Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

MC SYLLABUS 36

COLLOQUIUM TOPOLOGISCHE DYNAMISCHE SYSTEMEN

J.M. AARTS
J. DE VRIES

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1977

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 34C35, 54H20

ISBN 90 6196 142 4

VOORWOORD

Deze syllabus bevat de stof die besproken is op het colloquium "Topologische dynamische systemen", dat gedurende de cursus 76/77 gehouden werd op het Mathematisch Centrum onder leiding van de auteurs.
De keuze van de behandelde onderwerpen hangt gedeeltelijk samen met de onderzoeksbelangstelling van de auteurs.
Hoofdstuk I kan gezien worden als een eerste inleiding in de theorie van de topologische dynamische systemen. In de paragrafen 9 en 10 wordt de categorie van de topologische dynamische systemen beschreven: morfismen worden gedefinieerd en enkele (nieuwe) resultaten hierover worden afgeleid. Een nadere uitwerking hiervan vindt in hoofdstuk IV plaats.
In hoofdstuk II wordt de theorie van de lokale secties en haar toepassingen op vlakke dynamische systemen behandeld. Het bewijs van het bestaan van uitbreidingen van secties (2.34) bevat een aantal elementen dat nieuw is in de context van de topologische dynamische systemen. In de paragrafen 5 en 6 wordt de theorie van de lokale secties aangewend bij de bestudering van limietverzamelingen in vlakke dynamische systemen. Het op deze wijze ontwikkelde bewijs van de stelling van Poincaré en Bendixson kan gezien worden als tegenhanger van het bewijs van Beck, waarbij geen gebruik van secties wordt gemaakt.
In hoofdstuk III wordt in het kort ingegaan op de dynamische systemen van niet-autonome differentiaalvergelijkingen. Hierbij wordt de opzet van Sell gevolgd. Dit hoofdstuk is grotendeels verzorgd door drs. J.C.S.P. van der Woude (M.C.).

INHOUDSOPGAVE

NOTATIES EN AFSPRAKEN

$\mathbb{R}$: de verzameling (groep, lichaam, topologische ruimte) der reële getallen

$\mathbb{R}^+ := \{t \mid t \in \mathbb{R} \;\&\; t \geq 0\}$

$\mathbb{R}^- := \{t \mid t \in \mathbb{R} \;\&\; t \leq 0\}$

$\mathbb{R}^*$: de *uitgebreide reële rechte,* i.e. $\mathbb{R}$ tesamen met twee "oneigenlijke punten" $-\infty$ en $+\infty$ (i.p.v. $+\infty$ schrijven we vaak ∞). De gebruikelijke ordening en optelling in $\mathbb{R}$ worden als volgt tot $\mathbb{R}^*$ voortgezet: voor alle $x \in \mathbb{R}$ is

$$-\infty < x < \infty$$

$$(-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + x = (+\infty) + (+\infty) = x + (+\infty) = +\infty$$

Intervallen in $\mathbb{R}^*$ worden op de gebruikelijke manier gedefinieerd. Zo is bijvoorbeeld voor $x,y \in \mathbb{R}^*$

$$(x,y] := \{t \mid t \in \mathbb{R}^* \;\&\; x < t \leq y\}.$$

Als $f\colon X \times Y \to Z$ een functie is, laat dan voor alle $x \in X$ en voor alle $y \in Y$ de afbeeldingen $f_x\colon Y \to Z$ en $f^y\colon X \to Z$ gedefinieerd zijn door

$$f_x(y) := f(x,y) =: f^y(x).$$

ALLE TE BESCHOUWEN TOPOLOGISCHE RUIMTEN ZIJN HAUSDORFF (T_2) RUIMTEN.

I. LOKALE DYNAMISCHE SYSTEMEN

1. Lokale dynamische systemen

(1.1) DEFINITIE. Een *lokaal dynamisch systeem* (op X) is een tripel (X,D,π), waarbij

A0. (i) X een topologische ruimte is;

(ii) D een open deelverzameling is van $X \times \mathbb{R}$ van de volgende vorm: er zijn functies α,ω: $X \to \mathbb{R}^*$ zo dat voor alle x

$$0 \in J(x) := (\alpha(x),\omega(x))$$

(men noemt $\alpha(x)$ en $\omega(x)$ wel de *ontsnappingstijden* van x), en

$$D = \cup\{\{x\} \times J(x) \mid x \in X\};$$

(iii) π een afbeelding is van D in X.

Voorts is er aan het volgend viertal axioma's voldaan:

A1. *Identiteitsaxioma*: voor alle $x \in X$ is $\pi(x,0) = x$.

A2. *Groepsaxioma*: voor all $x \in X$ en voor alle s, $t \in \mathbb{R}$ is

$$\pi((\pi(x,t)),s) = \pi(x,t+s)$$

mits beide leden van deze gelijkheid gedefinieerd zijn.

A3. *Continuïteitsaxioma*: de afbeelding π: $D \to X$ is continu.

A4. *Maximaliteitsaxioma*: als $(x,t) \in D$ dan geldt: $(\pi(x,t),s) \in D$ als en slechts als $(x,t+s) \in D$.

Men noemt X wel de *fase-ruimte* en π de *fase-afbeelding* van het lokale dynamische systeem (X,D,π). In het geval dat $D = X \times \mathbb{R}$ (oftewel $\alpha(x) = -\infty$ en $\omega(x) = +\infty$ voor alle $x \in X$) spreekt men van een *globaal dynamisch systeem*.

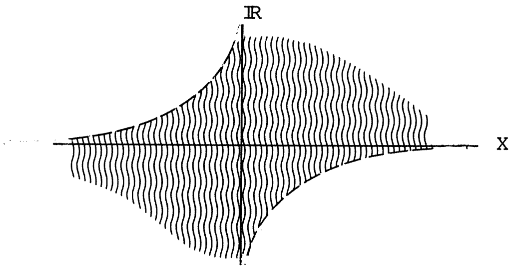
(1.2) VOORBEELDEN

1. *Translaties in* $\mathbb{R}^n$. Zij $X := \mathbb{R}^n$ en $a \in X$. Door $D := X \times \mathbb{R}$ en $\pi(x,t) := x + ta$ voor alle $x \in X$ en $t \in \mathbb{R}$ wordt een globaal dynamisch systeem (X,D,π) gedefinieerd.

2. *Het triviale systeem op* X. Zij X een willekeurige (Hausdorff) ruimte, $D := X \times \mathbb{R}$, en laat $\pi\colon D \to X$ gedefinieerd zijn door $\pi(x,t) := x$. We zullen (X,D,π) het *triviale* (globale) dynamische systeem op X noemen.

3. Laat $X := \mathbb{R}$ en $D := \{(x,t) \mid (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ \& \ xt > -1\}$. Laat voorts $\pi\colon D \to X$ gegeven zijn door

$$\pi(x,t) := \frac{x}{xt+1}\,.$$



Dan is (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem: Aan A0 is voldaan (bijv.: $\alpha(x) = -\infty$ voor $x \le 0$ en $\alpha(x) = -1/x$ voor $x > 0$), en ook aan A1 en A3 is voldaan. We controleren A4: als $(x,t) \in D$ (dat wil zeggen, als $xt > -1$) dan geldt er

$$(\pi(x,t),s) \in D \Longleftrightarrow \frac{xs}{xt+1} > -1 \Longleftrightarrow xs + xt > -1 \Longleftrightarrow (x,t+s) \in D.$$

Tenslotte A2:

$$\pi(\pi(x,t),s) = \frac{\dfrac{x}{xt+1}}{\dfrac{xs}{xt+1}+1} = \frac{x}{xs+xt+1} = \frac{x}{x(s+t)+1} = \pi(x,t+s).$$

(1.3) De theorie van de dynamische systemen heeft zijn oorsprong in de kwalitatieve analyse van het gedrag van oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen. Deze kwalitatieve theorie van gewone differentiaalvergelijkingen begon bijna een eeuw geleden met het werk van H. POINCARÉ en van A. LYAPUNOV. Van speciaal belang is het werk van G.D. BIRKHOFF gedurende de periode 1912-1931 om het kwalitatieve gedrag van oplossingen van differentiaalvergelijkingen op een *topologische* wijze zo adekwaat mogelijk te beschrijven. Het steeds toenemende gebruik van topologische en andere (bijv. functionaalanalytische) methoden in de kwalitatieve theorie leidde tenslotte in de jaren '40 tot het abstracte begrip "globaal dynamisch systeem")*

---

*) Uit stelling (1.13) volgt, dat er een nauw verband bestaat tussen globale dynamische systemen en transformatiegroepen. Laatstgenoemde theorie, die teruggaat tot op S. LIE, werd pas toen in verband gebracht met het werk van POINCARÉ en BIRKHOFF.

en nog later tot het begrip "lokaal dynamisch systeem". Het verband tussen lokale dynamische systemen en differentiaalvergelijkingen komt het best tot uiting in stelling (1.6).

2. Autonome differentiaalvergelijkingen

We vermelden eerst enige feiten over differentiaalvergelijkingen (zie bijv. [HS], chap. 8, met name ook Problem 7 op pag. 177, of [Ha], chap. I).

Zij U een *open* deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, en zij $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. We bekijken het beginwaardeprobleem

(1.4) $$x' = f(x) \quad \text{en} \quad x(t_0) = p,$$

waarin $p \in U$. In dit verband noemt men f wel een *vectorveld*.
Onder een *oplossing* van (1.4) verstaan we een differentieerbare functie $t \mapsto x(t) : (a,b) \to U$, waarin $a < t_0 < b$, $x(t_0) = p$, en waarvan de afgeleide naar t in ieder punt van het interval (a,b) voldoet aan de relatie $x'(t) = f(x(t))$.

(1.5) We zeggen dat f aan de *unicon-voorwaarde* op U voldoet, indien er geldt:

DV1. f is continu op U.

DV2. Voor elke $p \in U$ en elke $t_0 \in \mathbb{R}$ geldt: als $t \mapsto x_1(t)$ en $t \mapsto x_2(t)$ oplossingen zijn van (1.4) dan is er een omgeving van t_0 waarop $x_1(t) = x_2(t)$.

Uit DV1 volgt:

DV3. Voor iedere $p \in U$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ is er tenminste één oplossing van (1.4). Deze is gedefinieerd op een open interval dat het gesloten interval $[t_0-c, t_0+c]$ bevat; hierin is $c = \frac{1}{2}r/M$, met r de straal van een bol om p die bevat is in U en M het maximum van $|f|$ op de gesloten bol om p met straal $\frac{1}{2}r$.

Voorts volgt uit DV1 en DV2

DV4. *Continuiteit in de beginvoorwaarde*. Laat $t \mapsto x_1(t)$ een oplossing zijn van (1.4) welke gedefinieerd is op het interval [a,b], $a, b \in \mathbb{R}$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor iedere

$q \in U$ met $|q-x_1(a)| < \delta$ er een oplossing $t \mapsto x_2(t)$ van het beginwaardeprobleem

$$x' = f(x) \quad \text{en} \quad x(a) = q$$

is die voldoet aan $|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon$ voor alle $t \in [a,b]$.

DV5. Voor iedere $p \in U$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ is er een grootste open interval (a,b) in $\mathbb{R}^*$ dat t_0 bevat en waarop een oplossing (en dan ook niet meer dan één oplossing) gedefinieerd is.

(1.6) STELLING. *Zij* U *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^n$ *en laat* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *aan de unicon-voorwaarde voldoen. Voor iedere* $q \in U$ *noteren we met* $\pi_q: J(q) \to U$ *de oplossing van het beginwaardeprobleem*

(1.7) $$x' = f(x) \quad \text{en} \quad x(0) = q.$$

Hierbij is $J(q) =: (\alpha(q),\omega(q))$ *het grootste open interval in* $\mathbb{R}$ *waarop een oplossing van* (1.7) *gedefinieerd is. Zij* $D := \{(q,t) \mid (q,t) \in U \times \mathbb{R} \;\&\; t \in J(q)\}$, *en zij* $\pi: D \to U$ *gedefinieerd door* $\pi(q,t) := \pi_q(t)$. *Dan is* (U,D,π) *een lokaal dynamisch systeem.*

Gewoon gezegd komt de actie van π hierop neer: $\pi(q,t)$ is het punt waar de oplossing, die op het tijdstip 0 in q is, zich bevindt op het tijdstip t.

BEWIJS. We controleren dat aan de eisen in (1.1) voldaan is.
A0. Zij $(x,t) \in D$, dus $t \in J(x)$. Zonder beperking mogen we aannemen dat $t \geq 0$. Dan is $[0,t] \subset J(x)$. Omdat $J(x)$ open is, is er een $\eta > 0$ zó dat $[-\eta,t+\eta] \subset J(x)$.
Met DV4, toegepast op de intervallen $[-\eta,0]$ en $[0,t+\eta]$, vinden we een $\delta > 0$ zó dat $[-\eta,t+\eta] \subset J(y)$ voor iedere y met $|x-y| < \delta$. M.a.w. $S_\delta(x) \times [-\eta,t+\eta] \subset D$. Dus D is open. Dat D de speciale vorm heeft als omschreven in A0 volgt direct uit de definitie van D.
A1. Triviaal.
A2. Laat $x \in U$ en $t,s \in \mathbb{R}$ zo dat $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$ en $s \in J(\pi(x,t))$. Beide leden van de te bewijzen gelijkheid zijn dan gedefinieerd. Definieer $g: (\alpha(x)-t,\omega(x)-t) \to U$ door $g(v) := \pi_x(t+v)$. Nu is voor alle $v \in (\alpha(x)-t,\omega(x)-t)$

$$g'(v) = \pi_x'(t+v) = f(\pi_x(t+v)) = f(g(v)).$$

g is blijkbaar een oplossing van $x' = f(x)$; omdat $g(0) = \pi(x,t)$ is dus $g(v) = \pi_{\pi(x,t)}(v)$ voor $v \in (\alpha(x)-t,\omega(x)-t) \cap J(\pi(x,t))$.
Omdat $s + t \in J(x)$, is $s \in (\alpha(x)-t,\omega(x)-t)$. Omdat ook nog $s \in J(\pi(x,t))$ mogen we concluderen dat

$$g(s) = \pi_{\pi(x,t)}(s)$$

en dus

$$\pi_x(t+s) = \pi_{\pi(x,t)}(s)$$

oftewel

$$\pi(x,t+s) = \pi(\pi(x,t),s).$$

A3. Laat $(x,t) \in D$ en $\varepsilon > 0$ gegeven zijn.
In verband met de continuiteit van π_x is er een $\delta_1 > 0$ zó dat $J := [t-\delta_1,t+\delta_1] \subset J(x)$ en $|\pi_x(t) - \pi_x(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle $s \in J$.
Op grond van D4 is er een $\delta_2 > 0$ zó dat $|\pi_x(s)-\pi_y(s)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor alle $s \in J$ en alle y met $|x-y| < \delta_2$. Als nu $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ dan geldt voor alle (y,s) met $|(x,t)-(y,s)| < \delta$ dat

$$|\pi(x,t)-\pi(y,s)| \le |\pi(x,t)-\pi(x,s)|+|\pi(x,s)-\pi(y,s)| < \varepsilon.$$

A4. We bewijzen eerst dat voor alle $x \in U$ en $t \in \mathbb{R}$ geldt:

(1.8) $$\text{als } t \in J(x), \quad \text{dan } -t \in J(\pi(x,t)).$$

Noem $y := \pi_x(t)$. Definieer $g\colon (\alpha(x)-t,\omega(x)-t) \to U$ door $g(v) := \pi_x(t+v)$.
Merk op dat g gedefinieerd is voor $v = 0$ en $v = -t$, omdat zowel t als 0 tot het interval $(\alpha(x),\omega(x))$ behoren.
Zoals in het bewijs van A2 kunnen we aantonen dat g een oplossing is van $x' = f(x)$. Verder is $g(0) = y$. Dus valt g, voorzover gedefinieerd samen met π_y. Dus is $-t \in (\alpha(x)-t,\omega(x)-t) \subset J(y)$.
Neem nu aan dat $t \in J(x)$ en noem $y := \pi(x,t)$.
Om A4 te bewijzen moeten we laten zien dat

$$s \in J(y) \Longleftrightarrow t + s \in J(x).$$

Stel $s \in J(y)$. Definieer g door $g(v) := \pi_y(v-t)$ voor $v \in (\alpha(y)+t, \omega(y)+t)$. Merk op dat g gedefinieerd is voor $v = 0$ (want $-t \in J(y)$) en voor $v = t + s$ (want $s \in J(y)$). Nu is g een oplossing van $x' = f(x)$ en $g(0) = \pi_y(-t) = x$. Dus valt g, voorzover gedefinieerd samen met π_x. In het bijzonder is dan $t + s \in J(x)$.
Stel nu $t + s \in J(x)$. Definieer g door $g(v) := \pi_x(t+v)$ voor $v \in (\alpha(x)-t, \omega(x)-t)$. Merk op dat v gedefinieerd is voor $v = 0$ (want $t \in J(x)$) en voor $v = s$ (want $t+s \in J(x)$). g is een oplossing van $x' = f(x)$ en $g(0) = y$. We concluderen, dat $s \in J(y)$. □

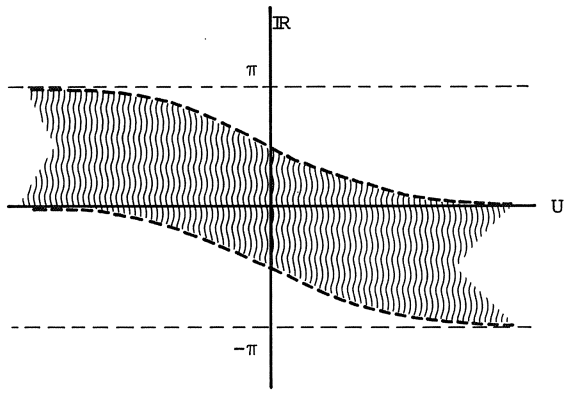
(1.9) VOORBEELDEN

1. Zij in de notatie van stelling (1.6) $U = \mathbb{R}^1$ en zij $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ gegeven door $f(x) = x^2 + 1$. (M.a.w. we beschouwen de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = x^2+1$). Dan is

$$\pi_q(t) = \tan(t+\arctan q)$$

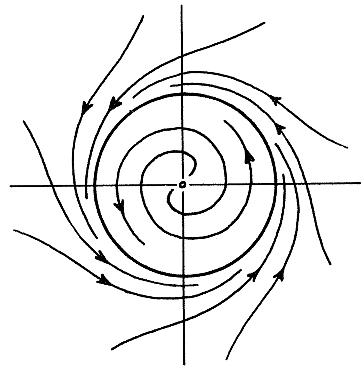
en

$$J(q) = \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan q, \frac{\pi}{2} - \arctan q\right)$$



2. Het lokale dynamische systeem bij de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = -x^2$ in $\mathbb{R}$, is beschreven in (1.2) voorbeeld 3.

3. Laat een "dynamisch systeem" in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gegeven zijn door middel van de volgende vergelijking in poolcoördinaten $\frac{dr}{dt} = 1 - r^2$ en $\frac{d\phi}{dt} = 1$. Op grond van stelling (1.6) is hierdoor een dynamisch systeem op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bepaald.



3. Overgang, beweging en baan

(1.10) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem. Zij voor $t \in \mathbb{R}$
$X_t := \{x \mid x \in X \text{ en } (x,t) \in D\}$.
De afbeelding $\pi^t\colon X_t \to X$ is gedfinieerd door $\pi^t(x) := \pi(x,t)$ en wordt een *overgang* van het systeem genoemd. Voor iedere $x \in X$ is de afbeelding $\pi_x\colon J(x) \to X$ gedefinieerd door $\pi_x(t) := \pi(x,t)$. Deze afbeelding wordt de *beweging door* x genoemd.
Verder definieert men voor $x \in X$

$\Gamma(x) := \{\pi(x,t) \mid t \in J(x)\}$, de *baan van* x;
$\Gamma^+(x) := \{\pi(x,t) \mid 0 \le t < \omega(x)\}$, de *positieve halfbaan van* x;
$\Gamma^-(x) := \{\pi(x,t) \mid \alpha(x) < t \le 0\}$, de *negatieve halfbaan van* x.

Bij differentiaalvergelijkingen gebruikt men in plaats van de termen "beweging" en "baan" meestal de termen "*oplossing*" en "*integraalkromme*".

(1.11) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem.*
1. *Voor alle* $(x,t) \in D$ *is* $J(\pi(x,t)) = J(x) - t$.
2. *Voor alle* $(x,t) \in D$ *is* $-t \in J(\pi(x,t))$.
3. *Voor alle* $x \in X$ *geldt: als* $\pi(x,t_1) = \pi(x,t_2)$ *met* $t_1 \neq t_2$, *dan is* $J(x) = \mathbb{R}$.

BEWIJS.
1. Stel $(x,t) \in D$. Volgens het maximaliteitsaxioma is dan
$(\pi(x,t),s) \in D \iff (x,t+s) \in D$.

Dit komt op hetzelfde neer als

$$s \in J(\pi(x,t)) \iff t + s \in J(x) \iff s \in J(x) - t.$$

2. Uit $(x,t) \in D$, $\alpha(x) < 0$ en $\beta(x) > 0$ volgt met <u>1</u> dat $-t \in J(\pi(x,t))$.
3. Volgens <u>1</u> is $J(\pi(x,t_i)) = J(x)-t_i$ voor $i = 1,2$, en dus $J(x)-t_1 = J(x)-t_2$. Als $t_1 \neq t_2$ kan dit alleen als $J(x) = \mathbb{R}$. □

(1.12) <u>GEVOLG</u>. *Een lokaal dynamisch systeem op een aftelbare ruimte* X *is globaal.*
(Dit is een understatement: uit latere resultaten zal blijken dat er op een aftelbare ruimte slechts één lokaal dynamisch systeem is.)

<u>BEWIJS</u>. Stel $J(x) \neq \mathbb{R}$ voor zekere $x \in X$. Dan is π_x een injectie wegens (1.11)3, en $\Gamma(x)$ is overaftelbaar.
Tegenspraak. □

(1.13) <u>STELLING</u>. *In de notaties van* (1.10) *geldt:*
<u>1</u>. X_t *is een open deelverzameling van* X.
<u>2</u>. π^t *beeldt* X_t *af op* X_{-t} *en de afbeelding* $\pi^t\colon X_t \to X_{-t}$ *is topologisch met als inverse de afbeelding* $\pi^{-t}\colon X_{-t} \to X_t$.
<u>3</u>. $X_t \cap X_{t+s} = \pi^{-t}[X_{-t} \cap X_s]$ *en op deze verzameling zijn de afbeeldingen* $\pi^s \circ \pi^t$ *en* π^{s+t} *beide gedefinieerd en aan elkaar gelijk.*
<u>4</u>. *Als* (X,D,π) *een globaal dynamisch systeem is, dan is* $t \mapsto \pi^t$ *een homomorfisme van de additieve groep* $\mathbb{R}$ *in de groep van alle homeomorfismen van* X.

<u>BEWIJS</u>.
1. Volgt direct uit het feit dat D een open deelverzameling van $X \times \mathbb{R}$ is.
2. Als $y = \pi(x,t)$, dan is $-t \in J(y)$ ((1,11)2), m.a.w. $(y,-t) \in D$ en dus $v \in X$.
Nu is op grond van (1.1) A2 en A1: $\pi^{-t} \circ \pi^t = id_{X_t}$ en $\pi^t \circ \pi^{-t} = id_{X_{-t}}$, en de afbeeldingen π^t en π^{-t} zijn, als "restricties" van de continue afbeelding π, continu.
3. Merk eerst op dat voor $x \in X$ geldt

$$x \in \pi^{-t}[X_{-t} \cap X_s] \Longleftrightarrow x \in X_t \text{ en } \pi^t x \in X_s.$$

Hieruit volgt, dat de te bewijzen bewering niets anders is dan een herformulering van (1.1) A4 en A2.

4. In dit geval is $X_t = X$ voor elke $t \in \mathbb{R}$. Het gestelde volgt nu onmiddellijk uit 2 en 3. □

(1.14) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor alle* $x,y \in X$ *geldt*

$$\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset \quad \textit{of} \quad \Gamma(x) = \Gamma(y).$$

Met andere woorden, de banen van het lokale dynamische systeem vormen een partitie van X.

BEWIJS. Het is voldoende om aan te tonen dat door

$$x \sim y \Longleftrightarrow y \in \Gamma(x)$$

een equivalentie relatie op X wordt gedefinieerd: de banen zijn dan juist de equivalentieklassen. Welnu:
Reflexiviteit: voor alle $x \in X$ is $x = \pi(x,0) \in \Gamma(x)$.
Symmetrie: als $y \in \Gamma(x)$ dan is $x \in \Gamma(y)$ op grond van (1.13) 2.
Transitiviteit: als $y \in \Gamma(x)$ en $z \in \Gamma(y)$, dan is $y = \pi(x,t)$ en $z = \pi(y,s)$ voor geschikte $t \in J(x)$ en $s \in J(y)$. Op grond van (1.1) A4 en A2 (of, zo men wil, (1.13)3) volgt hieruit dat $z = \pi(x,s+t) \in \Gamma(x)$. □

(1.15) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor alle* $x \in X$ *en* $t_0 \in J(x)$ *geldt*

$$\Gamma^+(\pi(x,t_0)) = \{\pi(x,t) \mid t_0 \le t < \omega(x)\},$$

$$\Gamma^-(\pi(x,t_0)) = \{\pi(x,t) \mid \alpha(x) < t \le t_0\}.$$

In het bijzonder geldt voor $t_1,t_2 \in J(x)$, *als* $t_1 \le t_2$

$$\Gamma^+(\pi(x,t_1)) \supset \Gamma^+(\pi(x,t_2)) \text{ en } \Gamma^-(\pi(x,t_1)) \subset \Gamma^-(\pi(x,t_2)).$$

BEWIJS. De tweede bewering volgt direct uit de eerste. Van de eerste bewijzen we alleen de uitspraak omtrent de positieve halfbaan. Welnu, $z \in \Gamma^+(\pi(x,t_0))$ betekent dat $z = \pi(\pi(x,t_0),s)$ voor zekere $s \geq 0$. Op grond van (1.1) A2 en A4 is dit gelijkwaardig met het bestaan van een $s \geq 0$ zo dat $z = \pi(x,t_0+s) \in \{\pi(x,u) \mid t_0 \leq u < \omega(x)\}$. □

4. Limietverzamelingen

(1.16) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem. Voor iedere $x \in X$ definieert men

$$C(x) := \overline{\Gamma(x)}, \text{ de afsluiting van } \Gamma(x) \text{ in } X,$$
$$C^+(x) := \overline{\Gamma^+(x)}, \text{ de afsluiting van } \Gamma^+(x) \text{ in } X,$$
$$C^-(x) := \overline{\Gamma^-(x)}, \text{ de afsluiting van } \Gamma^-(x) \text{ in } X,$$
$$\Omega(x) := \bigcap\{C^+(\pi(x,t)) \mid 0 \leq t < \omega(x)\},$$

de positieve limietverzameling van x, en

$$A(x) := \bigcap\{C^-(\pi(x,t)) \mid \alpha(x) < t \leq 0\},$$

de negatieve limietverzameling van x.

(1.17) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Als* x *en* y *tot dezelfde baan van het systeem behoren (oftewel als* $\Gamma(x) = \Gamma(y)$, (1.14)) *dan is* $\Omega(x) = \Omega(y)$ *en* $A(x) = A(y)$.

BEWIJS. Er is een $s \in \mathbb{R}$ met $x = \pi(y,s)$ en $y = \pi(x,-s)$. We mogen aannemen dat $s > 0$ (of anders is $-s>0$). Volgens (1.11) is $\omega(x) = \omega(y) - s$. Verder is $\pi(x,t) = \pi(y,s+t)$ voor iedere $t \in J(x)$. Dan is

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \bigcap\{C^+(\pi(x,t)) \mid 0 \leq t < \omega(x)\} \\ &= \bigcap\{C^+(\pi(y,s+t)) \mid 0 \leq t < \omega(x)\} \\ &= \bigcap\{C^+(\pi(y,r)) \mid s \leq r < \omega(x) + s = \omega(y)\}.\end{aligned}$$

Voor iedere r met $0 \leq r < s$ is

$$\Gamma^+(\pi(y,r)) \supset \Gamma^+(\pi(y,s)) \text{ volgens (1.15), en dus}$$
$$C^+(\pi(y,r)) \supset C^+(\pi(y,s)).$$

Dan is

$$\Omega(x) = \bigcap\{C^+(\pi(y,r)) \mid 0 \leq r < \omega(y)\} = \Omega(y).$$

De gelijkheid van de negatieve limietverzamelingen wordt op analoge wijze bewezen. □

We zijn nu in staat de rol van het maximaliteitsaxioma (1.1) A4 te verduidelijken.

(1.18) STELLING. *Laat het tripel* (X,D,π) *voldoen aan de voorwaarden* A0, A1, A2 *en* A3 *in* (1.1).
De volgende uitspraken (i) *tot en met* (iv) *zijn equivalent.*

(i) (X,D,π) *voldoet aan* A4 *en is dus een lokaal dynamisch systeem.*

(ii) *Voor iedere* $x \in X$ *geldt:*
als $\alpha(x) > -\infty$, *dan is* $C^-(x)$ *niet aftelbaar compact;*
als $\omega(x) < \infty$, *dan is* $C^+(x)$ *niet aftelbaar compact.*

(iii) *Voor iedere* $x \in X$ *geldt:*
als $\alpha(x) > -\infty$, *dan is* $C^-(x)$ *niet compact;*
als $\omega(x) < \infty$, *dan is* $C^+(x)$ *niet compact.*

(iv) *Voor iedere* $x \in X$ *geldt:*
als $\alpha(x) > -\infty$, *dan is* $\Gamma^-(x)$ *gesloten doch niet compact;*
als $\omega(x) < \infty$, *dan is* $\Gamma^+(x)$ *gesloten doch niet compact.*

BEWIJS.
(i) $\Rightarrow$ (ii): (Een topologische ruimte Y is aftelbaar compact als iedere aftelbare open overdekking een eindige deeloverdekking heeft of, gelijkwaardig hiermee, als iedere oneindige verzameling een verdichtingspunt heeft.) We bewijzen de uitspraak betreffende α. Stel er is een $x \in X$ met $\alpha(x) > -\infty$ en $C^-(x)$ aftelbaar compact. Neem een rij (t_i) met $t_i \in J(x)$ en $t_i \downarrow \alpha(x)$. Merk op dat $\pi(x,t_i) \neq \pi(x,t_j)$ voor $i \neq j$ op grond van (1.11)3. Verder volgt uit $\alpha(\pi(x,t_i)) = \alpha(x) - t_i$ (1.11)1 dat $\alpha(\pi(x,t_i)) \longrightarrow 0$. Omdat $C^-(x)$ aftelbaar compact is, heeft de verzameling $\{\pi(x,t_i) \mid i = 1,2,\ldots\}$ een verdichtingspunt y. Omdat D open is, is er een $\delta > 0$ en een omgeving V van y zódat $V \times (-\delta,\delta) \subset D$. Nu geldt $\pi(x,t_i) \in V$, en dus $\alpha(\pi(x,t_i)) < -\delta$, voor oneindig veel indices i. Tegenspraak.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Triviaal.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): We bewijzen de uitspraak betreffende α. Stel er is een $x \in X$ met $\alpha(x) > -\infty$ en $\Gamma^-(x)$ niet gesloten. Kies $y \in C^-(x) \setminus \Gamma^-(x)$. Omdat D open is, bestaan er een $\delta > 0$ en een omgeving V van y zó dat $V \times (-\delta,\delta) \subset D$. Kies $t_0 \in (\alpha(x), \alpha(x) + \frac{\delta}{2})$. Dan is $V \cap (\pi_x(\alpha(x),t_0) \neq \emptyset$. Immers, $\pi_x[t_0,0]$is compact, dus gesloten en $y \notin \pi_x[t_0,0]$, zodat er een omgeving W van y is met $W \cap \pi_x[t_0,0] = \emptyset$. Als zou gelden dat $V \cap \pi_x(\alpha(x),t_0) = \emptyset$, dan zou $V \cap W \cap \pi_x(\alpha(x),0] = \emptyset$, dat wil zeggen $V \cap W \cap \Gamma^-(x) = \emptyset$, in strijd met $y \in C^-(x)$. Kies nu $z \in V \cap \pi_x(\alpha(x),t_0)$, zeg $z = \pi(x,t_1)$ met $\alpha(x) < t_1 < t_0$. Voor alle $t \in (\alpha(x),t_1]$ is dan $-\frac{\delta}{2} < t - t_1 \leq 0$, en omdat $\pi(z,s)$ gedefinieerd is voor alle $s \in (-\delta,\delta)$, geldt op grond van (1.1) A2:

$$\pi(x,t) = \pi(\pi(x,t_1),\ t-t_1) = \pi(z,t-t_1).$$

Dus is

$$\Gamma^-(x) = \pi_x[t_1,0] \cup \pi_x(\alpha(x),t_1] \subset \pi_x[t_1,0] \cup \pi_z[-\tfrac{\delta}{2},0].$$

Het rechterlid is compact, dus hieruit volgt dat $C^-(x)$ compact is, in strijd met (iii). Dus $\Gamma^-(x)$ is gesloten. Uit (iii) volgt, dat $\Gamma^-(x)$ niet compact kan zijn.

(iv) $\Rightarrow$ (i): a. Stel $(x,t) \in D$ en $(x,t+s) \in D$. Noem $\pi(x,t) =: y$. We moeten bewijzen dat $(y,s) \in D$. Stel eens $(y,s) \notin D$. Als $s > 0$, dan is $0 < \omega(y) \leq s$. Voor iedere $v \in [0,\omega(y)]$ is $t \leq t+v \leq t + \omega(y) \leq t+s$, dus $t + v \in J(x)$. Dan is

$$\begin{aligned}\Gamma^+(y) &= \{\pi(y,v)\,|\,0 \leq v < \omega(y)\}\\ &= \{\pi(x,t+v)\,|\,0 \leq v < \omega(y)\}.\end{aligned}$$

Merk op, dat ook $\pi(x,t+\omega(y))$ gedefinieerd is. Wegens de continuïteit van π volgt nu uit het voorgaande, dat $\pi(x,t+\omega(y)) \in \overline{\Gamma^+(y)}$. Omdat $\omega(y) < \infty$, is $\Gamma^+(y)$ gesloten. We concluderen dat $\pi(x,t+\omega(y)) \in \Gamma^+(y)$. Maar dan is $\Gamma^+(y) = \{\pi(x,t+v)\,|\,0 \leq v \leq \omega(y)\}$, en deze verzameling is compact wegens de continuïteit van π. Tegenspraak.

Als $s < 0$, dan is $s \leq \alpha(y) < 0$. Op dezelfde wijze vinden we dan dat $\Gamma^-(y)$ compact is. Tegenspraak.

b. Stel nu $(x,t) \in D$, $y := \pi(x,t)$ en $(y,s) \in D$. We moeten bewijzen dat $t + s \in J(x)$. Stel eens $t + s \notin J(x)$. Als $s > 0$, dan is $t < \omega(x) \leq t + s$. Voor iedere $v \in [t,\omega(x)]$ is dan $0 \leq v-t \leq \omega(x)-t \leq s$, dus $v-t \in J(y)$. Nu is

$$\begin{aligned}\Gamma^+(x) &= \{\pi(x,v)\,|\,0 \leq v < \omega(x)\}\\ &= \{\pi(x,v)\,|\,0 \leq v \leq t\} \cup \{\pi(x,v)\,|\,t \leq v < \omega(x)\}.\end{aligned}$$

De tweede verzameling in het rechterlid is gelijk aan $\{\pi(y,v-t) \mid t \le v < \omega(x)\} = \{\pi(y,w) \mid 0 \le w < \omega(x)-t\}$. Wegens de continuïteit van π is $\pi(y,\omega(x)-t) \in \overline{\Gamma^+(x)} = \Gamma^+(x)$, want $\omega(x) < \infty$. Dus $\Gamma^+(x) = \{\pi(x,v) \mid 0 \le v \le t\} \cup \{\pi(y,w) \mid 0 \le w \le \omega(x)-t\}$, en dus compact. Tegenspraak.

Als $s < 0$, dan is $t+s \le \alpha(x) < t$. Op dezelfde wijze vinden we dan dat $\Gamma^-(x)$ compact is. Tegenspraak. □

(1.19) OPMERKING. In plaats van "$C^+(x)$ is compact" zegt men ook wel "$\Gamma^+(x)$ is relatief compact". Uit de equivalentie van (i) en (iii) in (1.18) volgt dan:

Als in een lokaal dynamisch systeem (X,D,π) *één der ontsnappingstijden van* x *eindig is, dan is een der halfbanen van* x *niet relatief compact.*

In het speciale geval dat X een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ en (X,D,π) het lokale dynamische systeem van een differentiaalvergelijking is op X zoals beschreven in (1.6) kunnen we dit ook zó lezen: *als* $\alpha(x)$ *eindig is, dan nadert voor* $t \to \alpha(x)$ *de oplossing* $\pi_x(t)$ *tot de rand van* X *in* $\mathbb{R}^n$, *of* $|\pi_x(t)| \to \infty$ *(analoog voor* $\omega(x)$ *eindig)*.

In deze vorm is de uitspraak een bekende stelling uit de theorie der differentiaalvergelijkingen.

We vermelden nu enkele belangrijke gevolgen van stelling (1.18).

(1.20) STELLING. *Een lokaal dynamisch systeem* (X,D,π) *op een aftelbaar compacte ruimte* X *is globaal, d.w.z.* $D = X \times \mathbb{R}$.

BEWIJS. Voor iedere $x \in X$ zijn $C^-(x)$ en $C^+(x)$ als gesloten deelverzamelingen van een aftelbaar compacte ruimte weer aftelbaar compact. Met (1.18) (ii) volgt nu $J(x) = \mathbb{R}$. □

De volgende stelling, in het bijzonder in het geval $D \subset E$, verklaart de benaming van axioma (1.1) A4 (maximaliteit).

(1.21) STELLING. *Laten* (X,D,π) *en* (X,E,σ) *twee lokale dynamische systemen zijn op dezelfde ruimte* X. *Als* $\pi|_{D\cap E} = \sigma|_{D\cap E}$ *dan is* $D = E$. *In het bijzonder kan een lokaal dynamisch systeem op* X *niet uitgebreid worden tot een globaal dynamisch systeem op* X.

<u>BEWIJS</u>. Laten α(resp.ω) en λ(resp.ρ) de negatieve (resp. positieve) ontsnappingstijden voorstellen van (X,D,π) en (X,E,σ). Aangetoond moet worden, dat $\alpha = \lambda$ en $\omega = \rho$. Stel, dat voor zekere $x \in X$ geldt $\alpha(x) > \lambda(x)$. Dan is $\alpha(x) > -\infty$, dus de negatieve halfbaan van x onder de phase-afbeelding π, dat is $\pi_x(\alpha(x),0]$, is niet relatief compact. Anderzijds volgt uit het gegeven en de aanname, dat

$$\pi_x(\alpha(x),0] = \sigma_x(\alpha(x),0] \subset \sigma_x[\alpha(x),0],$$

waarin het rechterlid welgedefineerd en compact is.
Tegenspraak. Evenzo voert de aanname $\alpha(x) < \lambda(x)$ tot een tegenspraak, dus $\alpha(x) = \lambda(x)$. Analoog blijkt dat $\omega(x) = \rho(x)$ voor alle $x \in X$. $\square$

(1.22) <u>STELLING</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor iedere* $x \in X$ *geldt:*
als $\alpha(x) > -\infty$, *dan is* $A(x) = \emptyset$;
als $\omega(x) < \infty$, *dan is* $\Omega(x) = \emptyset$.

<u>BEWIJS</u>. Stel $\omega(x) < \infty$ en $\Omega(x) \neq \emptyset$. Kies $y \in \Omega(x)$. Dan is $y \in C^+(x) = \Gamma^+(x)$ (1.18) (iv). Dus $y = \pi(x,t)$ met $t < \omega(x)$. Kies s zó dat $t < s < \omega(x)$. Nu is $y \in \Omega(x) = \Omega(\pi(x,s)) \subset C^+(\pi(x,s)) = \Gamma^+(\pi(x,s))$ wegens (1.18) (iv) en het feit dat $\omega(\pi(x,s)) = \omega(x) - s < \infty$ (1.11)1. Dus $y = \pi(\pi(x,s),v)$ voor een v met $0 \le v < \omega(x)-s$. Dus $y = \pi(x,s+v)$. Omdat $t < s+v$ volgt nu met (1.11)3 dat $J(x) = \mathbb{R}$. Tegenspraak. $\square$

(1.23) <u>OPMERKING</u>. De definitie (1.1) van lokaal dynamisch systeem stemt overeen met die in [H] (en ook in [HS]).
In [Se] is axioma A4 vervangen door: Voor iedere $x \in X$ is óf $J(x) = \mathbb{R}$ óf er geldt: als $\alpha(x) > -\infty$, dan is $\Gamma^-(x)$ niet relatief compact en als $\omega(x) < \infty$, dan is $\Gamma^+(x)$ niet relatief compact. Op grond van de equivalentie van (i) en (iii) in (1.18) is de definitie in [Se] gelijkwaardig met definitie (1.1).
In de literatuur treft men vaak de volgende definities van limietverzamelingen aan:

$$\Omega^*(x) := \bigcap_{0 \le t < \omega(x)} \overline{\{\pi(x,s) \mid t \le s < \omega(x)\}}\ ,$$

$$A^*(x) := \bigcap_{\alpha(x) < t \le 0} \overline{\{\pi(x,s) \mid \alpha(x) < s \le t\}}\ .$$

Uit (1.15) volgt onmiddellijk:
In elk lokaal dynamisch systeem (X,D,π) *geldt voor alle* $x \in X$:

$$\Omega^*(x) = \Omega(x) \quad \text{en} \quad A^*(x) = A(x).$$

Als het tripel (X,D,π) slechts aan de voorwaarden A0,A1,A2 en A3 van (1.1) voldoet, behoeft dit niet meer te gelden. Wèl geldt dan, dat de voorwaarden (i) tot en met (iv) van (1.18) equivalent zijn met de voorwaarde

(v) Voor iedere $x \in X$ geldt
als $\alpha(x) > -\infty$, dan is $A^*(x) = \emptyset$;
als $\omega(x) < \infty$, dan is $\Omega^*(x) = \emptyset$.

Immers, dat (i) $\Rightarrow$ (v) volgt uit het voorgaande, tesamen met (1.22). Omgekeerd, als (v) geldt en voor zekere $x \in X$ met $\alpha(x) > -\infty$ is $C^-(x)$ compact, dan is $A^*(x)$ een doorsnede van genest stelsel niet-lege gesloten deelverzamelingen van de compacte verzameling $C^-(x)$. Dus $A^*(x) \neq \emptyset$, in strijd met (v). Dus (v) $\Rightarrow$ (iii).

(1.24) <u>STELLING</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem op een metrische ruimte* X. *Voor alle* $x,y \in X$ *geldt:*
$y \in \Omega(x)$ *als en slechts als er een rij* (t_n) *in* $\mathbb{R}$ *is met*

$$t_n \to \infty \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n) = y;$$

$y \in A(x)$ *als en slechts als er een rij* (t_n) *in* $\mathbb{R}$ *is met*

$$t_n \to -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n) = y.$$

Deze stelling verklaart het gebruik van de term "limietverzameling".

<u>BEWIJS</u>. Stel $y \in \Omega(x)$. Dan is $\omega(x) = \infty$ (1.22). Zij V_n de bol-omgeving van y met straal 1/n. Omdat $y \in C^+(\pi(x,n))$, is $V_n \cap \Gamma^+(\pi(x,n)) \neq \emptyset$. Kies $y_n \in V_n \cap \Gamma^+(\pi(x,n))$. Er is dan een $s_n \geq 0$ zo dat $y_n = \pi(x,n+s_n)$. Noem $t_n := n + s_n$. Dan is $t_n \to \infty$ en $\pi(x,t_n) \to y$.
Nu omgekeerd. Zij $t \in \mathbb{R}^+$ en zij V een willekeurige omgeving van $y = \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n)$, waarbij $t_n \to \infty$.
Kies m zó dat $\pi(x,t_m) \in V$ en $t_m > t$. Dan is $\pi(\pi(x,t),t_m-t) \in V$ en dus $V \cap \Gamma^+(\pi(x,t)) \neq \emptyset$. Bijgevolg is $y \in C^+(\pi(x,t))$. Dus $y \in \Omega(x)$. $\square$

5. Evenwichten en periodieke bewegingen

(1.25) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor iedere* $x \in X$ *is dan*

$$P_x := \{t \mid t \in J(x) \quad en \quad \pi(x,t) = x\}$$

een gesloten ondergroep van $\mathbb{R}$.

BEWIJS. Het is triviaal dat P_x een ondergroep van $\mathbb{R}$ is. Als $J(x) \neq \mathbb{R}$, dan is $P_x = \{0\}$ op grond van (1.11)3. Als $J(x) = \mathbb{R}$, dan is P_x het inverse beeld in $\mathbb{R}$ van de (gesloten!) deelverzameling $\{x\}$ van X onder de continue afbeelding $\pi_x\colon \mathbb{R} \to X$. In alle gevallen is P_x dus gesloten in $\mathbb{R}$. □

(1.26) OPMERKING EN DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem en zij $x \in X$. Als $P_x \neq \{0\}$, dan bevat P_x behalve 0 nog tenminste één niet-negatief element. Definieer in dat geval

$$p(x) := \inf\{t \mid t > 0 \quad \text{en} \quad t \in P_x\}.$$

Als $p(x) = 0$ ziet men gemakkelijk in dat P_x dicht ligt in $\mathbb{R}$; omdat P_x gesloten is in $\mathbb{R}$, is in dit geval $P_x = \mathbb{R}$.
Als $p(x) > 0$ ziet men gemakkelijk in dat P_x de volgende gedaante heeft: $P_x = p(x)\,\mathbb{Z} = \{p(x)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Op grond van het bovenstaande kunnen we de punten van X als volgt klassificeren. Een punt $x \in X$ heet een *evenwichtspunt,* en de beweging π_x heet een *evenwicht,* als $P_x = \mathbb{R}$. Een punt x heet een *periodiek punt,* en de beweging π_x heet *periodiek* als $P_x \neq \{0\}$.
In dat geval heet $p(x)$ de *periode* van π_x.

(1.27) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor elk punt* $x \in X$ *geldt juist één van de volgende mogelijkheden:*

(i) $P_x = \{0\}$ *en* $\pi_x\colon J(x) \to X$ *is injectief.*

(ii) $P_x = p(x)\mathbb{Z}$ *met* $p(x) > 0$, *in welk geval* π_x *een periodieke beweging is, maar geen evenwicht.*

(iii) $P_x = \mathbb{R}$, *in welk geval* $p(x) = 0$ *en* π_x *een evenwicht is.*

<u>BEWIJS</u>. Volgt direct uit (1.26). Wat de injectiviteit van π_x in geval (i) betreft: als $\pi(x,t_1) = \pi(x,t_2)$ met $t_1 \neq t_2$, is $J(x) = \mathbb{R}$ (1.11)<u>3</u>, dus $t_1 - t_2 \in J(x)$ en $\pi(x,t_1-t_2) = x$, ofwel $0 \neq t_1 - t_2 \in P_x$, in strijd met $P_x = \{0\}$. □

(1.28) <u>PROPOSITIE</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Dan geldt voor* $x \in X$:

<u>1</u>. *Als de beweging* π_x *een evenwicht of een periodieke beweging is, dan is* $J(x) = \mathbb{R}$.

<u>2</u>. *Als* $\tau \in P_x$, *dan is* $\pi_x(t+\tau) = \pi_x(t)$ *voor alle* $t \in \mathbb{R}$.

<u>3</u>. *Als* $y \in \Gamma(x)$, *dan is* $P_x = P_y$. *In het bijzonder: als* π_x *periodiek is en* $y \in \Gamma(x)$, *dan is ook* π_y *periodiek, en* $p(x) = p(y)$; *voorts is dan* $\Gamma(x) = \pi_x[0,p(x)]$.

<u>4</u>. *Het punt* x *is een evenwichtspunt als en slechts als* $\Gamma(x) = \{x\}$.

<u>BEWIJS</u>.

<u>1</u>. Volgt uit (1.11)<u>3</u>.

<u>2</u>. $\pi_x(t+\tau) = \pi(\pi(x,\tau),t) = \pi(x,t) = \pi_x(t)$.

<u>3</u>. Volgt uit <u>2</u>, en <u>4</u> is evident. □

(1.29) <u>STELLING</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor iedere* $x \in X$ *geldt*[1)]

<u>1</u>. π_x *is periodiek als en slechts als* $\Gamma(x)$ *compact is.*

<u>2</u>. π_x *is periodiek en geen evenwicht als en slechts als* $\Gamma(x)$ *homeomorf is met de eenheidscirkel* S^1.

<u>BEWIJS</u>.

<u>1</u>. "Slechts als" is triviaal. Stel nu dat $Y := \Gamma(x)$ compact is. Op grond van (1.18) is $J(x) = \mathbb{R}$. Zij voor iedere $n = 1,2,\ldots$ de verzameling F_n gedefinieerd door $F_n := \{\pi(x,t) \mid -n \leq t \leq n\}$. Voor iedere n is F_n compact en $Y = \cup\{F_n | n = 1,2,\ldots\}$. Omdat Y van de tweede categorie is (Baire) zijn er een in Y open verzameling U en een $k \in \mathbb{N}$ met $\emptyset \neq U \subset F_k$.
Laat (t_i) een rij in $\mathbb{R}$ met $t_i \to \infty$. Omdat Y compact is heeft de rij $(\pi(x,t_i))$ in Y een verdichtingspunt, zeg z.

---

1) Een voorwaarde opdat $\Gamma^+(x)$ homeomorf is met $\mathbb{R}^+$ is te vinden in (1.49).

Kies $y \in U$ en laat $v_1 v_2 \in \mathbb{R}$ zo zijn dat $y = \pi(x,v_1)$ en $z = \pi(x,v_2)$. Nu is er, wegens de continuïteit van π, een omgeving V van z in Y zo dat $\pi(z',v_1 - v_2) \in U$ voor alle $z' \in V$. Omdat $\pi(x,t_i) \in V$ voor oneindig veel waarde van i, volgt hieruit dat $\pi(x,t_i + v_1 - v_2) = \pi(\pi(x,t_i),v_1 - v_2) \in U$ voor ineindig veel waarden van i. Er is dus een i zo dat $s := t_i + v_1 - v_2 > k$ en $\pi(x,s) \in U$. Omdat $U \subset F_k$ volgt hieruit dat π_x niet injectief is. Dan is π_x periodiek.

2. "Slechts als" is triviaal: definieer nl. $h: S^1 \to \Gamma(x)$ door $h: \exp(\frac{2\pi it}{p(x)}) \longmapsto \pi(x,t)$.
"als": Als $\Gamma(x)$ compact is, dan is π_x periodiek. Zou nu π_x een evenwicht zijn, dan zou $\Gamma(x) = \{x\}$. □

(1.30) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Zij* $x \in X$. *Als er een* $T > 0$ *bestaat zo dat voor iedere omgeving* U *van* x *er een* $y \in U$ *is met* $\pi_y([-T,T]) \subset U$, *dan is* x *een evenwichtspunt.*

BEWIJS. Neem aan dat x geen evenwichtspunt is. Er is dan een $s \in \mathbb{R}$ met $z := \pi(x,s) \neq x$. We mogen aannemen dat $|s| < T$ in verband met (1.28). Kies disjuncte omgevingen U en V van x respectievelijk z. Omdat π continu is, is er een omgeving W van x met $W \times \{s\} \subset D$ en $\pi(W\times\{s\}) \subset V$. Kies nu $y \in W \cap U$ met $\pi_y([-T,T]) \subset W \cap U$. Dan is enerzijds $\pi(y,s) \in U$ en anderzijds $\pi(y,s) \in V$. Tegenspraak. □

(1.31) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem en zij* $x \in X$. *Als er bij iedere omgeving* V *van* x *en voor iedere* $\varepsilon > 0$ *een* $y \in V$ *is met periode* $p(y) < \varepsilon$, *dan is* x *een evenwichtspunt. In het bijzonder is de verzameling evenwichtspunten gesloten in* X.

BEWIJS. Zij een omgeving U van x gegeven. Kies op grond van de continuïteit van π een omgeving V van x met $V \subset U$ en een $\varepsilon > 0$ zó dat $\pi(V\times(-\varepsilon,\varepsilon)) \subset U$. Kies nu $y \in V$ met $p(y) < \varepsilon$. Dan is $\Gamma(y) = \pi_y[0,p(y)] \subset U$. Pas nu (1.30) toe met $T = 1$.
Wat betreft het gesloten zijn van de verzameling F der evenwichtspunten: als $x \in \overline{F}$, dan bevat iedere omgeving van x een punt y met $p(y) = 0$. □

(1.32) GEVOLG. *Elk dynamisch systeem op de gesloten* n-*cel* I^n *bevat een evenwichtspunt (Zo'n systeem is in verband met de compactheid van* I^n *automatisch globaal).*

BEWIJS. Zij (t_i) een reële rij met $t_i \to 0$. Voor iedere i is π^{t_i} een homeomorfisme van I^n op I^n. Volgens de dekpuntsstelling van Brouwer heeft π^{t_i} een dekpunt, zeg x_i: $\pi(x_i,t_i) = x_i$. In het bijzonder is dan π_{x_i} periodiek met periode $p(x_i) \le t_i$. Omdat I^n compact is, heeft de rij (x_i) een convergente deelrij die we gemakshalve weer noteren met (x_i). Noem $x = \lim_{i\to\infty} x_i$. Dan is volgens (1.31) x een evenwichtspunt. □

(1.33) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Zij* $x \in X$ *en* $s \in \mathbb{R}^+ \cap J(x)$. *Stel* x *is geen evenwichtspunt. Als er bij iedere omgeving* U *van* x *en bij iedere* $\varepsilon > 0$ *een* $y \in U$ *bestaat met* $|s-p(y)| < \varepsilon$, *dan is* π_x *periodiek en er is een* $k \in \mathbb{N}$ *met* $s = kp(x)$.

BEWIJS. Merk eerst op, dat $s > 0$: zou namelijk $s = 0$, dan volgt met (1.31) dat x een evenwichtspunt is. We tonen nu aan dat $\pi_x(s) = x$ waaruit dan volgt $s \in P_x$ en dus hetgeen we willen bewijzen.
Stel dat $\pi(x,s) \neq x$. Kies disjuncte omgevingen V en W van x respectievelijk $\pi(x,s)$. Op grond van de continuïteit van π zijn er een omgeving U van x met $U \subset V$ en een $\varepsilon > 0$ zó dat $U \times (s-\varepsilon,s+\varepsilon) \subset D$ en $\pi(U\times(s-\varepsilon,s+\varepsilon)) \subset W$. Kies $y \in U$ met $|s-p(y)| < \varepsilon$, dan is enerzijds $\pi(y,p(y)) \in W$ en anderzijds $\pi(y,p(y)) = y \in U$. Tegenspraak. □

(1.34) VOORBEELD. Later zullen we aantonen dat in een lokaal dynamisch systeem op een open verzameling in $\mathbb{R}^2$ er zelfs geldt dat $s = p(x)$. Dat deze verscherping van (1.31) in het algemeen niet mogelijk is zullen we nu aan de hand van een voorbeeld laten zien.
Zij $\mathbb{B}^2$ de volle cirkelschijf en zij $X = S^1 \times \mathbb{B}^2$ de volle torus.
We voeren de volgende parametrizering in: een punt $x = (x_1,x_2)$ met $x_1 \in S^1$ en $x_2 \in \mathbb{B}^2$ geven we aan met de parameters (ψ,r,ϕ) zó dat $x_1 = (\cos\psi,\sin\psi) \in S^1$, terwijl (r,ϕ) de poolcoordinaten zijn van x_2 in $\mathbb{B}^2$.
Het dynamische systeem op X definieren we door $\pi((\psi,r,\phi),t) =$
$= (\psi+2\pi t,r,\phi+\pi t)$.
Dan is voor $x = (\psi,0,\phi)$ de beweging π_x periodiek en $p(x) = 1$, terwijl voor ieder punt $y = (\psi,r,\phi)$ met $r \neq 0$ geldt dat de beweging

π_y periodiek is en $p(y) = 2$.

6. Invariante verzamelingen

(1.35) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem. Een deelverzameling E van X heet *invariant* indien $\Gamma(x) \subset E$ voor iedere $x \in E$. Een deelverzameling E van X heet *positief invariant* indien $\Gamma^+(x) \subset E$ voor iedere $x \in E$. Een deelverzameling E van X heet *negatief invariant* indien $\Gamma^-(x) \subset E$ voor iedere $x \in E$.

(1.36) VOORBEELDEN. Een deelverzameling E van X is invariant als en slechts als E de vereniging is van een collectie van banen van het dynamisch systeem. Iedere invariante deelverzameling is zowel positief invariant, als negatief invariant. Voor iedere punt $x \in X$ dat geen periodiek punt is, is $\Gamma^+(x)$ een positief invariante verzameling welke nóch negatief invariant nóch invariant is.

(1.37) PROPOSITIE. *Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem.*

1. *De doorsnede en de vereniging van een stelsel positief invariante deelverzamelingen van X is weer positief invariant.*
2. *Het complement $X\setminus N$ van een negatief invariante deelverzameling N van X is positief invariant.*
3. *Het verschil $M\setminus N$ van een positief invariante verzameling M en een negatief invariante verzameling N is positief invariant.*

Deze uitspraken blijven geldig bij verwisseling van "positief" en "negatief". In het bijzonder volgt hieruit dat het verschil van invariante verzamelingen weer invariant is.

BEWIJS.

1. Volgt uit de definities.
2. Als $x \in X\setminus N$ en $\pi^s x \in N$ voor $s \geq 0$, dan zou $x = \pi^{-s}\pi^s x \in N$. Tegenspraak, dus $\Gamma^+(x) \subset X\setminus N$.
3. Volgt uit 1 en 2, daar $M\setminus N = M \cap (X\setminus N)$.

De rest van de propositie is evident. $\square$

(1.38) PROPOSITIE. *Het inwendige, de afsluiting, en elke component van een positief (resp. negatief) invariante deelverzameling van een lokaal dynamisch systeem is weer positief (resp. negatief) invariant. De rand van een invariante verzameling is invariant.*

BEWIJS. Zij M een positief invariante verzameling. Invariantie van het inwendige M^0 van M: voor elke $t \in \mathbb{R}^+$ is $M^0 \cap X_t$ open in X_t, dus $\pi^t(M^0 \cap X_t)$ is open in X_{-t}, en derhalve open in X (vgl. (1.13) 1 en 2). Omdat $\pi^t(M^0 \cap X_t) \subset M$ wegens de positieve invariantie van M, is $\pi^t(M^0 \cap X_t) \subset M^0$. Hieruit volgt het gestelde. Als M negatief invariant is, verloopt het bewijs analoog.

Invariantie van de afsluiting $\bar{M}$ van M: volgt uit (1.37) en het voorgaande, daar $\bar{M} = X \setminus (X \setminus M)^0$.

Invariantie van een component C van M: zij $x \in C$; dan is $\Gamma^+(x) = \pi_x[0,\omega(x))$ het continue beeld van een interval, dus samenhangend. Omdat ook C samenhangend is en $x \in C \cap \Gamma^+(x)$, is $C \cup \Gamma^+(x)$ samenhangend. Maar op grond van de positieve invariantie van M is $C \subset C \cup \Gamma^+(x) \subset M$. Omdat C een component van M is volgt hieruit, dat $C = C \cup \Gamma^+(x)$, ofwel $\Gamma^+(x) \subset C$.

Invariantie van de rand $\bar{M} \setminus M^0$ van M: volgt uit het voorgaande. □

(1.39) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Voor iedere* $x \in X$ *zijn de limietverzamelingen* $A(x)$ *en* $\Omega(x)$ *gesloten, invariante deelverzamelingen van* X.

BEWIJS. We bewijzen alleen de uitspraak omtrent $\Omega(x)$. Omdat $\emptyset$ een invariante deelverzameling van X is, mogen we aannemen dat $\Omega(x) \neq \emptyset$, en dus dat $J(x) \supset \mathbb{R}^+$ (1.22). Dat $\Omega(x)$ gesloten is, is triviaal. We tonen aan, dat $\Omega(x)$ invariant is.

Zij $y \in \Omega(x)$, $s \in J(y)$, en beschouw een willekeurige omgeving U van $\pi^s y$. Uit de continuïteit van π^s volgt dat er een omgeving V van y is zo dat $\pi^s(V) \subset U$. Omdat

$$y \in \Omega(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\{\pi(x,u) \mid u \geq t\}}$$

(vgl. (1.23)) is er bij elke $t \in \mathbb{R}^+$ een element $u_t \in \mathbb{R}^+$ zo dat $u_t \geq t$ en $\pi(x,u_t-s) \in V$. In het bijzonder is dan $\pi^s(\pi(x,u_t-s)) \in U$, dat wil zeggen, $\pi(x,u_t) \in U$. Voor alle $t \in \mathbb{R}^+$ is dus $U \cap \Gamma^+(\pi(x,t)) \neq \emptyset$. Aangezien dit voor elke omgeving U van $\pi^s y$ geldt, volgt hieruit dat $\pi^s y \in \overline{\{\pi(x,u) \mid u \geq t\}}$, voor alle $t \geq 0$. Dus is $\pi^s y \in \Omega(x)$. □

(1.40) VOORBEELD. Zij $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$. Een dynamisch systeem op X is gegeven door de differentiaalvergelijking in poolcoördinaten

$$\frac{dr}{dt} = 1-r^2 \quad \text{en} \quad \frac{d\phi}{dt} = 1$$

(vgl. (1.9)3). Voor ieder punt $x = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ met $r \neq 1$ is $J(x) = (\alpha(x),\infty)$ met $\alpha(x) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+r}{1-r}\right|$. Voor een punt $y = (\cos\phi_0,\sin\phi_0)$ met $\phi_0 \neq 0$ geldt: $J(y) = (-\phi_0, 2\pi-\phi_0)$.
De volgende deelverzamelingen van X zijn invariant:

$$A_1 := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \mid 0 < r < 1 \;\&\; 0 \leq \phi < 2\pi\};$$

$$A_2 := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \mid r > 1 \;\&\; 0 \leq \phi < 2\pi\};$$

$$A_3 := \{(\cos\phi, \sin\phi) \mid 0 < \phi < 2\pi\}.$$

De verzameling A_3 blijkt samen te vallen met $\Omega(x)$ voor elk punt $x = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ met $r \neq 1$.
Twee observaties:

1. Als $\omega(x) = \infty$, dan behoeft voor $y \in \Omega(x)$ niet noodzakelijk te gelden dat $\omega(y) = \infty$.
2. Als in de definitie van een (positief) invariante verzameling geeist zou worden dat $\omega(x) = \infty$ voor ieder punt uit de verzameling (zoals dat bijv. gebeurt in [HS]), dan is stelling (1.39) in bovenstaande formulering niet meer algemeen geldig (al wordt hij in [HS] "bewezen" op pag. 198).

(1.41) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, en zij* Y *een invariante deelverzameling van* X. *Als* $E := (Y\times R) \cap D$ *en* $\pi_E := \pi|_E$ *dan is* (Y,E,π_E) *een lokaal dynamisch systeem.*

BEWIJS. We controleren dat aan de axioma's uit (1.1) is voldaan.
A0: D is open in $X \times \mathbb{R}$, dus E is open in $Y \times \mathbb{R}$. De ontsnappingstijden van het nieuwe systeem zijn de restricties van de ontsnappingstijdens van (X,D,π) tot Y. Tenslotte beeldt π_E de verzameling E af in Y omdat Y invariant is.
A1,A2,A3: triviaal
A4: volgt uit het feit dat de ontsnappingstijden van het nieuwe systeem de restricties tot Y zijn van de ontsnappingstijden van (X,D,π). □

(1.42) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem en Y een invariante deelverzameling van X. Het in (1.41) beschreven systeem (Y,E,π_E) noemt men wel *de restrictie van* (X,D,π) *tot* Y.

Later zullen we nog een ander type restrictie beschrijven, namelijk de restrictie van een lokaal dynamisch systeem (X,D,π) tot een *open* deelverzameling Y van X (niet noodzakelijk invariant). Een voorbeeld hiervan is de constructie van het systeem beschreven in (1.40) vanuit het systeem, beschreven in (1.9)2.

7. Meer over limietverzamelingen

Men gebruikt de limietverzamelingen om een (eerste) klassificatie van de banen en bewegingen van een lokaal dynamisch systeem te geven. Ter inleiding merken we op, dat voor elk punt x in een lokaal dynamisch systeem (X,D,π) geldt:

$$C^+(x) = \Gamma^+(x) \cup \Omega(x); \; C^-(x) = \Gamma^-(x) \cup A(x).$$

(de inclusie "$\supset$" is triviaal: "$\subset$" volgt uit het feit dat als $y \notin \Gamma^+(x) \cup \Omega(x)$, er een omgeving U van y is met $U \cap \pi_x[s,\omega(x)) = \emptyset$ voor zekere $s \geq 0$, terwijl er ook een omgeving V van y is met $V \cap \pi_x[0,s] = \emptyset$; dus $V \cap U \cap \Gamma^+(x) = \emptyset$, ofwel $y \notin C^+(x)$).

(1.43) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem en zij $x \in X$. Het punt x en ook de beweging π_x worden *positief wijkend* genoemd als $\Omega(x) = \emptyset$.
Het punt x en ook de beweging π_x worden *positief asymptotisch* genoemd als $\Omega(x) \neq \emptyset$ en $\Gamma^+(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$.
Het punt x en ook de beweging π_x worden *positief Poisson-stabiel* genoemd als $\Gamma^+(x) \cap \Omega(x) \neq \emptyset$.

Het is duidelijk dat een punt of beweging precies één van de in de definitie genoemde eigenschappen heeft. Verder zijn de genoemde eigenschappen eerder eigenschappen van banen dan van afzonderlijke punten. Dit is de inhoud van de volgende propositie.

(1.44) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Zij* $x \in X$ *en* $y \in \Gamma(x)$. *Dan geldt:*
1. x *is positief wijkend als en slechts als* y *positief wijkend is.*

2. x *is positief asymptotisch als en slechts als* y *positief asymptotisch is.*

3. x *is positief Poisson-stabiel als en slechts als* y *positief Poisson-stabiel is.*

BEWIJS.

1. $\Omega(x) = \Omega(y)$ volgens (1.17).

2 en 3. Omdat $\Omega(x)$ invariant is (1.39) geldt $\Gamma^+(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$ als en slechts als $\Gamma(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$. Omdat ook $\Gamma(x) = \Gamma(y)$ (1.14), volgt nu het gestelde. □

(1.45) AFSPRAAK. Het zal duidelijk zijn dat op dezelfde wijze als in (1.43) ook begrippen als negatief Poisson-stabiel enz., en Poisson-stabiel enz. ingevoerd kunnen worden. We zullen in het vervolg alleen definities, proposities en stellingen formuleren betreffende "positieve begrippen". Stilzwijgend wordt aangenomen dat ook de andere begrippen daarmede behandeld zijn.

(1.46) VOORBEELDEN.

1. Een periodieke beweging is positief Poisson-stabiel. Immers, als x periodiek is, is $\Gamma(x) = \Omega(x)$.

2. Zij (X,D,π) het lokale dynamische systeem op $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, beschreven in (1.9)3. Voor elk punt $x = (\cos\phi,\sin\phi)$ is de beweging π_x gegeven door $\pi_x(t) = (\cos(\phi+t), \sin(\phi+t))$, dus x is periodiek, en $\Omega(x) = A(x) = \Gamma(x)$. Zo'n punt is dus positief Poisson-stabiel. Als $x = (r\cos\phi,r\sin\phi)$ met $r > 0$, $r \neq 1$, dan is $\alpha(x) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+r}{1-r}\right| > -\infty$, dus $A(x) = \emptyset$. Daarentegen is $\omega(x) = \infty$ en $\Omega(x) = \{(\cos\phi,\sin\phi) \mid 0 \le \phi < 2\pi\} = \Gamma((1,0))$. Al deze punten zijn dus positief asymptotisch en negatief wijkend.

3. In het voorbeeld van (1.40) zijn alle punten $(\cos\phi,\sin\phi)$ met $\phi \neq 0$ zowel positief als negatief wijkend.

(1.47) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem en zij* $x \in X$. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(i) x *is positief Poisson-stabiel.*

(ii) $\Gamma(x) \cap \Omega(x) \neq \emptyset$.

(iii) $\Gamma(x) \subset \Omega(x)$.

(iv) $\overline{\Gamma(x)} = \Omega(x)$.

(v) $x \in \Omega(x)$.

BEWIJS. (i) $\Rightarrow$ (ii): triviaal.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\Omega(x)$ is invariant (1.39).
(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\Omega(x)$ is gesloten (1.39), dus $\overline{\Gamma(x)} \subset \Omega(x)$. Anderzijds is $\Omega(x) \subset C^+(x) \subset \overline{\Gamma(x)}$.
(iv) $\Rightarrow$ (v) en (v) $\Rightarrow$ (i): triviaal. □

Later zullen we aantonen dat in $\mathbb{R}^2$ de periodieke bewegingen de enige positief Poisson-stabiele bewegingen zijn. We geven nu een voorbeeld van een positief Poisson-stabiele beweging die niet periodiek is.

(1.48) VOORBEELD. Zij $X := S^1 \times S^1$ de torus. Hierin is S^1 de eenheidscirkel, en we zullen S^1 interpreteren als de eenheidscirkel in het complexe vlak:

$$S^1 := \{e^{2\pi i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Definieer een globaal dynamisch systeem op X met fase-afbeelding π door

$$\pi^t(e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i\psi}) := (e^{2\pi i(\phi+t)}, e^{2\pi i(\psi+\alpha t)}).$$

We zullen nu aantonen:
Als α irrationaal is, is geen enkele beweging periodiek, en voor ieder punt $x \in X$ ligt de halfbaan $\Gamma^+(x)$ dicht in X. (Uit (1.24) volgt dan gemakkelijk dat $\Omega(x) = X$, dus zeker $x \in \Omega(x)$).

BEWIJS. Als voor zeker punt x de beweging periodiek zou zijn, dan zou voor zekere ϕ, ψ en t gelden

$$\phi + t = \phi + k_1, \quad \psi + \alpha t = \psi + k_2$$

met $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dit is onmogelijk als α irrationaal is. Om aan te tonen, dat voor elk punt x de halfbaan $\Gamma^+(x)$ dicht ligt in X beschouwen we twee punten

$$x = (e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i\psi}), \qquad y = (e^{2\pi i\xi}, e^{2\pi i\eta})$$

in X. Zij $t_n := n+(\xi-\phi)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\pi(x,t_n) = (e^{2\pi i\xi}, e^{2\pi i(\psi+\alpha(\xi-\phi)+n\alpha)}),$$

dus om aan te tonen dat de rij $(\pi(x,t_n))$ het punt y als verdichtingspunt heeft, is het voldoende om aan te tonen dat de verzameling $\{n\alpha(\text{mod } 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in het interval $[0,1)$ ligt. Het is niet moeilijk in te zien dat het hiertoe voldoende is om aan te tonen dat de verzameling

$$G := \{m+n\alpha \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

dicht ligt in $\mathbb{R}$. Welnu: G is een ondergroep van de additieve groep $\mathbb{R}$, dus de afsluiting $\bar{G}$ van G is een gesloten ondergroep van $\mathbb{R}$. Dus $\bar{G}$ is van de gedaante $a\mathbb{Z}$ met $a \in \mathbb{R}$, of $\bar{G} = \mathbb{R}$. De eerste mogelijkheid is uitgesloten, want dan zou $G \subset a\mathbb{Z}$, dus $\alpha \in a\mathbb{Z}$ en $1 + \alpha \in a\mathbb{Z}$, in strijd met het feit dat α irrationaal is. Dus $\bar{G} = \mathbb{R}$.

(1.49) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, en zij* $x \in X$. *De volgende beweringen zijn equivalent*:

(i) x *is niet positief Poisson-stabiel, i.e.* $\Omega(x) \cap \Gamma^+(x) = \emptyset$.

(ii) π_x *is een topologische afbeelding van* $[0,\omega(x))$ *op* $\Gamma^+(x)$.

(iii) $\Gamma^+(x)$ *is homeomorf met* $\mathbb{R}^+$.

BEWIJS.

(i) ⇒ (ii): Merk eerst op, dat π_x niet periodiek is (zie(1.46)1). Dus $\pi_x: [0,\omega(x)) \to \Gamma^+(x)$ is injectief. Ook is π_x continu, en om aan te tonen dat de inverse van π_x continu is, is het voldoende om te laten zien dat voor elke $s \in [0,\omega(x))$ de verzamelingen $\pi_x[0,s]$ en $\pi_x[s,\omega(x))$ gesloten zijn in $\Gamma^+(x)$. Zij dus $s \in [0,\omega(x))$. Dat $\pi_x[0,s]$ gesloten is, is duidelijk (continu beeld van een compacte verzameling in een Hausdorff ruimte). Wat $\pi_x[s,\omega(x)) = \Gamma^+(\pi(x,s))$ betreft, als deze verzameling niet gesloten is in $\Gamma^+(x)$, is $(\Gamma^+(x) \cap C^+(\pi(x,s))) \setminus \Gamma^+(\pi(x,s)) \neq \emptyset$. Daar $C^+(\pi(x,s)) \setminus \Gamma^+(\pi(x,s)) \subset \Omega(\pi(x,s)) = \Omega(x)$ (1.17), volgt hieruit dat $\Gamma^+(x) \cap \Omega(x) \neq \emptyset$. Tegenspraak.

(ii) ⇒ (iii): $[0,\omega(x))$ is homeomorf met $\mathbb{R}^+$!

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Zij h: $\Gamma^+(x) \to \mathbb{R}^+$ een topologische afbeelding van $\Gamma^+(x)$ op $\mathbb{R}^+$. Op grond van (1.29) en (1.27) is $\pi_x: [0,\omega(x)) \to \Gamma^+(x)$ injectief. Uiteraard is π_x ook surjectief, dus $h\circ\pi_x$ is een continue bijectie van het interval $[0,\omega(x))$ op $\mathbb{R}^+$. Dan is $h\circ\pi_x$ dus een homeomorfe afbeelding van $[0,\omega(x))$ op $\mathbb{R}^+$, en bijgevolg is π_x een homeomorfisme.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Als $\Omega(x) \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset$ (i.e. x is positief Poisson-stabiel), dan is $x \in \Omega(x)$ en $\omega(x) = \infty$ ((1.47) en (1.22)). Dus x is verdichtingspunt in $\Gamma^+(x)$ van $\pi_x[1,\infty)$. Daarentegen is 0 geen verdichtingspunt in $[0,\infty)$ van $[1,\infty)$. Tegenspraak met (ii). □

(1.50) OPMERKING. Voorgaande stelling houdt in, dat de karakterisering van halfbanen in termen van limietverzamelingen (al of niet positief Poisson-stabiel) tevens een topologische klassificatie impliceert (niet of wel homeomorf met $\mathbb{R}^+$).
In (1.29) zijn we al eerder een topologische karakterisering tegengekomen namelijk van periodiciteit. De vraag is, of periodiciteit ook in termen van limietverzamelingen gekarakteriseerd kan worden. We hebben al opgemerkt, dat $\Gamma(x) = \Omega(x)$ als x periodiek is. Het omgekeerde behoeft niet te gelden: beschouw de restrictie van het systeem uit (1.48) tot één van zijn banen (vgl. (1.42)). Als de beschouwde ruimte aan zekere "volledigheidseisen" voldoet, volgt uit de gelijkheid $\Gamma(x) = \Omega(x)$ wèl dat x periodiek is (zie (1.52)).

(1.51) PROPOSITIE. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn, en* $x \in X$. *De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(i) $\Gamma(x)$ *is van de eerste categorie*)[1].

(ii) x *is niet periodiek en* x *is positief of negatief Poisson-stabiel.*

BEWIJS.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Als x periodiek is, is $\Gamma(x)$ compact, en dus van de

---

)[1] Een deelverzameling A van een topologische ruimte heet van de *eerste categorie* als A geschreven kan worden als $A = \cup\{F_i \mid i\in\mathbb{N}\}$, waarbij elke F_i gesloten is in A en een leeg inwendige heeft in A. Als A niet van de eerste categorie is, heet A van de *tweede categorie*.

tweede categorie (Baire). Als x noch positief, noch negatief Poisson-stabiel is, dan zijn $\Gamma^+(x)$ en $\Gamma^-(x)$ homeomorf met $\mathbb{R}^+$ resp. $\mathbb{R}^-$, terwijl $\Gamma^+(x)$ geen verdichtingspunt in $\Gamma^-(x)$ kan hebben, noch $\Gamma^-(x)$ een verdichtingspunt in $\Gamma^+(x)$ (1.47)(ii). Hieruit volgt gemakkelijk dat $\Gamma(x)$ homeomorf is met $\mathbb{R}$. Omdat $\mathbb{R}$ van de tweede categorie is, volgt hieruit dat ook $\Gamma(x)$ van de tweede categorie is.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Als x niet periodiek is, dan is de afbeelding $\pi_x \colon J(x) \to \Gamma(x)$ injectief.

Laten nu (a_n) en (b_n) rijen in $J(x)$ zijn die strikt monotoon dalen, resp. stijgen, met limieten $\alpha(x)$, resp. $\omega(x)$, en zo dat $a_1 < 0 < b_1$. Dan is $\Gamma(x) = \cup\{\pi_x[a_n,b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$, waarin elke verzameling $\pi_x[a_n,b_n]$ compact is, dus gesloten in $\Gamma(x)$. Stel dat $\Gamma(x)$ van de tweede categorie is, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $\pi_x[a_n,b_n]$ een niet-leeg inwendige heeft in $\Gamma(x)$, dat wil zeggen, er is een open verzameling V in X met $\emptyset \neq V \cap \Gamma(x) \subset \pi_x[a_n,b_n]$. Kies $y \in V \cap \Gamma(x)$. Als nu x positief Poisson-stabiel is, dan is $y \in \Omega(x)$ (1.47)(iii), dus $V \cap \pi_x[b_{n+1},\omega(x)) \neq \emptyset$. Derhalve is

$$\emptyset \neq V \cap \pi_x[b_{n+1},\omega(x)) \subset V \cap \Gamma(x) \subset \pi_x[a_n,b_n],$$

in strijd met de injectiviteit van π_x. Dus $\Gamma(x)$ is van de eerste categorie. Een analoog bewijs kan gegeven worden als x negatief Poisson stabiel is. □

(1.52a) <u>STELLING</u>. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn, en neem aan, dat* X *Čech-volledig is*)[1]. *Dan geldt voor ieder punt* $x \in X$: x *is periodiek als en slechts als* $\Omega(x) = \Gamma(x)$.

<u>BEWIJS</u>. "Slechts als": zie (1.46).

"Als": indien $\Omega(x) = \Gamma(x)$, dan is $\Gamma(x)$ gesloten in X. Dus dan is $\Gamma(x)$ een Baire-ruimte, dus zeker van de tweede categorie. Omdat x nu positief Poisson-stabiel is, volgt uit (1.51) dat x periodiek is. □

)1 Dat is: een G_δ-verzameling in een compacte ruimte; bijv. X lokaal compact, of X een volledig metriseerbare ruimte.
Iedere Čech-volledige ruimte X is volledig regulier, en een Baire-ruimte: als voor elke $n \in \mathbb{N}$ een gesloten deelverzameling F_n van X gegeven is en $F_n^0 = \emptyset$ voor alle n, dan is ook $(\cup_n F_n)^0 = \emptyset$. Van belang is, dat een gesloten deelruimte van een Čech-volledige ruimte weer Čech-volledig is, en dus een Baire-ruimte (en dus van de tweede categorie!) is.

(1.52b) Als (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem is met X een Čech-volledige ruimte, dan zijn de *periodieke* punten volledig door (1.52a) gekarakteriseerd in termen van limietverzamelingen.)[1] Voor *niet-periodieke* punten x zijn er nog twee mogelijkheden:

(a) x *is niet positief Poisson-stabiel*. Dan volgt uit (1.49) dat π_x een topologische afbeelding induceert van het interval $[0,\omega(x))$ op $\Gamma^+(x)$. Voorts volgt uit de gelijkheden $C^+(x) = \Gamma^+(x) \cup \Omega(x)$ en $\Gamma^+(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$, dat

$$\Omega(x) = C^+(x)\backslash\Gamma^+(x)$$

(b) x *is positief Poisson-stabiel*. We tonen aan, dat er nu geldt:

$$\Omega(x) = \overline{C(x)\backslash\Gamma(x)}\ .$$

Daar $\Omega(x) = C(x)$ (1.47), is de inclusie "$\supset$" triviaal. Om "$\subset$" aan te tonen gaan we te werk als in het bewijs van (1.51). Daar is aangetoond (notatie als in dat bewijs): als x niet-periodiek is en x is positief Poisson-stabiel, dan heeft voor elke $n \in \mathbb{N}$ de compacte verzameling $\pi_x[a_n,b_n]$ in $\Gamma(x)$ een leeg inwendige. A fortiori heeft $\pi_x[a_n,b_n]$ in $C(x)$ dan een leeg inwendige. Omdat $C(x)$ als gesloten deelruimte van de Čech-volledige ruimte een Baire-ruimte is, volgt hieruit dat $\Gamma(x) = \bigcup_n \pi_x[a_n,b_n]$ in $C(x)$ een leeg inwendige heeft. Dus $C(x)\backslash\Gamma(x)$ ligt dicht in $C(x)$, ofwel $C(x) \subset \overline{C(x)\backslash\Gamma(x)}$.

8. Compacte bewegingen

De eenvoudigste manier om te bereiken dat de limietverzamelingen niet leeg zijn is te eisen dat de banen in compacte verzamelingen liggen.

(1.53) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem. Zij $x \in X$.

)[1] De topologische karakterisering uit (1.29) is hieruit gemakkelijk af te leiden: Als $\Gamma(x)$ compact is, is $\Omega(x) \neq \emptyset$ (doorsnede van genest stelsel compacte verzamelingen: vgl. ook (1.54)), en $\Omega(x) \subset \Gamma(x)$. Omdat $\Omega(x)$ invariant is, volgt hieruit dat $\Omega(x) = \Gamma(x)$. In de restrictie van (X,D,π) tot de Čech-volledige ruimte $\Gamma(x)$ is x dus periodiek!

Het punt x en ook de beweging π_x worden *positief Lagrange-stabiel* genoemd indien $C^+(x)$ compact is. In dit geval zegt men ook wel dat de beweging π_x *positief compact* is.

(1.54) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Als* x *positief Lagrange-stabiel is, dan is* $\Omega(x)$ *een niet-lege, compacte en samenhangende verzameling. Voor iedere omgeving* U *van* $\Omega(x)$ *is er een* $t_0 \in \mathbb{R}^+$ *zó dat* $C^+(\pi(x,t)) \subset U$ *voor alle* $t \geq t_0$.

BEWIJS. Omdat $C^+(x)$ compact is, is $\omega(x) = \infty$ (1.18) (iii), en dus is $\Omega(x) = \bigcap \{C^+(\pi(x,t)) \mid 0 \leq t\}$. Dan is $\Omega(x)$ als doorsnede van een genest stelsel compacte verzamelingen een niet-lege compacte verzameling.
Zij U een omgeving van $\Omega(x)$. We mogen aannemen dat U open is. Nu is $\bigcap \{C^+(\pi(x,t)) \mid 0 \leq t\} \cap (X\backslash U) = \emptyset$. Omdat $C^+(x)$ compact is volgt hieruit dat

$$C^+(\pi(x,t_0)) \cap (X\backslash U) = \emptyset \qquad \text{voor geschikte } t_0 \in \mathbb{R}^+;$$

m.a.w. $C^+(\pi(x,t)) \subset C^+(\pi(x,t_0)) \subset U$ voor $t \geq t_0$.
Neem nu eens aan dat $\Omega(x)$ niet samenhangend is: $\Omega(x) = F \cup G$ waarbij F en G niet-lege, disjuncte gesloten verzamelingen zijn in $\Omega(x)$. Omdat $\Omega(x)$ compact is, zijn F en G compact. Er zijn dan disjuncte open verzamelingen V en W met $F \subset V$ en $G \subset W$ (X is Hausdorff!). Zij $U = V \cup W$. Volgens het voorgaande is er een $t_0 \in \mathbb{R}^+$ zó dat $C^+(\pi(x,t)) \subset U$ voor $t \geq t_0$. Omdat $\Gamma^+(\pi(x,t))$, en dus ook $C^+(\pi(x,t))$, samenhangend is, moet voor alle $t \geq t_0$ hetzij $C^+(\pi(x,t)) \subset U$, hetzij $C^+(\pi(x,t)) \subset W$. Dan is dus $\Omega(x) \subset V$ of $\Omega(x) \subset W$, dus $G = \emptyset$ of $F = \emptyset$. Tegenspraak. □

(1.55) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, en zij* $x \in X$. *Als* $\Omega(x) \neq \emptyset$ *en als* $\Omega(x)$ *compact is en indien er bij iedere omgeving* U *van* $\Omega(x)$ *en* $t \in \mathbb{R}^+$ *is zó dat* $C^+(\pi(x,t)) \subset U$, *dan is* x *positief Lagrange-stabiel.*

BEWIJS. We bewijzen dat $C^+(x)$ compact is. Zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van $C^+(x)$. Omdat $\Omega(x)$ compact is, zijn er eindig veel indices $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ zó dat $\Omega(x) \subset \bigcup \{U_{\alpha_i} \mid i = 1,\ldots,n\}$. De verzameling $\bigcup \{U_{\alpha_i} \mid i = 1,\ldots,n\}$ is een omgeving van $\Omega(x)$. Er is dus een

$t \in \mathbb{R}^+$ zó dat $C^+(\pi(x,t)) \subset \cup \{U_{\alpha_i} \mid i = 1,\dots,n\}$.
Omdat $\pi_x[0,t]$ compact is, zijn er eindig veel indices $\alpha_{n+1},\dots,\alpha_m$ zó dat $\pi_x[0,t] \subset \cup \{U_{\alpha_i} \mid i = n+1,\dots,m\}$. Dan is $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1,\dots,m\}$ een eindige overdekking van $\pi_x[0,t] \cup C^+(\pi(x,t))$, en dus zeker van $C^+(x)$, en tevens deeloverdekking van $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$. □

(1.56) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem op een rimcompacte*)[1] *ruimte* X, *en zij* $x \in X$. *Indien* $\Omega(x)$ *een niet-lege, compacte verzameling is, dan is* x *positief Lagrange-stabiel.*

BEWIJS. Zij U een omgeving van $\Omega(x)$. Omdat X rimcompact is en omdat $\Omega(x)$ compact is, is er een open omgeving V van $\Omega(x)$ zó dat $V \subset U$ en de rand $\bar{V}\backslash V$ van V compact is. Omdat

$$\bigcap \{C^+(\pi(x,t)) \mid 0 \le t\} \cap (\bar{V}\backslash V) = \emptyset,$$

is er een $t \in \mathbb{R}^+$ zó dat $C^+(\pi(x,t)) \cap (\bar{V}\backslash V) = \emptyset$. Omdat $C^+(\pi(x,t))$ samenhangend is, en $C^+(\pi(x,t)) \cap V \neq \emptyset$, moet $C^+(\pi(x,t)) \subset V$. Pas nu (1.55) toe. □

(1.56a) VOORBEELD. In (1.56) kan de voorwaarde dat X rimcompact is niet gemist worden. We illustreren dit aan de hand van een voorbeeld. Om de notatie te vereenvoudigen beschouwen we eerst het lokale dynamische systeem $(\mathbb{R}^+, D_0, \phi)$, gedefinieerd door de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = -x^3$. Dan is $D_0 = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(x,t) \mid x > 0 \ \& \ t > -1/2x^2\}$, en voor $(x,t) \in D_0$,

$$\phi(x,t) = \frac{x}{\sqrt{2tx^2+1}}.$$

Beschouw nu het als volgt gedefinieerde systeem (X,D,π): X is de deelverzameling van $\mathbb{R}^2$, bepaald door

$$X := \{\underline{0}\} \cup \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x, \sin \tfrac{1}{x}) \text{ met } x > 0\}$$

waarin $\underline{0} = (0,0)$; zij voorts

)[1] Dat wil zeggen: ieder punt heeft willekeurig kleine omgevingen met compacte rand, bijv. X lokaal compact.

$$D := (\{\underline{0}\} \times \mathbb{R}) \cup \{(\underline{x},t) \mid (x,t) \in D_0\}$$

en

$$\pi(\underline{x},t) := \begin{cases} \underline{0} \quad \text{als} \quad \underline{x} = \underline{0} \quad \text{en} \quad t \in \mathbb{R} \\ (\phi(x,t),\ \sin \frac{1}{\phi(x,t)}) \quad \text{als} \quad x \neq 0 \quad \text{en} \quad t > -\frac{1}{2x^2}. \end{cases}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat (X,D,π) voldoet aan de axioma's A0, A1, A2 en A4 van (1.1) (één en ander geldt voor ϕ!) Wat A3 (continuïteit) betreft, alleen de continuïteit van π in een punt $(\underline{0},t_0)$ met $t_0 \in \mathbb{R}$ behoeft enige toelichting. Het is voldoende om te laten zien dat $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \pi(\underline{x},t) = \underline{0}$, uniform in t voor $|t| \leq T$, voor elke $T > 0$. Gebruik hiertoe de volgende afschattingen:

$$|\phi(x,t)| = \left| \frac{x}{\sqrt{2tx^2+1}} \right| \leq |x|\sqrt{2}$$

voor $|t| \leq T$ en $|x| \leq \frac{1}{2}T^{-\frac{1}{2}}$, en

$$\left|\sin \frac{1}{\phi(x,t)} - \sin \frac{1}{x}\right| \leq \sup_{|t|\leq T} \left| \frac{d}{dt}\left(\sin \frac{1}{\phi(x,t)}\right)\right| . T$$

$$\leq \sup_{|t|\leq T} |\phi(x,t)| . T$$

voor $|t|\leq T$ (merk op, dat $\frac{d}{dt}(\phi(x,t)) = -\phi(x,t)^3$!).
Beschouw nu het punt $\underline{p} = (\pi^{-1},0)$. Dan is $\Omega(\underline{p}) = \{\underline{0}\}$.
Dus $\Omega(\underline{p}) \neq \emptyset$ en $\Omega(\underline{p})$ is compact.
Anderzijds is

$$C^+(\underline{p}) = \Omega(\underline{p}) \cup \Gamma^+(\underline{p}) = \{\underline{0}\} \cup \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x,\ \sin \tfrac{1}{x}) \text{ met } 0 < x \leq \pi^{-1}\}$$

en deze verzameling is niet compact (het punt $\underline{0}$ heeft zelfs geen compacte omgeving).

Evenals Poisson-stabiliteit is Lagrange-stabiliteit meer een eigenschap van de banen van het systeem, dan van de punten.
Dat is de inhoud van de volgende propositie.

(1.56b) PROPOSITIE. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, en zij* $x \in X$ *en* $y \in \Gamma(x)$. *Dan is* x *positief Lagrange-stabiel als en slechts als* y *positief Lagrange stabiel is.*

BEWIJS. "Slechts als": voor zekere $s \in J(x)$ is $y = \pi(x,s)$. Als $s \geq 0$, dan is $C^+(y) \subset C^+(x)$ (1.15) en dus compact. Als $s < 0$, dan is $C^+(y) = \{\pi(y,t) \mid s \leq t \leq 0\} \cup C^+(x)$ en dus als vereniging van compacte verzamelingen weer compact. Het "als" gedeelte gaat analoog met rolverwisseling van x en y. □

9. Morfismen

In de literatuur vindt men talloze definities van isomorfismen. Het zal moeilijk zijn om uit al deze definities een enkele te kiezen. De keuze hangt mede af van de soort problemen dat men wil bestuderen. Morfismen zijn nauwelijks bestudeerd. Hieronder volgt een poging om een vrij algemene definitie van morfisme te geven en een stukje theorie te ontwikkelen.

(1.57) DEFINITIE. Laat (X,D,π) en (Y,E,ρ) lokale dynamische systemen zijn. Een *morfisme*

$$F: (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$$

is een paar (ϕ,τ) waarbij aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

M0. $\phi: X \to Y$ is een continue afbeelding (het *ruimtelijk effect van* F).

$\tau: D \to \mathbb{R}$ is een continue afbeelding (het *tijdsaspect van* F).

M1. Voor iedere $x \in X$ is $\tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$, gedefinieerd door $\tau_x(t) := \tau(x,t)$, een strikt stijgende afbeelding met $\tau_x(0) = 0$.

M2. Voor iedere $(x,t) \in D$ geldt

$\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau(x,t))$.

In het geval dat $\phi = id_X$ spreekt men van een *parametertransformatie*. In het geval dat $\tau(x,t) = t$ voor iedere $(x,t) \in D$ noemt men F een *equitempisch morfisme*, en ϕ een *equivariante afbeelding*. F heet een *isomorfisme* als F een tweezijdige inverse $G: (Y,E,\rho) \to (X,D,\pi)$ heeft (zie (1.58)).

(1.58) DEFINITIE. Laat twee morfismen van dynamische systemen

$$(\phi,\sigma):(X_1,D_1,\pi_1) \to (X_2,D_2,\pi_2)$$

en

$$(\psi,\tau):(X_2,D_2,\pi_2) \to (X_3,D_3,\pi_3)$$

gegeven zijn. De *samenstelling* (χ,ρ) van (ϕ,σ) en (ψ,τ),

$$(\chi,\rho):(X_1,D_1,\pi_1) \to (X_3,D_3,\pi_3) \quad ,$$

is gedefinieerd door $\chi := \psi\circ\phi$ en $\rho(x,t) := \tau(\phi(x),\sigma(x,t))$ voor alle $(x,t) \in D_1$. Notatie: $(\chi,\rho) = (\psi,\tau)\circ(\phi,\sigma)$.
De samenstelling van twee morfismen is weer een morfisme. Immers, χ en ρ zijn als samenstelling van continue functies weer continu. Aan M0 is dus voldaan. Omdat $\rho_x = \tau_{\phi(x)}\circ\sigma_x$ is ook aan M1 voldaan. We controleren M2: zij $(x,t) \in D_1$; dan is

$$\begin{aligned}\chi(\pi_1(x,t)) &= \psi(\phi(\pi_1(x,t)))\\ &= \psi(\pi_2(\phi(x),\sigma(x,t)))\\ &= \pi_3(\psi(\phi(x)),\ \tau(\phi(x),\sigma(x,t)))\\ &= \pi_3(\chi(x),\ \rho(x,t)).\end{aligned}$$

Het morfisme (ψ,τ) is een *tweezijdige inverse* van (ϕ,σ) indien $(\psi,\tau)\circ(\phi,\sigma)$ en $(\phi,\sigma)\circ(\psi,\tau)$ beide gedefinieerd zijn (dus $(X_3,D_3,\pi_3) = (X_1,D_1,\pi_1)$) en de identieke transformaties op (X_1,D_1,π_1), resp. (X_2,D_2,π_2) voorstellen. Dus:

$$\psi\circ\phi = id_{X_1}, \qquad \phi\circ\psi = id_{X_2}$$

(met andere woorden, ψ en ϕ zijn homeomorfismen en elkaars inverse), en

$$\tau(\phi(x),\sigma(x,t)) = t;\ \sigma(\psi(y),\tau(y,s)) = s$$

voor alle $(x,t) \in D_1$, resp. $(y,s) \in D_2$.

(1.59) VOORBEELDEN.

1. We beschouwen de volgende dynamische systemen in het complexe vlak: $\pi\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gegeven door $\pi(z,t) := z + it$ (translaties); $\rho\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gegeven door $\rho(z,t) := ze^{2\pi it}$ (rotaties).
   Een morfisme van het eerste systeem in het tweede systeem is (ϕ,τ) met $\phi(z) := e^z$ en $\tau(z,t) := \frac{t}{2\pi}$
   (We controleren M2: voor alle $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ is $\phi(\pi(z,t)) = e^{\pi(z,t)} = e^{z+it}$; $(\phi(z),\tau(z,t)) = (e^z, \frac{t}{2\pi})$; $\rho(\phi(z),\tau(z,t)) = e^z e^{it} = e^{z+it}$).
2. Zij (X,D,π) het dynamisch systeem uit voorbeeld (1.40) en zij (Y,E,ρ) het dynamisch systeem uit voorbeeld (1.9)3. Het paar (ϕ,τ) met $\phi(x) = x$ en $\tau(x,t) = t$ voor alle $x \in X$, $(x,t) \in D$ is een morfisme.
3. Zij (X,D,π) een dynamisch systeem. Laat $(X,X\times\mathbb{R},\rho)$ het triviale dynamische systeem op X zijn (1.2)2. Het paar (ϕ,τ) waarin $\phi := id_X$ en $\tau(x,t) := 0$ voor alle $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ is *geen* morfisme van $(X,X\times\mathbb{R},\rho)$ in (X,D,π). Merk op dat aan M0 en M2 voldaan is.
4. Zij $X := \mathbb{R}^+\setminus\{0\}$, zij $D := X \times \mathbb{R}$ en zij $\pi\colon D \to X$ gegeven door $\pi(x,t) := xe^t$. Dan is (X,D,π) en globaal dynamisch systeem. Beschouw voorts $E := \{(x,t) \mid (x,t) \in X \times \mathbb{R}\ \&\ t > -x\}$, en laat $\rho\colon E \to X$ gedefinieerd zijn door $\rho(x,t) := x + t$. Dan is (X,E,ρ) een lokaal dynamisch systeem.
   Definieer $\phi\colon X \to X$ door $\phi(x) := x$ en $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ door $\tau(x,t) := x(e^t-1)$. Dan is $(\phi,\tau)\colon(X,D,\pi) \to (X,E,\rho)$ een morfisme van dynamische systemen.
   Enig rekenwerk laat tevens zien, dat (ϕ,τ) een isomorfisme is: het morfisme $(\phi,\tau')\colon(X,E,\rho) \to (X,D,\pi)$, waarin $\tau'(x,t) := \log(x+t) - \log x$ voor $(x,t) \in E$, is tweezijdige inverse van (ϕ,τ).

(1.60) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau)\colon(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van dynamische systemen zijn, en laat* $x \in X$. *Dan geldt*:

1. $\phi(\Gamma^+(x)) \subset \Gamma^+(\phi(x))$, *en* $\phi(\Gamma^+(x)) = \Gamma^+(\phi(x))$ *als het interval* $[0,\omega(x))$ *door* τ_x *op het interval* $[0,\omega(\phi(x))$ *wordt afgebeeld.*
2. $\phi(C^+(x)) \subset C^+(\phi(x))$.

3. *Als* x *een evenwichtspunt is, dan is* $\phi(x)$ *een evenwichtspunt.*
4. *Als* x *een periodiek punt is, dan is* $\phi(x)$ *een periodiek punt.*
In het geval dat $\phi(x)$ *geen evenwichtspunt is, geldt dan*

$$\tau_x(p(x)) = kp(\phi(x)) \quad \textit{met} \quad k \in \mathbb{N}.$$

BEWIJS.

1. Als $y = \pi(x,s)$ met $s \geq 0$, dan is

$$\phi(y) = \phi(\pi(x,s)) = \rho(\phi(x),\tau(x,s))$$

met $\tau(x,s) \geq 0$ (1.57) M1. Dus $\phi(\Gamma^+(x)) \subset \Gamma^+(\phi(x))$. Het is duidelijk, dat deze inclusie een gelijkheid is zodra elke $t \in J(\phi(x))$, $t \geq 0$, te schrijven is als $t = \tau(x,s)$ voor geschikte $s \in J(x)$, $s \geq 0$, dat wil zeggen, als $\tau_{x|[0,\omega(x))}: [0,\omega(x)) \to [0,\omega(\phi(x)))$ surjectief is.
2. $\phi(C^+(x)) = \phi(\overline{\Gamma^+(x)}) \subset \overline{\phi(\Gamma^+(x))} \subset \overline{\Gamma^+(\phi(x))} = C^+(\phi(x))$.
3. Als $\pi(x,t) = x$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan is $\phi(x) = \phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau(x,t))$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Omdat τ_x strikt stijgend en continu is, volgt hieruit dat $P_{\phi(x)} = \mathbb{R}$ ((1.25) en (1.26)). Dus $\phi(x)$ is evenwichtspunt.
4. Uit $\pi(x,p(x)) = x$ volgt $\phi(x) = \phi(\pi(x,p(x)) = \rho(\phi(x),\tau(x,p(x)))$. Dus $\tau(x,p(x)) \in P_{\phi(x)} = p(\phi(x))\,\mathbb{Z}$ (1.27). Dus er is een $k \in \mathbb{Z}^+$ zo dat $\tau_x(p(x)) = kp(\phi(x))$. Als $\phi(x)$ geen evenwichtspunt is, is x het ook niet, dus $p(x) > 0$. Uit de strikte monotonie van τ_x volgt dan, dat $\tau_x(p(x)) > 0$, dus $k \neq 0$, oftewel $k \in \mathbb{N}$. □

Onderdeel 1 uit bovenstaande stelling geldt mutatis mutandis ook voor Γ^- en Γ. In het bijzonder is dus $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$ als $\tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$ surjectief is. Uit voorbeeld (1.59)2 blijkt dat de inclusie $\phi(\Gamma(x)) \subset \Gamma(\phi(x))$ *strikt* kan zijn als τ_x niet surjectief is.

Het volgend tweetal lemma's is een voorbereiding op stelling (1.63). Lemma (1.62) geeft bovendien enige informatie over de gevallen waarin τ_x niet surjectief is.

(1.61) LEMMA. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme zijn van dymamische systemen. Als* $x \in X$ *zo is dat* $\phi(x)$ *geen evenwicht in* (Y,E,ρ) *is, dan geldt voor alle* s *en* t *met* t, $t+s \in J(x)$ *dat*

$$\tau(x,t+s) = \tau(x,t)+\tau(\pi(x,t),s).$$

BEWIJS. Merk eerst op, dat

$$\phi(\pi(x,t+s)) = \phi(\pi(\pi(x,t),s)).$$

Het linkerlid is gelijk aan $\rho(\phi(x),\tau(x,t+s))$, en het rechterlid is gelijk aan

$$\rho(\phi(\pi(x,t)),\tau(\pi(x,t),s)) = \rho(\rho(\phi(x),\tau(x,t)),\tau(\pi(x,t),s))$$

$$= \rho(\phi(x),\tau(x,t)+\tau(\pi(x,t),s)).$$

Indien $\phi(x)$ niet periodiek is (i.e. $\rho_{\phi(x)}$ is injectief), dan volgt hieruit onmiddellijk de gevraagde identiteit. Indien $\phi(x)$ wel periodiek is, maar geen evenwicht, dan is

$$\tau(x,t)+\tau(\pi(x,t),s)-\tau(x,t+s) \in p(\phi(x))\mathbb{Z},$$

waarin $p(\phi(x)) > 0$. Het linkerlid is evenwel een continue functie in (s,t) op de samenhangende verzameling $\{(s,t) \mid \alpha(x) < t < \omega(x)$ & $\alpha(x)-t < s < \omega(x)-t\}$. Omdat het linkerlid 0 is voor $s = t = 0$, en de verzameling $p(\phi(x))\mathbb{Z}$ discreet is, volgt hieruit dat het linkerlid 0 is voor alle s,t onder beschouwing. □

(1.62) LEMMA. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme zijn van lokale dymamische systemen. Zij* $x \in X$ *en zij*

$$t_x := \sup\{\tau(x,t) \mid 0 \le t < \omega(x)\}.$$

Als $\phi(x)$ *geen evenwicht is, en als* $t_x < \omega(\phi(x))$, *dan is* $\Omega(x) = \emptyset$.

<u>BEWIJS</u>. Neem aan, dat $\phi(x)$ geen evenwicht is, dat $t_x < \omega(\phi(x))$, en dat $\Omega(x) \neq \emptyset$ (zodat dus $\omega(x) = \infty$). We tonen eerst aan dat $\phi(\Omega(x)) = \{\rho(\phi(x),t_x)\}$. Neem namelijk eens aan dat $\phi(y) \neq \rho(\phi(x),t_x)$ voor zekere $y \in \Omega(x)$. Kies disjuncte omgevingen U en V van $\phi(y)$, resp. $\rho(\phi(x),t_x)$. Wegens de continuïteit van ρ is er een $\delta > 0$ zo dat $\rho_{\phi(x)}(t_x-\delta,t_x+\delta) \subset V$. Omdat ϕ continu is, is er een omgeving W van y in X met $\phi(W) \subset U$. Omdat $y \in \Omega(x)$, is er een $t_1 \in \mathbb{R}^+$ zo dat $\pi(x,t_1) \in W$ en $\tau(x,t_1) > t_x - \delta$. Nu is enerzijds $\phi(\pi(x,t_1)) \in U$, en anderzijds $\phi(\pi(x,t_1)) = \rho(\phi(x),\tau(x,t_1)) \in V$, in strijd met $U \cap V = \emptyset$. Hiermee is aangetoond dat $\phi(\Omega(x)) = \{\rho(\phi(x),t_x)\}$. Kies $z \in \Omega(x)$. Voor elke $t \in J(z)$ is $\pi(z,t) \in \Omega(x)$ (1.39), en dus $\phi(\pi(z,t)) \in \phi(\Omega(x)) = \{\rho(\phi(x),t_x)\}$, ofwel

$$\begin{aligned}\rho(\phi(x),t_x) &= \phi(\pi(z,t))\\ &= \rho(\phi(z),\tau(z,t))\\ &= \rho(\rho(\phi(x),t_x),\tau(z,t))\\ &= \rho(\phi(x),t_x+\tau(z,t)) \ .\end{aligned}$$

Als $\phi(x)$ geen periodiek punt is, volgt hieruit dat $t_x = t_x+\tau(z,t)$, ofwel $\tau(z,t) = 0$. Als $\phi(x)$ periodiek is, maar geen evenwicht, dan volgt hieruit dat $\tau(z,t) \in p(\phi(x))\mathbb{Z}$ voor alle $t \in J(z)$. Omdat $0 \in \tau_z(J(z))$ en $\tau_z(J(z))$ samenhangend is, moet $\tau(z,t) = 0$ voor alle $t \in J(z)$ (vgl. het bewijs van (1.61)). Dit is in strijd met (1.57)M1. Dus $\Omega(x) = \emptyset$. □

(1.62a) Uit bovenstaand lemma en stelling (1.60)<u>1</u> volgt onmiddellijk, dat voor elke $x \in X$ geldt:

$$\Omega(x) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \tau_x[0,\omega(x)) = [0,\omega(\phi(x))) \ \Rightarrow\ \phi(\Gamma^+(x)) = \Gamma^+(\phi(x)).$$

In het bijzonder:

Voor elke positief Poisson-of Lagrange-stabiele beweging π_x *is* $\phi(\Gamma^+(x)) = \Gamma^+(\phi(x))$. Immers, als π_x positief Poisson-stabiel is, is $x \in \Omega(x)$, dus $\Omega(x) \neq \emptyset$, en als π_x positief Lagrange-stabiel is, is $\Omega(x) \neq \emptyset$ op grond van (1.54).

(1.63) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme zijn van dynamische systemen. Dan geldt voor elk punt* $x \in X$ *dat* $\phi(\Omega(x)) \subset \Omega(\phi(x))$.

BEWIJS. Neem aan, dat $\Omega(x) \neq \emptyset$ (anders valt er niets te bewijzen), en zij $y \in \Omega(x)$. Dan is, voor alle $t \in \mathbb{R}^+$, $y \in C^+(\pi(x,t))$ en dus, op grond van (1.60)2 en (1.57)M2:

$$\phi(y) \in C^+(\phi(\pi(x,t))) = C^+(\rho(\phi(x),\tau(x,t)))$$

Als $\phi(x)$ een evenwichtspunt is, is $C^+(\rho(\phi(x),\tau(x,t))) = \{\phi(x)\}$, en dus $\phi(y) \in \{\phi(x)\} = \Omega(\phi(x))$. Als $\phi(x)$ geen evenwichtspunt is, volgt met lemma (1.62) en de aanname dat $\Omega(x) \neq \emptyset$, dat $\omega(\phi(x)) =$ $= \sup\{\tau(x,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ (omdat $\Omega(x) \neq \emptyset$, is $\omega(x) = \infty$!), ofwel, $\tau_x(\mathbb{R}^+) = [0,\omega(\phi(x)))$.
Uit het bovenstaande volgt dan, dat $\phi(y) \in C^+(\rho(\phi(x),s))$ voor elke $s \in [0,\omega(\phi(x)))$. Dus $\phi(y) \in \Omega(\phi(x))$ (en $\omega(\phi(x)) = \infty$). □

(1.64) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van dynamische systemen zijn, en zij* $x \in X$. *Als* x *positief Poisson-stabiel is, dan is* $\phi(x)$ *eveneens positief Poisson-stabiel.*

BEWIJS. Als x positief Poisson-stabiel is, dan is $\Gamma(x) \cap \Omega(x) \neq \emptyset$ (1.47)(ii). Dan geldt met (1.60)1 en (1.63)
$\emptyset \neq \phi(\Gamma(x) \cap \Omega(x)) \subset \phi(\Gamma(x)) \cap \phi(\Omega(x)) \subset \Gamma(\phi(x)) \cap \Omega(\phi(x))$.
Uit (1.47) (ii) volgt dan weer dat $\phi(x)$ positief Poisson-stabiel is. □

(1.65) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van dynamische systemen zijn, en zij* $x \in X$. *Als* x *positief Lagrange-stabiel is, dan is* $\phi(x)$ *eveneens positief Lagrange-stabiel, en* $\phi(C^+(x)) = C^+(\phi(x))$.

BEWIJS. We mogen aannemen dat $\phi(x)$ geen periodiek punt is. Uit de opmerking na lemma (1.62) volgt, dat $\phi(\Gamma^+(x)) = \Gamma^+(\phi(x))$. Dan is $\Gamma^+(\phi(x)) \subset \phi(C^+(x))$ en de laatste verzameling is compact, dus gesloten. Bijgevolg is $C^+(\phi(x)) \subset \phi(C^+(x))$. Ook is $\phi(C^+(x)) \subset C^+(\phi(x))$ (1.60)2, dus $\phi(C^+(x)) = C^+(\phi(x))$. Tevens volgt hieruit dat $C^+(\phi(x))$ compact is, d.w.z. $\phi(x)$ is positief Lagrange-stabiel. □

Het beeld van een invariante verzameling hoeft niet invariant te zijn. Dit blijkt uit (1.59)2. Het volledig origineel van een (positief) invariante verzameling is echter wel steeds (positief) invariant. Want als $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ een morfisme van dynamische systemen is en $M \subset Y$ is invariant, dan geldt voor elke $x \in \phi^{-1}(M)$ en elke $t \in J(x)$ $(t\geq 0)$ dat $\phi(x) \in M$, dus $\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau(x,t)) \in M$ ofwel $\pi(x,t) \in \phi^{-1}(M)$.

(1.66) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een isomorfisme zijn van dynamische systemen. Zij* $x \in X$ *en* $M \subset X$. *Dan geldt:*

1. $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$.
2. $\phi(\Gamma^+(x)) = \Gamma^+(\phi(x))$.
3. $\phi(\Omega(x)) = \Omega(\phi(x))$.
4. x *is evenwichtspunt als en slechts als* $\phi(x)$ *evenwichtspunt is.*
5. x *is periodiek punt als en slechts als* $\phi(x)$ *periodiek punt is. Bovendien is* $\tau_x(p(x)) = p(\phi(x))$.
6. x *is positief Poisson-stabiel als en slechts als* $\phi(x)$ *positief Poisson-stabiel is.*
7. x *is positief Lagrange-stabiel als en slechts als* $\phi(x)$ *positief Lagrange-stabiel is.*
8. M *is een invariante deelverzameling van* X *als en slechts als* $\phi(M)$ *een invariante deelverzameling van* Y *is.*
9. $\phi: X \to Y$ *is topologisch.*
10. $\tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$ *is topologisch voor elke* $x \in X$.

BEWIJS. Volgt direct uit voorgaande stellingen. □

10. Topologisch ruimtelijk effect

We beschouwen nu morfismen $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ waarbij $\phi: X \to Y$ topologisch is. We zullen aantonen dat zo'n morfisme een isomorfisme is indien de verzameling van evenwichtspunten van X nergens dicht ligt in X. We bekijken eerst het geval dat ϕ een continue bijectie is.

(1.67) STELLING. *Zij* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme met de eigenschap dat* ϕ *bijectief is. Dan geldt voor iedere* $x \in X$:

1. x *is evenwichtspunt als en slechts als* $\phi(x)$ *evenwichtspunt is.*
2. x *is periodiek punt als en slechts als* $\phi(x)$ *periodiek punt is. In dat geval is* $\tau_x(p(x)) = p(\phi(x))$.
3. *Als* x *geen evenwichtspunt is, dan is* $\tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$ *surjectief (en dus topologisch).*
4. $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$.

BEWIJS.

1. Als $\phi(x)$ evenwichtspunt is, dan volgt uit (1.60)1 en (1.28) dat $\{\phi(x)\} \subset \phi(\Gamma(x)) \subset \Gamma(\phi(x)) = \{\phi(x)\}$. Omdat ϕ injectief is volgt hieruit, dat $\Gamma(x) = \{x\}$; dus x is evenwichtspunt. Zie verder (1.60)3 voor de omgekeerde implicatie.

2. Neem aan dat $\phi(x)$ een periodiek punt is en geen evenwichtspunt (anders volgt het gestelde direct uit 1); dus $p(\phi(x)) > 0$ (1.27). Zij $t_x := \sup\{\tau_x(t) \mid 0 \le t < \omega(x)\}$. Dan is $\tau_x[0,\omega(x)) = [0,t_x)$, en

$$\phi(\Gamma^+(x)) = \{\rho(\phi(x),\tau_x(t)) \mid 0 \le t < \omega(x)\} = \{\rho(\phi(x),s) \mid 0 \le s < t_x\}.$$

We tonen eerst aan, dat $t_x \ge p(\phi(x))$. Want stel dat $t_x < p(\phi(x))$. Dan is $\rho(\phi(x),t_x) \notin \phi(\Gamma^+(x))$: anders zou $\rho(\phi(x),t_x) = \rho(\phi(x),s)$ met $0 \le s < t_x$, ofwel $t_x - s \in P(\phi(x))$, in strijd met de definitie van $p(\phi(x))$ en het feit dat $0 < t_x - s < p(\phi(x))$.
Omdat ϕ een bijectie is, is er een unieke $y \in X$ zo dat $\phi(y) = \rho(\phi(x),t_x)$, en omdat $\phi(y) \notin \phi(\Gamma^+(x))$, is $y \notin \Gamma^+(x)$. Voor alle $t \in J(y)$ is dan

$$\phi(\pi(y,t)) = \rho(\phi(y),\tau_y(t)) = \rho(\phi(x),\tau_y(t)+t_x).$$

Uit de continuïteit en de (strikte) monotonie van τ_y volgt, dat er een $t \in J(y)$ is, $t < 0$, zo dat $-t_x < \tau_y(t) < 0$, dat wil zeggen, $\tau_y(t) + t_x \in [0,t_x)$. Er is dan een $s \in [0,\omega(x))$ zo dat $\tau_y(t) + t_x = \tau(x,s)$, en dus

$$\rho(\phi(x),\tau_y(t)+t_x) = \rho(\phi(x),\tau(x,s)) = \phi(\pi(x,s)).$$

Dit betekent, dat $\phi(\pi(y,t)) = \phi(\pi(x,s))$, ofwel ($\phi$ is injectief) $\pi(y,t) = \pi(x,s)$, en dus $y = \pi(x,s-t) \in \Gamma^+(x)$. Tegenspraak, dus is inderdaad $p(\phi(x)) \le t_x$. We zullen nu eerst aantonen dat er een $z \in \Gamma(x)$ is zo dat $p(\phi(z)) < t_z$. Merk hiertoe eerst op, dat uit (1.61) volgt voor alle $u,v \in \mathbb{R}$ met $u,u+v \in J(x)$:

$$\tau_{\pi(x,u)}(v) = \tau_x(u+v) - \tau_x(u).$$

Omdat $t_{\pi(x,u)} = \sup\{\tau_{\pi(x,u)}(v) \mid v \ge 0,\ v \in J(\pi(x,u)) = J(x) - u\}$, volgt hieruit dat

$$t_{\pi(x,u)} = t_x - \tau_x(u).$$

Fixeer nu $u \in J(x)$, $u < 0$. Dan is dus voor $z := \pi(x,u)$

$$t_z = t_x - \tau_x(u) > t_x.$$

Anderzijds is $p(\phi(z)) = p(\phi(\pi(x,u))) = p(\phi(x),\tau(x,u)) = p(\phi(x))$. Omdat $p(\phi(x)) \le t_x$, is nu dus $p(\phi(z)) < t_z$.
Er is nu een $s_0 \in [0,\omega(z))$ zo dat $\tau_z(x_0) = p(\phi(z))$. Maar nu is $\phi(\pi(z,s_0)) = \rho(\phi(z),\tau(z,s_0)) = \rho(\phi(z),p(\phi(z))) = \phi(z)$, waaruit volgt dat $\pi(z,s_0) = z$. Omdat $p(\phi(z)) = p(\phi(x)) \neq 0$ is en τ_z injectief, is $s_0 \neq 0$. Dus z is periodiek. Bovendien is $p(z) \le s_0$, en dus $\tau_z(p(z)) \le \tau_z(s_0) = p(\phi(z))$. Omdat $z \in \Gamma(x)$, volgt hieruit dat ook x periodiek is, en dat $p(x) = p(z)$, dus $\tau_z(p(x)) = = \tau_z(p(z)) \le p(\phi(z)) = p(\phi(x))$. Dit geldt voor elke $z = \pi(x,u)$ met $u \in J(x)$, $u < 0$. Omdat τ continu is, volgt hieruit, dat

$$\tau_x(p(x)) = \lim_{u\uparrow 0} \tau_{\pi(x,u)}(p(x)) \le p(\phi(x)).$$

Omgekeerd volgt uit (1.60)4 dat $p(\phi(x)) \le \tau_x(p(x))$, zodat nu inderdaad $\tau_x(p(x)) = p(\phi(x))$.

3. Neem aan dat x (en dus, op grond van 1, ook $\phi(x)$) geen evenwichtspunt is. Als x periodiek is, is $\Omega(x) \neq \emptyset$, en uit (1.62) volgt dan, dat $\tau_x[0,\omega(x)) = [0,\omega(\phi(x)))$. En als x niet periodiek is (en dus $\phi(x)$ evenmin, wegens 2), dan blijkt geheel analoog als onder 2, dat de aanname dat $\rho(\phi(x),t_x)$ gedefinieerd is (maar niet tot $\phi(\Gamma^+(x))$ kan behoren) tot een tegenspraak voert. Dus $t_x \notin [0,\omega(\phi(x)))$, ofwel $t_x = \omega(\phi(x))$, en $\tau_x[0,\omega(x)) = [0,\omega(\phi(x)))$.
Geheel analoog toont men aan, dat in alle gevallen $\tau_x(\alpha(x),0] = (\alpha(\phi(x)),0]$. Dus $\tau_x(J(x)) = J(\phi(x))$.

4. Triviaal in verband met 1, 3 en de opmerking na (1.60). □

(1.68) VOORBEELD. Laat $(X,X\times\mathbb{R},\pi)$ het triviale systeem zijn (1.2)2. Het paar (ϕ,τ), waarin $\phi := id_X$ en $\tau(x,t) := \arctan t$ voor alle $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ is een morfisme van $(X,X\times\mathbb{R},\pi)$ in $(X,X\times\mathbb{R},\pi)$. Voor geen enkel x is τ_x surjectief. De voorwaarde dat x geen evenwichtspunt is in (1.67)3

kan in het algemeen dus niet gemist worden.
Niettemin is de volgende verscherping van (1.67)3 mogelijk:

(1.69) STELLING. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn met de eigenschap dat de verzameling van evenwichtspunten van* X *nergens dicht ligt in* X. *Zij* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme zó dat* ϕ *bijectief is. Dan is voor iedere* $x \in X$ *de afbeelding* $\tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$ *surjectief.*

BEWIJS. We hoeven alleen het geval te bekijken dat x evenwichtspunt is. Neem eens aan dat $t_x := \sup\{\tau(x,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\} < \omega(\phi(x)) = \infty$.
Zij $t > 0$ en kies δ zó dat $0 < \delta < \tau(x,t)$.
Er is een omgeving U van x zó dat $\tau(y,t) > \delta$ voor alle $y \in U$.
Zij $n \in \mathbb{N}$ zó gekozen dat $n\delta > t_x$. Omdat voor ieder $i \in \{0,\dots,n\}$ de afbeelding π^{it} continu is, zijn er omgevingen V_i van x zó dat $V_i \times \{it\} \subset D$ en $\pi(V_i,it) \subset U$.
Zij $V := \bigcap\{V_i \mid i = 0,\dots,n\}$. Nu geldt voor iedere punt $y \in V$ dat géén evenwichtspunt is, in verband met (1.67)1 en (1.61):

$$\begin{aligned}\tau(y,nt) &= \tau(y,t) + \tau(\pi(y,t),(n-1)t)\\ &= \tau(y,t) + \tau(\pi(y,t),t) + \tau(\pi(y,2t),(n-2)t)\\ &= \dots\dots\dots\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\pi(y,it),t) > n\delta > t_x.\end{aligned}$$

Anderzijds is $\tau(x,nt) < t_x$. Omdat iedere omgeving van x "bewegende punten" y bevat (waarvoor dus $\tau(y,nt) > t_x$) volgt hieruit een tegenspraak met de continuïteit van τ in (x,nt). □

(1.70) STELLING. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn met de eigenschap dat de verzameling van evenwichtspunten van* X *nergens dicht ligt in* X.
Zij $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme. Dan is* (ϕ,τ) *een isomorfisme als en slechts als* ϕ *een homeomorfisme is.*

BEWIJS. "Slechts als": triviaal. "Als": zij ϕ een homeomorfisme.
Definieer $\psi: Y \to X$ door $\psi := \phi^{-1}$ en $\sigma: E \to D$ door $\sigma(y,s) := \tau^{-1}_{\psi(y)}(s)$.
Merk op dat $\tau_{\psi(y)}: J(\psi(y)) \to J(y)$ topologisch is (1.69), dus σ is

goed gedefinieerd, en σ voldoet aan de eis, geformuleerd in (1.57)M1. Ook is door het paar (ϕ,σ) voldaan aan (1.57)M2. Immers,

$$\phi(\pi(\psi(x),\sigma(x,t))) = \rho(\phi(\psi(x)),\tau(\psi(x),\sigma(x,t)))$$

$$= \rho(x,\tau_{\psi(x)}(\tau^{-1}_{\psi(x)}(t))) = \rho(x,t) = \phi(\psi(\rho(x,t))).$$

Dus $\psi(\rho(x,t)) = \pi(\psi(x),\sigma(x,t))$.
Ook aan (1.57)M0 is voldaan. Defineer, om dat in te zien,

$$\Phi\colon D \to E \text{ door } \Phi(x,t) := (\phi(x),\tau(x,t)) \quad \text{en}$$

$$\Psi\colon E \to D \text{ door } \Psi(x,t) := (\psi(x),\sigma(x,t)).$$

Dan zijn Φ en Ψ elkaars inversen. De continuïteit van σ en ψ is nu bewezen indien aangetoond is dat Ψ continu is. Omdat Φ de inverse van Ψ is, is het voldoende om aan te tonen dat Φ open is. Beschouw hiertoe een open basisverzameling in D: zij U open in X, en neem aan dat $U \times (a,b) \subset D$.
Dan is

$$\Phi(U\times(a,b)) = \bigcup_{x\in U} \Phi(\{x\}\times(a,b))$$

$$= \bigcup_{x\in U} \{\phi(x)\}\times(\tau_x(a),\tau_x(b))$$

$$= \bigcup_{y\in\phi(U)} \{y\}\times(\tau_{\psi(y)}(a),\tau_{\psi(y)}(b)):$$

Nu zijn de afbeeldingen $y \mapsto \tau(\psi(y),a)$ en $y \mapsto \tau(\psi(y),b)$ continu op Y. Omdat $\phi(U)$ open is in Y volgt hieruit dat $\Phi(U\times(a,b))$ open is in Y. Hiermee is aangetoond dat (ψ,ϕ) een morfisme is, dat de inverse is van (ϕ,τ). $\square$

(1.71) <u>VOORBEELD</u>. Zij $X = \mathbb{R}^2$ met de gewone topologie, en zij $Y = \mathbb{R}^2$ met als basis voor de topologie de verzameling van alle open schijven die (0,0) niet bevatten tesamen met alle verzamelingen van de vorm $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{n} \text{ of } x^2 + y^2 > n\}$ met $n \in \mathbb{N}$. Definieer $\pi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ door $\pi(x,t) := (r,\phi+rt)$ waarbij (r,ϕ) de poolcoordinaten van x zijn. Laat ook $\rho\colon Y \times \mathbb{R} \to Y$ gedefinieerd zijn door $\rho(x,t) := (r,\phi+rt)$. Het paar (ϕ,τ) waarin $\phi := id_X$ en $\tau(x,t) := t$

voor $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ is een morfisme van $(X, X\times\mathbb{R}, \pi) \to (Y, Y\times\mathbb{R}, \rho)$, dat geen isomorfisme is (want ϕ is niet topologisch). Echter is (ϕ,τ) een morfisme waarbij ϕ wel bijectief is.

11. Differentieerbare lokale dynamische systemen

(1.72) In stelling (1.6) is beschreven hoe bij een open verzameling U van $\mathbb{R}^n$ en bij een functie $f: U \to \mathbb{R}^n$ (een vectorveld op U), welke aan de unicon-voorwaarde voldoet, een lokaal dynamisch systeem (U,D,π) gedefinieerd kan worden. Kortheidshalve zullen we het zo gedefinieerde systeem (U,D,π) een *differentieerbaar lokaal dynamisch systeem op* U *noemen*. We zeggen ook wel, dat (U,D,π) het *lokale dynamische systeem bij het vectorveld* f is.
We merken hierbij op, dat in de literatuur een "abstract" lokaal dynamisch systeem (U,D,π) met $U \subset \mathbb{R}^n$ vaak *differentieerbaar* wordt genoemd als voor elke $q \in U$ de functie $\pi_q: J(q) \to U$ differentieerbaar is in het punt 0, zeg met afgeleide $F(q) \in \mathbb{R}^n$, dat wil zeggen, als voor elke $q \in U$

$$F(q) := \lim_{s\to 0} \frac{\pi(q,s)-q}{s}$$

gedefinieerd is. Gebruikmakend van het groepsaxioma (1.1)A2 ziet men nu gemakkelijk in, dat voor elke $q \in U$ en $t \in J(q)$ geldt:

$$\begin{aligned} F(\pi(q,t)) &= \lim_{s\to 0} \frac{\pi(\pi(q,t),s)-\pi(q,t)}{s} \\ &= \lim_{u\to t} \frac{\pi(q,u)-\pi(q,t)}{u-t} \end{aligned}$$

Dus π_q is oplossing van de differentiaalvergelijking $x' = F(x)$ zo dat $\pi_q(0) = q$. (N.B. Er is geen garantie a priori dat F aan de unicon voorwaarde voldoet, zelfs niet als F continu is.)

(1.73) STELLING. *Zij* U *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^n$ *en laat* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *aan de unicon-voorwaarde voldoen. Zij* $h: U \to \mathbb{R}$ *een continue functie met* $h(x) > 0$ *voor alle* $x \in U$. *Dan voldoet ook de (puntsgewijs gedefinieerde) productfunctie* h.f *aan de unicon-voorwaarde.*
Laat nu (U,D,π) *en* (U,E,ρ) *de lokale dynamische systemen zijn bij* f *en* h.f. *Dan wordt door*

$$\tau(x,t) := \int_0^t \frac{ds}{h(\pi(x,s))}$$

een continue functie $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ *gedefinieerd zo dat*

$$(id_U,\tau):(U,D,\pi) \to (U,E,\rho)$$

een isomorfie van lokale dynamische systemen is.

BEWIJS. In het eerste deel van het bewijs zal alleen gebruik worden gemaakt van de continuïteit van f, h en 1/h. Uit (1.5)DV3 volgt, dat er bij ieder punt $q \in U$ ten minste één oplossing $\pi_q:(a,b) \to U$ bestaat van het beginwaardeprobleem

(1.74) $$x' = f(x) \quad \text{en} \quad x(0) = q.$$

Definieer $\tau_q:(a,b) \to \mathbb{R}$ door

$$\tau_q(t) := \int_0^t \frac{ds}{h(\pi_q(s))} \qquad (a<t<b).$$

Dan is τ_q een strikt stijgende continue, zelfs differentieerbare, functie met $\tau'(t) = [h(\pi_q(t))]^{-1}$ en $\tau_q(0) = 0$. Zij $(c,d) := \tau_q(a,b)$, en laat $\sigma_q:(c,d) \to (a,b)$ de inverse zijn van τ_q. Dan is ook σ_q continu en differentieerbaar, en

$$\sigma_q'(t) = \frac{1}{\tau_q'(\sigma_q(t))} = h(\pi_q(\sigma_q(t)))$$

voor alle $t \in (c,d)$. Definieer nu ρ_q: $(c,d) \to U$ door

$$\rho_q(t) := \pi_q(\sigma_q(t)) \qquad \text{voor } t \in (c,d).$$

Dan is ρ_q differentieerbaar, en voor alle $t \in (c,d)$ geldt:

$$\begin{aligned}\rho_q'(t) &= \pi_q'(\sigma_q(t))\ \sigma_q'(t)\\ &= f(\pi_q(\sigma_q(t)))h(\pi_q(\sigma_q(t)))\\ &= f(\rho_q(t))h(\rho_q(t)).\end{aligned}$$

Dus ρ_q: $(c,d) \to U$ is een oplossing van het beginwaardeprobleem

(1.75) $\quad x' = h(x)f(x) \quad \text{en} \quad x(0) = q.$

Merk nog op, dat σ_q voldoet aan $\sigma_q'(t) = h(\rho_q(t))$ en $\sigma_q(0) = 0$, waaruit volgt, dat

$$\sigma_q(t) = \int_0^t h(\rho_q(u))du$$

voor alle $t \in (c,d)$.
In bovenstaande bewijsvoering is alleen gebruik gemaakt van de continuïteit van f en h. Een analoge redenering kan dus toegepast worden met h.f in plaats van f en 1/h in plaats van h: iedere oplossing $\bar{\rho}_q$ van (1.75), gedefinieerd op een interval $(\bar{c},\bar{d})$ definieert een oplossing $\bar{\pi}_q$: $(\bar{a},\bar{b}) \to U$ van (1.74) door $\bar{\pi}_q(t) := \rho_q(\bar{\tau}_q(t))$ voor $\bar{a} < t < \bar{b}$; hierin is $(\bar{a},\bar{b})$ het beeld van $(\bar{c},\bar{d})$ onder de afbeelding $\bar{\sigma}_q$: $t \mapsto \int_0^t h(\bar{\rho}_q(u))du$, en $\bar{\tau}_q$: $(\bar{a},\bar{b}) \to (\bar{c},\bar{d})$ de inverse van $\bar{\sigma}_q$.
In de eerste plaats volgt uit het bovenstaande, dat h.f aan de unicon-voorwaarde voldoet als en slechts als f eraan voldoet. Voorts, als f en h.f inderdaad aan de uniconvoorwaarde voldoen, laat dan (U,D,π) en (U,E,ρ) de lokale dynamische systemen zijn bij de vectorvelden f, resp. h.f. Definieer τ: $D \to \mathbb{R}$ en σ: $E \to \mathbb{R}$ door $\tau(q,t) := \tau_q(t)$ en $\sigma(q,t) := \sigma_q(t)$, waarin τ_q en σ_q gedefinieerd zijn als hierboven. Dan beeldt τ_q het definitie-interval $J(q)$ van π_q bijectief af op het definitie-interval van ρ_q, met σ_q als inverse, en τ en σ zijn parametertransformaties, als tenminste τ en σ continu zijn. Indien dit laatste aangetoond is, is onze stelling bewezen.
Wegens de symmetrie behoeven we slechts de continuïteit van één der functies σ en τ aan te tonen, en om typografische redenen kiezen we σ. De afstand van x tot y (in $U \subset \mathbb{R}^n$) zullen we zowel met $d(x,y)$ als $|x-y|$ noteren. We tonen aan, dat σ continu is in een punt $(x,t) \in E$. Gemakshalve nemen we aan, dat $t \geq 0$ (het geval $t \leq 0$ gaat analoog).
Zij $\varepsilon > 0$. De functie $h \circ \rho_x$ is continu op z'n definitie-interval, dus begrensd op een omgeving van t. Er is dus een $\delta_1 > 0$ zo dat het interval $[-\delta_1, t+\delta_1]$ geheel tot het definitie-interval van ρ_x behoort, terwijl

$$\left|\int_s^t h(\rho_x(u))\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

voor alle $s \in \mathbb{R}$ met $|s-t| < \delta_1$.
Zij nu $K_0 := \rho_x[-\delta_1, t+\delta_1]$. Omdat K_0 compact is en $K_0 \subset U$, is er een $\eta_1 > 0$ zo dat

$$K_1 := \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \ \&\ d(x,K_0) \le \eta_1\} \subset U.$$

Ook K_1 is compact, en h is dus uniform continu op K_1. Bepaal $\eta_2 > 0$ zo dat voor alle p, $q \in K_1$ met $d(p,q) < \eta_2$ geldt

$$|h(p) - h(q)| < \frac{\varepsilon}{2\max\{1, t+\delta_1\}}\ .$$

Bepaal tenslotte $\delta_2 > 0$ zo (zie (1.5)DV4), dat $\rho(y,u)$ is gedefinieerd en voldoet aan

$$d(\rho(x,u), \rho(y,u)) < \min\{\eta_1, \eta_2\}$$

voor alle $y \in U$ met $d(x,y) < \delta_2$ en voor alle $u \in \mathbb{R}$ met $-\delta_1 \le u \le$ $\le t+\delta_1$. Nu is voor alle $(y,s) \in E$ met $|y-s| < \delta_2$ en $|t-s| < \delta_1$:

$$\begin{aligned}|\sigma(x,t)-\sigma(y,s)| &\le |\sigma(x,t)-\sigma(x,s)| + |\sigma(x,s)-\sigma(y,s)| \\ &\le \left|\int_s^t h(\rho_x(u))du\right| + \left|\int_0^s (h(\rho(x,u))-h(\rho(y,u)))du\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(t+\delta_1)}{2\max\{1,t+\delta_1\}} \le \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

(1.76) <u>STELLING</u>. *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Ieder differentieerbaar lokaal dynamisch systeem op U is onder een parametertransformatie isomorf met een differentieerbaar globaal dynamisch systeem.*

<u>BEWIJS</u>. Zij (U,D,π) het lokaal dynamische systeem bij het vectorveld f. Zij $F := \mathbb{R}^n \backslash U$, en definieer de rij verzamelingen $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset U$ door $A_0 := \{x \in U \mid d(x,F) \ge 1\}$ en $A_n :=$ $\{x \in U \mid d(x,F) \ge 2^{-n}\ \&\ |x| \le n\}$ voor $n = 1,2,\ldots$. Dan is $\cup\{A_n \mid n = 0,1,2,\ldots\} = U$. Definieer nu $g\colon U \to \mathbb{R}$ door

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ als } d(x,F) \geq 1, & x \in U \\ \frac{d(x,F)}{d(x,F)+1} \text{ als } d(x,F) \leq 1, & x \in U \end{cases}$$

en vervolgens $h\colon U \to \mathbb{R}$ door $h(x) := \frac{g(x)}{1+|f(x)|}$ voor $x \in U$. Dan is g (en dus ook h) continu op U. Beschouw dan de differentiaalvergelijking

(1.77) $$x' = f(x)h(x)$$

We zullen aantonen dat het dynamische systeem bij (1.77) een globaal dynamisch systeem is. De stelling volgt dan uit (1.73). In (1.5)DV3 wordt vermeld dat voor iedere $p \in U$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ de oplossing ρ_p van (1.77) met $\rho_p(t_0) = p$ in ieder geval gedefinieerd is op het interval $[t_0-c_p, t_0+c_p]$ waarin $c_p := \frac{r}{2M}$, met $r := \min\{1, d(p,F)\}$ en $M := \max\{|h(x)f(x)| \mid x \in U \;\&\; d(x,p) \leq \frac{1}{2}r\}$. We zullen nu aantonen, dat $c_p \geq 1/8$ voor alle $p \in U$. Hieruit volgt dan gemakkelijk, dat ρ_p voor elke p op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd is (een oplossing op $[a,b]$ is na N stappen op $[a-\frac{N}{8}, b+\frac{N}{8}]$ gedefinieerd, en $\bigcup_{N=1}^{\infty}[a-\frac{N}{8}, b+\frac{N}{8}] = \mathbb{R}$). Welnu, als $p \in A_0$ dan vinden we $c_p = 1/2$. Is $p \in A_{n+1}\backslash A_n$, dan is $r \geq 2^{-(n+1)}$ en $M \leq \max\{g(x) \mid d(x,p) \leq \frac{1}{2}r\} \leq \max\{g(x) \mid x \in U \;\&\; d(x,F) \leq 2^{-n+1}\} \leq 2^{-n+1}$. We vinden $c_p \geq \frac{1}{8}$. □

(1.78) <u>STELLING</u>. *Zij* $(\mathbb{R}, D, \pi)$ *een lokaal dynamisch systeem op* $\mathbb{R}$. *Dan is er een open interval* U *van* $\mathbb{R}$ *en een differentieerbaar dynamisch systeem* (U,E,ρ) *op* U, *dat isomorf is met* $(\mathbb{R}, D, \pi)$ *onder een equitempisch isomorfisme. In het bijzonder is ieder lokaal dynamisch systeem op* $\mathbb{R}$ *isomorf met een globaal dynamisch systeem.*

<u>BEWIJS</u>. Merk eerst op dat uit (1.29)2, (1.51) en (1.49) volgt dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $\Gamma(x) = \{x\}$ (evenwichtspunt) of $\Gamma(x)$ is een open interval.

Zij F de verzameling van evenwichtspunten van $(\mathbb{R}, D, \pi)$. F is gesloten (1.31). Dan is $\mathbb{R}\backslash F$ de vereniging van paarsgewijs disjuncte banen, die elk een interval zijn; hiervan kunnen er hoogstens aftelbaar veel zijn, zeg k stuks (eventueel $k=\infty$). Zij $B_k := \mathbb{N}$ als $k = \infty$ en $B_k := \{1,2,\ldots,k\}$ als k eindig is. Dan is dus

$$R\backslash F = \cup\{(a_n,b_n) \mid n \in B_k\}.$$

Voor elke $n \in B_k$ en $y \in (a_n,b_n)$ valt de baan $\Gamma(y)$ van y samen met (a_n,b_n): π_y beeldt het interval $(\alpha(y),\omega(y))$ continu en 1,1-duidig af op het interval (a_n,b_n). (Merk op, dat π_y niet periodiek kan zijn omdat $\mathbb{R}$ geen homeomorfe beelden van de cirkel kan bevatten). Dus π_y is strikt stijgend of strikt dalend. In het eerste geval kennen we aan (a_n,b_n) het getal $s_n := +1$ toe, in het tweede geval $s_n := -1$. Anders gezegd: als $0 < t < \omega(y)$, dan is

$$s_n = \operatorname{sgn}(\pi(y,t)-y).$$

Al naar gelang $s_n > 0$ of $s_n < 0$ is zeggen we dat de baan in positieve, resp. negatieve richting wordt doorlopen.
Definieer nu het systeem (U,E,ρ) en de functie $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als volgt. We doen dit eerst op de intervallen (a_n,b_n) afzonderlijk.
I. Als (a_n,b_n) begrensd is, definieer dan eerst $h_n\colon(a_n,b_n) \to \mathbb{R}$ door

$$h_n(x) := s_n(b_n-x)(x-a_n)$$

voor $a_n < x < b_n$. Merk op, dat h_n aan de unicon-voorwaarde voldoet op (a_n,b_n) (h_n is een Lipschitz-functie). Laat nu $D_n := ((a_n,b_n),E_n,\rho_n)$ het dynamische systeem op (a_n,b_n) zijn bij het vectorveld h_n op (a_n,b_n). Omdat (a_n,b_n) open, begrensd en samenhangend is, en geen evenwichtspunten m.b.t. ρ_n bevat ($h_n(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a_n,b_n)$!), valt (a_n,b_n) samen met de baan van elk van z'n punten onder de beweging ρ_n. Voorts wordt (a_n,b_n) onder de beweging ρ_n in dezelfde orientatie doorlopen als onder de beweging π (immers, h_n is definiet op (a_n,b_n), en het teken van h_n is gelijk aan het teken van s_n). Uit (1.18)(iv) volgt nog, dat voor elke $y \in (a_n,b_n)$ de bewegingen π_y en ρ_{ny} op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd zijn (i.h.b. is $E_n = (a_n,b_n) \times \mathbb{R}$). Definieer nu $\phi_n\colon (a_n,b_n) \to (a_n,b_n)$ als volgt: fixeer een punt $c_n \in (a_n,b_n)$, bijvoorbeeld $c_n := \frac{1}{2}(a_n+b_n)$, en zij dan

(1.79) $$\phi_n := \rho_{nc_n} \circ (\pi_{c_n})^{-1}.$$

Als compositie van twee continue, strikt monotone, beide stijgende, of beide dalende, bijecties van (a_n,b_n) op $\mathbb{R}$, resp. van $\mathbb{R}$ op (a_n,b_n), is ϕ_n een strikt stijgende, continue bijectie van (a_n,b_n) op zichzelf.

II. Zij (a_n,b_n) niet begrensd. We onderscheiden nu drie gevallen:

(i) $a_n > -\infty$, $b_n = \infty$.

Definieer $h_n\colon (a_n,\infty) \to \mathbb{R}$ door

$$h_n(x) := s_n(x-a_n).$$

Merk op, dat h_n aan de unicon-voorwaarde voldoet. Zij D_n het dynamische systeem op (a_n,∞) bij het vectorveld h_n. Door expliciete berekening vindt men: $\rho_n(y,t) = a_n + (y-a_n)\exp(s_n t)$; in het bijzonder is D_n dus globaal. Mutatis mutandis geldt in dit geval hetzelfde als onder I. Met name, als $c_n \in (a_n,\infty)$ gefixeerd wordt, bijvoorbeeld $c_n := a_n + 1$, definieer dan $\phi_n\colon (a_n,\infty) \to (a_n,\infty)$ door (1.79). Dan is ϕ_n een strikt monotone, continue injectie van (a_n,∞) in zichzelf.)*

(ii) $a_n = -\infty$, $b_n < \infty$.

Geheel analoog aan (i), met $h_n(x) := s_n(b_n-x)$, en met $c_n \in (-\infty,b_n)$, bijvoorbeeld $c_n := b_n-1$.

(iii) $a_n = -\infty$, $b_n = \infty$ (nu is uiteraard $n=1$, $(a_1,b_1) = \mathbb{R}$, en $F=\emptyset$).

Geheel analoog aan (i) en (ii) met $h_n(x) := s_n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en met $c_n := 0$.

Definieer nu $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\phi(x) := \begin{cases} x \text{ als } x \in F \\ \\ \phi_n(x) \text{ als } x \in (a_n,b_n). \end{cases}$$

Kennelijk is ϕ een strikt monotone afbeelding van $\mathbb{R}$ op een open deelinterval U van $\mathbb{R}$. Hieruit volgt, dat ϕ een topologische afbeelding van $\mathbb{R}$ op U is.

)* In dit geval is het niet uitgesloten dat $\omega(c_n) < \infty$. Als dat zo is, dan beeldt ρ_{nc_n} het interval $[0,\omega(c_n))$ af op een eindig interval van de gedaante $[c_n,b_n')$, en (a_n,b_n) wordt door ϕ_n afgebeeld op (a_n,b_n').

Laat $h\colon U \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$h(x) := \begin{cases} 0 \text{ als } x \in F \\ h_n(x) \text{ als } x \in (a_n,b_n) \cap U. \end{cases}$$

Dan voldoet h aan de unicon-voorwaarde (h voldoet lokaal aan een Lipschitz-voorwaarde). Laat (U,E,ρ) het lokale dynamische systeem zijn bij het vectorveld h op U. Het is duidelijk (uniciteit van oplossingen) dat op $(a_n,b_n) \cap U$ de beweging ρ samenvalt met de beweging ρ_n. Voorts is elke $x \in F$ een evenwichtspunt voor ρ (want $h(x) = 0$ voor $x \in F$), en er zijn geen andere evenwichtspunten voor ρ (want op $U\backslash F$ is h nergens nul). Het is nu niet moeilijk om aan te tonen dat ϕ een equitempisch isomorfisme induceert van $(\mathbb{R},D,\pi)$ op (U,E,ρ). Immers, als $x \in F$, dan is voor alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(\pi(x,t)) = \phi(x) = \rho(\phi(x),t).$$

En als $x \in \mathbb{R}\backslash F$, zeg $x \in (a_n,b_n)$, dan is $x = \pi(c_n,t_x)$ met $t_x := (\pi_{c_n})^{-1}(x)$, $\phi(x) = \rho_n(c_n,t_x)$, en dus voor $t \in J(x)$:

$$\begin{aligned} \phi(\pi(x,t)) &= \phi_n(\pi(c_n,t_x+t)) \\ &= \rho_n(c_n,(\pi_{c_n})^{-1}\pi_{c_n}(t_x+t)) \\ &= \rho_n(c_n,t_x+t) \\ &= \rho_n(\rho_n(c_n,t_x),t) \\ &= \rho_n(\phi(x),t) = \rho(\phi(x),t). \end{aligned}$$

Dus ϕ is inderdaad een isomorfisme.
De laatste bewering uit de stelling, n.l. dat ieder lokaal dynamisch systeem op $\mathbb{R}$ isomorf is met een globaal dynamisch systeem volgt direct uit (1.76), toegepast op (U,E,ρ). □

(1.80) We kunnen de slotconclusie van (1.79) nog iets verscherpen: ieder lokaal dynamisch systeem op $\mathbb{R}$ is isomorf met een globaal, differentieerbaar systeem op $\mathbb{R}$ (en niet slechts "op U", waarin U een open deelinterval van $\mathbb{R}$ is). Beschouw, om dit in te zien, een differentieerbare, topologische afbeelding ψ van U op $\mathbb{R}$, met differentieerbare inverse, en definieer een (globaal) systeem op $\mathbb{R}$ zo dat ψ een isomorfisme wordt. De details laten we aan de lezer over.

(1.81) We merken tenslotte op, dat niet ieder lokaal dynamisch systeem op een open deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ isomorf is met een differentieerbaar systeem. Voor details verwijzen we naar (4.30) tot (4.38).

II. LOKALE SECTIES EN VLAKKE DYNAMISCHE SYSTEMEN

1. Voorbereidingen

(2.1) NOTATIE. In deze en de volgende paragrafen zal steeds (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem zijn. Zoals steeds, is X hierin een Hausdorff ruimte. Nadere eisen voor X of voor het gehele systeem zullen in het nu volgende, indien nodig, steeds expliciet geformuleerd worden. We herinneren de lezer aan de volgende algemeen gebruikelijke notatie-wijze: als Y en Z verzamelingen zijn, $W \subset Y$ en $f\colon W \to Z$ een functie, dan is, voor elke $P \subset Y$, $f(P) := \{z \in Z \mid (\exists p \in P\cap W)(z=f(p))\} = f(P\cap W)$. In het bijzonder: als $A \subset X$ en $I \subset \mathbb{R}$, dan is $\pi(A\times I) = \pi((A\times I)\cap D) = \bigcup_{t\in I}\pi^t(A) = \bigcup_{a\in A}\pi_a(I)$, waarin dan $\pi^t(A) = \pi^t(A\cap X_t)$ en $\pi_a(I) = \pi_a(I\cap J(a))$. In dit verband zullen we nog de volgende notatie bezigen (vgl. (1.10)): voor $I \subset \mathbb{R}$ is

$$X_I := \bigcap\{X_t \mid t \in I\} = \{x \in X \mid I \subset J(x)\}.$$

(2.2) LEMMA. *Laten Y_1, Y_2 en Z topologische ruimten zijn, W een open deelverzameling van $Y_1 \times Y_2$ en $f\colon W \to Z$ een continue functie.*

1. *Zij A_2 een compacte deelverzameling van Y_2 en $y \in Y_1$ zo dat $\{y\} \times A_2 \subset W$. Dan zijn er bij elke omgeving U van $f(\{y\}\times A_2)$ in Z omgevingen V_1 van y in Y_1 en V_2 van A_2 in Y_2 zo dat $V_1 \times V_2 \subset W$ en $f(V_1\times V_2) \subset U$.*
2. *Zij A_i een compacte deelverzameling van Y_i $(i=1,2)$ zo dat $A_1 \times A_2 \subset W$. Dan zijn er bij elke omgeving U van $f(A_1\times A_2)$ in Z omgevingen V_i van A_i in Y_i $(i=1,2)$ zo dat $V_1 \times V_2 \subset W$ en $f(V_1\times V_2) \subset U$.*
3. *Neem aan, dat Z een metrische*[1] *ruimte is met metriek d. Zij A_2 een compacte deelverzameling van Y_2 en zij $y \in Y_1$ zo dat $\{y\} \times A_2 \subset W$. Dan is er bij elke $\varepsilon > 0$ een omgeving V_1 van y in Y_1 zo dat $V_1 \times A_2 \subset W$ en*

$$d(f(y,a),f(y',a)) < \varepsilon \quad \textit{voor alle } y' \in V \textit{ en } a \in A_2.$$

---

[1] Dit onderdeel van het lemma kan voor willekeurige uniforme ruimten geformuleerd worden.

BEWIJS.

1. Bij iedere $a \in A_2$ zijn er omgevingen V_{1a} van y en V_{2a} van a zo dat $V_{1a} \times V_{2a} \subset W$ en $f(V_{1a} \times V_{2a}) \subset U$. Overdek nu A_2 met eindig vele der V_{2a}'s (en noem hun vereniging V_2), en neem de doorsnede der corresponderende V_{1a}'s (en noem deze doorsnede V_1).
2. Op grond van 1 zijn er bij elke $b \in A_1$ omgevingen V_{1b} van b en V_{2b} van A_2 zo dat $V_{1b} \times V_{2b} \subset W$ en $f(V_{1b} \times V_{2b}) \subset U$. Overdek A_1 met eindig veel der V_{1b}'s en neem de doorsnede der corresponderende V_{2b}'s: dit levert V_1, resp. V_2 met de gevraagde eigenschappen.
3. (Analoog aan 1): bij elke $\varepsilon > 0$ en $a \in A_2$ zijn er omgevingen V_{1a} van y en V_{2a} van a zo dat $V_{1a} \times V_{2a} \subset W$ en $d(f(y,a),f(y',a')) < \varepsilon/2$ voor alle $y' \in V_{1a}$ en $a' \in V_{2a}$. Er zijn $a_1,\ldots,a_n \in A_2$ zo dat $A_2 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{2a_i}$. Voor $y' \in V_1 := \bigcap_{i=1}^n V_{1a_i}$ en $a \in A_2$ geldt dan: er is een $j \in \{1,\ldots,n\}$ zo dat $a \in V_{2a_j}$, dus

$$d(f(y,a),f(y',a)) \leq d(f(y,a),f(y,a_j)) + d(f(y,a_j),f(y',a))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

(2.3) PROPOSITIE. *Laat A een compacte deelverzameling van X zijn en* $[a,b]$ *een compact interval in* $\mathbb{R}$. *Er geldt:*

1. *Bij elke omgeving U van A in X zijn er een* $\varepsilon > 0$ *en een omgeving V van A zo dat* $V \times [-\varepsilon,\varepsilon] \subset D$ *en* $\pi(V \times [-\varepsilon,\varepsilon]) \subset U$.
2. *De verzameling* $X_{[a,b]}$ *(zie (2.1)) is open in X.*
3. *Indien X een metrische ruimte is met metriek d, en als* $x \in X_{[a,b]}$, *dan is er bij elke* $\varepsilon > 0$ *een omgeving V van x zo*)[1] *dat* $V \subset X_{[a,b]}$ *en*

$$d(\pi(x,t),\pi(y,t)) < \varepsilon \quad \textit{voor alle } y \in V \textit{ en } t \in [a,b]$$

BEWIJS.

1. Volgt uit (2.2)2 met $Y_1 := X$, $Y_2 := \mathbb{R}$, $W := D$, $f := \pi$, $A_1 := A$ en $A_2 := \{0\}$.

)[1] Vergelijk deze uitspraak met (1.5)DV4.

$\underline{2}$. Volgt op analoge wijze uit (2.2)$\underline{1}$.

$\underline{3}$. Volgt uit (2.2)$\underline{3}$. □

(2.4) PROPOSITIE. *Neem aan dat* (X,D,π) *globaal is. Dan is voor elke gesloten deelverzameling* F *van* X *en elke compacte deelverzameling* I *van* $\mathbb{R}$ *de verzameling* $\pi(F\times I)$ *gesloten in* X.

BEWIJS. Zij $x \in X$, $x \notin \pi(F\times I)$. Dan geldt voor alle $t \in -I := \{-t \mid t \in I\}$ dat $\pi(x,t) \notin F$. Met andere woorden, $\pi(\{x\}\times(-I)) \subset X\backslash F$. Uit (2.2)$\underline{1}$ volgt dan, dat er een omgeving U van x is zo dat $\pi(U\times(-I)) \subset X\backslash F$. Dit betekent, dat $\pi(y,t) \notin F$ voor alle $y \in U$ en $t \in -I$, ofwel $y \notin \pi(F\times I)$ voor alle $y \in U$. □

Bovenstaand bewijs gaat niet door voor lokale dynamische systemen; dat mogelijkerwijs $F \times I \not\subset D$ kan geen kwaad, maar er is nu geen garantie dat $\pi(x,t)$ gedefinieerd is voor $x \in X\backslash\pi(F\times I)$ en $t \in -I$. Als in dat geval $\pi(x,t)$ wèl is gedefinieerd (dat wil zeggen, als $x \in X_{-I}$), dan vindt men op analoge wijze een omgeving U van x in X zo dat $U \subset X_{-I}$ en $\pi(y,t) \notin F$ voor $t \in -I$ en $y \in U$, oftewel $U \cap \pi(F\times I) = \emptyset$. Dus $\pi(F\times I)$ is gesloten in X_{-I}, dat wil zeggen, $\pi(F\times I) \cap X_{-I}$ is gesloten in X_{-I}.

(2.5) LEMMA. *Als* $[a,b]$ *een compact interval is en* F *is een gesloten deelverzameling van* X, *dan is* $\pi(F\times[a,b]) \cap X_{[-b,-a]}$ *gesloten in* $X_{[-b,-a]}$.

BEWIJS. Pas het bovenstaande toe met $I := [a,b]$. □

(2.6) VOORBEELD. Als F gesloten is in X en $I \subset \mathbb{R}$ is compact zo dat $F \times I \subset D$ en $\pi(F\times I) \subset X_{-I}$, dan behoeft $\pi(F\times I)$ nog niet gesloten te zijn in X. Want neem maar

$$X := \mathbb{R}^2 \backslash\{(0,0)\}$$

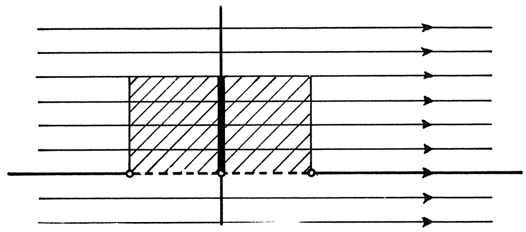
$$D := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}\cup\{(x,0,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \;\&\; t > -x\}\cup$$
$$\cup\{(x,0,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0 \;\&\; t < -x\}.$$

$$\pi((x,y),t) := (x+t,y) \quad \text{voor} \quad (x,y,t) \in D.$$

Dan is $F := \{(0,y) \mid 0 < y \leq 1\}$ gesloten in X, maar

$$\pi(F\times[-1,1]) = \{(x,y) \mid |x| \leq 1 \ \& \ 0 < y \leq 1\} = [-1,1] \times (0,1]$$

is niet gesloten in X.



Merk op, dat in deze situatie

$$X_{[-1,1]} = \mathbb{R}^2 \backslash [-1,1] \times \{0\};$$

dus is $\pi(F\times[-1,1]) \subset X_{[-1,1]}$, en $\pi(F\times[-1,1])$ is gesloten in de deelruimte $X_{[-1,1]}$ van X.

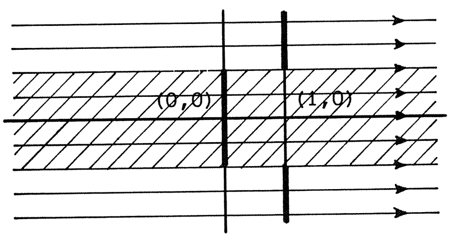
2. Secties

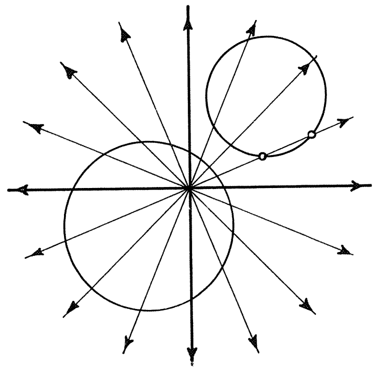
(2.7) DEFINITIE. Een niet-lege deelverzameling Q van X heet een *sectie* indien er een $\eta > 0$ bestaat zo dat er voor iedere $x \in X$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ ten hoogste één element $t \in [t_0, t_0+\eta]$ is zo dat $\pi(x,t) \in Q$. In dat geval noemt men Q ook wel een *η-sectie*. Indien Q voor iedere $\eta > 0$ een η-sectie is, noemt men Q een *∞-sectie*. Indien Q een ∞-sectie is, en als bovendien $\pi(Q\times\mathbb{R}) = X$, dan heet Q een *globale sectie*.

(2.8) VOORBEELDEN

1. Beschouw translaties in $\mathbb{R}^2$, evenwijdig aan de x-as: het globale systeem $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \pi)$ met $\pi((x,y),t) := (x+t,y)$.
   Voor elke $\eta > 0$ is de y-as $Q := \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ een sectie. Omdat $\pi(Q\times\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$, is Q een globale sectie.
   Evenzo is $Q' := \{(0,y) \mid |y| \leq 1\} \cup \{(1,y) \mid |y| > 1\}$ een globale sectie.
   Merk op, dat $\{(1,y) \mid |y| \leq 1\}$ en $\{(1,y) \mid |y| > 1\}$ beide ∞-secties zijn, maar geen van beide zijn het globale secties.
   Tenslotte: behalve Q is ook $Q'' := \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ een globale

sectie. Maar $Q \cup Q''$ is een η-sectie slechts voor $\eta < 1$. Immers, voor elke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zijn er twee waarden t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ met $t_2 = 1 + t_1$ (en dus $t_2 \in [t_1, t_1+\eta]$ als $\eta > 1$) zodanig dat $\pi((x,y),t_i) \in Q \cup Q''$ voor $i = 1,2$,.





2. Beschouw $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \pi)$ met $\pi((x,y),t) := (xe^t, ye^t)$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en $t \in \mathbb{R}$. Iedere cirkel Q die het punt $(0,0)$ in z'n binnengebied heeft snijdt elke baan in precies één punt en is derhalve een ∞-sectie. Een dergelijke cirkel Q die $(0,0)$ niet in z'n binnengebied heeft is géén η-sectie voor welke $\eta > 0$ dan ook: voor elke $\eta > 0$ is er een punt (x,y) waarvan de baan "bijna raakt" aan Q in dien zin dat er $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zijn met $0 < t_2 - t_1 < \eta$ zó dat $\pi((x,y),t_i) \in Q$ voor $i = 1,2$.
3. Beschouw $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \pi)$ met $\pi((x,y),t) := (x\cos t, y\sin t)$. Iedere halfrechte $\{(\lambda a, \lambda b) \mid \lambda > 0\}$ met $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ is een η-sectie voor $0 < \eta < 2\pi$, maar geen η-sectie voor $\eta \geq 2\pi$.
4. In het globale dynamische systeem op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, gedefinieerd door $((x,y),t) := (x\cos \frac{t}{r}, y\sin \frac{t}{r})$, waarin $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, is $Q := (0,1] \times \{0\}$ geen η-sectie voor enige $\eta > 0$. Daarentegen is, voor $0 < a < 1$, $[a,1]\times\{0\}$ een η-sectie voor $\eta < 2\pi a$.
5. Als (X,D,π) een globale sectie heeft behoeft (X,D,π) niet noodzakelijkerwijs een globaal dynamisch systeem te zijn. Neem maar $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $D := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \ \&\ t > -x\}$ en $\pi((x,y),t) := (x+t,y)$ voor $(x,y,t) \in D$. Dit systeem is niet globaal, maar $Q := \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ is een globale sectie.

(2.9) De volgende opmerkingen mogen nog dienen ter verduidelijking van het begrip "sectie". Zij $\emptyset \neq Q \subset X$ en $\eta > 0$.

1. Q is een ∞-sectie als en slechts als Q geen enkele periodieke baan snijdt, en iedere niet-periodieke baan in ten hoogste één punt.

2. Q is een globale sectie als en slechts als (X,D,π) geen periodieke punten heeft, en Q juist één punt met elke baan gemeen heeft.

3. Als Q een η-sectie is, $\emptyset \neq Q' \subset Q$ en $0 < \eta' \leq \eta$, dan is Q' een η'-sectie.

(2.10) LEMMA. *Zij $\emptyset \neq Q \subset X$ en $0 < \eta < \infty$. De volgende beweringen zijn equivalent:*

(i) *Q is een η-sectie.*

(ii) *$Q \cap \pi^t(Q) = \emptyset$ voor $0 < |t| \leq \eta$.*

(iii) *$\pi^s(Q) \cap \pi^t(Q) = \emptyset$ voor $0 \leq s < t \leq \eta$.*

(iv) *$\pi^u(Q) \cap \pi^v(Q) = \emptyset$ voor $-\frac{1}{2}\eta \leq u < v \leq \frac{1}{2}\eta$.*

Indien $Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta] \subset D$, dan is de volgende uitspraak eveneens equivalent met de uitspraken (i) *tot en met* (iv):

(v) *De afbeelding*

$$h := \pi|_{Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]} : Q \times [-\tfrac{1}{2}\eta,\tfrac{1}{2}\eta] \to \pi(Q\times[-\tfrac{1}{2}\eta,\tfrac{1}{2}\eta])$$

is bijectief.

BEWIJS. (i) $\Rightarrow$ (ii): als $y = \pi^t(x)$ met $x,y \in Q$ en $0 < |t| \leq \eta$, dan bevat het interval $[0,\eta]$ ingeval $t \geq 0$, en het interval $[-\eta,0]$ ingeval $t < 0$, twee waarden van s waarvoor $\pi(x,s) \in Q$, namelijk $s = 0$ en $s = t$. Tegenspraak met (i).
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv): eenvoudig.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Neem aan dat niet aan (i) is voldaan: er is dan $x \in X$ en er zijn $s,t \in \mathbb{R}$ met $s < t \leq s + \eta$ zo dat $\pi^s x \in Q$ en $\pi^t x \in Q$. Zij $u := \frac{1}{2}(s+t)$ en $v := \frac{1}{2}(t-s)$. Dan is $u = v + s$ en $u = t - v$, en dus $\pi^u x = \pi^v(\pi^s x) \in \pi^v Q$ en $\pi^u x = \pi^{-v}(\pi^t x) \in \pi^{-v} Q$ (N.B.: $u \in J(x)$). Daar $-\frac{1}{2}\eta \leq -v < v \leq \frac{1}{2}\eta$, is dit in strijd met (iv).
Tenslotte: als $Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta] \subset D$, dan is de hierboven gedefinieerde afbeelding h op heel $Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ gedefinieerd, en h is een surjectie van deze verzameling op $\pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta])$. Het is eenvoudig in te zien, dat injectiviteit van h equivalent is met (iv). □

(2.11) PROPOSITIE. *Zij Q een niet-lege, gesloten deelverzameling van X, zij $\eta > 0$ zo dat $Q \times [-\eta,\eta] \subset D$, en laat h gedefinieerd zijn als in* 2.10(v). *De volgende beweringen zijn equivalent:*

(i) Q *is een* η*-sectie.*

(ii) $h: Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta] \to \pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta])$ *is een homeomorfisme.*

BEWIJS. (ii) $\Rightarrow$ (i): Volgt direct uit (2.10).
(i) $\Rightarrow$ (ii): Als Q een η-sectie is, is h een bijectie van $Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ op $\pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta])$ (2.10)(v). Als restrictie van een continue afbeelding is h continu. Om aan te tonen dat h een homeomorfisme is, is het voldoende om te laten zien dat voor iedere gesloten deelverzameling F van Q en ieder interval $[a,b] \subset [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$, de verzameling $h(F\times[a,b]) = \pi(F\times[a,b])$ gesloten is in $\pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta])$ (immers, de verzamelingen $F \times [a,b]$ met $F \subset Q$ gesloten en $[a,b] \subset [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ vormen een subbasis voor de gesloten verzamelingen van $Q \times [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$, en omdat h injectief is, volgt dan dat h een gesloten afbeelding is; hieruit volgt dan, dat h^{-1} continu is).
We maken gebruik van lemma (2.5). Merk eerst op, dat voor alle $x \in F \subset Q$, $t \in [a,b] \subset [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ en $s \in [-b,-a] \subset [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ geldt: $t + s \in [-\eta,\eta]$, dus $(x,t+s) \in Q \times [-\eta,\eta] \subset D$. Maar dan is ook $(\pi(x,t),s) \in D$ (maximaliteitsaxioma), dat wil zeggen: $\pi(F\times[a,b]) \times [-b,-a] \subset D$, ofwel $\pi(F\times[a,b]) \subset X_{[-b,-a]}$. In het bijzonder (pas het voorgaande toe op Q en $[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ is ook $\pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]) \subset X_{[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]} \subset X_{[-b,-a]}$. Conclusie:

$$\pi(F\times[a,b]) \subset \pi(Q\times[-\tfrac{1}{2}\eta,\tfrac{1}{2}\eta]) \subset X_{[-b,-a]}.$$

Uit (2.5) volgt, dat $\pi(F\times[a,b])$ gesloten is in $X_{[-b,-a]}$. Derhalve is $\pi(F\times[a,b])$ gesloten in $\pi(Q\times[-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta])$. □

3. Secties en morfismen

(2.12) NOTATIE. Ook in deze paragraaf zal steeds met (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem bedoeld worden.
Als $\eta > 0$ gegeven is, zij dan $I_\eta := [-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta]$ en $I_\eta^0 := (-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta)$. Indien in zekere kontekst duidelijk is wat η is (bijv. als er sprake is van een η-sectie), dan schrijven we I en I^0 in plaats van I_η en I_η^0.
Als $J \subset \mathbb{R}$ een interval is, dan is voor $a > 0$ en $t \in \mathbb{R}$:

$$aJ := \{as \mid s \in J\} \text{ en } J + t := \{s + t \mid s \in J\}.$$

Indien $\emptyset \neq Q \subset X$, en Q is een η-sectie in (X,D,π) zo dat $Q \times I \subset D$, dan zal steeds $h := \pi|_{Q\times I} : Q \times I \to \pi(Q\times I)$. Op grond van (2.10)(v) is h een continue bijectie.

(2.13) PROPOSITIE. *Laat Q een η-sectie zijn in (X,D,π) zo dat $Q \times I \subset D$. Dan wordt er door*

$$G := \{((x,s),t) \mid (x,s) \in Q \times I^0 \ \&\ t \in I^0 - s\}$$

$$\zeta((x,s),t) := (x,s+t) \text{ voor } ((x,s),t) \in G$$

een lokaal dynamisch systeem $(Q\times I^0,G,\zeta)$ gedefinieerd, en $h' := h|_{Q\times I^0}: Q \times I^0 \to X$ is een continue, equivariante injectie (d.w.z. h' is het ruimtelijk effect van een equitempisch morfisme van dynamische systemen, en h' is injectief).

BEWIJS. Het is niet moeilijk om te controleren dat $(Q\times I^0,G,\zeta)$ een lokaal dynamisch systeem is: het bewijs daarvan laten we aan de lezer over. Op grond van (2.13) hoeft nog slechts nagegaan te worden dat het paar (h',τ), waarin $\tau((x,t),s) := s$ voor $((x,t),s) \in G$, aan (1.57)M0,M1 en M2 voldoet, Welnu, M0 is triviaal vervuld. Ook M1 is niet moeilijk te bewijzen: voor $(x,s) \in Q \times I^0$ is I^0-s het definitie-interval van de beweging $\zeta_{(x,s)}$; voor het definitie-interval $J(h'(x,s))$ van de beweging $\pi_{h'(x,s)}$ geldt (1.11)1:

$$J(h'(x,s)) = J(\pi(x,s)) = J(x) - s \supset I^0 - s.$$

Tenslotte M2: voor alle $((x,s),t) \in G$ geldt

$$h'(\zeta((x,s),t)) = \pi(x,s+t) = \pi(\pi(x,s),t) = \pi(h'(x,s),t). \quad \square$$

Indien in (2.13) gegeven is dat Q gesloten is en $Q \times (2I) \subset D$, dan is $h'\colon Q \times I^0 \to X$ een topologische inbedding; dit volgt direct uit (2.11). Een lokaal dynamisch systeem van het "type" $(Q\times I^0,G,\zeta)$, zoals beschreven in (2.13) wordt wel een *parallel lokaal dynamisch systeem* genoemd (als $Q \times R^{n-1}$ bestaan de banen uit parallelle lijnstukken). Als h' een topologische inbedding is heeft ieder *inwendig* punt van $h'(Q\times I^0) \subset X$ dus een omgeving (namelijk, $h'(Q\times I^0)$) waarop de beweging π isomorf is met de beweging in een parallel dynamisch systeem. Formeel:

(2.14) DEFINITIE. Een lokaal dynamische systeem (X,D,π) heet *lokaal parallelliseerbaar* in $x_0 \in X$ indien er $Q \subset X$ en $\eta > 0$ zijn zo dat
LP0. $x_0 \in Q$, Q is gesloten [1] in X en Q is een η-sectie.
LP1. $Q \times I \subset D$ en $h: Q \times I \to \pi(Q\times I)$ is een homeomorfisme.
LP2. $\pi(Q\times I)$ is een omgeving [2] van x_0.
In dit geval zullen we het tripel $(Q,\eta;U)$ met $U := \pi(Q\times I)$ een *lokale representatie van* (X,D,π) *in* x_0 noemen. Het dynamische systeem heet *parallelliseerbaar* indien het een globale sectie Q heeft en $\pi|_{Q\times\mathbb{R}} : Q\times\mathbb{R} \to X$ een homeomorfisme is (als Q een globale sectie is, is $\pi|_{Q\times\mathbb{R}}$ automatisch een continue bijectie van $Q \times \mathbb{R}$ op X; als $\pi|_{Q\times\mathbb{R}}$ topologisch is, is Q automatisch gesloten in X: $Q = \pi(Q\times\{0\})$, en $Q\times\{0\}$ is gesloten in $Q \times \mathbb{R}$).

(2.15) LEMMA. *Als* (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar is in* x_0 *met lokale representatie* $(Q,\eta;U)$, *dan is voor elke omgeving* S *van* x_0 *in* Q *en voor elke* $\varepsilon > 0$ *met* $\varepsilon \le \eta$ *de verzameling* $\pi(S\times I_\varepsilon)$ *een omgeving van* x_0 *in* X.

BEWIJS. $S \times I_\varepsilon$ is een omgeving van $(x_0,0)$ in $Q \times I$, dus $\pi(S\times I_\varepsilon)$ is een omgeving van $x_0 = \pi(x_0,0)$ in $\pi(Q\times I)$. Maar $\pi(Q\times I)$ is een omgeving van x_0 in X, dus ook $\pi(S\times I_\varepsilon)$ is een omgeving van x_0 in X. □

Indien Q een gesloten η-sectie is in (X,D,π) met $x_0 \in Q$ en $Q \times (2I) \subset D$ dan is aan LP0 en LP1 voldaan (2.11). De volgende propositie geeft de mogelijkheid secties te construeren die ook aan LP2 voldoen.

(2.16) PROPOSITIE. *Laat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een equitempisch morfisme zijn en* Q' *een* η*-sectie in* (Y,E,ρ). *Als* $Q := \phi^{-1}(Q') \neq \phi$, *dan is* Q *een* η*-sectie in* (X,D,π). *Als* $x_0 \in Q$ *en* (Y,E,ρ) *is lokaal parallelliseerbaar in* $\phi(x_0)$ *met lokale representatie* $(Q',\eta;U')$ *zo dat* $Q \times (2I) \subset D$, *dan is* (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar in* x_0 *met lokale representatie* $(Q,\eta;U)$, *waarbij* $U = \phi^{-1}(U') \cap X_I$.

)1 De eis dat Q gesloten dient te zijn in X is uitsluitend met het oog op de toepassingen opgenomen.

)2 In de literatuur eist men meestal, dat $\pi(Q \times I)$ een *gesloten* omgeving van x_0 in X moet zijn. In dat geval is Q automatisch gesloten in X.

<u>BEWIJS</u>. We tonen eerst aan, dat Q een η-sectie is in (X,D,π). Stel dat $\pi^s(Q) \cap \pi^t(Q) \neq \emptyset$ voor $s,t \in I$, zeg $\pi(x,s) = \pi(y,t)$ met $x,y \in Q$. Dan is $\rho(\phi(x),s) = \phi(\pi(x,s)) = \phi(\pi(y,t)) = \rho(\phi(y),t)$, waarin $\phi(x),\phi(y) \in Q'$: dat wil zeggen $\rho^s(Q') \cap \rho^t(Q') \neq \emptyset$. Dus moet $s = t$, want Q' is een η-sectie (2.10)(iv). Bijgevolg is Q een η-sectie (2.10)(iv).

Neem nu aan, dat $Q \times (2I) \subset D$. Dan is $h: Q \times I \to U := \pi(Q\times I)$ een homeomorfisme (2.11) mits Q gesloten is. Om aan te tonen dat (X,D,π) lokaal parallelliseerbaar is in x_0 is het dus voldoende om te laten zien dat Q gesloten is in X en dat U een omgeving van x_0 is.

Welnu: als (Y,E,ρ) lokaal parallelliseerbaar is in $\phi(x_0)$ met lokale representatie $(Q',\eta;U')$, dan is Q' gesloten in Y. Omdat $\phi: X \to Y$ continu is en $Q := \phi^{-1}(Q')$, is Q gesloten in X.

Voorts: om aan te tonen dat U een omgeving is van x_0, is het voldoende om te laten zien dat $U = \phi^{-1}(U') \cap X_I$ (want U' is een omgeving van $\phi(x_0)$, X_I is open (2.3)2, en $x_0 \in Q \subset X_{2I} \subset X_I$). Zij $x \in \phi^{-1}(U') \cap X_I$. Dan is $\phi(x) \in U' := \rho(Q'\times I)$, dus er is een (uniek) element $(y,t) \in Q' \times I$ zo dat $\phi(x) = \rho(y,t)$. Omdat $-t \in I$ en $x \in X_I$, is $(x,-t) \in D$, en

$$\phi(\pi(x,-t)) = \rho(\phi(x),-t) = \rho(\rho(y,t),-t) = y \in Q'.$$

Dan is $\pi(x,-t) \in Q$, en $x \in \pi(Q\times\{t\}) \subset \pi(Q\times I) =: U$, dus $U \supset \phi^{-1}(U') \cap \cap X_I$.

Omgekeerd: $U \subset \phi^{-1}(U')$, want als $z \in U$, zeg $z = \pi(z_1,s)$ met $z_1 \in Q$ en $s \in I$, dan is $\phi(z) = \phi(\pi(z_1,s)) = \rho(\phi(z_1),s) \in \rho(Q'\times I) = U'$.

Dat $U \subset X_I$ volgt uit het feit, dat $Q \times 2I \subset D$ zodat $\pi(Q\times I) \times I \subset D$ (maximaliteit!). Dus inderdaad $U := \pi(Q\times I) \subset X_I$. □

Het is van belang om op te merken dat we in het bewijs van (2.16) de karakteristieke eigenschap van ϕ, namelijk dat $\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),t)$, slechts hebben gebruikt voor die punten $(x,t) \in D$ waarvoor $\phi(x) \in U'$ en $t \in I$, dat wil zeggen, voor punten uit een omgeving van $(x_0,0)$ in $X \times \mathbb{R}$. Om een bruikbare generalisatie van (2.16) te verkrijgen, geven we eerst een "lokale versie" van de definitie van een equitempisch morfisme)[1].

)[1] We zouden een lokale versie van een willekeurig morfisme kunnen definieren. In (2.16) is het echter essentieel dat (ϕ,τ) equitempisch is (n.l. in het bewijs dat Q een sectie is).

(2.17) <u>DEFINITIE</u>. Laten (X,D,π) en (Y,E,ρ) lokale dynamische systemen zijn, en W een open deelverzameling van X. Een functie ϕ: $W \to Y$ heet *lokaal equivariant op* W als het volgende geldt:

<u>LE0</u>. ϕ is continu op W.

<u>LE1</u>. Er is een $\delta > 0$ zo dat $W \times I_\delta \subset D$ en $I_\delta \subset J(\phi(x))$ voor alle $x \in W$.

<u>LE2</u>. Voor alle $(x,t) \in W \times I_\delta$ met $\pi(x,t) \in W$ is

$$\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),t). \tag{2.18}$$

Als ϕ lokaal equivariant is op een open omgeving van $x_0 \in X$, resp. van een compacte verzameling $S \subset X$, dan noemen we ϕ ook wel *lokaal equivariant in* x_0, resp. *in* S.

Alvorens een lokale versie van (2.16) te presenteren, geven we een voorbeeld van een lokaal equivariante afbeelding. Om één en ander in een breder verband te plaatsen geven we eerst een generalisatie van "restrictie van een dynamisch systeem" (zie ook (1.42)).

(2.19) <u>DEFINITIE</u>. Zij W een open deelverzameling van X (niet noodzakelijk invariant). Definieer $D_W \subset W \times \mathbb{R}$ en π_W: $D_W \to W$ door:

$$D_W := \bigcup_{x \in W} \{x\} \times J_W(x),$$

waarin voor alle $x \in W$:

$$J_W(x) := \{t \in J(x) \mid t \geq 0 \ \&\ \pi_x[0,t] \subset W\} \cup$$
$$\{t \in J(x) \mid t \leq 0 \ \&\ \pi_x[t,0] \subset W\}.$$

Zij voorts $\pi_W := \pi|_{D_W}$: $D_W \to W$ (merk op, dat $D_W \subset D$ en dat $\pi(D_W) \subset W$).

(2.20) <u>PROPOSITIE</u>. *Als* W *een open deelverzameling is van* X, *dan is, met de notatie van* (2.19), (W,D_W,π_W) *een lokaal dynamisch systeem. Als* ϕ: $W \to X$ *de inclusie-afbeelding is en* $\tau(x,t) := t$ *voor* $(x,t) \in D_W$, *dan is* (ϕ,τ): $(W,D_W,\pi_W) \to (X,D,\pi)$ *een morfisme van dynamische systemen.*

<u>BEWIJS</u>. We controleren de in (1.1) genoemde axioma's.
A0: de enige niet-triviale verificatie is, dat D_W een open deelverzameling is van $W \times \mathbb{R}$. Welnu, als $(x,t) \in D_W$, zeg met $t \geq 0$ (voor

$t \le 0$ gaat het bewijs analoog), dan is $\pi(\{x\}\times[0,t]) \subset W$. Uit (2.2)1 volgt, dat er een omgeving U van x is en een $\varepsilon > 0$ zo dat $U \subset W$ (W is open), $U \times [-\varepsilon,t+\varepsilon] \subset D$ en $\pi(U\times[-\varepsilon,t+\varepsilon]) \subset W$. Hieruit volgt gemakkelijk, dat de omgeving $U \times [-\varepsilon,t+\varepsilon]$ van (x,t) in $W \times \mathbb{R}$ geheel bevat is in D_W.

A1,A2,A3: triviale gevolgen van het feit dat $\pi_W = \pi|_{D_W}$.

A4: op grond van (1.18) is het voldoende om het volgende aan te tonen voor $x \in W$:

als $\alpha_W(x) > -\infty$, dan is $\Gamma_W^-(x)$ gesloten en niet compact;
als $\omega_W(x) < \infty$, dan is $\Gamma_W^+(x)$ gesloten en niet compact.

(Het zal duidelijk zijn wat met α_W, Γ_W^-, etc. bedoeld wordt: $(\alpha_W(x),\omega_W(x)) := J_W(x)$, $\Gamma_W^- := \pi_W(\{x\}\times(\alpha_W(x),0])$, etc.) Neem aan, dat $\alpha_W(x) > -\infty$ voor zekere $x \in W$. We onderscheiden twee gevallen:

(i) $\alpha(x) = \alpha_W(x)$. Dan is $\Gamma_W^-(x) = \Gamma^-(x)$; in het bijzonder is $\alpha(x) > -\infty$ en $\Gamma^-(x) \subset W$. Omdat $\Gamma^-(x)$ gesloten is in X is $\Gamma^-(x)$ gesloten in W, dus $\Gamma_W^-(x)$ is gesloten in W. Ook kan $\Gamma_W^-(x)$ niet compact zijn, want dan zou $\Gamma^-(x)$ compact zijn, in strijd met $\alpha(x) > -\infty$.

(ii) $\alpha(x) < \alpha_W(x)$. Dan is $\Gamma_W^-(x) := \pi_x(\alpha_W(x),0] = \pi_x[\alpha_W(x),0] \cap W$. Omdat $\pi_x[\alpha_W(x),0]$ compact, dus gesloten, is, volgt hieruit, dat $\Gamma_W^-(x)$ gesloten is in W. Indien $\Gamma_W^-(x)$ compact was, dan zou de dicht in $\pi_x[\alpha_W(x),0]$ liggende verzameling $\pi_x(\alpha_W(x),0]$ compact zijn, en dus $\pi_x[\alpha_W(x),0] = \pi_x(\alpha_W(x),0] \subset W$. Hieruit zou volgen, dat $\alpha_W(x) \in J_W(x)$. Tegenspraak.

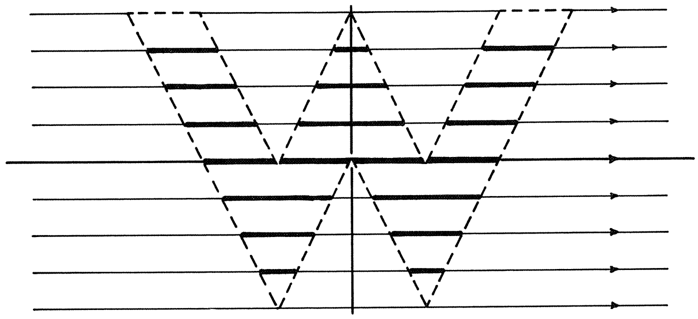
Het geval $\omega_W(x) < \infty$ wordt op analoge wijze behandeld. (N.B.: Het is niet zo moeilijk om A4 rechtstreeks aan te tonen; we laten dit graag aan de lezer over). $\square$

(2.21) VOORBEELDEN.

1. Zij (X,D,π) het (globale) dynamische systeem van voorbeeld (2.8)1, en zij

$$
\begin{aligned}
W := &\{(x,y) \mid 0 \le |x| \le 1 \;\&\; -2|x| < y < -2|x| + 2\} \cup \\
&\cup\{(x,y) \mid 1 \le |x| \le 2 \;\&\; 2|x| - 4 < y < 2|x| - 2\} \cup \\
&\cup\{(x,y) \mid 2 \le |x| < 3 \;\&\; 2|x| - 4 < y < 2\}.
\end{aligned}
$$

Dan zijn bijvoorbeeld $\Gamma_W((-2,1))$, $\Gamma_W((0,1))$ en $\Gamma_W((2,1))$ onderling disjunct, terwijl $\Gamma((-2,1)) = \Gamma((0,1)) = \Gamma((2,1)) = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.



2. Het lokale dynamische systeem, beschreven in (1.40) is de restrictie van het systeem uit (1.9)2 tot de open deelverzameling $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0,0\} \cup \{1,0\})$ van $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2.22) VOORBEELD (VAN EEN LOKAAL EQUIVARIANTE AFBEELDING)
Laten (X,D,π) en (Y,E,ρ) lokale dynamische systemen zijn, S een niet-lege compacte deelverzameling van X, en W een open omgeving van S. Als $(\phi,\tau):(W,D_W,\pi_W) \to (Y,E,\rho)$ een equitempisch morfisme van dynamische systemen is, dan is ϕ lokaal equivariant in S.
Immers, er is een open omgeving W_1 van S en een $\delta > 0$ zo dat $W_1 \times I_\delta \subset D$ en $\pi(W_1 \times I_\delta) \subset W$ (2.3)1. In het bijzonder is ϕ dan gedefinieerd en continu op W_1. Voorts is voor alle $x \in W_1$, $I_\delta \subset J_W(x) \subset$ $\subset J(\phi(x))$. Tenslotte is $W_1 \times I_\delta \subset D_W$, dus (2.18) geldt voor alle $(x,t) \in W_1 \times I_\delta$. □

(2.23) PROPOSITIE. *Laten* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn, en laat* ϕ *een functie zijn met waarden in* Y *die lokaal equivariant is op een open omgeving van* $x_0 \in X$. *Indien* X *regulier is, en* (Y,E,ρ) *lokaal parallelliseerbaar in* $\phi(x_0)$, *dan is* (X,E,ρ) *lokaal parallelliseerbaar in* x_0. *Bovendien is er bij iedere compacte verzameling* S *in het domein van* ϕ *met* $x_0 \in S \subset \phi^{-1}(\phi(x_0))$ *en bij iedere omgeving* W *van* S *een lokale representatie* $(Q,\eta;U)$ *van* (X,D,π) *in* x_0 *met* $S \subset Q$, U *een omgeving van* S, *en* $U \subset W$.

BEWIJS. Zij W een omgeving van S in X.
Er is een omgeving W_1 van S en een $\delta > 0$ overeenkomstig definitie (2.17), en laat W_0 een *gesloten* omgeving van S zijn zo dat $W_0 \subset W \cap W_1$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $S \times I_{3\varepsilon} \subset D$ (dus zeker

$S \times I_{2\varepsilon} \subset D)$ en $\pi(S \times I_{2\varepsilon}) \subset W_0$.
Als nu $(Q',\eta';U")$ een lokale representatie is van (Y,E,ρ) in $\phi(x_0)$, zij dan $\eta := \min\{\delta,\varepsilon,\eta'\}$. Omdat $0 < \eta \le \eta'$, volgt uit (2.9)3 en (2.15) direct, dat

(2.24) $\quad (Q',\eta;U')$ is een lokale representatie van (Y,E,ρ) in $\phi(x_0)$

(hierin is uiteraard $U' := \rho(Q' \times I_\eta))$.
Omdat $\eta \le \delta$ en $W_0 \subset W_1$ is het ook duidelijk dat

(2.25) $\quad W_0 \times I_\eta \subset D$, $I_\eta \subset J(\phi(x))$ en (2.18) geldt voor alle $(x,t) \in W_0 \times I_\eta$ met $\pi(x,t) \in W_0$,

en omdat $\eta \le \varepsilon$ is tenslotte

(2.26) $\quad S \times I_{3\eta} \subset D$ en $\pi(S \times I_{2\eta}) \subset W_0$.

Uit (2.26) en (2.2)2 volgt, dat er een gesloten omgeving V_1 van S is zo dat $V_1 \times I_{3\eta} \subset D$ en $\pi(V_1 \times I_{2\eta}) \subset W_0$; merk nog op, dat hierin $W_0 \subset X_{I_\eta}$ (2.25). Omdat ϕ continu is op W_0 is er een gesloten omgeving V_2 van S zo dat $V_2 \subset W_0$ en $\phi(V_2) \subset U'$. Zij nu $V := V_1 \cap V_2$. Dan is V een gesloten omgeving van S, en

(2.27) $\quad V \times I_{3\eta} \subset D$ en $\pi(V \times I_{2\eta}) \subset W_0 \subset X_{I_\eta}$;

(2.28) $\quad V \subset W_0 \subset X_{I_\eta}$ en $\phi(V) \subset U'$.

Zij nu $Q := \phi^{-1}(Q') \cap \pi(V \times I_\eta)$. We zullen nu eerst aantonen, dat Q,η en $U := \pi(Q \times I_\eta)$ aan LP0, LP1 en LP2 uit (2.14) voldoen.
LP0: Het is duidelijk, dat $x_0 \in Q$. Dat Q een η-sectie is kan analoog aan (2.16) (eerste gedeelte) bewezen worden (gebruik daarbij (2.25) en het feit dat $Q \subset \pi(V \times I_\eta) \subset W_0$ en $\pi(Q \times I_\eta) \subset \pi(V \times I_{2\eta}) \subset W_0$ (2.27)).
Dat Q gesloten is in X kan men als volgt inzien: $\phi^{-1}(Q') \cap W_0$ is gesloten in W_0 (ϕ is continu op W_0 en Q' is gesloten in Y), en W_0 is gesloten in X, dus $\phi^{-1}(Q') \cap W_0$ is gesloten in X.
Anderzijds volgt uit (2.27), dat

(2.29) $\quad \pi(V \times I_\eta) \subset W_0 \subset X_{I_\eta}$.

Uit (2.5) volgt nu, dat $\pi(V\times I_\eta) \cap X_{I_\eta}$ gesloten is in X_{I_η}. Maar dan impliceert (2.29), dat $\pi(V\times I_\eta)$ gesloten is in W_0, dus in X. Conclusie: $Q = (\phi^{-1}(Q') \cap W_0) \cap \pi(V\times I_\eta)$ is gesloten in X.

LP1: Omdat $Q \subset \pi(V\times I_\eta)$, volgt uit de eerste inclusie in (2.27) dat $Q \times I_{2\eta} \subset \pi(V\times I_\eta) \times I_{2\eta} \subset D$ (maximaliteitsaxioma!). Uit (2.11) volgt dan de gewenste eigenschap.

LP2: Geheel overeenkomstig de in (2.16) gebruikte methode kan aangetoond worden dat $V \subset U := \pi(Q\times I_\eta)$ (gebruik (2.28) en (2.25), en merk op, dat $\pi(V\times I_\eta) \subset W_0$). Dus U is een omgeving van x_0.

Hiermee is aangetoond, dat (X,D,π) lokaal parallelliseerbaar is in x_0 met lokale representatie $(Q,\eta;U)$. Bovendien volgt nog uit het voorgaande, dat $S \subset Q$ (want $S \subset \phi^{-1}(\phi(x_0)) \subset \phi^{-1}(Q')$ en $S \subset V \subset \pi(V\times I_\eta)$), en dat U een omgeving van S is (want $S \subset V \subset U$, en V is een omgeving van S). Tenslotte volgt uit (2.27) en de definitie van Q dat $U \subset \pi(\pi(V\times I_\eta)\times I_\eta) \subset W_0 \subset W$. □

(2.30) We zullen nu omgekeerd laten zien dat bij iedere lokale representatie van (X,D,π) in een punt x_0 waar het systeem lokaal parallelliseerbaar is, een lokaal equivariante functie op een omgeving van x_0 gedefinieerd kan worden. Voor het systeem (Y,E,ρ) nemen we het volgende: $Y := \mathbb{R}$, $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en $\rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\rho(x,t) := x + t$$

voor $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (translatie op $\mathbb{R}$). In dit (globale) systeem is $\{0\}$ een globale sectie. Het is niet moeilijk in te zien, dat $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \rho)$ lokaal parallelliseerbaar is in het punt $0 \in \mathbb{R}$ met, voor elke $\varepsilon > 0$, lokale representatie $(\{0\},\varepsilon;I_\varepsilon)$.

(2.31) PROPOSITIE. *Als* (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar is in* x_0 *met lokale representatie* $(Q,\eta;U)$, *dan is er een omgeving* W *van* x_0 *en een continue functie* $\phi\colon W \to \mathbb{R}$ *die lokaal equivariant is op* W^0 (*met betrekking tot de translatiebeweging* ρ *op* $\mathbb{R}$), *en zo dat* $Q = \phi^{-1}(0) \cap W$.

BEWIJS. Definieer $p\colon Q \times I_\eta \to \mathbb{R}$ door $p(x,t) := t$. Dan is p continu. Ook $h^{-1}\colon U = \pi(Q\times I_\eta) \to Q \times I_\eta$ is continu, dus $\phi := p\circ h^{-1}\colon U \to \mathbb{R}$ is continu. Merk op, dat voor iedere $y \in U$, $\phi(y)$ het unieke element in I_η is waarvoor geldt

(2.32) $\quad \pi(y,-\phi(y)) \in Q$

(immers, $y = \pi(x_y,t_y)$ voor een uniek element $(x_y,t_y) \in Q \times I_\eta$; dan is $t_y = \phi(y)$ en $\pi(y,-\phi(y)) = x_y \in Q$).
Zij nu $W := \pi(Q\times I_{\frac{1}{2}\eta})$.
Dan is $W \subset U$, dus ϕ is gedefinieerd en continu op W. Voorts is W een omgeving van x_0 (2.15).
Omdat $Q \times I_\eta \subset D$ ((2.14)LP1), is $W \times I_{\frac{1}{2}\eta} \subset D$, en voor alle $(x,t) \in W \times I_{\frac{1}{2}\eta}$ is $\pi(x,t) \in U$ en $-\phi(x) - t \in I_\eta$, dus uit (2.32) en

$$\pi(\pi(x,t),-\phi(x)-t) = \pi(x,-\phi(x)) \in Q$$

volgt, dat $\phi(\pi(x,t)) = \phi(x) + t = \rho(\phi(x),t)$.
Dus ϕ voldoet aan de voorwaarden van (2.17), dat wil zeggen, ϕ is lokaal equivariant op W^0.
Tenslotte: het is een triviaal gevolg van (2.32) dat voor $y \in W$ geldt: $y \in Q$ als en slechts als $\phi(y) = 0$. □

4. Voortzetting van lokale morfismen en lokale parallelliseerbaarheid van dynamische systemen

In deze paragraaf is (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem, waarin X een *volledig reguliere* Hausdorff ruimte (Tychonoff ruimte) is.
Voor Tychonoff ruimten geldt de volgende voortzettingsstelling (een variant, of zo men wil: gevolg van, de stelling van Tietze voor normale ruimten).

(2.33) LEMMA. *Zij* $\emptyset \neq F \subset U \subset X$, *waarin* F *compact en* U *open is. Zij voorts* $f\colon F \to I_\eta$ *een continue functie. Dan is er een continue functie* $\bar{f}\colon X \to I_\eta$ *zo dat* $\bar{f}|_F = f$ en $\bar{f}(x) = 0$ *voor* $x \in X\backslash U$.

BEWIJS. Omdat X volledig regulier is, kan X als dichte deelruimte in een compacte Hausdorffruimte Z worden ingebed (bijv. in zijn Stone-Čech compactificatie $\beta X =: Z$). Dan is F gesloten in Z (want F is compact). Voorts is er een open $V \subset Z$ zo dat $U = V \cap X$. Dan zijn F en $Z\backslash V$ disjuncte, gesloten deelverzamelingen van de normale (want compacte) ruimte Z.
De functie $f'\colon F \cup (X\backslash V) \to I_\eta$ gedefinieerd door $f'(z) = f(z)$ als

$z \in F$ en $f'(z) = 0$ als $z \in X\backslash V$ is continu. Er bestaat nu een continue functie $g: Z \to I_\eta$ zo dat $g|_{F\cup(X\backslash V)} = f'$. Dan heeft $\bar{f} = g|_X$ alle gewenste eigenschappen. □

We hebben in de vorige paragraaf gezien hoe de samenhang is tussen lokale parallelliseerbaarheid en lokale morfismen. Om lokale parallelliseerbaarheid van (X,D,π) in x_0 aan te tonen is het voldoende (2.23) (en nodig (2.31)) om een lokaal equivariante functie te verkrijgen op een omgeving van x_0 met waarden in $\mathbb{R}$ (waarbij men op $\mathbb{R}$ de translatie-beweging ρ heeft, gedefinieerd in (2.30)). Aangetoond zal nu worden dat in ieder punt van een compacte lokale sectie (in het bijzonder: in ieder niet-evenwichtspunt) het systeem lokaal parallelliseerbaar is: een compacte sectie S kan vergroot worden tot een η-sectie Q voor zekere η zo dat $\pi(Q\times I_\eta)$ een omgeving van S is. Op grond van het voorgaande ligt het voor de hand deze uitbreiding van van S tot Q te verkrijgen door voortzetting van zekere "morfisme-achtige" afbeeldingen. Het bewijs van de volgende stelling is een lokale variant op het "Tietze-Gleason lemma" uit de theorie der compacte transformatiegroepen. In deze stelling moet $\mathbb{R}$ worden beschouwd als de fase-ruimte van het globale dynamische systeem $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \rho)$, gedefinieerd in (2.30).

(2.34) STELLING. *Laat S een compacte η_0-sectie zijn in (X,D,π). Dan is er een omgeving W_0 van S en een continue functie $\phi: W_0 \to \mathbb{R}$ zó, dat ϕ lokaal equivariant is op W_0, en $S \subset \phi^{-1}(\{0\})$.*

BEWIJS [)1]. We verdelen het bewijs in een aantal onderdelen, (n.l. I, II, III en IV), waarbij I en II de "technische" voorbereidingen voor III en IV zijn.

I. Op grond van (2.3)1 is er een $\eta > 0$ en een omgeving U' van S zó dat $U' \times I_{4\eta} \subset D$. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat $\eta \leq \frac{1}{2}\eta_0$, zodat S dus een 2η-sectie is.

Zij nu U een open omgeving van S in X zo dat $U \subset U'$ en

---

)1 Bewerkt naar K.H. HOFMANN & P.S. MOSTERT: *Elements of compact semigroups*, App. II, 1.7.

(2.35) $\pi(S\times I_{2\eta}) \cap \bar{U} \subset \pi(S\times I^0_\eta)$.

(Zo'n U bestaat: π induceert een homeomorfisme van $S \times I_{2\eta}$ op $\pi(S\times I_{2\eta})$; dit volgt uit (2.11) omdat $S \times I_{4\eta} \subset D$, maar in dit speciale geval volgt het ook uit (2.10)(v): een continue bijectie van de *compacte* verzameling $S \times I_{2\eta}$ op de Hausdorffruimte $\pi(S\times I_{2\eta})$ is topologisch. Omdat $S \times I^0_\eta$ een omgeving van $S \times \{0\}$ in $S \times I_{2\eta}$ is, is $\pi(S\times I^0_\eta)$ dus een omgeving van S in $\pi(S\times I_{2\eta})$. Er is derhalve een open omgeving V van S in X zo dat $V \subset U'$ en $\pi(S\times I_{2\eta}) \cap V \subset \pi(S\times I^0_\eta)$. Omdat X regulier is en S compact, is er een open omgeving U van S met $S \subset U \subset \bar{U} \subset V$.)
Omdat π bijectief is op $S \times I_{2\eta}$, volgt uit (2.35) dat

$$\pi(S\times(I_{2\eta}\setminus I^0_\eta)) \cap (\pi(S\times I_{2\eta}) \cap \bar{U}) = \emptyset.$$

Het betreft hier twee disjuncte compacte deelverzamelingen van X. Deze hebben onderling disjuncte omgevingen, en hierop (2.2)$\underline{2}$ toepassend vinden we een omgeving W van S in X zo dat $W \subset U$ en

(2.36) $\pi(W\times(I_{2\eta}\setminus I^0_\eta)) \cap (\pi(W\times I_{2\eta}) \cap \bar{U}) = \emptyset$.

Nogmaals (2.2)$\underline{2}$ toepassend vinden we een omgeving Y van S en een $\varepsilon > 0$ zo dat $\varepsilon \leq \eta$ en

(2.37) $\pi(Y\times I_\varepsilon) \subset W$.

(Merk op, dat uit (2.37) volgt, dat $Y = \pi(Y\times\{0\}) \subset W$.)
II. Definieer voor $x \in U$)1

$$A_x := \{t \in I_{2\eta} \mid \pi(x,t) \in U\}.$$

(Waarom deze verzamelingen van belang zijn, zal in III blijken.)

)1 Voor alle $x \in U$ en $t \in I_{2\eta}$ is $\pi(x,t)$ gedefinieerd, omdat $U \times I_{2\eta} \subset D$. (immers, $U \subset U'$).

Dan geldt voor alle $x \in W$

$$A_x \subset I^0_\eta . \tag{2.38}$$

Immers, als $t \in A_x$, dan is $t \in I_{2\eta}$ en $\pi(x,t) \in U$. Omdat $x \in W$, is $\pi(x,t) \in \pi(W\times I_{2\eta}) \cap \bar{U}$, en uit (2.36) volgt dan, dat $t \notin I_{2\eta}\setminus I^0_\eta$, ofwel $t \in I^0_\eta$. Dus (2.38) geldt voor $x \in W$.
Vervolgens tonen we aan, dat voor alle $y \in Y$ en $s \in I_\varepsilon$ geldt:

$$A_{\pi(y,s)} = A_y - s. \tag{2.39}$$

Als $t \in A_{\pi(y,s)}$, dan is $t \in I_{2\eta}$ en [1] $\pi(y,s+t) = \pi(\pi(y,s),t) \in U$ op grond van de definitie van $A_{\pi(y,s)}$. Wegens (2.37) is $\pi(y,s) \in W$, dus $t \in I^0_\eta$ (2.38). Bijgevolg is $s + t \in I_\varepsilon + I^0_\eta \subset I_{2\eta}$, en dus is $s + t \in A_y$, ofwel $t \in A_y - s$.
Omgekeerd, als $t \in A_y - s$, dan is $t \in I^0_\eta + I_\varepsilon \subset I_{2\eta}$, en voorts is $s + t \in A_y$, dus $\pi(\pi(y,s),t) = \pi(y,s+t) \in U$. Hieruit volgt dat $t \in A_{\pi(y,s)}$. Hiermee is (2.39) bewezen.
III. Volgens (2.33) is er een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ zo dat $f(S) = \{1\}$ en $f(X\setminus U) = \{0\}$. Definieer nu een functie $a\colon U \to \mathbb{R}$ door:

$$a(x) := \int_{-\eta}^{\eta} f(\pi(x,t))dt = \int_{I_{2\eta}} f(\pi(x,t))dt.$$

Merk op, dat $a\colon U \to \mathbb{R}$ continu is: voor elke $x \in U$ en $\delta > 0$ is er een omgeving N van x zo dat $|f(\pi(x,t))-f(\pi(x',t))| < \frac{1}{2}\delta/\eta$ voor alle $t \in [-\eta,\eta]$ en $x' \in N$ (pas (2.2)$\underline{3}$ toe op $f\circ\pi$). Dus $|a(x)-a(x')| < \delta$ voor $x' \in N$.
Vervolgens is voor $x \in S$ de (continue en niet-negatieve) functie $t \to f(\pi(x,t))$ strikt positief voor $t = 0$: $f(\pi(x,0)) = f(x) = 1$. Derhalve is $a(x) > 0$ voor $x \in S$. Omdat S compact is, is er een $c > 0$ zo dat $a(x) \geq c$ voor alle $x \in S$. Omdat a continu is op U, is er een open omgeving W_0 van S zo dat $W_0 \subset Y$ en

$$a(x) > \tfrac{1}{2}c \quad \text{voor alle } x \in W_0. \tag{2.40}$$

Tenslotte nog een laatste eigenschap van $a\colon U \to \mathbb{R}$.
Omdat $f(z) = 0$ voor $z \notin U$, is voor alle $x \in U$

---

[1] Merk op, dat wegens (2.37) $\pi(y,s) \in W \subset U$ en $t \in I_{2\eta}$, dus $(\pi(y,s),t) \in D$.

$$a(x) = \int_{A_x} f(\pi(x,t))dt.$$

In het bijzonder geldt voor $y \in W_0 \subset Y$ en $s \in I_\varepsilon$, wegens (2.39):

(2.41) $$a(\pi(y,s)) = \int_{A_y - s} f(\pi(y,s+t))dt = \int_{A_y} f(\pi(y,u))du = a(y).$$

IV. Omdat π een homeomorfisme van $S \times I_{2\eta}$ op $\pi(S\times I_{2\eta})$ induceert, wordt er door

$$\psi(\pi(x,t)) := t \qquad (x\in S, t\in I_{2\eta})$$

een continue functie $\psi\colon \pi(S\times I_{2\eta}) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd. Laat $\psi'\colon X \to \mathbb{R}$ een continue voortzetting van ψ tot heel X zijn (2.33). Merk nog op, dat $\psi'(x) = 0$ voor alle $x \in S$.

Definieer nu een functie ϕ met domein in X en waarden in $\mathbb{R}$ door

(2.42) $$\phi(x) := \frac{1}{a(x)} \int_{-\eta}^{\eta} f(\pi(x,t))\big(\psi'(\pi(x,t))-t\big)dt$$

voor $x \in X$ met $a(x) \neq 0$.

Omdat $a(x) > 0$ voor $x \in W_0$, is $\phi(x)$ goed gedefinieerd voor alle $x \in W_0$.

Omdat de integrand in (2.42) continu in (x,t) is op $W_0 \times I_{2\eta}$, volgt uit (2.2)3 gemakkelijk, dat de integraal in (2.42) continu is in x op W_0. Ook a is continu op W_0, en dus is ϕ continu op W_0. Dus ϕ voldoet aan (2.17) LE0.

Vervolgens: $W_0 \times I_\varepsilon \subset Y \times I_\varepsilon \subset D$ en $I_\varepsilon \subset J(\phi(x)) = \mathbb{R}$ voor alle $x \in W_0$. Dus ook aan LE1 uit (2.17) is voldaan.

We tonen nu aan, dat aan LE2 voldaan is. Zij $x \in W_0$, en $s \in I_\varepsilon$, en neem aan, dat $\pi(x,t) \in W_0$. Omdat $f(z) = 0$ voor $z \in X\setminus U$ volgt uit (2.39) en (2.41):

$$\begin{aligned}\phi(\pi(x,s)) &= \frac{1}{a(\pi(x,s))} \int_{A_{\pi(x,s)}} f(\pi(x,s+t))\big(\psi'(\pi(x,s+t))-t\big)dt \\ &= \frac{1}{a(x)} \int_{A_x} f(\pi(x,u))\big(\psi'(\pi(x,u))-u+s\big)du \\ &= \phi(x) + \frac{s}{a(x)} \int_{A_x} f(\pi(x,u))du \\ &= \phi(x) + s.\end{aligned}$$

Hiermee is aangetoond, dat ϕ lokaal equivariant is op W_0.
Tenslotte: voor $x \in S$ en $t \in I_{2\eta}$ is $\psi'(\pi(x,t)) = \psi(\pi(x,t)) = t$, dus

$$\phi(x) = \frac{1}{a(x)} \int_{I_\eta} f(\pi(x,t))\big(\psi'(\pi(x,t))-t\big)dt = 0.$$

Bijgevolg is inderdaad $S \subset \phi^{-1}\{0\}$. □

(2.43) <u>STELLING</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, waarin* X *een volledig reguliere ruimte is. Laat voorts* S *een compacte sectie in* X *zijn.*
Dan is (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar in ieder punt* x_0 *van* S, *en bij iedere omgeving* W *van* S *is er een lokale representatie* $(Q,\eta;U)$ *van* (X,D,π) *in* x_0 *met* $S \subset Q$, U *een omgeving van* S, *en* $U \subset W$. *Bovendien geldt nog:*
<u>1</u>. *als* X *lokaal compact is mag aangenomen worden dat* Q *compact is;*
<u>2</u>. *als* X *lokaal samenhangend is en* S *samenhangend, mag aangenomen worden dat* Q *samenhangend is.*

<u>BEWIJS</u>. Volgens (2.34) bestaat er een $\mathbb{R}$-waardige, lokaal equivariante functie ϕ op een omgeving W_0 van S met $\phi(S) = \{0\}$. Hierin is $\{0\}$ een (globale) sectie in het dynamische systeem $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \rho)$ van (2.30), en $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \rho)$ is lokaal parallelliseerbaar in 0. Uit (2.23) volgt nu de lokale parallelliseerbaarheid van (X,D,π) in $x_0 \in S$ en, voor iedere omgeving W van S, het bestaan van een lokale representatie $(Q,\eta;U)$ in x_0 met $S \subset Q$, U een omgeving van S, en $U \subset W$.
Indien X lokaal compact is, bevat elke omgeving W van S een compacte omgeving W_1 van S (overdek S met eindig veel open verzamelingen waarvan de afsluitingen compact zijn en bevat in W). Past men het voorgaande toe met W_1 in plaats van W, dan krijgt men $Q \subset W_1$. Daar Q gesloten is, volgt hieruit dat Q compact is.
Indien X lokaal samenhangend is en S samenhangend, laat dan, bij gegeven omgeving W van S, $(Q,\eta;U)$ een lokale representatie in $x_0 \in S$ zijn met $S \subset Q$, U een omgeving S, en $U \subset W$. Er zijn nu eindig veel samenhangende, open omgevingen van punten van S, zeg $V_1,\dots,V_k$ met $V_i \subset U$. Dan is

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i =: V$$

een open omgeving van S, en $V \subset U$. Omdat $S \cap V_i \neq \emptyset$ voor elke

$i = 1,\dots,k$, en $V = S \cup \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ waarin S en elke V_i samenhangend is, is V samenhangend. Laat nu $p\colon Q \times I_\eta \to Q$ de kanonieke projectie zijn. Omdat p een continue en open afbeelding is, en $h\colon Q \times I_\eta \to U$ een homeomorfisme, is $ph^{-1}(V)$ een open, samenhangende deelverzameling van Q. Merk op, dat $S = ph^{-1}(S) \subset ph^{-1}(V)$, dus $ph^{-1}(V)$ is een open, samenhangende omgeving van S in Q. Zij $Q_1 := \overline{ph^{-1}(V)}$. Omdat Q gesloten is, is $Q_1 \subset Q$. Voorts is Q_1, als afsluiting van een samenhangende verzameling, zelf weer samenhangend.
Vervolgens beeldt $h\colon Q \times I_\eta \to U$ de omgeving $Q_1 \times I_\eta$ van $S \times \{0\}$ homeomorf af op een omgeving (in U) van S; dus $U_1 := \pi(Q_1 \times I_\eta)$ is een omgeving van S in X (vgl. het bewijs van (2.15)). Dus $(Q_1,\eta;U_1)$ is een lokale representatie in x_0 met de gewenste eigenschappen. □

(2.44) <u>GEVOLG</u>. *Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem waarin X een volledig reguliere ruimte is, en zij $x_0 \in X$. De volgende voorwaarden zijn equivalent:*

(i) x_0 *is geen evenwichtspunt.*

(ii) (X,D,π) *is lokaal parallelliseerbaar in* x_0.

Indien deze voorwaarden vervuld zijn, dan is er bij iedere omgeving W van x_0 een lokale representatie $(Q,\eta;U)$ van (X,D,π) in x_0 zo dat $U \subset W$.

<u>BEWIJS</u>. (i) ⇒ (ii): Pas (2.43) toe, en merk op dat als x_0 geen evenwichtspunt is, er een $\eta > 0$ is zo dat $\{x_0\}$ een η-sectie is (vgl. (1.26), (1.27) en (2.10)(ii); als x_0 niet periodiek is, is $\{x_0\}$ een ∞-sectie; als x_0 periodiek is is $\{x_0\}$ een η-sectie voor $0 < \eta < p(x)$).
(ii) ⇒ (i): als $x_0 \in Q$ voor zekere η-sectie Q kan x_0 geen evenwichtspunt zijn op grond van (2.10)(ii) en (1.26). □

(2.45) Indien X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, en $x_0 \in X$ is geen evenwichtspunt van het lokale dynamische systeem (X,D,π), dan heeft x_0 op grond van (2.44) en (2.13) een omgeving W die homeomorf is met een ruimte van de gedaante $Q \times I_\eta^0$, en wel zo, dat de doorsnijdingen met W van banen in X corresponderen met de lijnstukken $\{q\} \times I_\eta^0$ in $Q \times I_\eta^0$. Omdat I_η^0 homeomorf is met $\mathbb{R}$ en Q met een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, volgt hieruit: x_0 *heeft een omgeving W die homeomorf is met een deelverzameling van $\mathbb{R}^{n+1}$ zo, dat de doorsnijdingen met W van banen in X corresponderen met de elementen van een stelsel evenwijdige rechten in $\mathbb{R}^{n+1}$*. Indien het lokale dynamische systeem

gedefinieerd wordt door een vectorveld op X kan men voor Q een (n-1)-dimensionaal hypervlak nemen, en dan is W dus homeomorf met een volle cilinder in $\mathbb{R}^n$ (vgl. [HS], Chap. 11, §2). In deze vorm is bovenstaande uitspraak het eerst bewezen door H. Whitney in 1933.
In 1939 bewees M. Bebutov de in (2.44) geformuleerde stelling voor het geval (X,D,π) een globaal dynamisch systeem is, en X een *separabele metrische* ruimte. Merk op, dat nu Q homeomorf is met een deelverzameling van de separabele Hilbertruimte ℓ_2, zodat nu $Q \times I_\eta^0 \cong Q \times \mathbb{R}$ homeomorf is met de vereniging van een stelsel evenwijdige rechten in $\ell_2 \oplus \mathbb{R}$. Aangezien $\ell_2 \oplus \mathbb{R} \cong \ell_2$ onder een lineair isomorfisme (waarbij dus rechte lijnen overgaan in rechte lijnen) krijgen we tenslotte: *het punt* $x_0 \in X$ *heeft een omgeving* W *die homeomorf is met een deelverzameling van* ℓ_2*, gevormd door onderling evenwijdige lijnen die corresponderen met de doorsnijdingen van banen in* X *met* W (vgl. ook [NS], Chap. V, Theorem 2.16). Voor willekeurige lokale dynamische systemen op volledig reguliere ruimten is (2.44) voor het eerst bewezen door O. Hajek in 1965. Zie [H], Chap. VI, §2. Het door ons gegeven bewijs is een bewerking van een bewijs voor de existentie van lokale secties voor lokale acties van Liegroepen op volledig reguliere ruimten zonder lokale isotropie (zie [MZ], p.219, waar wel de stelling wordt geformuleerd, maar niet bewezen).

In (2.43) gaat het om het uitbreiden van secties (in een "richting" die "dwars" op die der banen van het dynamische systeem staat), hetgeen plaats vindt ten koste van het parameterinterval I_η in $\mathbb{R}$ dat bij de sectie hoort. Het volgende resultaat is min of meer "duaal": een groot parameterinterval ("uitbreiding" van een lokale representatie "in de richting van" een baan) wordt verkregen ten koste van de grootte van de sectie.

(2.46) PROPOSITIE. *Neem aan dat* X *een volledig reguliere ruimte is, en dat* (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar is in* $x \in X$ *met lokale representatie* $(Q,\eta;U)$. *Zij* $T > 0$ *zo gekozen, dat* $[-T,T] \subset J(x)$ *en, als* x *periodiek is,* $T < p(x)$. *Dan heeft* (X,D,π) *een lokale representatie* $(Q_1,T;U_1)$ *in* x*, waarin* $Q_1 \subset Q$.

BEWIJS. Als $T \leq \eta$ valt er niets te bewijzen; neem dus aan, dat $T > \eta$. Merk op, dat $K := \pi_x(I_{2T}\backslash I_\eta^0)$ een compacte deelverzameling is van X, en dat $x \notin K$ (als $x \in K$, dan is $x = \pi(x,t)$ met $0 < |t| \leq T$, in strijd met de keus van T). Dus er is een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ zo dat $f(x) = 0$ en $f(K) = \{1\}$. Uit (2.3)3, toegepast op de continue functie $f\circ\pi\colon D \to [0,1]$, volgt nu dat er een gesloten omgeving V van x is zo dat

$$V \subset \{y \in X \mid |f(y)| < 1/3\};$$

$$V \times I_{2T} \subset D;$$

$$|f(\pi^u x)-f(\pi^u z)| < 1/3 \text{ voor } (z,u) \in V \times I_{2T}.$$

Zij $Q_1 := Q \cap V$. Dan is Q_1 gesloten in X (want V en Q zijn gesloten), en $x \in Q_1$. We tonen nu aan, dat Q_1 een T-sectie is. Neem hiertoe aan, dat $\pi^t y = \pi^s z$ voor $s,t \in I_T$ en $y,z \in Q_1$. Dan is $y = \pi^{s-t}z$ met $s - t \in I_{2T}$, terwijl $y,z \in V$. Dus is

$$|f(\pi^{s-t}x)| \le |f(\pi^{s-t}x)-f(\pi^{s-t}z)| + |f(y)| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1.$$

Hieruit volgt, dat $\pi(x,s-t) \notin K$, dus $s-t \notin I_{2T}\setminus I_\eta^0$. Aangezien $s-t \in I_{2T}$ (want $s,t \in I_T$) is daarom $s-t \in I_\eta^0 = (-\frac{1}{2}\eta,\frac{1}{2}\eta)$.
Anderzijds volgt uit de aanname, dat $\pi^{s-t}Q \cap Q \neq \emptyset$, zodat op grond van (2.10)(ii) geldt: $|s-t| \notin (0,\eta]$. Er blijft als enige mogelijkheid $s = t$. Dus Q_1 is inderdaad een T-sectie.
Omdat $Q_1 \times I_{2T} \subset D$ (want $Q_1 \subset V$ en $V \times I_{2T} \subset D$) is de afbeelding $(y,t) \mapsto \pi(y,t)\colon Q_1 \times I_T \to \pi(Q_1{\times}I_T) =: U_1$ topologisch. Merk tenslotte op, dat Q_1 een omgeving van x in Q is. Uit (2.15) volgt dan, dat $\pi(Q_1{\times}I_\eta)$ een omgeving is van x in X. Omdat $U_1 = \pi(Q_1{\times}I_T) \supset \pi(Q_1{\times}I_\eta)$, is U_1 ook een omgeving van x in X. Conclusie: $(Q_1,T;U_1)$ is een lokale representatie van (X,D,π) in het punt x. □

(2.47) OPMERKING. Als, in de situatie van (2.46), Q een compacte sectie is, dan is uiteraard ook Q_1 compact ($Q_1 \subset Q$ en Q_1 gesloten).
Als X lokaal samenhangend is, mag aangenomen worden dat Q_1 samenhangend is. Immers, [)1] als $(Q_1,T;U_1)$ een lokale representatie in x is,

---

)1 Vgl. ook het tweede deel van het bewijs van (2.43). Het verschil met (2.43) is dat we er nu niet voor behoeven te zorgen dat de "nieuwe" sectie de oude omvat.

laat dan W een open, samenhangende omgeving van x zijn met $\overline{W} \subset U_1$. Laat p: $Q_1 \times I_T \to Q_1$ de kanonieke projectie zijn en $Q_2 := \overline{ph^{-1}(W)}$. Dan is Q_2 een gesloten omgeving van x in Q_1 en Q_2 is samenhanged. Nu is Q_2 een T-sectie (want $Q_2 \subset Q_1$), Q_2 is gesloten, $U_2 := \pi(Q_2 \times I_T)$ is een omgeving van x in X (2.15), en $(x,t) \mapsto \pi(x,t): Q_2 \times I_T \to U_2$ is topologisch (want het is de restrictie en corestrictie van de topologische afbeelding h: $Q_1 \times I_T \to U_1$).

5. Secties in vlakke dynamische systemen; transversalen

(2.48) In deze paragraaf is (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem, waarin X een *open* deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is. Zij voorts $x_0 \in X$ en neem aan, dat x_0 geen evenwichtspunt is. Op grond van (2.44) is (X,D,π) lokaal parallelliseerbaar in x_0. We zullen aantonen, dat er een lokale representatie $(Q,\eta;U)$ van (X,D,π) is waarin Q dan wel geen lijnstuk is (een stuk van een hypervlak in $\mathbb{R}^2$, vgl. de uitspraak in (2.45) over differentieerbare systemen), maar toch wel een homeomorf beeld van een compact interval.

(2.49) DEFINITIE. Onder een *boog* in een topologische ruimte Y verstaan we een topologische inbedding p: $[0,1] \to Y$. Vaak is het niet nodig een scherp onderscheid te maken tussen de afbeelding p en de verzameling $p([0,1])$. We schrijven daarom vaak $\widehat{ab}$ of $\widehat{axb}$ in plaats van $p([0,1])$, waarin dan $a := p(0)$, $b := p(1)$ en $x := p(t)$ met $0 < t < 1$. We noemen p dan wel een *parametrisering* van $\widehat{ab}$. Merk op, dat, dan $t \mapsto p(1-t)$ een parametrisering van $\widehat{ba}$ is.
Een *Peano continuum* is een compacte, samenhangende, lokaal samenhangende metrische ruimte.

(2.50) VOORBEELD. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $[0,1]^n$ een Peano continuum (triviaal). In het bijzonder is iedere gesloten rechthoek en iedere gesloten cirkelschijf in $\mathbb{R}^2$ een Peano continuum. Het bekende feit, dat een gesloten rechthoek in $\mathbb{R}^2$ het continue beeld is van het eenheidsinterval $[0,1]$ is een speciaal geval van de volgende karakterisering van Peano continua (deze karakterisering verklaart ook de term "Peano continuum"):

(2.51) STELLING. (HAHN-MAZURKIEWICZ) *Een topologische Hausdorff ruimte* Y *is een Peano continuum als en slechts als* Y *het continue beeld is* *van het interval* [0,1].

<u>BEWIJS</u>. Zie [HY], Theorem 3.30. □

(2.52) <u>GEVOLG</u>. *Het continue beeld van een Peano continuum is weer een Peano continuum.* □

(2.53) <u>STELLING</u>. *Een Peano continuum* Y *is boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend*)1*: iedere samenhangende open deelverzameling van* Y *is boogsamenhangend.*

<u>BEWIJS</u>. Zie [HY], Theorem 3.16. □

(2.54) <u>LEMMA</u>. *Zij* Y *een topologische ruimte en laten* $\widehat{za}$ *en* $\widehat{zb}$ *twee bogen in* Y *zijn. Dan geldt er:*

<u>1</u>. *Als* $\widehat{za} \cap \widehat{zb} = \{z\}$, *dan is* $\widehat{za} \cup \widehat{zb}$ *een boog* $\widehat{azb}$.

<u>2</u>. *Er doen zich de volgende mogelijkheden voor:*

(i) $\widehat{za} \subset \widehat{zb}$ *of* $\widehat{zb} \subset \widehat{za}$;

(ii) *er bestaat een boog* $\widehat{a_1zb_1}$ *in* $\widehat{za} \cup \widehat{zb}$;

(iii) *er bestaan bogen* $\widehat{yz}$, $\widehat{ya_1}$ *en* $\widehat{yb_1}$ *in* $\widehat{za} \cup \widehat{zb}$ *die twee aan twee slechts het punt* y *gemeenschappelijk hebben.*

<u>BEWIJS</u>. Laten $p\colon [0,1] \to \widehat{za} \subset Y$ en $q\colon [0,1] \to \widehat{zb} \subset Y$ homeomorfismen zijn (parametriseringen van de gegeven bogen).

<u>1</u>. Definieer $r\colon [0,1] \to Y$ door

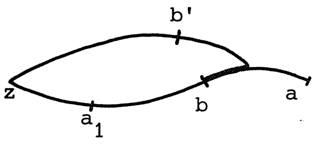
$$r(s) := \begin{cases} p(1-2s) & \text{voor } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ q(2s-1) & \text{voor } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

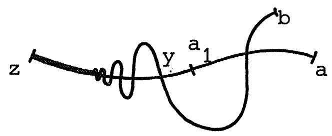
Dan is r continu en 1,1-duidig, dus een topologische inbedding, en r is de gevraagde boog.

<u>2</u>. Neem aan dat $\widehat{za} \not\subset \widehat{zb}$ en $\widehat{zb} \not\subset \widehat{za}$. We mogen aannemen dat $b \notin \widehat{za}$ (vervang zo nodig b door een punt $b' \in \widehat{zb}$ met $b' \notin \widehat{za}$). Dan is $p^{-1}(\widehat{za} \cap \widehat{zb})$ een compacte deelverzameling van [0,1) waarvan het complement een niet-lege, open deelverzameling van [0,1) is.

)1 Een ruimte Y heet *lokaal boogsamenhangend* als voor iedere $y \in Y$ en iedere omgeving U van y er een open omgeving V van y is zo dat $V \subset U$ en V boogsamenhangend (i.e. $\forall a,b \in V,\ \exists\ \widehat{ab} \subset V$).

Dit complement is een vereniging van (hoogstens aftelbaar veel) open intervallen in (0,1) (merk op, dat $0 \in p^{-1}(\widehat{za} \cap \widehat{zb})$). Kies hieruit één interval (t_1,t_2), kies voorts $s_1 \in (t_1,t_2)$ en zij $a_1 := p(s_1)$. Dan is

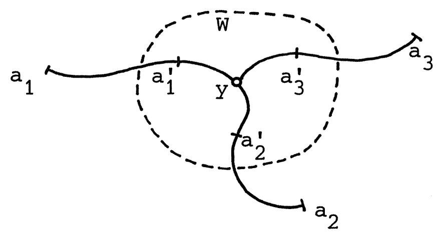




$t_1 \in p^{-1}(\widehat{za} \cap \widehat{zb})$ en $(t_1,s_1) \cap p^{-1}(\widehat{za} \cap \widehat{zb}) = \emptyset$, dus de boog $p([t_1,s_1])$ heeft met de boog $\widehat{zb}$ slechts het punt $p(t_1)$ gemeen. Er zijn nu de volgende twee mogelijkheden: Indien $t_1 = 0$, dan hebben dus de bogen $\widehat{za}_1 (:= p([t_1,s_1]))$ en $\widehat{zb}$ slechts het punt z gemeen, dus op grond van $\underline{1}$ is $\widehat{za}_1 \cup \widehat{zb}$ een boog $\widehat{a_1zb}$ (geval (ii)). Indien $t_1 > 0$, zij dan $y := p(t_1)$. Merk op, dat $y \neq z$ en dat $y \neq b$ (immers, $b \notin za$). De deelbogen $\widehat{zy}$ en $\widehat{yb}$ van $\widehat{zb}$ hebben onderling en met $\widehat{ya}_1 := p([t_1,s_1])$ slechts het punt y gemeen (geval (iii)). □

(2.55) <u>OPMERKING</u>. Het volgende is van toepassing op de situatie van (2.54)$\underline{3}$ (iii):

Neem aan dat drie bogen $\widehat{ya}_i$ $(i = 1,2,3)$ twee aan twee slechts het punt y gemeen hebben. Dan is $\widehat{ya}_1 \cup \widehat{ya}_2 \cup \widehat{ya}_3$ géén boog, want uit (2.54)$\underline{1}$ volgt direct dat uit deze verzameling de punten a_1,a_2 en a_3 weggelaten kunnen worden zonder dat de boogsamenhangendheid verloren gaat. Uit $[0,1]$ (en daarom: uit iedere boog) kunnen echter ten hoogste twee punten weggelaten worden zonder dat de boogsamenhangendheid verloren gaat. Indien W een willekeurige gesloten omgeving van y in Y is, dan zijn er punten $a_i' \in \widehat{ya}_i$ zo dat $\widehat{ya_i'} \subset W \cap \widehat{ya}_i$. Dus $W \cap (\widehat{ya}_1 \cup \widehat{ya}_2 \cup \widehat{ya}_3)$ bevat de verzameling $\widehat{ya_1'} \cup \widehat{ya_2'} \cup \widehat{ya_3'}$; de laatstgenoemde verzameling is geen boog, dus ook eerstgenoemde kan geen boog zijn (een gesloten, samenhangende deelverzameling van een boog is een boog!). Merk op, dat $W \cap (\widehat{ya}_1 \cup \widehat{ya}_2 \cup \widehat{ya}_3)$ wel de bogen $\widehat{a_1'ya_2'}$, $\widehat{a_1'ya_3'}$ en $\widehat{a_2'ya_3'}$ bevat.



(2.56) LEMMA. *Zij* W *een omgeving van* x_0 *in* X. *Er is een lokale representatie* $(Q,\eta;U)$ *van* (X,D,π) *in* x_0, *waarin* Q *compact, boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend is, en* $U \subset W$.

BEWIJS.[1] Volgens (2.44) is er een lokale representatie $(Q_1,\eta;U_1)$ van (X,D,π) in x_0 met $U_1 \subset W$. Omdat U_1 een omgeving is van x_0 in X en X open is in $\mathbb{R}^2$, is er een omgeving V van x_0 in $\mathbb{R}^2$ zo dat $V \subset U_1$, en V een Peano continuum (2.50). Omdat $h_1 := \pi|_{Q_1\times I_\eta}: Q_1 \times I_\eta \to U_1$ een homeomorfisme is en de kanonieke projectie $p: Q_1 \times I_\eta \to Q_1$ continu, is $Q := ph_1^{-1}(V)$ een Peano continuum (2.52). Dus Q is compact, boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend (2.53).
We tonen nu aan dat Q en η aan (2.14) LP0, LP1 en LP2 voldoen. In de eerste plaats is $x_0 \in Q \subset Q_1$, dus Q is een η-sectie (2.9)3. Omdat Q compact is, is Q gesloten in X. Vervolgens: $Q \times I_\eta \subset Q_1 \times I_\eta \subset D$, en $h := \pi|_{Q\times I_\eta}: Q \times I_\eta \to U := \pi(Q\times I_\eta)$ is de restrictie en corestrictie van $h_1: Q_1 \times I_\eta \to U_1$. Omdat h_1 een homeomorfisme is, is ook h een homeomorfisme. Tenslotte: Q is een omgeving van x_0 in Q_1 (want p is een open afbeelding, h_1 een homeomorfisme, en V bevat een open omgeving van x_0 in X), dus $U := \pi(Q\times I_\eta)$ is een omgeving van x_0 in X (2.15). □

(2.57) LEMMA. *Zij* Q *een* η*-sectie in* (X,D,π) *zo dat* $Q \times I_\eta \subset D$, *en neem aan dat* Q *compact, boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend is. Dan geldt voor ieder punt* $y \in Q$:

1. *als er een boog van de gedaante* $\widehat{ayb}$ *in* Q *is dan is er een omgeving* V *van* y *in* X *zo dat* $V \cap Q = \widehat{ayb}$;

---

[1] vgl. het bewijs van het tweede deel van (2.45).

2. *als er geen boog van de gedaante* $\widehat{ayb}$ *in* Q *is, is* Q *zelf een boog, en wel van de gedaante* $Q = \widehat{yb}$ *met* $b \in Q$.

In alle gevallen is er dus een omgeving V *van* y *in* X *zo dat* $V \cap Q$ *een boog is.*

BEWIJS.

1. In dit geval is er een topologische inbedding $\psi\colon [0,1] \to Q$ zo dat $\psi([0,1]) = \widehat{ab}$ en $y \in \psi((0,1))$. Definieer een continue afbeelding $f\colon [0,1] \times I_\eta \to X \subset \mathbb{R}^2$ door

$$f(s,t) := \pi(\psi(s),t).$$

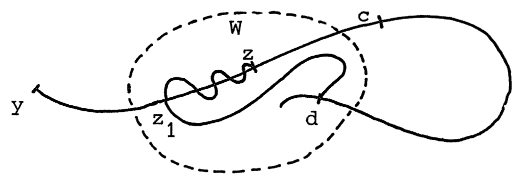
Omdat ψ injectief is, evenals $\pi|_{Q\times I_\eta}$, is f injectief. Daar $[0,1] \times I_\eta$ compact is, volgt hieruit dat f een topologische inbedding induceert van $[0,1] \times I_\eta$ in $\mathbb{R}^2$. Volgens de stelling van Brouwer over de invariantie van het domein (zie [D], pp. 358,359) is het beeld van $(0,1) \times I_\eta^0$ onder f een open verzameling in $\mathbb{R}^2$; merk op, dat deze verzameling het punt y bevat, en bevat is in X. Dus $V := f([0,1]\times I_\eta)$ is een omgeving van y in X. Uit de injectiviteit van f en het feit dat $\psi([0,1]) \subset Q$ volgt nog, dat $V \cap Q = \psi([0,1]) = \widehat{ab}$.

2. In dit geval volgt uit (2.54) en (2.55), in verband met wat in 1 bewezen is, dat voor ieder tweetal bogen $\widehat{ya}$ en $\widehat{yb}$ in Q geldt: $\widehat{ya} \subset \widehat{yb}$ of $\widehat{yb} \subset \widehat{ya}$.

   Omdat Q boogsamenhangend is, is $Q = \bigcup\{\widehat{ya} \mid a \in Q\}$. Indien er een punt $b \in Q$ is zo dat er voor alle $a \in Q\setminus\{b\}$ geldt dat $b \notin \widehat{ya}$, dan is $\widehat{ya} \subset \widehat{yb}$ voor alle $a \in Q$, en $Q = \widehat{yb}$. Voor de gevraagde omgeving V van y kunnen we dan heel X nemen.

   Neem nu aan, dat er géén punt $b \in Q$ is met bovengenoemde eigenschap. Voor elke $b \in Q$ is er dan een $c \in Q$ zo dat $b \in \widehat{yc}\setminus\{c\}$, ofwel $Q = \bigcup\{\widehat{yc}\setminus\{c\} \mid c \in Q\}$. Het is nu voldoende om aan te tonen dat $\widehat{yc}\setminus\{c\}$ open is in Q voor elke $c \in Q$: omdat Q compact is en de bogen $\widehat{yc}$ totaal geordend zijn volgens inclusie is er dan een $c_0 \in Q$ zo dat $Q = \widehat{yc_0}\setminus\{c_0\} \cong [0,1)$. Tegenspraak (want Q is compact, en [0,1) niet!).

   We tonen als volgt aan, dat $\widehat{yc}\setminus\{c\}$ open is in Q voor elke $c \in Q$. Zij $z \in \widehat{yc}\setminus\{c\}$, en zij W een boogsamenhangende omgeving van z in Q zo dat $W \cap \widehat{yc} \subset \widehat{yc}\setminus\{c\}$ (zo'n W is er omdat Q lokaal boogsamenhangend is, en $\widehat{yc}\backslash\{c\}$ open is in $\widehat{yc}$).



Indien $W \not\subset \widehat{yc}$, dan is er een $d \in W$ zo dat $d \notin \widehat{yc}$. Omdat W boogsamenhangend is, is er een boog $\widehat{zd} \subset W$. Kies $z_1 \in \widehat{yz} \cap \widehat{zd}$ zo dat z_1 correspondeert met de kleinste parameterwaarde van een punt uit de compacte deelverzameling $\widehat{yz} \cap \widehat{zd}$ van $\widehat{yz}$. Dan is $\widehat{yz_1} \cap \widehat{z_1d} = \{z_1\}$. Daar $c \notin W$, is $c \notin \widehat{yz_1d} := \widehat{yz_1} \cup \widehat{z_1d}$ (zie (2.54)1), dus $\widehat{yc} \not\subset \widehat{yz_1d}$. Anderzijds is $\widehat{yz_1d} \not\subset \widehat{yc}$, want $d \notin \widehat{yc}$. Dit is in strijd met de reeds eerder aangetoonde totale ordening naar inclusie van de bogen $\widehat{ya}$ in $Q(a \in Q)$. Dus is $W \subset \widehat{yc}$, en hieruit volgt dat z inwendig punt van $\widehat{yc}\backslash\{c\}$ is (met betrekking tot Q). Bijgevolg is $\widehat{yc}\backslash\{c\}$ open in Q. □

(2.58) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, waarin* X *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^2$ *is, en zij* $x_0 \in X$, x_0 *geen evenwichtspunt. Dan is* (X,D,π) *lokaal parallelliseerbaar in* x_0, *en bij iedere omgeving* W *van* x_0 *is er een lokale representatie* $(Q,\eta;U)$ *van* (X,D,π) *in* x_0 *waarin* $U \subset W$, *en waarin* Q *een boog is.*

BEWIJS. Uit (2.56) volgt dat er een lokale representatie $(Q,\eta;U)$ van (X,D,π) in x_0 is waarin $U \subset W$, en Q compact, boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend is. Uit (2.57) volgt nu, dat als Q geen boog is, er een omgeving V van x_0 in X is zo dat $Q_1 := V \cap Q$ een boog is. Aangezien Q_1 een omgeving is van x_0 in Q, volgt met behulp van (2.15) gemakkelijk, dat $(Q_1,\eta;U_1)$, waarin uiteraard $U_1 := \pi(Q_1 \times I_\eta)$, een lokale representatie is van (X,D,π) in x_0. Hierin is $U_1 \subset W$, en Q_1 is een boog. □

(2.59) GEVOLG. *Als* $x \in X$ *geen evenwichtspunt is en* $T > 0$ *is zo gekozen dat* $[-T,T] \subset J(x)$ *en, als* x *periodiek is,* $T < p(x)$, *dan heeft* (X,D,π) *een lokale representatie* $(Q_1,T;U_1)$ *in* x, *waarin* Q_1 *een boog is.*

BEWIJS. Gebruik (2.58), (2.46) en (2.47), en merk op, dat een gesloten, samenhangende deelverzameling van een boog weer een boog is. □

(2.60) OPMERKING. In feite kan met behulp van het voorgaande aangetoond worden *dat iedere compacte, samenhangende sectie* S *in* X *een boog is, of homeomorf met een cirkel*. Om dat in te zien moet lemma (2.56) als volgt aangepast worden: als S een compacte, samenhangende η-sectie in (X,D,π) is en W een omgeving van S, dan is er een lokale representatie $(Q,\eta;U)$ van (X,D,π) waarin Q compact, boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend is, $S \subset Q$,U een omgeving van S, en $U \subset W$.
(Het bewijs van deze uitspraak is geheel analoog aan dat van (2.56), met een beroep op (2.43) i.p.v. op (2.44). Merk op, dat bij iedere omgeving U_1 van S er een gesloten omgeving V van S is zo dat $V \subset U_1$, en V een Peano continuum; vgl. (2.50) en het bewijs van 2 in (2.43)).
Uit (2.57) volgt nu, dat ieder punt van Q een omgeving heeft waarvan de doorsnede met Q een boog is. Hieruit kan gemakkelijk afgeleid worden dat Q een eindige vereniging van bogen is die zo gerangschikt kunnen worden (evt. cyclisch) dat van twee opeenvolgende exemplaren het eindpunt van de eerste samenvalt met het beginpunt van de tweede, terwijl geen twee van deze bogen elkaar nog op andere wijze kunnen snijden. Dus Q is zelf een boog, of homeomorf met een cirkel, en de samenhangende, compacte deelverzameling S van Q is dan ook een boog of evt. homeomorf met een cirkel.
Een boog (of een homeomorf beeld van een cirkel) in X die (dat) tevens sectie is wordt wel een *transversaal* genoemd. Transversalen spelen een belangrijke rol in de kwalitatieve theorie der differentiaalvergelijkingen, welke rol ze, op grond van het voorafgaande, ook in de theorie der vlakke dynamische systemen kunnen spelen. In het nu volgende zullen we hiervan een paar aspecten belichten.

(2.61) Indien $(Q,\eta;U)$ een lokale representatie is van (X,D,π) in een punt $x \in X$, zo dat Q een boog is, zeg met parametervoorstelling ψ (dat wil zeggen, ψ: $[0,1] \to X$ is een topologische inbedding, en $\psi[0,1] = Q$), dan wordt er door

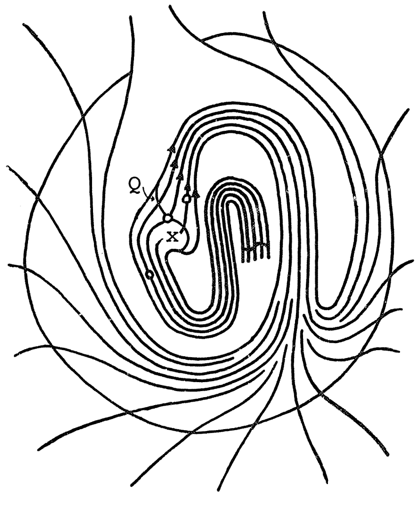
$$f\colon (\xi,t) \mapsto \pi(\psi(\xi),t) \; : \; [0,1] \times I_\eta \to U \subset X \subset \mathbb{R}^2$$

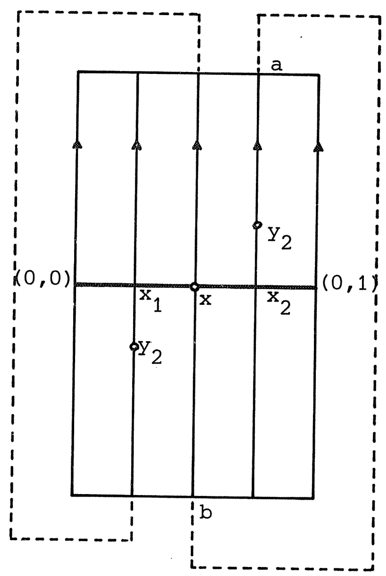
een topologische inbedding van $[0,1] \times I_\eta$ in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd met beeld U (vgl. ook het bewijs van (2.57)1). Uit de stelling van Brouwer over de invariantie van het domein volgt dan dat f de inwendige punten van $[0,1] \times I_\eta$ afbeeldt op inwendige punten van U, en

randpunten van $[0,1] \times I_\eta$ op randpunten van U (inwendige en rand van $[0,1] \times I_\eta$ en U als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$, maar omdat $U \subset X$, X open in $\mathbb{R}^2$ en U compact, dus gesloten in $\mathbb{R}^2$, komt dit voor U op hetzelfde neer als inwendige en rand in X). In het bijzonder is x een inwendig punt van U, dus het punt $(\psi^{-1}(x),0) = f^{-1}(x)$ is een inwendig punt van $[0,1] \times I_\eta$. Met andere woorden, $x \in \psi((0,1))$, en zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat $x = \psi(\frac{1}{2})$.
Als $(\xi,t) \in [0,1] \times I_\eta$ en $u \in \mathbb{R}$ is zo dat $u + t \in I_\eta$, dan is $(\psi(\xi),t+u) \in D$, $\pi(\psi(\xi),t+u) \in U$, en

$$f(\xi,t+u) = \pi(\psi(\xi),t+u) = \pi(\pi(\psi(\xi),t),u) = \pi(f(\xi,t),u).$$

Indien we nu U identificeren met $[0,1] \times I_\eta$ via het homeomorfisme f, dan "is" dus U een rechthoek in $\mathbb{R}^2$, de rand van U (in X) "is" juist de rand van deze rechthoek, Q "is" het lijnstuk $[0,1] \times \{0\}$, en de doorsneden van banen in X met U zijn leeg, of het "zijn" lijnstukken $\{\xi\} \times I_\eta$ met $0 \le \xi \le 1$. Voor ieder punt $x \in Q$ heeft de tweede coördinaat in $[0,1] \times I_\eta$ van het punt $\pi(x,u)$ hetzelfde teken als u: $\pi(x,u)$ ligt "boven" $[0,1] \times \{0\}$ als $u > 0$ en "beneden" $[0,1] \times \{0\}$ als $u < 0$.





Volgens de stelling van Schoenflies)1 bestaat er een homeomorfisme $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zo dat de restrictie van F tot de rand van U samenvalt met de restrictie van f tot de rand van U. Het binnengebied (buitengebied) van de rand van U wordt door F op het binnengebied (buitengebied) van $[0,1] \times I_\eta$ afgebeeld. Als nu $F': \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd door

$$F'(p) := \begin{cases} F(p) \text{ als } p \notin U \\ \\ f(p) \text{ als } p \in U \end{cases}$$

dan is F' een homeomorfisme van $\mathbb{R}^2$ op $\mathbb{R}^2$, en $F'|_U = f$. Uit de stelling van Brouwer over de invariantie van het domein volgt, dat $F'(X)$ open in $\mathbb{R}^2$ is. Het is duidelijk dat op $F'(X)$ nu een lokaal dynamisch systeem gedefinieerd kan worden zo dat F' een equitempisch isomorfisme van X op dit nieuwe systeem induceert. Alle eigenschappen van (X,D,π) die invariant zijn onder equitempische isomorfismen heeft dit nieuwe systeem ook, en omgekeerd. Voor de bestudering van deze eigenschappen kunnen we dus evengoed het nieuwe systeem bekijken als (X,D,π) zelf. Het nieuwe systeem heeft echter de eigenschap dat de omgeving U van x correspondeert met de rechthoek $[0,1] \times I_\eta$, waarover allerlei uitspraken die intuitief duidelijk zijn, ook gemakkelijk bewezen kunnen worden.

<u>Conclusie</u>: *Als* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem is, waarin* X *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^2$ *is, en* $x \in X$ *is geen evenwichtspunt, dan mogen we aannemen dat* x *de coördinaten* $(\frac{1}{2},0)$ *heeft, en dat* $U := [0,1] \times I_\eta$ *voor zekere* $\eta > 0$ *een omgeving van* x *in* X *is. Voor elk punt* $y := (\xi,s) \in U$ *is* $I_\eta - s \subset J(y)$, *en voor* $t \in I_\eta - s$ *is dan* $\pi((\xi,s),t) = (\xi,s+t)$.
Deze aanname mag echter uitsluitend gemaakt worden als het gaat om de bestudering van eigenschappen van (X,D,π) *die invariant zijn onder equitempische isomorfismen* (zie bijv. (1.66); we maken de lezer er

---

)1 Een stelling die de meeste wiskundigen zonder meer geloven, evenals de stelling van Jordan over gesloten krommen in $\mathbb{R}^2$. De stelling spreekt uit, dat ieder homeomorfisme van $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$ voortgezet kan worden tot een homeomorfisme van $\mathbb{R}^2$ op $\mathbb{R}^2$.

op attent dat in de literatuur ook begrippen voorkomen in de definitie waarvan méér dan alleen de topologische structuur van X gebruikt wordt. Een voorbeeld hiervan is het begrip Lyapunov-stabiel. Als (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem is waarin X een metrische ruimte is, dan heet een punt $x \in X$ *Lyapunov-stabiel* als $\{\pi^t \mid t \in J(x)\}$ equicontinu is in het punt x[1] met betrekking tot de gegeven metriek op X.
In het vervolg zullen we bovenvermelde aanname, waar mogelijk, steeds maken voorzover het nuttig is ter vermijding van gecompliceerd formalisme. Bij beweringen omtrent de beweging op $U = [0,1] \times I_\eta$ zullen we dan vaak een beroep doen op het meetkundig inzicht van de lezer. Om een voorbeeld te noemen:

(2.62) (Notatie als in de Conclusie van (2.61); zie ook de figuur op pag.85.) Zij $y_i \in U$, zeg $y_i = \pi(x_i,t_i)$ met $x_i \in Q := [0,1] \times \{0\}$ en $t_i \in I_\eta$ $(i = 1,2)$, en neem aan, dat $y_1 \in \Gamma^+(y_2)$. Dan zijn er de volgende, elkaar uitsluitende mogelijkheden:

(i) $x_1 = x_2$, $t_2 \le t_1 \le \frac{1}{2}\eta$ en $y_1 = \pi(y_2,t_1-t_2)$;

(ii) zij $y_1 = \pi(y_2,t)$ met $t > 0$; dan bevat $\pi(\{y_2\} \times [0,t])$ een boog $\widehat{ab}$ waarin a een punt van de "bovenrand" van U is, b een punt van de "benedenrand" van U, en $\widehat{ab} \cap U^0 = \emptyset$.

Immers, als geval (i) zich niet voordoet dan is er een $s' > 0$ zo dat $\pi(y_2,s') \in Q$; omdat dergelijke waarden van s' onderlinge afstand $\ge \eta$ hebben (Q is een η-sectie!) is er een kleinste $s > 0$ met $\pi(y_2,s) \in Q$. Neem dan voor a het punt op de bovenrand van U dat correspondeert met y_2 (dus $a = \pi(x_2,\frac{1}{2}\eta)$) en voor b het punt op de benedenrand van U dat correspondeert met $\pi(y_2,s)$. Merk op, dat b het punt is waar $\Gamma^+(y_2)$ "voor het eerst" weer U binnenkomt na U in het punt a verlaten te hebben.

---

[1] Gewoonlijk eist men ook nog dat $J(x) = \mathbb{R}$, maar dat is in dit verband niet van belang.

6. Limietverzamelingen in vlakke dynamische systemen

Bij de afleiding van de resultaten in deze paragraaf voor vlakke dynamische systemen zal wezenlijk gebruik gemaakt worden van de scheidingsstelling van JORDAN voor het platte vlak (dat we voortdurend met $\mathbb{R}^2$ zullen identificeren)[1]. In verband hiermee zullen we eerst deze stelling, tesamen met enige andere eigenschappen van gesloten Jordankrommen, formuleren.

(2.63) DEFINITIE. Een *gesloten Jordankromme* in een topologische ruimte Y is een topologische inbedding $p: \mathbb{S}^1 \to Y$ van de eenheidscirkel in Y. Evenmin als bij bogen zullen we hier een scherp onderscheid maken tussen de afbeelding p en de verzameling $p(\mathbb{S}^1)$. We zullen daarom vaak spreken van een gesloten Jordankromme K in Y (waarmee we dan een homeomorf beeld van $\mathbb{S}^1$ in Y bedoelen).

(2.64) VOORBEELD. *Indien* $\widehat{axb}$ *en* $\widehat{ayb}$ *twee bogen in* Y *zijn zo dat* $\widehat{axb} \cap \widehat{ayb} = \{a,b\}$, *dan is hun vereniging* $\widehat{axb} \cup \widehat{ayb}$ *een gesloten Jordankromme.* (Immers, als $p: [0;1] \to Y$ en $q: [0;1] \to Y$ parametriseringen van de gegeven bogen zijn dan is $p(t) \neq q(s)$ voor $s, t \in (0;1)$, $p(0) = q(0)$ en $p(1) = q(1)$. Dus door

$$r(e^{it}) := \begin{cases} p(t/\pi) & \text{voor } 0 \le t \le \pi \\ q(2-t/\pi) & \text{voor } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

wordt een continue bijectie, en dus een homeomorfisme r van $\mathbb{S}^1$ op de vereniging der beide bogen gedefinieerd).

(2.65) STELLING. (JORDAN). *Als* K *een gesloten Jordankromme in* $\mathbb{R}^2$ *is dan is* $\mathbb{R}^2 \backslash K = U \cup V$ *waarin* U *en* V *twee niet-lege, samenhangende, open en onderling disjuncte deelverzamelingen van* $\mathbb{R}^2$ *zijn. Voorts is* $\bar{U} \cap \bar{V} = K$ *of, equivalent hiermee,* $\bar{U} \backslash U = \bar{V} \backslash V = K$ *(en dus* $\bar{U} = U \cup K$, $\bar{V} = V \cup K$).

---

1) Om onderscheid tussen coordinaatgrepen en open intervallen te kunnen maken, zullen we in het vervolg een open interval $\{\xi \mid a<\xi<b\}$ aanduiden met $(a;b)$. Gesloten en half open intervallen zullen we, analoog hiermee, aangeven met $[a;b]$, $[a;b)$ en $(a;b]$.

BEWIJS. Zie [D], p.358. □

(2.66) OPMERKINGEN EN DEFINITIES. De verzamelingen U en V in (2.65) zijn de componenten van $\mathbb{R}^2\backslash K$. Uit de stelling van SCHOENFLIES (zie de voetnoot op pag. 86) volgt, dat er een homeomorfisme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is met $f(\mathbb{S}^1) = K$.)1 Door f worden de componenten van $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$ afgebeeld op de componenten U en V van $\mathbb{R}^2\backslash K$. Omdat precies één van de componenten van $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$ een compacte afsluiting heeft, geldt hetzelfde voor precies één van de componenten van $\mathbb{R}^2\backslash K$; deze component (de begrensde component van $\mathbb{R}^2\backslash K$) zullen we het *binnengebied* van K noemen.
Notatie: $\mathit{ins}(K)$ of $\mathit{ins}K$.
De andere component van $\mathbb{R}^2\backslash K$ zullen we het *buitengebied van* K noemen.
Notatie: $\mathit{outs}(K)$ of $\mathit{outs}K$.
Merk op, dat $\mathit{outs}(K)$ gekarakteriseerd wordt door de eigenschap dat $\mathit{outs}(K)$ in geen enkele compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ bevat is (dus $\mathit{outs}(K)$ is de onbegrensde component van $\mathbb{R}^2\backslash K$).

(2.67) EIGENSCHAPPEN VAN GESLOTEN JORDANKROMMEN. *Laat* K *een gesloten Jordankromme in* $\mathbb{R}^2$ *zijn.*

1. *Als* $S \subset \mathbb{R}^2$ *samenhangend is en* $S \cap K = \emptyset$, *dan is* $S \subset \mathit{ins}(K)$ *of* $S \subset \mathit{outs}(K)$.
2. *De verzamelingen* $\mathit{ins}(K)$, $\mathit{outs}(K)$ *en hun afsluitingen zijn boogsamenhangend. Voor ieder punt* $x \in \mathit{outs}(K)$, *resp.* $x \in \mathit{ins}(K)$, *en ieder punt* $y \in K$ *bestaat er zelfs een boog* $\widehat{xy}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *zo dat* $\widehat{xy}\backslash\{x\} \subset \mathit{outs}(K)$, *resp.* $\widehat{xy}\backslash\{x\} \subset \mathit{ins}(K)$.
3. *Als ook* K' *een gesloten Jordankromme is, en* $K' \subset \mathit{ins}(K)$, *dan is* $K \subset \mathit{outs}(K')$; *ook is dan* $\mathit{ins}(K') \subset \mathit{ins}(K)$ *en* $\mathit{outs}(K') \supset \mathit{outs}(K)$.
4. *Zij* F *een gesloten deelverzameling van* $\mathbb{R}^2$, *als* $F \subset \mathit{outs}(K)$, *dan is er een gesloten Jordankromme* K_1 *met* $F \subset \mathit{outs}(K_1)$ *en* $K \subset \mathit{ins}(K_1)$. *Evenzo, als* $F \subset \mathit{ins}(K)$, *dan is er een gesloten Jordankromme* K_2 *met* $F \subset \mathit{ins}(K_2)$ *en* $K_2 \subset \mathit{ins}(K)$.

BEWIJS.

1. Triviaal.
2. Op grond van de stelling van SCHOENFLIES mogen we aannemen dat $K = \mathbb{S}^1$, in welk geval de bewering triviaal is.

)1 In feite is (2.65) een direct gevolg van de stelling van SCHOENFLIES.

3. Als $K' \subset \mathit{ins}(K)$, dan is $K \cap K' = \emptyset$. Omdat K samenhangend is, volgt uit 1, dat $K \subset \mathit{ins}(K')$ of $K \subset \mathit{outs}(K')$. Kies $x \in K$ en $y \in \mathit{outs}(K) \cap \mathit{outs}(K')$ (deze doorsnede is niet leeg omdat het complementen van compacte verzamelingen betreft). Wegens 2 is er een boog $\widehat{xy}$ in $\mathbb{R}^2$ zo dat $\widehat{xy}\setminus\{x\} \subset \mathit{outs}(K)$. Indien $K \subset \mathit{ins}(K')$, dan zou $x \in \mathit{ins}(K')$, dus $\widehat{xy} \cap K' \neq \emptyset$. Dit is in tegenspraak met $K' \subset \mathit{ins}(K)$ en $\widehat{xy}\setminus\{x\} \subset \mathit{outs}(K)$; dus is $K \subset \mathit{outs}(K')$.
Neem nu aan, dat $\mathit{ins}(K') \not\subset \mathit{ins}(K)$, dat wil zeggen $\mathit{ins}(K') \cap \overline{\mathit{outs}(K)} \neq \emptyset$. Omdat $\mathit{ins}(K')$ open is, volgt hieruit, dat $\mathit{ins}(K') \cap \mathit{outs}(K) \neq \emptyset$.
Anderzijds is $\mathit{ins}(K') \cap \mathit{ins}(K) \neq \emptyset$ (immers, kies $x \in K' \subset \mathit{ins}(K)$ en zij V een omgeving van x met $V \subset \mathit{ins}(K)$; dan is $V \cap \mathit{ins}(K') \neq \emptyset$, dus $\mathit{ins}(K) \cap \mathit{ins}(K') \neq \emptyset$). Omdat $\mathit{ins}(K')$ samenhangend is, volgt hieruit, dat $\mathit{ins}(K') \cap K = \emptyset$, in strijd met $K \subset \mathit{outs}(K')$.

4. Op grond van de stelling van SCHOENFLIES mogen we aannemen dat $K = \mathbb{S}^1$, in welk geval de bewering triviaal is. □

(2.68) NOTATIE. In deze paragraaf is (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem, waarin X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is. Als $x_0 \in X$ geen evenwichtspunt is - we zullen x_0 dan ook wel een *bewegend punt* noemen - dan is (X,D,π) lokaal parallelliseerbaar in x_0 en bij iedere omgeving van x_0 is er een lokale representatie van (X,D,π) in x_0 van de gedaante, beschreven in (2.61). Ter vereenvoudiging van de notatie zullen we aannemen dat x_0 niet de coördinaten $(\frac{1}{2},0)$ heeft, maar $(0,0)$, dat $Q = [-1;1] \times \{0\}$ en dat Q een 2η-sectie is. Dus we hebben de lokale representatie $(Q,2\eta;U)$ in $x_0 = (0,0)$, en $U = [-1;1] \times [-\eta;\eta]$. Voor $x = (\xi,t) \in U$ en $s \in [-\eta-t;\eta-t]$ is dan $s \in J(x)$, en $\pi(x,t) = (\xi,t+s)$.

(2.69) LEMMA. *Zij $x_0 \in X$ een bewegend punt, en laat $(Q,2\eta;U)$ een lokale representatie zijn van (X,D,π) in x_0 zoals beschreven in (2.68). Zij voorts $x \in X$. In elk van de volgende gevallen*

(a) $x_0 \in \Omega(x)$ *of* $x_0 \in A(x)$;

(b) x_0 *is periodiek en x behoort tot een voldoend kleine omgeving van* x_0;

geldt [1]:

[1] Zie ook de figuren in (2.70) op pag. 92.

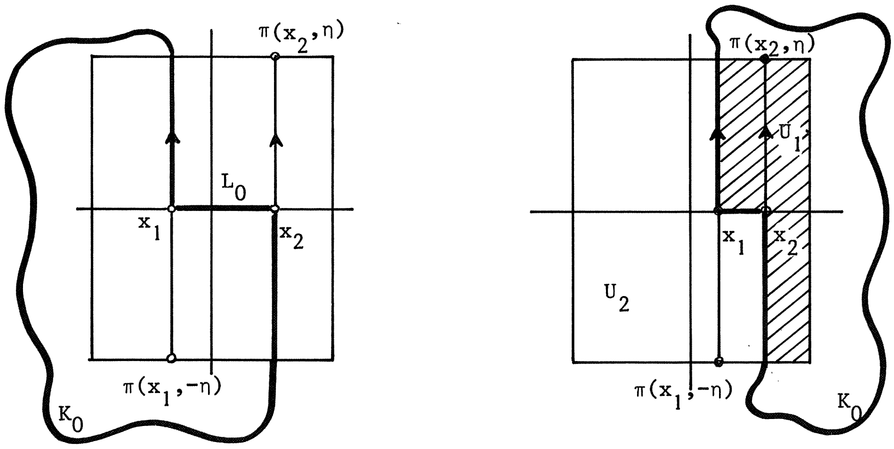
Er zijn punten $x_i := \pi(x,t_i) \in Q \cap \Gamma(x)$ $(i=1,2)$ *zo, dat*

1. *Voor* $i = 1,2$ *is* $x_i = (\xi_i,0)$ *met* $-1 < \xi_i < 1$; *voorts is* $t_2 > t_1 + 2\eta$ *en* $\pi(x,t) \notin U$ *voor* $t_1 + \eta < t < t_2 - \eta$.
2. *De vereniging van het baansegment* $\pi_x[t_1;t_2]$ *van* $\Gamma(x)$ *en het verbindingssegment* L_0 *van de punten* x_1 *en* x_2 *is een gesloten Jordankromme* K_0 *die geheel bevat is in* X.

Als $x_0 \in \Omega(x)$ *(resp.* $x_0 \in A(x)$*) geldt bovendien dat er bij elke* $s \in \mathbb{R}$ *waarden* $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ *zijn met de in* 1 *en* 2 *beschreven eigenschappen, en waarvoor* $t_1 > s$ *(resp.* $t_2 < s$*).*

BEWIJS. Als $x_0 \in \Omega(x)$ of $x_0 \in A(x)$, dan is $\pi(x,t) \in U^0$ voor willekeurig grote waarden van $|t|$. Hieruit volgt gemakkelijk dat $\pi(x,t) \in (-1;1) \times \{0\} \subset Q$ voor oneindig veel waarden van t, welke waarden een onderling verschil hebben van minstens 2η (Q is immers een 2η-sectie). Laten t_1 en t_2 twee *opeenvolgende* waarden zijn van t met $\pi(x,t_i) \in (-1;1) \times \{0\}$ $(i = 1,2)$.
Ga in geval (b) als volgt te werk: merk eerst op, dat $p(x_0) > 2\eta$ (immers, $x_0 \in Q$ en $\pi(x_0,p(x_0)) \in Q$, en Q is een 2η-sectie). Er is een omgeving V van x_0 zo dat voor alle $x \in V$ geldt: $\pi(x,kp(x_0)) \in U^0$ voor $k = 1,2$. Bij elke $x \in V$ zijn er dan waarden s_1 en s_2 met $\pi(x,s_k) \in (-1;1) \times \{0\}$ zo dat $|s_k-kp(x_0)| < \eta$ voor $k = 1,2$. Merk op, dat $|s_1-s_2| \geq |2p(x_0)-p(x_0)| - |s_2-2p(x_0)| - |s_1-p(x_0)| > 0$, dus $s_1 \neq s_2$; met andere woorden, $\pi(x,t) \in Q$ voor minstens twee verschillende waarden van t. Laten t_1 en t_2 weer twee *opeenvolgende* waarden zijn van t met $\pi(x,t_i) \in (-1;1) \times \{0\}$ $(i = 1,2)$.
Het is duidelijk, dat in beide gevallen 1 geldt (vgl. ook het betoog in (2.62)). Wat 2 betreft, er zijn twee mogelijkheden: als $x_i := \pi(x,t_i)$ voor $i = 1,2$, dan is $x_1 = x_2$, of $x_1 \neq x_2$.
Als $x_1 = x_2$ is $L_0 = \{x_1\}$ een ontaard segment, en $K_0 = \pi_x[t_1;t_2] = \Gamma(x_1)$ is homeomorf met een cirkel, dus een gesloten Jordankromme (vgl. (1.29)). Als $x_1 \neq x_2$, dan is, omdat $L_0 \subset Q$ en $\pi(x,t) \notin Q$ voor $t_1 < t < t_2$, $L_0 \cap \pi_x[t_1;t_2] = \{x_1,x_2\}$. Op grond van (2.64) is het nu voldoende om te laten zien dat $\pi_x[t_1;t_2]$ een boog is. Hiertoe is het voldoende om te bewijzen dat π_x injectief is op $[t_1;t_2]$. Welnu, neem aan dat $\pi(x,s) = \pi(x,s')$ met $t_1 \leq s < s' \leq t_2$. Dan is $s > t_1 + \eta$ en $s' < t_2 - \eta$, en dus $\pi_x[s;s'] \subset \mathbb{R}^2\setminus U$. Maar dan is x periodiek en $\Gamma(x_i) = \Gamma(x) = \pi_x[s;s'] \subset \mathbb{R}^2\setminus U$. Dit is in strijd met de keus van $x_i \in \Gamma(x) \cap U$ $(i = 1,2)$. Hieruit volgt het gestelde. □

(2.70) Laten x_0 en $(Q,2\eta;U)$ zijn als in (2.69) en laat $x \in X$ een punt zijn waarvoor (om welke redenen dan ook) de conclusies 1 en 2 van (2.69) gelden. Neem bovendien aan, dat $x_1 \neq x_2$, dus $\xi_1 \neq \xi_2$.[1] Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen, dat $\xi_1 < \xi_2$. Dus $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.
Dan is $\pi(x_2,\eta) \notin L_0$ en ook $\pi(x_2,\eta) \notin \pi_x[t_1;t_2]$, dus $\pi(x_2,\eta) \notin K_0$.
Daarom is $(x_2,\eta) \in \mathit{outs}(K_0)$ of $\pi(x_2,\eta) \in \mathit{ins}(K_0)$.



In het nu volgende zullen we aannemen, dat $\pi(x_2,\eta) \in \mathit{ins}(K_0)$. Analoge resultaten kunnen verkregen worden als $\pi(x_2,\eta) \in \mathit{outs}(K_0)$, door consequent $\mathit{ins}(K_0)$ en $\mathit{outs}(K_0)$ te verwisselen (we maken nergens gebruik van de begrensdheid van $\mathit{ins}(K_0)$).

(2.71) LEMMA. *Met de notatie en de aannamen uit (2.70) gelden de volgende uitspraken:*

1. $\Gamma(x) \cap L_0 = \{x_1,x_2\}$ *en* $\Gamma(x) \cap K_0 = \pi_x[t_1;t_2]$.
2. *Voor* $z \in L_0\backslash\{x_1\}$ *en* $t \in J(z)$, $t > 0$, *is* $\pi(z,t) \in \mathit{ins}(K_0)$;
   voor $z \in L_0\backslash\{x_2\}$ *en* $t \in J(z)$, $t < 0$, *is* $\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K_0)$;
   voor $z \in L_0\backslash\{x_2\}$ *en* $t \in J(z)$, $t < 0$, *is* $\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K_0)$;
   bovendien is $X \cap \mathit{ins}(K_0)$ *positief invariant, en* $X \cap \mathit{outs}(K_0)$ *is negatief invariant.*
3. *Als* $z \in X \cap \mathit{outs}(K_0)$ *en* $\Gamma(z) \cap \mathit{ins}(K_0) \neq \emptyset$, *dan is* $\Gamma(z) \cap L_0 \neq \emptyset$,

[1] Het is duidelijk, dat $x_1 \neq x_2$ als gegeven is dat het punt x niet periodiek is. We zullen omgekeerd in (2.71) laten zien dat uit de aanname $x_1 \neq x_2$ volgt dat x niet periodiek is.

en wel is òf $z \in \Gamma(x)$ *en* $\Gamma(z) \cap L_0 = \{x_1,x_2\}$, *òf* $z \notin \Gamma(x)$ *en* $\Gamma(z) \cap L_0 = \{z'\}$ *met* $z' \neq x_1$, $z' \neq x_2$. *In beide gevallen is* $\Gamma(z) \cap L_0 \subset \Gamma^+(z)$.

Definieer vervolgens $T := \bigcup\{\Gamma(z) \mid z \in L_0\}$. *Dan geldt:*

4. T *is een open, invariante deelverzameling van* X *(dus ook open in* $\mathbb{R}^2$*) en* $x \in T$.
5. *Geen enkel punt van* T *is periodiek; in het bijzonder is* x *niet periodiek.*
6. *Voor alle* $z \in X$ *is* $A(z) \cup \Omega(z)$ *disjunct met* T, *in het bijzonder is* $x \notin A(z) \cup \Omega(z)$; *voorts geldt voor alle* $z \in T$, *dat* $A(z) \subset \mathit{outs}(K_0)$ *en* $\Omega(z) \subset \mathit{ins}(K_0)$.

BEWIJS. (Zie ook de rechter figuur in (2.70).) Alle punten die met $\pi(x_2,\eta)$ verbonden kunnen worden door middel van een boog die K_0 niet snijdt behoren tot $\mathit{ins}(K_0)$. Hieruit volgt, dat

$$U_1 := \{(\xi,s) \in U \mid \xi > \xi_1 \ \& \ s > 0\} \cup \{(\xi,s) \in U \mid \xi > \xi_2 \ \& \ s \leq 0\}$$

geheel bevat is in $\mathit{ins}(K_0)$. Zij nu

$$U_2 := U \setminus (U_1 \cup K_0).$$

Omdat x_1 een randpunt van $\mathit{outs}(K_0)$ is, is $U \cap \mathit{outs}(K_0) \neq \emptyset$. Uit het bovenstaande volgt dan, dat $U_2 \cap \mathit{outs}(K_0) \neq \emptyset$. Aangezien alle punten van U_2 onderling verbonden kunnen worden door een boog die K_0 niet snijdt, volgt hieruit dat $U_2 \subset \mathit{outs}(K_0)$. In het bijzonder is dus

(2.72) $$\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K_0) \qquad \text{voor } z \in L_0,\ z \neq x_2 \text{ en } -\eta \leq t < 0.$$

We tonen nu eerst aan, dat $\Gamma^+(\pi(x_2,\eta)) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Neem aan dat dat niet zo is: dan is er een kleinste niet-negatieve t' met $\pi(x_2,\eta+t') \in K_0$; omdat $\pi(x_2,\eta) \notin K_0$, is $t' > 0$. Merk op, dat $\pi_{x_2}[\eta;\eta+t') \subset \mathit{ins}(K_0)$. Indien $\pi(x_2,\eta+t') \in L_0 \setminus \{x_2\}$, dan volgt met behulp van (2.72) gemakkelijk, dat $\pi_{x_2}[\eta;\eta+t'] \cap \mathit{outs}(K_0) \neq \emptyset$, in strijd met het voorgaande. Dus $\pi(x_2,\eta+t') \in \pi_x(t_1;t_2]$, zeg

$$\pi(x_2,\eta+t') = \pi_x(t'') = \pi(x_2,t''-t_2)$$

met $t_1 < t'' \leq t_2$. Omdat $\eta + t' \neq t'' - t_2$ (immers, $t''-t_2 \leq 0 < \eta < \eta+t'$)

volgt hieruit dat x_2 periodiek is, en

$$\Gamma(x_2) = \Gamma^+(x_2) = \pi_{x_2}[0;\eta+t'] \cup \pi_x[t";t_2].$$

Hieruit volgt, dat $x_1 \notin \Gamma(x_2)$: tegenspraak, dus inderdaad is $\Gamma^+(\pi(x_2,\eta)) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Omdat $\pi_{x_2}(0;\eta] \subset U_1 \subset \mathit{ins}(K_0)$ volgt hieruit, dat $\pi(x_2,t) \in \mathit{ins}(K_0)$ voor alle $t \in J(x_2)$ met $t > 0$. Op geheel analoge wijze toont men aan, uitgaande van $\pi(x_1,-\eta) \in \mathit{outs}(K_0)$ (vgl. (2.72)) dat $\pi(x_1,t) \in \mathit{outs}(K_0)$ voor alle $t \in J(x_1)$ met $t < 0$. Met andere woorden,

(2.73) $$\pi(x,t) \in \begin{cases} \mathit{outs}(K_0) & \text{voor} \quad t < t_1,\ t \in J(x); \\ \mathit{ins}(K_0) & \text{voor} \quad t > t_2,\ t \in J(x). \end{cases}$$

Hiervan is <u>1</u> een direct gevolg.
Beschouw nu een punt $z \in L_0\backslash\{x_1,x_2\}$. Dan is $\pi(z,\eta) \in U_1 \subset \mathit{ins}(K_0)$. Als $\Gamma^+(\pi(z,\eta)) \notin \mathit{ins}(K_0)$, dan is $\Gamma^+(\pi(z,\eta)) \cap K_0 \neq \emptyset$. Op grond van <u>1</u> is $z \notin \Gamma(x)$, ofwel $\Gamma(z) \cap \Gamma(x) = \emptyset$. Derhalve is $\Gamma^+(\pi(z,\eta)) \cap K_0 \subset L_0\backslash\{x_1,x_2\}$. Indien s' de kleinste niet-negatieve waarde is waarvoor $\pi(z,\eta+s') \in L_0$, dan moet $\pi_z[\eta;\eta+s') \subset \mathit{ins}(K_0)$. Anderzijds volgt met behulp van (2.72) en het feit dat $s' > 0$, dat $\pi_z[\eta;\eta+s') \cap \mathit{outs}(K_0) \neq \emptyset$. Tegenspraak, dus $\Gamma^+(\pi(z,\eta)) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Hieruit volgt, dat

$$\pi(z,t) \in \mathit{ins}(K_0) \quad \text{voor alle} \quad t \in J(z), \quad t > 0.$$

Op geheel analoge wijze blijkt voor $z \in L_0\backslash\{x_1,x_2\}$ dat

$$\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K_0) \quad \text{voor alle} \quad t \in J(z), \quad t < 0.$$

Wat er voor $z = x_1$ of $z = x_2$ geldt staat vermeld in (2.73). Hiermee is het eerste gedeelte van <u>2</u> aangetoond.
Beschouw nu $z \in \mathit{ins}(K_0)$. Als $\Gamma^+(z) \notin \mathit{ins}(K_0)$, dan is $\Gamma^+(z) \cap K_0 \neq \emptyset$. Als $\Gamma^+(z) \cap \pi_x[t_1;t_2] \neq \emptyset$, dan is $\Gamma(z) = \Gamma(x)$, en op grond van het voorgaande is dan $z \in \Gamma^+(x_2)$, en dus $\Gamma^+(z) \subset \Gamma^+(x_2) \subset \mathit{ins}(K_0)$, in strijd met de aanname. Dus moet $\Gamma^+(z) \cap L_0\backslash\{x_1,x_2\} \neq \emptyset$, dat wil zeggen, er is een $t > 0$ zo dat $z' := \pi(z,t) \in L_0\backslash\{x_1,x_2\}$. Maar dan

zou $z = \pi(z',-t) \in \mathit{outs}(K_0)$. Dus inderdaad $\Gamma^+(z) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Uit (1.37) en (1.38) volgt dan, dat $X \cap \mathit{outs}(K_0) = (X\backslash \mathit{ins}(K_0))^0$ negatief invariant is. Hiermee is $\underline{2}$ geheel bewezen, en ook $\underline{3}$ volgt hieruit zonder veel moeite.

Als voorbereiding op $\underline{5}$ en $\underline{6}$ tonen we alvast het volgende aan: voor elke $z \in L_0$ geldt:

(2.74) $\quad$ z is geen periodiek punt;

(2.75) $\quad \Omega(z) \cap L_0 = \emptyset \quad$ en $\quad A(z) \cap L_0 = \emptyset$.

Hoewel (2.74) een direct gevolg is van (2.75) (immers als z periodiek is, is $z \in \Gamma(z) \cap L_0 = \Omega(z) \cap L_0$), kan (2.74) gemakkelijk rechtstreeks bewezen worden: als $z \in L_0\backslash\{x_1\}$, dan is volgens $\underline{2}$ $\pi^t(z) \in \mathit{ins}(K_0)$ voor alle $t \in J(z)$, $t > 0$; dus $\pi^t(z) \neq z$ voor $t > 0$, ofwel z is niet periodiek; dat x_1 niet periodiek is, volgt uit het feit dat x_2 het niet is, want $x_2 \in \Gamma(x_1)$. Wat (2.75) betreft: stel er is $z' \in \Omega(z) \cap L_0$. We mogen aannemen, dat $z' \neq x_2$ (als $x_2 \in \Omega(z)$ dan is ook $x_1 \in \Omega(z)$ wegens de invariantie van $\Omega(z)$; zie (1.39)). Wegens de invariantie van $\Omega(z)$ is dan ook $\pi^{-\eta}(z') \in \Omega(z)$. Omdat $\pi^{-\eta}(z') \in \mathit{outs}(K_0)$, en $\mathit{outs}(K_0)$ open is, moet derhalve $\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K_0)$ voor willekeurig grote waarden van t. Anderzijds volgt uit $\underline{2}$, dat $\pi(z,t) \in \mathit{ins}(K_0)$ voor *alle* voldoend grote waarden van t (n.l. $t > t_2 - t_1$ als $z = x_1$, en $t > 0$ als $z \neq x_1$). Tegenspraak, dus $\Omega(z) \cap L_0 = \emptyset$. Evenzo: $A(z) \cap L_0 = \emptyset$.

Beschouw nu de verzameling

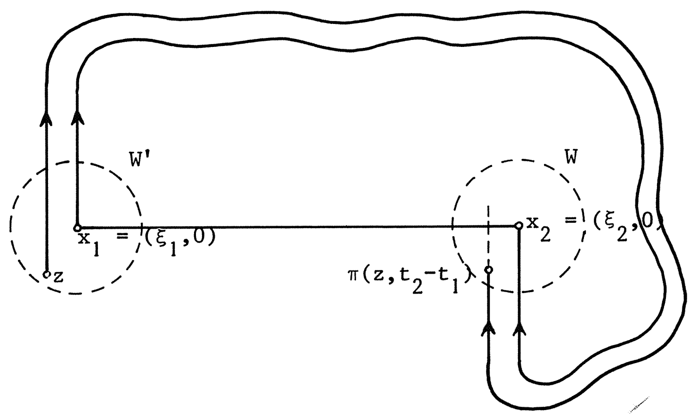
$$T := \cup\{\Gamma(z) \mid z \in L_0\}.$$

De enige niet-triviale bewering in $\underline{4}$ is, dat T open is. Het bewijs hiervan is als volgt:

Kies eerst een open cirkelschijf W om x_2 die geheel bevat is in U (hiervoor is het essentieel dat $\xi_2 < 1$), en zo, dat $x_1 \notin W$. Er is een open omgeving W' van x_1 zo dat

(2.76) $\quad \pi(z,t_2-t_1) \in W \quad$ voor $z \in W'$.

We mogen aannemen dat W' een open cirkelschijf om x_1 is die x_2 niet bevat en die bevat is in U. Zij nu $z \in W'$, zeg $z = (\zeta,u)$. In het ge-



val dat $\zeta \geq \xi_1$ is $\pi^{-u}(z) \in L_0$, en dus $\Gamma(z) \cap L_0 \neq \emptyset$. In het geval dat $\zeta < \xi_1$ is $z \in U_2 \subset \mathit{outs}(K_0)$. Als $\pi(z,t_2-t_1) \in \mathit{ins}(K_0)$, dan is $\pi(z,t) \in K_0$ voor zekere $t \in (0;t_2-t_1)$, en als $\pi(z,t_2-t_1) \in \mathit{outs}(K_0)$, dan volgt uit (2.76) direct dat $\pi(z,t) \in L_0$ voor zekere t met $|t-(t_2-t_1)| \leq \eta$. In alle gevallen is dus $\Gamma(z) \cap L_0 \neq \emptyset$ voor $z \in W'$, ofwel $W' \subset T$. Analoog: er is een open cirkelschijf W" om x_2 zo dat $W'' \subset T$. Het is evident, dat $V' := [\xi_1;\xi_2] \times [-\eta;\eta]$ geheel bevat is in T. Dus $V := V' \cup W' \cup W''$ is een omgeving van L_0 die bevat is in T. Omdat T invariant is, volgt hieruit dat

$$T = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \pi^t(L_0) \subset \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \pi^t(V^0) \subset T,$$

dat wil zeggen: $T = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \pi^t(V^0) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \pi^t(V^0 \cap X_t)$. Omdat $V^0 \cap X_t$ open is in X_t en π^t een homeomorfisme is van X_t op X_{-t}, is de verzameling $\pi^t(V^0 \cap X_t)$ open in X_{-t}, dus open in X (zie (1.13)). Dus T is, als vereniging van open verzamelingen, weer open. Hiermee is 4 bewezen.

Wat 5 betreft, dit volgt onmiddellijk uit de invariantie van T en (2.74) (vgl. ook (1.28)3).

Tenslotte 6: stel voor zekere $z \in X$ is $\Omega(z) \cap T \neq \emptyset$. Omdat T open is, volgt hieruit dat $\Gamma(z) \cap T \neq \emptyset$, en omdat T invariant is, is $z \in T$. Maar $\Omega(z) = \Omega(\pi^s z)$ voor alle $s \in J(z)$ (1.17), dus we mogen aannemen dat $z \in L_0$. Anderzijds volgt uit de aanname dat $\Omega(z) \cap T \neq \emptyset$ en het feit dat $\Omega(z)$ invariant is (1.39), dat $\Omega(z) \cap L_0 \neq \emptyset$. Dit is in strijd met (2.75). Dus $\Omega(z) \cap T = \emptyset$ en, geheel analoog, $A(z) \cap T = \emptyset$. Uit $\underline{2}$ volgt tenslotte, dat voor elke $z \in L_0$ geldt dat $\pi(z,t) \in \mathit{ins}(K_0)$ voor alle voldoend grote t, zodat $\Omega(z) \subset \overline{\mathit{ins}(K_0)} = \mathit{ins}(K_0) \cup K_0$ (dit is ook correct als $\Omega(z) = \emptyset$!). Omdat uit $\Omega(z) \cap K_0 \neq \emptyset$ zou volgen dat $\Omega(z) \cap L_0 \neq \emptyset$ (invariantie van $\Omega(z)$!), is $\Omega(z) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Uit (1.17) volgt dan, dat $\Omega(z) \subset \mathit{ins}(K_0)$ voor alle $z \in T$. Analoog: $A(z) \subset \mathit{outs}(K_0)$ voor alle $z \in T$. □

(2.77) PROPOSITIE. *Laat* $x \in X$ *en neem aan, dat* $x \in \Omega(z) \cup A(z)$ *voor zekere* $z \in X$. *Dan geldt voor* $\Omega(x)$ *juist één der volgende uitspraken:*

(i) $\Omega(x) = \emptyset$;

(ii) $\Omega(x) \neq \emptyset$ *en* $\Omega(x)$ *bevat uitsluitend evenwichtspunten;*

(iii) x *is een bewegend periodiek punt, dus* $\Gamma(x) = \Omega(x) = A(x)$.

Evenzo geldt voor $A(x)$ *juist één der volgende uitspraken:*

(i)' $A(x) = \emptyset$;

(ii)' $A(x) \neq \emptyset$ *en* $A(x)$ *bevat uitsluitend evenwichtspunten;*

(iii)' x *is een bewegend periodiek punt, dus* $\Gamma(x) = \Omega(x) = A(x)$.

BEWIJS. We tonen slechts de beweringen omtrent $\Omega(x)$ aan (voor $A(x)$ gaat het analoog). Neem aan, dat (i) en (ii) niet gelden. Er is dan een bewegend punt $x_0 \in \Omega(x)$. Dan voldoen x en x_0 aan de voorwaarde (a) uit (2.69). Als ook aan (iii) niet is voldaan, dan geldt, met de notatie van (2.69), dat $x_1 \neq x_2$. Op x zijn dus de conclusies van (2.71) van toepassing: in het bijzonder volgt uit (2.71)$\underline{6}$, dat $x \notin \Omega(z) \cup A(z)$, in strijd met de aanname. □

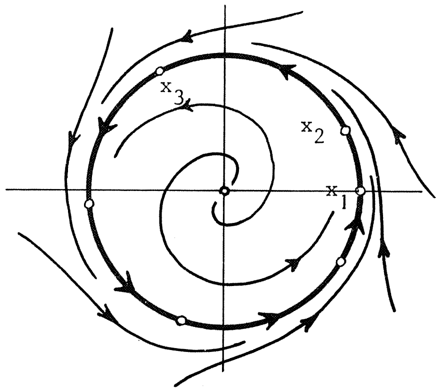
(2.78) Als $x \in \Omega(z) \cup A(z)$ voor zeker punt z, en x is *niet* periodiek, dan hangt de situatie wat $\Omega(x)$ betreft (geval (i) of geval (ii)) niet af van de situatie voor $A(x)$ (geval (i)' of geval (ii)'): alle vier mogelijke combinaties kunnen voorkomen. Hiertoe is het voldoende, een dynamisch systeem (X,D,π) te construeren met $x \in \Omega(z)$ waarvoor (ii) en (ii)' gelden met $A(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$. De restrictie van (X,D,π) tot $X\backslash A(x)$ is een systeem dat aan (ii) en (i)' voldoet. De restrictie van (X,D,π) tot $X\backslash\Omega(x)$ voldoet aan (i) en (ii)', en de restrictie van (X,D,π) tot $X\backslash(A(x) \cup \Omega(x))$ voldoet aan (i) en (i)'. (Bovengenoemde restricties zijn goed gedefinieerd, en weer systemen op open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$; zie (1.39), (1.37) en (1.41).)

Voorbeeld: beschouw de differentiaalvergelijking (in poolcoördinaten) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{dr}{dt} = (1-r^2)f(r,\phi),$$

$$\frac{d\phi}{dt} = f(r,\phi),$$

waarin $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^+$ een continue functie is met geisoleerde nulpunten x_i, alle gelegen op de cirkel $\mathbb{S}^1 = \{(r,\phi) \mid r = 1\}$. Het faseportret (= figuur met daarin getekend de banen) van het hierdoor gedefinieerde lokale dynamische systeem is als volgt (vgl. ook (1.9)3 en (1.73)):



Elk nulpunt x_i van f is evenwichtspunt van het systeem, $\{x_i\} = \Omega(x) = A(x')$ voor punten x en x' van $\mathbb{S}^1$, die op hun beurt behoren tot $\Omega(z)$ met $z = (r,\phi)$, $r \neq 1$.

<u>N.B.</u> Het voorbeeld in (1.9)3 levert een situatie op waarin ieder punt x van $\mathbb{S}^1$ tot $\Omega(z)$ behoort ($z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) en periodiek is.

(2.79) Zij $x \in X$ een bewegend periodiek punt, i.e. $\Gamma(x)$ is een gesloten Jordankromme (zie (1.29)). Dan heet $\Gamma(x)$ een *limietcykel* als er een $z \in X$ is, $z \notin \Gamma(x)$, zo dat $\Omega(z) = \Gamma(x)$. (In dit geval is $z \notin \Omega(z)$, dus z is niet periodiek.) Een equivalente formulering is: als $z \in X$ niet periodiek is, dan is $\Omega(z)$ een limietcykel als en slechts als $\Omega(z)$ de baan van een bewegend periodiek punt $x \in \Omega(z)$ is.
In dat geval is $\Gamma(z) \cap \Omega(z) = \emptyset$ (anders was $\Gamma(z) = \Gamma(x)$, in strijd met het feit dat z niet periodiek is), dus $\Gamma(z)$ ligt geheel aan één

kant van $\Omega(z)$: $\Gamma(z) \subset \mathit{ins}\,\Omega(z)$ of $\Gamma(z) \subset \mathit{outs}\,\Omega(z)$. Merk ook nog op, dat z positief Lagrange-stabiel is (1.56), zodat iedere omgeving van $\Omega(z)$ de verzameling $\pi_z[t;\infty)$ bevat voor voldoend grote t ((1.54); merk nog op, dat $\omega(z) = \infty$ omdat $\Omega(z) \neq \emptyset$). Daarom zegt men wel, dat $\Gamma(z)$ naar $\Omega(z)$ *spiraalt* (in [B] wordt de term "spiralen" iets algemener gebruikt: $\Gamma(z)$ "spiraalt" zodra $\Omega(z)$ een bewegend punt bevat, en z niet periodiek is).

Geheel analoog kan gedefinieerd worden wat het betekent dat $A(z)$ een limietcykel is, in welk geval men zegt, dat $\Gamma(z)$ naar $A(z)$ spiraalt.

N.B. Het kan voorkomen dat $A(z) = \Gamma(x) = \Omega(z')$ voor niet-periodieke punten $z, z' \in X$ en een bewegend periodiek punt $x \in X$. Dan is $\Gamma(x)$ dus "negatieve" limietcykel voor z en "positieve" limietcykel voor z'.

Voorbeeld: het systeem van (1.9)3, zo gewijzigd dat buiten de eenheidscirkel de banen "naar buiten toe" spiralen, i.e. het systeem, gedefinieerd door de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dr}{dt} = |1-r^2| \quad \text{en} \quad \frac{d\phi}{dt} = 1.$$

(2.80) PROPOSITIE. *Als in een vlak dynamisch systeem $\Omega(x)$ een bewegend punt bevat, dan is $\Omega(x) \cap A(x) = \emptyset$.*

BEWIJS. Zij $x_0 \in \Omega(x)$ een bewegend punt. Dan mogen (2.69) en (2.71) toegepast worden (merk op, dat $x_1 \neq x_2$ omdat x niet periodiek is). Er is dus een gesloten Jordankromme K_0 zo dat $\Omega(x) \subset \mathit{ins}(K_0)$ en $A(x) \subset \mathit{outs}(K_0)$ (of juist andersom). In elk geval is dan $\Omega(x) \cap A(x) = \emptyset$. □

(2.81) In het algemeen behoeft voor een niet-periodiek punt z in een vlak dynamisch systeem $A(z) \cap \Omega(z)$ niet leeg te zijn: neem het voorbeeld van (2.78) waarin f precies één nulpunt x_1 heeft, en neem voor z een punt van de eenheidscirkel, $z \neq x_1$. Dan is $A(z) = \Omega(z) = \{x_1\}$. In een niet-vlak dynamisch systeem behoeft (2.80) niet te gelden: beschouw de torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, opgevat als topologische quotientruimte van $\mathbb{R}^2$ onder de equivalentierelatie $\sim$, gedefinieerd door

$$(\xi_1,\xi_2)\sim(\zeta_1,\zeta_1) \iff \xi_i \equiv \zeta_i \pmod 1 \text{ voor } i = 1,2.$$

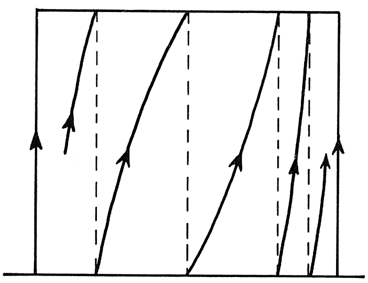
Door de differentiaalvergelijkingen

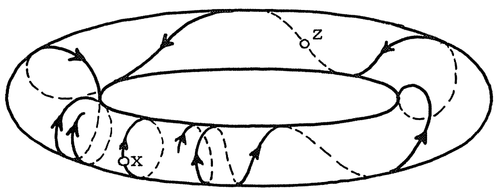
$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_1(1-\xi_1); \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = 1$$

wordt op $\mathbb{R}^2$ een lokaal dynamisch systeem gedefinieerd waarin de strook $\{(\xi_1,\xi_2) \mid 0 \leq \xi_1 \leq 1\}$ invariant is. De restrictie van het systeem tot deze strook is een globaal dynamisch systeem, waarvan de bewegingen gegeven worden door

$$\pi((\xi_1,\xi_2),t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi_1 e^t}{1+\xi_1(e^t-1)},\ t+\xi_2\right) & \text{als } 0 < \xi_1 < 1 \\ \\ (\xi_1, t+\xi_2) & \text{als } \xi_1 = 0 \text{ of } \xi_1 = 1. \end{cases}$$

Merk op, dat $\pi((\frac{1}{2},0),t) \in [x_n;x_{n+1}]$ voor $n \leq t \leq n+1$, waarbij $x_n := e^n(1+e^n)^{-1}$ voor $n \in \mathbb{Z}$.
Het dynamische systeem op bovengenoemde strook induceert (door reductie modulo 1 in de ξ_2-coördinaat) een dynamisch systeem op de torus, waarbij het punt $x := (0,0)$ periodiek is, en $\Gamma(z) = \Omega(z) = A(z)$ voor $z := (\frac{1}{2},0)$.





(2.82) PROPOSITIE. *Als* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem is met* X *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^2$*, en* $x \in X$ *is Poisson-stabiel, dan is* x *periodiek.*

BEWIJS. Als x Poisson-stabiel is, dan is $x \in \Omega(x)$. Uit (2.77) volgt dan dat x een evenwichtspunt is of een bewegend periodiek punt. □

(2.83) Uit (2.82) en (1.49) volgt dat voor elke $x \in X$ geldt dat de baan $\Gamma(x)$ een punt is, of homeomorf met $\mathbf{S}^1$, of homeomorf met $\mathbb{R}^1$.

Merk nog op, dat (2.82) niet behoeft te gelden voor niet-vlakke dynamische systemen: zie (1.48).

(2.84) STELLING (POINCARÉ-BENDIXSON). *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem, waarin* X *een open deelverzameling is van* $\mathbb{R}^2$. *Zij* $x \in X$ *en neem aan, dat* x *positief Lagrange-stabiel is. Dan geldt juist één van de volgende uitspraken:*

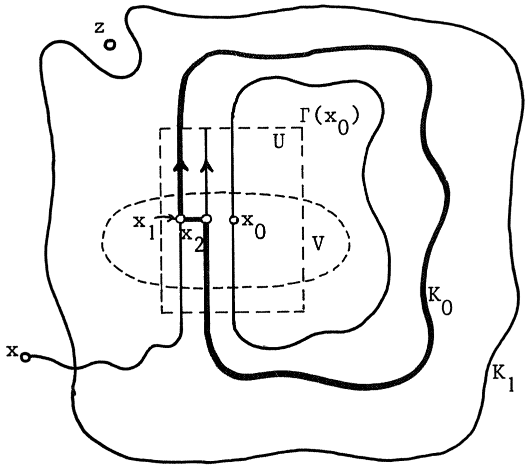
(i) x *is een bewegend periodiek punt.*

(ii) *er is een bewegend periodiek punt* x_0 *zo dat* $\Gamma(x) \neq \Omega(x) = \Gamma(x_0)$, *dat wil zeggen,* $\Omega(x)$ *is een limietcykel.*

(iii) $\Omega(x)$ *bevat minstens één evenwichtspunt.*

In geval (iii) *zijn alle periodieke punten van* $\Omega(x)$ *evenwichtspunten, alsmede alle punten van* $A(y) \cup \Omega(y)$ *voor* $y \in \Omega(x)$.

BEWIJS. Uit (1.28)3, (1.46)1 en (1.52a) volgt, dat de gevallen (i), (ii) en (iii) elkaar twee aan twee uitsluiten. Het is dus voldoende om aan te tonen dat (ii) of (iii) geldt als (i) niet geldt. Neem dus aan, dat x geen periodiek punt is.
Uit (1.39) en (1.54) volgt, dat $\Omega(x)$ compact, samenhangend en invariant is, en dat $\Omega(x) \neq \emptyset$. Zij $x_0 \in \Omega(x)$. Dan is $\Gamma(x_0) \subset \Omega(x)$, dus x_0 is positief Lagrange-stabiel, en $\emptyset \neq \Omega(x_0) \subset \overline{\Gamma(x_0)} \subset \Omega(x)$. Uit (2.77) volgt nu, dat x_0 een bewegend periodiek punt is, of dat $\Omega(x_0)$, en dus ook $\Omega(x)$, een evenwichtspunt bevat. Het bewijs is dus voltooid als we aantonen dat voor elk *bewegend* periodiek punt $x_0 \in \Omega(x)$ geldt dat $\Gamma(x_0) = \Omega(x)$. (In dat geval kan $\Omega(x)$ geen evenwichtspunten bevatten; dus als $\Omega(x)$ wel evenwichtspunten bevat - geval (iii) - dan kan $\Omega(x)$ geen bewegende periodieke punten bevatten, d.w.z. elk periodiek punt van $\Omega(x)$ is dan evenwichtspunt. Uit (2.77) volgt dan bovendien dat voor elk punt $y \in \Omega(x)$ geldt: of y is periodiek, dus een evenwichtspunt, en $\{y\} = A(y) = \Omega(y)$ bevat slechts één evenwichtspunt, of y is niet periodiek, in welk geval $\Omega(y) \cup A(y)$ ook slechts evenwichtspunten bevat; $A(y) = \emptyset$ of $\Omega(y) = \emptyset$ kan niet!).
Laat dus $x_0 \in \Omega(x)$ een bewegend periodiek punt zijn, en neem aan, dat $\Gamma(x_0) \neq \Omega(x)$. Zij $z \in \Omega(x)\backslash\Gamma(x_0)$. Nu is $\Gamma(x_0)$ een gesloten Jordankromme, en we mogen aannemen, dat $z \in \mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ (als $z \in \mathit{ins}\,\Gamma(x_0)$ gaat het bewijs analoog). Volgens (2.67)4 is er een gesloten Jordankromme K_1 zo dat $\Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}(K_1)$ en $\overline{\mathit{outs}\,\Gamma(x_0)} \cap [(\mathbb{R}^2\backslash X) \cup A(x) \cup \{z\}] \subset$ $\subset \mathit{outs}(K_1)$ (merk op, dat $A(x) \cap \Omega(x) = \emptyset$ wegens (2.80), zodat zeker ook $A(x) \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$). In het bijzonder is dus



(2.85) $\quad outs\,\Gamma(x_0) \cap ins(K_1) \subset X\backslash A(x).$

Beschouw nu een lokale representatie $(Q,2\eta;U)$ van (X,D,π) in het punt x_0 overeenkomstig (2.68), waarbij $U \subset ins(K_1)$ ($ins(K_1)$ is een omgeving van x_0!). Uit (2.3) en het feit dat de afstand van de (compacte) verzameling $\Gamma(x_0)$ tot het (gesloten) complement van $ins(K_1)$ positief is volgt, dat er een omgeving V van x_0 is waarvoor geldt

(2.86) $\quad \pi(y,t) \in ins(K_1) \quad \text{voor} \quad y \in V \quad \text{en} \quad 0 \le t \le p(x_0) + \eta;$

(2.87) $\quad \pi(y,p(x_0)) \in U \quad \text{voor} \quad v \in V.$

Omdat $x_0 \in \Omega(x)$ kunnen punten $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$ gevonden worden overeenkomstig (2.69), waarbij $x_1 \in V$. Omdat x niet periodiek is, is $x_1 \neq x_2$, dus de conclusies van (2.71) gelden in deze situatie (evt. met verwisseling van $ins(K_0)$ en $outs(K_0)$).
Merk nu op, dat uit (2.87) volgt dat $\pi(x_1,t') \in Q$ voor zekere t' met $|t'-p(x_0)| \le \eta$. Omdat $p(x_0) > 2\eta$ (want $x_0 \in Q$ en Q is 2η-sectie) is $t' > 0$, en dus $0 < t' \le p(x_0) + \eta$. Uit (2.69) volgt, dat t_2 de kleinste waarde is met $t_2 > t_1$ en $\pi(x_1,t_2-t_1) \in Q$. Dus is $0 \le t_2 - t_1 \le t' \le p(x_0) + \eta$, en uit (2.86) volgt dan, dat $\pi_x[t_1;t_2] = \pi_{x_1}[0,t_2-t_1] \subset ins(K_1)$. Aangezien ook $L_0 \subset U \subset ins(K_1)$, volgt hieruit dat $K_0 \subset ins(K_1)$. Maar dan impliceert (2.67)$\underline{3}$, dat

$$z \in outs(K_1) \subset outs(K_0).$$

Omdat $z \in \Omega(x)$, $\Omega(x)$ samenhangend is, en $\Omega(x) \cap K_0 = \emptyset$ (2.71)$\underline{6}$, volgt hieruit dat[1]

(2.88) $$\Gamma(x_0) \subset \Omega(x) \subset \mathit{outs}(K_0).$$

Anderzijds is $\mathit{outs}\Gamma(x_0)$ een omgeving van z, en omdat $z \in \Omega(x)$ volgt hieruit dat $\Gamma(x) \cap \mathit{outs}\Gamma(x_0) \neq \emptyset$. Daar $\Gamma(x) \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$ (x is niet periodiek en x_0 is het wel), volgt hieruit dat $\Gamma(x) \subset \mathit{outs}\Gamma(x_0)$. In het bijzonder is dus $K_0 \cap \mathit{outs}\Gamma(x_0) \neq \emptyset$. Omdat x_0 periodiek is, is $K_0 \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$ (2.71)$\underline{5}$, , dus

(2.89) $$K_0 \subset \mathit{outs}\Gamma(x_0).$$

Uit (2.88) volgt nu, dat $\mathit{ins}(K_0) \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$, en uit (2.89) volgt (omdat K_0 de rand van $\mathit{ins}(K_0)$ is, en $\mathit{outs}\Gamma(x_0)$ een omgeving van K_0 is) dat $\mathit{ins}(K_0) \cap \mathit{outs}\Gamma(x_0) \neq \emptyset$. Omdat $\mathit{ins}(K_0)$ samenhangend is, volgt hieruit, dat $\mathit{ins}(K_0) \subset \mathit{outs}\Gamma(x_0)$.
Ook was $K_0 \subset \mathit{ins}(K_1)$, dus ((2.67)$\underline{3}$) $\mathit{ins}(K_0) \subset \mathit{ins}(K_1)$, en samen met (2.85) impliceert dit, dat

(2.90) $$\mathit{ins}(K_0) \subset X \backslash A(x).$$

Dus $\overline{\mathit{ins}(K_0)} = \mathit{ins}(K_0) \cup K_0$ is in ieder geval een compacte deelverzameling van X. Omdat $\Omega(x) \subset \mathit{outs}(K_0)$ volgt uit (het analogon van) (2.71)$\underline{2}$ dat $\mathit{ins}(K_0)$ negatief invariant is, weshalve x negatief Lagrange-stabiel is. Dus $A(x) \neq \emptyset$ en ((2.71)$\underline{6}$), $A(x) \subset \mathit{ins}(K_0)$. Dit is in strijd met (2.90). □

7. Toepassingen van de stelling van POINCARÉ en BENDIXSON

(2.91) De stelling van POINCARÉ-BENDIXSON kan worden gebruikt om het bestaan van periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$ aan te tonen. De procedure laat zich als volgt omschrijven. Er wordt een ringvormig gebied F geconstrueerd, begrensd door twee

---

[1] De figuur op pag. 102 is op dit punt dus misleidend: we zijn hier dan ook bezig aan te tonen dat $\mathit{ins}(K_0) \subset \mathit{ins}(K_1) \cap \mathit{outs}\Gamma(X_0)$, hetgeen tot een tegenspraak zal leiden.

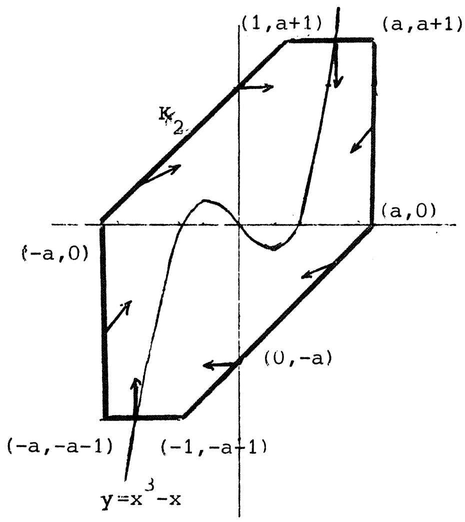
gesloten Jordankrommen K_1 en K_2 met $K_1 \subset \mathit{ins}(K_2)$, zodanig dat F positief invariant is. Elke beweging van een punt x uit F is dan positief Lagrange-stabiel, en $\Omega(x) \subset F$. Als dan ook nog bekend is, dat F geen evenwichtspunten bevat, dan volgt uit (2.84) dat F minstens één periodieke beweging bevat.

We passen dit nu toe in de volgende situatie. Beschouw het lokale dynamische systeem $(\mathbb{R}^2, D, \pi)$, gedefinieerd door de volgende differentiaalvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$:

(2.92) $$\frac{dx}{dt} = y - \mu(x^3 - x); \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

(vergelijking van VAN DER POL). Het is duidelijk, dat het punt (0,0) het enige evenwichtspunt van het systeem is. We zullen nu een ringvormig gebied F aangeven zoals hierboven bedoeld is, waarbij $(0,0) \notin F$; we zullen dit doen voor het geval $\mu = 1$.

Om de kromme K_2 te vinden kunnen we als volgt te werk gaan (we laten alle berekeningen aan de lezer over). In *alle* punten van de rechte met als vergelijking $y = x + \lambda$ is het inwendige product van de richtingsvector van het snelheidsveld ter plaatse met de normaalvector $(1,-1)$ der rechte *negatief* als $\lambda < -2$, en positief als $\lambda > 2$. Gelijksoortige beschouwingen bij alle segmenten waaruit de in nevenstaande figuur geschetste gesloten Jordankromme K_2 bestaat leert,

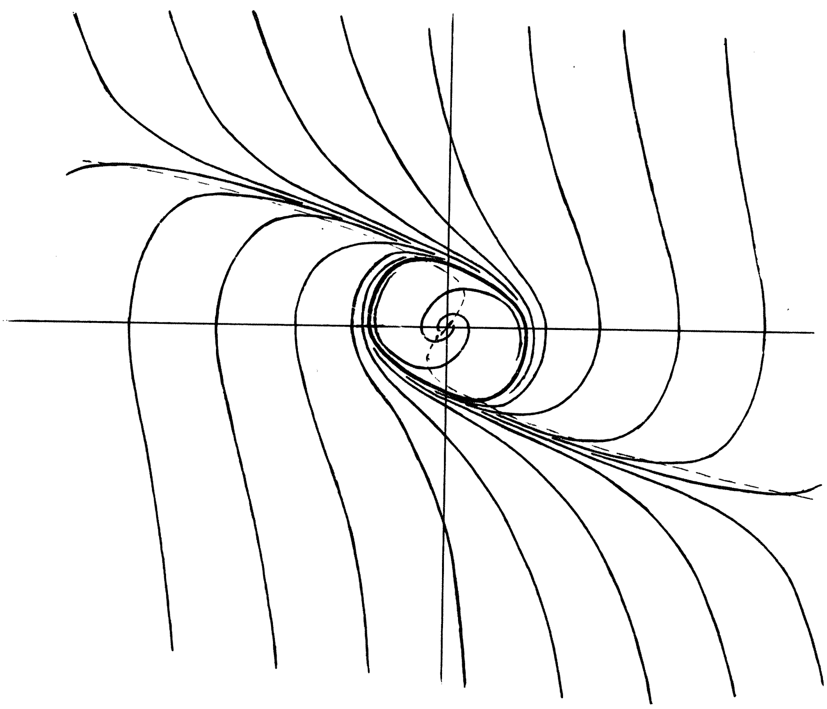


dat in alle punten van K_2 de veldvector $(y-x^3+x,-x)$ naar *binnen* gericht is (in de zes hoekpunten is dit gemakkelijk na te gaan; in de overige punten is het inwendige product met de naar buiten gerichte normaalvector negatief). Elke baan die K_2 snijdt wordt in de buurt van het snijpunt voor toenemende t dus doorlopen van $\mathit{outs}(K_2)$

naar $\mathit{ins}(K_2)$. Hieruit volgt, dat $\overline{\mathit{ins}(K_2)}$ positief invariant is.)1
Ieder punt van $\mathit{ins}(K_2)$ is dus positief Lagrange-stabiel, en omdat in het voorgaande a willekeurig groot genomen mag worden (mits a > 2), volgt hieruit dat ieder punt van $\mathbb{R}^2$ positief Lagrange stabiel is.
Om de gesloten Jordankromme K_1 te vinden beschouwen we de functie $H: (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Omdat

$$\frac{d}{dt} H(\pi((x,y),t))\bigg|_{t=0} = \left[\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = x^2 - x^4 \geq 0$$

voor $-1 < x < 1$, zal de afstand van het punt $\pi^t(x,y)$ tot $(0,0)$ toenemen met toenemende t, zolang het punt althans in de strook $\{(x,y) \mid -1 < x < 1\}$ blijft. Voor K_1 kan dus een cirkel met straal r om $(0,0)$ genomen worden, met $0 < r < 1$: $\mathit{ins}(K_1)$ is dan negatief invariant, dus (zie (1.37)) $\overline{\mathit{outs}(K_1)}$ is positief invariant.



)1 Vgl. ook het bewijs van (2.94).

Omdat (0,0) het enige evenwichtspunt van het systeem is, heeft het systeem een limietcykel. Men kan aantonen dat het systeem ook niet méér dan één limietcykel heeft (zie bijv. [HS], Ch.10,§3).

In het nu volgende is weer (X,D,π) een vlak lokaal dynamisch systeem, X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$. Laat voorts $x \in X$ een bewegend periodiek punt zijn. Dan is $\Gamma(x)$ een gesloten Jordankromme. Neem aan, dat $\mathit{ins}\,\Gamma(x) \subset X$. Dan zijn $\mathit{ins}\,\Gamma(x)$ en $\overline{\mathit{ins}\,\Gamma(x)} = \mathit{ins}\,\Gamma(x) \cup \Gamma(x)$ invariante verzamelingen, en de restrictie van (X,D,π) tot $\overline{\mathit{ins}\,\Gamma(x)}$ is dan een globaal dynamisch systeem ((1.41) en (1.20)). Men kan aantonen, dat $\overline{\mathit{ins}\,\Gamma(x)}$ homeomorf is met de gesloten 2-cel $[0;1]^2$; uit (1.32) (en dus: uit de dekpuntsstelling van BROUWER; zie het bewijs van (1.32)) volgt dan, dat $\overline{\mathit{ins}\,\Gamma(x)}$ een evenwichtspunt bevat; omdat x geen evenwichtspunt is, ligt dit evenwichtspunt zelfs in $\mathit{ins}\,\Gamma(x)$. We zullen nu ditzelfde resultaat afleiden uit (2.84).

(2.93) PROPOSITIE. *Laat* $x \in X$ *een bewegend periodiek punt zijn zo dat* $\mathit{ins}\,\Gamma(x) \subset X$. *Dan bevat* $\mathit{ins}\,\Gamma(x)$ *een evenwichtspunt.*

BEWIJS. Omdat $\mathit{ins}\,\Gamma(x) \cup \Gamma(x)$ een compacte, invariante verzameling is (zie voorgaande opmerking) is elk punt $y \in \mathit{ins}\,\Gamma(x) \cup \Gamma(x)$ positief en negatief Lagrange-stabiel. Wegens (1.54) is dan $A(y) \neq \emptyset$, $\Omega(y) \neq \emptyset$, en op grond van (2.84) kunnen zich de volgende gevallen voordoen:

(i) y is een bewegend periodiek punt;

(ii) $\Omega(y)$ en $A(y)$ zijn limietcykels;

(iii) $\Omega(y)$ of $A(y)$ bevat een evenwichtspunt.

Neem nu aan dat $\mathit{ins}\,\Gamma(x)$ geen evenwichtspunt bevat. Dan kan geval (iii) zich niet voordoen.

Laat $\mathcal{C}$ de verzameling van alle banen van periodieke bewegingen in $\mathit{ins}\,\Gamma(x) \cup \Gamma(x)$ zijn; de elementen van $\mathcal{C}$ zijn dus onderling disjuncte gesloten Jordankrommen. Definieer een partiële ordening in $\mathcal{C}$ door

$$K' \geq K \iff K' \subset \mathit{ins}(K) \cup K$$

(gebruik (2.67)$\underline{3}$ om de transitiviteit van $\geq$ aan te tonen). Dan is $(\mathcal{C},\geq)$ inductief, dat wil zeggen, iedere keten in $\mathcal{C}$ heeft een bovengrens. Immers, als $\mathcal{C}_0$ een keten (= totaal geordende deelverzameling

van C) is, kies dan voor elke $K \in C_0$ een punt $x_K \in K$, en laat x_0 een verdichtingspunt van $\{x_K \mid K \in C_0\}$ zijn. Dan is $x_0 \in \mathit{ins}\,\Gamma(x_K) \cup \Gamma(x_K)$ voor alle $K \in C_0$, dus $\overline{\Gamma(x_0)} \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x_K) \cup \Gamma(x_K)$. Voorts gelden (i) en (ii) met x_0 in plaats van y. In geval (i) is $\Gamma(x_0) \in C$, en $\Gamma(x_0) \geq K$ voor alle $K \in C_0$, en in geval (ii) zijn $A(x_0)$ en $\Omega(x_0)$ elementen van C, beide $\geq K$ voor alle $K \in C_0$. Dus C_0 heeft inderdaad een bovengrens in $(C,\geq)$.
Uit het lemma van ZORN volgt nu, dat C een maximaal element heeft, zeg $\Gamma(z)$ voor zeker periodiek punt z. Kies $y \in \mathit{ins}\,\Gamma(z)$ (volgens de aanname is z een bewegend punt!). Wegens de maximaliteit van $\Gamma(z)$ kan (i) voor y niet gelden, dus $\Omega(y)$ en $A(y)$ zijn beide element van C en beide bevat in $\mathit{ins}\,\Gamma(z) \cup \Gamma(z)$, dat wil zeggen, beide $\geq \Gamma(z)$. Uit de maximaliteit van $\Gamma(z)$ volgt dus, dat $\Omega(y) = \Gamma(z)$, en evenzo $A(y) = \Gamma(z)$. Dus $A(y) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$, in strijd met (2.80). □

(2.94) GEVOLG. *Laat* K *een gesloten Jordankromme in* X *zijn zo dat* $\mathit{ins}(K) \subset X$, *en neem aan dat* K *een sectie is. Dan bevat* $\mathit{ins}(K)$ *een evenwichtspunt.*

BEWIJS. Zij K een 2η-sectie. Voor elke $x \in K$ is dan $\pi_x(0;\eta] \cap K = \emptyset$, zodat dus $\pi_x(0;\eta] \subset \mathit{ins}(K)$ of $\pi_x(0;\eta] \subset \mathit{outs}(K)$.
Laat $K_1 := \{x \in K \mid \pi_x(0;\eta] \subset \mathit{ins}(K)\}$ en $K_2 := \{x \in K \mid \pi_x(0;\eta] \subset \mathit{outs}(K)\}$. Dan is $K = K_1 \cup K_2$ en $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Uit de continuïteit van π volgt, dat K_1 en K_2 open deelverzamelingen van K zijn. Omdat K samenhangend is, volgt hieruit dat één der verzamelingen K_1 of K_2 leeg is; zeg $K_2 = \emptyset$, dat wil zeggen: $\pi_x(0;\eta] \subset \mathit{ins}(K)$ voor alle $x \in K$. Hieruit volgt, dat $\overline{\mathit{ins}(K)}$ positief invariant is. Immers, als $\pi(z,t) \in \mathit{outs}(K)$ voor zekere $z \in \mathit{ins}(K)$ en $t > 0$, dan is er een grootste waarde $s \in [0;t)$ zo dat $\pi(z,s) \in K$. Maar dan is $\pi_z(s;s+\eta] \subset \mathit{ins}(K)$, waaruit volgt dat $t > s + \eta$ en dat $\pi_z(s+\eta;t] \cap K \neq \emptyset$, in strijd met de keus van s. Dus $\overline{\mathit{ins}(K)}$ is inderdaad positief invariant. Elk punt $y \in \overline{\mathit{ins}(K)}$ is dus positief Lagrange-stabiel, en uit (2.84) volgt dan dat $\overline{\mathit{ins}(K)}$ evenwichtspunten bevat, of periodieke bewegingen. In het tweede geval is $\Gamma(x) \subset \overline{\mathit{ins}(K)}$ voor elke periodieke punt $x \in \overline{\mathit{ins}(K)}$, en dus $\mathit{ins}\,\Gamma(x) \subset \mathit{ins}(K)$. Met behulp van (2.93) volgt dan, dat ook in dit geval $\overline{\mathit{ins}(K)}$ een evenwichtspunt bevat. Omdat K geen evenwichtspunten bevat, zullen in alle gevallen deze evenwichtspunten in $\mathit{ins}(K)$ liggen. □

We zullen nu een paar opmerkingen maken over het gedrag van een vlak dynamisch systeem in de buurt van een periodieke beweging. Nog steeds is (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem waarin X een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^2$.

(2.95) LEMMA. *Zij $x_0 \in X$ een bewegend periodiek punt. Dan is er bij elke $\varepsilon > 0$ en elke open omgeving V_0 van $\Gamma(x_0)$ in X een omgeving V van $\Gamma(x_0)$ in $\mathbb{R}^2$, begrensd door gesloten Jordankrommen K_i en K_u zo dat*

$$K_i \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x_0), \quad \Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}(K_u)$$

(dus $V = \mathit{ins}(K_u) \cap \mathit{outs}(K_i)$) met de volgende eigenschappen:

1. *$V \subset V_0 \subset X$ en V bevat geen evenwichtspunten.*
2. *Voor ieder periodiek punt $x \in V$ is $|p(x)-p(x_0)| < \varepsilon$ en*

$$K_i \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x), \quad \Gamma(x) \subset \mathit{ins}(K_u)$$

(en dus $\Gamma(x) \subset V$), *en als $x \in V \cap \mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ is zelfs*

$$\Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x).$$

3. *De verzameling $V_u := V \cap \mathit{outs}\,\Gamma(x_0) = \mathit{ins}(K_u) \cap \mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ is positief invariant of negatief invariant. Als V_u geen periodieke punten bevat dan is $\Omega(x) = \Gamma(x_0)$ voor alle $x \in V_u$, of $A(x) = \Gamma(x_0)$ voor alle $x \in V_u$.*
4. *De verzameling $V_i = V \cap \mathit{ins}\,\Gamma(x_0) = \mathit{ins}\,\Gamma(x_0) \cap \mathit{outs}(K_i)$ is positief- of negatief invariant. Als V_i geen periodieke punten bevat, dan is $\Omega(x) = \Gamma(x_0)$ voor alle $x \in V_u$, of $A(x) = \Gamma(x_0)$ voor alle $x \in V_u$.*

BEWIJS. I. Zij F de verzameling evenwichtspunten in X. Dan is F een gesloten deelverzameling van X (1.31). Omdat $F \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$ mogen we van het begin af aan aannemen dat $V_0 \subset X\backslash F$. Merk op, dat V_0 open is in X, dus open is in $\mathbb{R}^2$, zo dat $\mathbb{R}^2 \backslash V_0$ gesloten is in $\mathbb{R}^2$. Voorts is $(\mathbb{R}^2 \backslash V_0) \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$. Uit (2.67)4 volgt nu dat er gesloten Jordankrommen K_i' en K_u' in $\mathbb{R}^2$ zijn zo dat

$$(\mathbb{R}^2 \backslash V_0) \cap \overline{\mathit{ins}\,\Gamma(x_0)} \subset \mathit{ins}(K_i'), \quad K_i' \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x_0)$$

en

$$(\mathbb{R}^2 \backslash V_0) \cap \overline{\mathit{outs}\,\Gamma(x_0)} \subset \mathit{outs}(K'_u), \qquad \Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}(K'_u).$$

Zij $V' := \mathit{ins}(K'_u) \cap \mathit{outs}(K'_i)$. Dan is V' een open omgeving van $\Gamma(x_0)$ (wegens (2.67)3 is $\Gamma(x_0) \subset \mathit{outs}(K'_i)$!), en

$$V' \subset V_0 \subset X\backslash F.$$

Laat nu $(Q,2\eta;U)$ een lokale representatie zijn van (X,D,π) in het punt x_0 als beschreven in (2.68), waarbij $U \subset V'$ en $\eta < \varepsilon$. Omdat $\Gamma(x_0)$ een positieve afstand heeft tot het complement van V' is er volgens (2.3)3 een open omgeving W van x_0 zo dat $W \subset U$ en

(2.96) $$\pi(x,t) \in V' \quad \text{voor } x \in W \text{ en } -\eta \leq t \leq p(x_0) + 2\eta.$$

Ook mogen we aannemen dat

(2.97) $$\pi(x,p(x_0)) \in U \quad \text{voor } x \in W$$

(continuïteit van π_x in het punt x_0, gecombineerd met het feit dat $\pi(x_0,p(x_0)) = x_0 \in U$). Uit (1.33) volgt dat W ook nog zo gekozen kan worden, dat

(2.98) $$p(x) > p(x_0) -\varepsilon$$

voor alle periodieke punten $x \in W$. Tenslotte volgt uit (2.69)(x_0 voldoet aan conditie (b)) dat we mogen aannemen dat voor elk punt $x \in W$ de conclusies 1 en 2 van (2.69) gelden: als $x \in W$, dan zijn er $t_1,t_2 \in J(x)$ zo dat t_1 en t_2 opeenvolgende waarden)[1] van t uit $J(x)$ zijn met $\pi(x,t) \in Q$, en $\pi_x[t_1;t_2]$ verenigd met het verbindings-

---

)1 Uit het bewijs van (2.69) volgt, dat we *elk* stel opeenvolgende waarden mogen nemen.

segment L_0^x van x_1 en x_2 is een gesloten Jordankromme K_0^x (let op de notatie). Merk op, dat $L_0^x \subset Q \subset U \subset V'$; voorts, dat voor elke $x \in W$ de bijbehorende waarde van t_1 zo gekozen kan worden dat $|t_1| < \eta$. Uit (2.97) volgt dan gemakkelijk, dat

(2.99) $$t_2 \leq t_1 + p(x_0) + \eta.$$

Met andere woorden,

$$-\eta \leq t_1 < t_2 \leq p(x_0) + 2\eta.$$

Uit (2.96) volgt dan, dat $\pi_x[t_1;t_2] \subset V'$.
Conclusie: $K_0^x = L_0^x \cup \pi_x[t_1;t_2] \subset V'$. In het bijzonder is dus

(2.100) $$K_0^x \subset \mathit{ins}(K'_u) \qquad \text{(en dus } \mathit{ins}(K_0^x) \subset \mathit{ins}(K'_u))$$

voor alle $x \in W$. Ook is $K_0^x \subset \mathit{outs}(K'_i)$. Indien voor zekere $x \in W$ *niet* zou gelden dat $K'_i \subset \mathit{ins}(K_0^x)$, dan zou $K'_i \cap \mathit{ins}(K_0^x) = \emptyset$. Dit zou impliceren dat $\mathit{ins}(K_0^x) \subset \mathit{outs}(K'_i)$, en dus

$$\mathit{ins}(K_0^x) \subset \mathit{ins}(K'_u) \cap \mathit{outs}(K'_i) = V' \subset X\backslash F.$$

Indien x periodiek is, zou (2.93) impliceren dat $F \cap \mathit{ins}(K_0^x) \neq \emptyset$, in strijd met het bovenstaande. En als x niet periodiek is, dan is (2.71) van toepassing (want $x_1 \neq x_2$) en dan is $\mathit{ins}(K_0^x)$ hetzij positief, hetzij negatief invariant; omdat $\overline{\mathit{ins}(K_0^x)} \subset X$ is dan $\Omega(x) \neq \emptyset$, resp. $A(x) \neq \emptyset$ (1.54). Omdat volgens (2.71)6 nu $\Omega(x) \subset \mathit{ins}(K_0^x)$, resp. $A(x) \subset \mathit{ins}(K_0^x)$, volgt uit (2.84) en (2.93) dat ook nu $F \cap \mathit{ins}(K_0^x) \neq \emptyset$. Uit deze tegenspraak volgt, dat voor alle $x \in W$ geldt

(2.101) $$K'_i \subset \mathit{ins}(K_0^x).$$

Merk ook nog op, dat voor $x \in W \cap \mathit{outs}\Gamma(x_0)$ geldt: $K_0^x \cap \Gamma(x_0) = \emptyset$ (als x periodiek is, is dit evident; als x niet periodiek is, volgt dat uit (2.71)5); dus $K_0^x \subset \mathit{outs}\Gamma(x_0)$. Omdat wegens (2.100) $\mathit{ins}\Gamma(x_0) \cap \mathit{ins}(K_0^x) \supset K'_i \neq \emptyset$, is in dit geval $\mathit{ins}\Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}(K_0^x)$, en hieruit volgt dan, dat

$$\Gamma(x_0) \subset ins(K_0^x) \qquad (\text{voor } x \in W \cap outs\Gamma(x_0)). \tag{2.102}$$

Beschouw tenslotte nog een periodiek punt $x \in W$. Dan is $x_1 = x_2$ (anders zou uit (2.71)5 volgen dat x niet periodiek was), dus $p(x) \leq t_2 - t_1$. Uit (2.99) volgt dan, dat $p(x) \leq p(x_0) + \eta < < p(x_0) + \varepsilon$. In combinatie (2.98) volgt hieruit, dat

$$|p(x)-p(x_0)| < \varepsilon \tag{2.103}$$

voor elk periodiek punt $x \in W$.

II. Kies nu $z \in Q \cap W \cap outs\Gamma(x_0)$ zo dat het verbindingssegment van z en x_0 bevat is in W. Zij nu $K_u := K_0^z$. Dan is $\Gamma(x_0) \subset ins(K_u)$ (2.102), en voor

$$V_u := ins(K_u) \cap outs(\Gamma(x_0))$$

geldt op grond van (2.100) dat

$$V_u \subset ins(K_u') \cap outs(K_i') = V' \subset V_0 \subset X\backslash F.$$

Zij nu $x \in V_u$ een periodiek punt. Dan is $\Gamma(x) \cap K_u = \emptyset$ (als z periodiek is, is dit evident, want dan is $K_u = \Gamma(z)$; en als z niet periodiek is, volgt dit uit (2.71)5, toegepast op K_0^z). Dus $\Gamma(x) \subset ins(K_u)$. We beweren, dat $\Gamma(x_0) \subset ins\Gamma(x)$. Indien dit niet zo zou zijn, dan zou (omdat $\Gamma(x_0) \cap \Gamma(x) = \emptyset$) gelden: $\Gamma(x_0) \subset outs\Gamma(x)$. Omdat $x \in outs\Gamma(x_0)$, is ook $\Gamma(x) \subset outs\Gamma(x_0)$, en hieruit zou dan volgen dat $ins\Gamma(x) \subset outs\Gamma(x_0)$, en dus

$$ins\Gamma(x) \subset ins(K_u) \cap outs\Gamma(x_0) = V_u \subset X\backslash F.$$

Uit (2.93) zou evenwel volgen dat $ins\Gamma(x) \cap F \neq \emptyset$. Uit deze tegenspraak volgt, dat $\Gamma(x_0) \subset ins\Gamma(x)$. In het bijzonder volgt nu hieruit, dat $x_0 \in ins\Gamma(x)$. Voorts volgt uit het feit dat $\Gamma(x) \subset ins(K_u)$ dat $z \in outs\ \Gamma(x)$. Het verbindingssegment van de punten x en z snijdt dus $\Gamma(x)$. Omdat dit verbindingssegment bevat is in W, is derhalve

$\Gamma(x) \cap W \neq \emptyset$; dus we mogen, wat betreft de waarde van $p(x)$, aannemen, dat $x \in W$. Dus is $|p(x)-p(x_0)| < \varepsilon$ (2.103). Merk op, dat we intussen ook aangetoond hebben dat

(2.104) $\quad \Gamma(x) \subset \mathit{ins}(K_u)$; $\Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x)$.

Het is duidelijk dat V_u als doorsnede van de invariante verzameling $\mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ en de positief of negatief invariante verzameling $\mathit{ins}(K_u)$ zelf positief of negatief invariant is (als z niet periodiek is volgt de positieve of negatieve invariantie van $\mathit{ins}(K_u)$ uit (2.71)$\underline{2}$; als z periodiek is, is $\mathit{ins}(K_u)$ zelfs invariant en ook V_u is dan invariant). Neem nu aan, dat V_u geen periodieke punten bevat. Het is duidelijk dat in dit geval het verbindingssegment van x en x_0 uitsluitend niet-periodieke punten bevat, en zonder beperking der algemeenheid mogen we daarom aannemen dat z niet-periodiek is. Neem voorts aan, dat V_u negatief invariant is. Beschouw nu $x \in V_u$. Omdat ieder punt uit V_u negatief Lagrange-stabiel is (immers, $\bar{V}_u \subset X$) en $V_u \cap F = \emptyset$, volgt uit (2.84) dat $A(x)$ een limietcykel is. Dus $A(x) \cap V_u = \emptyset$. Anderzijds is $A(x) \subset \bar{V}_u$, en dus is $A(x) \subset K_u \cup \Gamma(x_0)$. Omdat $A(x)$ samenhangend is, moet daarom $A(x) \subset K_u$ of $A(x) \subset \Gamma(x_0)$. Als $A(x) \subset K_u$, dan zou blijkbaar z een periodiek punt zijn, in strijd met de aanname. Dus is $A(x) \subset \Gamma(x_0)$, en omdat $A(x)$ invariant is, volgt hieruit dat $A(x) = \Gamma(x_0)$. Als V_u positief invariant is en geen periodieke punten bevat, toont men op analoge wijze aan, dat $\Omega(x) = \Gamma(x_0)$ voor elke $x \in V_u$. Hiermee is $\underline{3}$ geheel bewezen.
Op geheel analoge wijze kan men een gesloten Jordankromme K_i vinden zo, dat

(2.105) $\quad K_i \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x_0)$, $\quad K_i' \subset \mathit{ins}(K_i)$

en zo dat voor $V_i := \mathit{ins}\,\Gamma(x_0) \cap \mathit{outs}(K_i)$ het in $\underline{4}$ gestelde geldt, terwijl $|p(x)-p(x_0)| < \varepsilon$ en

(2.106) $\quad K_i \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x)$, $\quad \Gamma(x) \subset \mathit{ins}\,\Gamma(x_0)$

voor elk periodiek punt $x \in V_i$. Merk nog op, dat $V_i \subset V' \subset V_0 \subset X\backslash F$.
Het is tenslotte niet moeilijk in te zien dat voor

$V := \mathit{ins}(K_u) \cap \mathit{outs}(K_i)$ geldt: $V = V_u \cup V_i \cup \Gamma(x_0)$. Dus $V \subset V_0 \subset X\backslash F$: dus V voldoet aan 1. Uit (2.104), (2.105) en (2.106) tenslotte volgt, dat ook aan 2 voldaan is. □

(2.104) GEVOLG. *Als* (x_n) *een rij periodieke punten is in een vlak lokaal dynamisch systeem en de rij* (x_n) *convergeert naar een bewegend punt* x, *dan is* x *periodiek,* $p(x) = \lim_n p(x_n)$, *en bij ieder tweetal gesloten Jordankrommen* K_1 *en* K_2 *met* $K_1 \subset \mathit{ins}\Gamma(x)$ *en* $\Gamma(x) \subset \mathit{ins}(K_2)$ *is er een* $k \in \mathbb{N}$ *zo dat*

$$K_1 \subset \mathit{ins}\Gamma(x_n), \qquad \Gamma(x_n) \subset \mathit{ins}K_2$$

voor alle $n \geq k$.

BEWIJS. Combineer (1.33) en (2.95). □

(2.105) OPMERKING. Het intuïtieve idee dat in de situatie van (2.104) voor voldoend grote n de banen $\Gamma(x_n)$ en $\Gamma(x)$ niet alleen "dicht bij elkaar" liggen, maar ook nog in dezelfde richting doorlopen worden, is correct. Om het te bewijzen moet uiteraard eerst het begrip "omloop-richting" gedefinieerd worden. Dit kan gebeuren met behulp van het zgn. *windingsgetal* (*index*) van een punt x ten opzichte van een periodiek beweging π_z:

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0;p(z)]} \frac{dt}{\pi(z,t)-x},$$

dat gedefinieerd is voor elke punt $x \in \mathbb{R}^2\backslash\Gamma(z)$ (vat $\mathbb{R}^2$ op als het complexe vlak $\mathbb{C}$) Men kan aantonen, dat $x \mapsto \gamma(x)$ constant is op de componenten van $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma(z)$, dat $\gamma(x) = 0$ voor alle $x \in \mathit{outs}\Gamma(z)$, en dat $\gamma(x) = +1$, of $\gamma(x) = -1$, voor alle $x \in \mathit{ins}\Gamma(z)$. Noem de omlooprichting van $\Gamma(z)$ *positief* als $\gamma(x) = +1$ voor alle $x \in \mathit{ins}\Gamma(z)$, en *negatief*, als $\gamma(x) = -1$ voor alle $x \in \mathit{ins}\Gamma(z)$. Voor verdere details, zie [B], Chap. II, met name Theorem 2.16.

(2.106) STELLING. *Laat* K *een (positieve) limietcykel zijn in een vlak dynamisch systeem* (X,D,π). *Dan is de verzameling*

$$A(K) := \{x \in X\backslash K \mid \Omega(x) = K\}$$

open in X.

<u>BEWIJS</u>. Zij $x_0 \in K$. Dan is dus $K = \Gamma(x_0)$. Beschouw nu een punt $x \in A(K)$: dus $x \in X\backslash\Gamma(x_0)$ en $\Omega(x) = \Gamma(x_0)$. Neem aan, dat $x \in \mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ (als $x \in \mathit{ins}\,\Gamma(x_0)$ gaat het bewijs analoog). Zij $V_0 = X\backslash\{x\}$, en zij $\varepsilon = 1$, en zij V een omgeving van K met de in (2.95) beschreven eigenschappen. Merk op, dat $x \notin V_u$, dus $x \in \mathit{outs}(K_u)$. We tonen aan, dat V_u geen periodieke punten bevat. Stel, dat integendeel, $y \in V_u$ periodiek is. Dan is $\Gamma(x_0) \subset \mathit{ins}\,\Gamma(y)$ (zie (2.95)<u>2</u>), dus $\mathit{ins}\,\Gamma(y)$ is een omgeving van $\Gamma(x_0) = \Omega(x)$. Dientengevolge is $\Gamma^+(x) \cap \mathit{ins}\,\Gamma(y) \neq \emptyset$. Omdat $x \in \mathit{outs}(K_u) \subset \mathit{outs}\,\Gamma(y)$, is $\Gamma^+(x) \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$; dit zou impliceren dat x periodiek was zodat $x \in \Gamma(x) = \Omega(x) = \Gamma(x_0)$, in strijd met de keus van x. Dus V_u bevat geen periodieke punten.
Merk nu op, dat $\Gamma^+(x) \cap V_u \neq \emptyset$: $\Gamma^+(x) \cap V \neq \emptyset$ omdat V een omgeving van $\Omega(x)$ is, en $\Gamma^+(x) \subset \mathit{outs}\,\Gamma(x_0)$ omdat anders $\Gamma^+(x) \cap \Gamma(x_0) \neq \emptyset$. Voor $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_u$ geldt: $\Omega(x') = \Gamma(x_0)$. Uit (2.95)<u>3</u> volgt dan, dat $\Omega(y) = \Gamma(x_0)$ voor alle $y \in V_u$, dus $V_u \subset A(K)$. Tenslotte is het duidelijk (continuïteit van π) dat er een omgeving W van x is en een $t \in \mathbb{R}$ zo dat $\pi^t(W) \subset V_u$. Maar dan is $W \subset A(K)$ (1.17). Hieruit volgt, dat A(K) open is. □

(2.107) In feite hebben we iets meer aangetoond in het bewijs van (2.106) dan wat geformuleerd staat in de stelling, namelijk:
Als K een (positieve) limietcykel is van een punt x dan heeft K "aan de kant van x" willekeurig kleine positief invariante omgevingen (namelijk van de gedaante V_u als beschreven in (2.95)). Bovendien heeft K aan de kant van x een omgeving W zo dat $\Omega(y) = K$ voor alle $y \in W$ (namelijk de in het bewijs van (2.106) aangegeven V_u). Eerstgenoemde eigenschap drukt men wel uit door te zeggen dat K *positief baanstabiel* is aan die kant (binnen of buitenkant) waar x ligt. De tweede eigenschap drukt men wel uit door te zeggen dat K een *positieve attractor* is voor bovengenoemde omgeving W. Beide eigenschappen tesamen formuleert men ook wel door te zeggen dat K *asymptotisch (positief) baanstabiel* is met betrekking tot die kant waar x ligt. Voor preciese definities verwijzen we naar [H], p.113. Voor stabiliteitseigenschappen van algemene positieve limietverzamelingen verwijzen we naar [H], Chap.VIII.

III. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

1. Het systeem van Bebutov

(3.1) NOTATIE. Als X een topologische ruimte is dan zullen we de verzameling van alle continue functies van X naar $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) aanduiden met $C_n(X)$. Voor $f,g \in C_n(X)$ en $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, zij

$$\|f-g\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)-g(x)|,$$

waarin $|\ldots|$ de euclidische norm op $\mathbb{R}^n$ aanduidt. Voor $f \in C_n(X), \emptyset \neq K \subset X$ en $\varepsilon > 0$ definieren we

$$U(f;K,\varepsilon) := \{g \mid g \in C_n(X) \ \& \ \|g-f\|_K < \varepsilon\}.$$

In $C_n(X)$ zullen we de topologie beschouwen, voortgebracht door de collectie van alle verzamelingen van de gedaante $U(f;K,\varepsilon)$ met $f \in C_n(X)$, K een niet-lege *compacte* deelverzameling van X, en $\varepsilon > 0$. In feite is deze collectie verzamelingen zelfs een basis voor de erdoor voortgebrachte topologie: op grond van [D], Chap.III, Theorem 3.2 volgt dit onmiddellijk uit het feit dat voor $g \in U(f_1;K_1,\varepsilon_1) \cap U(f_2;K_2,\varepsilon_2)$ geldt:

$$g \in U(g;K_1 \cup K_2,\delta) \subset U(f_1;K_1,\varepsilon_1) \cap U(f_2;K_2,\varepsilon_2)$$

met geschikt gekozen $\delta > 0$ (namelijk, $\delta < \min\{\varepsilon_1-\delta_1,\varepsilon_2-\delta_2\}$, met $\delta_i := \|g-f_i\|_{K_i}$ voor $i = 1,2$).

Hieruit volgt, dat een omgevingsbasis van $f \in C_n(X)$ *in* $C_n(X)$ *gevormd wordt door de familie van alle verzamelingen* $U(f;K,\varepsilon)$ *met* K *een niet-lege, compacte deelverzameling van* X, *en* $\varepsilon > 0$.

N.B. Omdat een rij (f_j) in $C_n(X)$ convergeert naar $f \in C_n(X)$ als en slechts als $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, uniform in x op elke compacte deelverzameling van X, wordt de hierboven beschreven topologie ook wel *de topologie van de uniforme convergentie op compacta* genoemd.

(3.2) *Als* X *een* σ*-compacte lokaal compacte ruimte is, dan is* $C_n(X)$ *metriseerbaar.*

(De ruimte X heet σ-compact als X vereniging is van aftelbaar veel compacte verzamelingen.) Immers, in dat geval is $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ waarin elke X_i open is met $\bar{X}_i$ compact, zodat er voor elke compacte $K \subset X$ een $j \in \mathbb{N}$ is met $K \subset \bar{X}_j$. Het is duidelijk, dat dan voor elke $f \in C_n(X)$ een omgevingsbasis in f gevormd wordt door de collectie

$$\{U(f;\bar{X}_i,1/i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Hiervan gebruik makend is het een eenvoudige zaak om te laten zien dat door

$$d(f,g) := \sup_{i\in\mathbb{N}} [\min\{\|f-g\|_{\bar{X}_i}, \tfrac{1}{i}\}]$$

een metriek d op $C_n(X)$ wordt gedefinieerd die juist de topologie van $C_n(X)$ genereert.

N.B. In het bijzonder is de ruimte $C_n(X)$ dus metriseerbaar als X een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^k$ $(k\geq 1)$. Met name is dat het geval als $X = W \times \mathbb{R}$ met W een open deelverzemling van $\mathbb{R}^{k-1}$, een situatie die we verderop zullen ontmoeten.

(3.3) STELLING (ARZELA-ASCOLI). *Zij* $A \subset C_n(X)$, *en beschouw de volgende uitspraken*:

(i) *Voor alle* $x \in X$ *geldt*: $\{f(x) \mid f \in A\}$ *is begrensd in* $\mathbb{R}^n$, *en* A *is equicontinu in het punt* x;

(ii) A *is relatief compact in* $C_n(X)$ (*i.e. de afsluiting van* A *in* $C_n(X)$ *is compact*).

Altijd geldt (i) $\Rightarrow$ (ii), *en als* X *lokaal compact is, ook* (ii) $\Rightarrow$ (i).

BEWIJS. Zie bijv. [D], p.267 en p.276. □

(3.4) LEMMA. *De afbeelding* $\tau\colon C_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C_n(\mathbb{R})$, *gedefinieerd door*

$$\tau(f,t)(s) := f(s+t), \quad f \in C_n(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}, \ s \in \mathbb{R},$$

is continu.

BEWIJS. Zij $(f,t) \in C_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, en zij $U(\tau(f,t);K,\varepsilon)$ een willekeurige basisomgeving van $\tau(f,t)$ (dus $\varepsilon > 0$ en $K \subset \mathbb{R}$ compact). Zij B het gesloten (en dus compacte) interval $[t-1,t+1]$, en merk op, dat $K + B$

een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Voor $s \in K$, $t' \in B$ en $f' \in C_n(\mathbb{R})$ is nu

$$|f(s+t)-f'(s+t')| \leq |f(s+t)-f(s+t')| + |f(s+t')-f'(s+t')| \tag{3.5}$$

waarin $s + t' \in K + B$. Hierin is $K + B$ compact, dus $U(f;K+B,\varepsilon/3)$ is een omgeving van f in $C_n(\mathbb{R})$; voor alle elementen f' hiervan is de tweede term in het rechterlid van (3.5) kleiner dan $\varepsilon/3$, voor alle $s \in K$ en $t' \in B$. Op de compacte verzameling $K + B$ is de continue functie f evenwel uniform continu. Dus er is een $\delta > 0$ zo dat $|f(z)-f(z')| < \varepsilon/3$ voor $z,z' \in K + B$ en $|z-z'| < \delta$. Zonder beperking der algemeenheid is $\delta > 1$, zodat de eerste term uit het rechterlid van (3.5) kleiner is dan $\varepsilon/3$ voor alle $s \in K$ en alle $t' \in \mathbb{R}$ met $|t-t'| < \delta$. Dus

$$\|\tau(f,t)-\tau(f',t')\|_K = \sup_{s\in K}|f(s+t)-f'(s+t')| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

ofwel $\tau(f',t') \in U(\tau(f,t);K,\varepsilon)$ voor $f' \in U(f;K+B,\varepsilon/3)$ en $t' \in \mathbb{R}$ met $|t-t'| < \delta$. □

(3.6) DEFINITIE. Onder het (globale) *dynamische systeem van BEBUTOV* verstaan we het tripel

$$\mathcal{B} := (C(\mathbb{R}), C(\mathbb{R})\times\mathbb{R}, \tau)$$

waarin $C(\mathbb{R}) := C_1(\mathbb{R})$ en τ gedefinieerd is als in (3.4) met $n = 1$.

(3.7) OPMERKING. Uit (3.4) volgt, dat τ in (3.6) continu is, terwijl eenvoudige berekeningen direct laten zien, dat $\tau(f,0) = f$ en dat $\tau(\tau(f,s),t) = \tau(f,s+t)$ voor alle $f \in C(\mathbb{R})$ en $s,t \in \mathbb{R}$. Dus het in (3.6) gedefinieerde systeem $\mathcal{B}$ is inderdaad een globaal dynamisch systeem. Zoals gebruikelijk is, zullen we baan, baan afsluiting, etc. van een punt $f \in C(\mathbb{R})$ aanduiden met $\Gamma(f), C(f)$, etc. Enige opmerkingen over dit systeem:

Zij $f \in C(\mathbb{R})$. Dan geldt:

1. *f is een periodiek punt in $\mathcal{B}$ als en slechts als f een periodieke functie is,* en $P_f = \{t \in \mathbb{R} \mid f(x+t) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}\}$ (P_f gedefinieerd als in (1.25) met f in plaats van x).
   Immers, als $t \in \mathbb{R}$, dan is $\tau(f,t) = f$ als en slechts als $f(x+t) = f(x)$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

2. *f is evenwichtspunt in* $\mathcal{B}$ *als en slechts als f een constante functie is.*
Immers, als $\tau(f,t) = f$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan is $f(t) = f(0+t) = \tau(f,t)(0) = f(0)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dus f is constant. Het omgekeerde is evident.

3. *f is positief (resp. negatief) Lagrange-stabiel als en slechts als f begrensd en uniform continu is op* $\mathbb{R}^+$ *(resp.* $\mathbb{R}^-$ *)* (dat wil zeggen: $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ zo dat $|f(u)-f(u')| < \varepsilon$ voor alle $u,u' \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) met $|u-u'| < \delta$). Immers, op grond van (3.3) is f positief Lagrange-stabiel als en slechts als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan voor elke $s \in \mathbb{R}$:
   (a) $\{\tau(f,t)(s) \mid t \geq 0\}$ is begrensd, dat wil zeggen, er is een constante $c_s > 0$ zo dat $|f(s+t)| \leq c_s$ voor alle $t \geq 0$, dat wil zeggen: $|f(u)| \leq c_s$ voor alle $u \geq s$.
   (b) $\{\tau(f,t) \mid t \geq 0\}$ is equicontinu in het punt s, dat wil zeggen: bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat

$$|f(s'+t)-f(s+t)| < \varepsilon$$

   voor alle $s' \in \mathbb{R}$ met $|s'-s| < \delta$ en alle $t \geq 0$. Equivalent hiermee is: $|f(u)-f(v)| < \varepsilon$ voor alle $u \in \mathbb{R}$ en $v \in [s,\infty)$ met $|u-v| < \delta$.

   Omdat f op ieder eindig interval in $\mathbb{R}$ begrensd en uniform continu is, is het duidelijk dat (a) en (b) voor elke $s \in \mathbb{R}$ gelden als en slechts als f begrensd en uniform continu is op $\mathbb{R}^+$.

4. *f is positief èn negatief Lagrange-stabiel (d.w.z.* $\Gamma(f)$ *is relatief compact in* C(R)) *als en slechts als f begrensd en uniform continu is.*

(3.8) VOORBEELD. We geven een voorbeeld van een begrensde, niet-periodieke continue functie f die positief en negatief Poisson-stabiel is. Deze functie f wordt verkregen als een polygoontrek, en zal de volgende eigenschappen hebben:
Er is een rij compacte, symmetrische intervallen $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ zo dat $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, en voor elke j is er een rij $(t_{ji}) \to \infty$ zo dat $f(s \pm t_{ji}) = f(s)$ voor alle i en alle $s \in I_j$. Met andere woorden, voor elke $\varepsilon > 0$ en elke $i \in \mathbb{N}$ is dan

$$\|\tau(f,\pm t_{ji})-f\|_{I_j} = 0 < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Bij iedere basisomgeving $U(f;K,\varepsilon)$ van f in $C(X)$ ($K \subset \mathbb{R}$ compact en $\varepsilon > 0$) is er een j met $K \subset I_j$; voor alle $i \in \mathbb{N}$ is dan op grond van (3.9)

$$\tau(f,\pm t_{ji}) \in U(f;I_j,\varepsilon) \subset U(f;K,\varepsilon).$$

Omdat $t_{ji} \to +\infty$ voor $i \to \infty$, volgt hieruit dat $f \in \Omega(f) \cap A(f)$; uit (1.47) volgt dan, dat f positief en negatief Poisson-stabiel is. Als we er dan ook nog voor gezorgd hebben dat f niet begrensd is, of niet uniform continu, dan is f niet Lagrange-stabiel.

Een functie f met deze eigenschappen kan als volgt worden geconstrueerd. We vormen eerst een tweezijdig oneindige rij $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ van gehele getallen, als volgt:
Als n even is, is $a_n := 0$.
Als n oneven is, heeft n een unieke representatie van de gedaante $n = 3^k(6m\pm1)$ met $m, k \in \mathbb{Z}$ (N.B. 3 is geen deler van $6m\pm1$). Schrijf in dat geval $a_n := k + 1$.
Definieer nu een continue functie g door $g(n) := a_n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$, en definieer g op de intervallen $[n;n+1]$ door lineaire interpolatie. Merk op, dat g noch begrensd, noch uniform continu is. Immers, $g(3^k) = k + 1$, en op $[3^k-1;3^k]$ heeft g een helling $k + 1$. Definieer nu f door

$$f(s) = \min\{g(s),1\}.$$

Dan is f begrensd, en continu, maar niet uniform continu. We tonen nu aan, dat f positief en negatief Poisson-stabiel is door te laten zien dat f aan (3.9) voldoet. Het is duidelijk, dat het voldoende is, om te laten zien dat g aan (3.9) voldoet (met g i.p.v. f). Voor de intervallen I_j nemen we de intervallen $[-3^j;3^j]$ ($j = 1,2,\dots$). We zullen nu laten zien, dat voor elke j geldt: $f(s+i.2.3^{j+1}) = f(s)$ voor alle $s \in I_j$ en $i \in \mathbb{Z}$, en het is voldoende om dit te laten zien voor *gehele* $s \in I_j$. Welnu: als $s \in I_j$ even is, is ook $s+i.2.3^{j+1}$ even, dus

$$f(s+i.2.3^{j+1}) = 0 = f(s).$$

En als $s \in I_j$ oneven is, zeg $s = 3^k(6\ell\pm1)$ met $k \le j$, dan is

$$s + i.2.3^{j+1} = 3^k(6\ell\pm1+6.i.3^{j-k}) = 3^k(6\ell'\pm1)$$

waarin 3 geen deler is van $6\ell' + 1$. Dus nu is

$$f(s+i.2.3^{j+1}) = k + 1 = f(s).$$

Hiermee is het gestelde aangetoond.

Laat W een topologische ruimte zijn. Dan is iedere compacte deelverzameling K van $W \times \mathbb{R}$ bevat in een compacte deelverzameling van $W \times \mathbb{R}$ van de gedaante $K_1 \times K_2$ met $K_1 \subset W$ en $K_2 \subset \mathbb{R}$, K_1 en K_2 beide compact. Dus een omgevingsbasis van $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$ in $C_n(W\times\mathbb{R})$ wordt gevormd door alle verzamelingen van de gedaante $U(f;K_1\times K_2,\varepsilon)$ met $K_1 \subset W$, $K_2 \subset \mathbb{R}$, K_1 en K_2 compact, en $\varepsilon > 0$.
Definieer nu een afbeelding τ: $C_n(W\times\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C_n(W\times\mathbb{R})$ door

(3.11) $$\tau(f,t)(x,s) = f(x,s+t)$$

voor $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ en $(x,s) \in W \times \mathbb{R}$. Met behulp van bovenstaande opmerking omtrent de gedaante der basisomgevingen van elementen van $C_n(W\times\mathbb{R})$ is het een eenvoudige zaak om het bewijs van (3.4) om te vormen tot een bewijs van de volgende uitspraak: *τ is een continue afbeelding van $C_n(W\times\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ naar $C_n(W\times\mathbb{R})$*. Omdat bovendien nog geldt dat $\tau(f,0) = f$ en $\tau(\tau(f,s),t) = \tau(f,s+t)$ voor alle $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$ en $s,t \in \mathbb{R}$, is de volgende definitie zinvol:

(3.12) DEFINITIE. Als W een topologische ruimte is, dan wordt het globale dynamische systeem

$$\mathcal{B}_n(W) := (C_n(W\times\mathbb{R}), C_n(W\times\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \tau),$$

waarin τ gedefinieerd is door (3.11), een *gegeneraliseerd systeem van BEBUTOV* genoemd.
N.B. Als $W = \{0\}$, dan is $W \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, en we hebben dan het systeem uit (3.6) terug!

(3.13) <u>OPMERKING</u>. Zij W een topologische ruimte en $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$. Dan geldt, geheel analoog aan (3.7):

<u>1</u>. f is een periodiek punt in $\mathcal{B}_n(W)$ als en slechts als alle functies $t\mapsto f(x,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(x\in W)$ periodiek zijn met een voor alle $x \in W$ gemeenschappelijke periode.

<u>2</u>. f is een evenwichtspunt in $\mathcal{B}_n(W)$ als en slechts als alle functies $t\mapsto f(x,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ constant zijn, dus als en slechts als er een continue functie $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ is zo dat $f(x,t) = g(x)$ voor alle $(x,t) \in W \times \mathbb{R}$.

<u>3</u>. Indien W een metrische ruimte is met metriek d en als bovendien de ruimte W lokaal compact is (en dus $W \times \mathbb{R}$ eveneens lokaal compact, zodat (3.3) in beide richtingen kan worden toegepast) dan is f positief Lagrange-stabiel als en slechts als voor iedere compacte deelverzameling $K \subset W$ het volgende geldt:

(i) f is begrensd op $K \times \mathbb{R}^+$

(ii) f is uniform continu op $K \times \mathbb{R}^+$.

Immers, uit (3.3) volgt dat $\{\tau(f,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ relatief compact is in $C_n(W \times \mathbb{R})$ als en slechts als aan de beide volgende voorwaarden is voldaan (vgl. ook (3.7)<u>3</u>):

(a) Bij elk punt $(x,s) \in W \times \mathbb{R}$ is er een constante $c_{(x,s)} > 0$ zo dat $|f(x,t)| \leq c_{(x,s)}$ voor alle $t \geq s$.

(b) Bij elk punt $(x,s) \in W \times \mathbb{R}$ en elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta_{(x,s)} > 0$ zo dat

$$|f(y,t')-f(x,t)| < \varepsilon$$

voor alle $t \in [s,\infty)$ en $t' \in \mathbb{R}$ met $|t-t'| < \delta_{(x,s)}$ en alle $y \in W$ met $d(x,y) < \delta_{(x,s)}$.

Neem nu aan, dat (a) en (b) vervuld zijn. Uit (b) volgt dat (a) impliceert: $|f(y,t)| \leq c_{(x,s)} + 1$ voor alle $t \geq s$ en alle y uit een geschikte omgeving van x in W. Als $K \subset W$ compact is, kan K met eindig veel van zulke omgevingen overdekt worden: dus f is begrensd op $K \times [s;\infty)$ voor elke $s \in \mathbb{R}$. In het bijzonder is f begrensd op $K \times \mathbb{R}^+$.

Uit (b) volgt op analoge wijze (via een eindige onverdekking met bollen met straal $\frac{1}{2}\delta_{(x,s)}$) dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta' > 0$ is zo dat $|f(y,t')-f(x,t)| < 2\varepsilon$ voor alle $(x,t) \in K \times [s;\infty)$ en alle $(y,t') \in W \times \mathbb{R}$ met $d(x,y) < \delta'$ en $|t-t'| < \delta'$. In het bijzonder

is f dus uniform continu op $K \times \mathbb{R}^+$.
Als, omgekeerd, (i) en (ii) gelden, dan is f begrensd en uniform continu op $K \times [u;\infty)$ voor elke $u \in \mathbb{R}$ (voor $u > 0$ is dit evident; voor $u < 0$ volgt dit uit de compactheid van $K \times [u;0]$). Neemt men voor K een compacte omgeving van $x \in W$ en $u := s-1$ (voor gegeven $(x,s) \in W \times \mathbb{R}$), dan volgt hieruit gemakkelijk dat (a) en (b) vervuld zijn (en dus dat f positief Lagrange-stabiel is).

N.B. Bovenstaande karakterisering van positief Lagrange-stabiele elementen in $C_n(W\times\mathbb{R})$ is in het bijzonder van toepassing als W een open deelverzameling van $\mathbb{R}^k$ is ($k = 0,1,2,\ldots$).

2. Niet-autonome differentiaalvergelijkingen

Laat $W \subset \mathbb{R}^n$ open zijn en $f\colon W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een functie. Onder een oplossing van het beginwaardeprobleem

(3.14) $$x' = f(x,t) \quad \text{en} \quad x(t_0) = p$$

met $p \in W$ en $\tau \in \mathbb{R}$ verstaan we een differentieerbare functie $t \mapsto \phi(t)\colon (a;b) \to W$ waarin $a < t_0 < b$, $\phi(t_0) = p$, waarvan de afgeleide naar t in ieder punt van (a;b) voldoet aan de relatie $\phi'(t) = f(\phi(t),t)$.

(3.15) We zeggen dat f aan de *unicon-voorwaarde* op W voldoet indien er geldt:

DV1. f is continu op $W \times \mathbb{R}$

DV2. Voor elke $p \in W$ en elke $t_0 \in \mathbb{R}$ geldt: als $t \mapsto x_1(t)$ en $t \mapsto x_2(t)$ twee oplossingen van (3.14) zijn dan is er een omgeving van t_0 waarop $x_1(t) = x_2(t)$.

Voor de volgende uitspraken omtrent oplossingen van (3.14) verwijzen we naar [Ha], Chap.I. Neem daarbij aan, dat f aan de unicon-voorwaarde voldoet (voor DV3 is continuïteit van f reeds voldoende).

DV3. Voor iedere $p \in W$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ is er tenminste één oplossing van (3.14). Deze is gedefinieerd op een open interval dat het gesloten interval $[t_0-c;t_0+c]$ bevat; hierin is $c = \frac{1}{2}r/M$, waarin r de straal is van een bol die bevat is in W, met middelpunt p, en M het maximum van $|f|$ op de gesloten bol om p met straal $\frac{1}{2}r$.

DV4. Voor iedere $p \in W$ en iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ is er een grootste open interval $(a;b)$ in $\mathbb{R}^*$ dat t_0 bevat en waarop een oplossing (en ook niet meer dan één oplossing) van (3.14) gedefinieerd is.

(3.16) NOTATIE. Als f aan de unicon-voorwaarde voldoet op W, en als $p \in W$, $t_0 \in \mathbb{R}$, dan zullen we de in DV4 bedoelde oplossing van (3.14) aanduiden met $t \mapsto \phi(t_0,p,f;t): J(t_0,p,f) \to \mathbb{R}^n$, waarin $J(t_0,p,f)$ het in DV4 bedoelde maximale interval is. Indien $t_0 = 0$, dan schrijven we $\phi(p,f;t)$ of $\phi_{(p,f)}(t)$ in plaats van $\phi(0,p,f;t)$ en $J(p,f)$ in plaats van $J(0,p,f)$.

Zij vervolgens

$$A := \{f \in C_n(W\times\mathbb{R}) \mid f \text{ voldoet aan de unicon-voorwaarde}\}.$$

(3.17) LEMMA. *Als* $f \in A$, *dan is* $\Gamma(f) = \{\tau(f,s) \mid s \in \mathbb{R}\} \subset A$. *Meer in het bijzonder, voor alle* $p \in W$ *en* $s \in J(p,f)$ *heeft het beginwaardeprobleem*

$$x' = \tau^s f(x,t), \qquad x(0) = \phi(p,f;s)$$

de functie $t \mapsto \phi(p,f;t+s): J(p,f)-s \to \mathbb{R}^n$ *tot unieke oplossing, waarbij* $J(p,f)-s$ *het grootste interval is waarop deze oplossing gegedefinieerd is. Met andere woorden,*

(3.18) $$J(\phi(p,f;s),\tau(f,s)) = J(p,f)-s$$

(3.19) $$\phi_{(\phi(p,f;s),\tau(f,s))}(t) = \phi_{(p,f)}(t+s) \qquad \text{voor } t \in J(p,f)-s.$$

BEWIJS. Als $f \in A$, dan is in iedere geval voor elke $s \in \mathbb{R}$, $\tau^s f: W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continu, dus het beginwaardeprobleem

(3.20) $$x' = \tau^s f(x,t), \qquad x(t_0) = q$$

heeft voor elke $t_0 \in \mathbb{R}$ en $q \in W$ een oplossing. Laat $\psi: J \to \mathbb{R}^n$ zo'n oplossing zijn. Definieer $\phi: J + s \to \mathbb{R}^n$ door $\phi(t) := \psi(t-s)$ voor $t \in J + s$. Dan is op $J + s$

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\psi(t-s) = \tau^s f(\psi(t-s),t-s) = f(\phi(t),t)$$

en voorts is

$$\phi(t_0+s) = \psi(t_0) = q.$$

Dus ϕ is oplossing van (3.14) met $t_0 + s$ in plaats van t_0 en q in plaats van p. Omdat f aan de unicon-voorwaarde voldoet, volgt hieruit direct, dat oplossingen van (3.20) uniek zijn in de zin van DV2. Dus inderdaad is $\tau^s f \in A$.

Beschouw nu de oplossing $\phi_{(p,f)}$ op $J(p,f)$ van (3.14) met $t_0 = 0$, en definieer $\xi\colon J(p,f)-s \to \mathbb{R}^n$ door $\xi(t) := \phi_{(p,f)}(t+s)$ voor $t \in J(p,f)-s$. Dan is

$$\xi'(t) = \frac{d}{dt}\,\phi_{(p,f)}(t+s) = f(\phi_{(p,f)}(t+s),t+s) = \tau^s f(\xi(t),t),$$

en als bovendien $s \in J(p,f)$, dan is $J(p,f)-s$ een interval dat 0 bevat, terwijl $\xi(0) = \phi(p,f;s)$. Dus $\xi\colon J(p,f)-s \to \mathbb{R}^n$ is oplossing van (3.20) met $t_0 := 0$ en $q := \phi(p,f;s)$. Derhalve is

(3.21) $$J(p,f)-s \subset J(\phi(p,f;s),\tau(f,s))$$

en voor alle $t \in J(p,f)-s$ is

(3.22) $$\phi(p,f;t+s) = \phi(\phi(p,f;s),\tau(f,s);t).$$

Uit het eerste deel van het bewijs volgt nog, dat de functie

$$t \mapsto \phi(\phi(p,f;s),\tau(f,s);t-s)\colon J(\phi(p,f;s),\tau(f,s))+s \to \mathbb{R}^n$$

oplossing is van het beginwaardeprobleem

$$x' = f(x,t), \quad x(s) = \phi(p,f;s).$$

Hieruit volgt, in verband met de uniciteit der oplossingen en de maximaliteit van $J(p,f)$, rekening houdend met (3.21), dat $J(\phi(p,f;s),\tau(f,s))+s = J(p,f)$. Hiermee is (3.18) bewezen, en (3.19) volgt nu uit (3.22). $\square$

We voorzien A van de relatieve topologie in $C_n(W\times\mathbb{R})$. Dan geldt er ([Ha], p.24):

<u>DV5</u>. Zij $f \in A$, $p \in W$ en $t_0 \in \mathbb{R}$, en laat $[a;b] \subset J(t_0,p,f)$. Dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving U van f in A, een omgeving V van p in W en een $\delta > 0$ zo dat $J(t,q,h) \supset [a;b]$ en

$$|\phi(t,q,h;s)-\phi(t_0,p,f;s)| < \varepsilon$$

voor alle $s \in [a;b]$ en alle $t \in \mathbb{R}$ met $|t-t_0| < \delta$, alle $q \in V$ en alle $h \in U$.

De oplossingen van (3.14) hangen dus niet alleen continu af van de beginvoorwaarden t_0 en p, maar ook van de functie f in het rechterlid van de vergelijking.

(3.23) Als $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$, dan kunnen we f interpreteren als een veranderlijk vectorveld op W. Intuïtief is het duidelijk dat, zelfs als $f \in A$ (d.w.z. als f aan de unicon-voorwaarde voldoet), de oplossingen geen dynamisch systeem voortbrengen op de manier zoals dat voor autonome differentiaalvergelijkingen in (1.6) beschreven is: als een oplossing $\phi_{(p,f)}$ op tijdstip t in een punt x $(:= \phi_{(p,f)}(t))$ van W is gearriveerd zal het vandaar vertrekken met de snelheid $f(x,t)$, welke in het algemeen zal verschillen van de snelheid $f(x,0)$ waarmee de oplossing op tijdstip 0 uit x zou vertrekken; dus in het algemeen zal $\phi_{(p,f)}(t+u) \neq \phi_{(x,f)}(u)$, dit in tegenstelling tot wat in een dynamisch systeem zou gelden (groepseigenschap!)

<u>VOORBEELD</u>. Beschouw de volgende vergelijkingen in $\mathbb{R}^2$:

$$x' = 2t; \quad y' = 1.$$

Noteren we de oplossing die voor $t = 0$ de waarde (x,y) heeft, in afwijking van (3.16), gemakshalve met $\pi((x,y),t)$ dan is

$$\pi((x,y),t) = (x+t^2,y+t)$$

voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en $t \in \mathbb{R}$. Een eenvoudige berekening leert dat

$$\pi(\pi((x,y),t),s) = (x+t^2+s^2,y+t+s) \neq (x+(t+s)^2,y+t+s) = \pi((x,y),t+s).$$

Dus π heeft de groepseigenschap niet.

(3.24) STELLING. *Zij* W *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^n$ *, en laat de verzameling* $D \subset (W\times \mathcal{A}) \times \mathbb{R}$ *gedefinieerd zijn door*

$$D := \bigcup_{(x,f)\in W\times\mathcal{A}} \{(x,f)\} \times J(x,f)$$

(zie (3.16) voor de notatie). Definieer $\pi\colon D \to W \times \mathcal{A}$ *door*

$$\pi((x,f),t) = (\phi(x,f;t),\tau(f,t))$$

voor $((x,f),t) \in D$. *Dan is* $(W\times\mathcal{A},D,\pi)$ *een lokaal dynamisch systeem.*

BEWIJS. We controleren dat aan de eisen in (1.1) is voldaan.
A0. Aan de eisen (i) en (iii) is kennelijk voldaan. Wat (ii) betreft: D heeft de vereiste gedaante; merk op, dat inderdaad $0 \in J(x,f)$ voor elke $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$. Dat D open is in $(W\times\mathcal{A}) \times \mathbb{R}$ blijkt als volgt: als $((x,f),t) \in (W\times\mathcal{A}) \times \mathbb{R}$, zeg $t > 0$ (voor $t < 0$ gaat het bewijs analoog), dan is $[0;t] \subset J(x,f)$, en dus $[-\eta;t+\eta] \subset J(x,f)$ voor zekere $\eta > 0$. Uit DV5 volgt dan, dat er een omgeving U van f in $\mathcal{A}$ is en een omgeving V van x in W zo dat $[-\eta;t+\eta] \subset J(y,g)$ voor alle $(y,g) \in V \times U$. Met andere woorden, $V \times U \times [-\eta;t+\eta] \subset D$, ofwel $((x,f),t)$ is een inwendig punt van D. Dus D is open in $(W\times\mathcal{A}) \times \mathbb{R}$.
A1. Triviaal.
A2. Volgt gemakkelijk uit (3.19).
A3. Op grond van DV5 is $(x,f,t) \mapsto \phi(x,f;t)\colon D \to W$ continu (vgl. het bewijs van A3 op pag.6).
Voorts volgt uit de opmerking, voorafgaande aan (3.12) dat $(x,f,t) \mapsto \tau(f,t)\colon D \to \mathcal{A}$ continu is: het is de compositie van de continue projectie $(x,f,t) \mapsto (f,t)\colon D \to \mathcal{A} \times \mathbb{R} \subset C_n(W\times\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ en de continue afbeelding $\tau\colon C_n(W\times\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C_n(W\times\mathbb{R})$.
Hieruit volgt, dat π continu is.
A4. Laten $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$ en $s,t \in \mathbb{R}$ gegeven zijn, en neem aan dat $s \in J(x,f)$. Uit (3.18) volgt dan, dat

$$J(\pi((x,f),s)) = J(x,f)-s.$$

Hieruit volgt direct dat $t \in J(\pi(x,f),s)$ als en slechts als $t + s \in J(x,f)$, dat wil zeggen: $((\pi(x,f),s),t) \in D$ als en slechts als $((x,f),t+s) \in D$. $\square$

(3.25) OPMERKING. Als $f \in A$, dan is $W \times \Gamma(f)$ een invariante deelverzameling van $W \times A$. En als $f \in A$ voldoet aan de voorwaarde dat $\overline{\Gamma(f)} \subset A$ (afsluiting in de compact-open topologie), dan is $W \times \overline{\Gamma(f)}$ een invariante deelverzameling van $W \times A$. (De tweede bewering volgt direct uit de eerste; zie (1.38). De eerste bewering is op zijn beurt een gevolg van het feit dat $\pi((x,g),t) \in W \times \Gamma(g) = W \times \Gamma(f)$ voor alle $g \in \Gamma(f)$.) In het laatste geval, namelijk dat $\overline{\Gamma(f)} \subset A$, zullen we zeggen dat f aan de *sterke unicon-voorwaarde* voldoet (in [Se] wordt de term "regulier" gebruikt).

(3.26) PROPOSITIE. *Als* $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$ *aan een lokale Lipschitzvoorwaarde in* x *voldoet, waarbij de Lipschitz constante onafhankelijk is van* t, *dan voldoet* f *aan de sterke unicon-voorwaarde.*
De Lipschitzvoorwaarde, genoemd in de Propositie betekent dat er voor elke compacte $K \subset W$ een constante $k > 0$ is zo dat $|f(x,t)-f(y,t)| \le k|x-y|$ voor alle $x,y \in K$ en $t \in \mathbb{R}$.

BEWIJS. Zij $g \in \overline{\Gamma(f)}$. We zullen aantonen dat g aan dezelfde lokale Lipschitzvoorwaarde voldoet als f; hieruit volgt dan, dat $g \in A$ (zie [Ha], p.18).
Zij dus $K \subset W$ compact. Zij voorts $t \in \mathbb{R}$. Bij elke $\varepsilon > 0$ is er dan een $s \in \mathbb{R}$ zo dat $\tau^s f \in U(g;K\times\{t\},\varepsilon/2)$, en dus

$$\begin{aligned}|g(x,t)-g(y,t)| &\le |g(x,t)-\tau^s f(x,t)| + |\tau^s f(x,t)-\tau^s f(y,t)| + \\ &\quad |\tau^s f(y,t)-g(y,t)| \\ &< \varepsilon + |f(x,t+s)-f(y,t+s)| + \varepsilon \\ &< k|x-y| + 2\varepsilon\end{aligned}$$

voor alle $x,y \in K$ (waarin k de bij K behorende constante is). Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$, dus inderdaad is

$$|g(x,t)-g(y,t)| \le k|x-y|$$

voor alle $x,y \in K$. $\square$

(3.27) VOORBEELD. Zij $W := \mathbb{R}$ en definieer een continue functie $f: W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x,t) = \left(x^2 + \frac{1}{1+t^2}\right)^{1/3} \qquad \text{voor } (x,t) \in W \times \mathbb{R}.$$

Omdat $\partial f/\partial x$ continu is op $\mathbb{R}^2$ is f lokaal-lipschitz in de eerste variabele, dus f voldoet aan de unicon-voorwaarde, ofwel $f \in A$ (zie [Ha], p.18).

Het is niet moeilijk in te zien dat de functie $g: W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$g(x,t) = (x^2)^{1/3} \qquad \text{voor } (x,t) \in W \to \mathbb{R},$$

tot $\overline{\Gamma(f)}$ behoort. Immers is voor alle $(x,t) \in W \times \mathbb{R}$ en elke $s \in \mathbb{R}$

$$\tau^s f(x,t) - g(x,t) = \left(x^2 + [1+(t+s)^2]^{-1}\right)^{1/3} - (x^2)^{1/3}$$

$$= \frac{x^2 + [1+(t+s)^2]^{-1} - x^2}{(x^2+[1+(t+s)^2]^{-1})^{2/3} + (x^2+[1+(t+s)^2]^{-1})^{1/3}(x^2)^{1/3} + (x^2)^{2/3}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{1+(t+s)^2}\right)^{1/3}.$$

Voor gegeven compacte verzameling $K \subset W \times \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$ is deze uitdrukking ten hoogste ε voor alle $(x,t) \in K$, mits s voldoende groot is. Met andere woorden, $\tau^s f \in U(g;K,\varepsilon)$ voor voldoend grote waarden van s, ofwel $\Gamma(f) \cap U(g;K,\varepsilon) \neq \emptyset$. Dus inderdaad is $g \in \overline{\Gamma(f)}$.

Maar $g \notin A$: aan het beginwaardeprobleem

$$\dot{x} = (x^2)^{1/3}, \qquad x(0) = 0$$

voldoet zowel de functie $t \mapsto \left(\frac{1}{3}t\right)^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als de constante functie $t \mapsto 0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Samenvattend: f voldoet aan de unicon-voorwaarde, maar niet aan de sterke unicon-voorwaarde.

(3.28) <u>OPMERKING</u>. Zij $f \in \mathcal{A}$ invariant in het gegeneraliseerde Bebutovsysteem $\mathcal{B}_n(W)$, dat wil zeggen (3.13)<u>2</u>, $f(x,t) = g(x)$ voor alle $(x,t) \in W \times \mathbb{R}$, waarin $g: W \to \mathbb{R}$ continu is. Men noemt f dan wel een *autonome* functie: het bijbehorende beginwaardeprobleem

$$x' = f(x,t), \qquad x(0) = p \tag{3.29}$$

is in feite niets anders dan het autonome beginwaardeprobleem

$$x' = g(x), \qquad x(0) = p. \tag{3.30}$$

Omdat $\tau(f,t) = f$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, is nu

$$\pi((p,f),t) = (\phi(p,f;t),\tau(f,t)) = (\phi(p,f;t),f)$$

voor alle $p \in W$ en alle $t \in J(p,f)$. Hieruit volgt onmiddellijk: *Als* $f \in \mathcal{A}$ *autonoom is, dan is* $W \times \{f\}$ *een (gesloten) invariante deelverzameling van* $W \times \mathcal{A}$, *en de afbeelding* $p \mapsto (p,f): W \to W \times \{f\}$ *definieert een equitempisch isomorfisme van het door* (3.30) *gedefinieerde lokale dynamische systeem op* W *naar de restrictie van het door* (3.29) *gedefinieerde systeem op* $W \times \mathcal{A}$ *tot* $W \times \{f\}$.

3. Limietverzamelingen en stabiliteit

Zij $n \in \mathbb{N}$ en zij W een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. In deze paragraaf hanteren we dezelfde notatie als in de vorige. Zie in het bijzonder (3.16) en (3.24).
Beschouw $f \in \mathcal{A}$.
In de kwalitatieve analyse van de oplossingen van het beginwaardeprobleem

$$\dot{x} = f(x,t); \qquad x(0) = p$$

is men geïnteresseerd in het gedrag van de oplossingen $\phi_{(p,f)}$: $t \mapsto \phi(p,f;t): J(p,f) \to W$. Omdat dit geen bewegingen in een lokaal dynamisch systeem zijn (3.23) kunnen we hiervoor niet zonder meer de begrippen uit de theorie der lokale dynamische systemen gebruiken. In het nu volgende zullen we een aantal begrippen uit de theorie der lokale dynamische systemen herformuleren voor oplossingen van (3.27), en we zullen dat zo doen dat de kanonieke projectie

$$p_1\colon W \times \mathcal{A} \to W$$

een goed verband aangeeft tussen de "nieuwe" begrippen (in W) en de "oude", toegepast op het lokale dynamische systeem $(W\times\mathcal{A},D,\pi)$ uit (3.24). Gemakshalve zullen we de restrictie van p_1 tot $W \times \Gamma(f)$ of tot $W \times \overline{\Gamma(f)}$ eveneens aanduiden met p_1. Iets dergelijks zullen we doen voor de kanonieke projectie $p_2\colon W \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (dus ook: $p_2\colon W \times \Gamma(f) \to \Gamma(f)$, etc.).
Om misverstand te voorkomen zullen we banen, baanafsluitingen, limietverzamelingen e.d. in $\mathcal{B}_n(W)$ aanduiden met $\Gamma_\tau(f), C_\tau(f), \Omega_\tau(f)$, etc., terwijl we die in $(W\times\mathcal{A},D,\pi)$ zullen aanduiden met $\Gamma_\pi(x,f), C_\pi(x,f)$, $\Omega_\pi(x,f)$, etc. Als gebruikelijk is $(\alpha(x,f),\omega(x,f)) := J(x,f)$ voor $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$.

<u>WAARSCHUWING</u>. Voor $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$ is $C_\pi(x,f)$ gedefinieerd als de afsluiting van $\Gamma_\pi(x,f)$ in $W \times \mathcal{A}$. Merk op, dat $C_\pi(x,f)$ *niet* behoeft samen te vallen met de afsluiting van $\Gamma_\pi(x,f)$ in $W \times \overline{C_n(W\times\mathbb{R})}$, welke afsluiting we hier gemakshalve zullen aanduiden met $\overline{\Gamma_\pi(x,f)}$: in het algemeen is $\overline{\Gamma_\pi(x,f)} \not\subset W \times \mathcal{A}$. Omdat $W \times \mathcal{A}$ de relatieve topologie van $W \times C_n(W\times\mathbb{R})$ heeft, geldt er:

$$C_\pi(x,f) = \overline{\Gamma_\pi(x,f)} \cap (W\times\mathcal{A}).$$

Merk ook op, dat $C_\tau(f)$ de afsluiting van $\Gamma_\tau(f)$ in $C_n(W\times\mathbb{R})$ is (dus *niet* de afsluiting van $\Gamma_\tau(f)$ in $\mathcal{A}$), en dat niet noodzakelijkerwijs $C_\tau(f) \subset \mathcal{A}$ (zie (3.27)).
In het geval dat wèl geldt $C_\tau(f) \subset \mathcal{A}$, is $\Gamma_\pi(x,f) \subset p_2^{-1}(C_\tau(f)) \subset W\times\mathcal{A}$. Omdat $p_2\colon W \times C_n(W\times\mathbb{R}) \to C_n(W\times\mathbb{R})$ continu is, is de verzameling $p_2^{-1}(C_\tau(f))$ echter gesloten in $W \times C_n(W\times\mathbb{R})$. Dus $\overline{\Gamma_\pi(x,f)} \subset p_2^{-1}(C_\tau(f)) \subset$ $\subset W \times \mathcal{A}$. Met andere woorden:
Als $C_\tau(f) \subset \mathcal{A}$, *dat wil zeggen, als* f *aan de sterke unicon-voorwaarde voldoet, dan is* $\overline{\Gamma_\pi(x,f)} \subset W \times \mathcal{A}$, *en* $C_\pi(x,f)$ *is in dat geval gelijk aan de afsluiting van* $\Gamma_\pi(x,f)$ *in* $W \times C_n(W\times\mathbb{R})$. (Analoge opmerkingen gelden met Γ^+, C^+ of Γ^-, C^- in plaats van Γ,C.)

(3.31) PROPOSITIE. *Zij* $(x,f) \in W \times A$. *Als* $\omega(x,f) < \infty$, *dan is* $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ *een gesloten, niet-compacte deelverzameling van* W.

BEWIJS. Zij $y \in \overline{\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))} \setminus \phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$; hierin duidt de streep de afsluiting in W aan. Dan is er een rij (t_n) in $[0;\omega(x,f))$ met $\lim t_n = \omega(x,f)$ en $y = \lim \phi(x,f;t_n)$. Uit de continuïteit van τ volgt dan, dat $g := \lim \tau(f,t_n) = \tau(f,\omega(x,f)) \in \Gamma_\tau(f) \subset A$, zodat

$$(y,g) = \lim(\phi(x,f;t_n),\tau(f,t_n))$$

$$= \lim \pi((x,f),t_n) \in \overline{\pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))}$$

(hier duidt de streep de afsluiting in $W \times A$ aan). Omdat $\omega(x,f) < \infty$ volgt uit (1.18) dat $\pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ gesloten is in $W \times A$, dus uit het voorgaande volgt dan dat $(y,g) \in \pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$. In het bijzonder volgt hieruit, dat $y = \phi(x,f;s)$ voor zekere $s \in [0;\omega(x,f))$, in strijd met de aanname dat $y \notin \phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$. Dus $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ is gesloten in W.
Omdat bovendien

$$\pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f)) \subset \phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f)) \times \tau_f[0;\omega(x,f)]$$

waarin $\tau_f[0;\omega(x,f)]$ compact is, zou uit de aanname dat $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ compact is volgen, dat $\pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ compact is, in strijd met $\omega(x,f) < \infty$ (1.18). Dus $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ is niet compact. □

(3.32) OPMERKING. Uit (3.31) volgt direct, dat als $\omega(x,f)$ eindig is, de oplossing $\phi_{(x,f)}(t)$ voor $t \to \omega(x,f)$ nadert tot de rand van W in $\mathbb{R}^n$, of $|\phi_{(x,f)}(t)| \to \infty$. Dit is een bekende stelling uit de theorie der differentiaalvergelijkingen.

(3.33) DEFINITIE. Zij $f \in A$ en $x \in W$. De oplossing $\phi_{(x,f)}$ heet *positief compact* als $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ relatief compact is in W.
Equivalent hiermee is: $\phi_{(x,f)}$ is positief compact als en slechts als de afsluiting van $\phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f))$ in $\mathbb{R}^n$ compact is en bevat is in W.
Merk nog op, dat als $\phi_{(x,f)}$ positief compact is, dan $\omega(x,f) = +\infty$ op grond van (3.31).

(3.34) <u>STELLING</u>. *De volgende voorwaarden voor* $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$ *zijn equivalent:*

(i) *De beweging* $\pi_{(x,f)}$ *is positief Lagrange-stabiel in* $(W\times\mathcal{A},D,\pi)$.

(ii) *Voor* $(x,f) \in W \times \mathcal{A}$ *geldt:*

<u>1</u>. $C_\tau^+(f) \subset \mathcal{A}$;

<u>2</u>. $C_\tau^+(f)$ *is compact, dat wil zeggen:* τ_f *is positief Lagrange-stabiel in* $\mathcal{B}_n(W)$;

<u>3</u>. *De oplossing* $\phi_{(x,f)}$ *is positief compact.*

<u>BEWIJS</u>. Neem aan dat $\pi_{(x,f)}$ positief Lagrange-stabiel is. Dan volgt allereerst uit (1.18) dat $\omega(x,f) = +\infty$, dus $[0,\omega(x,f)) = \mathbb{R}^+$. Uit de definitie van π in (3.24) volgt nu onmiddellijk, dat

$$\phi_{(x,f)}(\mathbb{R}^+) \subset p_1(C_\pi^+(x,f)); \quad \Gamma_\tau^+(f) \subset p_2(C_\pi^+(x,f)),$$

waarin de rechterleden compacte deelverzamelingen van W, resp. $\mathcal{A}$ zijn. Uit de eerste inclusie volgt nu (ii)<u>3</u>, en uit de tweede volgt dat de afsluiting van $\Gamma_\tau^+(f)$ in $\mathcal{A}$ compact is. Dus de afsluiting van $\Gamma_\tau^+(f)$ in $C_n(W\times\mathbb{R})$ valt hiermee dan samen en is dus eveneens compact. Hiermee zijn (ii)<u>1</u> en (ii)<u>2</u> aangetoond.
Neem omgekeerd aan dat (ii) geldt. Merk op, dat

$$\Gamma_\pi^+(x,f) = \pi_{(x,f)}[0;\omega(x,f)) \subset \phi_{(x,f)}[0;\omega(x,f)) \times \tau_f[0;\omega(x,f)).$$

Uit de gegevens volgt dat het rechterlid bevat is in een compacte deelverzameling van $W \times \mathcal{A}$. Dus $\Gamma_\pi^+(x,f)$ is relatief compact in $W \times \mathcal{A}$, dat wil zeggen, (i) geldt. □

(3.35) <u>GEVOLG</u>. *Neem aan dat* $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$ *aan de sterke unicon-voorwaarde voldoet (dus* $C_\tau(f) \subset \mathcal{A}$*) en dat f begrensd en uniform continu is op alle verzamelingen van de gedaante* $K \times \mathbb{R}^+$ *met K een compacte deelverzameling van W. Dan zijn de volgende voorwaarden voor* $x \in W$ *equivalent:*

(i) *De beweging* $\pi_{(x,f)}$ *is positief Lagrange-stabiel in de restrictie van* $(W\times\mathcal{A},D,\pi)$ *tot* $W \times C_\tau(f)$.

(ii) *De oplossing* $\phi_{(x,f)}$ *is positief compact.*

<u>BEWIJS</u>. Volgt uit (3.34) en (3.13)<u>3</u>. □

(3.36) OPMERKING. Het zal duidelijk zijn dat op dezelfde wijze als in (3.33) ook de begrippen *negatief compacte oplossing* en *compacte oplossing* gedefinieerd kunnen worden, en dat daarvoor de analoga van (3.34) en (3.35) bewezen kunnen worden (iets dergelijks geldt overigens ook voor (3.31)). We zullen in het vervolg alleen definities en eigenschappen van positieve begrippen formuleren en bewijzen; de behandeling van de andere begrippen laten we aan de lezer over.

(3.37) DEFINITIE. Zij $(x,f) \in W \times \mathring{A}$. Onder de *positieve limietverzameling van de oplossing* $\phi_{x,f}$ verstaan we de verzameling

$$L^+(x,f) := \bigcap \{\overline{\phi_{(x,f)}[t;\omega(x,f))} \mid 0 \leq t < \omega(x,f)\}$$

(hierin duidt de streep de afsluiting in W aan).
De oplossing $\phi_{(x,f)}$ heet *positief Poisson-stabiel* als $x \in L^+(x,f)$.

(3.38) OPMERKING. Bovenstaande definities zijn enerzijds op te vatten als generalisaties van positieve limietverzamelingen van bewegingen in dynamische systemen (vgl. (1.23), de definitie van $\Omega^*(x)$), resp. van positief Poisson-stabiele bewegingen in dynamische systemen (vgl. (1.47)(v)). Anderzijds leidden bovenstaande begrippen reeds een eigen leven in de theorie der differentiaalvergelijkingen.

(3.39) PROPOSITIE. *Zij* $(x,f) \in W \times \mathring{A}$. *Indien de oplossing* $\phi_{(x,f)}$ *positief compact is, dan is* $L^+(x,f)$ *een niet-lege, compacte en samenhangende verzameling. Voor iedere omgeving* U *van* $L^+(x,f)$ *is er een* $t_0 \in \mathbb{R}$ *zo dat* $\overline{\phi_{(x,f)}[t;\infty)} \subset U$ *voor alle* $t \geq t_0$.
N.B. Als $L^+(x,f) \neq \emptyset$ dan is $\omega(x,f) = +\infty$, dus het heeft zin te spreken over $\overline{\phi_{(x,f)}[t,\infty)}$ voor $t \geq 0$.

BEWIJS. Geheel analoog aan (1.54). □

(3.40) LEMMA. *Zij* $(x,f) \in W \times \mathring{A}$. *Dan geldt er:*

1. *Voor alle* $s \in J(x,f)$ *is* $L^+(x,f) = L^+(\phi_{(x,f)}(s),\tau^s f) = L^+(\pi(x,f),s)$.
2. *Voor alle* $y \in W$ *geldt:* $y \in L^+(x,f)$ *als en slechts als er een rij* (t_k) *in* $[0;\omega(x,f))$ *is met*

$$t_k \to \omega(x,f) \quad en \quad \phi_{(x,f)}(t_k) \to y \ (k\to\infty).$$

3. $p_1(\Omega_\pi(x,f)) \subset L^+(x,f)$ *en* $p_2(\Omega_\pi(x,f)) \subset \Omega_\tau(f) \cap A$.

BEWIJS.

1. Uit (3.18) en (3.19) volgt dat voor $0 \le s < \omega(x,f)$ geldt:

$$\begin{aligned} L^+(\phi_{(x,f)}(s),\tau^s f) &= \bigcap_{0\le u<\omega(x,f)-s} \overline{\phi_{(\phi(x,f;s),\tau(f,s))}[u;\omega(x,f)-s)} \\ &= \bigcap_{0\le u<\omega(x,f)-s} \overline{\phi_{(x,f)}[u+s;\omega(x,f))} \\ &= \bigcap_{s\le v<\omega(x,f)} \overline{\phi_{(x,f)}[v;\omega(x,f))} \\ &= \bigcap_{0\le v<\omega(x,f)} \overline{\phi_{(x,f)}[v;\omega(x,f))} = L^+(x,f). \end{aligned}$$

2. "Als": triviaal.
"Slechts als": zij $y \in L^+(x,f)$, en zij U_k de bol in $\mathbb{R}^n$ met straal $1/k$ om y. Dan is voor $1/k < \omega(x,f)$: $U_k \cap \phi_{x,f}[\omega(x,f)-1/k;\omega(x,f)) \neq \emptyset$, dus er is een $t_k \in [\omega(x,f)-1/k;\omega(x,f))$ zo dat $\phi_{(x,f)}(t_k) \in U_k$.
De rij (t_k) voldoet aan de gestelde eisen.

3. Op grond van (1.23) en de continuïteit van p_1 is:

$$\begin{aligned} p_1(\Omega_\pi(x,f)) &= p_1\left(\bigcap_{0\le t<\omega(x,f)} \overline{\pi_{(x,f)}[t;\omega(x,f))}\right) \\ &\subset \bigcap_{0\le t<\omega(x,f)} \overline{p_1\left(\pi_{(x,f)}[t;\omega(x,f))\right)} \\ &= \bigcap_{0\le t<\omega(x,f)} \overline{\phi_{(x,f)}[t;\omega(x,f))} = L^+(x,f). \end{aligned}$$

De tweede inclusie wordt analoog bewezen (merk op, dat er alleen iets bewezen hoeft te worden als $\Omega_\pi(x,f) \neq \emptyset$, dus $\omega(x,f) = \infty$). □

(3.41) GEVOLG. *Voor elke* $(x,f) \in W \times A$ *geldt: als* $\omega(x,f) < \infty$, *dan is* $L^+(x,f) = \emptyset$.

BEWIJS. Zij $\omega(x,f) < \infty$ en neem aan dat $L^+(x,f) \neq \emptyset$. Zij $y \in L^+(x,f)$. Dan is er een rij (t_k) in $[0,\omega(x,f))$ zo dat $t_k \to \omega(x,f)$ en $\phi_{(x,f)}(t_k) \to y$ voor $k \to \infty$. Als $g := \tau(f,\omega(x,f))$, dan volgt uit de continuïteit van τ dat $\tau(f,t_k) \to g \in A$. Dus

$$\pi((x,f),t_k) = (\phi_{(x,f)}(t_k),\tau(f,t_k)) \to (y,g) \in W \times \mathring{A}.$$

Omdat $0 \le t_k < \omega(x,f)$ en $t_k \to \omega(x,f)$ voor $k \to \infty$ volgt hieruit dat $(y,g) \in \Omega_\pi(x,f)$. Dus $\Omega_\pi(x,f) \neq \emptyset$, in strijd met (1.22) en de aanname dat $\omega(x,f) < \infty$. □

(3.42) <u>GEVOLG</u>. *Zij* $(x,f) \in W \times \mathring{A}$. *Dan geldt voor alle* $y \in W$: $y \in L^+(x,f)$ *als en slechts als* $\omega(x,f) = +\infty$ *en er een rij* (t_k) *in* $\mathbb{R}^+$ *is zo dat*

$$t_k \to \infty \quad \textit{en} \quad \phi_{(x,f)}(t_k) \to y \quad \textit{voor } k \to \infty.$$

<u>BEWIJS</u>. Volgt uit (3.41) en (3.40)<u>2</u>. □

We willen nu het verband tussen $\Omega_\pi(x,f)$ en $L^+(x,f)$ beschrijven. Eerst de volgende opmerkingen omtrent $\Omega_\pi(x,f)$.

(3.43) <u>OPMERKING</u>. Zij $(x,f) \in W \times \mathring{A}$ en zij $(y,g) \in \Omega_\pi(x,f)$. Dan geldt er:

<u>1</u>. Uit (1.24) volgt [1] dat er een rij (t_k) in $\mathbb{R}^+$ is met $t_k \to \infty$ en $\pi((x,f),t_k) \to (y,g)$ voor $k \to \infty$. Met andere woorden,

$$\phi(x,f;t_k) \to y \in W; \qquad \tau(f,t_k) \to g \in \mathring{A}.$$

Uit <u>DV5</u> (zie pag. 125) volgt dan, dat

$$\phi(\phi(x,f;t_k),\tau(f,t_k);u) \to \phi(y,g;u)$$

uniform in u op compacte deelverzamelingen van $J(y,g)$. Uit (3.19) volgt nog, dat dit juist betekent:

$$\phi_{(x,f)}(u+t_k) \to \phi_{(y,g)}(u) \qquad \text{voor } k \to \infty, \tag{3.44}$$

uniform in u op compacte deelverzamelingen van $J(y,g)$. (Men kan dit ook afleiden uit (2.3)<u>3</u> en het feit dat $\pi((x,f),t_k) \to (y,g)$ voor $k \to \infty$.)

---

[1] Omdat W en $\mathring{A}$ metriseerbaar zijn ($\mathring{A}$ is deelverzameling van de metriseerbare ruimte $C_n(W\times\mathbb{R})$; vgl. (3.2)), is $W \times \mathring{A}$ het eveneens.

2. Omdat $\Omega_\pi(x,f)$ invariant is, is $\pi((y,g),t) \in \Omega_\pi(x,f)$ voor alle $t \in J(y,g)$. Uit (3.40)3 volgt dan, dat

(3.45) $$\phi_{(y,g)}(t) \in L^+(x,f) \quad \text{voor alle } t \in J(y,g).$$

In het bijzonder is dus $J(y,g) = \mathbb{R}$ als $L^+(x,f)$ compact is (in dat geval is de oplossing $\phi_{(y,g)}$ compact wegens (3.45); pas nu (3.39) en (3.41) toe op (y,g)).

(3.46) STELLING. *Zij* $(x,f) \in W \times A$ *en neem aan dat* $C_\tau^+(f) \subset A$ *is en dat* $C_\tau^+(f)$ *compact is* (vgl. (3.13)3). *Dan is*

$$p_1(\Omega_\pi(x,f)) = L^+(x,f).$$

Meer in het bijzonder: bij elke $y \in L^+(x,f)$ *is er een* $g \in C_\tau^+(f)$ *zo dat* $(y,g) \in \Omega_\pi(x,f)$.

BEWIJS. In verband met (3.40)3 is het voldoende de laatste bewering aan te tonen. Zij dus $y \in L^+(x,f)$. Er is dan een rij (t_k) in $\mathbb{R}^+$ zo dat $t_k \to \infty$ en $\phi_{(x,f)}(t_k) \to y$ voor $k \to \infty$. Omdat $C_\tau^+(f)$ een compacte deelverzameling van A is, heeft de rij $\tau(f,t_k)$ een verdichtingspunt $g \in C_\tau^+(f) \subset A$. Dus is het punt $(y,g) \in W \times A$ een verdichtingspunt van de rij $((\phi_{x,f}(t_k),\tau(f,t_k)))$ in $W \times A$, dat is, van de rij $(\pi((x,f),t_k))$. Omdat $t_k \to \infty$ voor $k \to \infty$ volgt hieruit, dat $(y,g) \in \Omega_\pi(x,f)$. □

(3.47) GEVOLG. *Zij* $(x,f) \in W \times A$ *en neem aan dat* $C_\tau^+(f) \subset A$ *is en dat* $C_\tau^+(f)$ *compact is. Zij voorts* $\phi_{(x,f)}$ *een positief compacte oplossing. Dan geldt:*

1. $L^+(x,f) \neq \emptyset$ *en* $\Omega_\pi(x,f) \neq \emptyset$.
2. *Voor alle* $y \in L^+(x,f)$ *is er een* $g \in \Omega_\tau(f)$ *zo dat* $J(y,g) = \mathbb{R}$ *en* $\phi_{(y,g)}(\mathbb{R}) \subset L^+(x,f)$*; in het bijzonder is* $\phi_{(y,g)}$ *een compacte oplossing (positief èn negatief compact).*

BEWIJS.

1. Gebruik (3.39) en (3.46). (Alternatief: $\pi_{(x,f)}$ is positief Lagrange-stabiel (3.34), dus $\Omega_\pi(x,f) \neq \emptyset$ (1.54), en derhalve $L^+(x,f) \neq \emptyset$ (3.40)3.)
2. Neem $g \in C_\tau(f)$ zo dat $(y,g) \in \Omega_\pi(x,f)$ (3.46); zie nu (3.40)3 en (3.43)2. □

(3.48) <u>OPMERKING</u>. De in (3.47)<u>2</u> vermelde "invariantie"-eigenschap van $L^+(x,f)$ speelt een rol in de theorie der differentiaalvergelijkingen. Voor verdere details, zie [Se], p.64 en de daar genoemde literatuurverwijzing.

Uit het voorgaande blijkt dat bij de bestudering van het asymptotisch gedrag van oplossingen (dat wil zeggen, de bestudering van $L^+(x,f)$) de verzameling $\Omega_\tau(f)$ een rol speelt. De volgende terminologie wordt wel gebruikt: de differentiaalvergelijking $x' = g(x,t)$ heet een *limietvergelijking* voor $x' = f(x,t)$, $f \in C_n(W\times\mathbb{R})$, als $g \in \Omega_\tau(f)$.

Een eenvoudige (en niet zo bijster interessante) toepassing van (3.47) is de volgende: zij $f \in A$ zo dat $C_\tau^+(f) \subset A$ en $C_\tau^+(f)$ compact. Als géén der limietvergelijkingen voor $x' = f(x,t)$ een compacte oplossing heeft, dan heeft ook de vergelijking $x' = f(x,t)$ geen positief compacte oplossingen.

(3.49) <u>VOORBEELD</u>. Zij $W = \mathbb{R}$ en zij $f \in A$ gedefinieerd door

$$f(x,t) = x + \frac{1}{1+t^2} \text{ voor } (x,t) \in W \times \mathbb{R}.$$

Dan is $f \in A$, en $C_\tau(f) = \Gamma_\tau(f) \cup \{g\}$, waarin

$$g(x,t) := x \quad \text{voor } (x,t) \in W \times \mathbb{R}$$

(dus g is autonoom). In het bijzonder is $C_\tau^+(f)$ compact, $C_\tau^+(f) \subset A$ en $\Omega_\tau(f) = \{g\}$. De oplossingen van de limietvergelijkingen $x' = g(x,t)$ hebben de gedaante

$$\phi_{(y,g)}(t) = ye^t \quad \text{voor } (y,t) \in W \times \mathbb{R},$$

en hiervan is $\phi_{(0,g)}$ dus de enige compacte oplossing (en wel met $\Gamma_\pi(0,g) = \{(0,g)\}$). Uit (3.47)<u>2</u> volgt dan:
als $\phi_{(x,f)}$ een positief (resp. negatief) compacte oplossing is, dan is $L^+(x,f) = \{0\}$ (resp. $L^-(x,f) = \{0\}$).
Expliciet oplossen laat zien, dat de oplossing $\phi_{(x,f)}$ negatief compact is voor elke $x \in W$, en dat er precies één positief compacte oplossing is, namelijk de oplossing $\phi_{(x_0,f)}$ met $x_0 := -\int_0^\infty e^{-s}(1+s^2)^{-1}ds$.

IV MORFISMEN

1. Statische karakterisering van (dynamische) morfismen

(4.1) PROBLEEMSTELLING. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn. Zij* $\phi: X \to Y$ *een continue afbeelding. Onder welke voorwaarden is er een* $\tau: D \to \mathbb{R}$ *zo dat* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme is?*
Deze vraag is, in het geval dat ϕ een homeomorfisme is, behandeld door T. URA [*Funkcialay Ekvacioj* 12 (1969), 99-122] (zie ook [B], Stelling 4.22):
Als er een τ bestaat zo dat (ϕ,τ) een isomorfisme is, dan geldt $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$ voor alle $x \in X$ (1.60)1. Omgekeerd geldt onder zekere natuurlijke restricties dat, als $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$ voor alle $x \in X$, er inderdaad een τ bestaat zó dat (ϕ,τ) een isomorfisme is.
In deze paragraaf zullen we voorwaarden formuleren die garanderen dat bij een gegeven continue afbeelding ϕ een τ gevonden kan worden zó dat (ϕ,τ) een morfisme is.

De volgende voorbeelden dienen ter illustratie van de probleemstelling en als inleiding op de stelling van Ura (4.4).

(4.2) VOORBEELDEN.

1. Laat $X = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \pi)$ en $Y = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \rho)$ gegeven zijn door

$$\pi(x,t) := \pi(x_1,x_2,t) := (x_1+x_2t,x_2);$$

$$\rho(x,t) := \rho(x_1,x_2,t) := (x_1+|x_2|t,x_2).$$

In beide systemen bestaat de verzameling $\mathbb{R}\times\{0\}$ louter uit evenwichtspunten.
Zij nu ϕ de identieke afbeelding van $\mathbb{R}^2$.
Dan is er geen $\tau: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zó dat $(\phi,\tau): X \to Y$ een morfisme is: men rekent eenvoudig na dat zulk een τ moet voldoen aan $\tau(x,t) = t$ voor $x_2 > 0$ en $\tau(x,t) = -t$ voor $x_2 < 0$. Deze voorwaarden zijn in strijd met de continuïteit van τ in de punten van $\mathbb{R}\times\{0\}$; ook zijn ze in strijd met (1.57)M1. Het is ook, lettend op de "bewegingsrichtingen" in beide systemen, niet moeilijk om in te zien dat de systemen niet isomorf zijn: een morfisme voert boven- en onderhalfvlak óf in

zichzelf over óf in elkaar; voor één der halfvlakken vindt dus een omkering van de bewegingsrichting plaats, hetgeen niet kan op grond van (1.57)M1.

2. Laat $X = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \pi)$ en $Y = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \rho)$ met behulp van poolcoördinaten gegeven zijn door

$$\pi(r,\phi,t) := (r,\phi+t);$$

$$\rho(r,\phi,t) := (r,\phi+rt).$$

Er bestaat geen $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zó dat $(id,\tau)\colon X \to Y$ een morfisme is: met weinig moeite vindt men voor zo'n τ als nodige voorwaarde de formule

$$t = r\tau(r,\phi,t) \pmod{2\pi}.$$

Voor vaste ϕ en t volgt hieruit $\lim_{r\to 0} \tau(r,\phi,t) = \infty$, hetgeen in strijd is met de vereiste continuïteit van τ in $(0,\phi,t)$.
Men kan als volgt aantonen dat er geen isomorfisme tussen X en Y kan bestaan. Neem eens aan dat $(\psi,\tau)\colon X \to Y$ een isomorfisme is. Omdat onder een isomorfisme banen overgaan in banen, kunnen we ψ als volgt beschrijven:

$$\psi(r,\phi) = (\psi_1(r),\psi_2(r,\phi)),$$

waarin ψ_2, opgevat als functie van ϕ, periodiek mod 2π is. De functie ψ_1 is strikt stijgend, terwijl $\psi_1(0) = 0$. Dit laatste volgt uit het feit dat $(0,0)$ in beide systemen het enige evenwichtspunt is, hetgeen impliceert dat $\psi(0,0) = (0,0)$ en dat voor iedere cirkel C geldt dat $\psi(\mathit{ins}\ C) = \mathit{ins}(\psi(C))$. Verder is ψ_1 surjectief omdat ψ surjectief is. De functie ψ_1 is dus continu en in het bijzonder is $\lim_{r\to 0} \psi_1(r) = 0$. Nu is

$$(\psi_1(r),\psi_2(r,\phi+t)) = \psi(\pi(r,\phi,t)) = \rho(\psi(r,\phi),\tau(r,\phi,t)) =$$

$$= \rho(\psi_1(r),\psi_2(r,\phi),\tau(r,\phi,t)) = (\psi_1(r),\psi_2(r,\phi)+\psi_1(r)\tau(r,\phi,t)).$$

Hieruit volgt

$$\psi_2(r,\phi+t) = \psi_2(r,\phi) + \psi_1(r)\tau(r,\phi,t) \bmod 2\pi.$$

Neem nu $t = \pi$ en laat (r_k) een rij positieve getallen zijn zo dat $r_k \to 0$ voor $k \to \infty$. Omdat $(r,\phi+\pi)$ en (r,ϕ) antipoden zijn, kunnen we voor elke $k \in \mathbb{N}$ een waarde ϕ_k zó bepalen dat

$$2\pi > \psi_2(r_k,\phi_k+\pi)-\psi_2(r_k,\phi_k) \geq \pi.$$

Dan is $\lim_{k\to\infty} \tau(r_k,\phi_k,\pi) = \infty$, hetgeen in strijd is met de contiuïteit van τ in $(0,0)$.

3. Zij $X = Y = (\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\pi)$ waarin $\pi(x,t) = x + t$.
Laat ϕ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$\phi(x) := \begin{cases} x \text{ voor } x < 0 \\ \max\{0,x-1\} \text{ voor } x \geq 0. \end{cases}$$

Omdat voor iedere $s \in [0,1]$ geldt dat $\pi(0,s) = s$ en $\phi(\pi(0,s)) = 0$, terwijl $\phi(0) = 0$, is het duidelijk dat er geen morfisme (ϕ,τ): $X \to Y$ bestaat (τ zou moeten voldoen aan $\tau(0,s) = 0$ voor $s \in [0,1]$).

Uit de voorbeelden 1 en 2 zien we dat er "obstructie tegen isomorfismen" ontstaat door de aanwezigheid van evenwichten en door de verandering in de "bewegingsrichting". De volgende definitie dient ertoe om de moeilijkheden veroorzaakt door de verandering in de "bewegingsrichting" op te lossen.

(4.3) DEFINITIE. Zij (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem. Zij $D^* := \{(x,t) \mid (x,t) \in X \times \mathbb{R}$ en $(x,-t) \in D\}$, en definieer π^*: $D^* \to \mathbb{R}$ door $\pi^*(x,t) := \pi(x,-t)$. We noemen (X,D^*,π^*) het *reverse systeem bij* (X,D,π).

Dat (X,D^*,π^*) een lokaal dynamisch systeem is, is inderdaad triviaal. Merk nog op dat de baan van x in (X,D,π) samenvalt met die in (X,D^*,π^*).

Bij de formulering van de volgende stelling van URA gebruiken we de notatie van (2.19). Beperking, indien mogelijk, van een dynamisch systeem (X,D,π) tot een deelruimte C noteren we met (C,D_C,π_C). We merken nog op dat iedere component van X een invariante deelruimte is (1.38), zodat beperking tot een component van X mogelijk is (1.41).

(4.4) STELLING. (URA) *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn. Zij* $\phi\colon X \to Y$ *een homeomorfisme zó dat voor iedere* $x \in X$ *geldt* $\phi(\Gamma(x)) = \Gamma(\phi(x))$. *Zij* F *de verzameling van evenwichtspunten van* X. *Dan is er een* $\tau\colon D\backslash(F\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *zó dat voor iedere component* C *van* $X\backslash F$ *geldt dat óf*

$$(\phi|_C, \tau|_{D_C})\colon(C,D_C,\pi_C) \to (\phi(C), E_{\phi(C)}, \rho_{\phi(C)})$$

óf

$$(\phi|_C, -\tau|_{D_C})\colon(C,D_C,\pi_C) \to (\phi(C), E^*_{\phi(C)}, \rho^*_{\phi(C)})$$

een isomorfisme is.

Deze stelling, waarvan het bewijs gegeven wordt in (4.18), zullen we generaliseren tot een stelling betreffende continue afbeeldingen en morfismen (4.7). Daartoe geven we, gelet op voorbeeld (4.2)3, de volgende definitie. Hierbij vatten we een *boog* op als het topologisch beeld van [0,1]. We gebruiken de notatie van (2.49); in het bijzonder is $\widehat{axb}$ een boog van a naar b met x een intern punt van de boog.

(4.5) DEFINITIE. Laat (X,D,π) en (Y,E,ρ) lokale dynamische systemen zijn. Een continue afbeelding $\phi\colon X \to Y$ heet *baanbehoudend* indien aan de volgende voorwaarden voldaan is:

(i) $\phi(\Gamma(x)) \subset \Gamma(\phi(x))$ voor alle $x \in X$,

(ii) voor iedere $x \in X$ met de eigenschap, dat $\phi(x)$ géén evenwichtspunt van (Y,E,ρ) is, bestaat er een boog $\widehat{axb}$ in $\Gamma(x)$ zó dat $\phi|_{\widehat{axb}}$ een injectie is.

(4.6) PROPOSITIE. *Zij* $(\phi,\tau)\colon(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van dynamische systemen. Dan is* ϕ *baanbehoudend.*

BEWIJS. De continuïteit van ϕ volgt uit (1.57) M0. Voorwaarde (i) volgt uit (1.60)1. We bewijzen nu (ii). Zij $x \in X$ en zij $\phi(x)$ geen evenwichtspunt. Kies $s > 0$ zo dat, in het geval dat $\phi(x)$ periodiek punt is, $2s < p(\phi(x))$. Bepaal $\delta > 0$ zó dat $[-\delta,\delta] \subset J(x)$ en $\tau_x([-\delta,\delta]) \subset (-s,s)$ (continuïteit van τ_x). Noem $\alpha := \tau_x(-\delta)$ en $\beta := \tau_x(\delta)$. Uit (1.57)M1 volgt dat $\alpha < 0 < \beta$. Verder is $\beta - \alpha < p(\phi(x))$. Dan is $\rho_{\phi(x)}|_{[\alpha,\beta]}$ injectief en dus ook $\rho_{\phi(x)}\circ\tau_x|_{[-\delta,\delta]}$ is injectief (1.57)M1.

Volgens (1.57)<u>M2</u> is $\phi\circ\pi_x = \rho_{\phi(x)}\circ\tau_x$, en uit het voorgaande volgt dan, dat $\phi\circ\pi_x|_{[-\delta,\delta]}$ injectief is. Dus $\pi_x|_{[-\delta,\delta]}$ is injectief en $\phi|_{\pi_x[-\delta,\delta]}$ is injectief. Met $a := \pi_x(-\delta)$, $b := \pi_x(\delta)$ en $\widehat{axb} := \pi_x([-\delta,\delta])$ is aan (ii) voldaan. □

(4.7) <u>STELLING</u>. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn. Zij* G *de verzameling van evenwichtspunten van* Y. *Laat* $\phi\colon X \to Y$ *een baanbehoudende afbeelding zijn. Dan is er een* $\tau\colon D\setminus(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *zó dat voor iedere component* C *van* $X\setminus\phi^{-1}(G)$ *geldt dat óf*

$$(\phi|_C,\tau|_{D_C}):(C,D_C,\pi_C) \to (Y,E,\rho)$$

óf

$$(\phi|_C,-\tau|_{D_C}):(C,D_C,\pi_C) \to (Y,E^*,\rho^*)$$

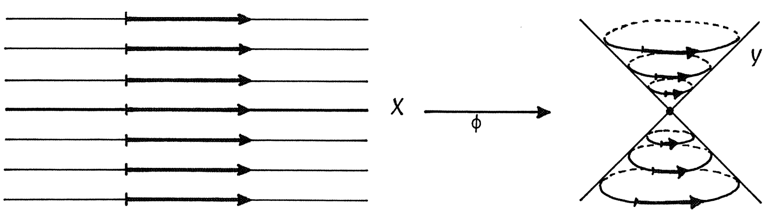
een morfisme is.

Voor het bewijs van de stelling zie (4.17). Merk op dat de stelling geen informatie geeft over het gedrag van τ in een omgeving van een punt $(x,t) \in \phi^{-1}(G) \times \mathbb{R}$. In onderstaand voorbeeld zullen we laten zien dat het in het algemeen niet mogelijk is τ continu voort te zetten over deelverzamelingen van $\phi^{-1}(G) \times \mathbb{R}$.
Naast stelling (4.7) geeft ook (4.10) nog informatie over baanbehoudende afbeeldingen.

(4.8) <u>VOORBEELD</u>. Zij $X = (\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3,\pi)$ gegeven door $\pi(x_1,x_2,t) := (x_1+t,x_2)$.
Zij K de kegel $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$.
Definieer $Y = (K,K\times\mathbb{R},\rho)$ door

$$\rho(x_1,x_2,x_3,t) := (x_3\cos(a+x_3t),x_3\sin(a+x_3t),x_3),$$

waarin a zó is dat $x_1 = x_3 \cos a$ en $x_2 = x_3 \sin a$.



Zij ϕ: $\mathbb{R}^2 \to K$ gegeven door $\phi(x_1,x_2) = (x_2\cos x_1, x_2\sin x_1, x_2)$. Men rekent met weinig moeite na dat τ: $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welke bestaat volgens stelling (4.7) voldoet aan

$$t = x_2\tau(x_1,x_2,t) \bmod 2\pi.$$

Voor vaste x_1 en t met $0 < t < 2\pi$ vindt men $\lim_{x_2\to 0} \tau(x_1,x_2,t) = \infty$, waaruit blijkt dat τ in het algemeen niet continu voortzetbaar is.

Een belangrijk hulpmiddel bij het bewijs van (4.7) is de volgende stelling van LEWIN ([B],1.25). Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van de stelling van SIERPINSKI, die zegt: *als een compacte, samenhangende Hausdorffruimte* X *de vereniging is van een aftelbare collectie* $\{F_i | i = 1,2,\ldots\}$ *van gesloten en paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen, dan is precies één* F_i *niet leeg (en gelijk aan* X). Een helder bewijs van de stelling van SIERPINSKI is te vinden in [B] (stelling A.11, p.418).

(4.9) <u>STELLING</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. Zij* $x \in X$ *een punt dat geen periodiek punt is. Als nu* C *een compacte samenhangende verzameling is welke bevat is in* $\Gamma(x)$, *dan is* $\pi_x^{-1}(C)$ *een compact (eventueel gedegenereerd) interval* J *en* $\pi_x|_J: J \to C$ *is een homeomorfisme.*

<u>BEWIJS</u>. We tonen eerst aan dat er een strikt stijgende rij (t_n) van positieve getallen is met $t_n \to \omega(x)$ en $t_n \notin \pi_x^{-1}(C)$. Was dit namelijk niet het geval, dan zou voor zekere $T \in (0,\omega(x))$ gelden dat $[T,\omega(x)) \subset \pi_x^{-1}(C)$. Wegens de compactheid van C is nu $\emptyset \neq \Omega(x) \subset C \subset \Gamma(x)$. In verband met (1.39) volgt hieruit dat $\Gamma(x) = \Omega(x) = C$ en dus dat x periodiek is (1.29). Tegenspraak.
Evenzo is er een strikt dalende rij (s_n) van negatieve getallen $s_n \to \alpha(x)$ met $s_n \notin \pi_x^{-1}(C)$. Definieer nu $D_1 := \pi_x^{-1}(C) \cap [s_1,t_1]$ en $D_n := \pi_x^{-1}(C) \cap ([s_{n+1},s_n] \cup [t_n,t_{n+1}])$, $n = 2,3,\ldots$ en $C_n := \pi_x(D_n)$, $n = 1,2,\ldots$.
Merk op dat wegens de injectiviteit van π_x de verzamelingen C_n paarsgewijs disjunct zijn en dat $C = \bigcup \{C_n | n = 1,2,\ldots\}$. Omdat C compact en samenhangend is, volgt met de stelling van SIERPINSKI dat $C = C_i$ voor zekere i, terwijl $C_j = \emptyset$ voor alle $j \neq i$, en dus dat $\pi_x^{-1}(C) \subset [s_{i+1},t_{i+1}]$. Omdat $\pi_x|_{[s_{i+1},t_{i+1}]}$ een topologische inbedding

is, volgt hieruit dat $\pi_x^{-1}(C)$ een compacte en samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}$ is; m.a.w. $\pi_x^{-1}(C)$ is een interval J. De rest van de stelling volgt met weinig moeite. □

(4.10) <u>STELLING</u>. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn en zij* ϕ: $X \to Y$ *een baanbehoudende afbeelding. Dan geldt*:

<u>1</u>. *als* x *een evenwichtspunt is, dan is* $\phi(x)$ *een evenwichtspunt,*

<u>2</u>. *als* x *een periodiek punt is, dan is* $\phi(x)$ *een periodiek punt.*

<u>BEWIJS</u>.

<u>1</u>. Als $\phi(x)$ geen evenwichtspunt is, dan is er een boog $\widehat{axb}$ welke bevat is in $\Gamma(x)$ zó dat $\phi|_{\widehat{axb}}$ injectief is. Dan is i.h.b. $\Gamma(x)$ meerpuntig, waaruit met (1.28)<u>4</u> volgt dat x geen evenwichtspunt is.

<u>2</u>. Als x periodiek is, dan is $\Gamma(x)$ compact (1.29). Indien nu $\phi(x)$ geen periodiek punt is, dan volgt met stelling (4.9), dat $C := \phi(\Gamma(x))$ een compacte, samenhangende deelverzameling van $\Gamma(\phi(x))$ is welke homeomorf is met een interval (eventueel gedegenereerd). Laat q een "eindpunt" zijn van C. Kies een $p \in \Gamma(x)$ met $\phi(p) = q$. Omdat $\phi(p)$ geen evenwichtspunt is (want $\phi(x)$ is het niet) en omdat ϕ baanbehoudend is, is er een boog $\widehat{apb}$, bevat in $\Gamma(x)$, zó dat $\phi|_{\widehat{apb}}$ injectief (en dus een topologische inbedding) is. Dan is $\phi(\widehat{apb}) \subset C$ en $q = \phi(p)$ géén eindpunt van C. Tegenspraak. □

De volgende lemma's zijn een voorbereiding op het bewijs van stelling (4.7).

(4.11) <u>LEMMA</u>. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem en laat* $x \in X$. *Zij* f: $\mathbb{R} \to X$ *een continue afbeelding met* $f(0) = x$ *en* $f(\mathbb{R}) \subset \Gamma(x)$. *Dan geldt*:

<u>1</u>. *Als* x *geen periodiek punt is, dan is er een unieke continue functie* F: $\mathbb{R} \to J(x)$ *die voldoet aan* $\pi_x \circ F = f$.

<u>2</u>. *Als* x *een periodiek punt is, dan is er een continue functie* F: $\mathbb{R} \to J(x)$ *die voldoet aan* $\pi_x \circ F = f$ *en* $F(0) = 0$. *Als* x *geen evenwichtspunt is, is* F *uniek.*

<u>1</u>. Zij eerst I een compact interval in $\mathbb{R}$. Noem $f(I) = C$. Omdat C compact en samenhangend is en bevat is in $\Gamma(x)$, volgt met stelling (4.9) dat $\pi_x^{-1}(C) := J$ een compact interval is in $J(x)$ en dat $\pi_x|_J$ een homeomorfisme is. Definieer nu F: $I \to J(x)$ door $F := (\pi_x|_J)^{-1} \circ f$.

De afbeelding $F: I \to J(x)$ is continu en $\pi_x \circ F = f$. De uniciteit van zo'n F is duidelijk. Bewering 1 volgt hieruit met weinig moeite.

2. In het geval dat x een evenwichtspunt is, kan F gedefinieerd worden door $F(\mathbb{R}) = 0$ (elke continue $F: \mathbb{R} \to J(x)$ met $F(0) = 0$ voldoet!).
We behandelen nu het geval dat x periodiek punt is, maar geen evenwichtspunt. In dit geval is $J(x) = \mathbb{R}$ en $\Gamma(x)$ is homeomorf met S^1 (1.29)2. De afbeelding $\pi_x: \mathbb{R} \to \Gamma(x)$ is een zgn. *overdekkingsafbeelding*. (Zie [M] voor een gedetailleerde uiteenzetting hierover.) Uit de algemene theorie betreffende overdekkingsafbeeldingen volgt dat f "gelift" kan worden naar een continue $F: X \to \mathbb{R}$. Zo'n "lift" is uniek na keuze van $F(0) \in \pi_x^{-1}(x)$. Het volgende bewijs is nogal schetsmatig.

Zij eerst $I := [0,T]$ met $T > 0$. Voor iedere $t \in I$ is er wegens de continuïteit van f een $\varepsilon > 0$ zó dat $f[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ een echte deelverzameling is van $\Gamma(x)$. Wegens de compactheid van I zijn er nu eindig veel punten $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ zó dat ieder interval $[t_i, t_{i+1}]$ door f op een echte deelverzameling van $\Gamma(x)$ wordt afgebeeld, $i = 0,\ldots,n-1$. Definieer $F(0) := 0$. Neem voor $i \leq n-1$ aan dat F reeds gedefinieerd is op $[0,t_i]$ en voldoet, voor zover gedefinieerd aan $\pi_x \circ F = f$. Kies $y \in \Gamma(x)$ zó dat $y \notin f[t_i, t_{i+1}]$. Nu is $\pi_x^{-1}(\Gamma(x) \backslash \{y\}) = \bigcup \{U_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$, waarin $U_j := (\alpha_j, \beta_j)$ met $\beta_j - \alpha_j = p(x)$ en $\alpha_j = \beta_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$. Voor iedere $j \in \mathbb{Z}$ is $\pi_x|_{U_j}$ een topologische inbedding van U_j in $\Gamma(x)$ en er is precies een $j_0 \in \mathbb{Z}$ met $F(t_i) \in U_{j_0}$. Definieer nu voor $t \in [t_i, t_{i+1}]$ de afbeelding F door $F(t) := (\pi_x|_{U_{j_0}})^{-1} f(t)$. In verband met de keuze van j_0 is F goed gedefinieerd op $[0, t_{i+1}]$ en bovendien is F continu, want F is continu op $[0,t_i]$ en op $[t_i, t_{i+1}]$. Uit de constructie volgt dat $\pi_x \circ F = f$ en $F(0) = 0$. Tevens blijkt uit de constructie de uniciteit van F. In het geval dat I een interval is van de vorm $[T,0]$ met $T < 0$ kan F op soortgelijke wijze bepaald worden. Bewering 2 volgt nu met weinig moeite. □

De eerste stap in de constructie van τ in het bewijs van stelling (4.7) bestaat uit het bepalen van de "parametertransformatie" τ_x voor iedere $x \notin \phi^{-1}(G)$.

(4.12) <u>LEMMA</u>. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn. Laat* $\phi\colon X \to Y$ *een continue afbeelding zijn met de eigenschap dat* $\phi(\Gamma(x)) \subset \Gamma(\phi(x))$ *voor iedere* $x \in X$. *Voor iedere* $x \in X$ *is er dan een continue functie* $\tau_x\colon J(x) \to J(\phi(x))$ *zó dat* $\tau_x(0) = 0$ *en*

$$\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau_x(t)) \quad \textit{voor alle } t \in J(x).$$

Als $\phi(x)$ *geen evenwichtspunt is, is* τ_x *uniek.*

<u>BEWIJS</u>. Zij $x \in X$. Definieer $f\colon J(x) \to Y$ door $f := \phi\circ\pi_x$. Dan is $f(J(x)) = \phi(\Gamma(x)) \subset \Gamma(\phi(x))$ en $f(0) = \phi(x)$. Omdat $J(x)$ homeomorf is met $\mathbb{R}$, volgt met lemma (4.11) dat er een (unieke) continue $F\colon J(x) \to J(\phi(x))$ bestaat zó dat $F(0) = 0$ en $\rho_{\phi(x)}\circ F = f$.
Noem $\tau_x := F$.
Blijkbaar geldt

$$\begin{tikzcd} J(x) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_x"'] \arrow[dr, "f"] & J(\phi(x)) \arrow[d, "\rho_{\phi(x)}"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\phi\circ\pi_x = f = \rho_{\phi(x)}\circ\tau_x$,

oftewel

$\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau_x(t))$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

De volgende fase in de constructie van τ bestaat uit het verzekeren van de monotonie van ieder der functies τ_x.

(4.13) <u>LEMMA</u>. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn en zij* $\phi\colon X \to Y$ *een baanbehoudende afbeelding.*
Voor iedere $x \in X$ *met de eigenschap dat* $\phi(x)$ *geen evenwichtspunt is (in* (Y,E,ρ)*) bestaat er een (unieke) continue functie* $\tau_x\colon J(x) \to J(\phi(x))$ *zó dat*

(i) $\tau_x(0) = 0$,

(ii) τ_x *is strikt monotoon,*

(iii) $\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau_x(t))$ *voor alle* $t \in J(x)$.

<u>BEWIJS</u>. Zij $x \in X$ zó dat $\phi(x)$ geen evenwichtspunt is. Op grond van lemma (4.12) is er een unieke continue functie $\tau_x\colon J(x) \to J(\phi(x))$ die aan (i) en (iii) voldoet. We hoeven alleen nog de strikte monotonie van τ_x te verifiëren. Hiertoe is het, gelet op de continuïteit van τ_x, voldoende om aan te tonen dat τ_x injectief is. Neem eens aan dat $\alpha < \beta$ en $\tau_x(\alpha) = \tau_x(\beta)$. Zij γ zó dat $\tau_x|_{[\alpha,\beta]}$ een globaal extreem heeft in γ. Noem $\pi_x(\gamma) := c$. Omdat ϕ baanbehoudend is, bestaat er een boog $\widehat{pcq}$ zó dat $\widehat{pcq} \subset \Gamma(c) = \Gamma(x)$ en $\phi|_{\widehat{pcq}}$ een injectie is. Het is duidelijk dat x geen evenwichtspunt is (4.10)<u>1</u>. We bepalen

nu een interval $[\alpha_1;\beta_1] \subset J(x)$ zó dat $\gamma \in (\alpha_1;\beta_1)$, terwijl $\pi_x|[\alpha_1;\beta_1]$: $[\alpha_1;\beta_1] \to \widehat{pcq}$ een homeomorfisme is. In het geval x geen periodiek punt is, kan dit direct met stelling (4.9). In het geval x een periodiek punt is, is $\Gamma(x) \neq \widehat{pcq}$ en er is dus een $r \in \Gamma(x)$ met $r \notin \widehat{pcq}$. Dan is $\pi_x^{-1}(\Gamma(x)\backslash\{r\}) = \cup\{U_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$, waarin $U_j = (s_j;t_j)$ met $s_j - t_j = p(x)$ en $s_j = t_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$. Voor iedere $j \in \mathbb{Z}$ is $\pi_x|_{U_j}$ een topologische inbedding van U_j in $\Gamma(x)$, terwijl $\widehat{pcq} \subset \pi_x(U_j)$. Er is precies één $j_0 \in \mathbb{Z}$ met $\gamma \in U_{j_0}$. Neem nu $[\alpha_1;\beta_1] := (\pi_x|_{U_{j_0}})^{-1}(\widehat{pcq})$. Indien nu $\alpha_2 := \max\{\alpha,\alpha_1\}$ en $\beta_2 := \min\{\beta,\beta_1\}$, dan is $\pi_x([\alpha_2;\beta_2]) \subset \widehat{pcq}$ en dus is $\phi\circ\pi_x|_{[\alpha_2;\beta_2]}$ injectief. Omdat $\phi\circ\pi_x = \rho_{\phi(x)}\circ\tau_x$ volgt hieruit dat $\tau_x|_{[\alpha_2;\beta_2]}$ injectief, en derhalve strikt monotoon is. Dit is in strijd met het feit dat $\gamma \in (\alpha_2;\beta_2)$ en $\tau_x|_{[\alpha;\beta]}$ een extreem heeft in γ. □

De volgende stelling is de centrale stelling van deze paragraaf.

(4.14) STELLING. *Laat* (X,D,π) *en* (Y,E,ρ) *lokale dynamische systemen zijn. Zij* G *de verzameling van evenwichtspunten van* Y. *Laat* ϕ: X $\to$ Y *een baanbehoudende afbeelding zijn. Dan is er een (unieke) functie* τ: $D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *zó dat*

(i) *Voor iedere* $x \in X\backslash\phi^{-1}(G)$ *is* τ_x: $J(x) \to J(\phi(x))$, *gedefinieerd door* $\tau_x(t) := \tau(x,t)$, *een strikt monotone afbeelding met* $\tau_x(0) = 0$.

(ii) *Voor iedere* $(x,t) \in D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$ *geldt* $\phi(\pi(x,t)) = \rho(\phi(x),\tau(x,t))$.

(iii) τ *is continu.*

Het bewijs van deze stelling wordt gegeven in (4.16). We merken nog op dat $X\backslash\phi^{-1}(G)$ geen evenwichtspunten bevat (4.10).

(4.15) OPMERKING. In (4.16) hebben we de volgende variant nodig van lemma (1.61). Laat (X,D,π), (Y,E,ρ), G en ϕ zijn als in de stelling. Stel dat τ: $D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ voldoet aan (i) en (ii) uit (4.14), terwijl τ_x continu is voor iedere $x \in X\backslash\phi^{-1}(G)$. Als nu $x \in X\backslash\phi^{-1}(G)$, dan geldt voor alle s en t met $t + s \in J(x)$ en $t \in J(x)$ dat

$$\tau(x,t+s) = \tau(x,t) + \tau(\pi(x,t),s).$$

We bewijzen dit als volgt. Zoals in het bewijs van (1.61) toont men aan dat dit geldt voor het geval x geen periodiek punt is, terwijl

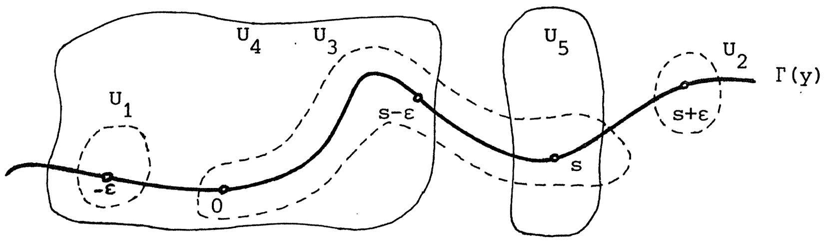
$$\tau(x,t) + \tau(\pi(x,t),s) - \tau(x,t+s) \in p(\phi(x))\mathbb{Z}$$

voor het geval dat x periodiek punt is. Voor vaste (x,t) is het linkerlid een continue functie van s, die 0 is voor $s = 0$. Omdat $p(\phi(x))\mathbb{Z}$ discreet is, volgt het gestelde.

(4.16) BEWIJS van (4.14).

Volgens lemma (4.13) is er voor iedere $x \in X\backslash\phi^{-1}(G)$ een continue $\tau_x\colon J(x) \to J(\phi(x))$ die aan (4.13)(i),(ii) en (iii) voldoet. Definieer $\tau\colon D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ door $\tau(x,t) := \tau_x(t)$. Dan is voldaan aan de uitspraken (i) en (ii) van (4.14). We bewijzen nu de continuiteit van τ. Zij $(x,t) \in D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$. We nemen aan dat $t \geq 0$ en dat τ_x strikt stijgend is (in de andere gevallen gaat het bewijs analoog). Verder nemen we voorlopig aan dat $\tau(x,t) < p(\phi(x))$ in het geval dat $\phi(x)$ periodiek punt is. Zij $s := \tau(x,t)$ en $y := \phi(x)$, en laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. We zoeken een omgeving W van x en een $\delta > 0$ zó, dat voor alle $(x',t') \in W \times [t-\delta;t+\delta]$ geldt $|\tau(x',t')-s| < \varepsilon$. We mogen aannemen dat $s + 2\varepsilon < p(y)$. Dan is $\rho_y|_{[-\varepsilon;s+\varepsilon]}$ een topologische inbedding van $[-\varepsilon;s+\varepsilon]$ in Y.

Kies nu in Y paarsgewijs disjuncte omgevingen U_1, U_2 en U_3 van respectievelijk $\rho(y,-\varepsilon)$, $\rho(y,s+\varepsilon)$ en de compacte verzameling $\rho(\{y\}\times[0;s])$



[De punten op $\Gamma(y)$ zijn aangegeven met de corresponderende parameterwaarde uit $J(y)$]

Kies verder disjuncte omgevingen U_4 en U_5 van respectievelijk de compacte verzameling $\rho(\{y\} \times [-\varepsilon;s-\varepsilon])$ en het punt $\rho(y,s)$. Op grond van de continuïteit van ρ is er een omgeving V_1 van y in Y zó dat

$$\rho(V_1\times\{-\varepsilon\}) \subset U_1 \text{ en } \rho(V_1\times\{s+\varepsilon\}) \subset U_2.$$

Verder is er volgens lemma (2.2)1 een omgeving V_2 van y in Y zó dat

$$\rho(V_2\times[-\varepsilon;s-\varepsilon]) \subset U_4.$$

Nu kiezen we op grond van de continuïteit van ϕ een omgeving W_1 van x zó dat

$$\phi(W_1) \subset V_1 \cap V_2.$$

Omdat $\phi\circ\pi\colon D \to Y$ continu is en omdat $\phi\circ\pi(\{x\}\times[0;t]) = \rho(\{y\}\times[0;s])$, zoals men makkelijk narekent met behulp van (4.14)(ii), volgt met lemma (2.2)$\underline{1}$ dat er een omgeving W_2 van x en een $\delta_1 > 0$ bestaan zó dat

$$\phi\circ\pi(W_2\times[-\delta_1;t+\delta_1]) \subset U_3.$$

Kies verder een omgeving W_3 van x en een $\delta_2 > 0$ zó dat

$$\phi\circ\pi(W_3\times[t-\delta_2;t+\delta_2]) \subset U_5$$

(bedenk dat $\phi(\pi(x,t)) = (y,s)$).
Zij nu $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ en $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ en zij $(x',t') \in (W \times [t-\delta;t+\delta]) \cap (D\backslash\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$. We tonen aan dat inderdaad $|\tau(x',t')-s| < \varepsilon$. Beschouw daartoe $I := [0;t']$ in het geval $t' \geq 0$ en $I := [t';0]$ in het geval $t' < 0$.
Nu is $I \subset [-\delta;t+\delta]$ en $\{x'\} \times I \subset W_2 \times [-\delta_1;t+\delta_1]$ en dus geldt $\rho(\{\phi(x')\} \times \tau_{x'}(I)) = \phi\circ\pi(\{x'\}\times I) \subset U_3$. Verder is $\rho(\phi(x'),-\varepsilon) \in \rho(V_1\times\{-\varepsilon\}) \subset U_1$ en $\rho(\phi(x'),s+\varepsilon) \in \rho(V_1\times\{s+\varepsilon\}) \subset U_2$.
Omdat U_1, U_2 en U_3 paarsgewijs disjunct zijn volgt hieruit met behulp van de continuïteit van $\tau_{x'}$ dat $\tau_{x'}(I)$ een interval is, dat $-\varepsilon$ en $s + \varepsilon$ niet bevat. Omdat $0 \in \tau_{x'}(I)$ vinden we dat $\tau_{x'}(I) \subset (-\varepsilon;s+\varepsilon)$ en in het bijzonder dat $\tau(x',t') \in (-\varepsilon;s+\varepsilon)$.
Was nu $\tau(x',t') \in (-\varepsilon;s-\varepsilon)$, dan zou enerzijds

$$\rho(\pi(x',t')) = \rho(\phi(x'),\tau(x',t')) \in \rho(V_2\times[-\varepsilon;s-\varepsilon]) \subset U_4,$$

terwijl anderzijds

$$\phi(\pi(x',t')) \in \phi(\pi(W_3\times[t-\delta_2;t+\delta_2])) \subset U_5,$$

hetgeen uitgesloten is omdat U_4 en U_5 disjunct zijn. Dus $\tau(x',t') \in (s-\varepsilon;s+\varepsilon)$, d.w.z. τ is continu in het punt (x,t).
We verwijderen nu de restrictie $|\tau(x,t)| < p(\phi(x))$. Zij dus

$(x,t) \in D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$ willekeurig. We nemen gemakshalve aan dat $t > 0$ (als $t < 0$ is gaat het bewijs analoog; het geval $t = 0$ hoeft niet bekeken te worden omdat $\tau(x,0) = 0 < p(\phi(x)))$.
Omdat τ_x uniform continu is op $[0;t]$ is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $|\tau_x(u)-\tau_x(u')| < p(\phi(x))$ voor alle $u,u' \in [0;t]$ met $|u-u'| < t/n$.
Voor $(x',t') \in D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$ is, op grond van (4.15) voor $k = 0,\dots,n-1$

$$\tau\left(x', \frac{(k+1)t'}{n}\right) = \tau\left(x', \frac{kt'}{n} + \frac{t'}{n}\right) = \tau\left(x', \frac{kt'}{n}\right) + \tau\left(\pi(x', \frac{kt'}{n}),\frac{t'}{n}\right)$$

en dus

$$\tau(x',t') = \sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\pi(x', \frac{kt'}{n}),\frac{t'}{n}\right).$$

Merk nu op, dat op grond van het eerste deel van het bewijs, τ continu is in de punten $(\pi(x,\frac{kt}{n}), \frac{t}{n})$ voor $k = 0,\dots,n-1$, omdat deze alle in $D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$ liggen, en bovendien

$$\left|\tau\left(\pi(x,\frac{kt}{n}),\frac{t}{n}\right)\right| = \left|\tau\left(x, \frac{(k+1)t}{n}\right) - \tau\left(x,\frac{kt}{n}\right)\right| < p(\phi(x)) = p\left(\phi(\pi(x,\frac{kt}{n}))\right)$$

op grond van de keus van n en het feit dat

$$\left|\frac{(k+1)t}{n} - \frac{kt}{n}\right| = \frac{t}{n}.$$

Hieruit volgt, dat τ continu is in het punt (x,t). □

(4.17) <u>BEWIJS</u> van stelling (4.7).
Definieer τ zoals in (4.16). Wegens de continuïteit van τ op $D\backslash(\phi^{-1}(G)\times\mathbb{R})$ geldt voor iedere component C van $X\backslash\phi^{-1}(G)$: τ_x is dalend voor alle $x \in C$ óf τ_x is stijgend voor alle $x \in C$.
Hieruit volgt (4.7) met weinig moeite. □

(4.18) <u>BEWIJS</u> van stelling (4.4).
Uit (1.28)<u>4</u> volgt dat x een evenwichtspunt is van (X,D,π) als en slechts als $\phi(x)$ een evenwichtspunt is van (Y,E,ρ). Dus $G := \phi(F)$ is de verzameling van evenwichtspunten van (Y,E,ρ). Verder geldt dat C een component is van $X\backslash F$ als en slechts als $\phi(C)$ een component is van $X\backslash G$. Dan is wegens (4.7) òf $(\phi|_C,\tau|_{D_C})$ óf $(\phi|_C,-\tau|_{D_C})$ een morfisme, en wel met topologisch ruimtelijk effect. Pas nu (1.70) toe. □

2. Faktorisatie van morfismen

(4.19) LEMMA. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn en* $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ *een continue functie die de volgende eigenschappen heeft:*

(i) *Voor elke* $x \in X$ *is* $\tau_x\colon J(x) \to \mathbb{R}$[1] *strikt stijgend en* $\tau_x(0) = 0$.

(ii) *Voor elke* $x \in X$, $s \in J(x)$ *en* $t \in J(\pi(x,s)) = J(x) - s$ *geldt*

$$\tau_x(s+t) = \tau_x(s) + \tau_{\pi(x,s)}(t).$$

Dan is er een lokaal dynamisch systeem $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ *zo dat* $(id_X,\tau) : (X,D,\pi) \to (X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ *een isomorfisme is.*

BEWIJS. Voor elke $x \in X$ zij $\tilde{J}(x) := \tau_x(J(x))$. Laat vervolgens $\tilde{D} \subset X \times \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$\tilde{D} := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times \tilde{J}(x).$$

Merk nu op dat $\tilde{J}(x)$ een open interval is in $\mathbb{R}$ met $0 \in \tilde{J}(x)$, en dat het interval $J(x)$ door τ_x bijectief op $\tilde{J}(x)$ wordt afgebeeld (strikte monotonie van τ_x). Dus een functie $\tilde{\pi}\colon \tilde{D} \to X$ kan gedefinieerd worden door

(4.20) $$\tilde{\pi}(x,t) := \pi(x,\tau_x^{-1}(t)) \qquad \text{voor } (x,t) \in \tilde{D}.$$

We tonen nu aan dat $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ een lokaal dynamisch systeem is. Om aan te tonen dat $\tilde{D}$ open is in $X \times \mathbb{R}$ beschouwen we de afbeelding $\Phi\colon (x,t) \longmapsto (x,\tau(x,t))\colon D \to X \times \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat Φ continu en injectief is, en dat $\Phi(D) = \tilde{D}$. We laten nu zien dat Φ een open afbeelding van D in $X \times \mathbb{R}$ is. Daartoe is het voldoende om te laten zien dat $\Phi(U\times(a;b))$ open is in $X \times \mathbb{R}$ voor elke open verzameling U van X en elk open interval $(a;b)$ in $\mathbb{R}$ waarvoor $U\times(a;b) \subset D$. Welnu, voor dergelijke U en $(a;b)$ is, op grond van de strikte monotonie van elke τ_x:

$$\Phi(U\times(a;b)) = \bigcup_{x\in U} \{x\} \times \tau_x(a;b) = \bigcup_{x\in U} \{x\} \times (\tau_x(a);\tau_x(b)).$$

---

[1] Als gebruikelijk is $\tau_x(t) := \tau(x,t)$ voor $x \in X$ en $t \in J(x)$

Uit de continuïteit van τ volgt gemakkelijk dat het rechterlid een open deelverzameling van $X \times \mathbb{R}$ is. Dus $\Phi: D \to X \times \mathbb{R}$ is een open afbeelding.
In het bijzonder volgt hieruit, dat $\Phi(D) = \tilde{D}$ een open deelverzameling van $X \times \mathbb{R}$ is, en voorts, dat Φ een topologische afbeelding van D op $\tilde{D}$ induceert. Omdat uit (4.20) volgt dat $\tilde{\pi}\circ\Phi = \pi$, impliceert de continuïteit van π op D derhalve de continuïteit van $\tilde{\pi}$ op $\tilde{D}$.
Blijft nog over de verificatie van A1, A2 en A4 uit definitie (1.1).
Zij $x \in X$.
A1: $\tilde{\pi}(x,0) = \pi(x,0) = x$ want $\tau_x^{-1}(0) = 0$.
A4: Het is voldoende om aan te tonen dat $\tilde{J}(\tilde{\pi}(x,t)) = \tilde{J}(x)-t$ voor alle $t \in \tilde{J}(x)$. Zij dus $t = \tau_x(u)$ met $u \in J(x)$; dan is dus $\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x,u)$, en wegens eigenschap (ii) geldt er

$$\tilde{J}(\tilde{\pi}(x,t)) = \tilde{J}(\pi(x,u)) = \tau_{\pi(x,u)}J(\pi(x,u)) =$$

$$= \{\tau_{\pi(x,u)}(v) \mid v \in J(\pi(x,u)) = J(x)-u\}$$

$$= \{\tau_x(u+v)-\tau_x(u) \mid u + v \in J(x)\}$$

$$= \tau_x(J(x)) - \tau_x(u) = \tilde{J}(x)-t.$$

A2: Zij $t \in \tilde{J}(x)$ en $s \in \tilde{J}(\tilde{\pi}(x,t))$. Laat $u := \tau_x^{-1}(t)$; dan is $\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x,u)$, zodat $s \in \tilde{J}(\pi(x,u))$. Zij $v := (\tau_{\pi(x,u)})^{-1}(s) \in J(\pi(x,u))$. Wegens eigenschap (ii) is

$$s + t = \tau_{\pi(x,u)}(v) + \tau_x(u) = \tau_x(u+v),$$

waaruit volgt dat $u + v = \tau_x^{-1}(s+t)$. Dus is

$$\tilde{\pi}(x,t+s) = \pi(x,u+v) = \pi(\pi(x,u),v) = \tilde{\pi}(\pi(x,u),s) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t),s).$$

Dus $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ is een lokaal dynamisch systeem. Uit de definitie van $\tilde{\pi}$ volgt, dat $\pi(x,t) = \tilde{\pi}(x,\tau(x,t))$ voor alle $(x,t) \in D$. Samen met eigenschap (i) impliceert dit dat $(id_X,\tau) : (X,D,\pi) \to (X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ een morfisme is. We tonen nu aan, dat (id_X,τ) een isomorfisme is (omdat we geen veronderstellingen omtrent evenwichtspunten in X gemaakt hebben, kunnen we ons daarbij niet op (1.70) beroepen). Definieer $\sigma\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$ door

$$\sigma(x,t) := \tau_x^{-1}(t) \qquad \text{voor } (x,t) \in \tilde{D}.$$

Omdat $\sigma_x\colon \tilde{J}(x) \to J(x)$ de inverse is van $\tau_x\colon J(x) \to \tilde{J}(x)$, is σ_x strikt stijgend, en $\sigma_x(0) = 0$. Voorts is wegens (4.20): $\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x,\sigma(x,t))$ voor alle $(x,t) \in \tilde{D}$. Dus het paar (id_X,σ) voldoet aan M1 en M2 van definitie (1.57). Dat σ continu is, blijkt als volgt: voor alle $(x,t) \in D$ is

$$\sigma(\Phi(x,t)) = t,$$

dus $\sigma\circ\Phi\colon D \to \mathbb{R}$ is continu. Omdat Φ een topologische afbeelding van D op $\tilde{D}$ is, volgt hieruit dat σ continu is op $\tilde{D}$. Hiermee is aangetoond, dat $(id_X,\sigma) : (X,\tilde{D},\tilde{\pi}) \to (X,D,\pi)$ een morfisme is. Het is tenslotte gemakkelijk in te zien dat (id_X,σ) tweezijdig inverse is van (id_X,τ). Dus (id_X,τ) is inderdaad een isomorfisme. $\square$

(4.21) VOORBEELD. Laat (X,D,π) een lokaal dynamisch systeem zijn en $h\colon X \to \mathbb{R}$ een continue functie zo dat $h(x) > 0$ voor alle $x \in X$. Definieer $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ door

$$\tau(x,t) := \int_0^t \frac{ds}{h(\pi(x,s))} .$$

Dan is $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ continu (vgl. het bewijs op p.48,49), en het is direct duidelijk dat τ aan (4.19)(i) voldoet. Een eenvoudige berekening leert, dat τ ook aan (4.19)(ii) voldoet.

(4.22) OPMERKING. De voorwaarden (i) en (ii) in (4.19) zijn niet geheel onafhankelijk van elkaar; onder aanname van (ii) kan (i) vervangen worden door

(i)* Voor elke $x \in X$ is $\tau_x\colon J(x) \to \mathbb{R}$ strikt stijgend in een omgeving van het punt 0.

Immers, uit (ii) volgt (neem s=t=0) dat $\tau_x(0) = 0$ voor elke $x \in X$, en in combinatie met (i)* volgt hieruit, dat er voor elke $x \in X$ en $s \in J(x)$ een omgeving $(-\delta;\delta)$ van 0 is zo dat $\tau_{\pi(x,s)}(t) < 0$ voor $-\delta < t < 0$ en $\tau_{\pi(x,s)}(t) > 0$ voor $0 < t < \delta$. Uit (ii) volgt dan, dat ieder punt $s \in J(x)$ een omgeving in $J(x)$ heeft waarop τ_x strikt monotoon is. Als nu $a, b \in J(x)$, $a < b$, dan kan $[a;b]$ met eindig veel van zulke omgevingen overdekt worden, waaruit volgt dat $\tau_x(a) < \tau_x(b)$. Dus τ_x is dan strikt monotoon stijgend op heel $J(x)$.

(4.23) LEMMA. *Laat* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem zijn,* F *de verzameling evenwichtspunten in* X, *en* $\tau\colon D \to \mathbb{R}$ *een continue functie met de volgende eigenschappen:*

(i) *Voor elke* $x \in X\backslash F$ *is* $\tau_x\colon J(x) \to \mathbb{R}$ *strikt stijgend, en* $\tau_x(0) = 0$.

(ii) *Voor elke* $x \in X\backslash F$, $s \in J(x)$ *en* $t \in J(\pi(x,s))$ *is*

$$\tau_x(s+t) = \tau_x(s) + \tau_{\pi(x,s)}(t).$$

Dan is er een lokaal dynamisch systeem (X,D^*,π^*) *en een isomorfisme* $(id_X,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (X,D^*,\pi^*)$ *zo dat* $\tau^*_x = \tau_x$ *voor alle* $x \in \overline{X\backslash F}$.

BEWIJS. Definieer $\tau^*\colon D \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$\tau^*(x,t) := \begin{cases} \tau(x,t) & \text{als } x \notin F \\ \\ t\tau(x,1) & \text{als } x \in F \end{cases} .$$

Dan is τ^* continu op $((X\backslash F)\times\mathbb{R}) \cap D$ en op $(F\times\mathbb{R}) \cap D$, en om aan te tonen dat τ^* continu is op D is het voldoende om te laten zien dat $\tau(x,t) = t\tau(x,1)$ voor alle $(x,t) \in D$ waarvoor $x \in (\overline{X\backslash F}) \cap F = F\backslash F^0$. Welnu, voor $x \in F\backslash F^0$ en (willekeurige, maar vaste) $s,t \in \mathbb{R}$ is de functie

$$y \mapsto \tau_y(s+t) - \tau_y(s) - \tau_{\pi(y,s)}(t)$$

gedefinieerd in een geschikte omgeving U van x. Omdat deze functie continu is op U, nul is op $U\backslash F$ (eigenschap (ii)!), en omdat $x \in \overline{U\backslash F}$, is deze functie nul in x:

$$\tau_x(s+t) = \tau_x(s) + \tau_{\pi(x,s)} = \tau_x(s) + \tau_x(t).$$

Met andere woorden, $\tau_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu en additief. Maar dan is τ_x lineair, zodat inderdaad $\tau_x(t) = t\tau_x(1)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Hiermee is de continuïteit van τ^* op D aangetoond.

Het is nu niet moeilijk in te zien dat τ^* aan de eisen (i) en (ii) uit lemma (4.19) voldoet. Uit bovenstaand bewijs volgt ook nog, dat $\tau^*_x = \tau_x$ voor alle $x \in F\backslash F^0$, terwijl (per definitie) $\tau^*_x = \tau_x$ voor alle $x \in X\backslash F$. Dus inderdaad is $\tau^*_x = \tau_x$ voor alle $x \in X\backslash F^0 = \overline{X\backslash F}$. □

Gebruik makend van de in bovenstaand bewijs gebezigde techniek kan de volgende verscherping van (1.70) bewezen worden.

(4.24) STELLING. *Zij* $(\phi,\tau) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van lokale dynamische systemen. Indien* ϕ *een homeomorfisme is, dan zijn de systemen isomorf, en wel is er een isomorfisme* $(\phi,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *zo dat* $\tau_x = \tau^*_x$ *voor alle* $x \in X\backslash F$, *waarin* F *de verzameling evenwichtspunten in* X *is.*

BEWIJS. Inspectie van het bewijs van (1.70) leert dat het voldoende is aan te tonen dat er een morfisme $(\phi,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ is zo dat, voor elke $x \in X$, $\tau^*_x: J(x) \to J(\phi(x))$ een *surjectie* is: een dergelijk morfisme, waarin bovendien ϕ een homeomorfisme is, is een isomorfisme. Welnu, definieer

$$\tau^*(x,t) := \begin{cases} \tau(x,t) & \text{als } x \notin F \\ \\ t\tau(x,1) & \text{als } x \in F \end{cases}$$

voor $(x,t) \in D$. Als in het bewijs van (4.23) blijkt $\tau^*: D \to \mathbb{R}$ continu te zijn, terwijl ook $\tau^*_x = \tau_x$ voor alle $x \in \overline{X\backslash F}$. Een eenvoudige verificatie laat zien, dat $(\phi,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ een morfisme is. Merk nu tenslotte op, dat voor $x \in F$, $\tau^*_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjectief is ($\tau(x,1) > 0$!), en dat voor $x \notin F$, $\tau^*_x = \tau_x: J(x) \to J(\phi(x))$ surjectief is op grond van (1.67)3. □

(4.25) DEFINITIE. We zullen twee morfismen (ϕ,τ), $(\phi',\tau') : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *equivalent* noemen als

1. $\phi = \phi'$, en
2. $\tau_x = \tau'_x$ voor alle $x \in X$ waarvoor $\phi(x)$ geen evenwichtspunt is.

Notatie: $(\phi,\tau) \simeq (\phi',\tau')$.

Bovenstaande stelling zegt dus dat elk morfisme (ϕ,τ) waarvoor ϕ een homeomorfisme is, equivalent is met een isomorfisme (ϕ,τ') (N.B.: $\phi(x)$

is evenwichtspunt als en slechts als x het is; zie (1.67)1).

(4.26) STELLING. *Laat* $(\phi,\tau) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van lokale dynamische systemen zijn, met* F *en* G *als verzamelingen evenwichtspunten van* (X,D,π), *resp.* (Y,E,ρ). *Indien* $\phi^{-1}(G)\backslash F$ *een leeg inwendige heeft, is er een lokaal dynamisch systeem* (X,D^*,π^*) *en zijn er morfismen*

$$(id_X,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (X,D^*,\pi^*)$$

$$(\phi,\sigma) : (X,D^*,\pi^*) \to (Y,E,\rho)$$

waarin (id_X,τ^*) *een isomorfisme is en* (ϕ,σ) *een equitempisch morfisme, zo dat* $(\phi,\tau) \simeq (\phi,\sigma) \circ (id_X,\tau^*)$

$$\begin{tikzcd}
(X,D,\pi) \arrow[rr, "(\phi,\tau^*)"] \arrow[dr, "(id_X,\tau^*)"'] & & (Y,E,\rho) \\
& (X,D^*,\pi^*) \arrow[ur, "(\phi,\sigma)"'] &
\end{tikzcd}$$

BEWIJS. De functie $\tau: D \to \mathbb{R}$ is continu en voldoet aan (4.23)(i). Op grond van (1.61) is de relatie uit (4.23)(ii) vervuld voor alle $x \in X\backslash\phi^{-1}(G)$. Aangezien de verzameling waarop deze relatie vervuld is, gesloten is in X (vgl. het bewijs van (4.23)), is zij vervuld op $\overline{X\backslash\phi^{-1}(G)}$. Uit het gegeven volgt, dat

$$F \cup \overline{X\backslash\phi^{-1}(G)} = \overline{F \cup (X\backslash\phi^{-1}(G))}$$

$$= \overline{X\backslash(\phi^{-1}(G)\backslash F)} = X,$$

zodat $X\backslash F \subset \overline{X\backslash\phi^{-1}(G)}$. Dus aan (4.23)(ii) is voldaan. Zij nu $(id_X,\tau^*) : (X,D,\pi) \to (X,D^*,\pi^*)$ het isomorfisme waarvan het bestaan in (4.23) gegarandeerd is.
Definieer nu $\sigma: D^* \to \mathbb{R}$ door $\sigma(x,t) := t$. Om te laten zien dat $(\phi,\sigma) : (X,D^*,\pi^*) \to (Y,E,\rho)$ een morfisme is, is het voldoende om te láten zien, dat $\phi(\pi^*(x,t)) = \rho(\phi(x),t)$ voor alle $(x,t) \in D^*$.
Welnu, zij $(x,t) \in D^*$ en $u := (\tau_x^*)^{-1}(t)$. Dan is

$$\begin{aligned}\phi(\pi^*(x,t)) &= \phi(\pi^*(x,\tau^*(x,u))) \\ &= \phi(\pi(x,u)) \qquad ((\mathrm{id}_X,\tau^*) \text{ is morfisme}) \\ &= \rho(\phi(x),\tau(x,u)) \qquad ((\phi,\tau) \text{ is morfisme}).\end{aligned}$$

In het geval dat $x \in \phi^{-1}(G)$, is

$$\begin{aligned}\rho(\phi(x),\tau(x,u)) &= \phi(x) \\ &= \rho(\phi(x),\tau^*(x,u)) \\ &= \rho(\phi(x),t).\end{aligned}$$

En in het geval dat $x \notin \phi^{-1}(G) \supset F$, is $\tau_x = \tau_x^*$ en dus eveneens

$$\rho(\phi(x),\tau(x,u)) = \rho(\phi(x),\tau^*(x,u)) = \rho(\phi(x),t).$$

Hiermee is aangetoond dat (ϕ,σ) een (equitempisch) morfisme is. Het is duidelijk, dat de compositie van (id_X,τ^*) en (ϕ,σ) het morfisme (zie(1.58))

$$(\phi,\tau^*):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$$

is. Omdat $\tau_x^* = \tau_x$ voor alle $x \in \overline{X\backslash F} \subset \overline{X\backslash\phi^{-1}(G)}$, is $(\phi,\tau) \simeq (\phi,\tau^*)$. □

(4.27) GEVOLG. *Zij* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van lokale dynamische systemen. Indien* ϕ *injectief is (dus i.h.b. als* (ϕ,τ) *een isomorfisme is), bestaat er een lokaal dynamisch systeem* (X,D^*,π^*) *en een commutatief diagram van morfismen*

$$\begin{tikzcd}(X,D,\pi) \arrow[rr, "(\phi{,}\tau^*)"] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_X{,}\tau^*)"'] & & (Y,E,\rho) \\ & (X,D^*,\pi^*) \arrow[ur, "(\phi{,}\sigma)"'] & \end{tikzcd}$$

waarin (id_X,τ^*) *een isomorfisme is (parametertransformatie) en* (ϕ,σ) *een equitempisch morfisme, zo dat* $(\phi,\tau^*) \simeq (\phi,\tau)$.

BEWIJS. Dit volgt direct uit (4.26). Immers, op grond van (1.67)3 is $\phi^{-1}G\backslash F = \emptyset$. □

(4.28) GEVOLG. *Zij* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een morfisme van lokale dynamische systemen, en zij* $C := \overline{X\setminus\phi^{-1}(G)}$ *(G als in (4.26)). Geef de restrictie van* (X,D,π) *tot de (invariante!) verzameling* C *aan met* (C,D_C,π_C)*. Dan kan het morfisme* $(\phi|_C,\tau|_{D_C}):(C,D_C,\pi_C) \to (Y,E,\rho)$ *als volgt gefaktoriseerd worden*

$$\begin{tikzcd}
(C,D_C,\pi_C) \arrow[rr, "(\phi|_C{,}\tau|_{D_C})"] \arrow[dr, "(id_C{,}\tau|_{D_C})"'] & & (Y,E,\rho) \\
& (C,D',\pi') \arrow[ur, "(\phi|_C{,}\sigma)"'] &
\end{tikzcd}$$

waarin $(id_C,\tau|_{D_C})$ *een isomorfisme is (parametertransformatie) en* $(\phi|_C,\sigma)$ *een equitempisch morfisme.*

BEWIJS. In C heeft $\phi^{-1}(G) \cap C$ een leeg inwendige, dus $(\phi^{-1}(G)\setminus F) \cap C$ heeft zeker een leeg inwendige in C. Uit (4.26) volgt dus het bestaan van een parametertransformatie (id_C,τ^*) en een equitempisch morfisme $(\phi|_C,\sigma)$ waarvan de compositie $(\phi|_C,\tau^*)$ equivalent is met $(\phi|_C,\tau|_{D_C})$. Dus $\tau^*_x = \tau_x$ voor alle $x \in \overline{C\setminus\phi^{-1}(G)} = C \cap \overline{X\setminus\phi^{-1}(G)} = C$. Met andere woorden, $\tau^* = \tau|_{D_C}$. □

3. Een niet-differentieerbaar dynamisch systeem in $\mathbb{R}^4$

(4.30) In 1974 is door W.C. CHEWNING [Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 150-153] een voorbeeld gegeven van een dynamisch systeem dat niet isomorf is met een differentieerbaar lokaal dynamisch systeem (1.72). Ter voorbereiding van de behandeling van dit voorbeeld laten we eerst zien dat een differentieerbaar dynamisch systeem secties van een speciale vorm toelaat.

Aan het eind van deze paragraaf geven we nog een positief resultaat: we tonen aan dat ieder lokaal dynamisch systeem op een open deelverzameling in $\mathbb{R}^n$ isomorf is met een globaal dynamisch systeem (vgl. stelling 1.76)

We beginnen met de preciese formulering van een der beweringen in (2.45) betreffende lokale parallelliseerbaarheid van een differentieerbaar lokaal dynamisch systeem.

(4.31) STELLING. *Zij* X *een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^n$ *en zij* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *een vectorveld, waarbij* f *aan de uniconvoorwaarde voldoet. Zij* (X,D,π) *het lokale dynamische systeem bij* f *(1.6 en 1.72). Indien het punt* $x_0 \in X$ *geen evenwichtspunt is, dan is er een lokale representatie* $(Q,\eta;U)$ *van* (X,D,π) *in* x_0 *waarbij* Q *de doorsnede is van een hypervlak door* x_0 *en een gesloten (volle) bol om* x_0.

BEWIJS. Zij $E := \mathbb{R} f(x_0)$ en $F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f(x_0)\rangle = 0\}$ (hierin is $\langle\cdot,\cdot\rangle$ het inproduct in $\mathbb{R}^n$; dus F is de $(n-1)$-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^n$ die loodrecht op de vector $f(x_0)$ staat). Voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ zij $x = x_E + x_F$ de unieke ontbinding van x met $x_E \in E$ en $x_F \in F$. Merk op, dat $x \mapsto x_E$ en $x \mapsto x_F$ lineaire, continue afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar E, resp. F zijn. In het bijzonder kunnen we schrijven $f(x)_E = \phi(x) f(x_0)$ met $\phi(x) \in \mathbb{R}$, waarin $\phi\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ continu is, en $\phi(x_0) = 1$. Voor alle $x \in X$ en $t_1, t_2 \in J(x)$ geldt nu (omdat $\pi_x\colon J(x) \to X$ oplossing van de differentiaalvergelijking $x' = f(x)$ is)

$$\pi(x,t_2) - \pi(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\pi(x,s))\,ds,$$

waaruit volgt, dat

(4.32) $$(\pi(x,t_2) - \pi(x,t_1))_E = \int_{t_1}^{t_2} f(\pi(x,s))_E\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \phi(\pi(x,s))\,ds . f(x_0).$$

Uit de continuïteit van f en ϕ volgt nu dat er een omgeving U_1 van x_0 is zo dat voor alle $x \in U_1$ geldt:

(4.33) $$\phi(x) > \tfrac{1}{2}\ ;\ |f(x)| \le \tfrac{3}{2}\,|f(x_0)|.$$

In verband met de continuïteit van π zijn er een $\varepsilon > 0$ en een $\eta > 0$ zo dat voor de gesloten ε-bol U_2 om x_0 en het interval $I := [-\tfrac{1}{2}\eta; \tfrac{1}{2}\eta]$ geldt: $U_2 \times I \subset D$ en $\pi(U_2 \times I) \subset U_1$. Zij nu $Q := (x_0 + F) \cap U_2$.
Voor alle $q \in Q$ en $t_1, t_2 \in I$ geldt nu op grond van (4.32) en (4.33)

$$|\pi(q,t_2) - \pi(q,t_1)| \ge |(\pi(q,t_2) - \pi(q,t_1))_E| \ge \tfrac{1}{2}|f(x_0)|\,|t_2 - t_1|.$$

(want $\pi(q,s) \in \pi(U_2 \times I) \subset U_1$ voor s tussen t_1 en t_2). Met gebruikmaking van (2.10)(iv) volgt hieruit direct, dat Q een η-sectie is. We laten nu zien dat $(Q,\eta;U)$ een lokale representatie van (X,D,π) in x_0 is. Aan LP0 uit definitie (2.14) is voldaan (Q gesloten, $x_0 \in Q$ en Q een η-sectie). Wat LP1 betreft: $(x,t) \mapsto \pi(x,t)\colon Q \times I \to U := \pi(Q \times I)$ is een continue bijectie, en omdat $Q \times I$ compact is, is het een homeomorfisme. Blijft over LP2 te verifiëren, n.l. dat $U = \pi(Q \times I)$ een omgeving is van x_0. Zij U_3 de δ-bol om x_0, waarin δ een voldoend klein positief getal is, zeg $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\eta|f(x_0)|}{4}\right\}$. We tonen aan dat $U_3 \subset \pi(X \times I)$.

Zij $p \in U_3$ en zij $(p-x_0)_E = af(x_0)$. Dan geldt voor alle $t \in J(p)$

$$(\pi(p,t)-x_0)_E = (\pi(p,t)-p)_E+(p-x_0)_E = \left\{\int_0^t \phi(\pi(p,s))ds+a\right\}f(x_0).$$

Hierin is $|a| < \delta/|f(x_0)|$ omdat $|p-x_0)_E| \le |p-x_0| < \delta$, terwijl anderzijds wegens (4.32) en (4.33)

$$\int_0^t \phi(\pi(p,s))ds \begin{cases} > \frac{1}{2}t \text{ als } 0 \le t \le \frac{1}{2}\eta \\ < -\frac{1}{2}t \text{ als } -\frac{1}{2}\eta \le t \le 0 \end{cases}$$

(voor $p \in U_3 \subset U_2$ en $t \in I$ is $\pi(p,s) \in \pi(U_2 \times I) \subset U_1$ voor alle s tussen 0 en t). Er is dus een $t_0 \in \left(-\frac{2\delta}{|f(x_0)|}; \frac{2\delta}{|f(x_0)|}\right) \subset I$ zo dat $\int_0^{t_0} \phi(\pi(p,s))ds = -a$. Dan is $(\pi(p,t_0)-x_0)_E = 0$, met andere woorden, $\pi(p,t_0) \in x_0 + F$.
Voorts is $|\pi(p,t_0)-x_0| \le |\pi(p,t_0)-p| + |p-x_0|$, waarin

$$|\pi(p,t_0)-p| \le \left|\int_0^{t_0} |f(\pi(p,s))|ds\right| \le |t_0|.\tfrac{3}{2}|f(x_0)| < 3\delta$$

op grond van (4.33) (weer is $\pi(p,s) \in U_1$ voor alle s tussen 0 en t_0). Dus $|\pi(p,t_0)-x_0| < 3\delta + \delta = 4\delta \le \varepsilon$, ofwel $\pi(p,t_0) \in U_2$. Kortom, $\pi(p,t_0) \in (x_0+F) \cap U_2 = Q$, en derhalve $p \in \pi(Q\times\{-t_0\}) \subset \pi(Q\times I)$. □

De volgende stelling laat zien dat secties door x_0 die behoren bij lokale representaties in x_0 er in een omgeving van x_0 hetzelfde uitzien. We gebruiken de notatie uit (2.12).

(4.34) <u>STELLING</u>. *Laat* (Q_1,η,U_1) *en* (Q_2,η,U_2) *lokale representaties zijn van* (X,D,π) *in* x_0. *Dan zijn* $Q_1 \cap U_2$ *en* $Q_2 \cap U_1$ *homeomorf.*

<u>BEWIJS</u>. Zij (voor $i = 1,2$) $h_i : Q_i \times I_\eta \to U_i$ het homeomorfisme geinduceerd door π, en zij $r_i : Q_i \times I_\eta \to Q_i$ gedefinieerd door $r_i(x,t) := x$. Definieer nu

$$\phi_1 : Q_2 \cap U_1 \to Q_1 \cap U_2 \text{ en } \phi_2 : Q_1 \cap U_2 \to Q_2 \cap U_1$$

door

$$\phi_i(x) := r_i(h_i^{-1}(x)).$$

Dan is ϕ_1 goed gedefinieerd: voor $x \in Q_2 \cap U_1$, is $h_1^{-1}(x) \in Q_1 \times I_\eta$ en dus $h_1^{-1}(x) = (y,t)$ voor een unieke $y \in Q_1$ en $t \in I_\eta$. Dan is $x = \pi(y,t)$ en dus $y = \pi(x,-t)$. Omdat $x \in Q_2$ volgt uit dit laatste dat $\phi_1(x) = y \in U_2$. Evenzo blijkt dat ϕ_2 goed gedefinieerd is. Het is duidelijk dat iedere ϕ_i continu is. Zoals eenvoudig is in te zien zijn de volgende uitspraken (i) t/m (iv) voor $x \in Q_2 \cap U_1$ en $y \in Q_1 \cap U_2$ gelijkwaardig:

(i) $y = \phi_1(x)$,

(ii) er is een $t \in I_\eta$ met $x = \pi(y,t)$,

(iii) er is een $s \in I_\eta$ met $y = \pi(x,s)$, en

(iv) $x = \phi_2(y)$.

Dus ϕ_1 en ϕ_2 zijn blijkbaar elkaars inversen. □

(4.35) <u>STELLING</u>. *Zij* $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een isomorfisme van lokaal dynamische systemen.*

Zij $(Q,\eta;U)$ *een lokale representatie van* (X,D,π) *in* x_0 *waarbij* Q *een compacte sectie is. Dan is er een* $\theta > 0$ *zó, dat* $(\phi(Q),\theta;\rho(\phi(Q)\times I_\theta))$ *een lokale representatie is van* (Y,E,ρ) *in* $\phi(x_0)$.

<u>BEWIJS</u>. Definieer Φ: $D \to E$ door $\Phi(x,t) := (\phi(x),\tau(x,t))$. Dan is Φ een homeomorfisme, terwijl op grond van (1.57)<u>M2</u> het volgende diagram commutatief is:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\Phi} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ X & \xrightarrow[\phi]{} & Y \end{array}$$

Zij nu $\theta := \min\{\tau(x,\tfrac{1}{2}\eta),-\tau(x,-\tfrac{1}{2}\eta)\,|\,x \in Q\}$. Wegens de compactheid van Q bestaat dit minimum, terwijl $\theta > 0$. Het is nu duidelijk, dat $\phi(Q)$ een gesloten θ-sectie is. Omdat $\rho|_{\phi(Q)\times I_\theta} = \phi\circ\pi\circ\Phi^{-1}|_{\phi(Q)\times I_\theta}$, omdat $\phi(Q)\times I_\theta$ een omgeving is van $(\phi(x_0),0)$ in $\Phi(Q\times I_\eta)$, en omdat $\pi|_{Q\times I_\eta}$ een homeomorfisme is, volgt er dat $\rho(\phi(Q)\times I_\theta)$ een omgeving is van $\phi(x_0)$. □

(4.36) <u>GEVOLG</u>. *Zij* (X,D,π) *een differentieerbaar lokaal dynamisch systeem op een open deelverzameling* X *van* $\mathbb{R}^n$.

Zij $(\phi,\tau):(X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ *een isomorfisme van lokale dynamische systemen.*

Als nu y_0 *geen evenwichtspunt is van* (Y,E,ρ) *en als* $(Q,\eta;U)$ *een lokale representatie is van* (Y,E,ρ) *in* y_0*, dan is er een open omgeving* W *van* y_0 *in* Q *die homeomorf is met* $\mathbb{R}^{n-1}$.

BEWIJS. Volgens stelling (4.31) is er een lokale representatie $(Q_1,\eta_1;U_1)$ in $x_0 := \phi^{-1}(y_0)$ van (X,D,π), waarbij Q_1 de doorsnede is van een hypervlak door x_0 en een gesloten bol om x_0. Met stelling (4.35) volgt dat voor geschikte $\eta > 0$ geldt dat $(\phi(Q_1),\eta;\rho(\phi(Q_1)\times I_\eta))$ een lokale representatie is van (Y,E,ρ) in Y_0. Volgens stelling (4.34) zijn dan $\phi(Q_1) \cap U$ en $Q \cap \rho(\phi(Q_1)\times I_\eta)$ homeomorf. Hieruit volgt het gestelde met weinig moeite. □

(4.37) VOORBEELD (BING). De zgn. "dog bone space" D heeft de volgende eigenschappen:

1. $D \times \mathbb{R}$ is homeomorf met $\mathbb{R}^4$ [R.H. Bing, Ann. of Math. (2) 70 (1959), 399-412].
2. In D bestaat een verzameling C, homeomorf met het Cantordiscontinuum, zó dat geen enkel punt van C een omgeving heeft die homeomorf is met $\mathbb{R}^3$ [R.H. Bing, Ann. of Math. (2) 65 (1957), 484-500].

(4.38) VOORBEELD (CHEWNING). Laat $h\colon D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ een homeomorfisme zijn. Hierin is D de dog bone space. Een punt $x \in D \times \mathbb{R}$ noteren we met $x = (x_1,x_2)$ waarbij $x_1 \in D$ en $x_2 \in \mathbb{R}$. Definieer nu $\pi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\pi(x,t) := h(h^{-1}(x)_1,\ h^{-1}(x)_2+t).$$

Het is duidelijk dat $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^5,\pi)$ een globaal dynamisch systeem is en dat $(h(D),\infty;\mathbb{R}^4)$ een representatie is van dit systeem in ieder punt van $h(D)$.
Uit stelling (4.36) en voorbeeld (4.37)2 volgt nu dat $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^5,\pi)$ niet isomorf kan zijn met een differentieerbaar lokaal dynamisch systeem.

De volgende stelling van D.H. CARLSON is te vinden in J. Diff. Eq. 11 (1972), 193-201.

(4.39) STELLING. *Zij* (X,D,π) *een lokaal dynamisch systeem. De volgende eigenschappen van* (X,D,π) *zijn equivalent:*

(i) *Er bestaat een isomorfisme* $(id_X,\tau):(X,D,\pi) \to (X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ *waarin* $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ *een globaal dynamisch systeem is; dat wil zeggen:* (X,D,π) *is isomorf met een globaal dynamisch systeem d.m.v. een herparametrisering.*

(ii) *Er is een continue functie* $g\colon X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ *zo dat* $g(x,t) = 0$ *als* $(x,t) \notin D$ *en* $g(x,0) = 1$ *voor alle* $x \in X$.

(iii) *Er bestaat een continue functie* $f\colon X \to (0,1]$ *zo dat* $0 < f(x) \le \min\{-\alpha(x),\omega(x)\}$ *voor alle* $x \in X$.

BEWIJS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Definieer $g\colon X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ als volgt

$$g(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{als } t = 0 \\ \min\left\{1, \dfrac{1}{|\tau(x,t)|}\right\} & \text{als } (x,t) \in D,\ t \neq 0 \\ 0 & \text{als } (x,t) \notin D. \end{cases}$$

We behoeven nog slechts aan te tonen dat g continu is in de punten van $X\times\{0\}$ en die van $\bar{D}\backslash D$.

Zij $x \in X$. Omdat $\tau(x,0) = 0$ is er een omgeving U van $(x,0)$ in $X \times \mathbb{R}$ zo dat $U \subset D$ en $|\tau(y,s)| < \frac{1}{2}$ voor $(y,s) \in U$. Dus $g(y,s) = \min\{1,|\tau(y,s)|^{-1}\} = 1$ voor alle $(y,s) \in U$, hetgeen aantoont dat g continu is in het punt $(x,0)$.

Beschouw nu $(x,t) \in \bar{D}\backslash D$; dan is dus $t \ge \omega(x)$ of $t \le \alpha(x)$. Neem aan, dat $t \ge \omega(x)$ (het geval $t \le \alpha(x)$ wordt op analoge wijze behandeld). Zij $0 < \varepsilon < 1$. Omdat $\tau_x(J(x)) = \tilde{J}(x) = \mathbb{R}$ is er een $t_1 \in J(x)$ zo dat $\tau_x(t_1) > \varepsilon^{-1}$. Gebruikmakend van de continuïteit van τ in het punt $(x,t_1) \in D$ en van de monotonie van τ_y voor elke $y \in X$ vinden we een omgeving V van x in X zo dat $\tau(y,s) > \tau(y,t_1) > \varepsilon^{-1}$ voor alle $(y,s) \in (V\times(t_1,\infty)) \cap D$. Hieruit volgt gemakkelijk dat $0 \le g(y,s) < \varepsilon$ voor alle $(y,s) \in V\times(t_1,\infty)$, waarin $V\times(t_1,\infty)$ een omgeving van (x,t) in in $X \times \mathbb{R}$ is. Dus g is continu in het punt (x,t).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): als g een functie is als bedoeld in (ii), definieer dan $f\colon X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ door

$$f(x) := \min\left\{ \int_0^1 g(x,t)\,dt,\ \int_{-1}^0 g(x,t)\,dt\right\}. \tag{4.40}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat f continu is (g is continu, derhalve is f het minimum van twee continue functies). Omdat $g \ge 0$ en $g(x,0) = 1 > 0$, volgt uit de continuïteit van g, dat beide integralen in het rechterlid van (4.40) strikt positief zijn voor elke $x \in X$; dus $f(x) > 0$ voor elke $x \in X$. Vervolgens, als $x \in X$ en $\omega(x) > 1$, dan is $f(x) \leq 1 < \omega(x)$. In het geval dat $\omega(x) \leq 1$, dan volgt uit het feit dat $g(x,t) = 0$ voor $t \geq \omega(x)$ dat

$$f(x) \leq \int_0^1 g(x,t)dt = \int_0^{\omega(x)} g(x,t)dt < \omega(x)$$

(immers, $0 \leq g(x,t) \leq 1$ voor $0 \leq t \leq \omega(x)$, maar $g(x,t) < 1$ voor t in de buurt van $\omega(x)$). Evenzo blijkt dat voor alle $x \in X$ geldt: $f(x) < -\alpha(x)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Zij $f: X \to [0,1]$ continu, $0 < f(x) < \min\{-\alpha(x), \omega(x)\}$ voor alle $x \in X$. Definieer $\tau: D \to \mathbb{R}$ door

$$\tau(x,t) := \int_0^t \frac{1}{f(\pi(x,s))} ds.$$

Dan voldoet τ aan de eisen van lemma (4.19) (zie ook (4.21)), dus er is een lokaal dynamisch systeem $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ zo dat $(id_X,\tau):(X,D,\pi) \to (X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ een isomorfisme is. Aangetoond moet worden, dat $\tilde{J}(x) = \mathbb{R}$ voor elke $x \in X$ (d.w.z. $(X,\tilde{D},\tilde{\pi})$ is globaal). Omdat (id_X,τ) een isomorfisme is, is $\tau_x(J(x)) = \tilde{J}(x)$ voor elke $x \in X$, dus aangetoond moet worden dat $\tau_x(J(x)) = \mathbb{R}$, ofwel

$$\lim_{t\to\infty} \tau(x,t) = +\infty; \ \lim_{t\to-\infty} \tau(x,t) = -\infty.$$

Welnu, dit volgt onmiddellijk uit de volgende overwegingen: omdat $0 < f(x) < \omega(x)$, is $0 < f(\pi(x,s)) < \omega(\pi(x,s)) = \omega(x) - s$ (zie (1.11)$\underline{1}$), en dus

$$\tau(x,t) = \int_0^t \frac{ds}{f(\pi(x,s))} > \int_0^t \frac{ds}{\omega(x)-s}$$

voor $x \in X$ en $0 \leq t < \omega(x)$. Evenzo is

$$\tau(x,t) = \int_0^t \frac{ds}{f(\pi(x,s))} < -\int_t^0 \frac{ds}{-\alpha(x)+s}$$

voor $x \in X$ en $\alpha(x) < t \leq 0$. Het gestelde volgt nu uit het bekende feit dat $\lim_{t\uparrow a} \int_0^t (a-s)^{-1}ds = \infty$ voor elke $a > 0$. □

(4.41) GEVOLG. *Indien* $X \times \mathbb{R}$ *een normale ruimte is, dan is ieder lokaal dynamisch systeem op* X *isomorf (door herparametrisering) met een globaal dynamisch systeem op* X.

BEWIJS. Als $X \times \mathbb{R}$ normaal is kan altijd aan voorwaarde (ii) van (4.39) voldaan worden ($(X \times \mathbb{R}) \setminus D$ en $X \times \{0\}$ zijn disjuncte, gesloten deelverzamelingen van $X \times \mathbb{R}$). □

(4.42) OPMERKING. Indien X *metriseerbaar* is (i.h.b. als X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, $n \geq 1$), dan is $X \times \mathbb{R}$ metriseerbaar, dus ieder lokaal systeem op X kan globaal gemaakt worden d.m.v. een herparametrisering.
Ook is $X \times \mathbb{R}$ normaal als X *aftelbaar paracompact en normaal* is (zie K. MORITA, Products of normal spaces with metric spaces II, Sci, Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A, 8 (1964), 87-92; X heet aftelbaar paracompact als iedere aftelbare open overdekking een lokaal eindige open verfijning heeft die weer een overdekking is). In dat geval (n.l. X aftelbaar paracompact en normaal) kan men eigenschap (iii) van (4.39) ook rechtstreeks aantonen, als volgt: C.H. DOWKER bewees in 1951 (Canad. J. Math. 1 (1951), 219-224) *dat een ruimte* X *aftelbaar paracompact en normaal is als en slechts als de volgende voorwaarde vervuld is: voor elk paar functies* $g, h: X \to \mathbb{R}$ *waarvoor geldt:* g *is half continu naar boven,* h *is half continu naar beneden, en* $g(x) < h(x)$ *voor alle* $x \in X$, *is er een continue functie* $f: X \to \mathbb{R}$ *zo dat* $g(x) < f(x) < h(x)$ *voor alle* $x \in X$.
Dit resultaat van DOWKER kan, ingeval X aftelbaar paracompact en normaal is, toegepast worden met $g(x) := 0$ en $h(x) := \min\{-\alpha(x), \omega(x)\}$ voor alle $x \in X$. Immers, het feit dat D open is in $X \times \mathbb{R}$ impliceert dat de functies $x \mapsto -\alpha(x)$ en $x \mapsto \omega(x)$ beide half continu naar beneden zijn op X. Dus (4.39)(iii) is vervuld.

LITERATUUR

[B] BECK, A., *Continuous flows in the plane,* Springer, Berlin 1974 (Grundlehren, Band 201).

[BS_1] BHATIA, N.P. & G.P. SZEGÖ, *Dynamical systems: Stability theory and applications,* Springer, Berlin 1967, (Lecture Notes 35).

[BS_2] ____________ & _________, *Stability theory of dynamical systems,* Springer, Berlin 1970 (Grundlehren Band 170).

[D] DUGUNDJI, J., *Topology,* Allyn and Bacon, Boston 1966.

[E] ELLIS, R., *Lectures on topological dynamics,* Benjamin, New York 1969 (Math. Lecture Note Series).

[GH] GOTTSCHALK, W.H. & G.A. HEDLUND, *Topological dynamics,* Amer. Math. Soc., Providence (R.I.) 1955 (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 36).

[H] HÁJEK, O., *Dynamical systems in the plane,* Academic Press, London 1968.

[Ha] HALE, J.K., *Ordinary differential equations,* Wiley-Interscience, New York 1969.

[HS] HIRSCH, M.W. & S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra,* Academic Press, New York 1974 (Pure and applied mathematics).

[HY] HOCKING, J.G. & G.S. YOUNG, *Topology,* Addison-Wesley, Reading (Ma.) 1961.

[K] KELLEY, J.L., *General topology,* Van Nostrand, Princeton (N.J.) 1955.

[M] MUNKRES, J.R., *Topology, a first course,* Englewood Cliffs, Prentice Hall 1975.

[MZ] MONTGOMERY, D. & L. ZIPPIN, *Topological transformation groups,* Interscience, New York 1955 (Interscience tracts in pure and applied math. 1).

[NS] NEMYTSKII, V.V. & V.V. STEPANOV, *Qualitative theory of differential equations,* Princeton University Press, Princeton (N.J.) 1969 (Princeton Math. Series 22).

[SE] SELL, G.R., *Topological dynamics and ordinary differential equations,* Van Nostrand Reinhold, London 1971 (Van Nostrand Reinhold Math. Studies 33).

[Si] SIBIRSKY, K.S., *Introduction to topological dynamics*, Noordhoff, Leyden 1975.

In de tekst wordt nog naar de volgende artikelen verwezen:

CARLSON, D.H., *A generalization of Vinograd's Theorem for Dynamical Systems*, J. Differential Equations 11 (1972), 193-201.

CHEWNING, W.C., *A dynamical system on* E^4 *neither isomorphic nor equivalent to a differential system*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 150-153.

URA, T., *Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems*, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 99-122.

LIJST VAN BEGRIPPEN EN NAMEN

SYMBOLEN LIJST

$\alpha(x)$	inf $J(x)$
$A(x)$	negatieve limietverzameling van (de baan van) x
$\Gamma(x)$	baan van x
$\Gamma^+(x)$, $\Gamma^-(x)$	positieve respectievelijk negatieve halfbaan van x
$C(x)$	baan afsluiting van x
$C^+(x)$, $C^-(x)$	positieve respectievelijk negatieve halfbaan afsluiting van x
$C_n(x)$	$\{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}^n$ continu$\}$
I_η	gesloten symmetrisch interval om 0 ter grootte η
$\mathit{ins}(\kappa)$	binnengebied van een Jordan kromme K
$J(x)$	maximale deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop π_x is gedefinieerd
$\omega(x)$	sup $J(x)$
$\Omega(x)$	positieve limietverzameling van (de baan van) x
$\mathit{outs}(\kappa)$	buitengebied van een Jordan kromme K
P_x	$\{p \in \mathbb{R}^+ \mid \pi_x(p) = x\}$
$p(x)$	inf P_x
X_t	$\{x \in X \mid t \in J(x)\}$
X_I	$\{x \in X \mid I \subseteq J(x)\}$
$\widehat{ab}$	boog met a en b als eindpunten
$\widehat{axb}$	boog met a en b als eindpunten en x als inwendig punt.

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

MCS 1.1 F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, *Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis*, 1965. ISBN 90 6196 014 2.

MCS 1.2 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening*, 1965. ISBN 90 6196 015 0.

MCS 1.3 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek*, 1966. ISBN 90 6196 016 9.

MCS 1.4 G. DE LEVE & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*, 1966. ISBN 90 6196 017 7.

MCS 1.5 J. KRIENS & G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde*, 1966. ISBN 90 6196 018 5.

MCS 1.6a B. DORHOUT & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 032 0.

MCS 1.6b B. DORHOUT, J. KRIENS & J.TH. VAN LIESHOUT, *Leergang Besliskunde, deel 6b: Wiskundige programmering 2*, 1977. ISBN 90 6196 150 5.

MCS 1.7a G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 033 9.

MCS 1.7b G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2*, 1970. ISBN 90 6196 055 X.

MCS 1.7c G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, 1971. ISBN 90 6196 066 5.

MCS 1.8 J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*, 1968. ISBN 90 6196 034 7.

MCS 2.1 G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, *Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 023 1.

MCS 2.2 L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, *Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 035 5.

MCS 3.1 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 024 X.

MCS 3.2 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 036 3.

MCS 3.3 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 3*, 1968. ISBN 90 6196 043 6.

MCS 4 H.A. LAUWERIER, *Representaties van groepen*, 1968. ISBN 90 6196 037 1.

MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, *Colloquium Discrete wiskunde*, 1968.
ISBN 90 6196 044 4.

MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969. ISBN 90 6196 045 2.

MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.

MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.

MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969.
ISBN 90 6196 056 8.

MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970.
ISBN 90 6196 048 7.

MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.
ISBN 90 6196 049 5.

MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.

MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.
ISBN 90 6196 067 3.

MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.

MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.

MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatietheorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.

MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.

MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.

MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975.
ISBN 90 6196 118 1.

MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.

MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.

MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.

MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.

MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.

MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.

MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.Th. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.

MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.

MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975. ISBN 90 6196 103 3.

MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOFF, *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; Toepassingen van naburigheid*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.

MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 X.

* MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.

MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.

MCS 25 *Colloquium Structuur van programmeertalen*, 1976. ISBN 90 6196 116 5.

MCS 26.1 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 1*, 1976. ISBN 90 6196 117 3.

MCS 26.2 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 2*, 1976. ISBN 90 6196 121 1.

MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discretiseringsmethoden*, 1976. ISBN 90 6196 124 6.

MCS 28 O. DIEKMANN, N.M. TEMME (EDS), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976. ISBN 90 6196 126 2.

MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*, 1976. ISBN 90 6196 128 9.

* MCS 29.2 H.J.J. TE RIELE (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 2*, 1976. ISBN 144 0.

* MCS 30 P. GROENEBOOM, R. HELMERS, J. OOSTERHOFF & R. POTHARST, *Efficiency begrippen in de statistiek*, 1977. ISBN 90 6196 149 1.

MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de coderingstheorie*, 1976. ISBN 90 6196 136 X.

MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976. ISBN 90 6196 137 8.

MCS 33 P.J. VAN DER HOUWEN, *Differentieschema's voor de berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*, ISBN 90 6196 138 6.

MCS 34 J. HEMELRIJK, *Oriënterende cursus mathematische statistiek*, ISBN 90 6196 139 4.

* MCS 35 P.J.W. TEN HAGEN (red.), *Colloquium Computer Graphics*, 1977. ISBN 90 6196 142 4.

MCS 36 J.M. AARTS, J. DE VRIES (red.), *Colloquium Topologische Dynamische Systemen*, 1977. ISBN 90 6196 143 2.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.