psi_y)$$

met $\lambda = \dfrac{-b + iW}{a}$ en $W = \sqrt{ac - b^2}$.
(Nemen we de andere wortel voor λ, dan geheel analoge redenering).
Oplossing van ψ_x en ψ_y uit de tweede vergelijking van (1.27) en uit (1.28) geeft tenslotte

$$(1.29)\qquad \psi_x = \frac{b\phi_x + c\phi_y}{W} \quad \text{en} \quad \psi_y = -\frac{a\phi_x + b\phi_y}{W}.$$

De vergelijkingen (1.29) staan bekend onder de naam van de differentiaalvergelijkingen van Beltrami. Eliminatie van ψ_x en ψ_y uit (1.29) levert tenslotte voor $\phi(x,y)$ de partiële differentiaalvergelijking

$$(1.30)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a\phi_x + b\phi_y}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b\phi_x + c\phi_y}{W}\right) = 0.$$

Met behulp van functionaalanalytische middelen kan aangetoond worden, dat de vergelijkingen (1.29) onder de voorwaarde, dat de coëfficiënten a, b en c Höldercontinu zijn met exponent $0 < a < 1$, een oplossing bezitten (zie [3], Hoofdstuk IV, §8, pag. 350; bewijzen van Korn, Lichtenstein, L. Bers, Chern en Morrey). Derhalve kan elke elliptische differentiaalvergelijking van de tweede orde met Hölder-continue coëfficiënten a, b en c geschreven worden in de gedaante

$$(1.31) \qquad \Delta u + a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u(x,y) = g(x,y).$$

Als $u_0(x,y)$ een willekeurige oplossing van (1.31) voorstelt en stellen we $u = u_0(x,y) + v(x,y)$ dan voldoet $v(x,y)$ aan de vergelijking

$$(1.32) \qquad \Delta v + a(x,y)\,\frac{\partial v}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial v}{\partial y} + c(x,y)v(x,y) = 0.$$

Dus elke elliptische differentiaalvergelijking van de tweede orde in twee onafhankelijke variabelen lijkt erg veel op de differentiaalvergelijking van Laplace.

De theorie van de vergelijking van Laplace met twee onafhankelijke variabelen is in wezen de theorie van de analytische functies van een complexe variabele. Het is dus te verwachten, dat de theorie van willekeurige elliptische differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met twee onafhankelijke variabelen in wezen een theorie van functies is, die veel op analytische functies lijken; dit is de theorie van de zogenaamde pseudo-analytische functies, ontwikkeld door Bers en Vekua. Deze theorie zullen we dan ook in dit colloquium bestuderen.

Normaalvormen van elliptische differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met variabele coëfficiënten in meer dan twee onafhankelijke variabelen

De differentiaalvergelijking zij

$$(1.33) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u(x) = g(x).$$

Indien we met behulp van een niet-singuliere transformatie

$$(1.34) \qquad \xi_i = \phi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

de gemenge termen uit het hoofddeel willen verwijderen, dan krijgen we voor de n onbekende functies $\phi_i(x)$ een aantal van $\frac{1}{2}\,n(n-1)$ vergelijkingen.

Voor $n > 3$ geldt echter $\frac{1}{2}n(n-1) > n$ en derhalve is het systeem van de functies $\phi_i(x)$ te bepalen overbepaald en het zal dus in dit geval niet gelukken de gemengde termen uit het hoofddeel te verwijderen. Voor $n = 3$ gelukt dit nog wel; het hoofddeel zal dan evenwel nog niet in de Laplace-operator overgaan, omdat de coëfficiënten in het hoofddeel van de getransformeerde vergelijkingen niet alle drie onderling gelijk zijn te maken.

Quasilineaire elliptische differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in twee onafhankelijke variabelen.

De differentiaalvergelijking zij

$$a(x,y,u,p,q)r + 2b(x,y,u,p,q)s + c(x,y,u,p,q)t + d(x,y,u,p,q) = 0 \tag{1.35}$$

met

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \ q = \frac{\partial u}{\partial y}\ , \ r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \ s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ \text{ en } \ t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ .$$

We voeren wederom nieuwe coördinaten in

$$\xi = \phi(x,y)\ , \quad \eta = \psi(x,y)\ ,$$

en we eisen weer

$$\left\{\begin{aligned} & a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\ , \\ & a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y = 0\ , \end{aligned}\right. \tag{1.27}$$

waarin a, b en c nu functies zijn van x, y, u, p en q. Beschouwen we nu x, y en u simultaan als functies van de nieuwe coördinaten ξ en η dan volgen met behulp van

$$\left\{\begin{aligned} & Dx_\xi = \eta_y,\ Dx_\eta = -\xi_y,\ Dy_\xi = -\eta_x,\ Dy_\eta = \xi_x, \\ & D = \phi_x\psi_y - \psi_x\phi_y = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \end{aligned}\right. \tag{1.36}$$

uit (1.27) de relaties

$$(1.37) \qquad a y_\eta^2 - 2b y_\eta x_\eta + c x_\eta^2 = a y_\xi^2 - 2b y_\xi x_\xi + c x_\xi^2$$

en

$$(1.38) \qquad a y_\eta y_\xi - b(y_\eta x_\xi + y_\xi x_\eta) + c x_\xi x_\eta = 0$$

terwijl (1.35) overgaat in:

$$(1.39) \qquad (a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + (a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy})u_\xi$$
$$+ (a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy})u_\eta = -d .$$

De vergelijkingen (1.37), (1.38) en (1.39) vormen nu drie vergelijkingen voor de drie onbekende functies $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ en $u(\xi,\eta)$. Berekenen we nu de coëfficiënten van $(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})$, u_ξ en u_η in (1.39), waarbij we wederom gebruik maken van (1.36), (1.37), (1,38) en de Beltrami-vergelijkingen (die op grond van (1.27) geldig blijven!) in de vorm

$$(1.40) \qquad y_\xi = -\frac{b y_\eta - c x_\eta}{\sqrt{ac - b^2}} , \quad x_\xi = -\frac{a y_\eta - b x_\eta}{\sqrt{ac - b^2}} ,$$

dan krijgen we tenslotte de vergelijking (1.39) in de gedaante:

$$(1.41) \qquad \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}$$

ofwel in vector notatie $X = (x,y,u)$:

$$(1.41') \qquad \Delta X(X_\xi \times X_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}$$

met

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} .$$

Een interessant gevolg is, dat de normaalvorm van een quasilineaire elliptische differentiaalvergelijking van de tweede orde met twee onafhankelijke variabelen en met $d \equiv 0$ onafhankelijk is van de coëfficiënten a, b en c.

Toepassing

We beschouwen in het vlak $z = 0$ een gesloten kromme C_1: $x = x_1(s)$, $y = y_1(s)$ en evenzo in het vlak $z = h$ een gesloten kromme C_2: $x = x_2(s)$, $y = y_2(s)$ en we vragen naar het oppervlak $z = z(x,y)$ dat de krommen C_1 en C_2 als randkrommen heeft en dat tevens een relatief minimale oppervlakte bezit (zeepvlies probleem). Dit vraagstuk leidt tot het volgende variatieprobleem:

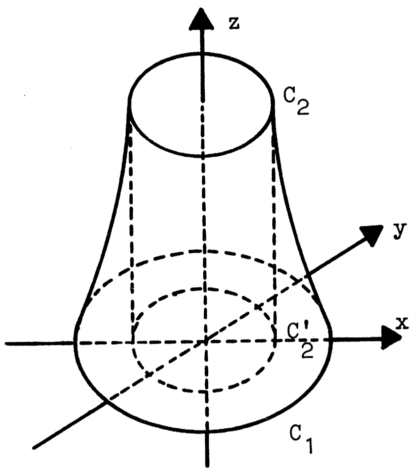
$$\iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy \text{ minimaal.}$$

Toepassing van Euler-Lagrange levert

(1.42)

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0,$$

welke vergelijking quasilineair en elliptisch is. Randvoorwaarden zijn $z = 0$ voor $(x,y) \in C_1$; $z = h$ voor $(x,y) \in C_2'$. Brengen we (1.42) in normaalvorm door overgang op coördinaten (ξ,η) dan vinden we voor de vector



Figuur 1.1

$X = (x,y,z)$ de vergelijking:

$$(1.43) \qquad X(\vec{X}_\xi \times X_\eta) = 0.$$

Voor de functies $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ en $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ gelden de betrekkingen (1.37) en (1.38); dus in ons geval wordt dit nu

$$(1+z_y^2)y_\eta^2 + 2z_x z_y x_\eta y_\eta + (1+z_x^2)x_\eta^2 = (1+z_y^2)y_\xi^2 + 2z_x z_y x_\xi y_\xi + (1+z_x^2)x_\xi^2$$

en

$$(1+z_y^2)y_\eta y_\xi + z_x z_y(y_\eta x_\xi + y_\xi x_\eta) + (1+z_x^2)x_\xi x_\eta = 0 ,$$

ofwel

$$x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2 = x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2$$

en

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta + z_\xi z_\eta = 0 ,$$

ofwel

$$(1.44) \qquad (\frac{\partial X}{\partial \xi})^2 = (\frac{\partial X}{\partial \eta})^2 \quad \text{en} \quad (\frac{\partial X}{\partial \xi}) \cdot (\frac{\partial X}{\partial \eta}) = 0.$$

Hieruit volgt

$$(\frac{\partial X}{\partial \xi})(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}) = (\frac{\partial X}{\partial \eta})(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta})$$

en

$$(\frac{\partial X}{\partial \xi})(\frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2}) = - (\frac{\partial X}{\partial \eta})(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta}) ,$$

en derhalve

$$(1.45) \qquad (\frac{\partial X}{\partial \xi})(\Delta X) = 0 .$$

Analoog geldt ook

$$(1.46) \qquad (\frac{\partial X}{\partial \eta})(\Delta X) = 0 .$$

Uit (1.43) volgt echter $\Delta X = \alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial X}{\partial \eta}$, waarin α en β willekeurige constanten zijn; uit (1.45) en (1.46) volgt echter nu dat $\alpha = \beta = 0$ moet zijn. Dus voor ons minimaal oppervlak geldt

$$(1.47) \qquad \Delta x = 0 \text{ , } \Delta y = 0 \quad \text{en} \quad \Delta z = 0$$

met de nevencondities

$$(1.48) \qquad A \equiv (\frac{\partial X}{\partial \eta})^2 - (\frac{\partial X}{\partial \xi})^2 = 0$$

en

$$(1.49) \qquad B \equiv 2\,(\frac{\partial X}{\partial \xi})(\frac{\partial X}{\partial \eta}) = 0 \;.$$

De condities (1.48) en (1.49) zijn op te vatten als randvoorwaarden in het (ξ,η)-vlak; immers uit $\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial B}{\partial \eta}$ en $\frac{\partial A}{\partial \eta} = -\frac{\partial B}{\partial \xi}$ volgt dat A + iB een analytische functie van $(\xi + i\eta)$ is; dus als A nul is langs een willekeurige gesloten kromme in het (ξ,η)-vlak en B = 0 in een willekeurig punt van deze kromme dan geldt $A + iB \equiv 0$ binnen deze kromme. Noemen we de harmonisch geconjugeerde van x, y en z resp. $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ en $\tilde{z}$, en stellen we

$$x + i\tilde{x} = f_1(w) = f_1(\xi + i\eta);\; x = \mathrm{Re}\, f_1(w)$$

$$y + i\tilde{y} = f_2(w) = f_2(\xi + i\eta);\; y = \mathrm{Re}\, f_2(w)$$

$$z + i\tilde{z} = f_3(w) = f_3(\xi + i\eta);\; z = \mathrm{Re}\, f_3(w)$$

dan zijn f_1, f_2 en f_3 analytische functies van w. Op grond van de vergelijkingen van Cauchy-Riemann geldt verder

$$x_\xi - ix_\eta = \frac{df_1}{dw}\;,\; y_\xi - iy_\eta = \frac{df_2}{dw},\; z_\xi - iz_\eta = \frac{df_3}{dw}\;.$$

Dus (1.47), (1.48) en (1.49) is gelijkwaardig met het bepalen van drie analytische functies $f_1(w)$, $f_2(w)$ en $f_3(w)$ die voldoen aan de conditie

$$(1.50) \qquad \sum_{j=1}^{3} \{\frac{df_j}{dw}(w)\}^2 = 0 \;.$$

Derhalve wordt <u>elk</u> minimaal oppervlak gerepresenteerd door drie analytische functies, die aan de conditie (1.50) voldoen. Verder moeten $f_1(w)$, $f_2(w)$ en $f_3(w)$ nog zodanig gekozen worden, dat het oppervlak $z = z(\xi,\eta)$ door de krommen C_1 en C_2 gaat; d.w.z. z = 0 voor (ξ,η) behorend tot het beeld van C_1 in het (ξ,η)-vlak en z = h voor (ξ,η) behorend tot het beeld van C_2' in het (ξ,η)-vlak.

Het probleem van het minimale oppervlak begrensd door de krommen C_1 en C_2 is niet ondubbelzinnig oplosbaar. In het geval dat C_1 en C_2 twee cirkels zijn met middelpunten op de z-as, dan wordt een oplossing geleverd

door $z \equiv 0$ en $z \equiv h$; een andere oplossing is een "catenoïde" (een omwentelingslichaam met een kettinglijn als genererende kromme), die de krommen C_1 en C_2 verbindt (zie [7]).
Er is tot nog toe niet veel bekend over het aantal en de aard van de oplossingen van "zeepvlies" problemen (zie verder [2], p. 180).

Literatuur

[1] Bers, L.; John, F.; Schechter, M. — Lectures in applied mathematics, vol. III. Partial differential equations. Wiley, New York, 1964.

[2] Courant, R. — Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience, New York, 1950.

[3] Courant, R.; Hilbert, P. — Methods of mathematical physics, vol. II. Interscience, New York, 1962.

[4] Fichera, G. — Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 8, Springer, Berlin, 1965.

[5] Garabedian, P.R. — Partial differential equations. Wiley, New York, 1964.

[6] Hellwig, G. — Partielle Differentialgleichungen. Teubner Verlag, Stuttgart, 1959. Engelse vertaling hiervan: Partial differential equations. Blaisdell, New York,etc., 1964.

[7] Protter, M.H.; Weinberger, H.F. — Maximum principles in differential equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[8] Sagan, H. — Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics. Wiley, New York, 1961.

2. HARMONISCHE FUNCTIES

2.1. Het maximum-minimum principe.

We zullen beginnen met het bestuderen van enkele eigenschappen van de oplossingen van de Laplace vergelijking in n dimensies, i.e.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \,. \tag{2.1}$$

We beschouwen in dit hoofdstuk de oplossingen van (2.1) in een begrensd samenhangend gebied Ω, of in een normaalgebied, d.w.z. een begrensd open enkelvoudig samenhangend gebied Ω, waarop de stellingen van Green geldig zijn. De rand van Ω geven we aan met $\partial\Omega$ en $\Omega \cup \partial\Omega$ noteren we als $\bar{\Omega}$. Met x zal steeds $(x_1,\ldots,x_n)$ worden bedoeld.

Definitie 2.1. Zij u(x) een functie gedefinieerd in $\bar{\Omega}$. u(x) heet harmonisch in Ω indien aan de volgende voorwaarden voldaan is:

(i) $u \in C^2(\Omega)$ en

(ii) $\Delta u = 0$ in Ω.

Stelling 2.1. Zij $S \subset \Omega$ een bol met middelpunt x_0 en straal R. Als u(x) harmonisch is in Ω, dan geldt

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial S} u(x)\, d\sigma \,. \tag{2.2}$$

Als een funktie u(x) deze eigenschap bezit, dan zeggen we dat u(x) de middelwaarde-eigenschap heeft.

Bewijs. Het uitgangspunt van het bewijs is de tweede formule van Green. De kunnen we als volgt formuleren: zij Ω een normaalgebied en laten u(x), v(x) twee funkties die tweemaal continu differentieerbaar zijn in Ω en éénmaal continu differentieerbaar in $\bar{\Omega}$, dan geldt

$$(2.3) \qquad \int_{\Omega} (u\Delta\, v - v\Delta\, u)\, dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu})\, d\sigma \ ,$$

waarin $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is de afgeleide langs de naar binnen gerichte normaal is.
We kiezen nu een bol S_0 concentrisch met S en met straal $R_0 < R$. Op de bolschil $S_0S = S \setminus S_0$ passen we (2.3) toe, waarbij we kiezen $v(x) = \frac{1}{r}$ met $r = |x - x_0|$. Zowel u(x) als v(x) voldoen in S_0S aan (i). Volgens de stelling van Gauss geldt bovendien

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0 \ , \qquad \text{als } \Delta u = 0 \ \text{ in } \Omega.$$

We vinden dus

$$\frac{1}{4\pi R_0^2} \int_{\partial S_0} u\, d\sigma = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial S} u\, d\sigma \ .$$

In deze gelijkheid laten we R_0 naar nul gaan, hetgeen vergelijking (2.2) oplevert. Er zij nog opgemerkt dat (2.2) equivalent is met

$$(2.4) \qquad u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_S u\, dx \ .$$

We kunnen de middelwaarde eigenschap van harmonische functies natuurlijk ook direct destilleren uit de integraalformule van Poisson. Deze levert een harmonische u in een bol S met straal R in termen van zijn waarden op de rand ∂S. Laten we voor het gemak het middelpunt van S in de oorsprong kiezen, laat x een punt zijn in S met afstand r tot de oorsprong en ξ een willekeurig punt op de rand ∂S. Het oppervlak van de eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$ noemen we σ_{n-1}, en we schrijven $|x-\xi| = (\sum(x_i-\xi_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Er geldt dan

$$(2.5) \qquad u(x) = \frac{R^2-r^2}{R\sigma_{n-1}} \int_{\partial S} \frac{u(\xi)}{|x-\xi|^n}\, d\sigma \ .$$

Voor $n = 2$ kunnen we, als we van poolcoördinaten $x_1 = r \cos \phi$, $x_2 = r \sin \phi$, $\xi_1 = R \cos \theta$, $\xi_2 = R \sin \theta$ gebruik maken, (2.5) ook schrijven we in de bekende vorm

$$(2.6) \qquad u(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2) u(R \cos \theta, R \sin \theta)\, d\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta-\phi) + r^2} .$$

De afleiding van (2.5) kan men bijvoorbeeld vinden in [2], p. 253. Als men in (2.5) $n = 3$ en $x = 0$ kiest, dan vinden we (2.2) terug.

Men kan ook omgekeerd laten zien (zie [2], p. 249 en 254), dat bij gegeven continue functie $f(\xi)$ $(f(\theta))$ gedefinieerd op de rand van ∂S, de integraal van Poisson

$$(2.5') \qquad u(x) = \frac{R^2-r^2}{R\sigma_{n-1}} \int_{\partial S} \frac{f(\xi)}{|x-\xi|^n}\, d\sigma$$

of, in twee dimensies,

$$(2.6') \qquad u(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2) f(\theta)\, d\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta-\phi) + r^2}$$

een functie voorstelt die harmonisch is in Ω, continu op $\bar{\Omega}$, met randwaarden die gelijk zijn aan f. Hiervan zullen we in stelling 2.4 gebruik maken.

Met behulp van stelling 2.1 kan op zeer eenvoudige wijze het maximum-minimum principe voor harmonische functies bewezen worden.

Stelling 2.2. (Maximum-minimum principe). Zij $u(x)$ harmonisch in Ω en $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Indien het maximum (minimum) van $u(x)$ in een inwendig punt van Ω wordt aangenomen, dan is $u(x) \equiv$ const. op $\bar{\Omega}$. Voor een niet-constante $u(x)$ wordt het maximum (minimum) dus alleen op $\partial\Omega$ aangenomen.

Bewijs. We tonen aan dat de aanwezigheid van een inwendig maximumpunt impliceert dat $u(x)$ identiek gelijk is aan een constante in Ω. Dat het optreden van een inwendig minimumpunt hetzelfde gevolg heeft is meteen duidelijk uit de overweging dat $v(x) = - u(x)$ ook harmonisch is in Ω.

Zij M de verzameling van alle punten in Ω waarin $u(x)$ de maximale waarde u_0 aanneemt. We bewijzen achtereenvolgens dat M gesloten is in Ω, en dat M open is in Ω.

(i) M is gesloten in Ω. Dit volgt direkt uit de continuïteit van $u(x)$.

(ii) M is open in Ω. Zij $x_0 \in M$, dan is er een bol $S \subset \Omega$ met x_0 als middelpunt. Relatie (2.4) impliceert dat $u(x) \equiv u_0$ in S, immers $u(x)$ is continu, dus $S \subset M$. Dus M is open in Ω.

M is zowel open als gesloten in Ω. Aangezien we hebben aangenomen dat $M \neq \emptyset$, moet gelden $M = \Omega$. Wegens de continuïteit van $u(x)$ geldt ook $u(x) \equiv u_0$ in $\bar{\Omega}$.

Uit dit maximum-minimum principe kan men concluderen dat de oplossing van het Dirichletprobleem voor de Laplace vergelijking, zo hij bestaat altijd eenduidig bepaald is. We kunnen dit als stelling formuleren.

Stelling 2.3. Het Dirichletprobleem

(2.7) $$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \; u(x) = \phi(x) \text{ op } \partial\Omega, \; u(x) \in C^0(\bar{\Omega})$$

heeft hoogstens één oplossing.

Bewijs. Stel dat er twee functies $u(x)$ en $v(x)$ zijn die aan (2.7) voldoen. Hun verschil $w(x) = u(x) - v(x)$ voldoet dan aan het Dirichletprobleem

(2.8) $$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega, \; w(x) = 0 \text{ op } \partial\Omega, \; w \in C^0(\bar{\Omega}).$$

Volgens het maximum-minimum principe impliceert dit dat $w(x) = 0$ in Ω.

De middelwaarde eigenschap blijkt karakteristiek te zijn voor harmonische funkties, zoals uit de volgende stelling volgt

Stelling 2.4. Zij $\Omega \subset R^3$. Veronderstel dat voor elke bol $S \subset \Omega$, met willekeurige straal R en willekeurig middelpunt x_0 geldt

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial S} u(\xi)\, d\sigma \tag{2.2}$$

of

$$u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^2} \int_{\partial S} u(x)\, dx\ , \tag{2.4}$$

dan is $u(x)$ harmonisch in Ω.

Bewijs. We kiezen een willekeurige bol $S \subset \Omega$. Beschouw de funktie $v(x)$ die harmonisch is in S met $v(x) = u(x)$ op ∂S. Dus heeft $v(x)$ volgens stelling 2.1 de middelwaarde eigenschap. Het is duidelijk dat ook $w(x) = v(x) - u(x)$ deze eigenschap bezit. Zoals in het bewijs van stelling 2.2 is gebleken impliceert de middelwaarde eigenschap van geldigheid van het maximum-minimum principe. Omdat $w(x) = 0$ op ∂S, geldt $w(x) \equiv 0$ in S, zodat $u(x)$ harmonisch is in elke bol $S \subset \Omega$.

We zullen nog twee stellingen van fundamenteel belang geven, die beide met gebruikmaking van de middelwaarde eigenschap heel elegant bewezen kunnen worden.

Stelling 2.5. (Harnack). Zij gegeven een rij functies $(u_i(x))$, $i = 1,2,\ldots$, alle harmonisch in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, met $\lim_{n\to\infty} u_i(x) = u(x)$, waarbij de convergentie uniform is in elke compacte deelverzameling van Ω. Dan is $u(x)$ harmonisch in Ω.

Bewijs. Zij $S \subset \Omega$ een willekeurige bol met middelpunt x_0 een straal R. Er geldt voor elke $u_i(x)$

$$u_i(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_S u_i(x)\, dx\ , \qquad i = 1,2,\ldots\ .$$

De $u_i(x)$ convergeren naar $u(x)$ uniform in S, zodat we limiet en integratie mogen verwisselen. Dus

$$u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_S u(x)\, dx$$

voor elke $S \subset \Omega$. Volgens stelling 2.4 betekent dit dat $u(x)$ harmonisch is in Ω.

Er bestaat een andere, sterkere versie van de stelling van Harnack.

Stelling 2.6. (Harnack). Als een monotoon niet-dalende of niet-stijgende rij harmonische functies in een enkel punt in een gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convergeert, dan convergeert de rij in alle punten van Ω, en is de limietfunctie eveneens harmonisch in Ω.

Bewijs. We geven het bewijs voor het monotoon niet-dalende geval van n = 2. Allereerst leiden we de ongelijkheden van Harnack af voor niet-negatieve harmonische functies. Het is duidelijk dat geldt

$$(R-r)^2 \leq R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2 \leq (R+r)^2,$$

waaruit volgt dat de Poissonkern in formule (2.6) ligt tussen de grenzen

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}$$

Voor een harmonische functie $u \leq 0$ geldt dan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R-r}{R+r}\, u(R\cos\theta, R\sin\theta) \leq u(r\cos\phi, r\sin\phi)$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R+r}{R-r}\, u(R\cos\theta, R\sin\theta)\, d\theta .$$

Met behulp van de middelwaarde-eigenschap verkrijgen wij

$$\text{(2.8)} \qquad \frac{R-r}{R+r}\, u(0,0) \leq u(r\cos\phi, r\sin\phi) \leq \frac{R+r}{R-r}\, u(0,0) ,$$

de ongelijkheden van Harnack die ons de groei van een harmonische functie beschrijft op elke cirkel met straal R.

Beschouw nu een rij harmonische functies (u_i), die convergeren in een punt van Ω. Laten we voor dat punt de oorsprong kiezen, wat geen beperking inhoudt. Voor $i < j$ geldt dan $u_i - u_j \geq 0$, zodat uit (2.8) volgt

$$0 \leq u_i(r\cos\phi, r\sin\phi) - u_j(r\cos\phi, r\sin\phi)$$
$$\leq \frac{R+r}{R-r}\left[u_i(0,0) - u_j(0,0)\right] ,$$

waaruit volgt dat de rij (u_i) uniform convergeert op elke cirkel om de oorsprong bevat in Ω. Gemakkelijk is na te gaan dat (u_i) uniform convergeert op elke compacte deelverzameling van Ω. Uit de vorige stelling volgt dan dat de limietfunctie harmonisch is in Ω.

Stelling 2.7. Zij $\{u\}$ een familie harmonische funkties in Ω, die uniform begrensd is in Ω d.w.z. $|u(x)| \leq m$ voor elke u en elke $x \in \Omega$. Dan is in elk compact deelgebied $\Omega_1 \subset \Omega$ de familie van de eerste afgeleiden $\{D_1 u\}$, $\{D_2 u\}$ en $\{D_3 u\}$ ook uniform begrensd.

Bewijs. In elk inwendig punt van Ω is $u(x)$ analytisch (dit volgt uit de integraal formule van Poisson, zie [1], p. 269), dus zeker driemaal continu differentieerbaar. Het is meteen in te zien dat de $D_1 u$, $D_2 u$ en $D_3 u$ harmonisch zijn. We kiezen een bol $\bar{S} \subset \Omega$ met straal R en middelpunt x_0. Voor de harmonische funties $D_1 u$ geldt

$$D_1 u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_S D_1 u(x)\, dx \ .$$

Partiële integratie levert

$$D_1 u(x_0) = - \frac{3}{4\pi R^3} \int_{\partial S} \frac{\partial x_1}{\partial \nu}\, d\sigma$$

Maar $|u| \leq m$ en $\left|\frac{\partial x_1}{\partial \nu}\right| \leq 1$, zodat $|D_1 u(x_0)| \leq \frac{3m}{R}$.

Dezelfde schattingen gelden voor $D_2 u$ en $D_3 u$. Zij nu een compact deelgebied $\Omega_1 \subset \Omega$ gegeven. Ω_1 heeft dan een minimale afstand tot $\partial\Omega$, die we d noemen. Als we $R < d$ een willekeurig punt $x_0 \in \Omega_1$ nemen, dan ligt de bol S, die x_0 als middelpunt en R als straal heeft, geheel in Ω. Op deze bol kunnen we de boven gegeven redenering toepassen, zodat in Ω_1 geldt $|D_1 u|$, $|D_2 u|$, $|D_3 u| \leq \frac{3m}{d}$.

Opmerking 2.1. Het maximum principe levert ook direct de uniciteit op voor de oplossing van het Dirichletprobleem voor de Poisson vergelijking, namelijk

$$(2.9) \qquad \Delta u = f(x) \text{ in } \Omega,\ u(x) = \phi(x) \text{ op } \partial\Omega,\ u(x) \in C^0(\bar{\Omega}).$$

Immers als $u(x)$ en $v(x)$ aan (2.9) voldoen, dan voldoet $w(x) = u(x) - v(x)$ aan (2.8), zodat $w(x) \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$.

Opmerking 2.2. Behalve het Dirichletprobleem voor de vergelijking van Laplace beschouwt men ook vaak het Neumann probleem voor deze vergelijking, waarbij dan geëist wordt

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} = \psi(\xi) \text{ op } \partial\Omega, \quad u(x) \in C^1(\bar{\Omega}). \tag{2.10}$$

Dit probleem is niet voor elke continue functie $\psi(x)$ oplosbaar. De stelling van Gauss leert ons dat voor een harmonische functie $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ geldt

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dx = 0.$$

Hieruit volgt dat (2.10) alleen dan een oplossing kan hebben wanneer

$$\int_{\partial\Omega} \psi(\xi)\, d\sigma = 0.$$

Indien er een oplossing bestaat, dan is deze, op een constante na, eenduidig bepaald. Het bewijs van deze bewering zal worden gegeven zodra we het maximum principe voor algemene tweede orde elliptische differentiaalvergelijkingen hebben behandeld.

2.2. Het Existentiebewijs van Perron

Perron heeft een existentiebewijs geconstrueerd voor het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking (2.7), dat volledig gebaseerd is op het maximum-minimum principe. Wel wordt in dit bewijs uitgegaan van de eenduidige oplosbaarheid van het Dirichlet probleem voor een bolvormig gebied. Deze aanname wordt door (2.5) gerechtvaardigd. We beginnen met het introduceren van enkele begrippen.

Definitie 2.2. Zij $u(x) \in C^0(\Omega)$. Zij $S \subset \Omega$ een bol. Zij $v(x)$ de harmonische functie in S, die op ∂S gelijk is aan $u(x)$. Dan wordt de functie $M_S[u]$ als volgt gedefinieerd:

$$M_S[u](x) = \begin{cases} v(x) \text{ in } S \\ \\ u(x) \text{ in } \Omega \setminus S. \end{cases}$$

Definitie 2.3. Een functie $u \in C^0(\Omega)$ heet subharmonisch, resp. superharmonisch in Ω, indien voor elke bol $S \quad \Omega$ geldt dat $u(x) \leq M_S|u|(x)$, resp. $u(x) \geq M_S|u|(x)$.

Opmerking 2.3. Laat u een functie van $C^2(\Omega)$ zijn, waarvoor geldt $\Delta u(x) \geq 0$ voor $x \in \Omega$. Dan is u subharmonisch in Ω.

Bewijs. Neem een bol $S \subset \Omega$, en stel $w = M_S|u|$, dan is $w = u$ op ∂S, $\Delta w = 0$. Beschouw de functie $z = w - u$, waarvoor geldt $z = 0$ op ∂S en $\Delta z \geq 0$ op S. Uit de stelling van Green verkrijgen we

$$\int_S (\nabla z)^2 + z\Delta z)\ dx = - \int_{\partial S} z \frac{\partial z}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

waaruit volgt $z \geq 0$, zodat $u \leq w$ op S.

Evenzo kunnen we bewijzen dat u superharmonisch is, als $\Delta u \leq 0$. De begrippen subharmonisch en superharmonisch kunnen we zien als generalisaties in meer dimensies van convex en concaaf. Immers, de lineaire functie is oplossing van de eendimensionale vergelijking van Laplace $u_{xx} = 0$, een convexe functie voldoet aan $u_{xx} \geq 0$, een concave aan $u_{xx} \leq 0$.

We zullen nu enige eenvoudige eigenschappen van sub- en superharmonische functies afleiden, die we in de volgende sectie bij het existentiebewijs van Perron nodig zullen hebben. Daarbij zullen we de beweringen alleen maar voor subharmonische functies formuleren.

Eigenschap 2.1. Laat $u_1, u_2 \ldots u_n$ een aantal functies zijn, subharmonisch in Ω. Dan is hun som $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ ook subharmonisch in Ω.

Bewijs. Triviaal.

Eigenschap 2.2. Als u subharmonisch is in Ω, dan is $v = - u$ superharmonisch in Ω.

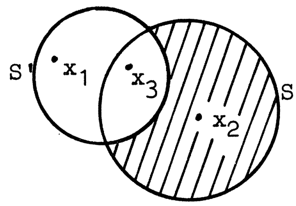
Bewijs. Triviaal.

<u>Eigenschap 2.3</u>. Laat $u_1, u_2, \ldots, u_n$ een aantal subharmonische functies in Ω zijn. Dan is $u(x) = \max\,(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ ook subharmonisch in Ω.
<u>Bewijs.</u> Zij S een willekeurige bol in Ω. Er geldt dan $u_i \leq M_S[u_i] \leq M_S[u]$ voor $i = 1, \ldots, n$, zodat $u \leq M_S[u]$.

<u>Eigenschap 2.4</u>. Als u subharmonisch is in Ω, dan is ook $v = M_S[u]$ subharmonisch in Ω voor elke bol $S \subset \Omega$.
<u>Bewijs</u>. We beschouwen $M_{S'}[v]$ voor een willekeurige bol $S' \subset \Omega$. Als $S' \subset S$ of $S' \cap S = \emptyset$, dan is het direct duidelijk dat $v \leq M_{S'}[v]$ op Ω.

We veronderstellen nu dat S en S' elkaar snijden, en dat er een stuk van S' buiten S ligt. Kies een punt $x_1 \in S' \setminus S$.

Figuur 2.1



Er geldt dan in het punt x_1

$$v = M_S[u] = u \leq M_{S'}[u] \leq M_{S'}[v],$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit $u \leq v$. Nemen we $x_2 \in S \setminus S'$, dan volgt direct dat $v = M_{S'}[v]$. Rest ons nog $x_3 \in S \cap S'$. In dit gebied is $v = M_S[u]$ harmonisch, en is ook $M_{S'}[v]$ harmonisch. Op de rand van dit gebied geldt, wegens het voorafgaande, $v \leq M_{S'}[v]$, zodat uit het maximumprincipe volgt dat $v \leq M_{S'}[v]$ in het gehele gebied $S \cap S'$.

<u>Eigenschap 2.5</u>. Indien u subharmonisch is in Ω, en u een maximumpunt in het inwendige van Ω heeft, dan is u gelijk aan een constante in Ω. Als bovendien $u \in C^0(\bar{\Omega})$, dan wordt dus het maximum van u aangenomen op de rand van Ω, of is u constant.
<u>Bewijs</u>. Zij x_0 een maximumpunt in het inwendige van Ω. Kies een bol $S \subset \Omega$ met middelpunt x_0. Bekijk de functie $v = M_S[u]$. Aangezien $u \leq v$ in Ω, is v een in S harmonische functie met inwendig maximumpunt. Dus is, wegens stelling 2.2 $v(x) \equiv v(x_0)$ in S. Daar $u(x) = v(x)$ op ∂S heeft $u(x)$ op ∂S de constante waarde $v(x)$. Maar dit geldt voor elke bol $S' \subset S$ met middel-

punt x_0, zodat $u(x) \equiv u(x_0)$ in S. Er volgt dat de verzameling van maximumpunten open is in Ω. Wegens de continuïteit van u is deze verzameling ook gesloten, zodat $u(x) \equiv$ const. in Ω.

Met behulp van de begrippen subharmonische functie en superharmonische functie voeren we nu de begrippen subfunctie en superfunctie van een randfunctie ϕ voor een gebied Ω in.

Definitie 2.4. Zij u een functie gedefinieerd in $\bar{\Omega}$ en zij ϕ een continue functie gedefinieerd op $\partial\Omega$. Dan wordt u een subfunctie van ϕ voor het gebied Ω genoemd, indien aan de volgende eisen is voldaan:

(i) $u \in C^0(\bar{\Omega})$,

(ii) u is subharmonisch in Ω,

(iii) $u \leq \phi$ op $\partial\Omega$.

Een functie u zal een superfunctie van ϕ voor het gebied Ω worden genoemd, indien voldaan is aan:

(i) $u \in C^0(\bar{\Omega})$,

(ii) u is superharmonisch in Ω,

(iii) $u \geq \phi$ op $\partial\Omega$.

De existentie van subfuncties en superfuncties is evident. Immers $u(x) \equiv -\max\limits_{\xi\in\partial\Omega} |\phi(\xi)|$ is een subfunctie en $u(x) \equiv \max\limits_{\xi\in\partial\Omega} |\phi(\xi)|$ is een super-superfunctie. We voeren bij een gegeven gebied Ω en een gegeven functie ϕ de klasse F van alle subfuncties van ϕ voor Ω in. Voor de functies $u \in F$ zullen we een aantal eigenschappen afleiden, die voor een groot deel direct volgen uit de eigenschappen 2.1 t/m 2.5.

Eigenschap 2.6. De klasse F is naar boven begrensd door de functie $f \equiv \max\limits_{\xi\in\partial\Omega} |\phi(\xi)|$.

Bewijs. Volgt direct uit de definitie 2.4 en eigenschap 2.5.

Eigenschap 2.7. Als $u_1, u_2, \ldots, u_n \in F$, dan is ook $u(x) = \max(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \in F$.

Bewijs. Volgt uit de eigenschap 2.3.

Eigenschap 2.8. Indien $u \in F$, dan ook $M_S[u] \in F$ voor iedere willekeurige bol $S \subset \Omega$.
Bewijs. Volgt uit eigenschap 2.4.

Eigenschap 2.9. Indien $u \in F$ en v is een superfunctie van ϕ voor Ω, dan geldt $u \leq v$ in Ω.
Bewijs. $w = u - v$ is een subfunctie van de randfunctie $\phi \equiv 0$ (eigenschap 2.2). Wegens het maximumprincipe voor subharmonische functies is dus $w \leq 0$ in Ω.

Het idee dat achter het existentiebewijs van Perron zit is nu dat de gezochte oplossing u van het Dirichlet-probleem (2.7) een subfunctie is. Het is duidelijk dat voor elke subfunctie v geldt $v \leq u$, immers $w = v - u$ is een subfunctie van de randfunctie $\phi \equiv 0$. Perron definieert een functie u die in elk punt van $\bar{\Omega}$ gelijk is aan de kleinste bovengrens van de waarden in dit punt van alle subfuncties. Hij bewijst dat deze u harmonisch is in Ω, en dat $u(\xi) = \phi(\xi)$ in elk "regulier" punt ξ van $\partial\Omega$. Indien $\partial\Omega$ alleen uit reguliere punten bestaat, dan is dus u de oplossing van (2.7). We kunnen dit als stelling formuleren.

Stelling 2.8. De functie u gedefinieerd in elk punt x als

$$u(x) = \sup_{v \in F} v(x) \tag{2.11}$$

is de oplossing van het Dirichletprobleem (2.7).
Bewijs. Het bewijs valt uiteen in twee delen.
(i) u is harmonisch in Ω.
Zij S een willekeurige bol in Ω en S_0 een met S concentrische bol met halve straal. Als we bewezen hebben dat u harmonisch is in S_0, dan weten we ook dat u harmonisch is in Ω.

We kiezen een deelklasse F^* uit F, zodanig dat de functies uit F^* een uniforme benedengrens bezitten, terwijl bovendien voor F^* de eigenschappen 2.6, 2.7 en 2.8 geldig blijven. We kunnen zo'n deelklasse F^* als volgt construeren. Zij $w_1(x)$ een vast element uit F, en $w(x)$ een willekeurige functie uit F. De klasse F^* zal nu de functie $v(x) = \max(w_1(x), w(x))$ bevatten voor iedere functie $w \in F$. Het is duidelijk dat

$$u(x) = \sup_{v \in F^*} v(x).$$

We kiezen nu een rij punten (x_j), die dicht ligt in S en een verzameling functies $v_{j,k} \in F^*$ met de eigenschap

$$0 \leq u(x_j) - v_{j,k}(x_j) \leq \frac{1}{k}, \quad j,k = 1,2,\ldots .$$

Naar aanleiding hiervan definiëren we de functies $v_k(x)$ als

$$v_k(x) = M_S\left[\max(v_{1,k}, v_{2,k}, \ldots, v_{k,k})\right] . \tag{2.12}$$

Wegens eigenschappen 2.8 en 2.9 liggen de functies $v_k(x)$ in F^*. Bovendien geldt in alle punten x_j dat $v_k \to u$ voor $k \to \infty$. De functies v_k zijn uniform begrensd en harmonisch in S, zodat wegens stelling 2.7 hun eerste afgeleiden uniform begrensd zijn in S_0. Dit betekent dat de functies v_k equicontinu zijn in S_0. Nu passen we het volgende bekende lemma toe:
Lemma. (Ascoli-Arzelà) Als een rij equicontinue functies (v_k), die gedefinieerd zijn op een begrensde verzameling A, convergeert op een verzameling $A_1 \subset A$ met $\bar{A}_1 = A$, dan convergeert (v_k) uniform in A.

Het blijkt dus dat de functies v_k uniform in S_0 naar u convergeren. Aangezien de v_k harmonisch zijn in S_0 volgt hieruit wegens stelling 2.5 dat u harmonisch is in S_0.

(ii) In het tweede deel van het bewijs wordt aangetoond dat $u \in C^0(\bar{\Omega})$ en dat $u = \phi$ op $\partial\Omega$. Hiertoe definiëren we eerst het begrip barrière-functie $\omega_\xi(x)$ voor $\xi \in \partial\Omega$.

Definitie 2.5. Zij $\xi \in \partial\Omega$. Onder een barrièrefunctie $\omega_\xi(x)$ van ξ verstaan we een functie die superharmonisch is in Ω, continu in $\bar{\Omega}$ en positief in $\bar{\Omega}$ behalve in ξ, waar hij nul is. Indien er voor ξ een barrièrefunctie bestaat, dan heet ξ een regulier randpunt.

We bewijzen nu dat in elk regulier randpunt ξ, u continu is en dat $u(\xi) = \phi(\xi)$.

Wegens de continuïteit van ϕ kan er bij elke $\varepsilon > 0$ een constante k worden gevonden zodat de functie

$$v_1(x) = \phi(\xi) - \varepsilon - k\ \omega_\xi(x)$$

en subfunctie van ϕ is voor Ω en

$$v_2(x) = \phi(\xi) + \varepsilon + k\ \omega_\xi(x)$$

een superfunctie van ϕ is voor Ω. Wegens eigenschap 2.9 geldt dan

$$\phi(\xi) - \varepsilon - k\ \omega_\xi(x) \leq u(x) \leq \phi(\xi) + \varepsilon + k\ \omega_\xi(x)$$

voor alle $x \in \Omega$, waaruit volgt

$$|u(x) - \phi(\xi)| \leq \varepsilon + k\ \omega_\xi(x). \tag{2.13}$$

Als we in (2.13) x tot ξ laten naderen, gaat $\omega_\xi(x)$ naar nul, zodat voor $|x - \xi|$ voldoende klein geldt

$$|u(x) - \phi(\xi)| < 2\ \varepsilon.$$

Uiteraard is het van belang enigszins te weten voor wat voor soort gebieden dit existentiebewijs geldig is, d.w.z. de vraag wanneer een randpunt regulier is, te beantwoorden. We zullen voorwaarden afleiden waaronder het inderdaad mogelijk is zo'n barrièrefunctie te construeren, zodat de regulariteit van het randpunt verzekerd is. We wijzen er wel op dat dit slechts voldoende voorwaarden zijn.

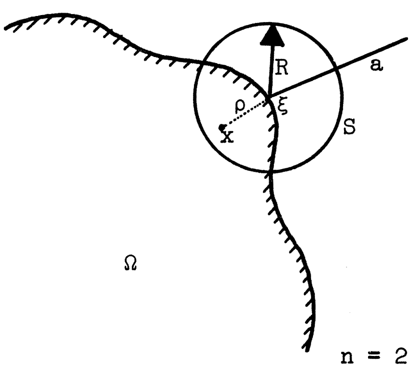
We beschouwen eerst het geval $n = 2$. Er kan nu een barrièrefunctie worden geconstrueerd indien ξ het uiteinde is van een lijnstuk a dat met $\bar{\Omega}$ alleen het punt ξ gemeen heeft. Zie figuur 2.2. We kiezen in dit geval een cirkel S met middelpunt ξ en straal $R < 1$, R zo klein dat ∂S en a elkaar snijden. We beschouwen nu het gebied $S \setminus a$. Als barrièrefunctie kiezen we in $S \setminus a$

$$\omega_\xi(x) = -\frac{\log \rho}{|\log \rho|^2 + \theta^2}$$

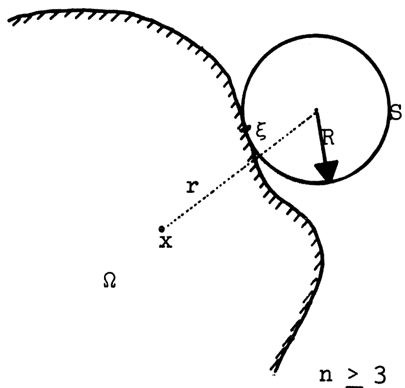
waarin ρ en Θ poolcoördinaten van x om ξ zijn. Door de aangebrachte coupure is dit een eenwaardige functie in $S\setminus a$. Deze lokale barrièrefunctie kan worden uitgebreid tot een barrièrefunctie over de gehele Ω, $W_\xi(x)$, bijvoorbeeld

$$W_\xi(x) = \begin{cases} \min\{m, \omega_\xi(x)\} & \text{in } S \cap \bar{\Omega} \\ m & \text{in } \Omega \setminus S\ , \end{cases}$$

waarin m het minimum van $\omega_\xi(x)$ is in de schil $S\setminus S_0$, met S_0 een cirkel met middelpunt ξ en straal $\frac{1}{2}$ R.



Figuur 2.2



Figuur 2.3

We bekijken nu het geval $n \geq 3$. Bij elk randpunt ξ, waarvoor het mogelijk is een bol S aan te geven die alleen ξ gemeen heeft met $\bar{\Omega}$, kan een barrièrefunctie worden geconstrueerd. Zie figuur 2.3. Zij R de straal van S en zij r de afstand van x tot het middelpunt van S. Als barrièrefunctie kiezen we de harmonische functie

$$\omega_\xi(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\ .$$

Literatuur

[1] Courant, R. Hilbert, P. — Methods of mathematical physics, Vol. II. Interscience, New York, 1962.

[2] Garabedian, P.R. — Partial differential equations. Wiley, New York, 1964.

3. SCHATTINGEN VOOR OPLOSSINGEN VAN ELLIPTISCHE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

3.1. Het maximumprincipe.

We zullen ons in dit hoofdstuk bezig houden met tweede orde elliptische differentiaaloperatoren, die we schrijven in de vorm

$$(3.1) \qquad Lu = Mu + au$$

waarin

$$(3.2) \qquad Mu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i u.$$

De functies $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ en $u(x)$ worden verondersteld gedefinieerd te zijn op een begrensd gebied in $\Omega \subset R^n$, en we nemen aan dat $a_{ij}, a_i, a, u \in C^0(\bar{\Omega})$ en $u \in C^2(\Omega)$. Verder veronderstellen we dat L uniform elliptisch is in Ω, d.w.z. dat er positieve constanten m en K bestaan, zodanig dat

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 , \\ |a_{ii}(x)|,\ |a_i(x)|,\ a(x)| \leq K \end{cases}$$

voor alle $x \in \Omega$.

We formuleren nu een viertal stellingen.

Stelling 3.1. (Tweede lemma van Hopf). Zij $Mu \geq 0$ in Ω en veronderstel dat het maximum van u wordt aangenomen in een punt $\xi \in \partial\Omega$. Stel dat er een bol $S \subset \Omega$ bestaat met $\xi \in \partial S$. Dan geldt $\partial u/\partial\nu \leq 0$ in ξ. En verder, indien $\partial u/\partial\nu = 0$, dan is u gelijk aan een constante in Ω.

Stelling 3.2. (Eerste lemma van Hopf). Zij $Mu \geq 0$ in Ω en veronderstel dat u zijn maximum in een inwendig punt van Ω aanneemt. Dan is $u \equiv$ const. in Ω.

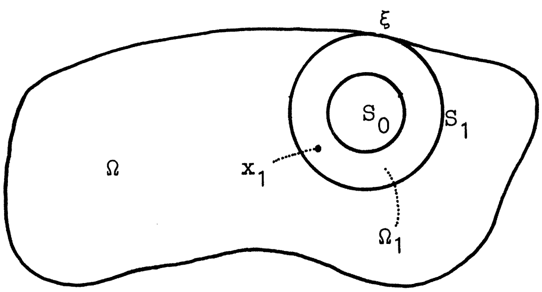
<u>Stelling 3.3</u>. Zij $a \leq 0$ en $Lu \geq 0$ in Ω. Indien u zijn maximale waarde in een inwendig punt aanneemt, en het maximum is positief, dan is u constant in Ω.

<u>Stelling 3.4</u>. Zij $a \leq 0$ en $Lu \geq 0$ in Ω. Indien u zijn maximale waarde u_0 aanneemt in een punt $\xi \in \partial\Omega$, en deze waarde is positief, dan is $\partial u/\partial\nu < 0$, tenzij $u(x) \equiv u_0$ in Ω.

In stelling 3.1 en 3.4 is het bestaan van $\partial u/\partial\nu$ in ξ aangenomen. Het bewijs van stelling 3.3 volgt vrij direct uit stelling 3.2. Immers, in een omgeving van een maximumpunt is $u \geq 0$, zodat $Mu = Lu - au \geq 0$, omdat $a \leq 0$. Dus, wegens stelling 3.1., is u constant in die omgeving. Er volgt dat de verzameling van maximumpunten open is in Ω. Omdat u continu is, is deze verzameling ook gesloten. Dus $u \equiv$ const. in Ω.

Evenzo volgt het bewijs van stelling 3.4 uit stelling 3.1. We bewijzen nu achtereenvolgens stelling 3.1 en 3.2.

<u>Bewijs stelling 3.1</u>. We nemen voorlopig aan dat $u(x) < u(\xi)$ in Ω. Later zal blijken dat deze voorwaarde altijd vervuld is, tenzij $u(x) \equiv$ constante in Ω. We kiezen een bol S_1 met een straal r_1 en middelpunt x_0, zodanig dat $S \subset \Omega$ en $\bar{S} \cap \partial\Omega = \xi$. We kiezen een tweede bol S_0, concentrisch met S_1, maar met straal $r_0 < r_1$. De schil $S_1 \setminus S_0$ noteren we als Ω_1. Stel nu dat er een functie $g(x)$ bestaat die aan de volgende voorwaarden voldoet:
(i) $g(x) \in C^2(\bar{\Omega}_1)$; (ii) $g(x) = 0$ op ∂S_1 ; (iii) $\frac{\partial g}{\partial \nu} > 0$ in ξ;
(iv) $Mg > 0$ in Ω_1.



Figuur 3.1

We introduceren dan de functie $v(x) = u(x) + \varepsilon g(x)$, waarbij ε zo klein wordt gekozen dat $v(x) < u(\xi)$ voor $x \in \partial S_0$. Voor $v(x)$ geldt bovendien $Mv > 0$ in Ω_1.

Stel nu dat $v(x)$ zijn maximum aanneemt in een punt x_1 in Ω_1. We mogen aannemen, daar dit door een rotatie van de coördinaten kan worden bereikt, dan geldt $a_{ij}(x_1) = 0$, voor $i \neq j$, $a_{ii}(x) > 0$. Aangezien de eerste afgeleiden van $v(x)$ alle nul worden in x_1 en $Mv(x_1) > 0$ moet er tenminste één tweede afgeleide positief zijn, hetgeen is uitgesloten in een inwendig maximumpunt. Het maximum van $v(x)$ wordt dus bereikt op $\partial\Omega_1$ en wel in ξ. Dan is de afgeleide langs de naar binnengerichte normaal van $v(x)$ niet positief in dit punt. Aangezien $\frac{\partial g(\xi)}{\partial \nu} > 0$, betekent dit dat $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} < 0$.

Rest ons nog een functie $g(x)$ aan te geven die aan de eisen (i) t/m (iv) voldoet. Zo'n functie is

$$g(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_0^2} .$$

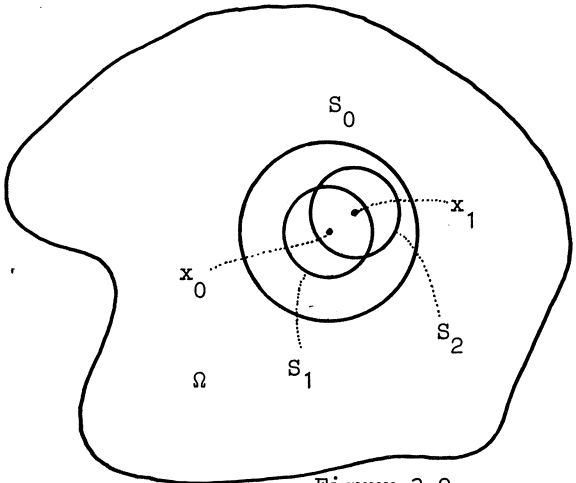
met $\alpha > 0$ groot genoeg en $r = |x-x_0|$. Immers als we x_0 als oorsprong kiezen geldt

$$\begin{aligned} Mg &= e^{-\alpha r^2} \left[4\alpha^2 \sum a_{ij}x_ix_j - 2\alpha \sum (a_ix_i + a_{ii})\right] \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \left[4\alpha^2 m r_0^2 - 2n\alpha\, K\, r_1 - 2n\alpha\, K\right] . \end{aligned}$$

Voor α voldoende groot geldt dus $Mg > 0$ in Ω_1. De andere eisen zijn evident vervuld.

Bewijs stelling 3.2. Het eerste lemma van Hopf kan eenvoudig met het tweede lemma van Hopf worden bewezen. We bewijzen dat de verzameling G van maximumpunten van u zowel gesloten als open is in Ω. Indien G dan niet leeg is, impliceert dit dat $G = \Omega$.

(i) G is gesloten in Ω. Volgt direct uit de continuïteit van $u(x)$.



Figuur 3.2

(ii) G is open in Ω. Zij u_0 de maximale waarde van u in $\bar{\Omega}$. Zij $x_0 \in G$. Kies $\delta > 0$, zo klein dat de bol $S_0 = \{x \mid |x-x_0|<2\delta\}$ geheel in Ω ligt. We beweren dat de bol $S_1 = \{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ geheel in G ligt. Veronderstel het tegendeel, dan is er een punt $x_1 \in S_1$ met $u(x_1) < u_0$. Wegens de continuïteit van u bestaat er een ρ met $0 < \rho < \delta$, zodanig dat $u(x) < u_0$ in de bol $S_2 = \{x \mid |x-x_1|<\delta\}$, terwijl er een punt $x_2 \in \partial S_2$ is met $u(x) = u_0$. Het tweede lemma van Hopf zegt nu dat de afgeleide langs de naar binnen gerichte normaal op ∂S_2 van u in x_2 negatief is. Dit is echter onmogelijk, want in een inwendig maximumpunt zijn alle richtingsafgeleiden nul. Dus $S_1 \subset G$.

Opmerking 3.1. Analoge uitspraken als in stelling 3.3 en 3.4 kunnen gedaan worden voor punten waar u(x) een negatief minimum aanneemt.

Opmerking 3.2. Stelling 3.4 maakt het mogelijk de eenduidigheid op een constante na van het Neumann probleem aan te tonen. Zij gegeven het probleem

$$(3.4) \qquad Lu = f \text{ in } \Omega \ , \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi \text{ op } \partial\Omega \ , \ u \in C^1(\bar{\Omega}) \ .$$

Indien $a \leq 0$,en $Lu \geq 0$, dan is de oplossing van (3.4), zo hij bestaat, eenduidig bepaald.

Bewijs. Veronderstel dat er twee oplossingen $u(x)$ en $v(x)$ zijn. Hun verschil $w(x) = u(x) - v(x)$ voldoet aan het Neumann probleem

$$Lw = 0 \text{ in } \Omega, \ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ op } \partial\Omega, \ w \in C^1(\bar{\Omega}).$$

We mogen aannemen dat $\max_{x \in \bar{\Omega}} w(x) > 0$. Stel dat $w(x)$ niet constant is in Ω, dan wordt het maximum van $w(x)$ alleen op $\partial\Omega$ aangenomen volgens stelling 3.2. Maar volgens stelling 3.4 moet in zo'n maximupunt gelden $\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0$. Dit is in strijd met de gegevens. Dus $w(x) \equiv$ constante in $\bar{\Omega}$.

We zullen nu het Dirichlet probleem

$$(3.5) \qquad Lu = f \text{ in } \Omega, \ u = \phi \text{ op } \partial\Omega, \ u \in C^0(\bar{\Omega}),$$

met ϕ en $f \in C^0(\bar{\Omega})$ nader bekijken.
Indien $a(x) \leq 0$ en $Lu \geq 0$, kan uit stelling 3.3 worden afgeleid dat de oplossing van (3.5), als hij bestaat, eenduidig bepaald is. Als we de eis $Lu \geq 0$ laten vallen, dan kan dat ook m.b.v. een schatting voor u in termen van de inhomogene term f en de randfunctie ϕ, die we nu zullen afleiden. Hiervoor zullen we de supremumnorm nodig hebben.

Definitie 3.1. Zij $v(x)$ een begrensde functie gedefinieerd op een verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$. Onder de supremumnorm $||v||$ van $v(x)$ verstaan we dan $||v|| = \sup_{x \in V} |v(x)|$.

Voor u en f wordt dit supremum dus over $\bar{\Omega}$ genomen, voor ϕ wordt de kleinste bovengrens over $\partial\Omega$ beschouwd. Er volgen nu enkele schattingen voor de oplossing van (3.5).

Stelling 3.5. Zij $a \leq 0$ en zij v een functie die voldoet aan

$$-Lv \geq ||f|| \text{ in } \Omega, \ v \geq ||\phi|| \text{ op } \partial\Omega,$$

dan geldt voor de oplossing u van $Lu = f$

$$|u| \leq v \text{ in } \Omega .$$

Bewijs. Stel $w = u - v$, dan voldoet w aan

$$Lw = Lu - Lv = f - Lv \geq 0 \text{ in } \Omega, \; w \leq 0 \text{ op } \partial\Omega.$$

Uit stelling 3.3 volgt dan dat $w \leq 0$ in Ω. Dus $u \leq v$. Analoog bewijst men $u \geq -v$.

Gevolg. Als $a \leq 0$, dan voldoet de oplossing u van (3.5) aan de ongelijkheid

$$(3.6) \qquad ||u|| \leq ||\phi|| + (e^{\alpha d}-1)\; ||f||,$$

waarin

$$\alpha = \frac{1}{2m}\,(K + (K^2+4m)^{\frac{1}{2}}) \;, \quad d = \text{diam}(\Omega).$$

Het is onmiddelijk duidelijk dat ook deze stelling de uniciteit van de oplossing van (3.5) impliceert.

Bewijs. We veronderstellen dat Ω in de strook $0 \leq x_1 \leq d$ ligt. We voeren in de functie:

$$g(x) = e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}$$

In de beschouwde strook geldt dan:

$$e^{\alpha d} - 1 \geq g(x) \geq 0$$

en

$$Lg = -(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha)2^{\alpha x_1} + ag \leq -m\alpha^2 + k\alpha = -1.$$

We stellen nu

$$h = ||\phi|| + ||f||\; g.$$

Voor $h(x)$ geldt dan:

$$h \geq ||\phi|| \quad \text{en} \quad Lh = ||f||Lg + a||\phi|| \leq -\; ||f||.$$

Uit stelling 3.5 volgt dan de ongelijkheid

$$||u|| \leq ||\phi|| + ||f||\, g ,$$

waaruit ongelijkheid (3.6) volgt.

Ook indien we de eis $a(x) \leq 0$ laten vallen, kan er nog een uitspraak gedaan worden over de grootte van $||u||$ en kan daaruit weer uniciteit voor de oplossing van (3.5) worden bewezen. We moeten ons in dit geval echter beperken tot een voldoend klein gebied.

Stelling 3.6. Zij $a(x) < k$, met $k > 0$. Zij de diameter d van Ω zo klein dat $e^{\alpha d} - 1 < {}^1/k$. Dan voldoet elke oplossing u van (3.5) aan de ongelijkheid

$$(3.7) \qquad ||u|| \leq \frac{||\phi|| + (e^{\alpha d}-1)||f||}{1 - k(e^{\alpha d}-1)}$$

Bewijs. We introduceren de functies $a^+(x) = \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)$; $a^-(x) = \frac{1}{2}(a(x) - |a(x)|)$ en $g(x) = f(x) - a^+(x)u(x)$. De functie u mag worden beschouwd als een oplossing van het Dirichlet probleem

$$Mu + a^-u = g \text{ in } \Omega,\ u = \phi \text{ op } \partial\Omega,\ u \in C^0(\bar{\Omega}) .$$

Er geldt: $0 \leq a^+(x) \leq k$, zodat $||g|| \leq ||f|| + k||u||$. Omdat $a^-(x) \leq 0$, mogen we schatting (3.6) toepassen:

$$||u|| \leq ||\phi|| + (e^{\alpha d}-1)\,(||f|| + k||u||).$$

ofwel

$$||u|| \leq \frac{||\phi|| + (e^{\alpha d}-1)||f||}{1 - k(e^{\alpha d}-1)} .$$

Het is direct in te zien dat voor een Dirichtletprobleem, dat aan de eisen van stelling 3.6 voldoet, de uniciteit van de oplossing verzekerd is.

Stelling 3.7. Zij $a \leq 0$ en u een oplossing van $Lu = f$. Laat v een niet-negatieve functie zijn zodanig dat

$$|Lu| \leq L(-v) \text{ in } \Omega,\ |u| \leq v \text{ op } \partial\Omega.$$

Dan is $|u| \leq v$ in Ω.

Bewijs. Stel $w = u + v$, dan geldt $Lw \leq 0$ en $w \geq 0$. Volgens stelling 3.3 is dan $w \geq 0$ in Ω, dus $-u \leq v$ in Ω. Evenzo bewijst men $u \leq v$ in Ω.

3.2. Interne Schauder schattingen

Onder bepaalde voorwaarden kan men ook uitspraken doen over de eerste en tweede afgeleiden van oplossingen van (3.5). Deze uitspraken zijn neergelegd in de schattingen die J. Schauder in 1934 heeft afgeleid. Sindsdien zijn er vereenvoudigde bewijzen geleverd, o.a. door Miranda [5] en Douglas en Nirenberg [3]. Het geven van deze bewijzen zou echter in het kader van dit colloquium te tijdrovend zijn. We zullen volstaan met het formuleren van de schattingen en het bewijzen van de existentie van de oplossing van het Dirichlet probleem voor vergelijkingen waarvoor de schattingen van toepassing zijn.

We kunnen twee typen schattingen onderscheiden.

(i) Interne schattingen. Deze zijn onafhankelijk van de gladheid van de rand, of van de gladheid van de randfunctie $\phi(x)$. Deze schattingen gelden alleen in het inwendige van Ω, terwijl de afstand van het beschouwde punt tot $\partial\Omega$ als parameter optreedt.

(ii) Schattingen tot op de rand. Deze zijn geldig op en bij een glad gedeelte $T \subset \partial\Omega$, waarop de randfunctie $\phi(x)$ aan bepaalde voorwaarden moet voldoen.

We zullen eerst de interne schattingen bekijken. Teneinde tot een duidelijke formulering te kunnen komen, zullen we eerst enkele functieruimten met bijpassende normen invoeren. De notaties zijn die van Douglis en Nirenberg [3]. We zullen ons steeds bezighouden met Höldercontinue functies.

Definitie 3.2. Een functie g voldoet aan een Höldervoorwaarde met exponent α, $0 < \alpha < 1$, en coëfficient H, indien voor elk puntenpaar x, y geldt $|g(x) - g(y)| \leq H|x-y|^{\alpha}$. g wordt Höldercontinu in Ω met exponent α genoemd, als in elke compacte deelverzameling van Ω g aan een Höldervoorwaarde met exponent α voldoet.

Definitie 3.3. Voor $x \in \Omega$, zullen we onder $d_x = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ verstaan de afstand van x tot $\partial\Omega$. Voor $x, y \in \Omega$, zullen we onder d_{xy} verstaan $d_{xy} = \min(d_x, d_y)$.

Zij $g(x) \in C^i(\Omega)$. Dan definiëren we voor elke gehele p en i, zodanig dat $p + i > 0$:

$$(3.8) \qquad M_{p,i}[g] = \max_{|j|=i} \sup_{x \in \Omega} d_x^{p+i} |D^j g(x)|.$$

Opmerking 3.3. $M_{0,0}[g] = \sup_{x \in \Omega} |g(x)| = ||g||$.

Definitie 3.4. Zij $g(x) \in C^{i+\alpha}(\Omega)$, d.w.z. dat de i^{de} afgeleiden van g in Ω een Höldervoorwaarde met exponent α vervullen.
Dan is per definitie

$$(3.9) \qquad M_{p,i+\alpha}[g] = \max_{|j|=i} \sup_{x,y \in \Omega} d_x^{p+i+\alpha} \frac{|D^j g(x) - D^j g(y)|}{|x - y|^\alpha} .$$

We definiëren nu de volgende normen voor functies in Ω.

Definitie 3.5. Zij $u(x) \in C^i(\Omega)$, dan wordt de norm $||u||_{p,i}$ als volgt gedefinieerd:

$$(3.10) \qquad ||u||_{p,i} = \sum_{j=\max(0,-p)}^{i} \frac{M_{p,j}[u]}{j!}$$

Definitie 3.6. Zij $u(x) \in C^{i+\alpha}(\Omega)$, dan wordt de norm $||u||_{p,i+\alpha}$ gedefinieerd door:

$$(3.11) \qquad ||u||_{p,i+\alpha} = ||u||_{p,i} + M_{p,i+\alpha} .$$

Als we $||u||_{p,a} = 0$ kiezen voor $p + a < 0$, dan zijn de normen $||u||_{p,a}$ gedefinieerd voor elke gehele p en elke $a > 0$.
Als $p \geq 0$, kan bewezen worden dat de functies u(x) met $u(x) \in C^a(\Omega)$ en $||u||_{p,a} < \infty$, een Banachruimte vormen onder de norm $||\cdot||_{p,a}$. Deze Banachruimte noteren we als $C_{p,a}$. We hebben nu de hulpbegrippen die we nodig

hebben om de interne Schauder schattingen op prettige wijze te kunnen formuleren.

De klasse vergelijkingen waarvoor de schattingen gelden kan door de volgende voorwaarden worden gekarakteriseerd.

(i) De vergelijking is van de vorm

(3.12) $$Lu = f \ ,$$

waarbij de operator L van de vorm (3.1) is en bovendien uniform elliptisch is, d.w.z. (3.3) geldt.

(ii) Er is een α, $0 < \alpha < 1$, zodanig dat $a_{ij} \in C_{0,\alpha}$, $a_i \in C_{1,\alpha}$, $a, f \in C_{2,\alpha}$. Bovendien bestaat er een constante K zodanig dat $||a_{ij}||_{0,\alpha}$, $||a_i||_{1,\alpha}$, $||a||_{2,\alpha} \leq K$.

Stelling 3.8. (Interne schattingen van Schauder). Zij $u(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ een oplossing van (3.12) en zij $||u||, ||f||_{2,\alpha} < \infty$ dan is $u \in C_{0,2+\alpha}$ en

(3.13) $$||u||_{0,2+\alpha} \leq K_1(||u|| + ||f||_{2,\alpha})$$

De constante K_1 hangt af van m,K,n en Ω.

3.3. Schauderschattingen tot op de rand

De schattingen bij de rand zijn geldig in de buurt van een glad gedeelte $T \subset \partial\Omega$. In dit verband noemen we T glad indien er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat de bol met middelpunt ξ en straal δ $S(\xi,\delta)$, $\xi \in T$, een doorsnijding met T heeft $S \cap T$ die kan worden weergegeven door een vergelijking

(3.4) $$x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \ ,$$

waarbij de functie g Höldercontinue tweede afgeleiden bezit, met exponent α. Bovendien veronderstellen we dat de randfunctie ϕ in de lokale parameters $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ Höldercontinue tweede afgeleiden heeft met exponent α.

We voeren nieuwe normen $\overline{||u||}_{p,a}$ in, die op dezelfde manier worden gedefinieerd als $||u||_{p,a}$, met dien verstande, dat d_x nu de afstand van het punt x tot $\partial\Omega \setminus T$ aangeeft. Indien $T = \partial\Omega$, dan is $d_x \equiv 1$. Met behulp van deze norm $\overline{||u||}_{p,a}$ definiëren we een Banachruimte $\bar{C}_{p,a}$. Voor de randfunctie ϕ worden op T ook normen ingevoerd.

Definitie 3.7. Zij $i \geq 0$, dan wordt de norm $||\phi||_i^T$ gegeven door

$$(3.15) \qquad ||\phi||_i^T = \max_{j \leq i} \sup_T |D^j \phi| \ .$$

Definitie 3.8. Zij $i \geq 0$ en $0 \leq \alpha \leq 1$, dan wordt de norm $||\phi||_{i+\alpha}^T$ gegeven door

$$(3.16) \qquad ||\phi||_{i+\alpha}^T = ||\phi||_i^T + \sup_{x,y \in T} \frac{|D^i\phi(x) - D^i\phi(y)|}{|x - y|^\alpha} \ .$$

waarbij x en y wel in hetzelfde stelsel lokale parameters moeten worden genomen.

We kunnen nu de schattingen bij de rand gaan formuleren. De klasse vergelijkingen waarvoor deze schattingen geldig zijn kunnen worden gekarakteriseerd door de eisen

(i) De vergelijking is van de vorm (3.12), terwijl ook (3.3) geldt.

(ii) Er is een α, $0 < \alpha < 1$, zodanig dat $a_{ij} \in \bar{C}_{0,\alpha}$, $a_i \in \bar{C}_{1,\alpha}$, $a, f \in \bar{C}_{2,\alpha}$. Bovendien bestaat er een constante K zodanig dat $\overline{||a_{ij}||}_{0,\alpha}$, $\overline{||a_i||}_{1,\alpha}$, $\overline{||a||}_{2,\alpha} \leq K$.

Stelling 3.9. (Schatting bij de rand, Schauder). Zij $\Omega_1 = \Omega \cup T$; zij $u(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$ een oplossing van (3.12). Veronderstel dat $||u|| < \infty$, $\overline{||f||}_{2,\alpha} < \infty$ en $||\phi||_{2,\alpha}^T < \infty$, dan is $u(x) \in \bar{C}_{0,2+\alpha}$, terwijl bovendien geldt:

$$(3.14) \qquad \overline{||u||}_{0,2+\alpha} \leq K_2(||u|| + \overline{||f||}_{2,\alpha} + ||\phi||_{2+\alpha}^T) \ .$$

De constante K_2 hangt af van m, K, n en Ω.

Opmerking 3.4. Indien $a(x) \leq 0$, dan geldt voor $||u||$ de schatting (3.6), zodat (3.13) en (3.14) overgaan in

$$(3.13a) \qquad ||u||_{0,2+\alpha} \leq \bar{K}_1(||f||_{2,\alpha} + ||\phi||)$$

en

$$(3.14a) \qquad ||u||_{0,2+\alpha} \leq \bar{K}_2(\overline{||f||}_{2,\alpha} + ||\phi||^{T}_{2+\alpha} + ||\phi||)$$

Opmerking 3.5. Indien $T = \partial\Omega$, dan zijn de ruimten $\bar{C}_{p,\alpha}$ en $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ identiek. Als we de norm in $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ dan aangeven door $||u||_{\alpha} = \overline{||u||}_{0,\alpha}$, dan impliceert stelling 3.6. dat, indien $||u|| < \infty$, $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ en $||\phi||_{2+\alpha} < \infty$, dan is $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ terwijl bovendien geldt:

$$(3.14b) \qquad ||u||_{2+\alpha} \leq K_2(||u|| + ||f||_{\alpha} + ||\phi||^{\partial\Omega}_{2+\alpha}) ,$$

of als $a \leq 0$

$$(3.14c) \qquad ||u||_{2+\alpha} \leq \bar{K}_2(||f||_{\alpha} + ||\phi||^{\partial\Omega}_{2+\alpha}) .$$

3.4. Het existentiebewijs van Schauder.

Met behulp van de Schauder schatting (3.14c) kan de existentie van de oplossing voor het Dirichlet probleem

$$(3.15) \qquad Lu = f \text{ in } \Omega,\ u = \phi \text{ op } \partial\Omega,\ u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$$

worden bewezen onder de voorwaarden:

$$(3.16) \quad \begin{cases} \text{(i)} & L \text{ is van de vorm (3.1), terwijl (3.3) geldt;} \\ \text{(ii)} & a(x) \leq 0; \\ \text{(iii)} & a_{ij},\ a_i,\ a,\ f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega});\ \text{met } ||a_{ij}||_{\alpha},\ ||a_i||_{\alpha},\ ||a||_{\alpha} \leq K; \\ \text{(iv)} & ||\phi||^{\partial\Omega}_{2+\alpha} < \infty, \\ \text{(v)} & \partial\Omega \text{ glad.} \end{cases}$$

Stelling 3.10. Onder de bovengenoemde voorwaarden bestaat er een oplossing van het probleem (3.15). Wegens stelling 3.3 is deze oplossing eenduidig.

Bewijs. We bewijzen de stelling voor $\phi \equiv 0$. Dit is geen beperking van de algemeenheid, want onder de gegeven voorwaarden bestaat er altijd een functie $g \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, die op $\partial\Omega$ de randwaarden ϕ aanneemt. De functie $v = u - g$ is dan nul op $\partial\Omega$ en voldoet in Ω aan de vergelijking $Lv = f - Lg$, waarbij het rechterlid tot $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ behoort.

Om de stelling te bewijzen beschouwen we de familie operatoren

(3.17) $\qquad L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u \;,\; 0 \leq t \leq 1.$

We merken op dat $L_0 = \Delta$ en $L_1 = L$. We tonen aan dat het probleem

(3.15a) $\qquad L_t u = f$ in Ω, $u(x) = 0$ op $\partial\Omega$, $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$,

voor elke waarde van t, $0 < t < 1$ een oplossing heeft. Zij N de verzameling t-waarden, waarvoor (3.15a) oplosbaar is. We bewijzen dan dat N niet leeg is, dat N open is in $[0,1]$ en dat N gesloten is in $[0,1]$. Daaruit volgt dan dat $N = [0,1]$. Het bewijs valt uiteen in drie stappen:

(i) $t = 0$ ligt in N;

(ii) N is open in $[0,1]$;

(iii) N is gesloten in $[0,1]$.

(i) We breiden f uit op een bol S met $\bar{\Omega}$ S, zodanig dat f $C^{\alpha}(\bar{S})$. $\Delta v = f$ heeft in S de oplossing

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{f(\xi)}{r}\,d\xi \qquad \text{met } (r = |x-\xi|).$$

Wegens stelling 3.6 is $v \in C_{2+\alpha}(S)$ dus zeker $v \in C_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Nu maken we gebruik van het volgende lemma.

<u>Lemma 3.3</u>. (Kellog). Zij u een harmonische functie gedefinieerd op een gebied Ω met gladde rand $\partial\Omega$. (in de zin van (3.14)), met gladde randwaarden $\phi(x)$ d.w.z. $||\phi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} < \infty$. Dan is $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. We kunnen dus een harmonische functie w bepalen, zodanig dat $w = v$ op $\partial\Omega$ en $w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. De functie $u = v - w$ voldoet aan probleem (3.15a) met $t = 0$.

(ii) Voor elke t voldoet de vergelijking $L_t u = f$ aan (3.16), voorwaarden (i), (ii) en (iii), zij het dat de betreffende constante opnieuw gekozen moeten worden. Bovendien geldt wegens (3.14c) en $\phi \equiv 0$

(3.18) $$||u||_{2+\alpha} \leq \bar{K}_2||f||_\alpha.$$

Zij $t_0 \in N$ en $|t_1-t_0| < \delta$, waarbij δ nog nader moet worden bepaald. We willen aantonen dat dan $t_1 \in N$. Daartoe moet gelden

$$L_{t_1} u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ op } \partial\Omega,\ u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

We schrijven de vergelijking als

$$L_{t_0} u = L_{t_0} u - L_{t_1} u + f,$$

of

(3.19) $$L_{t_0} u = (t_0-t_1)(Lu-\Delta u) + f.$$

Als we in het rechterlid een willekeurige functie $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ substitueren, dan gaat het rechterlid over in een functie $F \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. Het probleem (3.15a) is oplosbaar voor $t = t_0$, dus er is een $u_1(x)$ te vinden zodanig dat $L_{t_0}u_1 = F$, $u_1(x) = 0$ op $\partial\Omega$, $u_1 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. De zo gevonden u_1 wordt weer in het rechterlid van (3.19) gestopt en geeft aanleiding tot de bepaling van een functie $u_2(x)$. We vinden een rij functies $\{u_k(x)\}$ met

$$L_{t_0} u_{k+1} = (t_0-t_1)(Lu_n-\Delta u_n) + f \text{ in } \Omega,$$

$$u_k(x) = u_{k+1}(x) = 0 \text{ op } \partial\Omega;\ u_n,\ u_{n+1} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Dit geven we weer door

(3.20) $$u_{k+1} = Au_k.$$

Indien de transformatie A een fixed point u heeft, u = Au, dan is deze u de gezochte oplossing van (3.15a) met $t = t_1$. Nu geldt voor de norm van F

(3.21) $$||F||_\alpha \leq K_3|t_1-t_0|\ ||u_0||_{2+\alpha} + ||f||_\alpha.$$

Toepassing van (3.18) geeft

(3.22) $$||u_1||_{2+\alpha} \leq \bar{K}_2K_3|t_1-t_0|\ ||u_0||_{2+\alpha} + \bar{K}_2||f||_\alpha.$$

Kiezen we nu $u_0(x)$ zodanig dat $||u_0||_{2+\alpha} \leq 2\bar{K}_2||f||_\alpha$, dan geldt voor $2K_3\bar{K}_2|t_0-t_1| \leq 1$ dat

$$||A(u_0)||_{2+\alpha} = ||u_1||_{2+\alpha} \leq 2\bar{K}_2||f||_\alpha.$$

of algemeen

$$(3.23) \qquad ||u_k||_{2+\alpha} \leq 2\bar{K}_2||f||_\alpha \text{ voor alle } k.$$

We bekijken nu het verschil $u_{k+1} - u_k$. Er geldt

$$L_{t_0}(u_{k+1} - u_k) = (t_0-t_1)(L(u_k-u_{k-1}) - \Delta(u_k-u_{k-1})).$$

Toepassing van (3.22) geeft

$$(3.24) \quad ||u_{k+1}-u_k||_{2+\alpha} \leq K_3\bar{K}_2|t_0-t_1|\ ||u_k-u_{k-1}||_{2+\alpha} \leq \frac{1}{2}\ ||u_k-u_{k+1}||_{2+\alpha}$$

mits $|t_0-t_1| \leq \dfrac{1}{2K_3\bar{K}_2}$.

Uit (3.23) en (3.24) volgt dat de rij (u_k) uniform convergeert naar een functie $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ met $u = Au$. Deze functie $u(x)$ is de oplossing van (3.15a) met $t = t_1$. Dus als $t_0 \in N$ dan ook een omgeving van t_0 met $|t_0-t| < \dfrac{1}{2K_3\bar{K}_2}$

(iii) N is gesloten in $[0,1]$. We kiezen een rij $(t_i) \in N$, met limietpunt t_0. We moeten aantonen dat $t_0 \in N$. Bij elke t_i hoort een oplossing u_i van (3.15a). Schatting (3.18) geeft

$$(3.25) \qquad ||u_i||_{2+\alpha} \leq \bar{K}_2||f||_\alpha.$$

Dat wil zeggen dat de u_i en hun eerste en tweede afgeleiden equicontinu zijn in $\bar{\Omega}$. Maar dan bestaat er een deelrij $u_j(x)$ die convergeert naar een functie u terwijl de eerste en tweede afgeleiden van $u_j(x)$ convergeren naar de eerste en tweede afgeleiden van $u(x)$, uniform in $\bar{\Omega}$. Dan is $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ en u voldoet aan (3.15a) met $t = t_0$. Dus $t_0 \in N$.

De eis dat de randfunctie ϕ glad moet zijn, is wel erg restrictief. Met

behulp van de interne schattingen van Schauder is het mogelijk van existentie stelling af te leiden die deze eis laat vallen.
We beschouwen het Dirichlet probleem

(3.26) $$Lu = f \text{ in } \Omega,\ u = \phi \text{ op } \partial\Omega,\ u \in C_{0,2+\alpha}\ ,$$

waarbij aan de volgende voorwaarden is voldaan.

(3.27)
$$\begin{cases} \text{(i)} & Lu \text{ is van de vorm (3.1), terwijl (3.3) geldt;} \\ \text{(ii)} & a(x) \leq 0; \\ \text{(iii)} & a_{ij},\ a_i,\ a\ \ C^{\alpha}(\bar{\Omega});\ f \in C_{2,\alpha}; \\ & \text{met } ||a_{ij}||_{\alpha},\ ||a_i||_{\alpha},\ ||a||_{\alpha} \leq K; \\ \text{(iv)} & \partial\Omega \text{ is glad.} \end{cases}$$

Stelling 3.11. Onder de gegeven voorwaarden heeft het probleem (3.26) een oplossing indien ϕ continu is. Wegens stelling 3.3 is deze oplossing eenduidig bepaald.
Bewijs. We benaderen de gegeven functies f en ϕ door driemaal continu differentieerbare functies f_k en ϕ_k, zodanig dat de $||f_k||_{2,\alpha}$ uniform begrensd zijn. Wegens stelling 3.10 bestaat er voor elke f_k en ϕ_k een oplossing u_k van probleem (3.15). Uit ongelijkheid (3.6) volgt dat de $u_k(x)$ uniform convergeren naar een functie $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Volgens (3.13a) zijn de normen $||u_k||_{0,2+\alpha}$ uniform begrensd. Dan is de limietfunctie $u \in C_{0,2+\alpha}$ en zijn afgeleiden zijn de limiet van de afgeleiden van een geschikt gekozen deelrij van u_k, waarbij de convergentie uniform is en elk gesloten deelgebied van Ω. De functie u(x) is de gevraagde oplossing van (3.26).

Tot slot zullen we een stelling afleiden die ook voorwaarde (iv) van (3.27) laat vallen. We beschouwen weer het probleem (3.26) met voorwaarde (i), (ii) en (iii) van (3.27). Nu eisen we echter niet dat $\partial\Omega$ glad is, maar we eisen
(i) Ω is de vereniging van een rij Ω_k met $\partial\Omega_k$ glad en $\Omega_k \supset \Omega_{k-1}$.
(ii) Bij elk punt ξ op $\partial\Omega$ bestaat een barrièrefunctie die gedefinieerd wordt door de volgende eisen:
(a) $w_{\xi}(x) \in C^2(\Omega)$,

(b) $w_\xi(x) \in C^0(\bar{\Omega})$,

(c) $w_\xi(x) > 0$ in $\bar{\Omega}\setminus\{\xi\}$, $w_\xi(\xi) = 0$,

(d) $Lw_\xi \leq -1$ in Ω.

Onder deze voorwaarden geldt de volgende stelling.

Stelling 3.12. Zij $\phi(x)$ een continue functie in $\bar{\Omega}$. Dan bestaat er een oplossing u van (3.26). Wegens stelling 3.3 is deze oplossing eenduidig bepaald.

Bewijs. Voor elke Ω_k bestaat volgens stelling 3.11 een oplossing van (3.26), die we u_k zullen noemen. Wegens (3.13a) zijn de normen $||u_k||_{0,2+\alpha}$ voor Ω_k uniform begrensd.

Hieruit volgt dat er een deelrij van $u_k(x)$ is die uniform in elk gesloten deelgebied van Ω convergeert naar een functie $u \in C_{0,2+\alpha}$ met $Lu = f$ in Ω. We moeten nu nog aantonen dat voor $\xi \in \partial\Omega$ geldt:

$$|u(x) - \phi(\xi)| \to 0 \text{ als } |x-\xi| \to 0.$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ is er een C te vinden zodat

(3.28) $$|\phi(x) - \phi(\xi)| < \varepsilon + Cw_\xi(x) \text{ voor } x \in \bar{\Omega}.$$

Zij nu

$$C_1 = \max\,(C, \sup_{x\in\Omega} |\, f(x) - a(x)\phi(\xi)|)$$

en stel

$$W(x) = \varepsilon + C_1 w_\xi(x).$$

Dan geldt

$$|\phi(x) - \phi(\xi)| \leq W(x) \text{ voor } x \in \bar{\Omega}.$$

Bovendien is wegens $a(x) \leq 0$ en de definitie van $w_\xi(x)$:

$$LW = \varepsilon\, a(x) + C_1 Lw_\xi \leq - \sup_{x\in\Omega} |\, f(x) - a(x)\phi(\xi)|.$$

Voor de functies $u_k(x)$ geldt (zie (3.28))

$$W(x) \pm (u_k(x) - \phi(\xi) \geq 0 \text{ voor } x \in \partial\Omega_k$$

en

$$L(W \pm (u_k - \phi(\xi)) = LW \pm (f(x) - a(x)\phi(\xi)) \leq 0 \text{ voor } x \in \Omega_k.$$

Wegens stelling 3.3 geldt dan dat

$$W(x) \pm (u_k(x) - \phi(\xi)) \geq 0 \text{ voor } x \in \Omega_k$$

of

$$|u_k(x) - \phi(\xi)| \leq W(x) \text{ voor } x \in \Omega_k.$$

Als we in deze betrekking de limiet voor $k \to \infty$ nemen, krijgen we dat

$$|u(x) - \phi(\xi)| \leq W(x) \text{ voor } x \in \Omega.$$

Wegens de continuïteit van $w_\xi(x)$ is er een $\delta > 0$, zodanig dat

$$W(x) < 2\varepsilon \quad \text{voor } |x-\xi| < \delta.$$

Dus

$$|u(x) - \phi(\xi)| < 2\varepsilon \quad \text{voor } |x-\xi| < \delta.$$

Voor een punt $\xi \in \partial\Omega$ kan een barrièrefunctie $w_\xi(x)$ worden geconstrueerd indien er een bol $S(y,R)$ bestaat, zodanig dat $\bar{S} \cap \bar{\Omega} = \xi$. Zij $r = |x-y|$. Stel nu

$$w_\xi(x) = q(R^{-p} - r^{-p}). \tag{3.29}$$

waarin p en q nog nader te bepalen positieve constanten zijn. Aan voorwaarden (a), (b) en (c) voor een barrièrefunctie is duidelijk voldaan.

Rest ons nog voorwaarde (d) te bekijken. Er geldt

$$\begin{aligned} Lw_\xi &= kpr^{-p-4}\{-(p+2)a_{ij}x_ix_j + r^2 b_ix_i + r_2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\} + cw_\xi \\ &\leq kpr^{-p-2}\{-(p+2)m + b_ix_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\} . \end{aligned}$$

Als we in deze uitdrukking p en k voldoende groot kiezen, dan geldt $Lw_\xi \leq -1$.

<u>Literatuur</u>

[1] Bers, L. John, F. Schechter, M. — Lectures in applied mathematics, vol. III. Partial differential equations. Wiley, New York, 1964.

[2] Courant, R. Hilbert, P. — Methods of mathematical physics, vol. II. Interscience, New York, 1962.

[3] Douglis, A. Nirenberg, L. — Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. on Pure and Appl. Math. 8 (1955), 503-538.

[4] Hellwig, G. — Partial differential equations. Blaisdell, New York, etc. 1964.

[5] Miranda, C. — Equazioni alle derivode parziale di tipo ellittico. Springer, Berlin, 1955.

4. INLEIDING TOT EEN FUNCTIONAALANALYTISCHE BEHANDELING

Als inleiding tot een functionaalanalytische aanpak van elliptische differentiaalvergelijkingen zal dienen het principe van Dirichlet. Na het in zijn klassieke vorm beschreven te hebben, zullen we dit principe formuleren in functionaalanalytische termen. Het zal duidelijk worden hoe men komt tot het beschouwen van functieruimten, in het bijzonder Hilbertruimten; ook de noodzaak om andere dan klassieke oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen in te voeren, zullen we laten zien. Tenslotte zullen we ons functiebegrip uitbreiden met distributies, omdat deze pas een goede functionaalanalytische behandeling mogelijk maken.

4.1. Het principe van Dirichlet; orthogonale projectie

Beschouw een gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ waarvan de randkromme(n) continu zijn en zichzelf niet doorsnijden, en de klasse van functies $u \in C^1(\Omega)$ die een eindige Dirichlet-integraal

$$(4.1) \qquad D[u] = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$$

bezitten. Op de rand $\partial\Omega$ van Ω schrijven we een continue randfunctie g voor. Beschouw nu het probleem $D[u]$ te minimaliseren; hierbij mogen alle functies in $C^1(\Omega)$ meedoen, die een eindige Dirichletintegraal hebben, en waarvan de randwaarden met g samenvallen. Het principe van Dirichlet ([3], p.6) zegt dan: dit minimaliseringsprobleem heeft een eenduidig bepaalde oplossing u, waarvoor $D[u]$ zijn minimale waarde d aanneemt. Deze functie u is element van $C^2(\Omega)$ en van $C^0(\bar{\Omega})$, en voldoet aan de Euler-Langrange-vergelijking van dit minimaliseringsprobleem:

$$\Delta u = 0.$$

Bij het principe van Dirichlet mag men denken aan evenwichtssituaties in de fysica, die erdoor worden gekarakteriseerd dat de energie, die uitgedrukt kan worden in een integraal van het type (4.1), minimaal is.

Een onmiddellijk bezwaar tegen het principe van Dirichlet is dat een variatieprobleem niet oplosbaar hoeft te zijn, d.w.z. dat er weliswaar een grootste ondergrens d voor $D[u]$ bestaat, maar dat deze waarde niet echt voor een toelaatbare functie wordt aangenomen. Een voorbeeld van een minimaliseringsprobleem dat geen oplossing heeft is: bepaal de functie waarvoor

$$I[u] = \int_0^1 [1 + (u'(x))^2]^{\frac{1}{4}}\, dx$$

minimaal is, waarbij alle stuksgewijs continu differentieerbare functies in $[0,1]$ toegelaten zijn die aan de randvoorwaarden

$$u(0) = 1 \ , \ u(1) = 0$$

voldoen. De waarde 1 is kennelijk de grootste ondergrens voor $I|u|$, want als we de toelaatbare functie

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta - x}{\delta} & 0 \le x \le \delta < 1 \\ 0 & \delta \le x \le 1 \end{cases}$$

in $I[u]$ substitueren, dan vinden we

$$I[u] = \int_0^\delta (1 - \delta^{-2})^{\frac{1}{4}}\, dx + \int^1 dx$$

$$= \delta^{\frac{1}{2}} (1 + \delta^2)^{\frac{1}{4}} + 1 - \delta < 1 + \delta^{\frac{1}{2}} \ ,$$

waarin δ willekeurig klein genomen mag worden. Maar er is geen toelaatbare functie waarvoor $I[u]$ de waarde 1 aanneemt.

Een ander bezwaar tegen het principe van Dirichlet is dat er Dirichletproblemen bestaan voor de vergelijking $\Delta u = 0$ die niet als minimaliseringsproblemen te formuleren zijn. We geven hier het voorbeeld van Hadamard. Zij $S(1)$ de eenheidscirkel rond de oorsprong, en introduceer poolcoördinaten r en θ. Op de rand $S(1)$ worden continue randwaarden $g(\theta)$ voorgeschreven, die de - niet noodzakelijkerwijs convergente - Fourierreeks

$$g(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

heeft. De bekende uitdrukking van Poisson voor een harmonische functie in $S(1)$ met randwaarden $g(\theta)$

$$(2.6) \qquad u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\alpha)(1 - r^2)d\alpha}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2}$$

kan dan geschreven worden als ([4], p. 21 e.v.)

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

voor $r < 1$. De Dirichletintegraal (4.1) wordt in poolcoördinaten voor een met $S(1)$ concentriese cirkel $S(R)$ met $R < 1$

$$(4.1') \qquad D_R[u] = \int_{S(R)} (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) r dr d\theta \ .$$

Deze reeks hoeft niet altijd voor $R = 1$ te convergeren, dat hangt van a_k en b_k, d.w.z. van $g(\theta)$ af. Bijvoorbeeld, de harmonische functie die als randwaarden op $\partial S(1)$ heeft de continue functie

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^4 \theta}{k^2}$$

heeft geen eindige Dirichletintegraal, immers de reeks

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \cdot \frac{1}{k^4}$$

divergeert.

We zullen het principe van Dirichlet nu nader onderzoeken, en het in een functionaalanalytische opzet formuleren. Daartoe beschouwen we in een normaalgebied $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de vergelijking

$$(4.2) \qquad \Delta u - Pu = 0$$

waarbij de coëfficiënt $P(x)$ een positieve functie is van de onafhankelijke variabele $x \in \mathbb{R}^n$, en $P(x) \in C^0(\bar{\Omega})$. We zullen de klasse van functies $w \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, waarvoor de uitdrukking

$$(4.3) \qquad ||w||^2 = \int_\Omega \left[(D_1 w)^2 + \ldots + (D_n w)^2 + Pw^2\right] dx$$

bestaat en eindig is, $W(\Omega)$ noemen. Naar analogie met (4.1) noemen we $||w||^2$ ook de Dirichletintegraal van w. Men kan gemakkelijk nagaan dat $||w||$ zich als norm gedraagt. Voor twee functies u en $v \in W(\Omega)$ is

$$(4.4) \qquad (u,v) = \int_\Omega \left[(D_1 u)(D_1 v) + \ldots + (D_n u)(D_n v) + Puv\right] dx$$

het inwendige produkt corresponderende met de norm $||.||$. Wanneer we de eerste identiteit van Green op (4.5) mogen toepassen, vinden we

$$(4.5) \qquad (u,v) = -\int_\Omega (\Delta u - Pu)v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \,.$$

Een belangrijke consequentie van (4.5) is, dat wanneer u oplossing is van de vergelijking (4.2), en v een functie van $W(\Omega)$ is die nul is op de rand $\partial\Omega$, u en v orthogonaal zijn in de zin

$$(u,v) = 0.$$

Noemen we de klasse van functies van $W(\Omega)$ die oplossing zijn van (4.2) $U(\Omega)$ en de klasse van functies van $W(\Omega)$ die nul zijn op de rand $V(\Omega)$, dan kunnen we dus zeggen dat $U(\Omega)$ en $V(\Omega)$ orthogonale deelruimten van $W(\Omega)$ zijn.

Deze orthogonaliteit leidt tot procedures ([4], p.276-285) om het probleem van Dirichlet op te lossen voor de vergelijking (4.2), die we beter zullen begrijpen, als we even doen alsof al bekend is dat de oplossing $u \in W(\Omega)$ altijd voor dit probleem kan worden. Een willekeurige functie $w_0 \in W(\Omega)$ zij gegeven. Laat u de oplossing van het Dirichletprobleem

$$(4.6) \qquad \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \; u = w_0 \text{ op } \partial\Omega, \; u \in C^0(\bar{\Omega})$$

zijn. Dan is de functie

$$v = w_0 - u$$

nul op $\partial\Omega$, dus $v \in V(\Omega)$. Elke functie $w \in W(\Omega)$ kan dus geschreven worden als

(4.7) $$w = u + v\ .$$

Omdat we weten dat u en v orthogonaal zijn, geldt de wet van Pythagoras

(4.8) $$||w||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

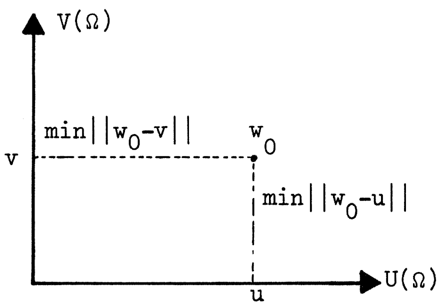
Van alle functies $w \in W(\Omega)$ is de functie $u \in W(\Omega)$ die oplossing is van het Dirichletprobleem (4.6), juist die functie, die de Dirichletnorm $||w||$ minimaliseert. Dit volgt onmiddellijk uit (4.8).

Het principe van Dirichlet kunnen we nu ook als volgt opvatten: als we v als een infinitesimale verstoring van u opvatten, dan is de conditie $(u,v) = 0$ equivalent met de voorwaarde dat de eerste variatie van de Dirichletintegraal nul is. Kennelijk volgt uit (4.5) dat (4.2) de bijbehorende Euler-Lagrange-vergelijking is.

Een alternatieve formulering is dat voor een gegeven keuze van $w_0 \in W(\Omega)$ de functie $v \in V(\Omega)$ die het dichtst bij w_0 ligt in de zin

(4.9) $$||w_0 - v|| = \text{minimaal}$$

de eigenschap heeft dat $w_0 - v$ een oplossing u van (4.3) is, precies de projectie van w_0 op $U(\Omega)$. Zie figuur 3.1. Evenzo blijkt het dat bij gegeven w_0 de functie $u \in U(\Omega)$, die uitverkoren wordt door



Figuur 4.1

(4.10) $$||w_0 - u|| = \text{minimaal},$$

dezelfde randwaarden als w_0 heeft, en dus het Dirichletprobleem (4.3) oplost; $v = w_0 - u$ is dan precies de projectie van w_0 op $V(\Omega)$. Immers, stel dat $w_0 - u$ een functie v is die op $\partial\Omega$ nul is. Dan is volgens de wet van Pythagoras

$$||w_0 - u|| = ||v|| \leq ||w_0||,$$

en verbetering van deze $||w_0 - u||$ is door aftrekking van een willekeurige $u_1 \in U(\Omega)$ niet mogelijk. De functies u en v kunnen we dus interpreteren als de orthogonale projecties van w op $U(\Omega)$ en $V(\Omega)$, twee orthogonale deelruimten die tezamen $W(\Omega)$ opspannen.

De klasse van functies $W(\Omega)$ is een oneindig dimensionale vectorruimte met inwendig produkt. We geven daarvan eerst de definitie.

Definitie 4.1. ([9], p. 81). Een verzameling H van elementen f, g, ... heet een lineaire ruimte of vectorruimte over $\mathbf{C}$ als er een optelling tussen de elementen van H en een vermenigvuldiging met complexe getallen α, β, ... gedefinieerd zijn met de eigenschappen

(a) H is een abelse groep t.o.v. de optelling;

(b) de vermenigvuldiging met complexe getallen is distributief en associatief, d.w.z.
$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$, $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$, $\alpha(\beta f) = \alpha\beta f$;

(c) $1 \cdot f = f$.

Wanneer op H bovendien een inwendig produkt $(.,.)$ en een norm $||.||$ gedefinieerd zijn met

(d) $(\alpha f + \beta g,h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$, $(f,g) = \overline{(f,g)}$,
$(f,f) \geq 0$, $(f,f) = 0 \iff f = 0$; en

(e) $||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$

dan noemen we H een lineaire ruimte met inwendig produkt of pre-Hilbertruimte. Zo'n ruimte H heet volledig, wanneer iedere fundamentaalrij in H een limiet in H heeft. M.a.w. dat bij iedere rij f_k in H met

$$\lim_{k,l\to\infty} ||f_k - f_l|| = 0$$

er een $f \in H$ bestaat met

$$\lim_{k\to\infty} ||f_k - f|| = 0.$$

In een pre-Hilbertruimte geldt de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

$$|(f,g)| \leq ||f|| \cdot ||g||. \tag{4.11}$$

De ruimte $W(\Omega)$ nu is niet volledig. We gaan hem volledig maken, door hem uit te breiden.

Definitie 4.2. ([1], p. 22-24). Beschouw alle meetbare functies op $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die in Lebesgue-zin kwadratisch integreerbaar zijn over Ω. De verzameling van deze functies, waarbij twee functies die slechts op een verzameling met maat nul verschillen als gelijk worden beschouwd, geven we aan met $L^2(\Omega)$. Gemakkelijk is in te zien dat $L^2(\Omega)$ een lineaire ruimte is. We voeren op $L^2(\Omega)$ een inwendig produkt $(.,.)_{0,\Omega}$ in

$$(4.12) \qquad (f,g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

en de bijbehorende norm is

$$(4.13) \qquad ||f||_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stelling 4.1. (Riesz-Fischer). De ruimte $L^2(\Omega)$ is volledig in de norm $||.||_{0,\Omega}$.
Bewijs. Zie bijv. [1], p. 22-24. Convergentie in de $L^2(\Omega)$-norm heet ook wel convergentie in het gemiddelde.

We maken nu de ruimte $W(\Omega)$ tot een (volledige) Hilbertruimte $W(\Omega)$, door alle fundamentaalrijen van functies uit $W(\Omega)$ te bekijken. Wanneer een rij functies w_k een fundamentaalrij in $W(\Omega)$ is (dus m.b.t. de Dirichletnorm $||.||$), dan zijn zowel de rijen $(D_i w_k)$ $(i = 1,\dots,n)$ als (w_k) fundamentaalrijen in de L^2-norm $||.||_0$. Volgens de stelling van Riesz-Fischer bestaan er dan functies $w^{(i)}$ en $w \in L^2(\Omega)$ die voldoen aan

$$(4.14) \qquad \lim_{k\to\infty} ||w_k - w||_{0,\Omega} = 0$$

en

$$(4.14') \qquad \lim_{k\to\infty} ||D_i w_k - w^{(i)}||_{0,\Omega} = 0 \qquad (i = 1,\dots,n).$$

Definitie 4.3. Laat ϕ een oneindig vaak differentieerbare functie zijn, waarvan de drager, d.i. de afsluiting van de verzameling van die $x \in \mathbb{R}^n$ waarvoor $\phi(x) \neq 0$ is, compact is, en bevat in Ω. Zo'n functie noemen we een toetsfunctie. Laten w en $w^{(i)}$ twee functies uit $L^2(\Omega)$ zijn. We zeggen dat $w^{(i)}$ de <u>zwakke partiële afgeleide</u> naar x_i van w is, wanneer voldaan is aan

$$(4.15) \qquad \int_\Omega w^{(i)}\phi \, dx = - \int_\Omega w \, D_i\phi \, dx ,$$

voor alle toetsfuncties ϕ. Deze zwakke afgeleide zullen we eveneens noteren met $D_i w = \frac{\partial w}{\partial x_i}$. We kunnen (4.15) ook schrijven als

$$(4.15') \qquad (D_i w,\phi)_{0,\Omega} = (-w,D_i\phi)_{0,\Omega}$$

voor alle toetsfuncties ϕ. Met behulp van partiële integratie is in te zien dat wanneer $D_i w$ "klassiek" bestaat, hij eveneens aan (4.15) voldoet.

We bewijzen nu dat de $w^{(i)}$ voorkomend in (4.14') de zwakke afgeleide van w uit (4.14) is. De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (4.11) levert voor iedere toetsfunctie

$$|(w_k - w,\phi)_{0,\Omega}| \leq ||w_k - w||_{0,\Omega} \cdot ||\phi||_{0,\Omega}$$

en

$$|(D_i w_k - w^{(i)},\phi)_{0,\Omega}| \leq ||D_i w_k - w^{(i)}||_{0,\Omega} \cdot ||\phi||_{0,\Omega} .$$

Hieruit volgt dat

$$(w^{(i)},\phi)_{0,\Omega} = \lim_{k\to\infty} (D_i w_k,\phi)_{0,\Omega} = - \lim_{k\to\infty} (w_k,D_i\phi)_{0,\Omega} = -(w,D_i\phi)_{0,\Omega} .$$

Wanneer we in (4.3) nu ook functies met zwakke afgeleiden toelaten, dan hebben we de Dirichletnorm ook gedefinieerd voor functies die limiet zijn van een fundamentaalrij in $W(\Omega)$.

We geven nu een <u>schets van een mogelijk existentiebewijs</u>. Laat $\tilde{U}(\Omega)$ die deelruimte van $\tilde{W}(\Omega)$ zijn, die bestaat uit alle functies die een limiet zijn van oplossingen van (4.3), d.w.z. van elementen uit $U(\Omega)$. Dan is $\tilde{U}(\Omega)$ eveneens een Hilbertruimte. Evenzo is $V(\Omega)$ te completeren tot een Hilbertruimte $\tilde{V}(\Omega)$ binnen $\tilde{W}(\Omega)$. Elementen van $\tilde{U}(\Omega)$ zullen we <u>zwakke oplossingen</u> van de vergelijking (4.3) noemen.

Een existentiebewijs op grond van de karakterisering (4.9) zou nu als volgt gegeven kunnen worden: we bewijzen eerst dat er bij gegeven w (precies) een $v \in \tilde{V}(\Omega)$ bestaat, waarvoor $||w - v||$ zijn minimale waarde echt aanneemt. Dit kan, in tegenstelling tot wat we bij het principe van Dirichlet in zijn oorspronkelijke vorm gezien hebben, omdat $\tilde{V}(\Omega)$ volledig is. Die "minimale" v is te schrijven als

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k$$

met $v_k \in V(\Omega)$. Definieer

$$u_k = w - v_k,$$

dan is $u_k \in U(\Omega)$, en daarmee

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} (w - v_k) = w - v$$

een element u van $\tilde{U}(\Omega)$, zodat de existentie van de zwakke oplossing aangetoond zou zijn. En ook, hoewel niet ter zake: $\tilde{W}(\Omega)$ wordt door de twee orthogonale deelruimten $\tilde{V}(\Omega)$ en $\tilde{U}(\Omega)$ opgespannen. Daarna zouden we kunnen bewijzen dat die gevonden u niet alleen element is van $\tilde{U}(\Omega)$, maar zelfs van $U(\Omega)$, m.a.w. dat u een klassieke oplossing is. Dit zou dan een typisch voorbeeld van een zgn. <u>regulariteitsbewijs</u> zijn. We zullen het bewijs in de hierboven geschetste vorm niet uitvoeren, zoals Garabedian het in [2], p. 276-309 heeft gedaan, maar een en ander in het volgende hoofdstuk binnen een algemenere functionaalanalytische opzet geven, waarbij men dan gedachtengangen zoals hierboven beschreven in zijn achterhoofd mag (moet) houden. Laten we het eens heel sterk zeggen: het principe van Dirichlet in de hierboven gegeven vorm is de "oervorm" van de functionaalanalytische opzet, waarbij we naast zwakke oplossingen zoals hierboven, ook Hilbertruimten zullen tegenkomen die een norm hebben lijkend op de integraal van Dirichlet, de zogenaamde <u>Sobolevruimten</u>. Voor een bepaalde klasse van vergelijkingen wordt dan existentie en regulariteit van oplossingen bewezen. Opgemerkt zij nog, dat het begrip zwakke afgeleide in de volgende sectie wat concreter gemaakt zal worden.

<u>Constructie van oplossingen</u>. Het principe van Dirichlet kan worden gebruikt om oplossingen van het probleem van Dirichlet te constueren. Deze benaderingsprocedure wordt vaak genoemd naar Rayleigh en Ritz.

Definitie 4.5. ([9], p. 32). Een Hilbertruimte H heet separabel, als er een aftelbare verzameling bestaat die dicht ligt in H.

Een gevolg hiervan is dat er een rij elementen e_i in H bestaat, zodanig dat voor ieder element $f \in H$ getallen a_i te vinden zijn met

$$(4.16) \qquad \lim_{m\to\infty} ||f - \sum_{i=1}^{m} a_i e_i|| = 0.$$

Stelling 4.2. De ruimte $L^2(\Omega)$ is separabel, en daarmee ook $W(\Omega)$, $V(\Omega)$ en $U(\Omega)$, die immers alle deelruimten van $L^2(\Omega)$ zijn. Voor een bewijs zie [3], p. 33.

Een van de manieren om de benaderingsmethode van Rayleigh en Ritz te formuleren is als volgt: Kies een rij functies v, die nul zijn op $\partial\Omega$ en die volledig is, d.w.z. aan eigenschap (4.16) voldoet. Om een benaderde oplossing van het Dirichletprobleem $u = f$ op $\partial\Omega$ voor de vergelijking (4.3) te vinden, breiden we eerst f op een fatsoenlijke manier tot een functie $w \in \tilde{W}(\Omega)$ op Ω uit. Kies dan parameters a_j, zodanig dat

$$||w - \sum_{j=1}^{m} a_j v_j|| = \text{minimaal},$$

waar m een voldoende groot geheel getal is. De benaderingsoplossing heeft dan de vorm

$$u = w - \sum_{j=1}^{m} a_j v_j$$

Het antwoord voldoet natuurlijk precies aan de randvoorwaarde, maar gehoorzaamt de vergelijking (4.3) slechts in een of andere approximatieve zin. Men hoopt dan dat de fout naar nul gaat als $m \to \infty$.

Op grond van de andere minimale karakterisering (4.10) is ook een benadering van het Dirichletprobleem voor de vergelijking (4.2) met $u = f$ op $\partial\Omega$ te geven, als we aannemen dat we een volledig orthonormaal stelsel u_k kunnen aangeven van oplossingen van (4.3) voor de ruimte $\tilde{U}(\Omega)$. Breiden we f weer uit tot een functie $w \in \tilde{W}(\Omega)$, dan volgt uit (4.15) voor $k = 1,2,\ldots$

$$(u_k, w) = -\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial u_k}{\partial \nu} d\sigma .$$

De coëfficiënten in de beste benadering

$$u = \sum_{k=1}^{m} b_k u_k$$

voortkomend uit

$$||w - \sum_{k=1}^{m} b_k u_k|| = \text{minimaal}$$

zijn dan juist de Fouriercoëfficiënten

$$b_k = (u_k, w).$$

Dit antwoord voldoet wel precies aan de vergelijking (4.3) maar in het algemeen niet exact aan de randvoorwaarde. De elementen u_k $(k = 1,2,\ldots)$ kunnen we interpreteren als de oneindig veel coördinaatassen van de Hilbertruimte $\tilde{U}(\Omega)$.

4.2. Distributies

We gaan even in op enkele begrippen uit de theorie van de distributies, die we voor onze functionaalanalytische behandeling nodig zullen hebben. Zie bijv. [8].

Enige definities 4.5. Laat een verzameling Φ van C^∞-functies $\phi(x)$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^n$ gegeven zijn. We nemen aan dat Φ een lineaire ruimte is, en dat er een regel voor convergentie naar nul voor een rij $\phi_m(x)$ in Φ bestaat, m.a.w. dat de topologie van Φ gegeven is. De functies $\phi \in \Phi$ noemen we toetsfuncties. De drager van ϕ, supp(ϕ), wordt gedefinieerd door

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(x) \neq 0\}} \ .$$

Een distributie f in $\mathbb{R}^n$ is een continue lineaire functionaal op Φ. Dit betekent dat een distributie f aan iedere $\phi \in \Phi$ een complex getal $f(\phi) = \langle f,\phi \rangle$ toevoegt, zo dat

(a) $\langle f,\alpha_1\phi + \alpha_2\phi \rangle = \alpha_1\langle f,\phi_1\rangle + \alpha_2\langle f,\phi_2\rangle$ (lineariteit) ;

(b) als $\phi_m \to 0$ in Φ, dan ook $\langle f,\phi_m\rangle \to 0$ (continuïteit).

De verzameling Φ' van alle distributies op Φ wordt een lineaire ruimte, wanneer we op een voor de hand liggende wijze optelling en vermenigvuldiging met een complex getal definiëren, die voldoen aan

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \phi \rangle = \alpha_1 \langle f_1, \phi \rangle + \alpha_2 \langle f_2, \phi \rangle, \text{ alle } \phi \in \Phi.$$

De eigenschappen van Φ' hangen af van die van Φ. Φ' heet de duale ruimte van Φ.

Definitie 4.6. Laten we de verzameling van alle complexwaardige C^∞-functies met compacte drager bevat in een gegeven gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aangeven met $C_c^\infty(\Omega)$. Op een voor de hand liggende manier is $C_c^\infty(\Omega)$ tot een lineaire ruimte te maken. We geven nu een convergentievoorschrift voor functies $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$: de rij ϕ_m convergeert naar nul voor $m \to \infty$ als

(i) er een begrensde verzameling in Ω bestaat waarbinnen alle dragers zich bevinden; en

(ii) $\phi_m(x)$ tezamen met al hun afgeleiden op deze begrensde verzameling uniform naar nul convergeren (in normale zin).

De conclusie is, dat als een rij C^∞-functies ϕ_m convergeert in bovenstaande zin, de limietfunctie ϕ ook tot $C_c^\infty(\Omega)$ behoort. Met betrekking tot de door deze convergentieregel geïnduceerde topologie is de lineaire ruimte $C_c^\infty(\Omega)$ tot een volledige ruimte $\mathcal{D}(\Omega)$ geworden. De verzameling van alle continue lineaire functionalen op $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, is zoals we weten, op een voor de hand liggende wijze een lineaire ruimte. Een element van $\mathcal{D}'(\Omega)$ heet een distributie in Ω.

Voorbeeld 4.1. De functie

$$\phi(x;a) = \begin{cases} \exp\{-a^2/(a^2 - |x|^2)\} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a, \end{cases}$$

waarin $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} < a$, is een voorbeeld van een toetsfunctie uit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Lokaal integreerbare functies. Beschouw een meetbare en lokaal (Lebesgue) integreerbare functie f op Ω, d.w.z. dat f over elke begrensde meetbare verzameling bevat in Ω Lebesgue integreerbaar is. Met behulp van zo'n functie kunnen we de functionaal $<f,\phi>$ vormen, gedefinieerd door

$$<f,\phi> = \int_{\Omega} f(x)\ \phi(x)\ dx\ , \tag{4.17}$$

waarbij de integratie dus plaatsvindt over de drager van ϕ, waardoor het bestaan van de integraal verzekerd is. Het is duidelijk dat $<f,\phi>$ een continue lineaire functionaal op $\mathcal{D}(\Omega)$ is, zodat iedere lokaal integreerbare functie te identificeren is met een distributie.

Beschouw nu een functie $f \in L^2(\Omega)$. Zij $B \subset \Omega$ begrensd. Volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (4.11) is

$$\int_B |f|dx = \int_B |f.1|dx = |(f,1)_{0,B}| \leq ||f||_{0,B} \cdot ||1||_{0,B}\ .$$

en omdat de laatste grootheid begrensd is, is f ook lokaal integreerbaar. Ook voor functies uit $L^2(\Omega)$ is dus d.m.v. (4.17) de identificatie met een distributie door te voeren. We hebben

$$<f,\phi> = \int_{\Omega} f(x)\ \phi(x)\ dx = (f,\bar{\phi})_{0,\Omega}. \tag{4.18}$$

en

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.19}$$

<u>Bewerkingen met distributies</u>. De bewerkingen met distributies zijn steeds zo gekozen dat deze voor distributies die op de wijze zoals hierboven beschreven ook een functie zijn, overeenstemmen met de "klassieke" bewerkingen.

Optelling:

$$<f_1 + f_2,\phi> = <f_1,\phi> + <f_2,\phi>. \tag{4.20}$$

Translatie: Voor iedere n-tupel getallen $h = (h_1,\ldots,h_n)$ is de translatie van de distributie f gedefinieerd door

$$<f(x-h),\phi(x)> = <f(x),\phi(x+h)>. \tag{4.21}$$

De reflectie van f(x), aangegeven met f(-x), wordt gedefinieerd als

(4.22) $$\langle f(-x),\phi(x)\rangle = \langle f(x),\phi(-x)\rangle.$$

De gelijkheidstransformatie wordt gedefinieerd door

(4.23) $$\langle f(\tfrac{x}{\alpha}),\phi(x)\rangle = |\alpha|^n \langle f(x),\phi(\alpha x)\rangle,$$

waarin $\alpha \in \mathbb{R}$.

Distributies kunnen worden vermenigvuldigd met C^∞-functies c(x); de regel is

(4.24) $$\langle cf,\phi\rangle = \langle f,c\phi\rangle.$$

Definitie 4.7. Een rij distributies f_m convergeert naar de distributie f dan en alleen dan als $\lim_{m\to\infty} \langle f_m,\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$ voor elke toetsfunctie ϕ. We zeggen dat f_m convergeert in distributionele zin naar f.

Wanneer gegeven is dat voor een rij distributies $f_m \in \mathcal{D}'(\Omega)$ geldt dat de rij getallen $\langle f_m,\phi\rangle$ voor elke $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ convergeert, dan kan men bewijzen dat de limiet ook een distributie $f(\phi)$ van $\mathcal{D}'(\Omega)$ is. Met andere woorden:

Stelling 4.3. De ruimte $\mathcal{D}'(\Omega)$ is volledig met betrekking tot de topologie geïnduceerd door de convergentie in distributionele zin.

Bewijs. Geven we hier niet. Te vinden in [5], I, p. 345 of [10].

Definitie 4.8. Differentiatie van distributies wordt gedefinieerd door de relatie

(4.25) $$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i},\phi\rangle = -\langle f,\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle$$

of anders genoteerd

(4.25') $$\langle D_i f,\phi\rangle = -\langle f,D_i\phi\rangle.$$

Stelling 4.4. Elke distributie is oneindig vaak differentieerbaar. Voor distributies in meer variabelen geldt altijd

(4.26) $$D_iD_jf = D_jD_if.$$

Verder geldt ook

(4.27) $$\langle D^p f,\phi\rangle = (-1)^{|p|} \langle f,D^p\phi\rangle.$$

<u>Bewijs</u>. Triviaal.

<u>Stelling 4.5</u>. Differentiatie en limiet nemen mag altijd verwisseld worden, d.w.z.

(4.28) $$D_i(\lim_{m\to\infty} f_m) = \lim_{m\to\infty} D_i f_m.$$

<u>Bewijs</u>. $$\lim_{m\to\infty} \langle D_i f_m,\phi\rangle = - \lim_{m\to\infty} \langle f_m,D_i\phi\rangle \overset{(\mathrm{def})}{=}$$

$$- \langle\lim_{m\to\infty} f_m,D_i\phi\rangle = \langle D_i(\lim_{m\to\infty} f_m),\phi\rangle.$$

<u>Definitie 4.9</u>. Naast de ruimte $\mathcal{D}(\Omega)$ voeren we nu de ruimte $\mathcal{S}$ in. Beschouw alle complexwaardige C^∞-functies $\phi(x)$ op $\mathbb{R}^n$, met de eigenschap dat ϕ tezamen met al zijn afgeleiden voor $|x| \to \infty$ sneller dan elke negatieve macht van $|x|$ naar nul gaat. Anders gezegd: iedere ϕ moet voldoen aan

(4.29) $$|x^k D^q\phi| < c_{kq}(\phi).$$

$\mathcal{S}$ is weer een lineaire ruimte. Het <u>convergentievoorschrift</u> is hier: een rij ϕ_m convergeert naar nul voor $m \to \infty$ in , als

(i) de functies ϕ_m tezamen met al hun afgeleiden uniform op elke begrensde verzameling van $\mathbb{R}^n$ naar nul convergeren; en

(ii) de getallen c_{kq}, voorkomende in (4.29) onafhankelijk van m kunnen worden gekozen, dus dat

$$|x^k D^q\phi_m(x)| < c_{kq} \quad \text{voor alle } m.$$

De conclusie is hier, dat als een rij C^∞-functies ϕ_m convergeert in bovenstaande zin, de limietfunctie ϕ ook tot $\mathcal{S}$ behoort, m.a.w. $\mathcal{S}$ is met betrekking tot deze convergentieregel volledig. De lineaire ruimte van alle continue lineaire functionalen op $\mathcal{S}$ noemen we $\mathcal{S}'$. Een element van $\mathcal{S}'$ heet een <u>tamme distributie</u> in $\mathbb{R}^n$. Ook hier geldt

Stelling 4.6. De ruimte $\mathcal{S}'$ is volledig met betrekking tot de topologie geïnduceerd door de convergentie in distributionele zin, die op analoge wijze wordt gedefinieerd voor distributies uit $\mathcal{S}'$.

Voorbeeld 4.2. Een voorbeeld van een toetsfunctie uit $\mathcal{S}$ is $\phi(x) = \exp\{-|x|^2\}$.

Het is duidelijk dat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{S}$ is en dat convergentie in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ook convergentie in $\mathcal{S}$ impliceert. Het blijkt dat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zelfs dicht ligt in $\mathcal{S}$. Elke continue lineaire functionaal op $\mathcal{S}$ is er ook een op $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dus $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Als voor $f \in \mathcal{S}'$ geldt:

$$\langle f,\phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx \qquad \text{voor alle } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

dan geldt ook

$$\langle f,\psi\rangle = \int f(x)\psi(x)dx \qquad \text{voor alle } \psi \in \mathcal{S}\,;$$

dit volgt uit het feit dat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht ligt in $\mathcal{S}$.

Voor iedere toetsfunctie ϕ uit $\mathcal{S}$ bestaat de Fourier-getransformeerde

$$\mathcal{F}(\phi) = \hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)e^{-i(\xi,x)}dx, \tag{4.30}$$

waarin $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ en $(\xi,x) = \xi_1x_1 + \ldots + \xi_nx_n$. Enkele eigenschappen van de Fouriertransformatie vatten we in een stelling samen. Voor bewijzen zie men bijv. [11], p. 50 e.v.

Stelling 4.7. Als ϕ en ψ functies uit $\mathcal{S}$ zijn, dan:

(i) als $\phi \in \mathcal{S}$, dan ook $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$;

(ii) gelden de differentiatieregels

$$\mathcal{F}(D^p\phi(x)) = i^{|p|}\,\xi^p\,\hat{\phi}(\xi), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{F}(x^p\phi(x)) = i^{|p|}\,D^p\,\hat{\phi}(\xi), \tag{4.32}$$

waarin $\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$ en $x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$;

(iii) luidt de inversieformule

(4.33) $$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\, e^{i(x,\xi)} d\xi;$$

(iv) is de "uitgebreide" relatie van Parseval

(4.34) $$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(x)}\, \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\, \overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi;$$

(v) geldt er tenslotte

(4.35) $$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, \hat{\psi}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Definitie 4.10. De Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ van een distributie $f \in \mathcal{S}'$ wordt gedefinieerd door

(4.36) $$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle, \text{ alle } \phi \in \mathcal{S}.$$

Het is duidelijk dat deze definitie in overeenstemming is met de "klassieke" definitie, wanneer f een absoluut integreerbare functie is; (4.36) is een uitbreiding van (4.35).

Opmerking. Waarom is de ruimte $\mathcal{S}$ ingevoerd? Dit, omdat het niet mogelijk bleek om de Fouriertransformatie zonder meer op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ te definiëren. Stel immers eens dat in (4.36) $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dan echter $\hat{\phi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. L. Schwartz stelde daarom voor de Fouriertransformatie slechts op een deelruimte van $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ te definiëren, wat betekent: meer toetsfuncties toelaten, en wel zoveel, dat de Fouriergetransformeerden van de toetsfuncties uit de "grotere" ruimte ook tot die ruimte behoren. Aan deze eis voldoet nu juist de ruimte $\mathcal{S}$.

In de volgende stelling worden eigenschappen van Fouriergetransformeerden van distributies geformuleerd die met (i) t/m (iv) uit stelling 4.7. overeenkomen.

Stelling 4.8. Als $f \in \mathcal{S}'$ dan

(i) ook $\hat{f} \in \mathcal{S}'$;

(ii) gaan de differentiatieregels (4.31) en (4.32) door;

(iii) luidt de inversieformule

$$(4.33') \qquad \hat{\hat{f}}(x) = f(-x);$$

(iv) is de relatie, lijkend op die van Parseval

$$(4.34') \qquad \langle\hat{f}(x),\hat{\phi}(x)\rangle = \langle f(x),\phi(-x)\rangle \quad \text{voor alle } \phi \in \mathcal{S}$$

van kracht.

Bewijs. (i) volgt onmiddellijk uit (4.36);

(ii) $\langle\mathcal{F}(D^p f(x)),\phi(\xi)\rangle = \langle D^p f(\xi),\hat{\phi}(\xi)\rangle$

$$= (-1)^{|p|} \langle f(\xi), D^p\hat{\phi}(\xi)\rangle = i^{|p|} \langle f(\xi), \mathcal{F}(x^p\phi(x))\rangle$$

$$= i^{|p|} \langle \hat{f}(\xi), \xi^p\phi(\xi)\rangle = i^{|p|} \langle \xi^p \hat{f}(\xi),\phi(\xi)\rangle.$$

waarin de gelijkheden volgen uit resp. (4.36), (4.27), (4.32), (4.36) en (4.24);

(iii) analoog;

(iv) $\langle\hat{f}(x),\hat{\phi}(x)\rangle = \langle f(x),\hat{\hat{\phi}}(x)\rangle = \langle f(x),\phi(-x)\rangle$.

Voorbeelden 4.2.

f	$\hat{f}$
$\delta(x)$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$
1	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\delta(\xi)$
$P(x)$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}P(-i\frac{d}{d\xi})\delta(\xi)$
$P(\frac{d}{dx})\delta(x)$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}P(-i\xi)$

Als $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dan is $f \in \mathcal{S}'$. De Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ van een element $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ is dus goed gedefinieerd.

Stelling 4.9. Als $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dan is ook de Fouriergetransformeerde $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De Fouriertransformatie $\mathcal{F}$ is een isometrie van $L^2(\mathbb{R}^n)$ op $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Bewijs. Zal in sectie 4.4 gegeven worden.

4.3. Zwakke afgeleiden en zwakke oplossingen

Definitie 4.11. Zij L de elliptische operator

$$L = \sum_{|p|\leq m} a_p(x)\, D^p ,$$

waarin $a_p \in C^\infty(\Omega)$ (zie voor notatieconventie sectie 1.2), en zij $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. We zeggen dat U een distributionele oplossing van

(4.36) $\qquad Lu = f \quad \text{op} \quad \Omega$

is, wanneer geldt

(4.37) $\qquad \langle Lu,\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$

voor alle $\phi \in (\Omega)$. De restrictie van C^∞-coëfficiënten is noodzakelijk opdat Lu inderdaad een distributie voorstelt; alleen vermenigvuldiging van distributies met C^∞-functies is immers toegestaan.

Definitie 4.12. Naast distributionele afgeleiden hebben we in definitie 4.3 het begrip zwakke afgeleide ingevoerd. We geven binnen het kader van de distributies een alternatieve, equivalente definitie. Een functie $f \in L^2(\Omega)$ heeft zwakke afgeleiden van de eerste orde, als hij distributionele afgeleiden van de eerste orde bezit, en als bovendien $D_i f \in L^2(\Omega)$ $(i = 1,\ldots,n)$. Dan geldt er dus

$$\langle D_i f,\phi\rangle = (D_i f,\bar{\phi})_{0,\Omega} .$$

Analoog de definitie van $D^p f$ in zwakke zin. Deze definitie is equivalent met definitie 4.3.

Definitie 4.13. Van de vergelijking (4.36), met nu $f \in L^2(\Omega)$, is u een zwakke oplossing als u een distributionele oplossing is, en bovendien $D^p u \in L^2(\Omega)$ voor $|p| \leq m$.

Deze definitie is uit te breiden tot coëfficiënten a_p die niet C^∞ zijn. Laten f en $a_p \in L^2(\Omega)$ zijn, dan is u een zwakke oplossing van

(4.38) $\qquad Lu = \sum_{|p|\leq m} a_p(x) D^p u = f$

als de zwakke afgeleiden $D^p u$ ($|p| \leq m$) bestaan, en voldaan is aan

(4.39) $$(Lu,\phi)_{0,\Omega} = (f,\phi)_{0,\Omega}$$

voor alle toetsfuncties $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Voor het geval van C^∞-coëfficiënten vallen de twee definities samen.

Definitie 4.14. Een klassieke oplossing van een elliptische differentiaalvergelijking van de m^e orde is een functie waarvan de klassieke afgeleiden tot en met de m^e orde bestaan, en die in normale zin voldoet aan de differentiaalvergelijking. Duidelijk is dat een klassieke oplossing ook een zwakke, en in geval van C^∞-coëfficiënten, ook een distributionele oplossing is.

Opmerking. De term "zwakke oplossing" wordt in de literatuur nogal verward gebruikt. Een duidelijk overzicht kan men vinden in [2], 133 e.v.

Definitie 4.15. De formeel geadjungeerde operator van L is gedefinieerd als

(4.40) $$L^* v = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_p(x)v(x)).$$

Equivalent met voorwaarde (4.37) kunnen we de distributionele oplossing u van (4.36) definiëren als de distributie u die voldoet aan

$$\langle u, L^*\phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$$

voor iedere toetsfunctie ϕ.

4.4. Hilbertruimten

In deze sectie zullen we in het kort ingaan op enige begrippen en stellingen uit de theorie der Hilbertruimten, die van belang zijn voor het volgende hoofdstuk.

De begrippen: pre-Hilbertruimte en Hilbertruimte zijn reeds in definitie 4.1 gedefinieerd. Ook werd een voorbeeld gegeven van een (separabele) Hilbertruimte, nl. $L^2(\Omega)$. In het volgende zullen wij ons ook steeds beperken tot separabele Hilbertruimten.

Voorbeeld 4.4. Zij l^2 de complexe lineaire ruimte van alle rijen van complexe getallen $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ waarvoor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Het inproduct van $a = (a_k)$ en $b = (b_k)$, a en $b \in l^2$, zij gedefinieerd door

$$(a,b)_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \tag{4.41}$$

Dan is l^2 met het inproduct $(.,.)_0$ een Hilbertruimte (zie [6], p. 23-24).

Voorbeeld 4.5. Laat m een geheel getal ≥ 0 zijn. Zij $C^{\infty *}(\bar{\Omega})$ de ruimte van alle functies $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ waarvoor

$$\sum_{|p|\leq m} \int_{\Omega} |D^p f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Op $C^{\infty *}(\bar{\Omega})$ definiëren we een inproduct $(.,.)_{m,\Omega}$ (of: $(.,.)_m$) als volgt:

$$(f,g)_m = \sum_{|p|\leq m} \int_{\Omega} D^p f(x) \, D^p \bar{g}(x) \, dx \tag{4.42}$$

$$\left(= \sum_{|p|\leq m} (D^p f, D^p g)_{0,\Omega}\right).$$

$C^{\infty *}(\bar{\Omega})$ met dit inproduct $(.,.)_m$ is een pre-Hilbertruimte. Men kan deze pre-Hilbertruimte wel completeren tot een Hilbertruimte (i.e. als dichte deelverzameling lineair en isometrisch inbedden in een Hilbertruimte), zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 4.10. Als H een pre-Hilbertruimte is, dan bestaat er een Hilbertruimte $\tilde{H}$, die H als dichte lineaire deelruimte bevat, zodanig dat

$$(u,v)_H = (u,v)_{\tilde{H}} \qquad \text{voor alle } u,v \in H.$$

De ruimte $\check{H}$ is op isometrie na uniek bepaald en heet de completering van H.
Bewijs. Zie [9], §5.

Als H een lineaire deelruimte is van een Hilbertruimte H_0, dan is de completering van H gelijk aan de afsluiting $\bar{H}$ van H in H_0; in het bijzonder geldt: als H een lineaire deelruimte is, die dicht ligt in H_0, dan is de completering van H gelijk aan H_0.

Stelling 4.11. De completering van $C_c^\infty(\Omega)$ met het inproduct $(.,.)_0$ is gelijk aan $L^2(\Omega)$ ($C_c^\infty(\Omega)$ ligt dus dicht in $L^2(\Omega)$).
Bewijs. Zie [7], p. 3.

Zij H een Hilbertruimte. De elementen u,v H heten orthogonaal of onderling loodrecht (notatie: $u \perp v$) als $(u,v) = 0$; een element u staat loodrecht op een verzameling $V \subset H$ (notatie: $u \perp V$), als $(u,v) = 0$ voor alle $v \in V$. De verzameling $V^\perp$ van alle elementen loodrecht op V is een gesloten lineaire deelruimte van H en heet het orthogonale complement van V. Als $L(V)$ het lineaire omhulsel van V is (i.e. $L(V)$ is de verzameling van alle eindige lineaire combinaties van elementen uit V), dan geldt:

$$V^\perp = L(V)^\perp = \overline{L(V)}^\perp .$$

(De ruimte $\overline{L(V)}$ heet de ruimte opgespannen door V).

Stelling 4.12. (projectie-stelling). Zij M een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte H en zij $u \in H$. Dan is er een uniek element $u_0 \in M$, zó dat

$$||u-u_0|| = \inf_{v \in M} ||u-v||.$$

Er geldt: $u-u_0 \perp M$ (m.a.w. u_0 is de projectie van u op M).
En H is de directe som van M en $M^\perp$ (notatie: $H = M \oplus M^\perp$), d.w.z. ieder element $u \in H$ is eenduidig te schrijven als $u = u_0 + u_1$, waarbij $u_0 \in M$ en $u_1 \in M^\perp$.
Bewijs. Zie [6], p. 44-45.

Een stelsel van elementen $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ heet een <u>orthonormaal stelsel</u>, als

$$(e_i,e_j) = \delta_{ij}.$$

Een orthonormaal stelsel heet <u>volledig</u> als

$$\{e_i \mid i = 1,2,\ldots\}^{\perp} = (0).$$

<u>Stelling 4.13</u>. Zij $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ een orthonormaal stelsel in een Hilbertruimte H. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

1. het stelsel $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ is volledig,
2. voor elke $u \in H$ geldt:

$$||u||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(u,e_i)|^2 \qquad \text{(\underline{relatie van Parseval})},$$

3. voor elke $u \in H$ geldt:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u,e_i)e_i \qquad \text{(\underline{Fourier-ontwikkeling})}$$

(dit betekent: $||u - \sum_{i=1}^{n} (u,e_i)e_i|| \to 0$ als $n \to \infty$).

<u>Bewijs</u>. Zie [6], p. 51-52.

Een volledig orthonormaal stelsel in H heet ook wel een <u>basis</u> voor H. Als $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ een basis voor H is en als $u \in H$, dan heten de getallen (u,e_i) $(i = 1,2,\ldots)$ de <u>Fouriercoëfficienten</u> van u t.o.v. de basis $(e_i)_{i=1}^{\infty}$.

<u>Voorbeeld 4.6</u>. Zij $T = [0,2\pi)$. Het stelsel

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

is een basis voor $L^2(T)$ (zie [6], p. 31-33 en p. 48). De rij van Fourier-coëfficienten $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ van een element $u \in L^2(T)$ t.o.v. deze basis wordt gegeven door:

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(x)\, e^{-ikx}\, dx \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Uit stelling 4.13 volgt dat $\hat{u} \in l^2$. De lineaire afbeelding

$$F\colon L^2(T) \to l^2,$$

die aan ieder element $u \in L^2(T)$ toevoegt de rij $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heet de Fourier-ontwikkeling. Uit stelling 4.13 volgt verder dat F een isometrische afbeelding van $L^2(T)$ op l^2 is.

Laten H_1 en H_2 Hilbertruimten zijn. Een lineaire operator $T: H_1 \to H_2$ is een lineaire afbeelding van een (dichte) lineaire deelruimte $D(T)$ van H_1 in H_2; in het speciale geval dat $H_2 = \mathbb{C}$ heet T een lineaire functionaal. $D(T)$ heet het definitiegebied of domein van T. De verzameling $R(T) = \{T(u) \mid u \in D(T)\}$ heet de waardenverzameling (of range) van T. En $N(T) = \{u \mid u \in D(T) \text{ en } T(u) = 0\}$ heet de nulruimte van T.
Als H_1 en H_2 lineaire ruimten zijn met $H_1 \subset H_2$, dan noemen we de afbeelding $I: H_1 \to H_2$ die aan ieder element zichzelf toevoegt de injectie van H_1 in H_2 (notatie: $H_1 \hookrightarrow H_2$).
Laten H_1 en H_2 Hilbertruimten zijn. Een lineaire operator $T: H_1 \to H_2$ heet begrensd als er een $c \geq 0$ bestaat, zó dat

$$||T(u)||_{H_2} \leq c \; ||u||_{H_1} \qquad \text{voor alle } u \in D(T).$$

Een lineaire operator T is dus begrensd als T begrensde verzamelingen in H_1 overvoert in begrensde verzamelingen in H_2. De norm $||T||$ van een begrensde lineaire operator T wordt gedefinieerd door

$$(4.43) \qquad ||T|| = \sup_{0 \neq u \in D(T)} \frac{||T(u)||_{H_2}}{||u||_{H_1}}$$

Een lineaire operator $T: H_1 \to H_2$ heet een isomorfisme van H_1 in H_2 als er een $c > 0$ bestaat zó dat

$$\frac{1}{c} \; ||u||_{H_1} \leq ||T(u)||_{H_2} \leq c \; ||u||_{H_1} \qquad \text{voor alle } u \in D(T).$$

Voorbeeld 4.7. Zij M een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte H. De afbeelding

$$P: H \to M,$$

die aan ieder element $u \in H$ zijn projectie u_0 op M toevoegt is een begrensde lineaire operator. Er geldt $R(P) = M$ en $N(P) = M^{\perp}$; verder is: $||P|| = 1$.

<u>Stelling 4.14</u>. Zij $T: H_1 \to H_2$ een lineaire operator. Dan geldt: T is begrensd d.e.s.d. als T continu is.

<u>Bewijs</u>. Zie [6], p. 73.

<u>Stelling 4.15</u>. Zij $T: H_1 \to H_2$ een begrensde lineaire operator met definitiegebied $D(T) \subset H_1$. Dan kan T op unieke wijze worden voortgezet tot een begrensde lineaire operator $\tilde{T}$ met definitiegebied $D(\tilde{T}) = \overline{D(T)} \subset H_1$.

<u>Bewijs</u>. Zie [6], p. 74.

<u>Stelling 4.16</u>. (representatie-stelling van Riesz). Zij $F: H \to \mathbb{C}$ een begrensde lineaire functionaal op een Hilbertruimte H. Dan bestaat er precies één element $f \in H$, zó dat

$$F(u) = (u,f) \qquad (u \in H).$$

<u>Bewijs</u>. Zie [6], p. 76.

Als toepassing van de representatie-stelling van Riesz bewijzen we stelling 4.9.

<u>Bewijs van stelling 4.9</u>. Voor $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ is de functionaal

$$\phi \mapsto (f,\hat{\phi})_0$$

begrensd op $\mathcal{S}$ m.b.t. de L^2-norm op $\mathcal{S}$; immers

$$|(f,\hat{\phi})_0| \leq ||f||_0 \, ||\hat{\phi}||_0 = ||f||_0 \, ||\phi||_0$$

Daar $\mathcal{S}$ dicht ligt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ kan deze functionaal op unieke wijze worden voortgezet tot een begrensde lineaire functionaal op $L^2(\mathbb{R}^n)$ (stelling 4.15). Op grond van de representatie-stelling van Riesz bestaat er een uniek element $f^* \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zó dat

$$(f,\hat{\phi})_0 = (f^*,\phi)_0 \qquad \text{voor alle } \phi \in \mathcal{S}.$$

Uit definitie 4.10 volgt dan:

$$\hat{f} = f^*.$$

Dus: $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zij $T: H_1 \to H_2$ een begrensde lineaire operator. Aan iedere $v \in H_2$ voegen we een begrensde lineaire functionaal F_v op H_1 toe als volgt:

$$F_v(u) \overset{\text{def}}{=} (Tu,v)_{H_2} \qquad (u \in H_1)$$

Op grond van stelling 4.16 is er dan precies één element $v^* \in H_1$, zó dat

$$F_v(u) = (u,v^*)_{H_1} \qquad (u \in H_1)$$

De afbeelding die aan $v \in H_2$ toevoegt $v^* \in H_1$ geven we aan met T^*. Er geldt dan: $T^*: H_2 \to H_1$ is een begrensde lineaire operator, waarvoor geldt:

$$(Tu,v)_{H_2} = (u,T^*v)_{H_1} \qquad (u \in H_1, v \in H_2).$$

T^* heet de <u>geadjungeerde operator</u> van T. Als voor $T: H \to H$ geldt dat $T = T^*$, dan heet T <u>zelfgeadjungeerd</u> of <u>hermitisch</u>.

Een rij (u_n) in een Hilbertuimte H heet <u>zwak convergent</u> naar $u \in H$ (notatie: $u_n \rightharpoonup u$ als $n \to \infty$), als voor alle $v \in V$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n,v) = (u,v).$$

We merken op: als (u_n) een rij in $L^2(\Omega)$ is die zwak convergeert naar $u \in L^2(\Omega)$, dan convergeert de rij (u_n) ook in distributionele zin naar u; dit volgt uit de relatie:

$$\langle u_n - u, \phi \rangle = (u_n - u, \bar{\phi})_{0,\Omega} \qquad \text{voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Als (u_n) (sterk) convergeert naar $u \in H$ (dit betekent: $||u_n - u|| \to 0$ als $n \to \infty$), dan convergeert (u_n) ook zwak naar u. Het omgekeerde is niet waar; immers, als (e_n) een volledig orthonormaal stelsel in H is, dan geldt, zoals uit de relatie van Parseval volgt, dat

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Laten H_1 en H_2 Hilbertruimten zijn en laat $T: H_1 \to H_2$ een begrensde lineaire operator zijn; als (u_n) een rij in H_1 is die zwak convergeert naar $u \in H_1$, dan convergeert de rij (Tu_n) in H_2 zwak naar Tu; dit volgt uit de relatie:

$$(Tu_n - Tu,v)_{H_2} = (u_n - u,T^*v)_{H_1} \qquad \text{voor alle } v \in H_2.$$

Als (u_n) een begrensde rij in een Hilbertruimte H is, dan bezit (u_n) i.h.a. geen convergente deelrij. Wel geldt de volgende stelling.

Stelling 4.17. Zij (u_n) een begrensde rij in een Hilbertruimte H. Dan bevat (u_n) een deelrij (u_{n_k}) die zwak convergeert in H, d.w.z. er bestaat een $u \in H$ zó dat voor alle $v \in H$ geldt:

$$\lim_{k\to\infty} (u_{n_k}, v) = (u,v)$$

Bewijs. Zie [6], p. 186.

Een lineaire operator $T: H_1 \to H_2$ heet compact als T begrensde verzamelingen van H_1 overvoert in relatief compacte verzamelingen in H_2 (een verzameling V heet relatief compact, als iedere rij (v_n) uit V een convergente deelrij bezit, i.e. als $\bar{V}$ compact is). Uit deze definitie volgt dat een compacte operator begrensd is. Het omgekeerde is niet waar: de eenheidsoperator op een oneindig-dimensionale Hilbertruimte is niet compact. Wel geldt: als $T: H_1 \to H_2$ een begrensde lineaire operator van eindige rang is (dit betekent: R(T) is eindig-dimensionaal), dan is T compact.

Stelling 4.18. Een begrensde lineaire operator $T: H_1 \to H_2$ is compact d.e.s.d. als T zwak convergente rijen overvoert in sterk convergente rijen.
Bewijs. Zie [6], p. 187.

Stelling 4.19. Als $T: H_1 \to H_2$ compact is, dan is ook $T^*: H_2 \to H_1$ compact.
Bewijs. Zie [6], p. 188-189.

Stelling 4.20. Als $T_n: H_1 \to H_2$ compact is $(n = 1,2,\ldots)$ en $||T-T_n|| \to 0$ als $n \to \infty$, dan is T compact.
Bewijs. Zie [6], p. 189.

Uit deze stelling volgt dat iedere operator die in norm benaderd kan worden met operatoren van eindige rang compact is. Het omgekeerde blijkt (in Hilbertruimten!) ook waar te zijn, zoals volgt uit de volgende stelling.

Stelling 4.21. (spectraalstelling voor compacte hermitische operatoren).
Laat $T: H \to H$ een compacte hermitische operator op een Hilbertruimte H zijn. Dan bestaat er een rij $H_1, H_2, \ldots$ (eindig of oneindig) van onderling ortho-

gonale eindig dimensionale lineaire deelruimten van H en een bijbehorende rij $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ van onderling verschillende reële getallen $\neq 0$ met

(i) $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$ $(k = 1,2,\ldots)$,

(ii) als de rij oneindig is, dan is $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$,

en zodanig dat

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k ,$$

waarbij P_k de projectie op H_k voorstelt (dit betekent: $||T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k|| \to 0$ als $n \to \infty$).

Bewijs. Zie [6], §28.

Uit deze stelling volgt:

Er bestaat een basis $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ voor H en een rij (α_i), $\alpha_i \to 0$ als $i \to \infty$, zó dat voor alle $u \in H$ geldt:

$$Tu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (u,e_i) e_i$$

Stelling 4.22. Laten T en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zijn als in de vorige stelling. Laat I de eenheidsoperator op H zijn en zij $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan geldt:

a) Als $\lambda \neq \lambda_k$ voor $k = 1,2,\ldots$, dan is $T-\lambda I$ is een isomorfisme van H op H.

b) $R(T-\lambda I) = N(T-\bar{\lambda} I)^{\perp}$ (dit betekent: er bestaat een oplossing u van de vergelijking $(T-\lambda I)\, u = f \iff f$ staat loodrecht op alle v waarvoor $(T-\bar{\lambda} I)\, v = 0$).

Bewijs. Zie [6], p. 196-197.

Voorbeeld 4.8. Zij h^s, $s \in \mathbb{R}$, de complexe lineaire ruimte van alle rijen $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, waarvoor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2s} \, |a_k|^2 < \infty,$$

met als inproduct

$$(a,b)_s \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2s} \, a_k \, \bar{b}_k \, .$$

Dan blijkt h^s een Hilbertruimte te zijn (merk op: $h^0 = l^2$). Als $s \geq t$, dan is $h^s \subset h^t$, en zelfs: h^s ligt als verzameling dicht in h^t; het stelsel

$\{h^s \mid s \in \mathbb{R}\}$ vormt dus een keten van in elkaar dicht liggende Hilbert-ruimten. Een belangrijk resultaat is nu het volgende: als $s > t$, dan is de injectie $h^s \hookrightarrow h^t$ compact.
In het volgende hoofdstuk zullen we een iets algemener resultaat bewijzen.

Literatuur

[1] Achieser, N.I. Glasmann, I.M. — Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, Berlin 1954.

[2] Bers, L. John, F. Schechter, M. — Partial differential equations, New York, 1964.

[3] Courant, R. — Dirichlet's Principle, New York, 1950.

[4] Garabedian, P.R. — Partial differential equations, New York, 1964.

[5] Gelfand, I.M. Shilov, G.E. — Verallgemeinte Funktionen (Distributionen), I, II, Berlin, 1960, 1962.

[6] Helmberg, G. — Introduction to spectral theory in Hilbert-space, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.

[7] Hörmander, L. — Linear partial differential operators, Springer, Berlin etc., 1963.

[8] Jager, E.M. de — Applications of distributions in mathematical physics, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

[9] Ljusternik, L.A. Sobolev, W.I. — Elemente der Funktionanalysis, Berlin, 1955.

[10] Schwartz, L. — Théorie des distributions, I, II, Paris, 1957, 1959.

[11] Titchmarsch, E.C. — Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford, 1937.

5. HILBERTRUIMTE-METHODEN

In dit hoofdstuk zullen we zekere elliptische randwaardeproblemen vanuit een functionaal-analytisch standpunt benaderen. De methode die we behandelen is in wezen een generalisatie van de orthogonale projectiemethode en staat dus in nauw verband met het principe van Dirichlet. In de literatuur wordt deze methode aangeduid als de variatie-theorie voor elliptische randwaarde problemen [8] of als de theorie van coërcieve kwadratische vormen op een Hilbertruimte [1].

Allereerst geven we een behandeling van de functie-ruimten die in dit hoofdstuk een belangrijke rol zullen spelen: de Sobolev-ruimten. Daarna behandelen we theorie van coërcieve kwadratische vormen op een Hilbertruimte. Vervolgens laten we zien hoe men met behulp van deze theorie de existentie van een zwakke oplossing van zekere elliptische randwaarde problemen aantoont. Tenslotte wordt voor een speciaal geval bewezen dat de gevonden zwakke oplossing een klassieke oplossing van het randwaarde probleem is.

5.1. Sobolev-ruimten

In het volgende zal Ω steeds een open verzameling in $\mathbb{R}^n$ zijn. Verder zullen k, l en m steeds gehele getallen groter ≥ 0 zijn, terwijl s en t steeds reële getallen zullen voorstellen.

<u>Definitie 5.1</u>. $H^m(\Omega)$ zal zijn de ruimte van de distributies u in Ω, waarvoor alle distributionele afgeleiden $D^p u$ met $|p| \leq m$, tot $L^2(\Omega)$ behoren; het inproduct $(.,.)_{m,\Omega}$ (of: $(.,.)_m$) in $H^m(\Omega)$ is als volgt gedefinieerd:

$$(5.1) \qquad (u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|p|\leq m} \int_\Omega D^p u \, D^p \bar{v} \, dx .$$

De norm van een element $u \in H^m(\Omega)$ geven we aan met $||u||_{m,\Omega}$ (of: $||u||_m$). De ruimten $H^m(\Omega)$ heten <u>Sobolev-ruimten</u>.

Uit bovenstaande definitie volgt:

$$C_c^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \qquad (k \geq m \geq 0).$$

Op eenvoudige wijze gaat men dan na dat de injecties

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \qquad (k \geq m \geq 0)$$

continu zijn.

Stelling 5.1. $H^m(\Omega)$ is een Hilbertruimte.
Bewijs. We moeten aantonen dat $H^m(\Omega)$ volledig is. Zij (u_k) een fundamentaalrij in $H^m(\Omega)$. Voor iedere p met $|p| \leq m$ is $(D^p u_k)$ een fundamentaalrij in $L^2(\Omega)$ en heeft dus in $L^2(\Omega)$ een limiet, zeg $u^{(p)}$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned}
\langle u^{(p)}, \bar{\phi} \rangle &= (u^{(p)}, \phi)_0 \\
&= \lim_{k\to\infty} (D^p\, u_k, \phi)_0 \\
&= \lim_{k\to\infty} (-1)^{|p|}\, (u_k, D^p \phi)_0 \\
&= (-1)^{|p|}\, (u^{(0)}, D^p \phi)_0 \\
&= \langle D^p\, u^{(0)}, \bar{\phi} \rangle
\end{aligned}$$

Hieruit volgt: $D^p\, u^{(0)} = u^{(p)}$. Dit betekent: $u^{(0)} \in H^m(\Omega)$. En daar

$$(u,v)_m = \sum_{|p| \leq m} (u,v)_0 \qquad (u,v \in H^m(\Omega)),$$

is $u^{(0)}$ de limiet van (u_k) in $H^m(\Omega)$. Dit betekent: $H^m(\Omega)$ is volledig.

Volgens stelling 4.11 is $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, maar in het algemeen niet dicht in $H^m(\Omega)$, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 5.1. Neem m = 1 en neem Ω begrensd in $\mathbb{R}^n$. We tonen aan dat het orthogonale complement van $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$ een element $\neq 0$ bevat.
Voor $u \in H^1(\Omega)$ en $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

$$(u,\phi)_{1,\Omega} = (u,\phi)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} (D_i\, u,\, D_i\, \phi)_{0,\Omega}$$
$$= <\, (1-\Delta)u,\ \bar{\phi}\, >.$$

Hieruit volgt: $u \in H^1(\Omega)$ staat (in $H^1(\Omega)$) loodrecht op $C_c^\infty(\Omega)$ d.e.s.d. als $(1-\Delta)u = 0$. De functie $u(x_1,\ldots,x_n) = e^{x_k}$ $(1 \le k \le n)$ voldoet hieraan; en deze $u \in H^1(\Omega)$, daar Ω begrensd is.
Dit voorbeeld motiveert de volgende definitie.

Definitie 5.2. $H_0^m(\Omega)$ is de afsluiting van $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

De ruimte $H_0^m(\Omega)$ kan men interpreteren als de deelruimte van alle elementen u uit $H^m(\Omega)$ waarvoor

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \ldots = \frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Overigens is het op dit moment in het geheel nog niet duidelijk wat bijv. $u\Big|_{\partial\Omega}$ en $\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}$ precies betekenen; wij komen hier nog op terug.

We merken het volgende op: ieder element $u \in H^m(\Omega)$ is (zie stelling 4.12) eenduidig te schrijven als

$$u = u_0 + u_1$$

met $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ en u_1 loodrecht op $H_0^m(\Omega)$. Nemen we weer $m = 1$, dan betekent dit:

$$u_0\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{en} \qquad (1-\Delta)u_1 = 0.$$

Stelling 5.2. Als $u \in H_0^m(\Omega)$ en definiëren we $\tilde{u}$ door

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{als } x \in \Omega, \\ 0 & \text{als } x \notin \Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

dan is $\tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$.
Bewijs. Als $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, dan behoort de functie $\tilde{\phi}$ (die op analoge wijze als $\tilde{u}$ is gedefinieerd) tot $H^m(\mathbb{R}^n)$ en er geldt:

$$||\phi||_{m,\mathbb{R}^n} = ||\phi||_{m,\Omega}.$$

De lineaire afbeelding: $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ kan op grond van stelling 4.15 op unieke wijze worden voortgezet tot een begrensde lineaire operator van $H_0^m(\Omega)$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$. En het beeld van u onder deze operator is $\tilde{u}$; immers als (ϕ_k) een rij in $C_c^\infty(\Omega)$ is die naar u convergeert in $H^m(\Omega)$, dan gaat men gemakkelijk na dat dan $(\tilde{\phi}_k)$ naar $\tilde{u}$ convergeert in $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Uit stelling 5.2 volgt dat we $H_0^m(\Omega)$ kunnen opvatten als een deelruimte van $H^m(\mathbb{R}^n)$.
In deze stelling mogen we $H_0^m(\Omega)$ niet vervangen door $H^m(\Omega)$ (zie [6], p.17). Het is evenwel onze bedoeling om een analoog resultaat voor $H^m(\Omega)$ te verkrijgen (het zal blijken dat we daartoe zekere regulariteitseisen aan Ω moeten opleggen).

We richten nu onze aandacht op $H^m(\mathbb{R}^n)$. De Fourier-transformatie van tamme distributies (zie 4.2) blijkt in dit verband een belangrijk hulpmiddel.

<u>Stelling 5.3.</u> $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \mid (1+|\xi|^2)^{m/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.
De norm

$$(5.4) \qquad ||u||'_m = \{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi\}^{1/2}$$

is equivalent met de norm $||u||_m$ (dit betekent: er bestaat een $c > 0$ zodanig dat

$$c^{-1}||u||_m \leq ||u||'_m \leq c||u||_m \quad \text{voor alle } u \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

<u>Bewijs</u>. Uit stelling 4.8 volgt $||D^p\, u||_0 = ||\xi^p\, \hat{u}||_0$ $(\xi^p = \xi_1^{p_i} \ldots \xi_n^{p_n})$.
Op grond van (5.1) is dan

$$||u||_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{|p|\leq m} \xi^{2p})\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Nu bestaat er een constante $c > 0$, zo dat

$$c^{-1}(1+|\xi|^2)^m \leq \sum_{|p|\leq m} \xi^{2p} \leq c(1+|\xi|^2)^m \qquad (\xi\in\mathbb{R}^n).$$

Hieruit volgen de beweringen.

Stelling 5.3 geeft de mogelijkheid tot zg. <u>interpolatie</u>; dit betekent: we kunnen de Sobolev-keten $\{H^m(\mathbb{R}^n)\,|\,m=0,1,2,\ldots\}$ uitbreiden tot een keten $\{H^s(\mathbb{R}^n)\,|\,s\in\mathbb{R}\}$.

<u>Definitie 5.3</u>. $H^s(\mathbb{R}^n)$ $(s\in\mathbb{R})$ zal zijn de ruimte van alle tamme distributies u in $\mathbb{R}^n$, waarvoor

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n),$$

met als inproduct

$$(u,v)'_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s\, \hat{u}(\xi)\, \hat{v}(\xi)\, d\xi$$

en als norm

$$(5.5) \qquad ||u||'_s = \{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi\}^{1/2}.$$

De Fouriertransformatie $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ is een isometrie van $L^2(\mathbb{R}^n)$ op zichzelf (stelling 4.9). Met behulp hiervan gaat men na dat de injectie

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n) \qquad (s,t\in\mathbb{R};\ s\geq t)$$

continu is en dat $H^s(\mathbb{R}^n)$ $(s\in\mathbb{R})$ een Hilbertruimte is.

Wij keren nu terug tot het geval van een open verzameling $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

<u>Stelling 5.4</u>. $C^\infty(\Omega)\cap H^m(\Omega)$ is dicht in $H^m(\Omega)$ (dit betekent: iedere $u\in H^m(\Omega)$ is in $H^m(\Omega)$ te benaderen met functies uit $C^\infty(\Omega)$).

<u>Bewijs</u>. Zie [13], p. 6-10.

Uit deze stelling volgt dat ook $C^m(\Omega)\cap H^m(\Omega)$ dicht is in $H^m(\Omega)$. Men kan $H^m(\Omega)$ dus ook op de volgende wijze definiëren.

Beschouw de ruimte $C^{m*}(\Omega)$ van al die functies $u \in C^m(\Omega)$, waarvoor

$$\sum_{|p| \le m} \int_\Omega |D^p u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Definieer een norm $||.||_{m,\Omega}$ op deze ruimte door

$$||u||^2_{m,\Omega} = \sum_{|p| \le m} \int_\Omega |D^p u(x)|^2 \, dx.$$

Uit stelling 5.4 volgt dan:
De completering van $C^{m*}(\Omega)$ met betrekking tot de norm $||.||_{m,\Omega}$ is de Sobolev-ruimte $H^m(\Omega)$.

<u>Definitie 5.4</u>. De rand $\partial\Omega$ van een open verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heet <u>glad</u> als er voor elke $x \in \partial\Omega$ een open omgeving 0_x van x en een afbeelding κ_x van 0_x op de bol $B^n = \{y | y \in \mathbb{R}^n, |y| < 1\}$ bestaan zodanig dat

(i) κ_x is 1-1 en <u>op</u> en zowel κ_x als κ_x^{-1} zijn C^∞-afbeeldingen (κ_x is een <u>diffeomorfisme</u>);

(ii) $\kappa_x\,(0_x \cap \Omega) = B^n_+$ $(= \{y | y \in B^n,\ y_n > 0\})$
en
$\kappa_x(0_x \cap \partial\Omega) = B^n_0$ $(= \{y | y \in B^n,\ y_n = 0\} = B^{n-1})$.

Het paar $(0_x, \kappa_x)$ heet een <u>lokale kaart</u> ter plaatse x.
Een open verzameling $\Omega \in \mathbb{R}^n$ noemen we <u>regulier</u> als

(i) Ω is begrensd;

(ii) $\partial\Omega$ is glad;

(iii) Ω ligt aan één kant van $\partial\Omega$.

<u>Stelling 5.5</u>. (C^∞-partitie van de eenheid). Laten $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ open verzamelingen zijn en laat K een compacte verzameling zijn, zó dat $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$. Dan bestaan er functies $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ $(\phi_j \ge 0)$ zó dat $\sum_{j=1}^{k} \phi_j \le 1$, waarbij het gelijkheidsteken geldt in een omgeving van K.
<u>Bewijs</u>. Zie [9], p. 12-13.

Het belang van het berip regulier is gelegen in de volgende stelling (die het analogon voor $H^m(\Omega)$ is van stelling 5.2).

Stelling 5.6. Als Ω regulier is, dan bestaat er een begrensde lineaire operator $E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ $(E(u) = \tilde{u})$ zodanig dat $\tilde{u}\,|_\Omega = u$ voor alle $u \in H^m(\Omega)$.

Als Ω_1 een begrensde open verzameling is zó dat $\Omega \subset\subset \Omega_1$, dan kan men E zodanig kiezen dat $\operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset \Omega_1$, voor alle $u \in H^m(\Omega)$.

Bewijsschets. (Zie [8], p. 42-43 en [13], p. 23-24).

Laat $(0_i, \kappa_i)_{i=1}^k$ een stelsel lokale kaarten zijn zodanig dat $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k 0_i$.
Zij verder 0_0 een open verzameling met $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k 0_i \subset 0_0 \subset \Omega$. Dan is dus $\bar{\Omega} \subset 0 = \bigcup_{i=0}^k 0_i$.

Laat $(\phi_i)_{i=0}^k$ een bij de overdekking $(0_i)_{i=0}^k$ behorende partitie van de eenheid op $\bar{\Omega}$ zijn (zie stelling 5.4).

Zij nu $u \in C^m(\Omega) \cap H^m(\Omega)$; dan geldt $u = \sum_{i=0}^k \phi_i\, u$. We definiëren
$v_i \overset{\text{def}}{=} (\phi_i\, u) \circ \kappa_i^{-1}$ $(i = 1,2,\ldots,k)$.
Dan geldt $v_i \in C^m(B_+^n) \cap H^m(B_+^n)$; en v_i is nul in een omgeving van dat deel van de rand van B_+^n dat bevat is in $\mathbb{R}_+^n$. Een dergelijke functie kan men voortzetten tot een functie in $H_0^m(B^n)$. Laat v zo'n functie zijn, dan definiëren we namelijk

$$(5.6) \qquad \tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{als } x_n > 0, \\ \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k v(x_1,\ldots,x_{n-1}, -\frac{k}{m+1}\, x_n) & \text{als } x_n < 0, \end{cases}$$

waarbij de getallen λ_k zó bepaald moeten worden dat

$$D_n^r\, \tilde{v}(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = D_n^r\, v(x_1,\ldots,x_{n-1},0) \quad \text{voor } r = 0,1,\ldots,m,$$

$$\text{i.e.} \qquad \sum_{k=1}^{m+1} \left(-\frac{k}{m+1}\right)^r \lambda_k = 1 \qquad \text{voor } r = 0,1,\ldots,m$$

(dit is mogelijk daar de determinant van dit stelsel $\neq 0$ is; de determinant is een Vandermonde-determinant).

Men bewijst nu (zie [1], p. 113-115):

$$(5.7) \qquad \tilde{v} \in H_0^m(B^n).$$

Verder kan men bewijzen dat er een constante $c_1 > 0$ bestaat zodanig dat voor al dergelijke functies v geldt

(5.8) $$||\tilde{v}||_{m,B^n} \leq c_1 ||v||_{m,B^n_+} .$$

Beschouw nu de functies $\tilde{v}_i \circ \kappa_i$ $(i = 1,\ldots,k)$. Uit (5.7) en het feit dat de κ_i C^∞-afbeeldingen zijn, volgt $\tilde{v}_i \circ \kappa_i \in H_0^m(O_i)$ $(i = 1,\ldots,k)$. Verder geldt $\phi_0 u \in H_0^m(O_0)$. We definiëren nu:

(5.9) $$\tilde{u} = \phi_0 u + \sum_{i=1}^{k} \tilde{v}_i \circ \kappa_i .$$

Dan geldt:

(5.10) $$\tilde{u} \in H_0^m(O) ;$$

op grond van stelling 5.2 kan men $\tilde{u}$ ook opvatten als een functie uit $H^m(\mathbb{R}^n)$ (definieer: $\tilde{u}(x) = 0$ als $x \notin O$).

Vervolgens bewijst men dat de lineaire afbeelding

$$C^m(\Omega) \cap H^m(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

begrensd is. Daar $C^m(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dicht is in $H^m(\Omega)$ (stelling 5.4), kan deze afbeelding op unieke wijze worden voortgezet tot een begrensde lineaire operator

$$E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n) ;$$

deze operator voldoet blijkbaar aan de voorwaarde van de stelling.
De tweede bewering van de stelling volgt onmiddellijk uit het bovenstaande; men moet de verzamelingen O_i $(i = 0,1,\ldots,k)$ dan zodanig kiezen dat $O \subset\subset \Omega_1$.

Opmerking 5.1

Als Ω regulier, dan geldt dus: een functie u behoort tot $H^m(\Omega)$ $\Longleftrightarrow$ u is de restrictie tot Ω van een functie v uit $H^m(\mathbb{R}^n)$. Uit het tweede gedeelte van stelling 5.6 volgt: als Ω regulier is en $\Omega \subset\subset \Omega_1$ dan geldt:
een functie u behoort tot $H^m(\Omega)$ $\Longleftrightarrow$ u is de restrictie tot Ω van een functie v uit $H_0^m(\Omega_1)$.
Eigenschappen van de ruimte $H^m(\Omega)$ kan men dus afleiden uit eigenschappen van $H^m(\mathbb{R}^n)$ of van $H_0^m(\Omega_1)$.

De volgende stelling is van groot belang voor de regulariteitstheorie.

<u>Stelling 5.7.</u> (Sobolev). Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulier. Als $m > \frac{n}{2} + k$, dan is

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}).$$

<u>Bewijs.</u> Zij $u \in H^m(\Omega)$. Dan is u op grond van stelling 5.6 de restrictie tot Ω van een functie $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Voor $|p| \leq k$ geldt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^p \hat{v}(\xi)| \, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{v}(\xi)| \, (1+|\xi|^2)^{\frac{k-m}{2}} \, d\xi$$

$$\leq ||v||'_m \, \Big\{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{m-k}}\Big\}^{1/2} .$$

Daar $m-k > \frac{n}{2}$, is $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{m-k}} < \infty$. En dus: $\xi^p \, \hat{v}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $|p| \leq k$.

Hieruit volgt (zie [10], p.181): $D^p \, v \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $|p| \leq k$, ofwel $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

En dus: $u \in C^k(\bar{\Omega})$.

<u>Gevolg.</u> Als Ω regulier is, dan geldt:

$$(5.11) \qquad \bigcap_{m=0}^{\infty} H^m(\Omega) = C^\infty(\bar{\Omega}).$$

<u>Stelling 5.8.</u> Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ begrensd. Laat $0 \leq k \leq m$. Dan is de injectie

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^k(\Omega)$$

compact.

<u>Bewijs.</u> Laat (u_j) een begrensde rij in $H_0^m(\Omega)$ zijn; we vatten de u_j's op als functies uit $H^m(\mathbb{R}^n)$ (door $u_j(x) = 0$ te definiëren als $x \notin \Omega$, zie stelling 5.2). We beschouwen nu de rij $(\hat{u}_j)$ waarbij

$$\hat{u}_j(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\Omega u_j(x) \, e^{-i(x,\xi)} \, dx .$$

Uit

$$D^p \, \hat{u}_j(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\Omega (-ix)^p \, u_j(x) \, e^{-i(x,\xi)} \, dx$$

volgt dan

$$(5.12) \qquad |D^p \, \hat{u}_j| \leq C ||u_j||_{0,\Omega} ,$$

waarbij C een constante is die van p (en Ω) afhangt.

Uit (5.12) volgt dat de rij $(\hat{u}_j)$ uniform begrensd en equicontinu is op iedere compacte verzameling in $\mathbb{R}^n$. Op grond van de stelling van Ascoli-Arzelà (zie p. 31) bevat de rij $(\hat{u}_j)$ een deelrij die uniform convergeert op iedere compacte deelverzameling; zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat de rij $(\hat{u}_j)$ zelf uniform convergeert op compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$.

We tonen aan dat de oorspronkelijke rij (u_j) dan convergeert in $H^k(\Omega)$. Zij $\varepsilon > 0$; kies $M > 0$ zó dat $(1+|\xi|^2)^{k-m} < \varepsilon$ voor $|\xi| \geq M$. Dan geldt, op grond van stelling 5.3,

$$\begin{aligned} \|u_r - u_s\|_k^2 &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k \, |\hat{u}_r - \hat{u}_s|^2 \, d\xi \\ &\leq c\,\varepsilon \int_{|\xi|>M} (1+|\xi|^2)^m \, |\hat{u}_r - \hat{u}_s|^2 \, d\xi \\ &\quad + A(\varepsilon) \int_{|\xi|\leq M} |\hat{u}_r - \hat{u}_s|^2 \, d\xi \,, \end{aligned}$$

waarbij $A(\varepsilon)$ een constante is die afhangt van ε, m en k. Daar $(\hat{u}_j)$ uniform convergeert op compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, gaat de laatste integraal naar 0 als $r, s \to \infty$. Dus

$$\limsup_{r,s\to\infty} \|u_r - u_s\|_k^2 \leq c\,\varepsilon \limsup_{r,s\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m \, |\hat{u}_r - \hat{u}_s|^2 \, d\xi \,.$$

Daar de rij (u_j) in $H^m(\mathbb{R}^n)$ begrensd is, volgt hieruit dat (u_j) een fundamentaalrij is in $H^k(\Omega)$, en dus convergent.

<u>Stelling 5.9</u>. (Rellich). Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulier. Laat $0 \leq k \leq m$. Dan is de injectie

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$$

compact.

<u>Bewijs</u>. Laat Ω_1 een begrensde open verzameling zijn zo dat $\Omega \subset\subset \Omega_1$. Laat

$$R : H_0^k(\Omega_1) \to H^k(\Omega)$$

de restrictie afbeelding zijn (i.e. R voegt aan $v \in H_0^k(\Omega_1)$ zijn restrictie tot Ω toe).

Op grond van stelling 5.6 bestaat er een begrensde lineaire operator

$$E : H^m(\Omega) \to H_0^m(\Omega_1)$$

zodanig dat $RE(u) = u \quad (u \in H^m(\Omega))$.
Beschouw nu onderstaand diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^m(\Omega) & \hookrightarrow & H^k(\Omega) \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle R} \\ H_0^m(\Omega_1) & \hookrightarrow & H_0^k(\Omega_1) \end{array}$$

Laat (u_j) een begrensde rij in $H^m(\Omega)$ zijn. Daar E begrensd is, is de rij $(E(u_j))$ begrensd in $H_0^m(\Omega_1)$. Op grond van stelling 5.8 bevat $(E(u_j))$ een deelrij $(E(u_{j_k}))$ die convergeert in $H_0^k(\Omega_1)$. Daar R een begrensde operator is, is dan de rij $(RE(u_{j_k})) = (u_{j_k})$ convergent in $H^k(\Omega)$. Hiermee is de stelling bewezen.

Tot besluit van deze sectie behandelen wij de interpretatie van de relatie (5.2). Er geldt de volgende stelling.

<u>Stelling 5.10</u>. Zij Ω regulier. Laat $\partial_1\Omega$ een open verzameling van $\partial\Omega$ zijn. En zij V de afsluiting in $H^1(\Omega)$ van de ruimte van de functies $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, die nul zijn in een omgeving van $\partial_1\Omega$. Als $u \in V \cap C^0(\bar{\Omega})$, dan geldt:

$$u \Big|_{\partial_1\Omega} = 0.$$

<u>Bewijs</u>. Zij $x_0 \in \partial_1\Omega$. Wij maken nu de volgende veronderstellingen:

(i) $x_0 = 0$;
(ii) $B^{n-1} = \{x \mid |x|<1,\ x_n=0\} \subset \partial_1\Omega$;
(iii) $\sum_h = \{(x',x_n) \mid |x'|<1,\ 0<x_n<h\} \subset \Omega$ voor alle h tussen 0 en 1 (hierbij is: $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$).

Het is voldoende de stelling onder deze voorwaarden te bewijzen; het algemene geval bewijst dan hieruit door gebruik te maken van een lokale kaart ter plaatse x_0. Zij $u \in V \cap C^0(\bar{\Omega})$. Dan is u in $H^1(\Omega)$ de limiet van een rij (ϕ_k) met $\phi_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ en $\phi_k = 0$ in een zekere omgeving van B^{n-1}. Voor

$(x',x_n) \in \Sigma_1$ geldt:

$$\phi_k(x',x_n) = \int_0^{x_n} D_n\, \phi_k\, (x',t)\, dt \ ,$$

en dus (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz):

$$|\phi_k(x',x_n)|^2 \leq x_n \int_0^{x_n} |D_n\, \phi_k(x',t)|^2\, dt \ .$$

Hieruit volgt

$$\int_{B^{n-1}} |\phi_k(x',x_n)|^2\, dx' \leq x_n \int_{B^{n-1}} \int_0^{x_n} |D_n\, \phi_k\, (x',t)|^2\, dt\, dx'$$

$$\leq x_n\, ||\phi_k||^2_{1,\Omega} \ .$$

Integreren geeft

$$\int_0^h \int_{B^{n-1}} |\phi_k(x',x_n)|^2\, dx'dx_n \leq \frac{1}{2}\, h^2\, ||\phi_k||^2_{1,\Omega} \ .$$

Daar $\phi_k \to u$ in $H^1(\Omega)$, volgt

$$\frac{1}{h} \int_0^h \int_{B^{n-1}} |u(x',x_n)|^2\, dx'dx_n \leq \frac{1}{2}\, h\, ||u||^2_{1,\Omega} \ .$$

Uit de continuïteit van u volgt dan

$$\int_{B^{n-1}} |u(x',0)|^2\, dx' = 0 \ .$$

Dus $u(0) = 0$.

Nemen we voor V nu $H_0^1(\Omega)$, dan geldt voor iedere $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ dat $u \big|_{\partial\Omega} = 0$.

Dit geldt ook algemener, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 5.11. Zij Ω regulier. Als $u \in C^{m-1}(\bar{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega)$ dan geldt:

$$u \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Bewijs. Zie [1], p.106.

5.2. Existentie van zwakke oplossingen

Als voorbereiding op de theorie die in deze sectie behandeld zal worden, beginnen we met een min of meer heuristische inleiding.

Laat

$$L = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q) \tag{5.13}$$

een elliptische differentiaal operator zijn die gedefinieerd is in een (begrensde) open verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Om redenen die verderop duidelijk zullen worden, nemen we aan dat L (uniform) sterk elliptisch in Ω is; dit betekent: er bestaat een constante $c > 0$ zodanig dat voor alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ en $x \in \Omega$ geldt:

$$\mathrm{Re} \Big(\sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \Big) \geq c\, |\xi|^{2m}. \tag{5.14}$$

Voor het gemak veronderstellen we verder dat de coëfficienten a_{pq} alle tot $C^\infty(\bar{\Omega})$ behoren.

We beschouwen nu het volgende randwaardeprobleem (het Dirichlet-probleem):

$$\begin{gathered} Lu = f \text{ in } \Omega \,, \\ u \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \,. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Laat $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ een distributionele oplossing zijn van de vergelijking

$$Lu = f \text{ in } \Omega \;; \tag{5.16}$$

dit betekent dat voor alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

(5.17) $\quad <Lu,\phi> = <f,\phi>$.

Als $f \in L^2(\Omega)$ en als u voldoende glad is, dan volgt uit (5.17)

(5.18) $$\sum_{|p|,|q|\leq m} (a_{pq} D^q u, D^p \phi)_{0,\Omega} = (f,\phi)_{0,\Omega} \text{ voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definiëren we voor u en $v \in H^m(\Omega)$ nu $B(u,v)$ door

(5.19) $$B(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|p|,|q|\leq m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_{0,\Omega} ,$$

dan kunnen we voor (5.18) ook schrijven

(5.20) $$B(u,\phi) = (f,\phi)_{0,\Omega} \quad \text{voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

En ook

(5.21) $$B(u,v) = (f,v)_{0,\Omega} \quad \text{voor alle } v \in H_0^m(\Omega)$$

(immers, de functionaal $v \longmapsto B(u,v)$ is bij vaste u begrensd op $H_0^m(\Omega)$ en $C_c^\infty(\Omega)$ ligt dicht in $H_0^m(\Omega)$).
We zoeken evenwel een oplossing van (5.16) die tevens aan de randvoorwaarden voldoet; we eisen daarom (zie stelling 5.11) van de oplossing u dat deze tot $H_0^m(\Omega)$ behoort.

Bovenstaande beschouwing motiveert nu de volgende herformulering van (5.15):

(5.22) gegeven : $f \in L^2(\Omega)$,
gevraagd: $u \in H_0^m(\Omega)$ zodanig dat
$$B(u,v) = (f,v)_{0,\Omega} \text{ voor alle } v \in H_0^m(\Omega) .$$

In deze sectie zullen we bewijzen dat problemen van bovenstaande vorm een oplossing bezitten.

Of een oplossing van (5.22) ook een oplossing van (5.15) is (anders gezegd: of een gegeneraliseerde oplossing steeds een klassieke oplossing is) is een vraag die we verderop pas aan de orde zullen stellen (het is duidelijk dat we bij de beantwoording hiervan zekere regulariteitseisen aan L, f en Ω zullen moeten opleggen.

Na deze inleiding gaan we over tot de behandeling van een stuk Hilbertruimte-theorie dat rechtstreeks toegepast kan worden op (5.22) maar dat ook van toepassing is op meer algemene randwaardeproblemen.

We beschouwen een Hilbertruimte H en een lineaire deelruimte V van H, die dicht ligt in H. Het inproduct in H noteren we als $(.,.)_H$ en de norm in H geven we aan met $||.||_H$. Op de lineaire ruimte V is verder nog het inproduct $(.,.)_V$ gedefinieerd; en V met dit inproduct is een Hilbertruimte (de norm in deze Hilbertruimte wordt aangegeven met $||.||_V$). Verder veronderstellen we dat de injectie

$$I : V \hookrightarrow H$$

begrensd is, i.e. er bestaat een $k_0 \geq 0$ zó dat

(5.23) $$||v||_H \leq k_0 \; ||v||_V \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

Laat verder gegeven zijn een <u>bilineaire</u> (beter: sesquilineaire) <u>functionaal</u> B op V waarvoor geldt:

(i) B is <u>begrensd op V</u>, i.e. er bestaat een $k \geq 0$ zó dat

(5.24) $$|B(u,v)| \leq k \; ||u||_V \; ||v||_V \qquad \text{voor alle } u,v \in V;$$

(ii) B is <u>coërcief over V</u>, i.e. er bestaan getallen $c > 0$ en $\lambda_0 \geq 0$ zodanig dat voor alle $u \in V$ geldt:

(5.25) $$\operatorname{Re} B(u,u) \geq c \; ||u||_V^2 - \lambda_0 \; ||u||_H^2$$

(als $\lambda_0 = 0$ voldoet, dan heet B <u>sterk coërcief</u> over V).

Voor reële λ definiëren we

(5.26) $$B_\lambda(u,v) \overset{\text{def}}{=} B(u,v) + \lambda(u,v)_H.$$

Uit (5.24) en (5.23) volgt dat B_λ begrensd is op V. Verder merken we op: als $\lambda \geq \lambda_0$, dan is B sterk coërcief over V.

In het volgende zullen H, V en B steeds zijn als hierboven gedefinieerd.

Voorbeeld 5.2.

Neem $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ en

$$B(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} D_i\, u\, D_i\, \bar{v}\, dx \qquad\qquad (u,v \in H_0^1(\Omega)).$$

Er geldt: $H_0^1(\Omega)$ is dicht in $L^2(\Omega)$, want $C_c^\infty(\Omega)$ ligt reeds dicht in $L^2(\Omega)$, zie stelling 4.11, en de injectie $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ is begrensd.
Verder is

$$B_\lambda(u,v) = \sum_{i=1}^{n} (D_i\, u,\, D_i\, v)_{0,\Omega} + \lambda(u,v)_{0,\Omega}\ . \tag{5.27}$$

Daar

$$|B_\lambda(u,v)| \leq \max(1,|\lambda|)\ ||u||_{1,\Omega}\ ||v||_{1,\Omega}\ , \tag{5.28}$$

is B_λ begrensd op $H_0^1(\Omega)$.
Voor $\lambda > 0$ is B_λ sterk coërcief; dit volgt uit

$$B_\lambda(u,u) \geq \min(1,\lambda)\ ||u||_{1,\Omega}^2\ . \tag{5.29}$$

Voorbeeld 5.3.

Neem $H = L^2(\Omega)$ en $V = H_0^m(\Omega)$.
Laat L resp. B zijn als in formule (5.13) resp. (5.19). Met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz leidt men af dat B begrensd is op $H^m(\Omega)$ (dus op $H_0^m(\Omega)$).
Dat B coërcief over $H_0^m(\Omega)$ is, is minder triviaal; het volgt nl. uit de ongelijkheid van Gårding. We komen hierop nog terug.

Stelling 5.12. Voor $\lambda \geq \lambda_0$ bestaat er een lineaire operator $\mathcal{L}_\lambda$ zodanig dat voor alle $u,v \in V$ geldt

$$B_\lambda(u,v) = (\mathcal{L}_\lambda u,v)_V\ .$$

Deze operator $\mathcal{L}_\lambda$ is een isomorfisme van V op zichzelf.

Bewijs. Zij $\lambda \geq \lambda_0$. Neem $u \in V$; dan is de afbeelding: $v \mapsto B_\lambda(u,v)$ een begrensde anti-lineaire functionaal op V. Op grond van de representatiestelling van Riesz (stelling 4.16) bestaat er dan een uniek element $\tilde{u} \in V$ met

$$B_\lambda(u,v) = (\tilde{u},v)_V \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

De toevoeging: $u \mapsto \tilde{u}$ is lineair en we schrijven: $\tilde{u} = \mathcal{L}_\lambda u$. Er geldt:

$$(\mathcal{L}_\lambda u, \mathcal{L}_\lambda u)_V = B_\lambda(u, \mathcal{L}_\lambda u) \leq \text{const. } ||u||_V ||\mathcal{L}_\lambda u||_V$$

en dus

$$||\mathcal{L}_\lambda u||_V \leq \text{const. } ||u||_V \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

$\mathcal{L}_\lambda$ is dus een begrensde lineaire operator.
Verder geldt ook

$$c||u||_V^2 \leq |B_\lambda(u,u)| = |(\mathcal{L}_\lambda u,u)_V| \leq ||\mathcal{L}_\lambda u||_V \; ||u||_V \quad \text{voor alle } u \in V,$$

en dus

$$||\mathcal{L}_\lambda u||_V \geq c \; ||u||_V \qquad \text{voor alle } u \in V. \tag{5.30}$$

We hebben nu

$$c \; ||u||_V \leq ||\mathcal{L}_\lambda u||_V \text{ const. } ||u||_V \quad \text{voor alle } u \in V.$$

Dit betekent, daar $c > 0$, dat $\mathcal{L}_\lambda$ een isomorfisme is.
We tonen nu aan dat $\mathcal{L}_\lambda$ een afbeelding op is. Uit (5.30) volgt dat $R(\mathcal{L}_\lambda)$ gesloten is in V (immers, als $(\mathcal{L}_\lambda u_n)$ een fundamentaalrij in $R(\mathcal{L}_\lambda)$ is, dan is op grond van (5.30) de rij (u_n) een fundamentaalrij in V, dus convergent in V, zeg naar u_0; maar dan convergeert $(\mathcal{L}_\lambda u_n)$ naar $\mathcal{L}_\lambda u_0$). Stel nu: $R(\mathcal{L}_\lambda) \neq V$. Dan bestaat er een $v_0 \neq 0$ in V zó dat

$$(\mathcal{L}_\lambda u, v_0)_V = 0 \qquad \text{voor alle } u \in V.$$

Nemen we voor u nu v_0, dan vinden we:

$$0 = (\mathcal{L}_\lambda v_0, v_0)_V = |B_\lambda(v_0,v_0)| \geq c \; ||v_0||_V^2.$$

Daar $c > 0$, volgt hieruit dat $v_0 = 0$. Tegenspraak. Dus $R(\mathcal{L}_\lambda) = V$.

Definitie 5.5. Voor $u \in V$ definiëren we de anti-lineaire functionaal $F_u : V \to C$ door

$$F_u(v) = B_\lambda(u,v) \qquad (v \in V).$$

Voor $\lambda \geq \lambda_0$ definiëren we verder D_λ als de verzameling van alle elementen $u \in V$, waarvoor F_u begrensd is op V m.b.t. de H-norm op V.

We merken op: als $\lambda \geq \lambda_0$, dan is $D_\lambda = D_{\lambda_0}$; we schrijven daarom $D_\lambda = D$. Daar V dicht is in H, is voor $u \in D$ de fuctionaal F_u op unieke wijze voort te zetten tot een begrensde lineaire functionaal op H (zie stelling 4.15); deze geven we weer aan met F_u.

Stelling 5.13. Voor $\lambda \geq \lambda_0$ bestaat er een lineaire operator

$$L_\lambda : D \to H$$

zodanig dat voor alle $u \in D$ en $v \in V$ geldt

$$B_\lambda(u,v) = (L_\lambda u,v)_H. \tag{5.31}$$

Bewijs. Als $u \in D$, dan is F_u begrensd op H. Op grond van de representatie-stelling van Riesz (stelling 4.16), is er dan een uniek element $f \in H$ zó dat

$$B_\lambda(u,v) = (f,v)_H \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

De toevoeging: $u \mapsto f$ is lineair; we definiëren

$$L_\lambda u = f.$$

Opmerking. De operator L_λ is in het algemeen niet begrensd.

Voorbeeld 5.4. Laten H, V en B zijn als voorbeeld 5.2. Uit stelling 5.13 weten we dat B_λ $(\lambda > 0)$ aanleiding geeft tot een lineaire operator L_λ die gedefinieerd is op een zekere deelruimte D_λ (=D) van $H_0^1(\Omega)$. We bewijzen nu het volgende:

a) $D = \{u \mid u \in H_0^1(\Omega)$ en $\Delta u \in L^2(\Omega)\}$,
b) $L_\lambda u = -\Delta u + \lambda u \qquad (u \in D)$.

Bewijs.
Uit stelling 5.13 volgt dat voor alle $u \in D$ en $\phi \in H_0^1(\Omega)$ geldt

$$B_\lambda(u,\phi) = (L_\lambda u,\phi)_{0,\Omega} \, .$$

Uit de definitie (5.27) van B_λ volgt evenwel

$$B_\lambda(u,\phi) = \langle -\Delta u + \lambda u,\bar{\phi}\rangle \qquad \text{voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{5.32}$$

Voor $u \in D$ en $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ is dus

$$(L_\lambda u,\phi)_{0,\Omega} = \langle -\Delta u,\bar{\phi}\rangle + \lambda(u,\phi)_{0,\Omega} \, .$$

Hieruit volgt dat de distributie Δu tot $L^2(\Omega)$ behoort; we mogen dus schrijven

$$(L_\lambda u,\phi)_{0,\Omega} = (-\Delta u + \lambda u,\phi)_{0,\Omega}$$

voor alle $u \in D$ en $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.
Hieruit volgt, daar $C_c^\infty(\Omega)$ dicht ligt in $L^2(\Omega)$, dat voor alle $u \in D$ geldt

$$L_\lambda u = -\Delta u + \lambda u \, .$$

Als omgekeerd voor zekere $u \in H_0^1(\Omega)$ de distributie Δu tot $L^2(\Omega)$ behoort, dan mogen we voor (5.32) ook schrijven

$$B_\lambda(u,\phi) = (-\Delta u + \lambda u,\phi)_{0,\Omega} \qquad \text{voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Daar B_λ begrensd is op $H_0^1(\Omega)$ en $C_c^\infty(\Omega)$ dicht is in $H_0^1(\Omega)$, volgt

$$B_\lambda(u,v) = (-\Delta u + \lambda u,v)_{0,\Omega} \qquad \text{voor alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Maar dit betekent dat de functionaal F_u begrensd is op $H_0^1(\Omega)$ m.b.t. de L^2-norm op $H_0^1(\Omega)$. Dus $u \in D$.

Stelling 5.14. Voor $\lambda \geq \lambda_0$ is $R(L_\lambda) = H$.
Bewijs. Laat $I : V \hookrightarrow H$ de injectie van V in H zijn. Zij $J = I^*$; dit betekent dat voor alle $f \in H$ en $v \in V$ geldt

$$(f,v)_H = (Jf,v)_V \ .$$

Zij nu $f \in H$. Daar $\mathcal{L}_\lambda$ een afbeelding van V op zichzelf is, is er een $u \in V$ met $\mathcal{L}_\lambda u = Jf$. We hebben dan:

$$(f,v)_H = (Jf,v)_V = (\mathcal{L}_\lambda u,v)_V = B_\lambda(u,v) \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

en dus $\qquad (f,v)_H = (L_\lambda u,v)_H \qquad$ voor alle $v \in V$.

Daar V dicht is in H, volgt hieruit: $L_\lambda u = f$.

<u>Stelling 5.15</u>. Zij $\lambda \geq \lambda_0$. Dan is $N(L_\lambda) = (0)$. En de inverse G_λ van L_λ,

$$G_\lambda : H \to V \ ,$$

is begrensd.

<u>Bewijs</u>. Uit het bewijs van de vorige stelling volgt dat voor $\lambda \geq \lambda_0$ geldt:

(5.33) $$\mathcal{L}_\lambda u = JL_\lambda u \qquad \text{voor alle } u \in D.$$

Als $L_\lambda u = 0$, dan is ook $\mathcal{L}_\lambda u = 0$ en dus, daar $\mathcal{L}_\lambda$ eeneenduidig is, $u = 0$. Dus $N(L_\lambda) = (0)$. We hebben nu: $R(L_\lambda) = H$ en $N(L_\lambda) = (0)$. Dit betekent dat L_λ een eeneenduidige afbeelding van D <u>op</u> H is. Als G_λ de inverse van L_λ voorstelt, dan is G_λ een eeneenduidige afbeelding van H <u>op</u> D. Bovendien is G_λ begrensd; immers uit (5.33) volgt

(5.34) $$G_\lambda = \mathcal{L}_\lambda^{-1} J.$$

<u>Opmerking</u>. De relatie (5.34) kan men als volgt in een diagram weergeven:

(5.35)
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook, "I"] & H \\
V \arrow[u, "\mathcal{L}_\lambda^{-1}"] & H \arrow[l, "J"] \arrow[ul, "G_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

<u>Stelling 5.16</u>. Zij $\lambda \geq \lambda_0$. Dan geldt: voor ieder element $f \in H$ bestaat er precies één element $u \in V$, nl. $u = G_\lambda f$, zó dat

$$L_\lambda u = f$$

(<u>ofwel</u>: $B_\lambda(u,v) = (f,v)_H$ voor alle $v \in V$).
<u>Bewijs</u>. Dit volgt onmiddelijk uit stelling 5.14 en stelling 5.15.

<u>Voorbeeld 5.5</u>. (vervolg van voorbeeld 5.4).
Uit stelling 5.16 volgt: Zij $\lambda > 0$ willekeurig. Voor iedere $f \in L^2(\Omega)$ is er precies één $u \in D$ met

$$(-\Delta + \lambda)u = f \ .$$

Nemen we $\Omega = \mathbb{R}^n$, dan geldt: $D = H^2(\mathbb{R}^n)$.
(Dat $D \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ volgt uit stelling 5.3 en de relatie $(-\Delta u)\hat{} = |\xi|^2\hat{u}$. Dat omgekeerd $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D$, volgt uit het feit dat voor elk natuurlijk getal m geldt: $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$, zie [9], p. 188).

Op grond van stelling 5.7 geldt: $H^2(\mathbb{R}^2) \subset C^0(\mathbb{R}^2)$.
Uit het bovenstaande volgt dat de (unieke) oplossing van de vergelijking:

$$-\Delta u + u = f \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

voor $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, continu is. Dit is een voorbeeld van een regulariteitsresultaat.

<u>Stelling 5.17</u>. Als B symmetrisch is (i.e. $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$), dan is G_λ , opgevat als operator op H, hermetisch voor $\lambda \geq \lambda_0$.
<u>Bewijs</u>. Vatten we G_λ op als operator op H, dan beschouwen we in feite de operator IG_λ (zie diagram (5.35)).
Als B symmetrisch is, dan volgt uit stelling 5.12 dat $\mathcal{L}_\lambda$ hermitisch is. Dan is ook $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ hermitisch (zie [11], p. 347). Men gaat gemakkelijk na dat dan ook

$$IG_\lambda = I\mathcal{L}_\lambda^{-1}J$$

hermitisch is.

Als we stellen

$$L \overset{\text{def}}{=} L_{\lambda_0} - \lambda_0 I \ , \tag{5.36}$$

dan geldt voor $\lambda \geq \lambda_0$, dat $L_\lambda = L + \lambda I$ (dit volgt onmiddellijk uit (5.26) en (5.31)). Voor $\lambda < \lambda_0$ definiëren we

(5.37) $$L_\lambda \overset{\text{def}}{\equiv} L + \lambda I.$$

Het definitiegebied $D(L_\lambda)$ van L_λ is voor alle λ gelijk aan D.
Beschouw nu voor λ willekeurig reëel de vergelijking

(5.38) $$L_\lambda u = f \ .$$

Deze vergelijking is equivalent met het probleem om bij gegeven $f \in H$ een $u \in D$ te vinden waarvoor geldt:

$$B_\lambda(u,v) = (f,v)_H \qquad \text{voor alle } v \in V.$$

Verder is (5.38) equivalent met de vergelijking

(5.39) $$u + (\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0}u = G_{\lambda_0}f$$

(dit volgt uit stelling 5.15 en de relatie $L_\lambda = L_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)I$).
Nu is het voldoende om (5.39) binnen H op te lossen; immers, als voor een $u \in H$ geldt: $u = G_{\lambda_0}f - (\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0}u$, dan behoort u tot D.
Vanaf nu vatten we G_{λ_0} en L_λ dan ook op als operatoren werkend in H.

We maken nu de volgende veronderstelling:

(5.40) de injectie $I : V \hookrightarrow H$ is compact.

Dan volgt dat ook IG_{λ_0} (i.e. G_{λ_0} opgevat als operator op H) compact is.
Veronderstellen we nu bovendien dat B symmetrisch is (merk op dat $B(u,u)$ dan reëel is), dan is de operator

$$G_{\lambda_0} : H \to H$$

compact en hermitisch (St. 5.17).

Op grond van stelling 4.21 bestaat er dan een volledig orthonormaal stelsel (v_j) in H en een rij van reële getallen (μ_j) met $\lim_{j\to\infty} \mu_j = 0$ zodanig dat

(5.41) $$G_{\lambda_0} v_j = \mu_j v_j \qquad (j = 1,2,\ldots).$$

Definiëren we

(5.42) $$\lambda_j \overset{\text{def}}{=} \lambda_0 - \frac{1}{\mu_j} \qquad (j = 1,2,\ldots)$$

(geen der μ_j's is gelijk aan nul, want G_{λ_0} is eeneenduidig, zoals blijkt uit het bewijs van stelling 5.15), dan volgt uit (5.39) en (5.38)

$$L_{\lambda_j} v_j = 0 ,$$

ofwel $$Lv_j = (-\lambda_j)v_j \qquad (j = 1,2,\ldots).$$

Uit (5.41) volgt verder: $L_{\lambda_0} v_j = \frac{1}{\mu_j} v_j \qquad (j = 1,2,\ldots).$

Er geldt dan

$$\frac{1}{\mu_j} ||v_j||_H^2 = (L_{\lambda_0}v_j,v_j)_H = B_{\lambda_0}(v_j,v_j) \geq c||v_j||_V^2 \geq \frac{c}{k_0^2} ||v_j||_H^2.$$

Hieruit volgt dat $\mu_j > 0$ voor alle j; dus

$$(-\lambda_j) \geq (-\lambda_0) \text{ en } \lim_{j\to\infty} (-\lambda_j) = \infty .$$

<u>Stelling 5.18</u>. Laat de injectie $I : V \hookrightarrow H$ compact zijn en laat B symmetrisch zijn. Beschouw voor $f \in H$ de vergelijking

(*) $$L_\lambda u = f$$

waarin L_λ als operator werkend in H wordt opgevat.

Laten de λ_j's zijn als in (5.42). Dan geldt:

a) Als $\lambda \neq \lambda_j$ $(j = 1,2,\ldots)$, dan bezit de vergelijking (*) voor alle $f \in H$ precies één oplossing $u \in D$.

b) Voor de λ_j's geldt

$$0 < \dim N(L_{\lambda_j}) < \infty .$$

Bovendien geldt:

de vergelijking $L_{\lambda_j} u = f$ is oplosbaar $\Longleftrightarrow f \perp_H N(L_{\lambda_j})$.

<u>Opmerking 5.2</u>.

Het bewijs van stelling 5.18 berust op de stellingen 4.21 en 4.22 en het volgende lemma.

Lemma. Voor alle λ geldt: $N(L_\lambda) = N(I + (\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0})$ en

$$R(L_\lambda) = R(I + (\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0}).$$

Voorbeeld 5.6 (vervolg voorbeeld 5.4).
We veronderstellen dat Ω begrensd is. Dan is de injectie $I : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compact (zie stelling 5.8). Er bestaat dus een volledig orthonormaal stelsel in $L^2(\Omega)$ van functies $\{v_j\}$ met

$$v_j \in H_0^1(\Omega) \quad \text{en} \quad \Delta v_j = \lambda_j v_j \qquad (j = 1,2,\ldots),$$

waarbij $\lambda_j < 0$ en $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = -\infty$.

5.3. Enige Voorbeelden

a) Operatoren van orde 2

Laat Ω een begrensde open verzameling in $\mathbb{R}^n$ zijn en laat in Ω de differentiaaloperator L gegeven zijn door

$$(5.43) \qquad L = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i\,(a_{ij}(x)\, D_j) + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x)\, D_i + a_0\,(x)\ .$$

Hierbij zijn de a_{ij} $(1 \le i,\ j \le n)$ en de a_i $(1 \le i \le n)$ reële functies die tot $C^\infty(\bar{\Omega})$ behoren.
Aan de operator L voegen we de volgende bilineaire vorm B toe:

$$(5.44) \qquad B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\, D_j\, u,\, D_i\, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} (a_i\, D_i\, u,\, v)_{0,\Omega} + (a_0\, u,\, v)_{0,\Omega}.$$

Stelling 5.19.
a) De bilineaire vorm B is begrensd op $H^1(\Omega)$.
b) Als L uniform sterk elliptisch is in Ω, dan is B coërcief over $H^1(\Omega)$.
Bewijs.
a) Voor $u,\ v \in H^1(\Omega)$ geldt:

$$|B(u,v)| \leq \text{const.} \left(\sum_{i,j=1}^{n} ||D_j u||_{0,\Omega} \, ||D_i v||_{0,\Omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{0,\Omega} \, ||v||_{0,\Omega} + ||u||_{0,\Omega} \, ||v||_{0,\Omega} \right)$$

$$\leq \text{const.} \; ||u||_{1,\Omega} \, ||v||_{1,\Omega}.$$

Dit betekent dat B begrensd is op $H^1(\Omega)$.

b) Als L uniform sterk elliptisch in Ω is, dan bestaat er een constante $\gamma > 0$ zó dat voor alle $x \in \Omega$ en $\xi \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \geq \gamma \, |\xi|^2.$$

Hieruit volgt dat voor alle $u \in H^1(\Omega)$ geldt

$$\text{Re } B(u,u) \geq \gamma \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2 \, dx + R,$$

waarbij $|R| \leq c_1 \sum_{i=1}^{n} |(D_i u, u)_{0,\Omega}| + c_2 \, ||u||^2_{0,\Omega}$

(c_1 en c_2 zijn constanten ≥ 0).

Voor $\varepsilon > 0$, willekeurig, geldt

$$|(D_i u, u)_{0,\Omega}| \leq ||D_i u||_{0,\Omega} \, ||u||_{0,\Omega}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \, ||D_i u||^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon} \, ||u||^2_{0,\Omega} \, .$$

Dus $|R| \leq \frac{c_1 \varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||^2_{0,\Omega} + \left(\frac{nc_1}{2\varepsilon} + c_2\right) ||u||^2_{0,\Omega}$.

Door ε voldoende klein te kiezen vinden we een $c > 0$ en een $\lambda_0 \geq 0$ zó dat voor alle $u \in H^1(\Omega)$ geldt

$$\text{Re } B(u,u) \geq c \; ||u||^2_{1,\Omega} - \lambda_0 \, ||u||^2_{0,\Omega} \, .$$

Voor de ruimten H en V (zie vorige sectie) nemen we:

$H = L^2(\Omega)$ en

V = een gesloten deelruimte van $H^1(\Omega)$ die $H^1_0(\Omega)$ bevat.

We veronderstellen nu dat L uniform sterk elliptisch in Ω is.
Op grond van stelling 5.19 kan dan de theorie uit de vorige sectie toegepast worden op het tripel (H, V, B).

De bilineaire vorm B geeft aanleiding tot een operator $L' : V \to H$, die gedefinieerd is op een zekere deelruimte D van V en waarvoor geldt:

(5.45) $$B(u,v) = (L'u,v)_{0,\Omega}$$

voor alle $u \in D$ en $v \in V$.

Voor het gemak zullen we veronderstellen dat B sterk coërcief is over $H^1(\Omega)$ (dus over V).

<u>Stelling 5.20</u>. Voor $u \in D$ geldt: $Lu = L'u$. En verder: $u \in D$ d.e.s.d. als
(i) $u \in V$ en $Lu \in H$,
(ii) $B(u,v) = (Lu,v)_{0,\Omega}$ voor alle $v \in V$.
<u>Bewijs</u>. Voor $u \in V$ en $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt:

(5.46) $$B(u,\phi) = \langle Lu,\bar{\phi}\rangle \ .$$

Voor $u \in D$ is de toevoeging: $v \mapsto B(u,v)$ continu op V m.b.t. de H-norm op V; in het bijzonder geldt dat de toevoeging: $\phi \mapsto B(u,\phi)$ continu is op $C_c^\infty(\Omega)$ m.b.t. de L^2-norm op $C_c^\infty(\Omega)$. Wegens (5.46) volgt hieruit dat voor $u \in D$ de distributie Lu tot $L^2(\Omega)$ behoort. Dus voor $u \in D$ geldt:

(5.47) $$B(u,\phi) = (Lu,\phi)_{0,\Omega} \text{ voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Vergelijken we (5.47) met (5.45) dan vinden we:

$$Lu = L'u \quad \text{voor alle } u \in D;$$

en dus (zie (5.45)):

(5.48) $$B(u,v) = (Lu,v)_{0,\Omega} \quad \text{voor alle } v \in V.$$

Als omgekeerd u voldoet aan (5.48) dan volgt uit definitie 5.5 onmiddellijk dat $u \in D$.

Om nu de ruimte D te kunnen interpreteren beschouwen we de volgende <u>formele</u> formule van Green:

(5.49) $\quad B(u,v) = (Lu,v)_{0,\Omega} + \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, n_i\, D_j\, u \right) \bar{v}\, d\sigma$

(hierin is n_i de i-de component van de buiten gerichte normaal op $\partial\Omega$).
Uit de stellingen 5.16 en 5.20 volgt:
Voor alle $f \in L^2(\Omega)$ is er precies één $u \in V$ met

(5.50) $$\begin{cases} Lu = f, \\ \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, n_i\, D_j\, u \right) \bar{v}\, d\sigma = 0 \quad \text{voor alle } v \in V. \end{cases}$$

In de volgende voorbeelden zullen we de ruimte D (formeel) interpreteren.

Voorbeeld 5.7.
Nemen we $V = H_0^1(\Omega)$, dan is aan conditie (ii) uit stelling 5.20 steeds voldaan. Immers, als $u \in H^1(\Omega)$ en $Lu \in L^2(\Omega)$, dan geldt

$$B(u,\phi) = (Lu,\phi)_{0,\Omega} \text{ voor alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Daar $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ dicht ligt in $H_0^1(\Omega)$ volgt

$$B(u,v) = (Lu,v)_{0,\Omega} \text{ voor alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Dus conditie (ii) volgt uit conditie (i).
Het feit dat u tot $H_0^1(\Omega)$ behoort betekent dat u nul is op $\partial\Omega$; de randvoorwaarde voor u volgt in dit geval dus rechtstreeks uit eigenschappen van de ruimte V.
Voor alle $f \in L^2(\Omega)$ bestaat er dus precies één element $u \in H^1(\Omega)$ met

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u \big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dit is het Dirichlet-probleem.

Voorbeeld 5.8.
Neem $V = H^1(\Omega)$. Uit (5.49) volgt dat (ii) uit stelling 5.20 equivalent is met

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, n_i\, D_j\, u \right) \bar{v}\, d\sigma = 0 \quad \text{voor alle } v \in H^1(\Omega).$$

Formeel betekent dit

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, n_i\, D_j\, u\Big)\Big|_{\partial\Omega} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu_L}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Voor alle $f \in L^2(\Omega)$ bestaat er precies één element $u \in H^1(\Omega)$ met

$$\begin{cases} Lu = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dit is het Neumann-probleem.

Voorbeeld 5.9.

Laat $\partial_1\Omega$ een open deelverzameling van $\partial\Omega$ zijn en zij $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$. Laat V gelijk zijn aan de afsluiting in $H^1(\Omega)$ van de verzameling van al die functies $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ die nul zijn in zekere omgeving van $\partial_1\Omega$. Men kan V dan interpreteren als de gesloten lineaire deelruimte van al die functies $u \in H^1(\Omega)$ die nul zijn op $\partial_1\Omega$. Uit (5.49) volgt dat (ii) uit stelling 5.20 equivalent is met

$$\int_{\partial_2\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_L}\, \bar{v}\, d\sigma = 0 \quad \text{voor alle } v \in V.$$

Men kan bewijzen dat hieruit volgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L}\Big|_{\partial_2\Omega} = 0.$$

Voor alle $f \in L^2(\Omega)$ bestaat er precies één element $u \in H^1(\Omega)$ met

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u\Big|_{\partial_1\Omega} = 0 \quad \text{en} \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L}\Big|_{\partial_2\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dit is een gemengd randwaardeprobleem.

Uit dit laatste voorbeeld zien we dat de randvoorwaarden voor u deels bevat zijn in de conditie: $u \in V$ (deze randvoorwaarden heten de stabiele randvoorwaarden) en deels voortkomen uit de vergelijking (5.49) (de natuurlijke randvoorwaarden). De randvoorwaarden hangen dus zowel af van de ruimte V, als ook van de bilineaire vorm B. Het probleem op welke manier men in het algemeen bij het gegeven randvoorwaarden V en B moet kiezen, zullen we niet behandelen; we verwijzen naar [1], p. 146 e.v.

b) Operatoren van orde 2 m

Zij

$$L = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q), \tag{5.51}$$

waarbij $a_{pq} \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Voor $u,v \in H^1(\Omega)$ definiëren we

$$B(u,v) = \sum_{|p|,|q|\leq m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_{0,\Omega} . \tag{5.52}$$

Voor H en V nemen we:

$H = L^2(\Omega)$ en

V = een gesloten deelruimte van $H^m(\Omega)$ die $H^m_0(\Omega)$ bevat.

We zien dat B begrensd is op $H^m(\Omega)$ (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz). Het antwoord op de vraag of B coërcief over V is, blijkt hier niet alleen af te hangen van de operator L (dus van de a_{pq}'s) maar ook van de ruimte V. Voor $V = H^m_0(\Omega)$ hebben we de volgende stelling.

Stelling 5.21. (ongelijkheid van Gårding). Zij Ω begrensd. Zij L uniform sterk elliptisch in $\bar{\Omega}$, d.w.z. er bestaat een constante $\gamma > 0$ zó dat voor alle $x \in \bar{\Omega}$ en $\xi \in R^n$ geldt:

$$\mathrm{Re} \sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \geq \gamma\, |\xi|^2 .$$

Dan is B coërcief over $H^m_0(\Omega)$, i.e. er bestaan constanten $c > 0$ en $\lambda_0 \geq 0$ zó dat voor alle $u \in H^m_0(\Omega)$ geldt:

$$\mathrm{Re}\, B(u,u) \geq c\, ||u||^2_{m,\Omega} - \lambda_0\, ||u||^2_{0,\Omega} . \tag{5.53}$$

Bewijs. Zie [9], p. 202 e.v.

Stelling 5.22. Zij Ω begrensd en zij L uniform sterk elliptisch in $\bar{\Omega}$. Er bestaat dan een $\lambda_0 \geq 0$ zó dat voor alle $\lambda \geq \lambda_0$ de vergelijking

$$Lu + \lambda u = f$$

($f \in L^2(\Omega)$) een unieke oplossing u in $H_0^m(\Omega)$ heeft.

5.4. Regulariteitstheorie

In voorbeeld 5.5 zagen we reeds een voorbeeld van een regulariteitsstelling; deze had betrekking op de operator $K = 1-\Delta$.

Stelling 5.23. De operator K is een isomorfisme van $H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ op $H^m(\mathbb{R}^n)$ ($m = 0,1,2,\ldots$).

Bewijs. Daar $(K\,u)\hat{} = (1 + |\xi|^2)\,\hat{u}$, geldt

$$||K\,u||'_{m,\mathbb{R}^n} = ||u||'_{m+2,\mathbb{R}^n}$$

(voor de definitie van $||.||'_{m,\mathbb{R}^n}$, zie stelling 5.3).

Hieruit volgt dat

$$K : H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \to H^m(\mathbb{R}^n)$$

een isomorfisme is.

We tonen nu aan dat K een afbeelding op is. Zij $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$; dan geldt $(1 + |\xi|^2)^{m/2}\,\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definiëren we $\psi(\xi) = 1 + |\xi|^2)^{-1}\,\hat{f}(\xi)$, dan geldt $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Er bestaat dus een $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ met $\hat{u} = \psi$. Dan geldt

$$(1 + |\xi|^2)^{1+m/2}\,\hat{u} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

en dus

$$u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n).$$

We zien: $(1 - \Delta)u = f$. Dus K is een afbeelding van $H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ op $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Gevolg. Zij $f \in \mathcal{S}$. Als u een (distributionele) oplossing is van de vergelijking $K\,u = f$, dan geldt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, d.w.z. u is een klassieke oplossing.

<u>Bewijs</u>. Daar $f \in \mathcal{S} \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} H^m(\mathbb{R}^n)$, volgt uit stelling 5.23 dat $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ $(m = 0,1,2,\dots)$ Maar dan geldt: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wegens stelling 5.7.

Het is nu onze bedoeling om voor operatoren van orde 2, die gedefinieerd zijn in een begrensde open verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, analoge resultaten af te leiden.

Laat Ω een begrensde open verzameling in $\mathbb{R}^n$ zijn.
Voor $x \in \mathbb{R}^n$ en $h \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$x + h = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n).$$

Zij Ω' een open verzameling met $\Omega' \subset\subset \Omega$ en zij $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.
Voor $u \in L^2(\Omega)$ definiëren we $u^h \in L^2(\Omega')$ als

$$u^h(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)) \qquad (x \in \Omega').$$

Uit deze definitie volgt onmiddellijk

$$D^p u^h = (D^p u)^h$$

en

$$(u^h, \phi)_{0,\Omega} = -(u, \phi^{-h})_{0,\Omega} \qquad (\phi \in C_c^\infty(\Omega)).$$

<u>Stelling 5.24</u>. Laat $u \in L^2(\Omega)$ compacte drager in Ω bezitten. Dan geldt:
u^h convergeert in distributionele zin naar $D_1 u$ als $h \to 0$.
<u>Bewijs</u>. Voor $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt: $\langle u^h, \phi \rangle = -\langle u, \phi^{-h} \rangle$.
Men gaat gemakkelijk na dat

$$\phi^{-h} \to D_1\phi \quad \text{in } \mathcal{D}(\Omega), \text{ als } h \to 0.$$

Hieruit volgt dat voor alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

$$\langle u^h, \phi \rangle \to \langle D_1 u, \phi \rangle \text{ als } h \to 0.$$

<u>Stelling 5.25</u>. Laat $u \in H^1(\Omega)$ compacte drager in Ω bezitten. Dan geldt:
a) $||u^h||_{0,\Omega}$ is begrensd als $h \to 0$; er geldt nl. $||u^h||_{0,\Omega} \leq ||u||_{1,\Omega}$.
b) Als $||u^h||_{1,\Omega}$ begrensd is voor $h \to 0$, dan geldt $D_1 u \in H^1(\Omega)$.

Bewijs.

a) Voor $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

$$\phi^h(x) = \int_0^1 D_1\phi(x_1 + th, x_2, \ldots, x_n)\, dt.$$

Hieruit volgt (ongelijkheid van Cauchy - Schwarz)

$$||\phi^h||^2_{0,\Omega} \leq \int_\Omega \int_{[0,1]} |D_1\phi(x_1 + th, x_2, \ldots, x_n)|^2 \, dt\, dx$$

$$= \int_0^1 ||D_1\phi||^2_{0,\Omega}\, dt = ||D_1\phi||^2_{0,\Omega} \leq ||\phi||^2_{1,\Omega}\ .$$

Laat nu (ϕ_k) een rij in $C_c^\infty(\Omega)$ zijn met $\phi_k \to u$ in $H^1(\Omega)$. Uit

$$||\phi_k^h||_{0,\Omega} \leq ||\phi_k||_{1,\Omega}$$

volgt dan: $\quad ||u^h||_{0,\Omega} \leq ||u||_{1,\Omega}\ .$

b) Laat $||u^h||_{1,\Omega}$ begrensd zijn voor $h \to 0$. Op grond van stelling 4.17 bestaat er dan een rij $h_j \to 0$ zó dat (u^{h_j}) zwak convergeert in $H^1(\Omega)$, zeg naar $v \in H^1(\Omega)$. Maar dan convergeert (u^{h_j}) ook in distributionele zin naar v. Daar anderzijds de rij (u^{h_j}) in distributionele zin naar $D_1u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ convergeert (zie stelling 5.24) volgt

$$v = D_1u \in H^1(\Omega).$$

Vanaf nu zal de differentiaaloperator L steeds zijn de operator die gegeven is door (5.43). De coëfficienten van L zullen functies uit $C^\infty(\bar{\Omega})$ zijn. Verder veronderstellen we dat L <u>uniform sterk elliptisch</u> in $\bar{\Omega}$ is. De bilineaire vorm* B zal steeds zijn de vorm die gegeven is door (5.44).

De nu volgende stelling vormt de basis van de regulariteitstheorie voor de operator L. We hebben daarbij de volgende twee lemma's nodig.

<u>Lemma 1</u>. Laat A een differentiaaloperator van orde ≤ 1 zijn met coëfficienten uit $C^\infty(\bar{\Omega})$. Zij $u \in H^1(\Omega)$ en zij ζ een functie uit $C_c^\infty(\Omega)$. Dan is

$$(5.53) \qquad ||A(\zeta u)^h - (\zeta Au)^h||_{0,\Omega} ,$$

voor $|h|$ voldoende klein, begrensd als functie van h.

Bewijs. Het is voldoende de stelling te bewijzen voor het geval dat $A = a_1 D_1 + a_0$ waarbij $a_1, a_0 \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$. We merken allereerst op dat er een compacte verzameling $K \subset \Omega$ en een reële $\delta > 0$ bestaan zó dat

$$\text{supp } ((\zeta u)^h) \subset K \quad \text{als } 0 < |h| < \delta.$$

De uitdrukking (5.53) wordt gemajoreerd door

$$(5.54) \qquad ||a_1 D_1(\zeta u)^h - (a_1 \zeta D_1 u)^h||_{0,\Omega} + ||a_0(\zeta u)^h - (\zeta a_0 u)^h||_{0,\Omega} .$$

Nu geldt: $a_0(\zeta u)^h - (\zeta a_0 u)^h = -a_0^h (x) (\zeta u) (x + h)$.

Daar $a_0 \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, is de verzameling functies $\{a_0^h \mid 0 < |h| < \delta\}$ uniform begrensd op K. Hieruit volgt dat de tweede term in de uitdrukking (5.54) begrensd is voor $0 < |h| < \delta$.

De eerste term van (5.54) wordt als volgt behandeld.

Er geldt:

$$\begin{aligned} a_1 D_1 (\zeta u)^h &= a_1 (D_1(\zeta u))^h \\ &= a_1 (\zeta D_1 u)^h + \beta(h) \\ &= (a_1 \zeta D_1 u)^h + \alpha(h) + \beta(h), \end{aligned}$$

waarbij $\alpha(h) = a_1 (\zeta D_1 u)^h - (a_1 \zeta D_1 u)^h$ en

$$\beta(h) = a_1 (u D_1 \zeta)^h.$$

Uit hetgeen zojuist voor de tweede term van (5.54) bewezen is volgt dat $||\alpha(h)||_{0,\Omega}$ begrensd is als functie van $h (0 < |h| < \delta)$. Uit stelling 5.25 a) volgt verder dat

$$||\beta(h)||_{0,\Omega} \leq \text{const. } ||u D_1 \zeta||_{1,\Omega} .$$

Hieruit volgt het lemma.

Lemma 2. Zij $u \in H^1(\Omega)$ en zij ζ een reële functie uit $C_c^{\infty}(\Omega)$. Dan bestaat er een constante $c_1 \geq 0$ zó dat voor alle $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ en voor $|h|$ voldoende klein geldt

$$|B((\zeta u)^h,\phi)| \leq |B(u,\zeta\phi^{-h})| + c_1 \, ||\phi||_{1,\Omega} \, .$$

Bewijs. Uit lemma 1 volgt

$$|B((\zeta u)^h,\phi)| \leq | \sum_{i,j=1}^{n} ((a_{ij}\zeta D_j u)^h, D_i\phi)_{0,\Omega} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} ((a_i\zeta D_i u)^h,\phi)_{0,\Omega} + ((a_0\zeta u)^h,\phi)_{0,\Omega}| + \text{const.} \, ||\phi||_{1,\Omega}$$

(de optredende constante hangt niet af van h en ϕ, echter wel van u, de a_{ij}'s en ζ).
Nu geldt verder

$$((a_{ij}\zeta D_j u)^h, D_i\phi)_{0,\Omega} = -(a_{ij}D_j u, \; \zeta D_i\phi^{-h})_{0,\Omega}$$

$$= -(a_{ij}D_j u, \; D_i(\zeta\phi^{-h}))_{0,\Omega} + \gamma_{ij}(h),$$

waarbij

$$|\gamma_{ij}(h)| = |(a_{ij}D_j u, \; \phi^{-h}D_i\zeta)_{0,\Omega}| \leq \text{const.} \; ||\phi^{-h}||_{0,\Omega} \; ;$$

uit stelling 5.25 a) volgt dan

$$|\gamma_{ij}(h)| \leq \text{const.} \; ||\phi||_{1,\Omega} \, .$$

Verder zien we

$$((a_i\zeta D_i u)^h,\phi)_{0,\Omega} = (a_i D_i u, \; \zeta\phi^{-h})_{0,\Omega} \quad \text{en}$$

$$((a_0\zeta u)^h,\phi)_{0,\Omega} = (a_0 u, \; \zeta\phi^{-h})_{0,\Omega} \, .$$

Uit het bovenstaande volgt het lemma.

Definitie 5.6. $H^m_{loc}(\Omega)$ ($m = 0,1,2,\ldots$) zal zijn de ruimte van de distributies u op Ω waarvoor $\phi u \in H^m(\Omega)$ voor alle (reële) $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$. Men kan ook zeggen: $H^m_{loc}(\Omega)$ is de ruimte van de distributies u op Ω waarvoor u $u|_{\Omega'} \in H^m(\Omega')$ voor alle Ω' met $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Stelling 5.26. Zij $u \in H^1(\Omega)$. Als er een constante $c \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

(5.55) $$|B(u,\phi)| \leq c||\phi||_{0,\Omega} ,$$

dan geldt $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

<u>Opmerking</u>. Als $V = H_0^1(\Omega)$, dan betekent conditie (5.55) dat u tot D behoort (de notaties zijn hier als in sectie 5.3).

<u>Bewijs</u>. Zij ζ een reële functie uit $C_c^\infty(\Omega)$ met drager K. Zij steeds $0 < |h| < \text{dist}\ (K,\partial\Omega)$.

We stellen $v = \zeta u$.

Uit lemma 2 volgt dat er een constante $c_1 \geq 0$ bestaat zó dat voor alle h met $0 < |h| < \text{dist}\ (K,\partial\Omega)$ en voor alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ geldt

$$|B(v^h,\phi)| \leq |B(u,\zeta\phi^{-h})| + c_1||\phi||_{1,\Omega} .$$

Uit (5.55) volgt het bestaan van een constante $c_2 \geq 0$ zó dat

$$|B(u,\zeta\phi^{-h})| \leq c_2||\phi^{-h}||_{0,\Omega} .$$

Uit stelling 5.25 a) volgt dan

$$|B(v^h,\phi)| \leq c_3||\phi||_{1,\Omega} .$$

Laat nu (ϕ_k) een rij in $C_c^\infty(\Omega)$ zijn die in $H^1(\Omega)$ naar v^h convergeert (h vast). Dan is

$$|B(v^h,v^h)| = \lim_{k\to\infty} |B(v^h,\phi_k)| \leq c_3 \lim_{k\to\infty} ||\phi_k||_{1,\Omega} = c_3||v^h||_{1,\Omega} .$$

Daar L uniform elliptisch in $\bar\Omega$ verondersteld was, bestaat er op grond van stelling 5.21 een constante $c_4 \geq 0$ zó dat voor alle h geldt

$$||v^h||^2_{1,\Omega} \leq c_4\ (|B(v^h,v^h)| + ||v^h||^2_{0,\Omega}).$$

Daar $v \in H^1(\Omega)$ is $||v^k||_{0,\Omega}$ begrensd als $h \to 0$ (stelling 5.25 a)).

Er zijn dus constanten a en b ≥ 0 zó dat

$$||v^h||^2_{1,\Omega} \leq a||v^h||_{1,\Omega} + b$$

Hieruit volgt dat $||v^h||_{1,\Omega}$ begrensd is als $h \to 0$. En dus (stelling 5.25 b)) is $D_1 v \in H^1(\Omega)$.
Evenzo bewijst men: $D_j v \in H^1(\Omega)$ voor $j = 2,\dots,n$. Dit betekent: $v \in H^2(\Omega)$.
Hieruit volgt: $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

<u>Stelling 5.27</u>. Als $u \in H^1(\Omega)$ en $Lu \in H^m(\Omega)$ $(m \geq 0)$, dan geldt:

$$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega) \ .$$

<u>Bewijs</u>. Voor $m = 0$ is de bewering reeds bewezen in stelling 5.26 (want als $Lu \in H^0(\Omega)$, dan is voldaan aan (5.55)).
Stel dat reeds aangetoond is dat $u \in H^{m+1}(\Omega)$. Voor $|p| \leq m$ definiëren we dan

$$L_1 = L \circ D^p - D^p \circ L.$$

De orde van de operator L_1 is dan $\leq m+1$. Daaruit volgt dat $L_1 u \in H^0(\Omega)$.
Nu geldt:

$$L(D^p u) = D^p(Lu) - L_1 u \ .$$

Daar $Lu \in H^m(\Omega)$, is $D^p(Lu) \in H^0(\Omega)$. En dus $L(D^p u) \in H^0(\Omega)$. Daar voor $m = 0$ de stelling reeds bewezen is, volgt: $D^p u \in H^2_{loc}(\Omega)$.
Daar p, $|p| \leq m$, willekeurig was, geldt: $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$.

<u>Stelling 5.28</u>. (locale regulariteit van de oplossing). Zij $u \in H^1(\Omega)$ en zij $Lu \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Dan geldt:

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

<u>Bewijs</u>. Zij B een open bol met $B \subset\subset \Omega$; en zij Ω' een open verzameling met $B \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Dan geldt: $Lu \in H^m(\Omega')$ voor $m = 0,1,2,\dots$. Uit stelling 5.27 volgt dan : $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega')$ voor $m = 0,1,2,\dots$. Hieruit volgt:

$$u \in \bigcap_{m=0}^{\infty} H^m(B).$$

Uit het gevolg bij stelling 5.7 volgt nu de stelling.

<u>Stelling 5.29</u>. Zij $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$. Als u een functie op Ω is met $u\big|_{\Omega_j} \in H^m(\Omega_j \cap \Omega)$ $(j = 1,\dots,k)$, dan geldt: $u \in H^m(\Omega)$.

Bewijs. Deze stelling volgt uit: $D^p(u\,|_{\Omega_j}) = (D^p u)\,|_{\Omega_j}$.

Stelling 5.30. Zij Ω regulier. Als $u \in H^1(\Omega)$ en als $Lu \in H^m(\Omega)$, dan geldt:

$$u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Bewijs. We weten reeds (stelling 5.27) dat $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$. Dus als $O \subset\subset \Omega$, dan geldt: $u \in H^{m+2}(O)$.

Zij nu $x_0 \in \partial\Omega$ en zij (O,κ) een lokale kaart ter plaatse x_0. We beschouwen de vergelijking $Lu = f$ op $O \cap \Omega$. Met behulp van de lokale kaart (O,κ) kunnen we de vergelijking

$$Lu = f \text{ op } O$$

transformeren in de vergelijking

$$Mv = g \text{ op } B^n_+ .$$

Onder deze transformatie blijft de uniforme sterke ellipticiteit van de differentiaaloperator behouden; dus M is uniform sterk elliptisch op B^n_+. Laat $\zeta \in C^\infty_c(\Omega)$. Dan is $(\zeta v)\,(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i + h, x_{i+1},\ldots,x_n)$, $|h|$ voldoende klein, slechts goed gedefinieerd voor $i = 1,\ldots,n-1$. Op dezelfde manier als in stelling 5.26 bewijst men dat:

$$D_i(\zeta v) \in H^1(B^n_+) \text{ voor } i = 1,\ldots,n-1 .$$

Hieruit volgt: $D_i v \in H^1(B^n_+(r))$ voor $i = 1,\ldots,n-1$ (hierbij is $0 < r < 1$, terwijl $B^n_+(r) = \{x \mid x \in B^n_+,\ |x| < r\}$). En dus

(5.56) $$D_i D_j v \in H^0(B^n_+(r)) \text{ als } (i,j) \neq (n,n).$$

Zij

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, D_i\, D_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\, D_i + b_0.$$

Daar M uniform sterk elliptisch is, is $\frac{1}{b_{nn}}$ begrensd is op B^n_+. Dus

$$D^2_n v = \frac{1}{b_{nn}}\ \Big(g - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, D_i\, D_j\, v - \sum_{i=1}^{n} b_i\, D_i\, u - b_0\, u\Big).$$

Daar alle termen van het rechterlid tot $H^0(B^n_+(r))$ behoren, volgt:

(5.57) $\quad D_n^2 v \in H^0(B_+^n(r))$.

Uit (5.56) en (5.57) volgt dat $v \in H^2(B_+^n(r))$. Op dezelfde wijze als dit in stelling 5.27 gebeurd is, bewijst men verder dat $v \in H^{m+2}(B_+^n(r))$. We concluderen: $u \in H^{m+2}(0' \cap \Omega)$ waarbij $0'$ $(= \kappa^{-1}(B_+^n(r)))$ een zekere omgeving van x_0 is. Passen we nu stelling 5.29 toe dan vinden we dat $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Stelling 5.31. (globale regulariteit van de oplossing). Zij Ω regulier. Laat $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ en laat $u \in H^1(\Omega)$ een oplossing zijn van de vergelijking $Lu = f$. Dan geldt: $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit stelling 5.30 en het gevolg bij stelling 5.7.

Gevolg. Zij Ω regulier. Laat $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ en laat $u \in H_0^1(\Omega)$ oplossing zijn van de vergelijking $Lu = f$. Dan is u een klassieke oplossing van het Dirichlet-probleem:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } \Omega \\ u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Bewijs. Volgt uit stelling 5.31 en stelling 5.10.

Literatuur

[1] Agmon, S. Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand, Princeton etc., 1965.

[2] Bers, L., John, F. and Schechter, M. Partial Differential Equations, Lectures in Mathematics Vol. III. Interscience, New York etc., 1964.

[3] Eells, J. Elliptic Operators on Manifolds. Mathematisch Instituut Universiteit van Amsterdam, 1966.

[4] Fichera, G. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics No. 8, Springer, Berlin etc., 1965.

[5] Hörmander, L. Linear partial differential operators. Springer, Berlin etc., 1963.

[6] Lions, J.L. Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Les Presses de l'Université de Montreal, 1967.

[7] Lions, J.L. Equations differentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer, Berlin etc., 1961.

[8] Lions J.L. et Magenes, E. Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.

[9] Narasimhan, R. Analysis on real and complex manifolds. Masson & Cie., Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.

[10] Rudin, W. Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, etc., 1966.

[11] Smirnov, W.I. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V. VEB, Berlin, 1962.

[12] Trèves, F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York, 1967.

[13] Wloka, J. Grundräume und verallgemeinerte Funktionen, Lecture Notes in Mathematics No. 82. Springer, Berlin etc., 1969.