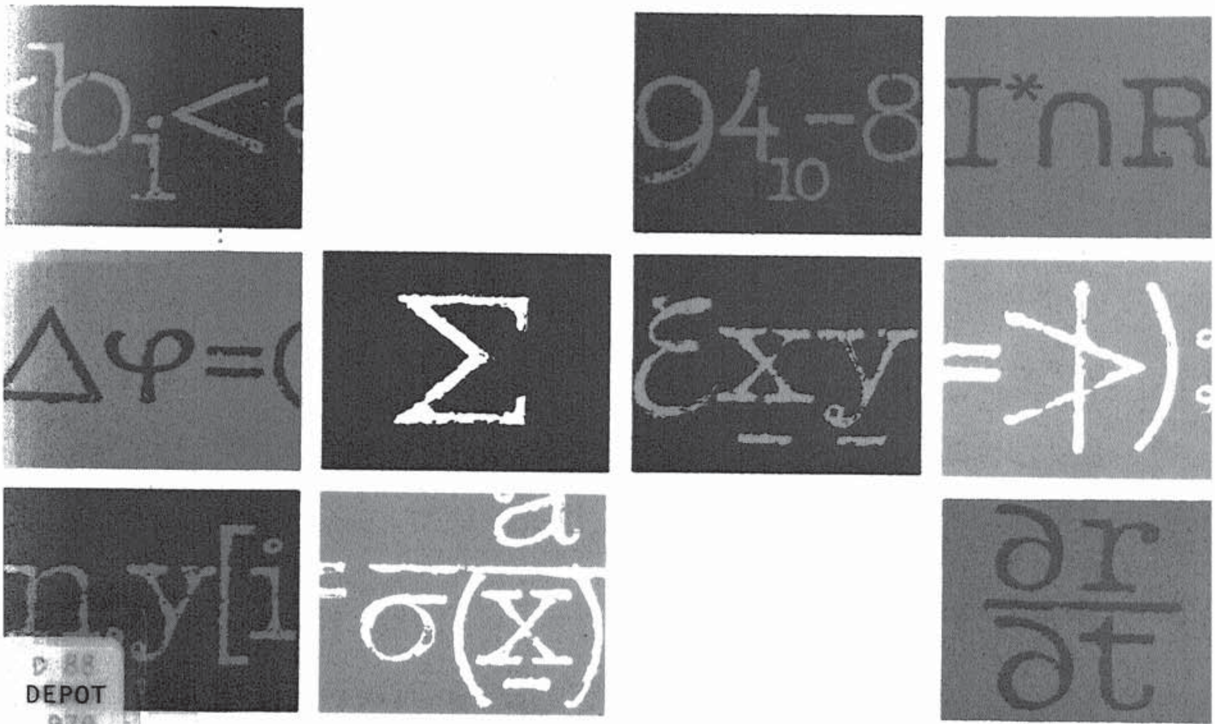
REPRESENTATIES VAN GROEPEN

H. A. LAUWERIER



MC SYLLABUS 4

MC SYLLABUS

4

REPRESENTATIES VAN GROEPEN

DOOR

H.A. LAUWERIER

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

1968

Inhoud

Voorwoord

In dit college worden in hoofdzaak de representaties van eindige groepen en van de draaiingsgroep SO_3 behandeld. Als extra zijn nog twee hoofdstukken over representaties van de vierdimensionale draaiingsgroep en de Lorentz-groep toegevoegd waarin op overigens beknopte en schetsmatige wijze de voornaamste bijzonderheden zijn vermeld. Als voorkennis wordt slechts enige bekendheid met de grondslagen van de groepentheorie en vertrouwdheid met de lineaire algebra verlangd. De eerste twee hoofdstukken zijn dan ook slechts bedoeld ter opfrissing en samenvatting van de benodigde kennis.

Aanbevolen literatuur

1. I.M. Gel'fand, R.A. Minlos, Z. Ya. Shapiro.
Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications.
Pergamon Press, 1963.

2. M. Hamermesh, Group Theory and its Applications to Physical Problems.
Pergamon Press, 1962.

3. G.J. Ljubarski, Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik.
Berlin, 1962.

4. M.A. Neumark, Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe.
Berlin, 1963.

5. E.P. Wigner, Group theory and its applications to the quantum mechanics of atomic spectra.
Acad. Press, 1959.

1. Matrices

We nemen aan dat de lezer vertrouwd is met de beginselen van de theorie van de eindig-dimensionale lineaire vectorruimten en van de matrixalgebra. We beschouwen hier, tenzij anders vermeld, uitsluitend vierkante matrices. De belangrijkste eigenschappen vatten we in deze paragraaf beknopt samen. Een matrix duiden we aan met de notatie A of (a_{ij}). Vermenigvuldiging van matrices $A(a_{ij})$ en $B(b_{ij})$ wordt beschreven door

$$AB\ (a_{i\alpha}\ b_{\alpha j}),$$

waarbij we de afspraak maken dat over een herhaalde index, doorgaans aangegeven met een griekse letter, gesommeerd wordt.
De determinant van een vierkante matrix A duiden we in niet-uitgeschreven notatie aan met det A of $\det(a_{ij})$. In dit verband vermelden we de volgende elementaire en veel gebruikte eigenschap

$$\det AB = \det A \cdot \det B. \tag{1.1}$$

De eenheidsmatrix schrijven we als I of (δ_{ij}). Behoort bij een matrix A een andere matrix A^{-1} zodanig dat $AA^{-1} = I$, dan heet A inverteerbaar en A^{-1} de inverse van A. De inverse van A^{-1} is dan weer A. Zoals bekend is het voor de inverteerbaarheid van A een nodige en voldoende voorwaarde dat $\det A \neq 0$. Een niet-inverteerbare matrix, dus een waarvan de determinant nul is, heet ook singulier, en een inverteerbare matrix vervolgens niet-singulier.
Een multiplicatieve groep van matrices waarvan I de eenheid is bestaat derhalve geheel uit niet-singuliere matrices.

Voorbeeld 1.1
Uit de betrekking

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

volgt dat de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

een commutatieve groep vormen.

Is a reëel dan is deze groep isomorf met de optelgroep van de reële getallen.

Voorbeeld 1.2

De matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ -s & -c \end{pmatrix},$$

waarbij $c = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ en $s = \sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

vormen een groep welke isomorf is met de permutatiegroep P_3 ofwel de diëdergroep D_3.

Onder het spoor (Eng. trace, Du. Spur) van een matrix $A(a_{ij})$ verstaan we de som sp A van de diagonaalelementen

$$\text{sp } A \overset{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{1.2}$$

Voor het spoor van het product AB kunnen we schrijven

$$\text{sp } AB = a_{\alpha\beta}\, b_{\beta\alpha},$$

waaruit volgt dat AB en BA hetzelfde spoor bezitten.

Een vierkante matrix A kan men interpreteren als een lineaire operator in een lineaire vectorruimte waarvan de dimensie gelijk aan de orde van A is. Door $A(a_{ij})$ wordt aan een vector $\vec{x}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een vector $\vec{y}\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ toegevoegd volgens

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Is A als matrix niet-singulier dan is A als operator inverteerbaar en is A^{-1} de matrix van de inverse operator, die dan zonder bezwaar met dezelfde notatie aangegeven kan worden. Is A als matrix singulier dan beeldt de operator A de lineaire vectorruimte af op een ruimte van lagere dimensie, een projectie dus.

Gaan we omgekeerd uit van een lineaire vectorruimte waarin A een lineaire operator is, dan kunnen we de matrixvorm van A afleiden door na te gaan waarin de basisvectoren (1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0) enz. overgevoerd worden. Richten we de notatie zodanig in dat deze vectoren overgaan in $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$ enz. dan stemt de operatorbewerking $\vec{y} = A\vec{x}$ precies met (1.3) overeen, zodat (a_{ij}) een aanvaardbare matrixnotatie van de operator A is. We kunnen evenwel in de lineaire vectorruimte zonder bezwaar ook een andere basis kiezen, d.w.z. andere coördinaten invoeren. Dit brengt met zich mede dat een vector welke oorspronkelijk de componenten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bezat in het nieuwe stelsel componenten $(t_{1\alpha}x_\alpha, t_{2\alpha}x_\alpha, \ldots, t_{n\alpha}x_\alpha)$ verkrijgt, waarbij (t_{ij}) een niet-singuliere matrix is. Dit is wederom een lineaire transformatie welke symbolisch geschreven kan worden als $\vec{x} = T\vec{x}'$. De bovenstaande operatorbewerking wordt in de nieuwe coördinaten derhalve beschreven door $T\vec{y}' = AT\vec{x}'$. Hieruit volgt door toepassing van de inverse transformatie T^{-1} dat $\vec{y} = A\vec{x}$ correspondeert met $\vec{y}' = T^{-1}AT\vec{x}'$.

T.o.v. de nieuwe geaccentueerde basis gaat de matrix A dus over in de matrix $T^{-1}AT$. Kiezen we voor T alle inverteerbare matrices dan wordt een familie van matrices gevormd welke aequivalent of ook wel onderling gelijkvormig heten. Elk lid van deze familie kan gelden als representant van de lineaire operator waarvan we uitgegaan zijn.

Is A een willekeurige matrix en T een niet-singuliere matrix dan zeggen we dat T een gelijkvormigheidstransformatie bewerkstelligt volgens het schema

(1.4) $$A \to T^{-1}AT.$$

Het is duidelijk dat een dergelijke transformatie de eenheidsmatrix invariant laat en verwisselbaar is met de productvorming, d.w.z.

$$T^{-1}AT \cdot T^{-1}BT = T^{-1}ABT.$$

Voorts hebben gelijkvormige matrices hetzelfde spoor.

Aan een matrix $A(a_{ij})$ kunnen we op de volgende wijze andere matrices toevoegen.

De getransponeerde A' of A^T met componenten a_{ji}.

De complex toegevoegde $\bar{A}$ met componenten $\bar{a}_{ij}$.

De Hermitisch toegevoegde A^+ met componenten $\bar{a}_{ji}$.

In sommige gevallen is de nieuwe matrix gelijk aan de oorspronkelijke of diens tegengestelde.

Een matrix S heet symmetrisch als $S = S'$.

Een matrix S heet anti-symmetrisch als $S = - S'$.

Een matrix H heet Hermitisch of zelf-geadjungeerd als $H = H^+$.

Een matrix H heet anti-Hermitisch als $H = - H^+$.

Voor reële matrices is Hermitisch niets anders dan symmetrisch.
Voor willekeurige matrices gelden de volgende eenvoudig te verifiëren rekenregels

(1.5) $$(AB)' = B'A', \quad \overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}, \quad (AB)^+ = B^+A^+.$$

Het gebruik van matrices voor het beschrijven van lineaire operatoren in een van een metriek voorziene ruimte leidt tot het begrip unitair als complexe generalisatie van orthogonaal voor een reële ruimte.

Een matrix U heet unitair als $U^+ = U^{-1}$.

Een matrix R heet orthogonaal als $R' = R^{-1}$.

Voeren we in een vectorruimte op de gebruikelijke wijze de Euclidische metriek in door het inwendig of scalair product van de vectoren $\vec{x}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y}\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ te definiëren als

(1.6) $$(\vec{x},\vec{y}) = \bar{x}_1y_1 + \bar{x}_2y_2 + \ldots + \bar{x}_ny_n,$$

dan geldt voor een willekeurige matrix A de relatie

(1.7) $$(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},A^+\vec{y}).$$

De door A^+ beschreven operator heet wel de geadjungeerde (Eng. adjoint) van de operator A in overeenstemming met de benamingen in de functionaalanalyse.
Uit (1.7) en de definitie van unitair volgt dat voor een unitaire operator U de volgende relatie geldt

$$(U\vec{x}, U\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{1.8}$$

voor willekeurige $\vec{x}$ en $\vec{y}$. Omgekeerd geldt voor een operator U die hieraan voldoet de eigenschap van unitariteit.

Voorbeeld 1.3

Een algemene gelijkvormigheidstransformatie laat symmetrie niet invariant. Neemt men bijv.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dan is

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.4

De unitariteit van de matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ impliceert de volgende betrekkingen

$$a\bar{a} + b\bar{b} = c\bar{c} + d\bar{d} = 1, \; a\bar{c} + b\bar{d} = 0.$$

In het algemeen kan een dergelijke unitaire matrix geschreven worden als $e^{i\phi}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \pm\beta & \mp\alpha \end{pmatrix}$ met $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. In het reële geval kunnen we dan $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\phi = 0$ stellen hetgeen meetkundig als een rotatie of spiegeling geïnterpreteerd kan worden.

Gelijkvormige matrices A en $T^{-1}AT$ hebben volgens stelling 1.1 dezelfde determinant-waarde. Passen we dit toe op de matrix $A - \lambda I$, waarbij λ een willekeurig complex getal is, dan volgt hieruit de invariantie van $\det(A - \lambda I)$, d.i. een polynoom van de n^e graad in λ.

De wortels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ van de zogenaamde seculiere vergelijking

(1.9) $$\det (A - \lambda I) = 0$$

zijn dus invarianten voor een gelijkvormigheidstransformatie. De som van de wortels levert het spoor waarvan de invariantie reeds eerder was vastgesteld. Het product van de wortels geeft de invariante determinant-waarde. Interpreteren we A als een lineaire operator in een vectorruimte dan verschijnt de seculiere vergelijking bij het onderzoek naar de eigenvectoren $\vec{e}$ en eigenwaarden λ van A. Opdat

(1.10) $$A\vec{e} = \lambda\vec{e}$$

is nodig dat det $(A - \lambda I) = 0$. De bij (1.10) behorende eigenwaarden zijn dus de wortels van de seculiere vergelijking.

Voor het geval een matrix van de n^e orde juist n verschillende eigenwaarden bezit kan men de bijbehorende eigenvectoren tot basisvectoren van een nieuw coördinatenstelsel kiezen. In deze nieuwe coördinaten wordt A dan beschreven door de diagonaalmatrix

(1.11) $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Men kan dit resultaat ook a.v. uitdrukken.
Voor een gegeven matrix A met verschillende eigenwaarden bestaat er een gelijkvormigheidstransformatie T zodanig, dat $T^{-1}AT$ de diagonaalvorm (1.11) aanneemt.
Indien er meervoudige eigenwaarden zijn behoeft deze bewering niet meer waar te zijn.

Voorbeeld 1.5

Het lukt niet de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in de vorm (1.11) te brengen. Er is de tweevoudige eigenwaarde $\lambda = 1$. De gelijkvormigheidstransformatie zou

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

moeten zijn. Hieruit volgt evenwel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = T\ I = I\ T$$

hetgeen voor een niet-singuliere matrix T onmogelijk is.

Volgens een fundamentele stelling van Jordan kan men een matrix met meervoudige eigenwaarden door een gelijkvormigheidstransformatie steeds herleiden tot een zogenaamde normaalvorm welke gekenmerkt is door het langs de hoofddiagonaal optreden van enkelvoudige of samengestelde blokken van het type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{enz.}$$

Deze stelling behoeft overigens hier niet toegepast te worden omdat voor de unitaire en voor Hermitische matrices, waar we doorgaans mee werken, de zaken eenvoudiger liggen.

Men kan gemakkelijk uit de definities afleiden dat een Hermitische matrix slechts reële eigenwaarden bezit en dat de eigenwaarden van een unitaire matrix unimodulair zijn, d.w.z. op de eenheidscirkel liggen. Er geldt nu de volgende belangrijke stelling welke bekend staat onder de naam van de hoofdassentransformatie.

Stelling 1.1

Een unitaire matrix en een Hermitische matrix kunnen in de diagonaalvorm (1.11) gebracht worden door een gelijkvormigheidstransformatie met behulp van een unitaire matrix.

Bewijs

We geven het bewijs alleen voor het geval van een Hermitische matrix H. Dat van een unitaire matrix verloopt geheel analoog. We maken gebruik van de meetkundige interpretatie in een Euclidische vectorruimte met de metriek (1.6). Een gelijkvormigheidstransformatie met een unitaire matrix kunnen we hierbij interpreteren als een draaiing (evt. spiegeling) van het stelsel onderling orthogonale basisvectoren. De overgang van de matrix H tot de diagonaalvorm (1.11) voeren we stapsgewijze uit. Er is zeker een eigenvector $\vec{e}$. De operator H laat dan de hieraan orthogonaal geconjugeerde ruimte F invariant. Immers uit $(\vec{f},\vec{e}) = 0$, $\vec{f} \in F$ volgt $(H\vec{f},\vec{e}) = (\vec{f},H\vec{e}) = \lambda(\vec{f},\vec{e}) = 0$. We kunnen $\vec{e}$ met n-1 uit F gekozen vectoren tot een nieuwe orthogonale basis van eenheidsvectoren aanvullen. De transformatie naar de nieuwe basis betekent een unitaire gelijkvormigheidstransformatie van H. We herhalen het gehele proces in F. Hierin bevindt zich stellig een eigenvector welke op analoge wijze afgesplitst wordt, enz. Na n dergelijke stappen is een stelsel van n onderling orthogonale eigenvectoren van H verkregen waarvan de eigenwaarden al of niet kunnen verschillen. De overgang naar deze nieuwe basis, hier het resultaat van een serie unitaire transformaties, is een unitaire gelijkvormigheidstransformatie U. We kunnen dus schrijven

$$H = U^{-1}\Lambda U,$$

waarbij Λ de matrix (1.11) is.

2. Eindige groepen

We nemen aan dat de lezer bekend is met de belangrijkste begrippen en eigenschappen van eindige groepen en derhalve vertrouwd is met o.a. de begrippen ondergroep, normaaldeler, nevenklasse, factorgroep, isomorfie en homomorfie.

Voorbeeld 2.1

De permutatiegroep P_4 bestaat uit de 24 elementen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ waarbij de a's een permutatie van de getallen 1, 2, 3, 4 vormen. De 12 even permutaties vormen de alternerende groep A_4 welke een normaaldeler van P_4 is. De factorgroep is C_2, de cyclische groep van twee elementen. De elementen van A_4 kunnen in cykelnotatie geschreven worden als

(1)	(12)(34)	(234)	(432)
	(13)(24)	(143)	(341)
	(14)(23)	(412)	(214)
		(321)	(123)

De elementen van A_4 kunnen geïnterpreteerd worden als ruimtelijke draaiingen welke een regelmatig viervlak met zich zelf tot dekking brengen. Om deze reden heet A_4 ook de tetraedergroep.

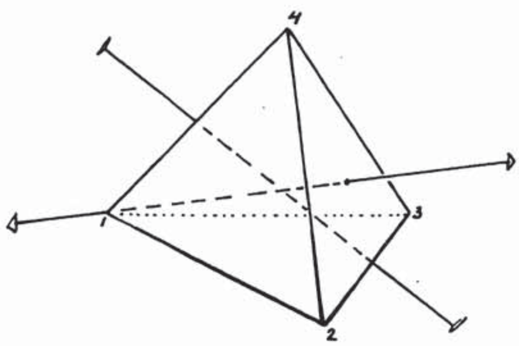


fig. 2.1

Twee elementen a en b van een groep G welke verbonden zijn door de betrekking $ax = xb$, $x \in G$ heten geconjugeerd. Men verifiëert gemakkelijk dat deze relatie wederkerig is, dat elk element aan zichzelf geconjugeerd is, en dat de relatie transitief is. De elementen van G welke aan het element a geconjugeerd zijn, d.w.z. alle elementen van het type $x^{-1}ax$ vormen een zogenaamde <u>klasse</u>. Alle elementen van een klasse hebben dezelfde orde. Is namelijk $a^k = e$ dan is ook $(x^{-1}ax)^k = e$ en omgekeerd. Een groep kan gesplitst worden in klassen. Hierbij vormt de eenheid een klasse op zich zelf.

<u>Voorbeeld 2.2</u>

De tetraedergroep valt uiteen in vier klassen zoals aangegeven in bovenstaand voorbeeld door de verdeling van de elementen over vier kolommen. Een aequivalente meer abstracte notatie is a.v.

e	a	r	r^2
	b	$ar = rb$	$ar^2 = r^2c$
	c	$br = rc$	$br^2 = r^2a$
		$cr = ra$	$cr^2 = r^2b$

waarbij $a^2 = b^2 = c^2 = e$ en $r^3 = e$.

Aangezien

$$(x^{-1}ax)(x^{-1}bx) = x^{-1}(ab)x$$

zijn conjugatie met een vast element x en productvorming verwisselbare operaties. Hieruit volgt dat wanneer a een ondergroep van G doorloopt door $x^{-1}ax$ eveneens een ondergroep wordt doorlopen. Het ligt voor de hand deze ondergroepen eveneens geconjugeerd te noemen. Een normaaldeler is gekenmerkt door de bijzonderheid dat conjugatie steeds dezelfde ondergroep oplevert, symbolisch $xN = Nx$.

Een commutatieve groep, ook wel Abelse groep genaamd, is weinig interessant. Conjugatie levert niets nieuws. Er zijn evenveel klassen als elementen, d.w.z. de klassen bestaan telkens uit één element.

Bij een in het algemeen niet-commutatieve groep vormen de elementen g welke met een vast element a verwisselbaar zijn, d.w.z. waarvoor

$ga = ag$, een ondergroep van G welke de normalisator N_a van a heet. We beschouwen nu de klasse gevormd door a met zijn geconjugeerden $g^{-1}ag$. Doorloopt g alle elementen van G dan doorloopt $g^{-1}ag$ de elementen van de klasse. Er kunnen meerdere g's zijn die hetzelfde element $g^{-1}ag = b$ opleveren. De multipliciteit is voor elk element gelijk en wel gelijk aan de orde van N_a. Wordt namelijk het aan a geconjugeerde element b zowel opgeleverd met $g = x$ als met $g = y$, d.w.z. geldt $x^{-1}ax = y^{-1}ay$, dan volgt hieruit dat yx^{-1} verwisselbaar met a is en derhalve tot N_a behoort. De verzameling van de elementen x, y met deze eigenschap is dus een nevenklasse van N_a. De elementen van de door a bepaalde klasse corresponderen dus met N_a en zijn nevenklassen. We kunnen hieruit de interessante conclusie trekken dat het aantal elementen van een klasse een deler van n is.

Voorbeeld 2.3

De diëdergroep D_4 bestaat uit de draaiingen en spiegelingen welke een vierkant met zich zelf tot dekking brengen. De groep valt uiteen in de volgende vijf klassen

(1)	(1234)	(13)(24)	(13)	(12)(34)
	(4321)		(24)	(14)(23).

Men kan de elementen op aequivalente wijze aanduiden met

1	i	i^2	s	si
	i^3		si^2	si^3,

met de regel $is = si^3$, $i^4 = s^2 = 1$.

De normalisator van i is de cyclische groep C_4 bestaande uit de elementen $1, i, i^2, i^3$. De normalisator van s is de diëdergroep $D_2 =$ $= C_2 \times C_2$ gevormd door $1, s, i^2, si^2$.

Aan een aantal voor de toepassingen belangrijke typen zal hieronder een korte bespreking gewijd worden.

1. De cyclische groep van de orde n. Notatie C_n. De elementen kunnen we schrijven als $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ waarbij $a^n \equiv 1$. Een meetkundig beeld van C_n wordt gevormd door de draaiingen, over de hoeken $2k\pi/n$

met $k = 0, 1, \ldots, n-1$, welke een vlakke regelmatige n-hoek met zichzelf tot dekking brengen.

2. De diëdergroep van de orde 2n. Notatie D_n. De elementen kunnen we schrijven als a^k, sa^k met $k = 0, 1, \ldots, n-1$ waarbij $a^n \equiv 1$, $s^2 \equiv 1$ en $sa = a^{-1}s$. Meetkundig ontstaat deze groep door aan de boven beschreven rotaties van een vlakke regelmatige n-hoek spiegelingen om de n symmetrieassen toe te voegen.

3. De permutatiegroep bestaande uit de n! permutaties van n elementen. Notatie P_n of S_n (Eng. permutation group of symmetric group).

4. De alternerende groep bestaande uit de $\frac{1}{2}$ n! even permutaties van P_n. Notatie A_n.

De groepen van de laagste orde kunnen we a.v. aftellen:

orde 1 , de eenheid.

orde 2 , C_2.

orde 3 , C_3 en A_3 welke samenvallen.

orde 4 , C_4;
D_2 (ook wel genaamd de viergroep van Klein).

orde 5 , C_5.

orde 6 , C_6,
D_3 en P_3 welke samenvallen.

orde 7 , C_7.

Hierna komen er vijf groepen van de orde 8. De groepen van dit lijstje zijn alle commutatief met uitzondering van D_3. Men kan gemakkelijk grotere groepen synthetiseren door het direct product van kleinere groepen te nemen. Als voorbeeld kan men de groep gevormd door de 2^m handelingen bij een schakelbord van m schakelaars opvatten als het direct product $C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2$. De groep $C_2 \times C_2$ is weer de viergroep van Klein.

De ruimtelijke draaiingen welke een der regelmatige lichamen met zichzelf tot dekking brengen leveren drie groepen op. Bij de tetraeder behoort de uit 12 elementen bestaande tetraedergroep. Bij kubus en oktaeder behoort de uit 24 elementen bestaande oktaedergroep. Bij dodekaeder en ikosaeder behoort de uit 60 elementen bestaande ikosaedergroep.

De tetraedergroep is isomorf met A_4. Naast de identiteit zijn er 2×4 draaiingen om de 4 drietallige symmetrieassen en 1×3 draaiingen om de 3 tweetallige symmetrieassen. De groep bevat vier klassen.
De oktaedergroep is isomorf met P_4. Naast de identiteit zijn er 3×3 draaiingen om de 3 viertallige assen, 2×4 draaiingen om de 4 drietallige assen en 1×6 draaiingen om de 6 tweetallige assen. Er zijn vijf klassen.
De ikosaedergroep is isomorf met A_5. Naast de identiteit zijn er 4×6 draaiingen om de 6 vijftallige assen, 2×10 draaiingen om de 10 drietallige assen en 1×15 draaiingen om de 15 tweetallige assen. Er zijn vijf klassen.

orde	notatie	aantal elementen van de orde											aantal klassen
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	C_2	1											2
3	C_3, A_3	.	2										3
4	C_4	1	.	2									4
	D_2	3											4
5	C_5	.	.	.	4								5
6	C_6	1	2	.	.	2							6
	D_3, P_3	3	2										3
7	C_7	.	.	.	.	.	6						7
8	C_8	1	.	2	.	.	.	4					8
	$C_2 \times C_2 \times C_2$	7											8
	$C_2 \times C_4$	3	.	4									8
	D_4	5	.	2									5
	Q_4	1	.	6									5
9	C_9	.	2	.	.	.	.	.	6				9
	$C_3 \times C_3$	.	8										9
10	C_{10}	1	.	.	4	.	.	.	.	4			10
	D_5	5	.	.	4								4
11	C_{11}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10		11
12	C_{12}	1	2	2	.	2	.	.	.	.	.	4	12
	$C_2 \times C_6$	3	2	.	.	6							12
	D_6	7	2	.	.	2							6
	Q_6	1	2	6	.	2							6
	A_4	3	8										4

3. Representaties van eindige groepen

Onder een representatie van een groep G verstaan we een homomorfe of isomorfe afbeelding M van G op een multiplicatieve groep van niet-singuliere matrices van m bij m. Deze matrices kunnen we opvatten als operatoren in een lineaire m-dimensionale vectorruimte R_m. Het getal m noemen we daarom de dimensie van de representatie. De homomorfie betekent dat voor willekeurige elementen $g_1, g_2 \in G$ altijd geldt

$$M(g_1 \cdot g_2) = M(g_1) \cdot M(g_2). \tag{3.1}$$

Het is zonder meer duidelijk dat het eenheidselement van G altijd op de eenheidsmatrix afgebeeld wordt. Is T een willekeurige inverteerbare m bij m matrix dan is met een gegeven m-dimensionale representatie met matrices M(g) ook $T^{-1}M(g)T$ een representatie. Dergelijke representaties heten aequivalent. In feite betekent deze conjugatie dat door de matrix T in R_m een nieuw stelsel basisvectoren is bepaald waardoor de matrices M(g) een gelijkvormigheidstransformatie ondergaan.

Het hoofdprobleem van de theorie van de representaties is de mogelijke, onderling niet aequivalente, representaties van een gegeven groep te klassificeren. Het is voldoende hierbij alleen die representaties te beschouwen welke niet uit eenvoudige representaties samengesteld kunnen worden. Zijn namelijk M_1 en M_2 twee representaties resp. van de dimensie m_1 en m_2 dan vormen de matrices

$$M(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & 0 \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

een representatie van de dimensie m_1+m_2, van welk feit men zich zonder moeite kan overtuigen. De nieuwe representatie noemen we de directe som

$$M = M_1 + M_2, \tag{3.3}$$

van M_1 en M_2.

Omgekeerd heet een representatie welke aequivalent is aan een representatie van het type (3.1), (3.2) reducibel. Een representatie welke niet in representaties van lagere dimensie gereduceerd kan worden heet irreducibel. Het hoofdprobleem van de representatietheorie kan dus nader gepreciseerd worden als het onderzoek naar de mogelijke irreducibele representaties van een gegeven groep. Vooruitlopend op een later te verkrijgen resultaat kan alvast medegedeeld worden dat het aantal irreducibele representaties van een eindige groep G precies gelijk is aan het aantal klassen van G. Een ander interessant resultaat is dat voor een commutatieve groep de irreducibele representaties de dimensie 1 hebben, d.w.z. van scalaire aard zijn.

Voorbeeld 3.1

De elementen van de permutatiegroep P_3 of diëdergroep D_3 kunnen we op de volgende wijzen representeren

	A	B	C
(1)	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(12)	1	-1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(23)	1	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
(31)	1	-1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(123)	1	1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{llll} & \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} \\ (321) & 1 & 1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De representatie A waarbij alle elementen op de eenheid worden afgebeeld is wel heel triviaal maar moet natuurlijk meegeteld worden. De representatie B. is een homomorfisme van P_3 op C_2. De kern van het homomorfisme wordt gevormd door de even permutaties welke tezamen de groep C_3 vormen. De representatie C beeldt de permutaties van drie dingen af op overeenkomstige transformaties van vectoren (x_1,x_2,x_3) in een R_3. Deze representatie is een isomorfisme. Het zal later blijken dat C reducibel is en gesplitst kan worden in representaties van de dimensies 1 en 2.

Bij de reductie van een matrixrepresentatie M van de dimensie m kan men met voordeel gebruik maken van meetkundige beschouwingen. Ziet men M als een afbeelding op lineaire transformaties in een R_m dan betekent reduceerbaarheid volgens (3.1) dat R_m uiteenvalt in twee deelruimten R_{m_1} en R_{m_2} $(m_1 + m_2 = m)$ waarbij de lineaire transformaties M(g) zich splitsen in lineaire transformaties $M_1(g)$ in de invariante lineaire deelruimte R_{m_1} en lineaire transformaties $M_2(g)$ in de invariante lineaire deelruimte R_{m_2}. We komen dus tot het volgende criterium voor irreducibiliteit:

Een representatie waarbij er geen (echte) invariante deelruimte bestaat, is irreducibel.

Voorbeeld 3.2

De matrices C van voorbeeld 3.1 kunnen we interpreteren als rotaties en spiegelingen in een R_3 met Cartesische coördinaten (x_1,x_2,x_3) waarbij de hoekpunten van de driehoek (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) verwisseld worden. Het vlak van de driehoek is invariant zodat de R_3 uiteenvalt in een invariante R_2 gevormd door het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en een invariante R_1, de normaal $x_1 = x_2 = x_3$ op het genoemde vlak. Aangezien de groep P_3 drie klassen heeft kunnen we naast A en B nog slechts één

irreducibele representatie verwachten. Deze wordt nu blijkbaar gevormd door de tweedimensionale rotaties en spiegelingen in de invariante R_2 waarbij een gelijkzijdige driehoek in zichzelf wordt overgevoerd. Zonder de gelijkvormigheidstransformatie waartoe C in het type (3.2) gebracht kan worden expliciet uit te voeren kan de gezochte representatie meteen opgeschreven worden. We vinden aldus de matrices van voorbeeld (1.2) terug. We merken hierbij op dat deze representatie unitair is, d.w.z. uit unitaire matrices bestaat.
In de volgende stelling wordt uitgedrukt dat dit voor elke groep mogelijk is.

Stelling 3.1
Elke representatie kan vervangen worden door een daarmede aequivalente unitaire representatie.

Bewijs
De matrices van een unitaire representatie van de dimensie m laten als lineaire substituties in een complexe R_m met vectoren $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de kwadratische vorm $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_m\bar{x}_m$ invariant. Dit is een niet alleen nodig maar ook voldoende criterium voor de unitariteit van de matrices.
Voor een willekeurige representatie M(g) kunnen we niet verwachten dat de bovenstaande kwadratische vorm invariant is, maar wel kunnen we gemakkelijk een soortgelijke invariante kwadratische vorm construeren, en wel bijv.

$$\sum_g (M(g)\vec{x},\ M(g)\vec{x})/n,$$

in de notatie van het scalair product (1.6) en waarbij n de orde van G is.
Inderdaad geeft de aan $g' \in G$ toegevoegde substitutie $M(g')$ als resultaat

$$\sum_g (M(g)M(g')\vec{x},\ M(g)M(g')\vec{x}) =$$

$$= \sum_g (M(gg')\vec{x},\ M(gg')\vec{x}) = \sum_{g''} (M(g'')\vec{x},\ M(g'')\vec{x}),$$

omdat met g ook gg' = g'' alle elementen van G doorloopt. Voor de nieuwe invariante kwadratische vorm kunnen we ook schrijven

$$\sum_g (M^+(g)M(g)\vec{x},\vec{x})/n = (H\vec{x},\vec{x}),$$

waarbij

$$H = \sum_g M^+(g)M(g)/n$$

een positief definiete Hermitische matrix is. Hierbij behoort een orthogonaal stelsel van m onafhankelijke eigenvectoren welke als de basis van een nieuw coördinatenstelsel kan worden genomen. Door een geschikte normering kunnen we zorgen dat in de nieuwe coördinaten y_1, y_2, ..., y_m

$$(H\vec{x},\vec{x}) = y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_m\bar{y}_m.$$

Na de gelijkvormigheidstransformatie $\vec{x} = T\vec{y}$ laten de matrices $T^{-1}MT$ dus de bovengenoemde kwadratische vorm invariant en zijn daarmede unitair.

We hebben gezien dat een reducibele representatie gekenmerkt is door het bestaan van een echte invariante lineaire deelruimte voor de bijbehorende groep van lineaire transformaties. Overigens volgt uit (3.2) dat de complementaire deelruimte eveneens invariant is. Is omgekeerd van een groep lineaire transformaties in een R_m bekend dat er een invariante deelruimte is, dan behoeft op grond van alleen dit feit de representatie nog niet reducibel te zijn omdat M(g) nog van het type

$$\begin{pmatrix} M_1(g) & M_3(g) \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix}$$

kan zijn. Een eenvoudige redenering leidt evenwel tot $M_3(g) \equiv 0$ zodat de representatie toch reducibel is. Op grond van de zoëven bewezen stelling kunnen we namelijk aannemen dat de beschouwde representatie reeds unitair is. Dit brengt met zich mede dat naast een invariante deelruimte ook diens orthogonale complement invariant is. Dit betekent dat voor een orthogonaal coördinatenstelsel waarvan de eerste m_1 basisvectoren in de ene invariante deelruimte liggen en de overige m_2 in de invariante complementaire deelruimte nu de voorstelling (3.2) geldt. Als stelling geformuleerd

<u>Stelling 3.2</u>

Een representatie M is reducibel dan en alleen dan wanneer de lineaire transformaties M(g) minstens één echte lineaire deelruimte invariant laten.

Voor een diepere analyse van de matrixrepresentaties van een groep maken we herhaaldelijk gebruik van twee eigenschappen welke bekend staan als de lemma's van Schur. Het eerste lemma heeft betrekking op de verwisselbaarheid van de matrices van eenzelfde representatie met een zekere vaste matrix. Het tweede lemma gaat algemener over verwisselbaarheid bij verschillende representaties waarvan de graden niet gelijk behoeven te zijn. Soms noemt men het eerste lemma in engere zin "het lemma van Schur". Het tweede lemma blijft dan naamloos.

<u>Stelling 3.3</u> (1e lemma van Schur)

Is de matrix S, $S \neq 0$, verwisselbaar met alle matrices M(g) van een irreducibele representatie dan is S op een multiplicatieve constante na gelijk aan de identiteit I.

<u>Bewijs</u>

We interpreteren de matrices M(g) weer als lineaire operatoren in een R_m waarbij m de dimensie van de representatie is. Bij S behoort zeker een eigenvector $\vec{e}$ die bijv. de eigenwaarde λ heeft. Aangezien voor elke g

$$SM(g)\vec{e} = M(g)S\vec{e} = \lambda M(g)\vec{e},$$

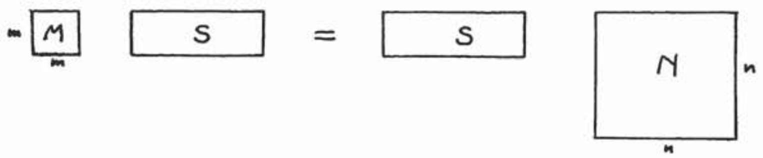
is elke vector $M(g)\vec{e}$ eveneens een eigenvector met dezelfde eigenwaarde. Aangezien er wegens de irreducibiliteit geen invariante deelruimte is spannen de eigenvectoren $M(g)\vec{e}$ als g de groep doorloopt de volledige ruimte R_m op, zodat elke vector eigenvector is. Maar dan moet $S = \lambda I$ zijn.

Volgens dit bewijs geldt deze eigenschap kennelijk niet voor een reducibele representatie omdat dan de vectoren $M(g)\vec{e}$ in een invariante deelruimte kunnen liggen. Inderdaad zijn matrices van het type (3.2) commuteerbaar met een soort gemengde eenheidsmatrix van het type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & \lambda_2 I \end{pmatrix} .$$

Stelling 3.4 (2e lemma van Schur)
Zijn M en N twee niet-aequivalente irreducibele representaties met de dimensies m en n, en is er een m×n matrix S zodanig dat $M(g)S =$ $= SN(g)$ voor alle $g \in G$ dan is $S = 0$.

Bewijs
Stel zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid: $n \geq m$, dus S is een lineaire afbeelding van R_n op R_m. De verzameling X van de vectoren $\vec{x}$ van R_n



welke door S op het nulelement van R_m worden afgebeeld, $S\vec{x} = 0$, heeft dan de dimensie: dim $X = n - r$, waarin r de rang is van S, dus ook $r \leq m$. Er geldt nu dat X invariant is onder $N(g)$. Immers uit $S\vec{x} = 0$ volgt $M(g)S\vec{x} = 0$ en dus $SN(g)\vec{x} = 0$, zodat met $\vec{x}$ ook elke $N(g)\vec{x}$ tot X behoort. Aangezien N irreducibel is zijn er slechts de twee mogelijkheden dat X of slechts het nulelement van R_n of R_n zelf is. Bij de eerste mogelijkheid geldt $r = n$ dus $m = n$ en S is inverteerbaar dus $M = SNS^{-1}$, waarmede M en N aequivalent zouden zijn. Daar we dit uitgesloten hebben blijft het geval $X = R_n$ over. Dit betekent $SR_n = 0$ zodat $S = 0$.

De lemma's van Schur zijn van fundamenteel belang voor een nadere analyse van de eigenschappen van de matrixrepresentaties. In de volgende paragraaf zullen we met behulp van deze lemma's de zogenaamde orthogonaliteitseigenschappen afleiden. Als toepassing van het (eerste) lemma van Schur bewijzen we nog de volgende reeds eerder vermelde eigenschap.

Stelling 3.5
De irreducibele representaties van een Abelse groep zijn eendimensionaal.

Bewijs
Bij een Abelse groep G geldt altijd $gg' = g'g$ voor alle $g, g' \in G$. Houden we g' vast dan heeft een irreducibele representatie M de eigenschap dat de matrix $M(g')$ commuteert met alle matrices $M(g)$. Volgens stelling 3.3 geldt dan $M(g') = \lambda(g')I$. Aangezien g' willekeurig is, is de representatie M aequivalent aan de scalarrepresentatie λ.

4. Groepfuncties

In deze paragraaf beschouwen we functies $\phi(g)$ gedefinieerd op de n elementen g van een groep G. We kunnen een groepfunctie $\phi(g)$ opvatten als een vector met n componenten, d.w.z. als een vector in een n-dimensionale ruimte L_n, de zogenaamde groepruimte. Het ligt voor de hand voor groepfuncties begrippen als lineaire (on)afhankelijkheid in te voeren. Aldus zijn er juist n lineaire onafhankelijke groepfuncties. Het is nuttig om in deze L_n een metriek in te voeren door een inwendig product (ϕ,ψ) te definiëren als

$$(\phi,\psi) = \sum_g \phi(g)\ \overline{\psi(g)}\,/n. \tag{4.1}$$

Zij nu M een representatie van G met de dimensie m waarbij M(g) de matrixelementen $M_{ij}(g)$ bezit. Hierdoor worden m^2 groepfuncties geleverd. In het algemeen kunnen onder deze functies lineaire afhankelijkheden bestaan. Is de representatie evenwel irreducibel dan zal hieronder bewezen worden dat de genoemde m^2 groepfuncties lineair onafhankelijk zijn. Is de representatie bovendien unitair dan blijken deze functies in L_n een orthogonaal stelsel te vormen.

Stelling 4.1

Voor een m-dimensionale irreducibele unitaire representatie M(g) vormen de m^2 groepsfuncties $M_{ij}(g)$ een orthogonaal stelsel.

Bewijs

Beschouw de matrix

$$S = \sum_g M(g)\ C\ M^+(g),$$

waarbij C een willekeurige matrix is waarover nader beschikt kan worden. We kunnen zonder moeite verifiëren dat S commuteert met alle matrices van de irreducibele representatie M. Immers

$$M(g_0)\ S\ M^{-1}(g_0) = \sum_g M(g_0 g)\ C\ M^+(g)\ M^+(g_0) =$$

$$= \sum_g M(g_0 g)\ C\ M^+(g_0 g) = S.$$

Volgens het lemma van Schur (stelling 3.2) is S evenredig aan de eenheidsmatrix zodat

$$\sum_g M_{i\alpha}(g)\ C_{\alpha\beta}\ \overline{M}_{j\beta}(g) = c\ \delta_{ij}.$$

We kiezen in het bijzonder voor C een matrix die slechts voor het element op de rij α en de kolom β een enkele 1 heeft en voor de rest uit nullen bestaat. Dan is dus voor alle indices

$$\sum_g M_{i\alpha}(g)\ \overline{M}_{j\beta}(g) = c\ \delta_{ij},$$

waarbij c van de keuze van C afhangt.
Contractie, d.w.z. identificatie van j met i en sommatie over deze index, geeft

$$mc = \sum_g M_{i\alpha}(g)\ \overline{M}_{i\beta}(g) = \sum_g \delta_{\alpha\beta}(g) = n\ \delta_{\alpha\beta}$$

zodat

$$c = nm^{-1}\delta_{\alpha\beta}.$$

De uiteindelijk verkregen orthogonaliteitsrelaties kunnen we dan schrijven als

$$(M_{ij}(g),\ M_{kl}(g)) = m^{-1}\ \delta_{ik}\ \delta_{jl}. \tag{4.2}$$

Op geheel analoge wijze kunnen we bewijzen dat de bij twee niet-aequivalente irreducibele representaties behorende vectorstelsels onderling orthogonaal zijn ongeacht de dimensies. De preciese formulering is a.v.

Stelling 4.2
Zijn M en N niet-aequivalente unitaire representaties dan geldt

$$(M_{ij}(g),\ N_{kl}(g)) = 0. \tag{4.3}$$

Zijn M_1, M_2, ... niet-aequivalente irreducibele unitaire representaties met de dimensies m_1, m_2, ... van een groep G met de orde n dan wordt hierdoor een reeks van resp. m_1^2, m_2^2, ... basisvectoren in L_n geleverd welke onderling orthogonaal zijn. We kunnen hieruit de volgende conclusie trekken

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots \leq n, \tag{4.4}$$

een ongelijkheid waardoor enerzijds de dimensies en anderzijds het aantal van de irreducibele representaties begrensd wordt. Spoedig zal blijken dat de bovenstaande ongelijkheid in feite een gelijkheid is.

De orthogonaliteitsrelaties (4.2) zijn ontstaan dank zij het feit dat uitgegaan was van een unitaire representatie. Bij een aequivalente niet-unitaire representatie wordt in de representatieruimte door de groepfuncties $M_{ij}(g)$ een i.h.a. "scheefhoekig" stelsel basisvectoren bepaald welke wegens de irreducibiliteit onafhankelijk zijn.

We beschouwen nu voor een willekeurige representatie M van G de groepfunctie $\chi(g)$ gedefinieerd als het spoor van de matrix M(g)

$$\chi(g) = \mathrm{sp}\, M(g) = M_{\alpha\alpha}(g). \tag{4.5}$$

Deze groepfunctie heet het karakter van M. Aangezien het spoor van een matrix invariant is voor een gelijkvormigheidstransformatie bezitten aequivalente representaties hetzelfde karakter. Verder volgt hieruit dat geconjugeerde elementen van G in de representatie M dezelfde karakterwaarde bezitten. Dit betekent dat het karakter een klassefunctie is aangezien voor een willekeurige representatie alle elementen van eenzelfde klasse dezelfde karakterwaarde opleveren.
Voor een irreducibele unitaire representatie geldt op grond van (4.2)

$$(\chi(g),\ \chi(g)) = n^{-1} \sum_g M_{\alpha\alpha}(g)\ \overline{M}_{\beta\beta}(g) = m^{-1}\ \delta_{\alpha\beta}\ \delta_{\alpha\beta} = 1,$$

zodat χ een eenheidsvector in L_n is.
Analoog volgt uit (4.3) voor de karakters χ en χ' van niet-aequivalente representaties de orthogonaliteitsrelatie

$$(\chi(g),\ \chi'(g)) = 0.$$

We vatten de genoemde eigenschappen nog even samen.

Stelling 4.3

1. Aequivalente representaties hebben dezelfde karakterfunctie.
2. Geconjugeerde elementen van G hebben voor een gegeven representatie dezelfde karakterwaarde.
3. Zijn χ en χ' karakters behorende bij niet-aequivalente irreducibele representaties dan is

$$(\chi,\chi') = 0.$$

4. Voor het karakter χ van een irreducibele unitaire representatie geldt

$$(\chi,\chi) = 1.$$

Voorbeeld 4.1

We beschouwen nog eens de representaties van P_3 (zie voorbeeld 3.1). De representatie C kunnen we in de driedimensionale representatieruimte opvatten als te bestaan uit ruimtelijke draaiingen en spiegelingen waarbij de vectoren (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) verwisseld worden. Blijkbaar is $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ een invariante deelruimte evenals de hoofdbissectrix $x_1 = x_2 = x_3$. De representatie C valt derhalve uiteen in een tweedimensionale, de draaiingen en spiegelingen van een gelijkzijdige driehoek, en een eendimensionale, de identiteit. De representatie gevormd door de draaiingen en spiegelingen in het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ kunnen we - na draaiing van het assenstelsel, d.w.z. na een gelijkvormigheidstransformatie - beschrijven door de unitaire tweedimensionale matrices van voorbeeld 1.2. We beschikken nu over drie irreducibele representaties en wel twee van de dimensie 1 en een van de dimensie 2, dus $m_1 = m_2 = 1$ en $m_3 = 2$. Uit (4.4) volgt dat de irreducibele representaties van P_3 hiermede uitgeput zijn. We vatten ze samen in onderstaande tabel waarbij $c = -\frac{1}{2}$ en $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

P_3	M_1	M_2	M_3
e	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
r	1	1	$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$
r^2	1	1	$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$
s	1	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
rs	1	-1	$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$
r^2s	1	-1	$\begin{pmatrix} c & -s \\ -s & -c \end{pmatrix}$

De hierdoor geleverde groepfuncties, basisvectoren in L_6 vatten we samen in de volgende tabel

e	r	r^2	s	rs	r^2s
1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1
1	c	c	1	c	c
1	c	c	-1	-c	-c
0	-s	s	0	s	-s
0	s	-s	0	s	-s

Men kan zich bijdeze tabel gemakkelijk overtuigen van de orthogonaliteitsrelaties.
De karakters kunnen we hieruit a.v. aflezen

P_3	M_1	M_2	M_3
e	1	1	2
r,r^2	1	1	-1
s,rs,r^2s	1	-1	0

Voorbeeld 4.2

De tetraedergroep A_4 is homomorf met C_3 (e,r,r^2) welke de drie scalar-representaties $1,1,1$; $1,\omega,\bar{\omega}$; $1,\bar{\omega},\omega$ bezit met $\omega = \exp \frac{2}{3} \pi i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$. Dit zijn tevens drie representaties van A_4. Op grond van $1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12$ ligt het vermoeden voor de hand dat er nog een driedimensionale representatie is. Het bestaan van deze

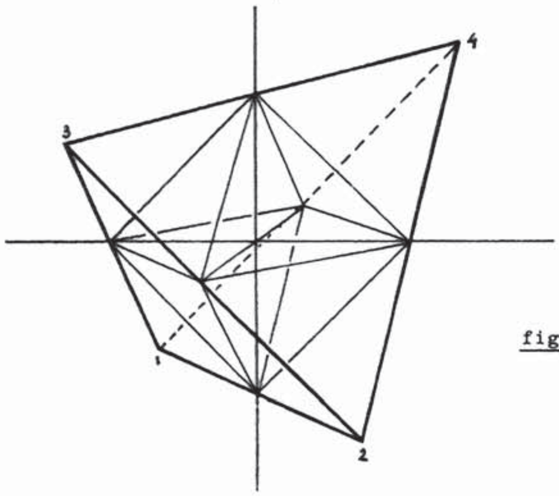


fig. 4.1

representatie is meetkundig evident. De elementen van A_4 kunnen we interpreteren als de ruimtelijke draaiingen welke een regelmatig viervlak met zichzelf tot dekking brengen. Kiezen we de hoekpunten van het tetraeder bijv. als $(-1,-1,-1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ en $(-1,1,1)$ dan zijn de tweetallige draaiingen van het type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en de drietallige van het type $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Het is nu niet moeilijk meer de volledige tabel van de karakters samen te stellen. Met de notatie van voorbeeld 2.2 vinden we

A_4	M_1	M_2	M_3	M_4
e	1	1	1	3
a,b,c	1	1	1	-1
r,ar,br,cr	1	ω	$\bar{\omega}$	0
r^2,ar^2,br^2,cr^2	1	$\bar{\omega}$	ω	0

Van een groep waarvan de elementen uit permutaties bestaan, zeg permutaties van de getallen 1, 2, ..., k, kunnen we zonder moeite een matrixrepresentatie aangeven. De permutatie $(1, 2, \ldots, k) \to$ $\to (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ beelden we daartoe af op de matrix welke op de plaatsen $(1,j_1)$ $(2,j_2)$ ... (k,j_k) een 1 heeft en een 0 op de overige plaatsen.

Voorbeeld 4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Men kan zich er gemakkelijk van overtuigen dat de productregel consistent is.

Men kan elke groep G opvatten als een groep van permutaties van n elementen. Gaan we namelijk uit van de elementenrij $g_1, g_2, \ldots, g_n$ dan levert vermenigvuldiging met een willekeurige $g \in G$ de rij $gg_1, gg_2, \ldots$ $\ldots, gg_n$ hetgeen niets anders is dan een verschikking van de oorspronkelijke rij. Als boven kunnen we dan een representatie vormen waarvan de dimensie gelijk is aan de orde n van G. De aldus geconstrueerde representatie heet de <u>reguliere representatie</u> van G.

Voorbeeld 4.4

De viergroep van Klein (d.w.z. D_2) bestaat uit de elementen g_1, g_2, g_3, g_4 met de volgende vermenigvuldigingstafel

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	1	2	3	4
g_2	2	1	4	3
g_3	3	4	1	2
g_4	4	3	2	1

De reguliere representatie is

$$g_1 \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad g_2 \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad g_3 \begin{pmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \end{pmatrix} \quad g_4 \begin{pmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

We beschouwen de reeks onderling niet-aequivalente irreducibele representaties M_1, M_2, M_3, ... van een groep G. Gemakshalve denken wij ze geordend naar opklimmende dimensie, d.w.z. $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots$. Op dit moment is bekend dat het aantal irreducibele representaties begrensd is door de ongelijkheid $\sum m_k^2 \leq n$. Is dit aantal q dan is een willekeurige representatie M van de vorm

$$M = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_q M_q, \tag{4.6}$$

waarbij c_k het aantal malen is dat de representatie M_k in M bevat is. De matrices van M kunnen we in volledig gereduceerde gedaante opgebouwd denken door langs de hoofddiagonaal c_1 matrices $M_1(g)$, c_2 matrices $M_2(g)$ enz. aan elkaar te rijgen tot een matrix van de dimensie $\sum c_k m_k$. Uit deze wijze van voorstelling volgt onmiddellijk

$$\chi(M) = c_1 \chi(M_1) + c_2 \chi(M_2) + \dots + c_q \chi(M_q). \tag{4.7}$$

Aangezien een karakterfunctie invariant is voor een gelijkvormigheidstransformatie geldt de gevonden formule algemeen voor een willekeurige aequivalente versie van M. Aangezien de karakters $\chi_k = \chi(M_k)$ volgens stelling 4.3 aan orthogonaliteitsrelaties voldoen volgt, op analoge wijze overigens als bij Fourier reeksen, de coëfficiëntenformule

$$c_k = (\chi, \chi_k), \tag{4.8}$$

en de formule van Pythagoras

$$(\chi,\chi) = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_q^2.$$

Hieruit volgt dat bij een reducibele representatie altijd $(\chi,\chi) > 1$ is. In aanvulling op stelling 4.3 punt 4 is dus $(\chi,\chi) = 1$ een nodige en voldoende voorwaarde voor irreducibiliteit van de betreffende representatie.

We passen het bovenstaande toe op de in de aanvang van deze paragraaf beschouwde reguliere representatie van G. Men ziet zonder moeite dat bij alle matrices van de reguliere representatie de hoofddiagonaal uitsluitend nullen bevat met uitzondering van de eenheidsmatrix. De karakterfunctie is dus

(4.9) $$\chi(g) = 0 \quad \text{voor} \quad g \neq e, \ \chi(e) = n.$$

Passen we hierop de coëfficiëntenformule (4.8) toe dan komt er

$$c_k = n^{-1} \sum_g \chi(g)\ \overline{\chi_k(g)} = n^{-1}\ \chi(e)\ \overline{\chi_k(e)} = m_k.$$

Dit belangrijke resultaat betekent dat alle irreducibele representaties in de reguliere representatie bevat zijn en wel met een multipliciteit gelijk aan de dimensie. Tevens blijkt door aftellen dat inderdaad de gelijkheid $\sum m_k^2 = n$ geldt. Deze betrekking geeft dus een relatie tussen de dimensies van alle mogelijke irreducibele representaties en de orde van de groep. Het gevondene formuleren we als een stelling.

Stelling 4.4

Is de representatie M opgebouwd uit niet-aequivalente irreducibele componenten $M_1, M_2, \dots, M_q$ volgens

$$M = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_q M_q,$$

dan geldt voor de corresponderende karakters

$$\chi = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + \dots + c_q \chi_q,$$

waarbij

$$c_k = (\chi,\chi_k).$$

Stelling 4.5

Is M de reguliere representatie dan geldt

$$M = m_1 M_1 + m_2 M_2 + \ldots + m_q M_q .$$

Gevolg (stelling van Burnside)

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_q^2 = n. \tag{4.10}$$

Het sluitstuk van dit gedeelte van de theorie is de stelling dat het aantal niet-aequivalente irreducibele representaties van een groep precies gelijk is aan het aantal klassen van de groep. Ter voorbereiding van het bewijs merken we op dat op analoge wijze als we dit bij groepfuncties gedaan hebben de verzameling van alle klassefuncties kunnen opvatten als een vectorruimte waarvan de dimensie p gelijk is aan het aantal klassen van de groep G. Het karakter is een dergelijke klassefunctie. Volgens stelling 4.3 zijn de q karakterfuncties $\chi_i(g)$ onderling lineair onafhankelijk zodat ze als q onafhankelijke vectoren geïnterpreteerd kunnen worden. Het is duidelijk dat dit reeds $p \geq q$ impliceert. De matrices van de q unitaire representaties M_1, M_2, ..., M_q noteren we als $M_{ijk}(g)$, d.i. het element van de i^e representatie op de j^e rij en de k^e kolom. Iedere willekeurige groepfunctie $\phi(g)$ is zoals in het begin van deze paragraaf beschreven is op te vatten als een vector in L_n. Op grond van het feit dat de matrixelementen $M_{ijk}(g)$ een orthogonale basis in L_n vormen (zie (4.2) en (4.3)) geldt met toepassing van de sommatieconventie

$$\phi(g) = c_{ijk} M_{ijk}(g).$$

Is $\phi(g)$ bovendien een klassefunctie dan is steeds $\phi(g) = \phi(h^{-1} g h)$ waarbij h een willekeurig element van G is. Dit betekent dus dat ook, met een kleine vrijheid in de sommatieconventie,

$$\phi(g) = c_{ijk} M_{ij\alpha}(h^{-1}) M_{i\alpha\beta}(g) M_{i\beta k}(h) =$$

$$c_{ijk} M_{i\alpha\beta}(g) \overline{M_{i\alpha j}}(h) M_{i\beta k}(h).$$

Laten we h alle elementen van G doorlopen en sommeren we hierover dan komt er met gebruikmaking van (4.1) en (4.2)

$$\phi(g) = c_{ijk}\ M_{i\alpha\beta}(g)\ (M_{i\beta k}(h),\ M_{i\alpha j}(h)) =$$

$$= c_{ijk}\ M_{i\alpha\beta}(g)\ \delta_{\beta\alpha}\ \delta_{kj}/m_i =$$

$$= c_{ikk}/m_i\ \chi_i(g),$$

zodat een willekeurige lineaire klassefunctie altijd een lineaire combinatie van de q karakters is. Dit betekent dat de ruimte van klassefuncties geheel opgespannen wordt door de karakters zodat p en q gelijk moeten zijn.

<u>Stelling 4.6</u>

Het aantal verschillende niet-aequivalente irreducibele representaties van een groep is gelijk aan het aantal klassen van de groep.

<u>Voorbeeld 4.4</u>

De permutatiegroep P_4, d.i. de oktaedergroep, bestaat uit 24 elementen welke verdeeld zijn in vijf klassen.
Van de vijf irreducibele representaties is M_1 de triviale waarbij alle elementen op de eenheid worden afgebeeld. De homomorfie van P_4 met P_2 levert een tweede scalaire representatie M_2 namelijk die waarbij de even permutaties op 1 en de oneven op -1 worden afgebeeld. Uit de homomorfie van P_4 met P_3 volgt dat de tweedimensionale representatie van P_3 - de vlakke draaiingen en spiegelingen van een gelijkzijdige driehoek - er ook een M_3 van P_4 is. Uit de relatie

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + m_4^2 + m_5^2 = 24$$

volgt dat de overblijvende representaties beide driedimensionaal zijn. Inderdaad worden dergelijke representaties geleverd door de bij A_4 behorende driedimensionale representatie M_4 - de ruimtelijke draaiingen van een regelmatig tetraeder - en door de ruimtelijke draaiingen M_5 welke een kubus met zichzelf tot dekking brengen.

De karakters van deze representaties zijn verenigd in onderstaande tabel.

soort element	aantal	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
(1)	1	1	1	2	3	3
(12)	6	1	-1	0	1	-1
(12)(34)	3	1	1	2	-1	-1
(123)	8	1	1	-1	0	0
(1234)	6	1	-1	0	-1	1

5. Tensorproduct

Wij herinneren aan het tensorbegrip in de lineaire algebra. Beschouwen we gemakshalve vectoren v_i en tensoren T_{ij} in een driedimensionale Euclidische ruimte E_3 waar de overgang van het ene op het andere Cartesische assenstelsel beschreven wordt door de lineaire transformatie

(5.1) $$x'_i = t_{i\alpha}\, x_\alpha,$$

dan transformeren de vectorcomponenten v_i zich op precies dezelfde wijze terwijl de tensorcomponenten T_{ij} zich transformeren als

(5.2) $$T'_{ij} = t_{i\alpha}\, t_{j\beta}\, T_{\alpha\beta},$$

d.w.z. als het product van twee vectoren.
De negen tensorcomponenten kunnen we opvatten als de componenten van een vector gelegen in een negendimensionale ruimte, de zogenaamde productruimte $E_3 \times E_3$. Zijn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthonorme basisvectoren in E_3 dan vormen $\vec{e}_i\vec{e}_j$ $(i,j = 1, 2, 3)$ negen basisvectoren in de productruimte en wel wederom een orthonorm stelsel. Bij een coördinatentransformatie (5.1) correspondeert in de productruimte een coördinatentransformatie (5.2) met 9×9 matrices $(t_{ik}\, t_{jl})$ waarbij het indexpaar (i,j) de rij en (k,l) de kolom aangeeft.

Algemener beschouwen we twee lineaire vectorruimten R_m en R_n. De coördinatentransformaties worden beschreven resp. door

(5.3) $$x'_i = a_{ik}\, x_k \quad , \quad y'_j = b_{jl}\, y_l .$$

Hieruit vormen we op analoge wijze de producttransformatie

(5.4) $$x'_i\, y'_j = a_{ik}\, b_{jl}\, x_k\, y_l,$$

welke geïnterpreteerd kan worden als lineaire transformatie in de productruimte $R_m \times R_n$. De $mn \times mn$ matrix $(a_{ik}\, b_{jl})$ heet het <u>tensorproduct</u> of <u>Kronecker-product</u> van de matrices (a_{ik}) en (b_{jl}).
We schrijven

(5.5) $$(a_{ik}\, b_{jl}) = (a_{ik}) \times (b_{jl})$$

of symbolisch A × B.

Voorbeeld 5.1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix}$$

Voor het tensorproduct gelden de volgende eenvoudig te verifiëren regels.

Stelling 5.1

1. Het tensorproduct van twee diagonaalmatrices is wederom een diagonaalmatrix.
2. $$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1A_2 \times B_1B_2.$$
3. Het tensorproduct van twee unitaire matrices is wederom unitair.
4. $$\text{sp } A \times B = \text{sp } A \cdot \text{sp } B.$$

Uit twee groepen G en H kunnen we op een analoge wijze een nieuwe groep G × H, het directe product van G en H, afleiden. Zijn g_1, g_2, ...g_m de elementen van G en h_1, h_2, ..., h_n die van H dan bestaat G × H uit elementen (g_i,h_j) gevormd door paren van een element van G en een van H. De productregel in G × H is

$$(g,h) \cdot (g',h') = (gg',hh').$$

Is e het eenheidselement van G dan kunnen we de groep gevormd door de elementen (e,h), $h \in H$, identificeren met H. Analoog is ook G een ondergroep van G × H. Men ziet zonder moeite in dat zowel G als H normaaldelers van $G \times H$ zijn. Zijn zowel G als H commutatief dan is ook $G \times H$ commutatief.

<u>Voorbeeld 5.1</u>

$C_2 \times C_2$ bestaat uit de elementen $(1,1)$ $(a,1)$ $(1,b)$ (a,b) waarbij $a^2 = b^2 = 1$. Blijkbaar is $C_2 \times C_2$ de viergroep van Klein of m.a.w. D_2.

<u>Voorbeeld 5.2</u>

$C_2 \times C_3$ bestaat uit de elementen $(1,1)$ $(a,1)$ $(1,b)$ (a,b) $(1,b^2)$ (a,b^2) met $a^2 = b^3 = 1$. Blijkbaar is $C_2 \times C_3$ isomorf met C_6.

We stellen ons nu het volgende probleem. We nemen aan dat van de twee groepen G en H de representaties volledig bekend zijn, wat kan men dan zeggen over de representaties van $G \times H$. Het antwoord zal luiden dat de irreducibele unitaire representaties van $G \times H$ gevormd worden door de tensorproducten van de overeenkomstige matrixrepresentaties van G en H. M.a.w. wij zullen aantonen dat de afbeelding $M \times N$:

$$g \times h \to M(g) \times N(h),$$

een representatie is van $G \times H$.
Is M een irreducibele unitaire representatie van G en N een soortgelijke representatie van H dan geldt volgens regel 2 van stelling 5.1 voor willekeurige elementen $g, g' \in G$, $h, h' \in H$

$$(M(g) \times N(h)(M(g') \times N(h')) =$$

$$= M(g)\ M(g') \times N(h)\ N(h') = M(gg') \times N(hh')$$

zodat de matrices $M(g) \times N(h)$ inderdaad een representatie van het directe product $G \times H$ vormen. Volgens de derde regel van dezelfde stelling is de gevonden representatie wederom unitair. Uit de vierde regel volgt tenslotte

$$\chi_{MN}(gh) = \chi_M(g)\ \chi_N(h),$$

zodat

$$(\chi_{MN}, \chi_{MN}) = (\chi_M, \chi_M)(\chi_N, \chi_N) = 1.$$

Dit impliceert dat de representatie $M \times N$ eveneens irreducibel is. We veronderstellen dat de niet-aequivalente unitaire irreducibele representaties van G gerangschikt zijn volgens $M_1, M_2, \dots$ met de dimensies $\mu_1, \mu_2, \dots$. Evenzo behoort bij H de rij $N_1, N_2, \dots$ met de dimensies $\nu_1, \nu_2, \dots$. Voor $G \times H$ beschikken we dan over de niet-aequivalente unitaire irreducibele representaties $M_i \times N_j$ met dimensie $\mu_i \nu_j$. Aangezien

$$\sum_{i,j} (\mu_i \nu_j)^2 = \sum_i \mu_i^2 \sum_j \nu_j^2 = mn$$

zijn dit ook alle irreducibele representaties van $G \times H$.
Het gevondene vatten we in de volgende stelling samen.

Stelling 5.2

Zijn $M_1, M_2, \dots$ de niet-aequivalente irreducibele unitaire representaties van de groep $G(g)$ en $N_1, N_2, \dots$ de overeenkomstige van de groep $H(h)$ dan zijn alle niet-aequivalente irreducibele unitaire representaties van $G \times H$ van de vorm $M_i(g) \times N_j(h)$. Voor de karakters geldt

$$\chi_{MN}(gh) = \chi_M(g)\ \chi_N(h).$$

Voorbeeld 5.3

Men heeft $C_2 \times D_3 = D_6$. De karaktertabellen van C_2 en D_3 zijn

C_2	
1	1
1	-1

D_3		
1	1	2
1	1	-1
1	-1	0

Die van D_6 is dus

D_6					
1	1	2	1	1	2
1	1	-1	1	1	-1
1	-1	0	1	-1	0
1	1	2	-1	-1	-2
1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	0	-1	1	0

6. Topologische groepen

Een verzameling G van elementen g heet een topologische groep wanneer aan de volgende drie eigenschappen voldaan is.

1. G is een groep.
2. G is een topologische ruimte.
3. De groepbewerkingen zijn continu in de topologie van G.

Terwille van de eenvoud beperken we ons tot topologische groepen waarvan de topologie die van een metrische ruimte is met een afstandsbegrip $\mu(g,h)$. Dat een rij elementen $\{g_n\}$ van G convergeert tot een element g van G wil dan zeggen dat $\mu(g_n,g) \to 0$. We schrijven hiervoor kortweg $g_n \to g$. Een groepfunctie $\phi(g)$ heet continu in g wanneer $\phi(g_n) \to \phi(g)$ voor $g_n \to g$.
Een groepfunctie $\phi(g)$ heet uniform comtinu in G wanneer voor elke positieve ε er een $\delta(\varepsilon)$ bestaat zodanig dat $|\phi(g) - \phi(h)| < \varepsilon$ voor alle g en h met $\mu(g,h) < \delta(\varepsilon)$.

De continuïteit van de groepbewerkingen kunnen we a.v. preciseren

3a. Uit $g_n \to g$ en $h_n \to h$ volgt $g_nh_n \to gh$.
3b. Uit $g_n \to g$ volgt $g_n^{-1} \to g^{-1}$.

Een topologische groep G heet <u>compact</u> wanneer G als puntverzameling in de topologische (metrische) ruimte compact is. Dit betekent dat uit elke overdekking van G door een verzameling open bolletjes een overdekking door eindig veel van deze bolletjes gehaald kan worden. Een compacte verzameling G bezit een aantal kenmerkende eigenschappen. Bijvoorbeeld heeft elke uit oneindig veel (verschillende) elementen bestaande deelverzameling altijd een tot de verzameling G behorend verdichtingspunt. Verder bevat elke uit oneindig veel elementen bestaande rij $\{g_n\}$ een convergente deelrij.

Een continue functie $\phi(g)$ gedefinieerd op een compacte topologische groep G is ook uniform continu en daarmede dus begrensd. Het bewijs van deze stelling verloopt geheel analoog aan dat van de overeenkomstige bewering dat een continue functie van een reële variabele x behorend tot een begrensd en gesloten interval $a \leq x \leq b$ uniform continu is.

Een groep die niet compact is kan wel locaal compact zijn. Dit betekent dat elk element een omgeving bezit waarvan de afsluiting compact is. Als voorbeeld is de driedimensionale draaiingsgroep compact terwijl de Lorentz groep slechts locaal compact is.

In de regel bestaan de topologische groepen uit oneindig veel elementen. Voor de gewone groepeigenschappen heeft dit feit nauwelijks consequenties. Zodra echter naar matrixrepresentaties gezocht wordt treden aanzienlijke complicaties op zoals o.a. uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 6.1

De matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ waarbij a een reëel getal is vormen een oneindige groep. De vermenigvuldigingsregel is

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zodat de matrixgroep isomorf is met de (commutatieve) optelgroep van de reële getallen. De groep kan getopologiseerd worden met de metriek $\mu(a,b) = |a - b|$. De elementen waarbij a een geheel getal is vormen een ondergroep. De gegeven matrixgroep, een representatie dus van de optelgroep van de reële getallen, is niet aequivalent met een groep van unitaire matrices zoals blijkt uit voorbeeld 1.5. Stelling 3.1 geldt dus niet zonder meer voor oneindige groepen. Evenmin geldt stelling 3.2. Bovendien treedt als complicatie bij topologische groepen op, dat deze ook irreducibele representaties toestaan op begrensde operatoren M(g) die in een oneindig dimensionale ruimte werken. Wij geven hier echter de theorie van eindig dimensionale representaties, die bovendien voor de fysica in eerste instantie het belangrijkste zijn. Een representatie van een topologische groep is dan een continue homomorfe afbeelding van de groepselementen op $m \times m$ matrices M(g).

Bij matrixrepresentaties van oneindige groepen moeten we onderscheid maken tussen half-reducibel en volledig reducibel of reducibel zonder meer.

Bij een half-reducibele representatie M zijn de matrices M(g) van de vorm

$$(6.1) \qquad M(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & M_3(g) \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix}$$

of aequivalent hiermede, terwijl bij een volledig reducibele representatie de matrices aequivalent zijn met het type (6.1) met $M_3(g) \equiv 0$, d.w.z. met (3.2).
Als in paragraaf 3 geldt

Stelling 6.1
Een representatie M is dan en slechts dan irreducibel wanneer de lineaire transformaties M(g) geen (echte) invariante deelruimte bezitten.

Zoals uit de desbetreffende bewijzen in paragraaf 3 voortvloeit gelden de lemma's van Schur eveneens voor oneindige groepen. We vatten deze lemma's hieronder samen.

Stelling 6.2 (Schur)
Zijn M en N niet-aequivalente irreducibele representaties van een groep G met dimensies m en n, en is er een $m \times n$ matrix S zodanig dat

$$M(g)\ S = S\ N(g) \quad \text{voor alle } g \in G$$

dan is $S = 0$. Zijn M en N aequivalente irreducibele representaties en geldt

$$M(g)\ S = S\ N(g) \quad \text{voor alle } g \in G$$

dan is $S = \lambda I$.

Gevolg
De irreducibele representaties van een commutatieve groep zijn scalair.

Voorbeeld 6.2
De vlakke rotaties vormen de tweedimensionale orthogonale groep SO_2 waarvan de elementen voorgesteld kunnen worden door de matrices

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Deze groep is commutatief zodat de gegeven tweedimensionale representatie reducibel is. Inderdaad is

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} .$$

De getallen $e^{i\alpha}$ vormen dus een scalaire (unitaire) representatie van de vlakke draaiingsgroep. Andere representaties worden gevormd door aan $g(\alpha)$ de getallen $e^{-i\alpha}$, $e^{2i\alpha}$, $e^{-2i\alpha}$ enz. toe te voegen. Aldus verkrijgt men een rij niet-aequivalente unitaire representaties $M_n(g)$ met geheeltallige index $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$M_n(g):\ g(\alpha) \to e^{ni\alpha}.$$

Het succes van de theorie van de representaties van eindige groepen berust goeddeels op de mogelijkheid om voor groepfuncties $\phi(g)$ een invariant gemiddelde

$$\mu(\phi) = \sum_{g\in G} \phi(g)/n \tag{6.2}$$

te definiëren. Voor oneindige groepen is de limietovergang $n \to \infty$ zinloos omdat oneindige groepen i.h.a. niet door limietovergang uit eindige groepen afgeleid kunnen worden. Om tot een analogon van (6.2) voor continue groepen te geraken merken we op dat de door (6.2) gedefinieerde functionaal aan de volgende kenmerkende eigenschappen voldoet. De functionaal $\mu(\phi)$ is lineair, voegt aan niet-negatieve functies een niet-negatieve waarde toe, levert de waarde 1 voor de eenheidsfunctie $\phi(g) = 1$ en heeft de bijzonderheid invariant te zijn voor translatie. Dit betekent dat bij een willekeurig vast groepelement h de groepfuncties $\phi(g)$ en $\phi(gh)$ tot hetzelfde resultaat leiden.

Voorbeeld 6.3

Voor de vlakke draaiingsgroep met elementen $g(\alpha) = e^{i\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, kunnen de (continue) groepfuncties opgevat worden als periodieke functies $\phi(\alpha)$ met de periode 2π. Het analogon van (6.2) is de invariante integraal

$$\mu(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\alpha)\, d\alpha. \tag{6.3}$$

De invariantie t.o.v. translatie (d.w.z. translatie in de parameter α) wordt uitgedrukt door de gelijkheid

$$\int_0^{2\pi} \phi(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \phi(\alpha + \beta)\, d\alpha$$

voor elke $\beta \in (0, 2\pi)$.

Volgens A. Haar en J. von Neumann is het mogelijk in een compacte groep, en zelfs in een locaal compacte groep, een invariante integratie te definiëren. I.h.b. kan de volgende stelling bewezen worden.

Stelling 6.3

Bij elke compacte topologische groep G kan op eenduidige wijze een invariante integraal $\int \phi(g)\, dg$ van een continue groepfunctie $\phi(g)$ gedefinieerd worden met de volgende eigenschappen

1^o. $\int \{\alpha_1\, \phi_1(g) + \alpha_2\, \phi_2(g)\} dg = \alpha_1 \int \phi_1(g)\, dg + \alpha_2 \int \phi_2(g) dg$.

2^o. Uit $\phi(g) > 0$ voor alle $g \in G$ volgt $\int \phi(g)\, dg > 0$.

3^o. Uit $\phi(g) = 1$ voor alle $g \in G$ volgt $\int \phi(g)\, dg = 1$.

4^o. Voor elke vaste $h \in G$ geldt

$$\int \phi(gh)\, dg = \int \phi(hg)\, dg = \int \phi(g^{-1})\, dg = \int \phi(g)\, dg. \tag{6.4}$$

Bewijs

Het bewijs van deze fundamentele stelling uit de theorie van de topologische groepen is tamelijk gecompliceerd. Een betrekkelijk eenvoudig bewijs dat te danken is aan J. von Neumann kan men vinden in Pontrjagin, Topologische Gruppen I §29.

Voorbeeld 6.4

De elementen van de tweedimensionale unitaire groep met determinant 1, notatie SU_2, kunnen we schrijven als (zie voorbeeld 1.4)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

waarbij met reële parameters ρ, η, θ

$$\begin{cases} \alpha = \cos \frac{1}{2}\,\theta \exp \frac{1}{2}\, i(\rho + \eta), \\ \beta = i \sin \frac{1}{2}\,\theta \exp \frac{1}{2}\, i(\rho - \eta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \rho, \eta \le 2\pi. \end{cases}$$

We zullen later bewijzen dat de invariante integraal over groepfuncties $\phi(\rho,\eta,\theta)$ gegeven is door

$$(6.5) \qquad \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \phi(\rho,\eta,\theta) \sin\theta \, d\rho \, d\eta \, d\theta.$$

Nu voor compacte topologische groepen een invariante integraal bestaat kunnen een aantal stellingen over discrete groepen overgedragen worden op continue groepen.

Stelling 6.4

Elke representatie van een compacte topologische groep kan vervangen worden door een daarmede aequivalente unitaire representatie.

Bewijs

Dit verloopt geheel analoog aan dat van stelling 3.1.
De matrices van een willekeurige representatie laten hier de kwadratische vorm $(H\vec{x},\vec{x})$ met

$$H = \int M^+(g)\, M(g)\, dg$$

invariant. Met een gelijkvormigheidstransformatie welke H op hoofdassen brengt wordt dus een aequivalente unitaire representatie verkregen.

Stelling 6.5

De representatie M van een compacte topologische groep is dan en alleen dan volledig reducibel wanneer de lineaire transformaties M(g) minstens één echte lineaire deelruimte invariant laten.

Bewijs

Als in paragraaf 3.

Gevolg

Een half-reducibele representatie van een compacte topologische groep is volledig reducibel.

De continue groepfuncties $\phi(g)$ van een compacte topologische groep G vullen een oneindig-dimensionale lineaire vectorruimte welke gemetriseerd kan worden door invoering van het inwendig product

$$(\phi,\psi) = \int \phi(g)\ \overline{\psi(g)}\ dg. \tag{6.6}$$

Aangezien voor topologische groepen de lemma's van Schur geldig zijn kunnen de stellingen 4.1 en 4.2 onmiddellijk op compacte topologische groepen overgedragen worden.

Stelling 6.6

Is $M_{ijk}(g)$ het matrixelement van de j^e rij en de k^e kolom van de unitaire irreducibele representatie M_i van een compacte topologische groep dan geldt

$$(M_{ijk}(g),\ M_{pqr}(g)) = m^{-1}\ \delta_{ip}\ \delta_{jq}\ \delta_{kr},$$

waarbij voor i = p m de dimensie van de overeenkomstige representatie is.

De uit het systeem van onderling niet-aequivalente unitaire irreducibele representaties M_i volgende vectoren $M_{ijk}(g)$ vormen in de groepruimte L een orthogonaal stelsel. Volgens een fundamentele stelling uit de theorie van de topologische groepen waaraan de namen verbonden zijn van F. Peter en H. Weyl is het aldus verkregen stelsel volledig in de zin van uniforme convergentie. Dit wil zeggen dat een willekeurige, continue groepfunctie $\phi(g)$ in de sup-norm willekeurig dicht benaderd kan worden door een eindige lineaire combinatie van basiselementen $M_{ijk}(g)$. Precieser geformuleerd, bij elke $\varepsilon > 0$ is er een stelsel coëfficiënten c_{ijk} zodanig dat

$$\sup_{g\in G} \left|\phi(g) - \sum c_{ijk} M_{ijk}(g)\right| < \varepsilon.$$

Stelling 6.7 (Peter en Weyl)
De matrixelementen $M_{ijk}(g)$ behorende bij alle onderling niet-aequivalente irreducibele unitaire representaties van een compacte topologische groep vormen een volledige basis in de ruimte van continue groepfuncties.

Voorbeeld 6.5
Alle irreducibele, en eenwaardige, representaties van de vlakke draaiingsgroep zijn $M_n(g)$ met $g(\alpha) \to \exp in\alpha$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Volgens de stelling van Peter-Weyl vormen de functies $\exp in\alpha$ een volledige basis in de ruimte van periodieke continue functies $\phi(\alpha)$ met periode 2π. Dit is een bekend resultaat in de theorie van de Fourier reeksen.

Op analoge wijze als bij eindige groepen kunnen uit de matrixrepresentaties van een topologische groep karakters afgeleid worden. Voor deze is stelling 4.3 onverminderd geldig.

Bij groepen met oneindig veel elementen zijn ook oneindig dimensionale representaties mogelijk. Hieronder moeten wij dan een homomorfe afbeelding op lineaire operatoren in bijv. een oneindig dimensionale genormeerde vectorruimte, een Banach ruimte of een Hilbert ruimte, verstaan. Evenwel kan bewezen worden dat een compacte topologische groep geen oneindig dimensionale irreducibele representaties toelaat.

7. De twee- en drie-dimensionale rotatiegroep

In deze en de volgende hoofdstukken maken we veel gebruik van een beknopte en overzichtelijke notatie van de door ons beschouwde groepen van lineaire transformaties. De groep van alle reële $n \times n$ matrices duiden we aan met $GL(n,R)$, die van alle complexe $n \times n$ matrices met $GL(n,C)$. Bij de overeenkomstige ondergroep van unimodulaire matrices (dus det = +1) wordt de letter G (general) vervangen door S (special). De groep van unitaire matrices is vervolgens $U(n)$ of U_n of in het bijzonder $SU(n)$ en SU_n indien de matrices ook unimodulair zijn. De groep van orthogonale matrices duiden we analoog met O_n of SO_n aan.

Voordat we overgaan tot de behandeling van de ruimtelijke draaiingsgroep SO_3 resumeren we wat in het voorgaande gezegd is over de vlakke draaiingsgroep. De elementen van SO_2 kunnen we schrijven als $e^{i\alpha}$ waarbij de groepvermenigvuldiging samenvalt met de complexe vermenigvuldiging van scalairen. De groep is een topologische groep. De eenduidige irreducibele representaties van SO_2 zijn eendimensionaal en worden gegeven door de rij

$$1,\ e^{\pm i\alpha},\ e^{\pm 2i\alpha},\ \ldots .$$

De invariante integraal van de groepfunctie $\phi(\alpha)$ is

$$\mu(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\alpha)\, d\alpha.$$

De elementen van O_2 bestaan uit draaiingen over een hoek α en uit spiegelingen. We kunnen ze beschrijven met twee parameters, een continue α en een directe ± 1. De groep valt topologisch in twee stukken uiteen omdat een spiegeling niet op continue wijze uit draaiingen kan ontstaan. De groep is niet commutatief en wel geldt voor elke draaiing $(\alpha,1)$ en spiegeling $(\beta,-1)$ de betrekking

$$(\alpha,1)(\beta,-1) = (\beta,-1)(-\alpha,1).$$

De irreducibele representaties zijn niet meer noodzakelijk eendimensionaal. Zonder moeite kan men verifiëren dat irreducibele representaties gevormd worden door de twee eendimensionale afbeeldingen

$$(\alpha,1),\ (\beta,-1) \to 1$$

en

$$(\alpha,1) \to 1 \quad ; \quad (\beta,-1) \to -1.$$

en de tweedimensionale matrices

$$(\alpha,1) \to \begin{pmatrix} e^{n\alpha i} & 0 \\ 0 & e^{-n\alpha i} \end{pmatrix} \ ; \ (\beta,-1) \to \begin{pmatrix} 0 & e^{n\beta i} \\ e^{-n\beta i} & 0 \end{pmatrix} .$$

De tabel van de karakters wordt hiermede

	eenheid	draaiing $\pm\ \alpha$	spiegeling
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_{n+2}	2	2 cos $n\alpha$	0

Na deze aanloop beschouwen we de echte driedimensionale draaiingen. Een dergelijke draaiing kunnen we beschrijven als een orthogonale 3 × 3 matrix te interpreteren als een lineaire transformatie in Cartesische coördinaten

$$x_i' = t_{ij}\ x_j\ ,\quad i,j = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.1}$$

waarbij de eenheidsvectoren (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) door de draaiing overgaan in de eenheidsvectoren (t_{11},t_{21},t_{31}), (t_{12},t_{22},t_{32}) en (t_{13},t_{23},t_{33}). Zoals we weten is de matrix (t_{ij}) orthogonaal en geldt det $(t_{ij}) = 1$. Tengevolge van de orthogonaliteitsrelaties leveren de negen coëfficiënten t_{ij} slechts drie vrijheidsgraden op. Er zijn verschillende mogelijkheden om voor de ruimtelijke draaiingen drie onafhankelijke parameters te geven. Men kan bijv. uitgaan van de stand van de draaiingsas en de grootte ϕ van de draaiingshoek. Wordt de draaiingsas vastgelegd door een eenheidsvector $\vec{e}$ dan kan men afspreken dat de draaiing altijd in positieve zin gerekend wordt met een positieve draaiingshoek in het interval $(0,\pi)$. Dus met de nieuwe z-as gericht langs $\vec{e}$ vindt men: $STS^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De eigenwaarden van de matrix $T = (t_{ij})$ zijn dus 1, $e^{i\phi}$ en $e^{-i\phi}$. De bij 1 behorende eigenvector levert op de gebruikelijke wijze de draaiingsas. De draaiingshoek ϕ vinden we het gemakkelijkst door het spoor van (t_{ij}) te nemen. Hieruit volgt

$$1 + 2\cos\phi = t_{11} + t_{22} + t_{33}.$$

We kunnen de elementen van SO_3 op fraaie wijze meetkundig afbeelden door aan het element met rotatievector $\vec{e}$ en rotatiehoek ϕ het punt $\phi\vec{e}$ toe te voegen. Op deze wijze vullen de elementen van SO_3 een massieve bol met straal π. Het eenheidselement correspondeert met de oorsprong en inverse elementen corresponderen met diametrale punten. Een klein probleem geven de draaiingen over 180°, d.w.z. de lijnspiegelingen. Willen we de topologische samenhang van de groep met die van de bol in overeenstemming brengen dan zit er niets anders op dan een lijnspiegeling af te beelden op twee diametraal gelegen punten op het oppervlak van de genoemde bol en vervolgens dit puntenpaar op te vatten als een enkel punt. Deze identificatie van diametrale punten op het boloppervlak verleent aan de topologische structuur van SO_3 een meervoudige topologische samenhang.

Een draaiing om de positieve X_i-as over de nu positief of negatief te rekenen draaiingshoek ϕ $(-\pi \leq \phi \leq \pi)$ duiden we aan met de notatie $D_i(\phi)$.
In het bijzonder is

$$D_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

In de bovengenoemde afbeelding is hieraan dus het punt $(\phi,0,0)$ toegevoegd.
Het blijkt mogelijk te zijn een willekeurige draaiing op te vatten als het product van speciale draaiingen van het type $D_i(\phi)$. Van dit belangrijke feit kan men zich gemakkelijk meetkundig overtuigen (zie fig. 7.1).

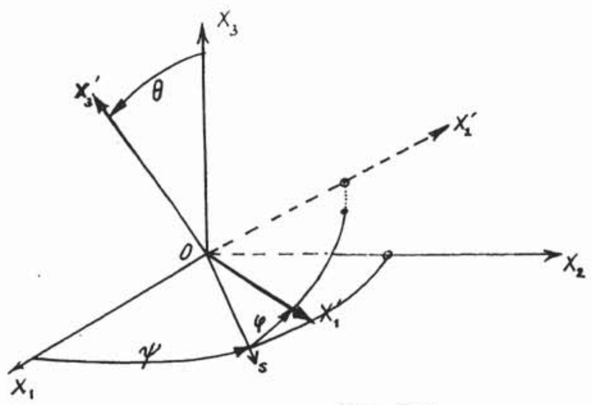


fig. 7.1

We nemen aan dat de assen OX_i door de draaiing overgaan in OX_i'. Zij nu s de snijlijn van de vlakken X_1OX_2 en $X_1'OX_2'$ dan voeren we eerst een rotatie om de X_3-as uit over de hoek ϕ (s,OX_1') vervolgens een rotatie om de X_1-as over de hoek θ (OX_3,OX_3') en tenslotte weer een rotatie om de X_3-as over de hoek ψ (OX_1,s).
In formulevorm

$$D(\phi,\theta,\psi) = D_3(\psi)\, D_1(\theta)\, D_3(\phi) \tag{7.2}$$

of uitgeschreven

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\theta & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

De hoeken θ, ϕ en ψ heten de hoeken van Euler. Door hen is de draaiing volledig vastgelegd. We merken op dat we kunnen volstaan met

$$0 \leq \phi,\psi \leq 2\pi \ , \quad 0 \leq \theta \leq \pi .$$

Door de draaiing $D(\phi,\theta,\psi)$ gaat de eenheidsvector $(0,0,1)$ blijkbaar over in de eenheidsvector $(\sin\psi \sin\theta, -\cos\psi \sin\theta, \cos\theta)$. Hieruit blijkt dat de Eulerse hoeken ψ en θ de rol van bolcoördinaten spelen. In de gebruikelijke notatie stemmen $\psi - \frac{1}{2}\pi$ en θ precies met de bolcoördinaten van de eenheidsbol overeen. Deze opmerking is van belang voor het inzicht dat de genormeerde invariante integraal voor groepfuncties $f(D)$ of meer expliciet $f(\phi,\theta,\psi)$ bepaald is door (verg. voorbeeld 6.1)

$$(7.3) \qquad \mu(f) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi,\theta,\psi)\ \sin\theta\ d\phi\ d\theta\ d\psi .$$

Het essentiële punt is na te gaan wat het effect van een willekeurige draaiing $D(\phi_0,\theta_0,\psi_0)$ is ter verificatie van de translatieve invariantie. Wij eisen dus dat $\int f(DD_0)dD = \int f(D)dD$ voor alle D_0, $dD = \sin\theta\ d\phi\ d\theta\ d\psi$. Aangezien een willekeurige draaiing volgens (7.2) het product van speciale draaiingen is, is het voldoende na te gaan wat het effect is van de speciale draaiingen $D_3(\phi_0)$ en $D_1(\theta_0)$. Verandering van ϕ alleen heeft geen invloed wegens de periodiciteit van f in ϕ want $f(DD_3(\phi_0)) = f(\phi+\phi_0,\theta,\psi)$. Laten we de integratie over ϕ nu buiten beschouwing dan resteert er in feite een dubbelintegraal die in verband met de boven gemaakte opmerking opgevat kan worden als de integraal over de eenheidsbol met het oppervlakteelement $\sin\theta\ d\theta\ d\psi$. De invariantie van $\mu(f)$ volgt hieruit onmiddellijk. De factor $8\pi^2$ ontstaat uit $f \equiv 1$ als het product van 2π, het ϕ interval, met 4π, het oppervlak van de eenheidsbol.

Op de volgende wijze kan van SO_3 een tweedimensionale unitaire representatie gevormd worden. We passen daartoe op de bol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/4$ stereografische projectie toe t.o.v. $N(0,0,\frac{1}{2})$ en het raakvlak in $Z(0,0,-\frac{1}{2})$.

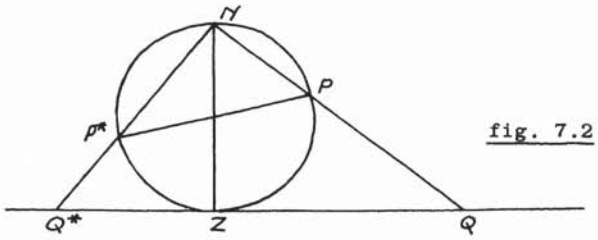


fig. 7.2

Een draaiing van de bol voert cirkels op de bol in elkaar over. Bij stereografische projectie gaan cirkels op de bol over in cirkels in het platte vlak, dus een rotatie van de bol levert een cirkelverwantschap in het raakvlak in Z. Zoals bekend kan een dergelijke cirkelverwantschap beschreven worden in complexe coördinaten als een bilineaire complexe transformatie

(7.4) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \ .$$

Bij de stereografische projectie van twee diametrale punten P en P^* geldt voor de projecties Q en Q^* de meetkundig evidente eigenschap $zQ \cdot zQ^* = zN^2 = 1$. Correspondeert Q met het complexe getal z dan komt Q^* dus overeen met $-1/\bar{z}$.

Aangezien bij een willekeurige draaiing van de bol diametrale punten overgaan in diametrale punten moet de bilineaire transformatie (7.4) voldoen aan de eigenschap

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \, \overline{\left\{\frac{\alpha(-\bar{z})^{-1} + \beta}{\gamma(-\bar{z})^{-1} + \delta}\right\}}^{-1} \equiv -1$$

voor alle z, d.w.z. aan

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \equiv - \frac{\bar{\delta} z - \bar{\gamma}}{\bar{\beta} z - \bar{\alpha}} \ .$$

Hieruit volgt

(7.5) $$\gamma = - e^{i\theta} \, \bar{\beta} \ , \quad \delta = e^{i\theta} \, \bar{\alpha}.$$

We kunnen de coëfficiënten van (7.4) zonder bezwaar zodanig normeren dat

(7.6) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

In dat geval geeft (7.5) de waarde $\theta = 0$ en geldt

(7.7) $$\gamma = -\bar{\beta}\ , \quad \delta = \bar{\alpha}\ , \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

De matrix van (7.4)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

blijkt dus unitair te zijn. De groep SO_3 is daarmede afgebeeld op de groep van bilineaire transformaties (7.4) met de eigenschap (7.7). Dit betekent dus een representatie van SO_3 als de groep SU_2 van unitaire 2×2 matrices met determinantwaarde 1. Een eigenaardigheid van deze representatie is dat met een gegeven draaiing twee unitaire matrices corresponderen waarvan de coëfficiënten onderling in teken verschillen. D.w.z. de verschillende matrices

(7.8) $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

zijn beelden van dezelfde bilineaire transformatie en van dezelfde boldraaiing.

De gevonden resultaten kunnen ook gemakkelijk, zij het met wat meer gereken, afgeleid worden door gebruik te maken van de beschrijving van een boldraaiing in de hoeken van Euler. Met weglating van de technische details vermelden we dat de speciale draaiingen $D_3(\phi)$ en $D_1(\theta)$ corresponderen met de bilineaire transformaties

(7.9) $D_3(\phi)$: $$z' = e^{i\phi}z,$$

(7.10) $D_1(\theta)$: $$z' = \frac{z \cos \frac{1}{2}\theta + i \sin \frac{1}{2}\theta}{iz \sin \frac{1}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta} \ .$$

Voor de bijbehorende unitaire matrices nemen we

$$(7.11)\qquad D_3(\phi):\qquad \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\phi} \end{pmatrix},$$

en

$$(7.12)\qquad D_1(\theta):\qquad \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta & i\sin\frac{1}{2}\theta \\ i\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

Volgens (7.2) correspondeert de willekeurige draaiing $D(\phi,\theta,\psi)$ met het product

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\psi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta & i\sin\frac{1}{2}\theta \\ i\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\phi} \end{pmatrix}$$

dus met de unitaire matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ waarbij (verg. voorbeeld 6.4)

$$(7.13)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos\frac{1}{2}\theta\,\exp\frac{1}{2}i(\psi+\phi), \\ \beta = i\sin\frac{1}{2}\theta\,\exp\frac{1}{2}i(\psi-\phi). \end{cases}$$

Schrijven we met reële coëfficiënten

$$(7.14)\qquad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2\,,\quad \beta = \beta_1 + i\beta_2$$

dan geldt dus

$$(7.15)\qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Dit betekent dat een driedimensionale boldraaiing afgebeeld kan worden op het oppervlak van een vierdimensionale bol als een diametraal puntenpaar.

8. Representaties van SO_3

Aangezien de groep SO_3 compact is kunnen we volgens stelling 6.4 de algemene m-dimensionale representatie M als unitair beschouwen. Als parameters van een willekeurige draaiing g kiezen we de in de vorige paragraaf beschouwde componenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 van de vector $\vec{\xi}$ gericht langs de rotatieas en waarvan de lengte gelijk aan de rotatiehoek genomen is. Zoals in de algemene theorie van de Liegroepen gebruikelijk is richt onze aandacht zich allereerst op de omgeving van het eenheidselement. De coëfficiënten $M_{ij}(g)$ van de matrix $M(g)$ ontwikkelen we volgens Taylor als

$$M_{ij}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi_k}\right)_0 \xi_k + \ldots ,$$

zodat we ook kunnen schrijven

$$M(g) = I + A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + \ldots . \qquad (8.1)$$

De matrices A_1, A_2, A_3 corresponderen met infinitesimale draaiingen om de coördinaatassen. Inderdaad geldt voor een infinitesimale draaiing over een hoekje δ om de X_1-as

$$M(g) = I + \delta A_1 .$$

Voorbeeld 8.1

Bij de gebruikelijke driedimensionale representatie door orthogonale matrices is met weglating van termen van hogere orde

$$M(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 1 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

want

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We zullen nu bewijzen dat in het algemeen een representatie door zijn drie infinitesimale matrices A_1, A_2, A_3 volledig vastgelegd is. Voeren wij de notatie $\exp A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots$ in, waarin A een $n \times n$ matrix is, dan geldt namelijk de volgende eigenschap.

Stelling 8.1

$$M(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \exp(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3).$$

Bewijs

Voeren we twee draaiingen om dezelfde rotatieas uit dan geldt

$$M(s\xi_1,s\xi_2,s\xi_3)\ M(t\xi_1,t\xi_2,t\xi_3) = M((s+t)\xi_1,\ (s+t)\xi_2\ ,\ (s+t)\xi_3).$$

Differentiëren we beide leden naar s en stellen we vervolgens s = 0 dan volgt met gebruikmaking van (8.1)

$$\frac{d}{dt}\,M(t\xi_1,t\xi_2,t\xi_3) = (A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)M(t\xi_1,t\xi_2,t\xi_3).$$

Aangezien voor t = 0 de matrix $M(t\xi_1,t\xi_2,t\xi_3)$ overgaat in de eenheidsmatrix heeft deze matrixdifferentiaalvergelijking de eenduidig bepaalde oplossing $M(t\xi_1,t\xi_2,t\xi_3) = \exp t(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)$ waaruit voor t = 1 het gestelde volgt.

Stelling 8.2

Voor de rotatiegroep gelden de volgende commutatorrelaties

$$A_1A_2 - A_2A_1 = A_3$$

$$A_2A_3 - A_3A_2 = A_1$$

$$A_3A_1 - A_1A_3 = A_2.$$

Bewijs

We beschouwen de rotaties g en h bepaald resp. door de vectoren $(\alpha,0,0)$ en $(0,\beta,0)$. Voor de representatie van de gelijkvormige rotatie

$$\tilde{h} = g\ h\ g^{-1}$$

geldt

$$M(\tilde{h}) = M(g)\ M(h)\ M(g^{-1}).$$

De bij $\tilde{h}$ behorende vector ontstaat uit die van h door toepassing van de rotatie g, d.w.z. we dienen de vector $(0,\beta,0)$ in het X_2X_3-vlak over een hoek α te draaien. Is α klein dan zijn de componenten van de gedraaide vector in de eerste orde gelijk aan $(0,\beta,\alpha\beta)$.
Ontwikkelen wij M(h) en M(h) naar β dan geldt volgens (8.1)

$$M(h) = I + \beta\ A_2 + O(\beta^2),$$

$$M(\tilde{h}) = I + \beta\ A_2 + \alpha\beta\ A_3 + O(\beta^2,\alpha).$$

Substitutie in bovenstaande betrekking geeft

$$I + \beta\ A_2 + \alpha\beta\ A_3 + O(\beta^2,\alpha) = I + \beta M(g)\ A_2\ M(g^{-1}) + O(\beta^2),$$

zodat bij vergelijking van de eerste orde termen in β volgt

$$A_2 + \alpha\ A_3 = M(g)\ A_2\ M(g^{-1}) + O(\alpha^2).$$

Ontwikkeling van M(g) naar α geeft op analoge wijze

$$M(g) \quad = I + \alpha\ A_1 + O(\alpha^2)$$

$$M(g^{-1}) = I - \alpha\ A_1 + O(\alpha^2).$$

Substitutie leidt dan bij vergelijking van de eerste orde termen in α onmiddellijk tot

$$A_3 = A_1A_2 - A_2A_1.$$

De overige relaties volgen door toepassing van cyclische verwisseling.
Gewoonlijk schrijven we

(8.2) $$[A_1,A_2] \stackrel{\text{def}}{=} A_1A_2 - A_2A_1.$$

<u>Stelling 8.3</u>

Voor een unitaire representatie zijn de operatoren $H_1 = i\ A_1$,

$H_2 = i\ A_2$, $H_3 = i\ A_3$. Hermitisch en voldoen aan de commutatorrelaties

$$[H_1,H_2] = i\ H_3\ ,\quad [H_2,H_3] = i\ H_1\ ,\quad [H_3,H_1] = i\ H_2.$$

Bewijs

Voor een unitaire representatie $M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ geldt in het bijzonder

$$M(\xi_1,0,0)\ M^+(\xi_1,0,0) = I.$$

Ontwikkeling naar ξ_1 geeft volgens (8.1)

$$(I + A_1\xi_1 + \dots)(I + A_1^+\xi_1 + \dots) = I$$

zodat $A_1 + A_1^+ = 0$. Hieruit volgt dat $i\ A_1$ Hermitisch is, en analoog ook $i\ A_2$ en iA_3. De commutatorrelaties volgen onmiddellijk uit de overeenkomstige relaties voor A_1, A_2 en A_3.
In de fysica gebruikt men i.h.a. de letters J_k i.p.v. H_k en heeft men dus de commutatorrelaties $[J_1,J_2] = i\ J_3$ enz. Voor de aansluiting met de literatuur van Gel'fand handhaven wij echter de letters H_k.

Voor de verdere discussie is het beter de Hermitische operatoren H_1, H_2 en H_3 te vervangen door het aequivalente drietal

(8.3) $$H_+ = H_1 + i\ H_2\ ,\quad H_- = H_1 - i\ H_2 \quad \text{en} \quad H_3.$$

Zonder moeite kunnen we hiervoor de volgende betrekkingen afleiden

(8.4) $$[H_+,H_3] = -\ H_+\ ,\quad [H_-,H_3] = H_-\ ,\quad [H_+,H_-] = 2\ H_3.$$

Bovendien geldt

(8.5) $$H_+^+ = H_- \quad \text{en} \quad H_3^+ = H_3.$$

Het onderzoek naar de (irreducibele) unitaire representaties van SO_3 is daarmede teruggebracht tot het vinden van eindig-dimensionale operatoren H_+, H_- en H_3 welke aan de betrekkingen (8.4) en (8.5) voldoen.

Voorbeeld 8.2

Voor de driedimensionale representatie van voorbeeld 8.1 heeft men

$$H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We merken even op dat H_3 de drie reële eigenwaarden -1, 0, 1 bezit. Omdat H_3 Hermitisch is vinden wij in de representatieruimte een orthogonaal stelsel eigenvectoren f_λ met reële eigenwaarden λ. Wij zullen nu de vorm van de overige matrices bepalen in de basis f_λ. In plaats van H_3 hadden wij ook H_1 of H_2 kunnen nemen, i.h.a. verkiest men echter H_3 horende bij de z-as.

Stelling 8.4

Er geldt $H_+f_\lambda = f_{\lambda+1}$ òf $H_+f_\lambda = 0$ en $H_-f_\lambda = f_{\lambda-1}$ òf $H_-f_\lambda = 0$.

Bewijs

Wij moeten dus bewijzen dat uit $H_3f = \lambda f$ volgt $H_3(H_+f) = (\lambda+1)(H_+f)$ en $H_3(H_-f) = (\lambda-1)(H_-f)$, dit volgt onmiddellijk uit de relaties (8.4).

De bovenstaande stelling kunnen we gebruiken om een volledig overzicht van de m eigenwaarden en eigenvectoren van de m-dimensionale Hermitische operator H_3 te verkrijgen. Het resultaat is a.v.

Stelling 8.5

Bij iedere irreducibele representatie D van de rotatiegroep SO_3 is er één getal $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ die de representatie D eenduidig bepaalt. Voor de representatie D^j is er dan een eenduidig bepaalde basis van orthonormale vectoren f_m $(m = -j, -j+1, \ldots, +j)$ zodat de infinitesimale operatoren gegeven zijn door:

$$H_3f_m = m\, f_m$$

$$H_+f_m = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\; f_{m+1}$$

$$H_-f_m = \sqrt{(j-m+1)(j+m)}\; f_{m-1}.$$

Bewijs

Omdat H_3 Hermitisch is zijn de eigenwaarden λ alle reëel. De kleinste noemen wij λ'. Volgens de vorige stelling vinden wij dan een ladder eigenvectoren $f_{\lambda'}$, $H_+ f_{\lambda'}$, $H_+^2 f_{\lambda'}$, ... met eigenwaarden $\lambda = \lambda'$, $\lambda'+1$, $\lambda'+2$, ...

De rij eindigt met $H_+^n f_{\lambda'} = 0$, waarin n de dimensie van de representatieruimte is. Na normering ontstaat de rij orthonorme vectoren

$$f_{\lambda'},\ f_{\lambda'+1},\ f_{\lambda'+2},\ \dots .$$

Als dus f_λ en $f_{\lambda+1}$ eenheidsvectoren zijn, dan is er een factor $\alpha_{\lambda+1}$ zodat

$$H_+ f_\lambda = \alpha_{\lambda+1} f_{\lambda+1} \quad (\alpha_{\lambda+1} \geq 0,\ \alpha_{\lambda'+n} = 0).$$

Op analoge wijze zij

$$H_- f_\lambda = \beta_\lambda\, f_{\lambda-1} \quad (\beta_\lambda \geq 0,\ \beta_{\lambda'} = 0).$$

Uit de normering volgt

$$1 = (f_\lambda, f_\lambda) = \alpha_\lambda^{-1}(H_+ f_{\lambda-1}, f_\lambda) = \alpha_\lambda^{-1}(f_{\lambda-1}, H_- f_\lambda) =$$
$$= \alpha_\lambda^{-1}\beta_\lambda (f_{\lambda-1}, f_{\lambda-1}) = \alpha_\lambda^{-1}\beta_\lambda$$

zodat $\alpha_\lambda = \beta_\lambda$.

Uit de commutator betrekking van (8.4)

$$(H_+H_- - H_-H_+) f_\lambda = 2H_3 f_\lambda = 2\lambda f_\lambda$$

volgt dat

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda'}^2 - \alpha_{\lambda'+1}^2 &= 2\lambda' \\ \alpha_{\lambda'+1}^2 - \alpha_{\lambda'+2}^2 &= 2(\lambda'+1) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{\lambda'+n-1}^2 - \alpha_{\lambda'+n}^2 &= 2(\lambda'+n-1) \end{aligned}$$

en door optellen dat $\lambda' = -\frac{1}{2}(n-1)$. Noemen wij $\frac{1}{2}(n-1) = j$, dan is $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ en de eigenwaarden m doorlopen de ladder

$$m = -j,\ -j+1,\ \dots,\ +j.$$

Door optellen tot en met de term $\alpha_{m-1}^2 - \alpha_m^2 = 2(m-1)$ vindt men tenslotte

$$\alpha_m = \sqrt{(j-m+1)(j+m)}.$$

De eigenwaarden van H_3 strekken zich dus uit volgens $-j$, $-j+1$, ..., $j-1$, j.

Wij nemen vervolgens aan dat de representatie irreducibel is. Dit betekent dat in de lineaire representatieruimte er geen invariante deelruimte is. Een dergelijke deelruimte zou invariant moeten zijn voor de operatoren A_1, A_2, A_3 en dus ook voor de operatoren H_3, H_+ en H_-. Volgens het zojuist bewezene spannen de vectoren f_{-j}, f_{-j+1}, ..., f_j, welke door de genoemde operatoren in elkaar overgaan, een invariante n-dimensionale deelruimte op. Op grond van de irreducibiliteit moet dit de volledige representatieruimte zijn, zodat n de dimensie van de representatie is. Men zegt dat deze vectoren een kanonische basis vormen en j heet het gewicht van de irreducibele representatie D^j.

Indien een representatie reducibel is vinden we volgens de bovenstaande constructie een rij van n_1 eigenwaarden van H_3 tussen $-j_1$ en $+j_1$ waarbij de eigenvectoren een invariante n-dimensionale deelruimte opspannen. In het orthogonale complement beschouwen we H_3 opnieuw en herhalen de constructie. Aldus ontstaat er een rij van n_2 eigenwaarden tussen $-j_2$ en $+j_2$ waarbij natuurlijk $n_1 \geq n_2$ en $j_1 \leq j_2$. Dit proces wordt voortgezet totdat de representatie volledig gereduceerd is. In elke invariante deelruimte treffen we een "laagste" eigenvector e aan met de eigenschap $H_-e = 0$. Hieruit volgt de volgende stelling:

Het aantal irreducibele componenten van een representatie is gelijk aan de dimensie van de door

$$H_3 f = \mu f\ ,\quad H_- f = 0$$

bepaalde lineaire deelruimte.

Het belangrijkste resultaat van stelling 8.5 is dus dat iedere irreducibele representatie M(g) eenduidig een gewicht j bepaalt $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$. Omgekeerd bestaan er bij iedere $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ operatoren H_+, H_-, H_3 volgens de gegeven formules. Het is echter niet triviaal dat er omgekeerd inderdaad een representatie bestaat waar deze operatoren, de infinitesimale operatoren van zijn. (Het bewijs dat de uitdrukking $M(\xi) = \exp(A_i \xi_i)$ een representatie van SO_3 is kan men b.v. in de theorie van de Lie-groepen vinden.) In stelling 9.1 zullen wij echter aantonen dat er inderdaad omgekeerd geldt, dat ieder getal $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ een irreducibele representatie van SO_3 levert. Er geldt dus dat alle irreducibele representaties van SO_3 geklassificeerd worden volgens D^j $(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$.

Voorbeeld 8.3

We beschouwen het Kronecker product van de irreducibele representaties met gewichten j en j' dus $D^j \times D^{j'}$.

Bij deze representaties horen de kanonieke bases $e_{-j}, \ldots, e_{+j}$ en $f_{-j'}, \ldots, f_{+j'}$. De representatie $D^j \times D^{j'}$ werkt in de productruimte $R_{2j+1} \times R_{2j'+1}$ waarbij de vectoren $e_m f_{m'}$, $m = -j, -j+1, \ldots, +j$ en $m' = -j', -j'+1, \ldots, +j'$ een basis vormen.

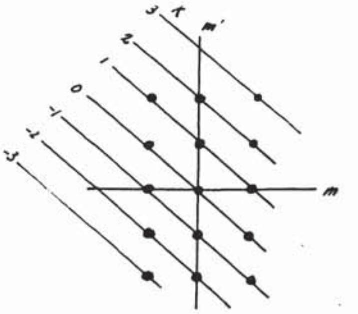
Het effect van de H_3 operator op het basiselement $e_m f_{m'}$ volgt uit

$$M(\xi)\; e_m f_{m'} \stackrel{\text{def}}{=} (M(\xi)e_m)(M(\xi)f_{m'})$$

dus na differentiëren

$$\begin{aligned} H_3(e_m f_{m'}) &= (H_3 e_m) f_{m'} + e_m (H_3 f_{m'}) \\ &= (m + m') e_m f_{m'} \end{aligned}$$

zodat $e_m f_{m'}$ eigenvector van H_3 met eigenwaarde $K = m + m'$ is. Blijkbaar zijn deze eigenwaarden i.h.a. meervoudig waarbij de multipliciteit afhangt van de m,m' combinaties met constante som $k = m + m'$. De situatie schetsen wij hieronder aan de hand van het speciale geval $m = 1$, $m' = 2$.



eigenvectoren	multipliciteit van k	k
$e_1 f_2$	1	3
$e_0 f_2 \quad e_1 f_1$	2	2
$e_{-1} f_2 \quad e_0 f_1 \quad e_1 f_0$	3	1
$e_{-1} f_1 \quad e_0 f_0 \quad e_1 f_{-1}$	3	0
$e_{-1} f_0 \quad e_0 f_{-1} \quad e_1 f_{-2}$	3	-1
$e_{-1} f_{-1} \quad e_0 f_{-2}$	2	-2
$e_{-1} f_{-2}$	1 +	-3
	15	

De representatie $D^1 \times D^2$ valt derhalve uiteen in de drie irreducibele componenten D^3, D^2, D^1.
De algemene formule is blijkbaar

$$D^j \times D^{j'} = D^{j+j'} + D^{j+j'-1} + \ldots D^{|j-j'|} \tag{8.6}$$

(reeks van Clebsch-Gordon).

Toepassing

De representatie D^1 is de gewone vector representatie. Het product $D^1 \times D^1$ is de tensor representatie d.w.z. de transformaties van tensoren van de orde 2 waarvan het aantal componenten 9 is. Volgens (8.6) geldt

$$D^1 \times D^1 = D^2 + D^1 + D^0.$$

Dit betekent dat bij tensortransformaties er een scalaire invariant D^0 en een vectoriële invariant D^1 is. Inderdaad kent men bij een (Cartesische) tensor T_{ij} het invariante spoor $T_{11} + T_{22} + T_{33}$ en de antisymmetrische component $T_{ij} - T_{ji}$ welke als een vector $(T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$ transformeert. Uitgeschreven gaat gaat de reductie van $T(T_{ij})$ in 2 stappen:

(1) Splitsing van T in een symmetrisch en anti-symmetrisch deel

$$T = S + A \quad S = \frac{1}{2}(T + T^T), \; A = \frac{1}{2}(T - T^T)$$

deze splitsing is rotatie-invariant, want na de tensor transformatie

$$T_{i'j'} = r_{i'i}\, r_{j'j}\, T_{ij} \text{ of } T' = r\, T\, r^T$$

blijven S en A respectievelijk symmetrisch en anti-symmetrisch.

(2) Splitsing van S in een tensor

$$S_0 = S - \frac{1}{3}\,(\text{sp } S)I$$

met spoor nul en een scalar $\frac{1}{3}$ (sp S)I, dus

$$T = (S - \frac{1}{3}\,(\text{sp } S)I) + A + \frac{1}{3}\,(\text{sp } S)I$$ met dimensie

$$9 = 5 + 3 + 1.$$

9. Spinoren

In de ruimte met coördinaten (x,y,z) beschouwen wij de zg. isotrope kegel,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{9.1}$$

Behalve (0,0,0) wordt hieraan alleen door complexe (x,y,z) voldaan, de zg. isotrope vectoren.
Wij kunnen de punten op de nulkegel als volgt door twee parameters ξ en η beschrijven

$$x = \xi^2 - \eta^2,\ y = i(\xi^2 + \eta^2),\ z = -2\xi\eta. \tag{9.2}$$

Bij elk getallenpaar (ξ,η), een spinor, behoort de door (9.2) bepaalde isotrope vector. Omgekeerd kan men bij een gegeven isotrope vector (x,y,z) twee getallenparen afleiden volgens

$$\xi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(x-iy)}\ ,\quad \eta = \frac{x+iy}{z}\,\xi. \tag{9.3}$$

Ook zonder deze omkeerformule is aan (9.2) te zien dat (ξ,η) en $(-\xi,-\eta)$ dezelfde isotrope vector bepalen. De isotrope vectoren $\vec{x}$ kunnen dus $(1 \to 2)$ afgebeeld worden op spinoren: $\vec{x} \to \pm\,(\xi,\eta)$.
Willen wij een (1-1) afbeelding tussen isotrope vectoren en spinoren dan kennen wij de isotrope vectoren een "polarisatie" $\sigma = \pm 1$ toe, want dan

$$(\vec{x},\sigma) \leftrightarrow (\xi,\eta).$$

Wij zeggen nu dat een spinor een gepolariseerde isotrope vector is.

We beschouwen nu het effect van een rotatie om de Z-as $D_3(\phi)$.
De isotrope vector (x,y,z) wordt getransformeerd in $(x\cos\phi - y\sin\phi,\ x\sin\phi + y\cos\phi,\ z)$ hetgeen geschreven kan worden als

$$\begin{cases} x' = e^{-i\phi}\xi^2 - e^{i\phi}\,\eta^2 \\ y' = ie^{-i\phi}\xi^2 + ie^{i\phi}\eta^2 \\ z' = -\,2\xi\eta. \end{cases}$$

We kunnen dus stellen dat ξ en η overgaan in ξ' en η' volgens

(9.4) $$\xi' = e^{-\frac{1}{2} i\phi}\xi \ , \quad \eta' = e^{\frac{1}{2} i\phi}\eta .$$

We merken hieraan op dat een rotatie over 2π die meetkundig gezien de identiteit is bij een spinor de polarisatie verandert. De tweewaardigheid van de parametrisering (ξ,η) heeft hiermede een zinvolle betekenis gekregen die te vergelijken is met het Riemann oppervlak voor de analytische functie $\sqrt{z}$ waarbij pas een dubbele rondgang om de oorsprong tot de aanvankelijke waarde terugvoert.
Het effect van een rotatie $D_1(\theta)$ blijkt analoog te corresponderen met de unitaire transformatie

(9.5) $$\begin{cases} \xi' = \xi \cos \frac{1}{2}\theta - i\eta \sin \frac{1}{2}\theta \\ \eta' = - i\xi \sin \frac{1}{2}\theta + \eta \cos \frac{1}{2}\theta . \end{cases}$$

Ook hierbij constateren we verandering in polarisatie bij een overgang van $\theta \rightarrow \theta+2\pi$.
Uit (7.2) volgt tenslotte de transformatieregel voor een willekeurige draaiing $D(\phi, \theta, \psi)$ welke als product van unitaire transformaties zelf unitair is.

Men kan met spinoren in vele opzichten als met tensoren rekenen. Duiden we spinorcomponenten aan met s_i en getransformeerde componenten met $s_{i'}$, dan schrijven we de spinortransformatie in de vorm

$$s_{i'} = t_{i'i}\, s_i \qquad (i = 1,\ 2).$$

Als bij tensoren definiëren we een <u>spinor</u> van de rang m door middel van de transformatieregel

$$s_{i_1' i_2' \ldots i_m'} = t_{i_1' i_1}\, t_{i_2' i_2} \ldots t_{i_m' i_m}\, s_{i_1 i_2 \ldots i_m} .$$

Een spinor van de rang m bezit 2^m componenten en kan dus afgebeeld worden als een vector in een vectorruimte van de dimensie 2^m. De groep SO_2 induceert in deze ruimte een representatie, die in het algemeen reducibel is.

Van bijzondere interesse zijn de symmetrische spinoren van de m^e orde welke gekenmerkt zijn door de eigenschap dat de componenten $s_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ invariant zijn voor een willekeurige permutatie van de indices.

Voorbeeld 9.1

De symmetrische spinoren van de orde m = 5 bezitten slechts de m + 1 = 6 componenten

$$s_{11111},\ s_{11112},\ s_{11122},\ s_{11222},\ s_{12222},\ s_{22222}.$$

De eigenschap van symmetrie is natuurlijk slechts zinvol wanneer de symmetrie door de spinortransformaties niet verstoord wordt. Van dit feit kan men zich zonder moeite overtuigen. De symmetrische spinoren van de rang m vormen in de bovengenoemde vectorruimte van de dimensie 2^m een m+1-dimensionale invariante deelruimte. In deze deelruimte wordt door SO_3 dus een m+1-dimensionale representatie geïnduceerd. Het is van groot belang dat deze representatie irreducibel is. Van dit belangrijke resultaat zullen we hieronder een bewijs geven. De betekenis hiervan is dat op deze wijze van SO_3 voor willekeurige m ($m \geq 1$) een m+1-dimensionale irreducibele representatie geconstrueerd kan worden. Dus bij iedere $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ vinden wij nu een irreducibele representatie van de dimensie $(2j+1)$ in de ruimte van symmetrische spinoren (zie opmerking na stelling 8.5).

Stelling 9.1

Iedere irreducibele representatie van SO_3 is aequivalent met de $(2j+1)$-dimensionale spinorrepresentatie in de ruimte van $(2j)^e$ orde symmetrische spinoren.

Bewijs

Wij moeten slechts aantonen dat in de (m+1)-dimensionale deelruimte S_{m+1} van de 2^m-dimensionale vectorruimte van symmetrische spinoren van de orde m de door SO_3 geïnduceerde representatie irreducibel is.

We beschouwen slechts het effect van de operator H_3. Voor $m = 1$ is H_3 van de vorm

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

We laten nu H_3 werken op spinoren van de orde $m > 1$. Dit betekent dat we op elk der m indices van $s_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ de H_3 operator van de orde 1 toepassen en sommeren, d.w.z.

$$H_3^{(m)} s_{i_1 i_2 \ldots i_m} = (H_3)_{i_1' j} s_{j i_2 \ldots i_m} + \ldots + (H_3)_{i_m' j} s_{i_1 i_2 \ldots j}.$$

Bevat de component $s_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ p_1 indices 1 en p_2 indices 2 dan is blijkbaar

$$H_3^{(m)} s_{i_1 i_2 \ldots i_m} = (-\tfrac{1}{2} p_1 + \tfrac{1}{2} p_2) s_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

zodat $s_{11\ldots122\ldots2}$ eigenvector is met eigenwaarde $\lambda = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} m - p_1$.

Het blijkt dat er in S_{m+1} precies m+1 verschillende eigenvectoren met de rij eigenwaarden $-\frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m + 1, \ldots, \frac{1}{2} m$ zijn. Op grond van stelling 8.5 werkt in S_{m+1} dus de irreducibele representatie $D^{\frac{1}{2} m}$.

10. Bolfuncties

In hoofdstuk 8 zijn de representaties van SO_3 bestudeerd door de eigenschappen van de infinitesimale operatoren H_3, H_+ en H_- te analyseren. Voor een irreducibele representatie van de dimensie m bezit H_3 de m eigenwaarden $-l, -l+1, \ldots, l-1, l$ waarbij $l = \frac{1}{2}(m-1)$ het gewicht van de representatie genoemd wordt. In dit verband vermelden we nog de volgende eigenschap.

Stelling 10.1

Voor de operator $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ van een irreducibele representatie van het gewicht l geldt

$$H^2 = l(l + 1)I.$$

Bewijs

Zonder moeite volgt uit de commutatorrelaties van stelling 9.3 dat H^2 commuteert met H_1, H_2 en H_3. Dit betekent dat H^2 commuteert met alle matrices van de representatie. Volgens het lemma van Schur is dus $H^2 = \mu I$. De waarde van μ volgt bijv. uit

$$H^2 f_0 = \left\{\frac{1}{2}(H_+H_- + H_-H_+) + H_3^2\right\} f_0 =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}(m - 1) + \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right)^2\right\} f_0 = l(l + 1) f_0.$$

Uiteraard behoeft geen beroep gedaan te worden op het lemma van Schur door bovenstaande berekening op een willekeurige f_j i.p.v. op f_0 toe te passen.

Een geheel ander uitgangspunt om tot de representaties van SO_3 te komen bestaat in het onderzoek van de polynomium oplossingen van de vergelijking van Laplace welke in Cartesische coördinaten beschreven wordt door

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{10.1}$$

We beginnen met een lijstje van de eenvoudigste oplossingen gerangschikt naar de graad.

graad	homogene polynomen	dimensie
0	1	1
1	x, y, z	3
2	$x^2-y^2, x^2-z^2, xy, xz, yz, y^2-z^2$	5
3	$x^3-3xy^2,\ x^3-3xz^2,\ \ldots,\ xyz$	7

Blijkbaar worden door de polynomen van de graad l een lineaire vectorruimte van de dimensie $m = 2l+1$ opgespannen. Een draaiing, een element van SO_3, voert gelijksoortige polynomium oplossingen in elkaar over en induceert in de genoemde m-dimensionale vectorruimte een transformatie zodat een m-dimensionale representatie van SO_3 gevormd wordt. Inderdaad vindt men langs deze weg alle irreducibele representaties met geheeltallig gewicht. Een nadere analyse wordt bevorderd door het gebruik van bolcoördinaten r, θ, ϕ volgens

$$(10.2) \qquad x = r \sin\theta \cos\phi,\ y = r \sin\theta \sin\phi,\ z = r \cos\theta.$$

De hoeken θ en ϕ corresponderen resp. met de geografische breedte en lengte. Een polynomium oplossing van (10.1) van de graad l kunnen we dan schrijven als

$$(10.3) \qquad f = r^l\, Y(\theta,\phi),$$

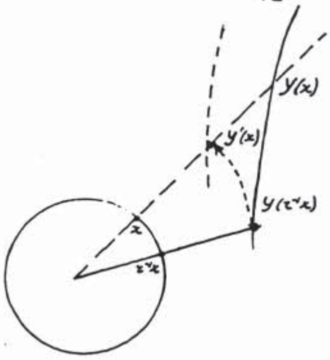
waarbij $Y(\theta,\phi)$ een bolfunctie genoemd wordt. Aangezien bij een draaiing het boloppervlak in zich zelf overgaat kunnen we ons wel beperken tot het gebeuren op de eenheidsbol. Voeren we de substitutie (10.3) in (10.1) uit dan kan na enig gereken voor Y de volgende differentiaalvergelijking afgeleid worden

$$(10.4) \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y = 0.$$

Deze vergelijking is dezelfde als

$$H^2 = l(l+1)I$$

uit stelling 10.1. Want beschouw de ruimte R van functies $Y(x)$ gedefi-



nieerd op de eenheidsbol $x \equiv (\theta,\phi)$, de functiewaarden $Y(x)$ zijn in de figuur radieel uitgezet. Bij een rotatie r transformeert de ruimte R zich als volgt:

$$Y(x) \to \left[M(r)Y\right](x) \equiv Y'(x) = Y(r^{-1}x)$$

(zie figuur). In het bijzonder bij een rotatie ϕ' om de z-as geldt:

$$M(\phi')Y(\theta,\phi) = Y(\theta,\phi-\phi')$$

en dus de infinitesimale operator A_3 werkt als volgt

$$A_3Y(\theta,\phi) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\phi'} M(\phi')\ Y(\theta,\phi)\Big|_{\phi'=0}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\phi} Y(\theta,\phi)$$

dus $A_3 = -\frac{\partial}{\partial\phi}$ en $H_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.
Evenzo kan men de andere infinitesimale operatoren berekenen en $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$, men vindt dan dat de vergelijking

$$H^2Y - l(l+1)Y = 0$$

gegeven wordt door formule 10.4. (Zie bv. Gel'fand blz. 41). De oplossing van (10.4) noteren wij als Y_l, deze horen dus tot een irreducibele representatieruimte R_{2l+1} met gewicht l. Wij zoeken nu een kanonieke basis $Y_{l,m}$ in R_{2l+1} zodat

$$H_3\ Y_{l,m} = m\ Y_{l,m}.$$

Men vindt

$$Y_{l,m} = e^{im\phi} P_{l,m}(\cos\theta).$$

Uit de eis van eenduidigheid volgt dat m een geheel getal is en dus ook $l = 0, 1, 2, \ldots$. Voor P resulteert de gewone differentiaalvergelijking, de zg. geassocieerde Legendre vergelijking

$$\text{(10.6)} \qquad \frac{d}{dt}\left\{(1 - t^2)\frac{dP}{dt}\right\} + \left\{l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - t^2}\right\}P = 0,$$

met

$$t = \cos\theta.$$

De differentiaalvergelijking (10.6) gaat voor $m = 0$ over in die van Legendre welke de polynomen van Legendre $P_l(t)$ tot oplossingen heeft. Ook voor $m = 1, 2, \ldots, l$ heeft (10.6) polynomiale oplossingen en wel

$$\text{(10.7)} \qquad P_{l,m}(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{d}{dt}\right)^m P_l(t).$$

Uit (10.6) volgt verder dat $P_{l,m}$ voor $m = -1, -2, \ldots, -l$ op een normeringsfactor gelijk is aan $P_{l,-m}$. Bij nadere analyse geldt dan ook $P_{l,-m} = (-)^m P_{l,m}$.
De 2l+1 functies

$$\text{(10.8)} \qquad P_l(\cos\theta) \text{ en } P_{l,m}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi,\ 1 \le m \le l,$$

vormen een orthogonaal stelsel op de bol en corresponderen op een normeringsfactor G na met een kanonieke basis e_{lm} in de (2l+1)-dimensionale vectorruimte van de irreducibele representatie van SO_3 van het gewicht l, zoals vermeld in stelling 8.5.

11. De vierdimensionale rotatiegroep

Voor de beschrijving van de draaiingen in een vierdimensionale ruimte kiezen we Cartesische coördinaten (x_1,x_2,x_3,x_4) (x_i reëel), eventueel met x_5 aangevuld tot homogene projectieve coördinaten. Per definitie laten de al of niet echte draaiingen de kwadraatafstand

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{11.1}$$

invariant, hetgeen meetkundig wil zeggen dat elke hyperbol $\sum x_i^2 = R^2$ in zichzelf getransformeerd wordt. Alle hyperbollen snijden de oneindig verre ruimte $x_5 = 0$ in dezelfde kwadriek Ω of isotrope bol

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \; x_5 = 0, \tag{11.2}$$

Zoals elke kwadriet in R_3 wordt Ω overdekt door twee stelsels rechten of beschrijvenden, laten we zeggen λ-rechten en μ-rechten. De beschrijvenden van hetzelfde stelsel kruisen elkaar terwijl elke λ-rechte met elke μ-rechte een snijpunt bezit. De isotrope bol bevat natuurlijk geen reële elementen maar wel ligt met elk punt of rechte ook diens complex geconjugeerde op Ω. De isotrope beschrijvenden van Ω kunnen gemakkelijk op de volgende wijze geparametriseerd worden

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 = \lambda(x_3 + ix_4) \\ \lambda(x_1 - ix_2) = -(x_3 - ix_4), \end{cases} \tag{11.3}$$

en

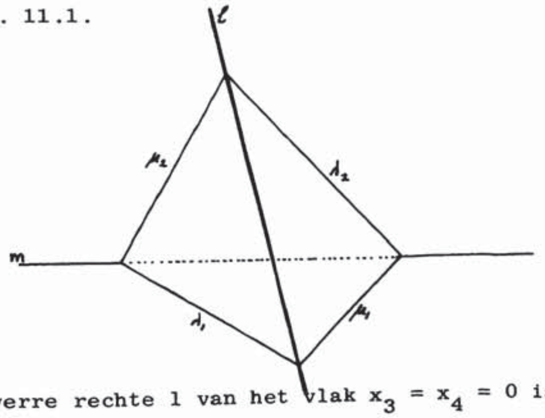
$$\begin{cases} x_1 + ix_2 = \mu(x_3 - ix_4) \\ \mu(x_1 - ix_2) = -(x_3 + ix_4). \end{cases} \tag{11.4}$$

Bij een willekeurige draaiing kunnen er twee dingen gebeuren. Of de λ-rechten transformeren in elkaar en evenzo de μ-rechten of de λ-rechten transformeren in μ-rechten en omgekeerd. Dit wijst al op een splitsing in echte draaiingen en oneigenlijke draaiingen.
We gaan nog even in detail na wat er gebeurt bij een vlakke draaiing,

bijv. een draaiing om de assen OX_3 en OX_4. Het is duidelijk dat deze draaiing beschreven kan worden door de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De oneindig verre punten ondergaan een projectieve transformatie waarbij de isotrope punten van het vlak $x_3 = x_4 = 0$ invariant zijn en alle oneindig vérre punten van het vlak $x_1 = x_2 = 0$ invariant zijn, zie fig. 11.1.



De oneindig verre rechte l van het vlak $x_3 = x_4 = 0$ is dus zelf invariant terwijl de oneindig verre rechte m van het vlak $x_1 = x_2 = 0$ uit louter invariante punten bestaat. In de genoemde figuur zijn ook de door l en m bepaalde isotrope beschrijvenden van Ω aangegeven die eveneens invariant zijn. De λ-rechten worden onderling projectief getransformeerd waarbij λ_1 en λ_2 dekrechten zijn en hetzelfde doet zich voor bij de μ-rechten.

Algebraïsch zijn de elementen van O_4 bepaald door de eis

(11.5) $$x_i' = t_{ij}\, x_j\ , \quad i,j = 1,2,3,4 \quad t_{ij} \text{ reëel},$$

met

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \text{invariant.}$$

Deze eis betekent voor de coëfficiënten t_{ij} van de transformatie (11.5) dat

(11.6) $$t_{ij}\, t_{ik} = \delta_{jk}$$

voor alle indexparen j,k.
Van de 16 coëfficiënten t_{ij} blijven er na de 10 betrekkingen (11.6) dus 6 vrijheidsgraden over. Uit (11.6) volgt als bij de groep O_3 dat

(11.7) $$\det\,(t_{ij}) = \pm 1.$$

Hier blijkt dus de splitsing van O_4 in echte draaiingen, die de ondergroep SO_4 vormen, en oneigenlijke draaiingen volgens het teken van deze determinant.

Bij een willekeurig element van SO_4 ondergaan zowel de λ-rechten als de μ-rechten een projectieve transformatie. Deze transformaties zijn van het type

(11.8) $$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\,.$$

We zullen bewijzen dat voor de reële SO_4 deze transformatie aequivalent is aan een unitaire unimodulaire transformatie met matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} = 1, \\ \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0,\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{matrix}$$

Daartoe schrijven wij λ homogeen, dus $\lambda = \dfrac{z_1}{z_2}$ waaruit volgt $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{pmatrix}$. De vector z transformeert zich volgens de gegeven 2×2 matrix zodat $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$ invariant blijft. Waaruit volgt dat de matrix uit 11.8 unitair is.
Aan elke draaiing van SO_4 beantwoorden dus unitaire transformaties SU_2 zowel in λ als μ.
We hebben derhalve bewezen

Stelling 11.1

De reële groep SO_4 is homomorf met het directe product $SU_2 \times SU_2'$. Met het accent wordt bedoeld dat de λ-lijnen zich onafhankelijk van de μ-lijnen transformeren.

Men kan eenvoudig inzien dat deze homomorfie bijna een isomorfie is. Immers door de projectieve verwantschappen in λ en in μ is een projectieve transformatie van de punten van de isotrope bol Ω bepaald en daarmede een transformatie van alle oneindig verre punten. Aangezien ook de oorsprong O invariant is bestaat er een corresponderende lineaire transformatie tussen de stralen door O. Omdat voorts alle bollen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$ invariant zijn is er practisch voor alle eindige punten een lineaire transformatie vastgelegd. Omdat elke straal een dergelijke bol in twee diametrale punten snijdt zijn er precies twee transformaties bepaald onderling verschillend in een puntspiegeling $x_i' = - x_i$.

12. De Lorentz-groep

In de relativiteitstheorie is het van belang transformaties van ruimte en tijd te beschouwen waarbij de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \tag{12.1}$$

welke de voortplanting van electromagnetische verschijnselen beschrijft, invariant is. Een dergelijke transformatie, welke alleen op x en t betrekking heeft, is

$$\begin{cases} ct' = \dfrac{ct + v/c\ x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \\[2ex] x' = \dfrac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \end{cases} \tag{12.2}$$

Deze transformatie heet een zuivere Lorentz-transformatie. Een algemene Lorentz-transformatie kunnen we naar analogie met een vierdimensionale rotatie beschrijven in een vierdimensionale ruimte (x_0,x_1,x_2,x_3) waarbij x_0 overeenkomt met de tijd ct en x_1,x_2,x_3 overeenkomen met de Cartesische coördinaten (x,y,z) als homogeen lineaire transformaties

$$x_i' = t_{ij}\, x_j , \quad i,j = 0, 1, 2, 3 \tag{12.3}$$

waarbij de kwadratische vorm

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{12.4}$$

invariant is.

De zuivere Lorentz-transformatie (12.2) kunnen we beschrijven door de matrix

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

waarbij

$$\cosh \chi = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} .$$

De Lorentz-transformatie (12.3) kunnen we opvatten als een transformatie in de vierdimensionale Euclidische ruimte (x_0, x_1, x_2, x_3) waarbij alle hyperkwadrieken

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \text{constant} = c \tag{12.6}$$

in zichzelf getransformeerd worden. In het bijzonder geldt dit voor de zgn. lichtkegel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2. \tag{12.7}$$

De lichtkegel valt uiteen in twee stukken, die met $x_0 > 0$ (toekomst) en met $x_0 < 0$ (verleden). De Lorentz-transformaties kunnen elke kegelhelft voor zich invariant laten of de helften verwisselen. Die transformaties waarbij elke helft invariant is heten orthochroon en vormen een ondergroep van de volledige groep van Lorentz-transformaties (12.3). Als in het vorige hoofdstuk voldoen de coëfficiënten t_{ij} aan zekere orthogonaliteitsvoorwaarden en geldt

$$\det (t_{ij}) = \pm 1. \tag{12.8}$$

De Lorentz-transformaties kunnen dus verder onderscheiden worden naar het teken van de coëfficiëntendeterminant. De orthochrone Lorentz-transformaties waarvoor het plusteken geldt vormen de zgn. eigenlijke of beperkte Lorentz-groep. Deze groep wordt symbolisch genoteerd als $L_+^\uparrow$. Men ziet gemakkelijk dat de zuivere Lorentz-transformatie (12.2) een element van $L_+^\uparrow$ is.

De lichtkegel bepaalt in de oneindig verre ruimte een reële bol overdekt door de twee stelsels beschrijvenden

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 = \lambda(x_3 - x_0) \\ \lambda(x_1 - ix_2) = -(x_3 + x_0), \end{cases} \tag{12.9}$$

en

$$(12.10)\qquad \begin{cases} x_1 + ix_2 = \mu(x_3 + x_0) \\ \mu(x_1 - ix_2) = -(x_3 - x_0). \end{cases}$$

Bij een reële Lorentz-transformatie met $\det(t_{ij}) = 1$ worden de λ-rechten onderling getransformeerd en evenzo de μ-rechten. In tegenstelling tot de situatie bij SO_4 is nu hier de μ-transformatie onverbrekelijk gekoppeld aan de λ-transformatie aangezien de complex geconjugeerde van een λ-rechte juist een μ-rechte is. De λ-transformatie is van het type (11.8) waarbij de coëfficiënten α, β, γ, δ willekeurig zijn. Op grond van de homogeniteit mogen we eisen dat

$$(12.11)\qquad \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = 1.$$

Aldus is de Lorentz-groep $L_+^\uparrow$.

Een element van $L_+^\uparrow$ bepaalt i.h.a. twee invariante λ-rechten en twee invariante μ-rechten welke laatste de complex geconjugeerden van de λ-rechten zijn. Aangezien elke λ-rechte met elke μ-rechte een snijpunt heeft zijn er i.h.a. precies twee reële invariante punten op de invariante oneindig verre bol zodat de lichtkegel twee reële invariante beschrijvenden bezit. Het hierdoor bepaalde vlak, dat we V_L noemen, is dus eveneens invariant. Het loodrecht hierop staande vlak V_R is eveneens invariant maar snijdt de lichtkegel niet (loodrecht in de zin van $x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0$). Het is duidelijk dat de Lorentz-transformatie opgevat kan worden als een product van een transformatie waarbij in V_R de passende draaiing wordt uitgevoerd met in V_L de identiteit en een waarbij er in V_R de identiteit is en in V_L de juiste "draaiing" bewerkt wordt. Als V_L door de x_0-as gaat, dan is de eerste transformatie een zuivere draaiing waarbij de tijd x_0 niet verandert, de tweede transformatie heeft betrekking op de tijd en een ruimtecoördinaat van het type (12.2) en is dus een zuivere Lorentz-transformatie of een zgn.

hyperbolische schroef.

Elk van deze twee transformaties is vastgelegd door drie parameters. Stel nu een beperkte Lorentz formatie Λ gegeven zodat Λ: $p(1,0,0,0) \to$ $\to Q$ met $q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 1$ en $q_0 > 0$, dan is er één hyperbolische schroef h zodat h: $P \to Q$ welke bepaald wordt door 3 parameters. Nu laat de transformatie Λh^{-1} de x_0-as invariant en is dus een rotatie $\Lambda h^{-1} = r$ of $\Lambda = rh$. Zodat een Lorentz-transformatie dus door zes parameters bepaald is, een aantal dat in overeenstemming is met dat van de groep SL(2,C).

De eindig-dimensionale representaties van de Lorentz-groep kunnen op verschillende wijzen afgeleid worden, bijv. door uit te gaan van spinortransformaties of op de wijze als beschreven in §8. Daartoe merken we op dat een infinitesimale Lorentz-transformatie van $L_+^\uparrow$ geschreven kan worden als

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{01} & 1 & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{02} & \varepsilon_{12} & 1 & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{03} & -\varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & 1 \end{pmatrix} ,$$

of als bij (8.1).

De infinitesimale operator B_3 volgt bijv. door de 4×4 matrix uit (12.5) naar χ te differentiëren en $\chi = 0$ te stellen.

$$M = I + A_1\varepsilon_{23} + A_2\varepsilon_{31} + A_3\varepsilon_{12} +$$
$$+ B_1\varepsilon_{01} + B_2\varepsilon_{02} + B_3\varepsilon_{03}.$$

Voor deze infinitesimale operatoren kunnen de volgende commutatorrelaties afgeleid worden

Stelling 12.1

$$[A_1, A_2] = A_3 \ , \quad [A_2, A_3] = A_1 \ , \quad [A_3, A_1] = A_2,$$

$$[B_1, B_2] = - A_3, \quad [B_2, B_3] = - A_1 \ , \quad [B_3, B_1] = - A_2,$$

$$[A_i, B_i] = 0 \qquad \text{voor } i = 1, 2, 3.$$

$$[A_1, B_2] = - [A_2, B_1] = B_3, \text{ enz.}$$

Deze relaties welke ook gelden voor de infinitesimale operatoren behorende bij een willekeurige representatie vormen de basis voor een gedetailleerd onderzoek naar de aard van deze representaties. Voor de nadere uitwerking zij verwezen naar het boek van Neumark of Gel'fand.

De Lorentz-groep is in tegenstelling tot SO_4 van niet-compacte aard. Dit brengt allerlei complicaties met zich mede als het bestaan van representaties die niet tot unitaire representaties te herleiden zijn en tot het bestaan van irreducibele oneindig-dimensionale representaties.

Op de volgende wijze kan men zich hiervan overtuigen. Daartoe beschouwen we de met $L_+^\dagger$ homomorfe groep SL(2,C) van matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

te interpreteren als projectieve transformaties van de complexe parameter z volgens

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \ . \tag{12.12}$$

Aan de elementen van $L_+^\dagger$ kunnen dan operatoren M toegevoegd worden welke werken op complexe functies f(z) als elementen van een Hilbert ruimte $L^2(z)$ met inwendig product

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f_1(z)\, \overline{f_2(z)}\, dxdy, \ z = x + iy. \tag{12.13}$$

Het blijkt dat door de toevoeging

$$\text{(12.14)} \qquad Mf(z) = |\gamma z + \delta|^{-m+i\rho-2}(\gamma z + \delta)^m \, f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

waarbij m een geheel getal en ρ een reëel getal is, in de oneindig-dimensionale Hilbert ruimte een oneindig-dimensionale irreducibele representatie bepaald wordt welke bovendien unitair is. Voor een nadere beschouwing zie men weer het boek van Neumark of Gel'fand.

Index