Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MC SYLLABUS 19

A. HORDIJK
R. POTHARST
J.TH. RUNNENBURG

OPTIMAAL STOPPEN VAN MARKOVKETENS

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1973

AMS (MOS) subject classification scheme (1970): 60J10, 60G40, 60J50

ISBN 90 6196 093 2

INHOUD

VOORWOORD

Dit boek is een eerste uitwerking van de syllabus*) bij de in augustus 1972 gehouden werkweek *Optimaal stoppen van Markovketens*, die onder leiding stond van Prof.dr. J.Th. Runnenburg. Deze werkweek was in hoofdzaak gebaseerd op het boek *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse* van E.B. Dynkin en A.A. Juschkewitsch, doch bevatte ook uitbreidingen van de daarin behandelde stof.

De drie schrijvers van de syllabus namen ieder een afzonderlijk deel voor hun rekening. Naast stof, die aan het genoemde boek is ontleend, bevat hoofdstuk 1 (door A. Hordijk) aanzienlijke uitbreidingen en nieuwe resultaten. Hoofdstuk 2 (door R. Potharst) is voorzien van meer funktionaal-analytisch getinte bewijzen dan men in het boek van Dynkin en Juschkewitsch aantreft en hoofdstuk 3 (door J.Th. Runnenburg) bevat aan de literatuur ontleende opgaven met uitgewerkte oplossingen.

In de huidige versie zijn de notaties van de drie hoofdstukken nog niet volledig op elkaar afgestemd, terwijl ook op andere punten de stof nog niet als geheel afgerond kan worden beschouwd. Deze syllabus draagt de sporen van het feit dat het onderwerp nog in volle ontwikkeling is, en kan derhalve worden beschouwd als een werkdocument. Drs. K.M. van Hee, deelnemer aan de werkweek, heeft een aantal waardevolle opmerkingen gemaakt over hoofdstuk 1, die in de huidige tekst zijn verwerkt. Voor het succesvol doorwerken van de stof kunnen de beginselen van de maattheorie en kansrekening, zoals behandeld door W. Feller in zijn boek *An introduction to probability theory and its applications* (volume I), als vereiste voorkennis beschouwd worden.

Amsterdam, 1973 Prof.dr. J. Hemelrijk

N.B. Ter voorkoming van misverstanden bij verwijzingen in de tekst zijn de nummers van formules, stellingen enz. in hoofdstuk 1 omgeven door ronde haakjes, in hoofdstuk 2 door rechte haakjes.

---

*) Rapport SD 104/72 van de afdeling Mathematische Statistiek.

HOOFDSTUK 1

OPTIMAAL STOPPEN VAN MARKOVKETENS

A. HORDIJK

1. MODEL

We gaan uit van een (stationaire) *Markovketen* met een eindige of aftelbare toestandsruimte E. Dit betekent dat we beschouwen een rij van stochastische variabelen $\{\underline{x}_n,\ n \geq 0\}$ met beeldruimte E en gedefinieerd op zekere kansruimte $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Verder is voor dit stochastisch proces (of stochastische wandeling) de *Markov eigenschap* vervuld, i.e. voor iedere $n \geq 1$ geldt

$$\mathbb{P}[\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_0 = i_0, \ldots, \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}] = \mathbb{P}[\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}]$$

mits

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0 = i_0, \ldots, \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}] > 0.$$

Ook nemen we aan dat de Markovketen *stationair* is, i.e. voor zekere matrix P met $(i,j)^{de}$ element $p(i,j)$ geldt voor $n=0,1,\ldots,$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_{n+1} = j \mid \underline{x}_n = i] = p(i,j) \qquad \text{als } \mathbb{P}[\underline{x}_n = i] > 0.$$

We noteren $\mathbb{P}_i[\cdot]$ voor $\mathbb{P}[\cdot \mid \underline{x}_0 = i]$.

Strikt genomen dient men hier nog te veronderstellen, dat $\mathbb{P}[\underline{x}_0=i] > 0$ voor alle i. Door te stellen dat $\underline{x}_n$ een stochastische variabele is, veronderstellen we dat $\mathbb{P}_i[\underline{x}_n \in E] = 1$ en dus

$$\sum_j p(i,j) = 1 \text{ voor alle } i.$$

Willen we ook stochastische wandelingen beschouwen waarvoor geldt dat met positieve kans "het deeltje" uit het "systeem" verdwijnt dan kunnen we dit op verschillende manieren in het model inbouwen:

i) een rij van "eventueel defecte" stochastische variabelen beschouwen en dus toelaten dat

$$\sum_j p(i,j) < 1,$$

ii) in E een speciaal element, zeg ∞, opnemen en definiëren

$$p(i,\infty) = 1 - \sum_{j\neq\infty} p(i,j) \qquad \text{voor alle } i$$

en

$$p(\infty,\infty) = 1.$$

Uit overwegingen van notatie geven we de voorkeur aan i). Als we dit nodig hebben zullen we aan E een toestand ∞ *toevoegen* (met overgangswaarschijnlijkheden zoals onder ii) gedefinieerd).

We veronderstellen nu verder dat de stochastische wandeling (afkorting SW) op ieder tijdstip $t = 0,1,2,\ldots$ "gestopt" kan worden. Indien op tijdstip n gestopt wordt en $\underline{x}_n$, de toestand op tijdstip n, gelijk is aan i, dan ontvangen we een bedrag ter grootte van r(i) (r van *reward*).

Voor een stochastische variabele, zeg $\underline{\tau}$, met beeldruimte $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *) kan dan de verwachting van de opbrengst, indien we startend vanuit toestand i de SW stoppen op tijdstip $\underline{\tau}$ ($\underline{\tau} = \infty$ betekent nooit stoppen en per definitie gééén uitbetaling ontvangen), bepaald worden. We noteren dit met

(1.1) $\qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}).$

---
*) In het vervolg zullen we zo'n stochastische variabele een stochastische tijd noemen.

Dus onder $\mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}})$ verstaan we de verwachting van $r(\underline{x}_{\underline{\tau}})$ voorzover $\underline{\tau} < \infty$, i.e.

$$\mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})\ \underline{\chi}_{\{\underline{\tau}<\infty\}}]$$

met $\underline{\chi}_A$ gedefinieerd door

$$\underline{\chi}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in A, \\ 0 & \text{als } \omega \notin A. \end{cases}$$

Onder *optimaal stoppen* verstaan we stoppen volgens een $\underline{\tau}$, die (1.1) zo groot mogelijk maakt *voor iedere begintoestand* i. Indien we er van uitgaan dat het model van optimaal stoppen toepasbaar moet zijn op brokken uit de realiteit en als we bedenken dat op tijdstip n de enige informatie (afgezien van de bekend veronderstelde overgangswaarschijnlijkheden) die we hebben omtrent de SW de tot tijdstip n doorlopen toestanden zijn, dan is duidelijk dat stoppen op tijdstip n alleen mag afhangen van de dan doorlopen toestanden. De stochastische tijden die hieraan voldoen heten *Markovtijden*; we zullen ze hieronder definiëren. Bij het zoeken naar een optimale $\underline{\tau}$ zullen we ons beperken tot de klasse van Markovtijden; laten we deze klasse noteren met T. Het probleem van *optimaal stoppen van een Markovketen* kan nu als volgt geformuleerd worden:

PROBLEEM I.

Bepaal een $\underline{\tau}_0 \in T$ *zó dat*

$$\mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = \max_{\underline{\tau}\in T} \mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \qquad \textit{voor alle } i.$$

Een dergelijke $\underline{\tau}_0$ *noemen we optimaal.*

We zullen nu een definitie geven van Markovtijden.

Definitie 1.1. *Een stochastische tijd* $\underline{\tau}$ *heet een* *Markovtijd* *indien voor* $n \geq 0$ *geldt dat de eventualiteit* $[\underline{\tau} \leq n]$ *een eventualiteit is uit de kansruimte opgespannen door de stochastische variabelen* $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$.

Dit betekent dat het al dan niet stoppen zoals een Markovtijd $\underline{\tau}$ dat voorschrijft op zeker tijdstip, zeg n (i.e. $[\underline{\tau}=n]$), alleen afhangt van de tot tijdstip n doorlopen toestanden.

Definitie 1.2. *Een collectie* R *van eindige rijen van toestanden noemen we een* *stopstrategie, indien de collectie* R *voldoet aan de voorwaarde dat als zekere rij van toestanden, zeg* $i_0, i_1, \ldots, i_n$, *een element is van* R, *iedere voortzetting van deze rij* (bijv. $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots, i_m$) *niet tot* R *behoort. De elementen uit* R *heten* *stoprijen.*

Aan een stopstrategie R kunnen we een Markovtijd $\underline{\tau}$ toevoegen door te stellen dat $\underline{\tau} = n$ indien de SW verloopt volgens $i_0, i_1, \ldots, i_n$ (i.e. $\underline{x}_0 = i_0, \underline{x}_1 = i_1, \ldots, \underline{x}_n = i_n$) en $\{i_0, i_1, \ldots, i_n\} \in$ R. Ook omgekeerd kunnen we aan een Markovtijd een stopstrategie toevoegen. Deze toevoegingen zijn 1-1-correspondenties.

Lemma 1.1. *Er is een 1-1-correspondentie tussen de verzameling van Markovtijden* T *en de verzameling van alle stopstrategieën.*

Veelal zal men een model willen gebruiken dat naast de opbrengststructuur ook nog een kostenstructuur heeft. Meestal in die vorm, dat iedere keer als de SW zich in toestand i bevindt en niet tot stoppen wordt besloten, een bedrag ter grootte c(i) (c van *cost*) betaald moet worden. Dit geeft aanleiding tot het volgende probleem.

PROBLEEM II.

Bepaal een $\underline{\tau}_0 \in T$ *zó dat voor alle* i

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] = \max_{\underline{\tau} \in T} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)].$$

Een dergelijke $\underline{\tau}_0$ *noemen we optimaal.*

We zullen in paragraaf 5 onder "entrance-fee" problemen zien dat onder bepaalde voorwaarden problemen van het type van probleem II in problemen van het type van probleem I omgezet kunnen worden. Hoewel deze omzetting van problemen niet altijd mogelijk is zullen we in de paragrafen 2,3 en 4 het minder algemene probleem I behandelen. Aan het eind van iedere paragraaf wordt aangegeven hoe de gevonden resultaten zich laten generaliseren voor probleem II. Deze generalisaties kunnen, evenals de rest van deze paragraaf, bij een eerste lezing overgeslagen worden.

De problemen I en II behoren tot de *Markovbeslissingsproblemen* [Derman, Ross] en deze behoren weer tot de algemenere problemen die men wel aanduidt met "*stochastic control of Markov chains*" [Kushner]. We zullen in kort bestek iets over deze problemen zeggen. Daartoe zullen we eerst probleem II in een andere terminologie formuleren.

We introduceren de akties (soms beslissingen, soms "controls" genoemd) a_0 voor stoppen, a_1 voor niet-stoppen. Verder voeren we een opbrengststructuur (kosten zullen negatieve opbrengsten zijn en omgekeerd) in.

Indien in toestand i aktie a_0 genomen wordt (i.e. stoppen) dan is de opbrengst $r(i,a_0)$. Voor probleem II geldt dan $r(i,a_0) = r(i)$.

Indien in toestand i aktie a_1 genomen wordt (i.e. niet-stoppen) dan is de opbrengst $r(i,a_1)$. Voor probleem II geldt dan $r(i,a_1) = - c(i)$.

Een strategie kunnen we definiëren door een rij van momentane beslisregels, zeg $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, met

$$\underbrace{I \times \ldots \times I}_{(n+1)\text{ maal}} \xrightarrow{f_n} A = \{a_0,a_1\}.$$

Daarbij voegt f_n aan iedere rij $\{i_0,i_1,\ldots,i_n\}$ één van de akties $\{a_0,a_1\}$ toe. Wil de hierdoor gedefinieerde strategie een stopstrategie zijn dan zal moeten gelden, dat indien voor zekere rij $\{i_0,\ldots,i_n\}$ geldt $f_n(i_0,\ldots,i_n) = a_0$, dan volgt voor alle i dat $f_{n+1}(i_0,\ldots,i_n,i) = a_0$.

Laat $\underline{r}_n$ de opbrengst op de "n-de dag" (of zo men wil, tijdstip n) voorstellen.

<u>Herformulering probleem II.</u>

Bepaal een stopstrategie R_0 *en bijbehorende stoptijd* $\underline{\tau}_0$ *met*

$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0} \underline{r}_n] \textit{ is maximaal voor alle } i.$$

De generalisatie naar algemenere problemen verloopt nu als volgt. De aktieruimte (beslissingsruimte, "set of controls") van de toestand i, zeg A(i), wordt een verzameling met meerdere elementen.*) Indien in toestand i aktie a wordt ondernomen, is de onmiddellijke opbrengst r(i,a). *De beweging van het systeem, de stochastische wandeling, is afhankelijk van de*

---

*) Bij een Markovbeslissingsprobleem is het aantal elementen in A(i) meestal eindig voor alle i. Indien A(i) een continue verzameling is voor sommige i, spreekt men wel van "controlled Markov chain".

ondernomen akties. Bij de verwachting van de opbrengsten moet dan ook vermeld worden welke strategie R gevolgd is.

De vraag is weer: bepaal een R_0 met

$$\mathbb{E}_{i,R_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \underline{r}_n\right] \text{ is maximaal voor alle } i.$$

Bij een opbrengstfunktie r (van r wordt meestal verondersteld dat het een begrensde funktie is), die zowel positief als negatief kan zijn, is bovenstaande verwachting dikwijls niet gedefinieerd. Men beschouwt daarom vaak bij strategie R de *verwachte α-verdisconteerde opbrengst* $(0 < \alpha < 1)$

$$\mathbb{E}_{i,R}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \underline{r}_n\right].$$

Naast de *verwachte totale opbrengst* (niet altijd gedefinieerd) en de verwachte verdisconteerde opbrengst beschouwt men als opbrengst ook vaak de *gemiddelde verwachte opbrengst*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}_{i,R}[r(\underline{x}_n)]. \quad {}^{*)}$$

In [Derman] wordt probleem I behandeld als een Markovbeslissingsprobleem (afkorting MBP) met als kriterium de gemiddelde verwachte opbrengst. **)

In [Ross] en [Kushner] wordt probleem II behandeld als een MBP met als kriterium de totale opbrengst en wel door een absorberende toestand, zeg ∞, toe te voegen en te stellen dat het systeem met kans 1 naar ∞ springt indien de stopaktie wordt gekozen.

Het optimaal stoppen van Markovketens is ook een speciaal geval van de algemene theorie van het optimaal stoppen (zie [Chow]). In deze theorie wordt de onderstelling omtrent de Markov-afhankelijkheid der $\underline{x}_i$'s losgelaten.

---

*) Daar de limiet niet behoeft te bestaan, is de lim inf genomen.

**) Daartoe wordt toestand i absorberend gemaakt zodra in toestand i tot stoppen besloten is.

2. OVER LADING, POTENTIALEN EN EXCESSIEVE FUNKTIES

Veronderstel dat we optimaal stopproblemen volgens probleem I beschouwen. In plaats van bij een bepaalde opbrengstfunktie de optimale stoptijd te bepalen kunnen we ons afvragen voor welke opbrengstfunkties r onmiddellijk stoppen ($\underline{\tau} \equiv 0$) optimaal is, d.w.z. voor welke r geldt

$$(2.1) \qquad r(i) \geq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \qquad \text{voor iedere stoptijd } \underline{\tau} \text{ en elke } i.$$

We zullen in deze paragraaf bewijzen dat de funkties die aan (2.1) voldoen, precies de funkties zijn uit de volgende definitie.

Definitie 2.1. *Een funktie* f *heet* ***excessief*** *indien* f *niet-negatief is en*

$$(2.2) \qquad f(i) \geq \sum_j p(i,j)\, f(j) \qquad \textit{voor alle } i.$$

We zullen in deze paragraaf herhaaldelijk de volgende relatie gebruiken. Voor $n \geq 0$, f een willekeurige reëelwaardige funktie geldt*)

$$(2.3) \qquad \mathbb{E}_i\, f(\underline{x}_n) = \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = j]\; f(j) = \sum_j p^n(i,j)\, f(j).$$

Met (2.3) vinden we dat uit (2.2) volgt, voor $\underline{\tau} \equiv 1$,

$$f(i) \geq \mathbb{E}_i\, f(\underline{x}_{\underline{\tau}}).$$

Hieruit volgt dat we de excessieve funkties kunnen omschrijven als niet-negatieve funkties waarvoor onmiddellijk stoppen minstens zoveel opbrengt als stoppen na één periode.

Zoals reeds vermeld is zal bewezen worden dat onmiddellijk stoppen voor excessieve funkties altijd optimaal is.

Voor excessieve funkties r waarvoor geldt

$$(2.4) \qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i\Big[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n)\Big]$$

met $w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j)$ is (2.1) op de volgende wijze aan te tonen. Uit de excessiviteit van r volgt $w(i) \geq 0$ voor alle i, zodat $w(\underline{x}_n)$ een niet-negatieve stochast is voor iedere $n \geq 0$. We maken

---

*) We veronderstellen wel dat $\sum_j p^n(i,j)|f(j)| < \infty$ voor alle i.

$$\mathbb{E}_i \left[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n) \right]$$

dus zo groot mogelijk door het aantal termen in de reeks zo groot mogelijk te maken. Maar dit betekent dat $\underline{\tau} \equiv 0$ (onmiddellijk stoppen) het beste is. We hebben nooit-stoppen ($\underline{\tau} \equiv \infty$) niet uitgesloten. We willen dat (2.1) ook geldt voor deze Markovtijd; daarom noemen we een funktie pas excessief als hij niet alleen aan (2.2) voldoet maar ook nog niet-negatief is.

Om te kunnen bewijzen dat (2.1) voor iedere excessieve funktie geldt, zullen we eerst een aantal begrippen moeten invoeren. We zullen daarna lemma's en stellingen gaan afleiden waarvan niet direct duidelijk is wat ze beogen. Het is daarom misschien goed om hier eerst aan te geven waartoe de resultaten van de paragrafen 2, 3 en 4 leiden.

In deze paragraaf wordt bewezen dat de "maximale opbrengst" gelijk is aan de opbrengstfunktie r, indien r een excessieve funktie is. Gebruik makend van dit resultaat wordt in paragraaf 3 bewezen dat de "maximale opbrengst" de kleinste excessieve majorant van r is. Daar in veel gevallen de kleinste excessieve majorant van r te bepalen is (in het volgende hoofdstuk zal een karakterisering van de klasse van alle excessieve funkties gegeven worden), is daarmee de "maximale opbrengst" bekend. In paragraaf 4 wordt aangetoond dat dan het optimaal stopprobleem is opgelost; d.w.z. indien de "maximale opbrengst" bekend is, kan bepaald worden in welke toestanden gestopt moet worden om deze opbrengst te verkrijgen. Om precies te zijn: in die toestanden stoppen, waarvoor geldt dat r gelijk is aan de "maximale opbrengst", levert een "optimale" stoptijd.

Definitie 2.2.

i) *Een funktie* w *heet een* ***lading*** *indien*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)|w(j)| < \infty \qquad \textit{voor alle } i.$$

ii) *Een funktie* f *heet een* ***potentiaal*** *indien er een funktie* w *bestaat zó dat* w *een lading is en*

$$f(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, w(j) \qquad \textit{voor alle } i.$$

iii) *Voor een begrensde funktie* w *heet* h *de* α-***potentiaal*** (0 < α < 1) *van* w *indien*

$$h(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \alpha^n \, p^n(i,j) \, w(j).$$

Dat iedere begrensde funktie w een α-potentiaal heeft is niet moeilijk te verifiëren. Echter, niet iedere begrensde funktie is een lading.

Voorbeeld. Bij de symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^k$ is w = 1 geen lading (zie [Dynkin]).

Lemma 2.1. *Een excessieve funktie* r *is een potentiaal met (niet-negatieve) lading*

$$(2.5) \qquad w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j) \, r(j)$$

indien

$$(2.6) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j) \, r(j) = 0 \qquad \textit{voor alle } i.$$

Bewijs. Daar $w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)r(j)$ en r een excessieve funktie is, volgt uit (2.2) dat w(i) niet-negatief is. Schrijven we

$$(2.7) \qquad r(i) = w(i) + \sum_j p(i,j) \, r(j)$$

en substitueren we in het rechterlid voor r(j) weer $w(j) + \sum_j p(j,k)r(k)$ dan vinden we

$$r(i) = w(i) + \sum_j p(i,j) \, \{w(j) + \sum_k p(j,k) \, r(k)\} =$$

$$= w(i) + \sum_j p(i,j) \, w(j) + \sum_j p^2(i,j) \, r(j).$$

Door deze substitutie n maal te doen, vinden we

$$r(i) = w(i) + \ldots + \sum_j p^n(i,j) \, w(j) + \sum_j p^{n+1}(i,j) \, r(j)$$

oftewel

$$(2.8)\qquad \sum_{k=0}^{n} \sum_{j} p^k(i,j)\, w(j) = r(i) - \sum_{j} p^{n+1}(i,j)\, r(j).^{*)}$$

Daar $w(i) \geq 0$ en dus $|w(i)| = w(i)$ volgt hieruit met (2.6) dat w een lading is met potentiaal r. □

Een Markovketen waarvoor geldt dat de kans om startend vanuit toestand i ooit in toestand i terug te komen kleiner is dan 1 voor iedere toestand i noemen we *voorbijgaand*. In [Feller] wordt bewezen dat een kriterium hiervoor is

$$(2.9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} p^n(i,j) < \infty \qquad\qquad \text{voor alle } i,j.$$

Dit betekent dat voor het bestaan van potentialen met een positieve lading w in iedere toestand i moet gelden dat de Markovketen voorbijgaand is.

Voor een Markovketen met eindige toestandsruimte E die aan (2.9) voldoet (en dus voorbijgaand is) geldt dat iedere funktie een lading is. Ook is iedere funktie r een potentiaal (met w(i) uit (2.5) als lading). Een excessieve funktie is dan altijd een potentiaal met niet-negatieve lading.

Lemma 2.2. *Indien* r *een potentiaal is, geldt voor iedere Markovtijd* $\underline{\tau}$

$$(2.10)\qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n) \right] \qquad\qquad \textit{voor alle } i,$$

met w *zoals in* (2.5).

Bewijs. Substitueren we $\underline{\tau} = 0$ in (2.10) dan staat er dat r een potentiaal met lading w is. Dat r een potentiaal is maakt deel uit van het gegeven, maar dat w dan automatisch de lading wordt en de lading derhalve door de potentiaal (uniek) bepaald wordt, moeten we nog aantonen. Veronderstel dat r een potentiaal is met lading $\tilde{w}$, dus

$$(2.11)\qquad r(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k} p^n(j,k)\, \tilde{w}(k),$$

dan volgt

---

*) We gebruiken in deze formule de conventie $p^0(i,j) = 0$ als $i \neq j$ en $p^0(i,j) = 1$ als $i = j$.

$$\sum_j p(i,j)\ r(j) = \sum_j p(i,j)\ [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_k p^n(j,k)\ \tilde{w}(k)]$$

en omdat bij absoluut convergente reeksen de sommatievolgorde er niet toe doet, is dit weer gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_k p^{n+1}(i,k)\ \tilde{w}(k).$$

Met (2.11) volgt nu

$$w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\ r(j) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \dots - \sum_{n=1}^{\infty} \dots \quad = \tilde{w}(i)$$

en dus is de lading een funktie van de potentiaal.

Om (2.10) aan te tonen voor $\underline{\tau} \not\equiv 0$ zullen we gebruiken dat voor een Markovtijd $\underline{\tau}$ geldt, met $k \geq 0$ en g willekeurig (niet-negatief of althans met eindig positief of negatief deel),

$$\text{(2.12)} \qquad \mathbb{E}_i\ g(\underline{x}_{\underline{\tau}+k}) = \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}}=j]\ \mathbb{E}_j\ g(\underline{x}_k).$$

Hiermee volgt

$$\mathbb{E}_i\ [\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n)] = \mathbb{E}_i\ [w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \dots\ ] =$$
$$= \mathbb{E}_i\ w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + \mathbb{E}_i\ w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \dots =$$
$$= \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}}=j]\ [\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_j\ w(\underline{x}_k)] =$$
$$= \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}}=j]\ r(j) = \mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}}).$$

We verwisselden hierbij diverse malen sommatie en "verwachting nemen". Dit is correct omdat w een lading is. □

Dat (2.12) niet voor iedere stochastische tijd geldt, blijkt uit het volgende voorbeeld; de symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$, dus $p(i,i-1) = p(i,i+1) = \frac{1}{2}$. Zij $\underline{\tau}$ de intreetijd in verzameling $\{1\}$, dus $\underline{\tau} = \min\ \{n \geq 0 | \underline{x}_n = 1\}$. Dan is $\underline{\tau}$ Markovtijd, echter $\tilde{\underline{\tau}} = \underline{\tau} - 1$ is het niet. Met

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

volgt

$$\mathbb{E}_0\ g(\underline{x}_{\underset{\sim}{\tau}+1}) = \mathbb{E}_0\ g(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = 1 \quad \text{en} \quad \mathbb{P}_0[\underline{x}_{\underset{\sim}{\tau}}=0] = 1,$$

dus

$$\sum_j \mathbb{P}_0[\underline{x}_{\underset{\sim}{\tau}}=j]\ \mathbb{E}_j\ g(\underline{x}_1) = \mathbb{E}_0\ g(\underline{x}_1) = \tfrac{1}{2}\ .$$

Dus (2.12) geldt niet voor iedere stochastische tijd $\underline{\tau}$.

Zij T *de afbeelding van* Ω *naar* Ω *met* $T(i_0,i_1,i_2,\ldots) = (i_1 i_2,\ldots)$; *zij* $\tau_k(\omega) = \tau\ (T^k\omega)$. *Dan geldt*

$$\text{(2.13)} \qquad \mathbb{E}_i\ g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) = \sum_j p^k(i,j)\ \mathbb{E}_j\ g(\underline{x}_{\underline{\tau}})$$

<u>Bewijs</u>.

$$\mathbb{E}_i\ g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) = \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_k=j]\ \mathbb{E}[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) \mid \underline{x}_0=i,\ \underline{x}_k=j].$$

Daar $g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k})$ meetbaar is t.o.v. de σ-algebra voortgebracht door $(\underline{x}_k,\underline{x}_{k+1},\ldots)$, volgt uit de Markov eigenschap dat

$$\mathbb{E}[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) \mid \underline{x}_0=i,\ \underline{x}_k=j] = \mathbb{E}[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) \mid \underline{x}_k=j].$$

Uit het feit dat de Markovketen stationair is volgt

$$\mathbb{E}[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_k+k}) \mid \underline{x}_k=j] = \mathbb{E}_j[g(\underline{x}_{\underline{\tau}})]. \quad \square$$

Met lemma 2.2 hebben we een voldoende voorwaarde gegeven voor (2.4). Voor het geval r naast excessief ook een potentiaal is, hebben we nu dus aangetoond dat (2.1) geldt voor iedere Markovtijd.

Voor het geval r begrensd (en niet noodzakelijk een potentiaal) is gaan we α-potentialen gebruiken.

<u>Lemma 2.3</u>. *Indien* r *begrensd is, geldt voor iedere Markovtijd* $\underline{\tau}$ *en iedere* $0 < \alpha < 1$ *dat*

$$(2.14) \qquad \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} \alpha^n w_\alpha(\underline{x}_n)] \qquad \textit{voor alle } i,$$

met $w_\alpha(i) = r(i) - \alpha\sum_j p(i,j)\, r(j)$

<u>Bewijs</u>. Substitueren we $\underline{\tau} = 0$ in (2.14) dan staat er dat r een α-potentiaal is met lading w_α. Dit is niet moeilijk te verifiëren. Met de volgende "formele" rekenwijze maken we plausibel dat r de α-potentiaal van w_α is. Schrijf

$$w_\alpha = (I - \alpha P)r,$$

waarin I de identieke operator is en P de operator, die aan de funktie f de funktie Pf toevoegt met $Pf(i) = \sum_j p(i,j)\, f(j)$. Hieruit volgt

$$r = \frac{1}{I-\alpha P} w_\alpha = w_\alpha + \alpha P w_\alpha + \alpha^2 P^2 w_\alpha + \ldots$$

en dus

$$r(i) = \mathbb{E}_i\, w_\alpha(\underline{x}_0) + \mathbb{E}_i\, \alpha w_\alpha(\underline{x}_1) + \mathbb{E}_i\, \alpha^2 w_\alpha(\underline{x}_2) + \ldots$$

Uit de begrensdheid van r volgt dat w_α begrensd is, zeg $|w_\alpha(i)| \le M$. Dit geeft $\mathbb{E}_i|\alpha^n w_\alpha(\underline{x}_n)| \le M\alpha^n$ en dus is de reeks absoluut convergent voor $0 < \alpha < 1$. In het vervolg van dit bewijs laten we de index α aan w weg.

Volgens (2.12) geldt

$$\mathbb{E}_i\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}+k}) = \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}}=j]\, \mathbb{E}_j\, w(\underline{x}_k)$$

Daar

$$\mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}}=j] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[\underline{\tau}=n, \underline{x}_n=j]$$

volgt dan

$$\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}+k}\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}+k})] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{\tau}=n, \underline{x}_n=j]\, \{\alpha^{n+k}\, \mathbb{E}_j\, w(\underline{x}_k)\}.$$

Hiermee volgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i\Big[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} \alpha^n\, w(\underline{x}_n)\Big] &= \mathbb{E}_i\big[\alpha^{\underline{\tau}}\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + \alpha^{\underline{\tau}+1}\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \ldots\big] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{\tau}=n, \underline{x}_n=j]\, \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \mathbb{E}_j\, w(\underline{x}_k) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i[\underline{\tau}=n, \underline{x}_n=j]\, \alpha^n\, r(j) = \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})]. \quad \square\end{aligned}$$

Stelling 2.1 (Hunt). *Indien de excessieve funktie* r *begrensd of een potentiaal is, geldt voor Markovtijden* $\underline{\tau}_0$ *en* $\underline{\tau}_1$ *met* $\underline{\tau}_0 \le \underline{\tau}_1$ *dat*

$$(2.15) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] \le \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] \qquad\qquad \textit{voor alle } i.$$

Bewijs. Indien r een potentiaal is, volgt uit (2.10)

$$(2.16) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] = \mathbb{E}_i\Big[\sum_{n=\underline{\tau}_0}^{\underline{\tau}_1-1} w(\underline{x}_n)\Big].$$

Omdat r excessief is, geldt $w(i) \ge 0$. Het rechterlid van (2.16) is de verwachting van een (stochastisch) aantal niet-negatieve stochasten en is dus groter dan of gelijk aan nul. In dit geval geldt (2.15).

Indien r begrensd is, volgt analoog met (2.14) dat

$$(2.17) \qquad \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_0}\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \alpha^{\underline{\tau}_1}\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] \ge 0.$$

Relatie (2.17) geldt voor alle $0 < \alpha < 1$. Daar op grond van de stelling over gemajoreerde convergentie het linkerlid van (2.17) naar

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})]$$

convergeert voor een monotoon stijgende rij van α's met limiet 1, volgt dan dat ook in dit geval (2.15) geldt. $\square$

Stelling 2.2 (Hunt, Dynkin en Juschkewitsch). *Voor een willekeurige excessieve funktie* r *geldt de relatie* (2.15).

Bewijs. Zij $r_n = r \wedge ne$ *) met e de funktie die identiek gelijk aan 1 is. Daar

---

*) $f \wedge g$ is de funktie met $(f \wedge g)(i) = \min[f(i), g(i)]$ voor alle $i \in E$.

het minimum van twee excessieve funkties weer excessief is en ook ne een excessieve funktie is, volgt nu dat r_n excessief is. De funktie r_n is ook begrensd, zodat volgens stelling 2.1 relatie (2.15) geldt voor r_n. Door n naar oneindig te laten gaan volgt dan met gebruik van de monotone convergentie stelling dat (2.15) ook voor r geldt. □

Gevolg 2.1. *Voor de excessieve funktie* r *geldt voor willekeurige Markovtijd* $\underline{\tau}$ *relatie* (2.1).

Bewijs. Substitueer in (2.15) $\underline{\tau}_0 = 0$ en $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}$. □

Gevolg 2.2. *Voor de excessieve funktie* r *geldt voor elke binnenkomsttijd* *) $\underline{\tau}$ *dat* $h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})]$ *een excessieve funktie is.*

Bewijs. Daar r een niet-negatieve funktie is, volgt dat de verwachting op tijdstip $\underline{\tau}$ ook niet-negatief is. Zij $\tau_1(i_0,i_1,\ldots) := \tau(i_1,i_2,\ldots)$, dan is $\underline{\tau}_1$ de binnenkomsttijd vanaf tijdstip 1. Aangezien ook $\underline{\tau}_1 + 1$ een Markovtijd is en $\underline{\tau} \le \underline{\tau}_1 + 1$, geldt

$$h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \overset{(2.15)}{\ge} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1+1})] \overset{(2.13)}{=}$$

$$= \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = \sum_j p(i,j)\, h(j).$$

Hiermee is relatie (2.2) aangetoond. □

We hebben nu gezien dat voor opbrengstfunktie r die excessief is, onmiddellijk stoppen optimaal is in probleem I. De rest van deze paragraaf zal gaan over de generalisatie van de gevonden resultaten naar probleem II. Dit gedeelte kan bij eerste lezing overgeslagen worden.

Definitie 2.3. *Voor* c *een niet-negatieve funktie of een lading heet funktie* r *een* c-*excessieve funktie indien*

$$(2.18) \qquad r(i) \ge - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)$$

en

*) Een binnenkomsttijd is het tijdstip van eerste aanwezigheid in een verzameling $A \subset E$.

$$(2.19)\qquad r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j) \geq - c(i).$$

Deze definitie generaliseert het begrip excessiviteit uit definitie 2.1. Immers een excessieve funktie volgens definitie 2.1 is een 0-excessieve funktie, waarbij 0 de notatie is voor de funktie die identiek gelijk aan nul is. De relaties (2.18) resp. (2.19) zeggen dat in probleem II onmiddellijk stoppen niet minder oplevert dan nooit stoppen resp. stoppen na één periode indien r een c-excessieve funktie is.

Stelling 2.3. *Indien de funktie* c *niet-negatief of een lading is en de* c*-excessieve* r *niet-negatief en begrensd of een potentiaal is, dan geldt voor Markovtijden* $\underline{\tau}_0$ *en* $\underline{\tau}_1$ *met* $\underline{\tau}_0 \leq \underline{\tau}_1$ *dat*

$$(2.20)\qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_1 - 1} c(\underline{x}_n)] \leq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] \text{ voor alle } i.$$

Bewijs. Indien r een potentiaal is, volgt met (2.10) dat

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] - \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_1 - 1} c(\underline{x}_n)] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}_0}^{\underline{\tau}_1 - 1} (w(\underline{x}_n) + c(\underline{x}_n))].$$

Daar r een c-excessieve funktie is volgt uit (2.19) dat $w(i)+c(i) \geq 0$. We zien dus weer dat het rechterlid de verwachting is van een stochastisch aantal niet-negatieve stochasten en daarom niet-negatief is.

Indien r niet-negatief en begrensd is dan volgt voor $0 \leq \alpha \leq 1$ dat r een α-potentiaal is en

$$(2.21)\qquad - c + \alpha P r \leq r$$

Met (2.14) volgt dan

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} &\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_0} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} \alpha^n c(\underline{x}_n)] - \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_1} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_1 - 1} \alpha^n c(\underline{x}_n)] = \\ &\qquad = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}_0}^{\underline{\tau}_1 - 1} \alpha^n (w_\alpha(\underline{x}_n) + c(\underline{x}_n))], \end{aligned}$$

waarin $w_\alpha = r - \alpha P r$. Uit (2.21) volgt dat $w_\alpha(\underline{x}_n) + c(\underline{x}_n)$ voor iedere n een niet-negatieve stochastische variabele is. Dit impliceert dat het tweede gedeelte van bovenstaande gelijkheid niet-negatief is. Waaruit dan weer volgt dat het eerste gedeelte van (2.22) niet-negatief is. Door α naar 1 te laten gaan volgt dan de ongelijkheid (2.20). □

Stelling 2.4. *Zij* r *een* c*-excessieve funktie,* $\underline{\tau}_0$ *en* $\underline{\tau}_1$ *Markovtijden met* $\underline{\tau}_0 \le \underline{\tau}_1$. *Ieder van de volgende voorwaarden impliceert de relatie* (2.20)

i) r *is een potentiaal,*

ii) c *is een lading,*

iii) $c \ge 0$ *en* $r \ge 0$.

Bewijs.

i) Dit is al onder stelling 2.3 bewezen.

ii) Zij $h(i) := -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)$. Dan geldt, daar c een lading is, dat $-\infty < h(i) < +\infty$ en h is een potentiaal; in het bijzonder geldt $-c+Ph = h$. De funktie r is c-excessief. Met (2.18) volgt hieruit dat $r \ge h$. Zij $g := r-h$, dan geldt $g \ge 0$. Verder geldt

$$g = r-h \ge -c + Pr - (-c+Ph) = P(r-h) = Pg.$$

Dus g is een excessieve funktie. Volgens stelling 2.2 geldt dan voor g dat

$$\mathbb{E}_i[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] \le \mathbb{E}[g(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})]. \tag{2.23}$$

De funktie h is een potentiaal en c-excessief. Derhalve geldt (2.20) voor h. Met (2.23) volgt dan dat (2.20) ook geldt voor $r = g+h$.

iii) Voor $c \ge 0$ is de funktie ne (n een natuurlijk getal), een c-excessieve funktie. Daar het minimum van twee c-excessieve funkties weer c-excessief is, volgt dan dat ook $r_n := r \wedge ne$ een c-excessieve funktie is. De funktie r_n is bovendien begrensd; volgens stelling 2.3 geldt voor r_n de relatie (2.20). Door n naar oneindig te laten gaan volgt met behulp van de monotone convergentie stelling dat (2.20) ook voor r geldt. □

Met een tegenvoorbeeld kan aangetoond worden dat in conditie iii de voorwaarde $r \ge 0$ niet gemist kan worden. Indien voor de $\underline{\tau}_1$ uit stelling 2.3 geldt $\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_1 < \infty] = 1$ en r is naar beneden begrensd en eventueel negatief dan blijft (2.20) geldig. Pas stelling 2.4 toe op de funktie $r^*(i) = r(i) + b$ voor $i \in E$ met b een ondergrens voor de funktie r. Trek in (2.20) voor r^* links en rechts weer de constante b af en vind dan relatie (2.20) voor r.

Geheel analoog aan probleem I geldt, dat, als r (de opbrengstfunktie) c-excessief is, waarbij c de kostenfunktie voorstelt, "onmiddellijk stoppen" een optimale strategie is.

Gevolg 2.3. *Indien* r *een* c-*excessieve funktie is en minstens één van de condities* {i,ii,iii} *is vervuld, dan geldt voor willekeurige Markovtijd* $\underline{\tau}$ *dat*

$$(2.24) \qquad r(i) \geq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \qquad \textit{voor alle } i.$$

Bewijs. Substitueer $\underline{\tau}_0 = 0$ en $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}$ in (2.20). □

Gevolg 2.4. *Indien* r *een* c-*excessieve funktie is en minstens één van de condities* {i,ii,iii} *is vervuld, dan geldt voor willekeurige binnenkomsttijd* $\underline{\tau}$ *dat*

$$h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)]$$

een c-*excessieve funktie is.*

Bewijs. Relatie (2.18) voor h in plaats van r volgt uit (2.20) met de substituties $\underline{\tau}_0 = \underline{\tau}$ en $\underline{\tau}_1 = \infty$. De funktie h voldoet dus aan de eerste voorwaarde voor c-excessiviteit. De verificatie van de tweede voorwaarde gaat analoog aan het bewijs van gevolg 2.2. □

3. DE WAARDE VAN HET SPEL

We hebben in paragraaf 1 een strategie optimaal genoemd indien de bijbehorende stopregel een maximale opbrengst (minus kosten) opleverde voor iedere begintoestand. In paragraaf 4 zullen we middels een tegenvoorbeeld laten zien dat er niet altijd een optimale strategie bestaat. We zullen tevens zien dat de verzameling van verwachte opbrengsten niet in alle gevallen een maximum heeft. We definiëren daarom de *waarde van het spel*, v, als het *supremum* over de opbrengsten behorende bij stopstrategieën.

Definitie 3.1. *De waarde van het spel wordt gegeven door*

$$(3.1) \qquad v(i) = \sup_{\underline{\tau}\in T} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)].$$

Het optimaal stoppen van een Markovketen kan gezien worden als een spel waarin "de natuur" of "het systeem dat de SW bepaalt" de tegenspeler is. Zo komt men tot de naam "waarde van het spel".

Definitie 3.2. *We zeggen dat funktie* f *kleiner (of gelijk) is aan funktie* g *indien* $f(i) \le g(i)$ *voor alle* i. *In dit geval noemen we* g *een majorant van* f.

We zullen in deze paragraaf aantonen dat ingeval $v(i) < \infty$ voor alle i, v de kleinste c-excessieve majorant van r is. We zullen dit weer aantonen voor het probleem I (dus voor kostenfunktie $c \equiv 0$). Voor we hieraan beginnen zullen we een voorbeeld geven van een funktie r met $v(i) = \infty$ voor alle i.

Voorbeeld 3.1. We beschouwen de symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$ met $r(i) = i$. Dit is het niet-beperkte muntwerp-spel met als uitbetalingsfunktie het aantal malen dat munt gegooid is minus het aantal malen dat kruis gegooid is op het moment van stoppen. Volgens [Feller] is de kans om vanuit toestand 0 de toestand i te bereiken gelijk aan 1 voor iedere i. Dit betekent dat $v(0) = \infty$.

Voor een begrensde uitbetalingsfunktie (en $c \equiv 0$) geldt dat ook de waarde van het spel begrensd is. Tenzij anders vermeld zullen we steeds veronderstellen dat $|v(i)| < \infty$ voor alle i.

Stelling 3.1. *Indien* f *excessief is en* f *is een majorant van opbrengstfunktie* r, *dan is* f *een majorant van* v, *de waarde van het spel.*

Bewijs. Voor een willekeurige Markovtijd $\underline{\tau}$ geldt volgens gevolg 2.1 $\mathbb{E}_i[f(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \le f(i)$ voor alle i. Daar f een majorant is van r geldt ook $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \le E_i[f(\underline{x}_{\underline{\tau}})]$. Door deze ongelijkheden te combineren vinden we $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \le f(i)$ en dus

$$v(i) = \sup_{\underline{\tau}\in T} E_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \le f(i). \quad \square$$

Lemma 3.1. *Indien bij iedere toestand i een Markovtijd* $\underline{\tau}_i$ *gegeven is, dan is de stochastische tijd* $\underline{\tau}$ *die verkregen wordt door aan een realisering van de SW, zeg* $(i_0,i_1,\ldots)$, *de tijd* $1 + \tau_{i_1}(i_1,i_2,\ldots)$ *toe te voegen, een Markovtijd.*

Bewijs. We moeten bewijzen dat $\tau(\omega^*) = n$, indien voor twee realiseringen van de SW, zeg $\omega = (i_0,i_1,\ldots)$ en $\omega^* = (i_0,i_1,\ldots)$, geldt $\tau(\omega) = n$ èn $i_0=i_0^*,\ldots,i_n=i_n^*$.

Welnu uit

$$\tau(\omega) = 1 + \tau_{i_1}(i_1,i_2,\ldots) = n$$

volgt

$$\tau_{i_1}(i_1,i_2,\ldots) = n-1 \ .$$

Hieruit volgt, daar $i_1 = i_1^*$, $\underline{\tau}_i$ Markovtijd en $i_1=i_1^*,\ldots,i_n=i_n^*$,

$$\tau_{i_1^*}(i_1^*,i_2^*,\ldots) = n-1 \ ,$$

waaruit dan volgt

$$\tau(i_0^*,i_1^*,\ldots) = n. \quad \square$$

Stelling 3.2. *De waarde van het spel is een excessieve funktie.*

Bewijs. Daar ook $\underline{\tau} \equiv \infty$ een Markovtijd is, volgt dat de waarde van het spel niet kleiner is dan de opbrengst onder $\underline{\tau} \equiv \infty$ en dus $v(i) \geq 0$ voor alle i. Uit de definitie van v als een supremum volgt dat er voor willekeurige $\varepsilon > 0$ en toestand i een Markovtijd $\underline{\tau}_{\varepsilon,i}$ bestaat met

$$\text{(3.2)} \qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon,i}}) \geq v(i) - \varepsilon.$$

De indices ε,i gebruiken we om aan te geven dat mogelijkerwijs bij ieder paar ε,i een andere $\underline{\tau}$ genomen moet worden om aan (3.2) te voldoen. In paragraaf 4 zullen we zien dat bij $\varepsilon > 0$ er altijd een $\underline{\tau}$ bestaat die aan (3.2) voldoet voor iedere i, indien v begrensd is.

Zij $\underline{\tau}$ de stochastische tijd die verkregen wordt door aan een realisering van de SW, zeg $(i_0,i_1,\ldots)$, de tijd $1 + \tau_{\varepsilon,i_1}(i_1,i_2,\ldots)$ toe te voegen. Volgens lemma 3.1 is $\underline{\tau}$ dan een Markovtijd en dus geldt

$$(3.3) \qquad v(i) \geq \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \qquad\qquad \text{voor alle } i.$$

Voorts geldt

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \overset{(2.13)}{=} \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon,j}}) \geq \sum_j p(i,j)\, [v(j) - \varepsilon] \geq$$
$$\geq \sum_j p(i,j)\, v(j) - \varepsilon.$$

Met (3.3) geeft dit

$$v(i) \geq \sum_j p(i,j)\, v(j) - \varepsilon \qquad\qquad \text{voor willekeurige } \varepsilon > 0.$$

Hiermee is aangetoond dat v excessief is. □

Gevolg 3.1. *De waarde van het spel is de kleinste excessieve majorant van de opbrengstfunktie* r.

Bewijs. Volgens stelling 3.2 is v excessief. Daar $\underline{\tau} \equiv 0$ een Markovtijd is volgt dat v een majorant is van r, immers $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = r(i)$. Volgens stelling 3.1 is iedere excessieve majorant van r een majorant van v. Dus is v de kleinste excessieve majorant van r. □

Dat met behulp van gevolg 3.1 de waarde van het spel in sommige gevallen eenvoudig gevonden kan worden, illustreren we met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.2. We beschouwen de begrensde symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$, met absorberende randen, ook wel de "dronkemanswandeling" genoemd. Hierin is $E = \{0,1,\ldots,N\}$ en $p(i,i-1) = p(i,i+1) = \frac{1}{2}$ voor $1 \leq i \leq N-1$. De toestanden 0 en N zijn absorberend, d.w.z. $p(0,0) = p(N,N) = 1$. Een excessieve funktie is hier een concave funktie; immers, indien f excessief is, volgt

$$f(i) \geq \sum_j p(i,j)\, f(j) = \tfrac{1}{2}\,[f(i-1) + f(i+1)] \text{ voor } 1 \leq i \leq N-1.$$

De waarde van het spel is dus de kleinste *concave* majorant van r. Bij gegeven r kan hiermee v op de volgende wijze "bepaald" worden. Construeer in ieder punt i een staafje ter lengte van r(i) en span een touw over deze staafjes heen.

Evenals in paragraaf 2 laten de resultaten van deze paragraaf zich weer generaliseren tot probleem II.

Stelling 3.3. *Voor* c *een lading of* $c \geq 0$ *en* $f \geq 0$ *of* f *een potentiaal geldt: indien* f c-*excessief is en* f *is een majorant van* r, *dan is* f *een majorant van* v.

Stelling 3.4. *De waarde van het spel is een* c-*excessieve funktie.*

Gevolg 3.2. *De waarde van het spel is de kleinste* c-*excessieve majorant van* r, *indien* c *een lading is. Als* $c \geq 0$ *en* $v \geq 0$ *dan is* v *de kleinste niet-negatieve* c-*excessieve majorant van* r.

4. OVER HET BESTAAN VAN OPTIMALE STRATEGIEËN

De verzameling van toestanden waarin direct stoppen een "maximale opbrengst" oplevert noemen we de *steunverzameling*.

Definitie 4.1. *De steunverzameling* *), *zeg* Γ_0, *wordt gegeven door*

$$\Gamma_0 = \{i: r(i) = v(i)\}.$$

Γ_0 is dus de verzameling van toestanden waar de opbrengstfunktie r haar kleinste excessieve majorant steunt, vandaar de naam steunverzameling.

Indien i een toestand uit Γ_0 is, levert onmiddellijk stoppen een opbrengst v(i). Dit betekent dat geen enkele strategie een hogere verwachting van de opbrengst heeft in toestand i.

Indien i geen toestand van Γ_0 is, dan is r(i) echt kleiner dan v(i). Er zijn dan strategieën die een hogere verwachting van de opbrengst hebben in toestand i. Dit betekent dat deze strategieën niet stoppen in i en dus nog minstens één periode wachten met stoppen.

Een strategie die stoppen voorschrijft in de toestanden van Γ_0 en

*) Γ_0 wordt ook wel de stopverzameling genoemd.

"niet stoppen" daarbuiten lijkt dus optimaal te zijn. Dit is ook zo mits er een optimale strategie bestaat (zie blz.28). Dat er niet altijd een optimale strategie toont het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4.1. Zij $\mathbb{N}$ de verzameling van toestanden; $r(1) = 1$ en $r(i) < 1$ voor $i \geq 1$ en $\lim_{n\to\infty} r(n) = 1$; $1 - p(n,1) = p(n,n+1) = (n^2-1)/n^2$. Kies ε en zij $\mathbb{N}_\varepsilon$ zō dat $r(n) \geq 1-\varepsilon$ voor $n \geq N_\varepsilon$. Zij $\underline{\tau}_\varepsilon$ de intreetijd in de verzameling $\Gamma_\varepsilon = \{1, \mathbb{N}_\varepsilon, \mathbb{N}_\varepsilon + 1, \ldots\}$. Daar $\mathbb{N}\backslash\Gamma_\varepsilon$ eindig veel toestanden heeft en Γ_ε vanuit iedere toestand bereikbaar is, volgt

$$\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_\varepsilon<\infty] = 1 \qquad\qquad \text{voor alle } i.$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] = \sum_{j\in\Gamma_\varepsilon} \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}=j]\; r(j) \geq \sum_{j\in\Gamma_\varepsilon} \mathbb{P}_i[\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}=j]\;(1-\varepsilon) =$$

$$= \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_\varepsilon<\infty]\;(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon).$$

De waarde van het spel overtreft de opbrengst voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ en is dus identiek gelijk aan 1. De steunverzameling Γ_0 bestaat uit het punt 1. De kans $\pi(n)$ om vanuit toestand n ooit in Γ_0 te komen, is gelijk aan 1 minus de kans dat het systeem zonder onderbreking naar rechts verspringt, zodat

$$\pi(n) = 1 - \prod_{k=n}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{1}{n}\,.$$

De strategie met als stoptijd de binnenkomsttijd in Γ_0, zeg $\underline{\tau}_0$, heeft als verwachte opbrengst

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = \frac{1}{i}\,.$$

Deze strategie heeft een verwachte opbrengst, die kleiner is dan de waarde van het spel indien $i > 1$, en is dus niet optimaal. □

We zullen in deze paragraaf bewijzen dat ingeval r begrensd is er binnenkomsttijden bestaan waarvoor de verwachte opbrengst minder dan ε van de waarde van het spel verschilt, voor ieder startpunt. Deze strategieën noemen we ε-*optimale strategieën*. Verder zullen we in deze paragraaf voldoende voorwaarden geven voor het bestaan van optimale strategieën.

Stelling 4.1. *Indien* v, *de waarde van het spel, een potentiaal is, dan is* $\underline{\tau}_0$, *de binnenkomsttijd in* Γ_0, *een optimale stoptijd.*

Bewijs. We zullen in dit bewijs gebruiken dat voor een toestand i die niet tot Γ_0 behoort, geldt

$$(4.1) \qquad v(i) = \sum_j p(i,j)\, v(j).$$

Relatie (4.1) volgt onmiddellijk uit de optimaliteitsvergelijking die we in de volgende paragraaf zullen afleiden. Een bewijs van (4.1) laten we hier dan ook achterwege.

Indien v een potentiaal is, volgt uit lemma 2.2 dat

$$(4.2) \qquad v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} w(\underline{x}_n)]$$

met

$$(4.3) \qquad w(i) = v(i) - \sum_j p(i,j)\, v(j).$$

Uit (4.1) en (4.3) volgt

$$\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} w(\underline{x}_n) = 0.$$

Met (4.2) volgt dan

$$(4.4) \qquad v(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] \qquad\qquad \text{voor iedere i.}$$

Daar op Γ_0 de funkties r en v aan elkaar gelijk zijn en $\underline{x}_{\underline{\tau}_0} \in \Gamma_0$ volgt dat

$$r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}).$$

Met (4.4) geeft dit

$$v(i) = \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}),$$

en dus is $\underline{\tau}_0$ een optimale stoptijd. □

We hebben in paragraaf 2 opgemerkt dat voor een voorbijgaande Markovketen met *eindige* toestandsruimte iedere funktie een potentiaal is. Met stelling 4.1 volgt dan dat in dit geval stoppen in Γ_0 een optimale strategie is.

<u>Voorbeeld 4.2</u>. Indien we in de begrensde symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$ (zie voorbeeld 3.2) de absorberende toestanden weglaten, houden we alleen voorbijgaande toestanden over. De Markovketen wordt dan voorbijgaand. In voorbeeld 3.2 gaven we aan hoe v te bepalen is. Stoppen bij v = r is hier optimaal.

Uit het bewijs van stelling 4.1 is te lezen dat (4.4) een voldoende voorwaarde voor het bestaan van een optimale strategie is. Relatie (4.4) is ook noodzakelijk. In voorbeeld 4.1 is relatie (4.4) dan ook niet vervuld. Een analoge relatie voor de binnenkomst in de ε-steunverzameling $\Gamma_\varepsilon = \{i: r(i) \geq v(i)-\varepsilon\}$ geldt wel als r begrensd is en hiermee kan dan het bestaan van ε-optimale strategieën aangetoond worden.

<u>Stelling 4.2</u>. *Indien* r *begrensd is, geldt voor* $\underline{\tau}_\varepsilon$, *de binnekomsttijd in* Γ_ε, *dat*

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) \geq v(i) - \varepsilon \qquad \textit{voor alle } i. \tag{4.5}$$

Dus $\underline{\tau}_\varepsilon$ *is een* ε*-optimale stoptijd.*

<u>Bewijs</u>. Het grootste gedeelte van het bewijs zal nodig zijn om aan te tonen dat

$$v(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] \qquad \text{voor alle } i. \tag{4.6}$$

Laten we deze relatie voor het moment aannemen. Daar voor $i \in \Gamma_\varepsilon$ geldt $r(i) \geq v(i)-\varepsilon$, volgt

$$r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) \geq v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \varepsilon.$$

en dus met (4.6)

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] \geq v(i) - \varepsilon.$$

Hieruit volgt dan de ε-optimaliteit van $\underline{\tau}_\varepsilon$.

Zij

$$h(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})].$$

Om (4.6) aan te tonen moeten we dus bewijzen dat $h = v$. De funktie v is excessief; volgens gevolg 2.1 geldt dan $h(i) \le v(i)$ voor alle i. Gevolg 2.2 zegt dat h een excessieve funktie is. Daar v de kleinste excessieve majorant van r is (gevolg 3.1), geldt $h(i) \ge v(i)$ en dus $h(i) = v(i)$ voor alle i, indien h een majorant is van r.

Stel h is geen majorant van r. Dan is, daar r begrensd is en dus ook v en h begrensd zijn,

$$\infty > c = \sup_i \{r(i) - h(i)\} > 0.$$

Zij i_0 zó dat $r(i_0) > h(i_0)$ en $r(i_0) \ge h(i_0)+c-\varepsilon$. Daar $h+c \ge r$ en $h+c$ excessief is, volgt (gevolg 3.1) dat $h+c \ge v$. Derhalve geldt

$$r(i_0) \ge [h(i_0)+c] - \varepsilon \ge v(i_0) - \varepsilon,$$

waaruit volgt dat $i_0 \in \Gamma_\varepsilon$ en dus

$$h(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] = v(i_0) \ge r(i_0).$$

Dit is in tegenspraak met $r(i_0) > h(i_0)$. □

Voor het geval de toestandsruimte E slechts eindig veel elementen bevat, kan met stelling 4.2 vrij direkt worden aangetoond, dat stoppen op de steunverzameling optimaal is. Dit gaat als volgt. Zij

$$\delta = \min_{i \notin \Gamma_0} [v(i) - r(i)].$$

Dan is eenvoudig in te zien dat δ groter dan nul is. Bovendien vallen Γ_ε en Γ_0 samen indien $\varepsilon < \delta$. Met stelling 4.2 volgt nu dat voor iedere ε, die voldoet aan $0 < \varepsilon < \delta$, geldt

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) \ge v(i) - \varepsilon \qquad \text{voor alle } i.$$

Derhalve is $\underline{\tau}_0$ een optimale stoptijd.

Stelling 4.3. *Zij de opbrengstfunktie* r *begrensd. Indien de kans om vanuit toestand* i *ooit in de steunverzameling te komen gelijk aan* 1 *is, geldt*

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = v(i).$$

Bewijs. Kies een rij $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Daar $\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0<\infty] = 1$, geldt

$$\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x}_{\underline{\tau}_0} \quad \text{met} \quad \mathbb{P}_i\text{-kans } 1.$$

Omdat r begrensd is, volgt hieruit dat

$$(4.7) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}})] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})].$$

Uit (4.5) en $\varepsilon_n \to 0$ volgt

$$(4.8) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}})] \xrightarrow[n\to\infty]{} v(i).$$

De relaties (4.7) en (4.8) geven $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = v(i)$. □

Ook de stellingen van deze paragraaf kunnen weer gegeneraliseerd worden tot probleem II. We veronderstellen daarbij dat de kostenfunktie c niet-negatief is of een lading is.

Stelling 4.4. *Indien* v, *de waarde van het spel, een potentiaal is, dan is* $\underline{\tau}_0$, *de binnenkomsttijd in* Γ_0, *een optimale stoptijd.*

Bewijs. Volgens het tweede bewijs van stelling 5.1 geldt algemeen dat

$$(4.9) \qquad v(i) = -\,c(i) + \sum p(i,j)\, v(j) \qquad \text{voor } i \notin \Gamma_0.$$

Uit (4.2) volgt

$$v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} (w(\underline{x}_n) + c(\underline{x}_n))].$$

De relaties (4.9) en (4.3) impliceren dat de som in het rechterlid gelijk is aan nul. Daar $r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})$ volgt hieruit

$$(4.10) \qquad v(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] \qquad \text{voor } i \notin \Gamma_0.$$

Relatie (4.10) geldt per definitie voor $i \in \Gamma_0$. □

Stelling 4.5. *Indien* r *en* v *begrensd zijn, en* c *is een lading of* $c \geq 0$ *en* $r \geq 0$, *dan geldt voor* $\underline{\tau}_\varepsilon$, *de binnenkomsttijd in* Γ_ε, *dat*

$$(4.11) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon - 1} c(\underline{x}_n)] \geq v(i) - \varepsilon \quad \textit{voor alle } i.$$

Bewijs. Zij

$$h(i) := \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon - 1} c(\underline{x}_n)].$$

Met gevolg 2.3 vinden we

$$(4.12) \qquad v \geq h.$$

Gevolg 2.4 impliceert dat h een c-excessieve funktie is. Met volledige inductie laat zich bewijzen dat voor een natuurlijk getal N en $\underline{\tau}_N :=$ $:= \min[\underline{\tau}_\varepsilon, N]$ uit (4.9) volgt dat

$$v(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} c(\underline{x}_n)]. \quad ^{*)}$$

Daar v begrensd is, volgt hieruit dat

$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} c(\underline{x}_n)]$$

begrensd is en, door N naar oneindig te laten gaan, dat ook h begrensd is. Zij $a := \sup_i \{r(i) - h(i)\}$. Daar h en r begrensd zijn, volgt dat a eindig is. Door aan te tonen dat $a > 0$ tot een tegenspraak leidt, zal bewezen worden dat $h \geq r$. Gevolg 3.2 impliceert dan dat

---

*) Deze relatie volgt ook uit (5.14) op blz. 35.

(4.13) $\qquad h \geq v.$

Stel $a > 0$ en kies i_0 zó dat $r(i_0) > h(i_0)$ en $r(i_0) \geq h(i_0)+a-\varepsilon$. Daar $h+ae \geq r$ en $h+ae$ een c-excessieve funktie is, volgt uit gevolg 3.2 dat $h+ae \geq v$, en dus

$$r(i_0) \geq [h(i_0) + a] - \varepsilon \geq v(i_0) - \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $i_0 \in \Gamma_\varepsilon$ en dus

$$h(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon - 1} c(\underline{x}_n)] = v(i_0) \geq r(i_0).$$

Dit is in tegenspraak met $r(i_0) > h(i_0)$. De relaties (4.12) en (4.13) impliceren dat $h = v$. Daar

$$r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) \geq v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \varepsilon$$

volgt hieruit met gebruikmaking van de definitie van h de relatie (4.11). □

Analoog aan stelling 4.3 laat zich nu bewijzen:

Stelling 4.6. *Indien* r *en* v *begrensd zijn en* c *is een lading of* $c \geq 0$ *en* $r \geq 0$, *dan volgt uit* $\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0<\infty] = 1$, *dat*

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] = v(i).$$

In het voorafgaande werd beweerd dat stoppen op Γ_0 altijd optimaal is, als er een optimale strategie bestaat. We bewijzen nu deze stelling voor probleem II.

Stelling 4.7. *Veronderstel dat Markovtijd* $\underline{\tau}$ *optimaal is bij starten in* i_0, *d.w.z.*

(4.14) $$v(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)].$$

Indien c *een lading is of* $c \geq 0$ *en* $r \geq 0$, *dan voldoet* $\underline{\tau}_0$, *de binnenkomst-*

tijd in de steunverzameling Γ_0, *aan*

$$v(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)].$$

Bewijs. v is een c-excessieve funktie, $v \geq r$ en (2.24) met v voor r geldt. Hieruit volgt met behulp van (4.14)

$$v(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)]. \tag{4.15}$$

De relaties (4.14) en (4.15) geven

$$\mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = 0.$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}_{i_0}[(v(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}}))\, \chi_{\{\underline{\tau}<\underline{\tau}_0\}}] = 0.$$

Daar $r < v$ op Γ_0^c volgt, dat $\underline{\tau} \geq \underline{\tau}_0$ bijna overal ten opzichte van de $\mathbb{P}_{i_0}$-kans. Met (2.20) volgt dan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{i_0}[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] &= \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] \geq \\ &\geq \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] = \\ &= v(i_0). \quad \square\end{aligned}$$

5. OVER HET BEPALEN VAN OPTIMALE STRATEGIEËN

In paragraaf 4 hebben we gezien dat er niet altijd een optimale stopregel bestaat. Indien ze echter wel bestaat, is ze gelijk aan de binnenkomsttijd in de steunverzameling Γ_0. We hebben ook gezien dat de binnenkomsttijd in de ε-steunverzameling Γ_ε een ε-optimale strategie oplevert. Om (ε-)optimale strategieën te vinden moeten we dus v, de waarde van het spel, bepalen.

In hoofdstuk 2 zal met gebruikmaking van stellingen omtrent de Martin-rand een karakterisering van de klasse van alle excessieve funkties gegeven worden. Hieruit kan v als kleinste excessieve majorant van r bepaald worden. We zullen in deze paragraaf enige andere manieren aangeven om v te bepalen. We doen dit voor probleem II.

We veronderstellen in deze paragraaf dat, als c geen lading is, dan is $c \geq 0$ èn $r \geq 0$. Onder deze veronderstelling is volgens gevolg 3.2 de waarde van het spel de kleinste c-excessieve majorant van r.

5.1. De funktionaalvergelijking

De waarde van het spel voldoet aan een funktionaalvergelijking, veelal de *optimaliteitsvergelijking* genoemd. Indien we een oplossing w van de funktionaalvergelijking kunnen vinden en we weten dat de optimaliteitsvergelijking een unieke oplossing heeft, dan is $v = w$ en is daarmee het optimaal stopprobleem opgelost. We zullen de optimaliteitsvergelijking afleiden en tevens een voldoende voorwaarde voor de uniciteit van de oplossing geven.

Stelling 5.1. *De waarde van het spel,* v, *voldoet aan de optimaliteitsvergelijking*

$$(5.1) \qquad v(i) = \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\,v(j)] \qquad \textit{voor iedere } i.$$

Eerste bewijs. We definiëren inductief een rij van funkties op E door

$$(5.2) \qquad x_0(i) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\,c(j)$$

en

$$(5.3) \qquad x_{n+1}(i) = \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\,x_n(j)].$$

Om het rechterlid van (5.2) gedefinieerd te doen zijn, moeten we evenals in paragraaf 2 aannemen dat $c \geq 0$ of een lading is. Het is dan mogelijk dat x_0 de waarde $-\infty$ aanneemt.

Met volledige inductie zullen we bewijzen dat de rij $\{x_n(i)\}$ monotoon niet-dalend is voor iedere i. Immers

$$x_1(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_0(j) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\ c(j) = x_0(i).$$

Stel dat $x_n(i) \geq x_{n-1}(i)$ voor iedere i; indien $x_n(i) = r(i)$ dan geldt

$$x_{n+1}(i) = \max\ [r(i),\ldots] \geq r(i) = x_n(i);$$

indien $x_n(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_{n-1}(j)$ dan geldt

$$x_{n+1}(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_n(j) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_{n-1}(j) =$$

$$= x_n(i).$$

We hebben hiermee aangetoond dat $\{x_n(i)\}$ monotoon niet-dalend is. Uit de monotonie volgt dat $\lim_{n\to\infty} x_n(i)$ bestaat. Zij

(5.4) $\qquad x_\infty(i) = \lim_{n\to\infty} x_n(i).$

Uit (5.3) en (5.4) volgt

$$x_\infty(i) = \max\ [r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_\infty(j)].$$

De funktie x_∞ voldoet dus aan de optimaliteitsvergelijking. We zullen vervolgens bewijzen dat $x_\infty = v$. Omdat

$$x_\infty \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_\infty(j) \text{ en } x_\infty \geq x_0,$$

is x_∞ volgens (2.18) en (2.19) een c-excessieve funktie. Bovendien is x_∞ een majorant van r. Daar v de kleinste majorant van r is (gevolg 3.2) volgt dan dat

(5.5) $\qquad x_\infty \geq v.$

De waarde van het spel, v, is c-excessief; volgens (2.18) geldt dus $v \geq x_0$. Stel $v \geq x_n$, dan volgt uit $v \geq r$ en de c-excessiviteit dat

$$v(i) \geq \max\ [r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v(j)] \geq$$

$$\geq \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_n(j)] = x_{n+1}(i).$$

Met volledige inductie volgt dan $v \geq x_n$ voor alle n. Hieruit volgt

$$v \geq x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{5.6}$$

De relaties (5.5) en (5.6) tonen aan dat $x_\infty = v$. □

<u>Tweede bewijs</u>. Volgens stelling 3.4 is de waarde van het spel een c-excessieve funktie. Bovendien volgt, aangezien $\underline{\tau} \equiv 0$ een Markovtijd is, dat $v \geq r$. Dus

$$v(i) \geq \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v(j)]. \tag{5.7}$$

Kies een willekeurige toestand i^* en een $\varepsilon > 0$. Zij $\underline{\tau}$ een Markovtijd met

$$\mathbb{E}_{i^*}\,[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \geq v(i^*) - \varepsilon. \tag{5.8}$$

Daar $\underline{\tau}$ een Markovtijd is, geldt

$$\begin{array}{lll} \text{óf } \underline{\tau} = 0 & \text{voor } \underline{x}_0 = i^*, \\ \text{óf } \underline{\tau} \geq 1 & \text{voor } \underline{x}_0 = i^*. \end{array}$$

In het eerste geval volgt

$$r(i^*) \geq v(i^*) - \varepsilon. \tag{5.9}$$

In het tweede geval definiëren we

$$\tau^*(i_0,i_1,\ldots) := \tau(i^*,i_0,i_1,\ldots) - 1.$$

τ^* is dan een Markovtijd en

$$\mathbb{E}_{i^*}\,[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] = -c(i^*) + \sum_j p(i^*,j)\,\mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}^*}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}^*-1} c(\underline{x}_n)] \leq$$

$$\leq -c(i^*) + \sum_j p(i^*,j)\ v(j).$$

Met behulp van (5.8) en omdat ε willekeurig positief is, volgt

$$(5.10) \qquad -c(i^*) + \sum_j p(i^*,j)\; v(j) \geq v(i^*).$$

Dus in beide gevallen geldt

$$(5.11) \qquad \max\,[r(i),\; -c(i) + \sum_j p(i,j)\; v(j)] \geq v(i).$$

De relaties (5.7) en (5.11) impliceren (5.1). □

Definitie 5.1. *Een funktie* h *waarvoor* $h(i) = \sum_j p(i,j)\, h(j)$, *wordt een harmonische funktie genoemd.*

In het volgende hoofdstuk zal ook een karakterisering van de klasse van harmonische funkties gegeven worden. Het is niet moeilijk in te zien dat, indien $c \equiv 0$, iedere harmonische majorant van r een oplossing is van de optimaliteitsvergelijking. In veel gevallen heeft deze funktionaalvergelijking dus geen unieke oplossing.

Gevolg 5.1. *Als*

$$r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\; c(j),$$

dan is v *de kleinste oplossing van de optimaliteitsvergelijking.*

Bewijs. Laat w een oplossing van (5.1) zijn, dan geldt

$$w(i) \geq r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\; c(j)$$

en

$$w(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\; w(j).$$

Hieruit volgt dat w een c-excessieve majorant van r is en dus volgens gevolg 3.2 groter dan of gelijk aan v. □

Definitie 5.2. *Zij toestand* ∞ *met bijbehorende overgangswaarschijnlijkheden gedefinieerd zoals onder* ii) *op pag 1. Een Markovketen heet absorberend indien het systeem startend vanuit een willekeurige toestand met kans* 1 *de toestand* ∞ *ooit bereikt.*

<u>Lemma 5.1</u>. *Een Markovketen is absorberend dan en slechts dan als*

(5.12) $$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j) = 0 \qquad \textit{voor iedere } i.$$

<u>Bewijs</u>. Uit $\mathbb{P}_i[\underline{x}_n=\infty] = 1 - \sum_j p^n(i,j)$ volgt dat (5.12) equivalent is met

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i[\underline{x}_n=\infty] = 1 \qquad \text{voor iedere } i.$$

De Markovketen is absorberend dan en slechts dan als $\mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{\infty}(\underline{x}_n=\infty)] = 1$ voor iedere i. Verder geldt, daar ∞ een absorberende toestand is,

$$\mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{\infty} (\underline{x}_n=\infty)] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{N} (\underline{x}_n=\infty)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i[\underline{x}_N=\infty] \qquad \text{voor iedere } i. \quad \square$$

Voor Markovketens met eindig veel toestanden vallen de begrippen voorbijgaand (zie definitie in paragraaf 2) en absorberend samen. In het algemeen geldt: Markovketen absorberend $\Rightarrow$ Markovketen voorbijgaand.

Een interessant voorbeeld van een absorberende Markovketen krijgen we indien de kosten of opbrengsten verdisconteerd worden. Een bedrag k op de n-de "dag" ontvangen heeft op de 0-de "dag" een economische waarde van $\alpha^n k$ met $0 < \alpha < 1$ als *verdisconteringsfaktor*. Voor het optimaal stopprobleem met $c \equiv 0$ betekent dit dat de stoptijd $\underline{\tau} \equiv n$ als verwachte opbrengst

$$\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}}\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = \sum_j p^n(i,j)\, \alpha^n\, r(j)$$

heeft als het systeem start in i. We kunnen dit tot een bekend optimaal stopprobleem terugbrengen door een Markovketen met nieuwe overgangswaarschijnlijkheden te definiëren door $\tilde{p}(i,j) = \alpha\, p(i,j)$. Deze nieuwe Markovketen is dan absorberend.

<u>Stelling 5.2</u>. *Indien* c *niet-negatief,* r *een begrensde funktie en de Markovketen absorberend is, geldt*

i) *er is een optimale stoptijd,*

ii) *de optimaliteitsvergelijking heeft een unieke begrensde oplossing.*

Bewijs.

i) Daar c niet-negatief en r begrensd is, volgt dat ook v, gedefinieerd in (3.1), een begrensde funktie is. Uit (5.12) volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, v(j) = 0 \qquad \text{voor iedere i.}$$

Indien $c \equiv 0$ dan is volgens lemma 2.1 de funktie v een potentiaal en volgens stelling 4.1 is $\underline{\tau}_0$, de binnenkomsttijd in de steunverzameling, een optimale stoptijd.

Indien $c \not\equiv 0$ dan is v niet noodzakelijk een potentiaal *). We zullen de optimaliteit van $\underline{\tau}_0$ bewijzen door aan te tonen dat

$$\text{(5.13)} \qquad v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)].$$

Immers, hieruit volgt, daar $r = v$ op Γ_0,

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] = v(i)$$

en dus dat $\underline{\tau}_0$ optimaal is. Zij $\underline{\tau}_N = \min\,[\underline{\tau}_0, N]$; uit (2.14) volgt dat voor alle $0 < \alpha < 1$ geldt

$$v(i) - \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_N} v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} \alpha^n\, w_\alpha(\underline{x}_n)],$$

waarin $w_\alpha(i) = v(i) - \alpha \sum_j p(i,j)\, v(j)$. Daar $\underline{\tau}_N \le N$ volgt hieruit door de limietovergang $\alpha \uparrow 1$ dat

$$\text{(5.14)} \qquad v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} w(\underline{x}_n)].$$

Voor $n < \underline{\tau}_N$ geldt echter dat $\underline{x}_n \notin \Gamma_0$ en hieruit volgt met (5.1) dat

---

*) Lemma 2.1 kan als volgt gegeneraliseerd worden: *Een* c*-excessieve funktie* f *is een potentiaal indien* c *een lading is en* $\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, f(j) = 0$ *voor iedere* i. Hieruit volgt dan dat ingeval c een lading is, de waarde van het spel weer een potentiaal is.

$$v(\underline{x}_n) = -c(\underline{x}_n) + \sum_j p(\underline{x}_n,j)\ v(j)$$

en dus

$$w(\underline{x}_n) = -c(\underline{x}_n).$$

dus geldt

$$(5.15) \qquad v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N-1} c(\underline{x}_n)].$$

Verder geldt

$$|\ \mathbb{E}_i\ v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \mathbb{E}_i\ v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})| \le \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0 > N]\ (\sup_i v(i) - \inf_i v(i)).$$

Daar de Markovketen absorberend is volgt dat $\lim_{N\to\infty} P_i[\underline{\tau}_0>N] = 0$, en dus

$$(5.16) \qquad \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_i\ v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N}) = \mathbb{E}_i\ v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})\ .$$

Uit $c \ge 0$ volgt dat $\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N-1} c(\underline{x}_n)$ monotoon niet-dalend naar $\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)$ convergeert. Met de monotone convergentie stelling volgt hieruit dat

$$(5.17) \qquad \lim_{N\to\infty} -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N-1} c(\underline{x}_n)] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)]\ .$$

De relaties (5.15), (5.16) en (5.17) tezamen impliceren (5.13).

ii) Veronderstel dat naast v ook de funktie w een oplossing is van de optimaliteitsvergelijking. We zullen bewijzen dat

$$(5.18) \qquad v(i) - w(i) \le \sum_j p(i,j)\ |v(j) - w(j)|\ .$$

Indien toestand i een element van de steunverzameling Γ_0 is, geldt $v(i) = r(i)$. Daar $w(i) \ge r(i)$, volgt dan $v(i) - w(i) \le 0$, zodat zeker (5.18) geldt.

Indien toestand i geen element van Γ_0 is, geldt

$$v(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v(j).$$

Verder is

$$w(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\, w(j).$$

Hieruit volgt

$$v(i) - w(i) \leq \sum_j p(i,j)\, \{v(j) - w(j)\} ,$$

zodat zeker (5.18) geldt.

Analoog aan (5.18), maar dan met $\Gamma^* = \{i\colon w(i)=r(i)\}$ i.p.v. Γ_0, laat zich bewijzen dat

$$w(i) - v(i) \leq \sum_j p(i,j)\, |v(j) - w(j)|.$$

Hieruit volgt

$$|v(i) - w(i)| \leq \sum_j p(i,j)\, |v(j) - w(j)|. \tag{5.19}$$

Door (5.19) herhaald toe te passen vinden we dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$|v(i) - w(i)| \leq \sum_j p^n(i,j)\, |v(j) - w(j)|. \tag{5.20}$$

Daar de Markovketen absorberend en $|v - w|$ begrensd is, volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, |v(j) - w(j)| = 0$$

Met (5.20) volgt hieruit dat $v = w$. □

5.2. Stabiele problemen

In veel gevallen is het oplossen van de funktionaalvergelijking erg moeilijk. Om ε-optimale strategieën te bepalen is het voldoende om v dicht genoeg te benaderen in plaats van te bepalen. Met het bepalen van benaderingen van v zullen we ons in deze paragraaf bezig houden.

Notatie 5.1. De waarde van het spel onder de voorwaarde dat het spel niet langer dan n+1 perioden gespeeld mag worden, duiden we aan met v_n. Zij T_n de collectie van Markovtijden $\underline{\tau}$ met $\underline{\tau} \leq n$, dan geldt

$$(5.21)\qquad v_n(i) = \sup_{\underline{\tau}\in T_n} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_k)].$$

Definitie 5.3. *Een optimaal stopprobleem heet* stabiel *indien*

$$(5.22)\qquad \lim_{n\to\infty} v_n(i) = v(i) \qquad\qquad \textit{voor iedere } i. \text{ *)}$$

Voor stabiele problemen kunnen we benaderingen van v vinden door v_n's te berekenen. We zullen zien dat de funktie v_{n+1} op eenvoudige wijze uit v_n te bepalen is. Dit betekent dat voor eindige toestandsruimten met gebruikmaking van rekentuig de bepaling van v_n, mits n niet te groot is, meestal zeer goed mogelijk is. Indien voor zeker getal $a > 0$ geldt dat

$$(5.23)\qquad v_n(i) \geq v(i) - a \qquad\qquad \text{voor iedere } i,$$

en zijn verder r en v begrensd, dan zal de binnenkomsttijd in verzameling Γ^* met

$$\Gamma^* = \{i: r(i) \geq v_n(i)-\varepsilon\}$$

een $(a+\varepsilon)$-optimale stoptijd zijn (stelling 4.5). Voor niet te grote a zullen we in de meeste praktische gevallen een aanvaardbare oplossing van het probleem gevonden hebben.

Om te weten dat voor bepaalde n en a relatie (5.23) vervuld is moeten we niet alleen een stabiel probleem hebben, maar moeten we ook de snelheid van convergentie in relatie (5.22) kennen. We zullen een stelling hierover afleiden. Verder zullen we middels een voorbeeld laten zien dat niet alle optimaal stopproblemen stabiel zijn en voorts een voldoende voorwaarde geven voor stabiliteit.

We hebben v_n gedefinieerd als de maximaal te verkrijgen opbrengst onder de voorwaarde dat er vóór tijdstip n+1 gestopt moet worden. Dit is een n-staps beslissingsprobleem, n.l. op de tijdstippen 0,1,...,n-1 moet er een beslissing genomen worden omtrent al dan niet stoppen. Het *optimaliteitsprincipe van Bellman* zegt dat een optimale strategie over (n+1) perioden zó is dat de beslissingen op het (k+1)-de t/m n-de tijdstip een optimale

---

*) In de referenties komen verschillende definities van stabiliteit voor. Definitie 5.3 is de zwakste versie van stabiliteit.

strategie opleveren voor de laatste (n-k) perioden. Dit impliceert dat de maximale opbrengst over een eindig aantal perioden gevonden wordt middels het principe van de *dynamische programmering*. Dat wil zeggen dat een oplossing voor het (n+1)-staps beslissingsprobleem gevonden wordt door met (5.25) v_{n+1} uit v_n te bepalen en op de 0-de "dag" te stoppen al naar gelang $v_{n+1} \geq r$ is en op de overige tijdstippen te beslissen volgens de n-staps optimale strategie. We zullen dit bewijzen.

Stelling 5.3. *Voor de rij* $\{v_n\}$ *van verwachte opbrengsten, die gedefinieerd is in* (5.21) *gelden de volgende relaties:*

(5.24) $$v_0(i) = r(i)$$

(5.25) $$v_{n+1}(i) = \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v_n(j)].$$

Zij $\underline{\tau}_n$ *de strategie die stoppen voorschrijft in toestand* i *op het* k*-de tijdstip indien niet reeds eerder gestopt is en*

(5.26) $$r(i) = v_{n-k}(i),$$

dan geldt voor $\underline{\tau}_n$ *en* v_n *dat*

(5.27) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n - 1} c(\underline{x}_k)] = v_n(i).$$

Bewijs. Daar $v_0 = r$, volgt dat $\underline{\tau}_n \leq n$. Het bewijs van de geldigheid van (5.25) en (5.27) geven we mèt volledige inductie. Stel dat (5.25) en (5.27) bewezen zijn voor alle natuurlijke getallen $\leq n$. Zij

(5.28) $$w(i) = \max\,[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v_n(j)].$$

Voor de inductiestap moeten we nu aantonen dat $w = v_{n+1}$ en dat (5.27) geldt. Zij de strategie $\underline{\tilde{\tau}}$ gedefinieerd door

$$\tilde{\tau}(i_0,i_1,\ldots) := \begin{cases} 0 & \text{indien } r(i_0) = w(i_0), \\ 1 + \tau_n(i_1,i_2,\ldots) & \text{anders.} \end{cases}$$

We zullen aantonen dat

$$(5.29)\qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\tilde{\underline{\tau}}}) - \sum_{n=0}^{\tilde{\underline{\tau}}-1} c(\underline{x}_n)] = w(i).$$

Met (5.28) volgt dat $r(i) \leq w(i)$ en dus geldt $r(i) = w(i)$ of $r(i) < w(i)$.

Indien voor i geldt $r(i) = w(i)$ dan volgt

$$\tilde{\underline{\tau}} = 0 \qquad\qquad \text{met } \mathbb{P}_i\text{-kans } 1.$$

Hieruit volgt dat het linkerlid van (5.29) gelijk is aan $r(i)$. Dus in dit geval geldt (5.29).

Indien voor i geldt $r(i) < w(i)$ dan volgt met (5.28) dat

$$w(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j).$$

Verder volgt uit $\tilde{\tau}(i_0,i_1,\ldots) = 1 + \tau_n(i_1,i_2,\ldots)$ met $\mathbb{P}_i$-kans 1, dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\tilde{\underline{\tau}}}) - \sum_{k=0}^{\tilde{\underline{\tau}}-1} c(\underline{x}_k)] &= \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{1+\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n} c(\underline{x}_k)] = \\ &= -c(i) + \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n-1} c(\underline{x}_k)] = \\ &= -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j),\end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit de inductie-aanname voor (5.27). Dus ook voor deze waarden van i geldt (5.29)

Daar $\tilde{\underline{\tau}} \leq 1+\underline{\tau}_n \leq 1+n$, volgt uit de definitie van v_{n+1} als de maximale opbrengst over $(n+1)$ perioden dat $w \leq v_{n+1}$. Indien we nog aantonen dat

$$(5.30)\qquad v_{n+1} \leq w,$$

dan hebben we de inductiestap bewezen; immers, dan volgt dat $v_{n+1} = w$ en hieruit $\tilde{\underline{\tau}} = \underline{\tau}_{n+1}$ en met (5.29) dan ook relatie (5.27) voor $(n+1)$. We zullen (5.30) aantonen door voor een willekeurige Markovtijd $\underline{\tau} \leq n+1$ te bewijzen dat

$$(5.31)\qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_k)] \leq w(i) \qquad \text{voor iedere } i.$$

Daar $\underline{\tau}$ een Markovtijd is, geldt voor willekeurige toestand i

óf $\underline{\tau} = 0$ voor <u>alle</u> realiseringen met $\underline{x}_0 = i$,

óf $\underline{\tau} > 0$ voor <u>alle</u> realiseringen met $\underline{x}_0 = i$.

Indien $\underline{\tau} = 0$ voor $\underline{x}_0 = i$ dan is het linkerlid van (5.31) gelijk aan $r(i)$ en geldt (5.31) dus zeker, daar $w(i) \geq r(i)$.

Indien $\underline{\tau} > 0$ voor $\underline{x}_0 = i$ dan volgt, als we ons tot de realiseringen met $\underline{x}_0 = i$ beperken, dat voor $\tau^*(i_0,i_1,\ldots) := \tau(i,i_0,\ldots) - 1$ geldt, $\underline{\tau}^*$ is een Markovtijd en $\underline{\tau}^* \leq n$. Hieruit volgt

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_k)] = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{1+\underline{\tau}^*}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}^*} c(\underline{x}_k)] =$$

$$= -c(i) + \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}^*}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}^*-1} c(\underline{x}_k)] \leq$$

$$\leq -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j) \leq w(i).$$

De voorlaatste ongelijkheid volgt uit de definitie van v_n en de laatste ongelijkheid uit (5.28). □

We merken op dat de recursieve relaties (5.3) en (5.25) dezelfde zijn. Dit impliceert dat, als

$$(5.32) \qquad r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)$$

het probleem volgens stelling 5.1 stabiel is. Immers, dan geldt $v_n = x_{n+1}$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} x_n = v .$$

We hebben dus de volgende stelling bewezen.

<u>Stelling 5.4</u>. *Ongelijkheid* (5.32) *is een voldoende voorwaarde voor stabiliteit.*

Dat niet ieder optimaal stopprobleem stabiel is toont het volgende

<u>Voorbeeld 5.1</u>. Beschouw de symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$ met kostenfunk-

tie identiek gelijk aan nul en opbrengstfunktie $r(i) = i$. Dit is het niet-beperkte muntwerp-spel met als uitbetalingsfunktie het aantal malen dat munt gegooid is minus het aantal malen dat kruis gegooid is op het moment van stoppen. We zagen in paragraaf 3 dat $v \equiv \infty$. De funktie r is harmonisch en dit impliceert dat $v_n = r$ voor alle n. Derhalve is de limiet van v_n voor $n \to \infty$ ongelijk aan v en het probleem is dus ook niet stabiel. Uit $v_n(0) = 0$ voor iedere n volgt dat voor iedere stoptijd $\underline{\tau}$ geldt, dat voor iedere n

$$\mathbb{E}_0[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n})] \leq 0 \qquad\qquad \text{met } \underline{\tau}_n = \min[\underline{\tau},n].$$

Uit de symmetrie om nul van dit probleem is duidelijk dat ook geldt

$$\mathbb{E}_0[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n})] \geq 0,$$

en dus geldt voor iedere stoptijd $\underline{\tau}$ die met kans 1 begrensd is dat de verwachting van de opbrengst gelijk aan nul is. Voor begrensde stoptijden is het muntwerp-spel dus een eerlijk spel.

In paragraaf 4 hebben we een voorbeeld gezien van een optimaal stopprobleem waarvoor stoppen in de steunverzameling niet optimaal was. Daar voor dit voorbeeld geldt dat $c \equiv 0$ en $r \geq 0$, is volgens stelling 5.4 het probleem stabiel. We zien hieruit dat stabiliteit niet het bestaan van een optimale stoptijd behoeft te impliceren.

In de volgende stelling veronderstellen we dat r begrensd is en $\inf_{i \in E} c(i) > 0$; het probleem is dan stabiel. We kunnen echter in dit geval iets zeggen omtrent de snelheid waarmee v_n naar v convergeert. We geven in deel ii van de hierna volgende stelling een afschatting voor $v-v_n$ die we met behulp van het resultaat van deel iii kunnen verscherpen tot de uitspraak onder iv. Deel iii is een generalisatie van het bekende feit dat in de "sequential probability ratio test" het verwachte aantal waarnemingen exponentieel begrensd is.

<u>Stelling 5.5</u>. *Zij* r *begrensd,*

(5.33) $\qquad c_0 = \inf_i c(i) > 0$

en

(5.34) $\qquad r_0 = \sup_i r(i) < \infty$, *dan geldt*

i) *er bestaat een optimale strategie;*

ii) $v(i)-v_n(i) \le \dfrac{\{r_0-r(i)\}\{r_0-c_0\}}{(n+1)c_0}$;

iii) *de stoptijd behorende bij de steunverzameling is exponentieel begrensd;*

iv) v_n *gaat exponentieel snel naar* v.

Bewijs. Zij $\underline{\tau}$ een Markovtijd waarvoor geldt

$$r(i) \le \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)]. \tag{5.35}$$

Hieruit volgt dat voor $\underline{\tau}$ geldt

$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \le \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] - r(i). \tag{5.36}$$

Daar $c(i) \ge c_0$ voor alle i, volgt

$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \ge \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c_0] = c_0\,\mathbb{E}_i[\underline{\tau}].$$

We substitueren dit in (5.36) en gebruiken dat $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \le r_0$. Dan volgt

$$\mathbb{E}_i[\underline{\tau}] \le \frac{r_0 - r(i)}{c_0}\,. \tag{5.37}$$

We zullen met een bewijs uit het ongerijmde aantonen dat ook voor $\underline{\tau}_\varepsilon$, de stoptijd behorende bij de ε-steunverzameling $\Gamma_\varepsilon = \{i\colon r(i) \ge v(i)-\varepsilon\}$, relatie (5.35) geldt. Stel dat (5.35) niet geldt voor i_0, dan volgt dat

$$r(i_0) > \mathbb{E}_{i_0}[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon-1} c(\underline{x}_n)] \ge v(i_0) - \varepsilon\,.$$

De laatste ongelijkheid volgt uit (4.11) (uit het gegeven volgt dat ook v begrensd is). Hieruit volgt dat $i_0 \in \Gamma_\varepsilon$ en dus moet er volgens $\underline{\tau}_\varepsilon$ in i_0

gestopt worden. Dit betekent dat de opbrengst voor i_0 als startpunt gelijk is aan $r(i_0)$. Dit is in tegenspraak met de aanname.

Omdat (5.35) voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ met $\varepsilon > 0$ geldt, volgt dat (5.37) voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ vervuld is. Met

$$\tau_0(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_\varepsilon(\omega) \qquad \text{voor alle } \omega,$$

volgt hieruit dat ook de verwachting van $\underline{\tau}_0$ eindig is. Dit impliceert dat $\underline{\tau}_0$ eindig is met kans 1. Volgens stelling 4.6 geldt dan dat $\underline{\tau}_0$ optimaal is. Daar $v \geq r$ en de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ gelijk aan v is, wordt dus ook voor $\underline{\tau}_0$ aan (5.35) voldaan.

Zij $\underline{\tau}_n = \min [\underline{\tau}_0, n]$. v is de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ en v_n is niet kleiner dan de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_n$, dus $v-v_n$ is kleiner dan of gelijk aan de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ minus de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_n$. Met (5.33) en (5.34) volgt dan

$$(5.38) \qquad v(i)-v_n(i) \leq (r_0-c_0)\,\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0>n].$$

Volgens [Feller] geldt

$$(5.39) \qquad \mathbb{E}_i[\underline{\tau}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[\underline{\tau}>n].$$

Omdat $\mathbb{P}_i[\underline{\tau}>n]$ monotoon niet-stijgend is, volgt dan uit (5.37) en (5.39) dat

$$(5.40) \qquad \mathbb{P}_i[\underline{\tau}>n] \leq \frac{r_0 - r(i)}{(n+1)c_0} \,.$$

Door dit te substitueren in (5.38) vinden we

$$v(i)-v_n(i) \leq \frac{\{r_0-r(i)\}\{r_0-c_0\}}{(n+1)\, c_0}$$

Hiermee is deel ii bewezen.

Kies N en a (a<1) zō dat

$$(5.41) \qquad \frac{r_0 - r(i)}{(N+1)\, c_0} \leq a \qquad \text{voor alle } i.$$

Zij verder $\tilde{P}$ de Markovmatrix op $\Gamma_0^c = E\backslash\Gamma_0$ die we verkrijgen door P te beperken tot Γ_0^c. Dus

$$\tilde{p}(i,j) = p(i,j) \qquad \text{voor } i,j \in \Gamma_0^c.$$

De Markovmatrix $\tilde{P}$ beschrijft de beweging van het systeem zolang het systeem zich in Γ_0^c bevindt. Indien $\underline{\tau}_0 > n$, moet het systeem zich tot en met tijdstip n in Γ_0^c bevinden en dus geldt

$$\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0>n] = \sum_j \tilde{p}^n(i,j).$$

Uit (5.40) en (5.41) volgt dan

$$\sum_j \tilde{p}^N(i,j) \le a \qquad \text{voor alle } i.$$

Hieruit volgt voor $n > N$

$$\sum_j \tilde{p}^n(i,j) = \sum_{j,k} \tilde{p}^{n-N}(i,k)\, \tilde{p}^N(k,j) \le a \sum_k \tilde{p}^{n-N}(i,k).$$

Door deze relatie m maal toe te passen, indien $n = mN+r$ met $0 \le r < N$, vinden we dat

$$\sum_j \tilde{p}^n(i,j) \le a^m,$$

en dus algemeen

$$(5.42) \qquad \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0>n] \le a^{[n/N]} \qquad \text{voor iedere } i.^{*)}$$

Volgens deze relatie is $\underline{\tau}_0$ exponentieel begrensd. Door (5.42) in (5.38) te substitueren vinden we

$$v(i)-v_n(i) \le (r_0-c_0)\, a^{[n/N]} \qquad \text{voor iedere } i.$$

v_n gaat dus exponentieel snel naar v. □

---

*) [x] betekent het grootste gehele getal ≤ x.

Uit het bewijs van de voorgaande stelling is te zien dat niet alleen de stoptijd behorende bij Γ_0 exponentieel begrensd is, maar ook iedere andere binnenkomsttijd die voldoet aan (5.35).

In [Breiman] wordt een stoptijd $\underline{\tau}$ stabiel genoemd indien de verwachte opbrengst behorende bij $\underline{\tau}_n$ = min $[\underline{\tau},n]$ naar de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}$ convergeert voor $n \to \infty$. Uit (5.37) volgt dat $\underline{\tau}$ stabiel is, zodat iedere $\underline{\tau}$ die aan (5.35) voldoet stabiel is in de zin van Breiman.

5.3. "Entrance-fee" problemen

"Entrance-fee" problemen zijn optimaal stopproblemen waarvoor de opbrengstfunktie r identiek gelijk aan nul is. Deze problemen zijn dan pas interessant indien de kostenfunktie c zowel positieve als negatieve waarden aanneemt. Immers, indien $c \geq 0$ dan is "onmiddellijk stoppen" optimaal, en indien $c \leq 0$ dan is "nooit stoppen" optimaal.

Toestanden waarvoor de kostenfunktie negatief is noemt men *gunstig*, omdat een volgend deelspel negatieve kosten (negatieve "entrance-fee") heeft en dus gunstig is om te doen. Na dit deelspel kan altijd nog tot stoppen besloten worden. Dus zolang we in de gunstige toestanden zijn kunnen we de opbrengst vergroten door verder te spelen. Indien we in de niet-gunstige toestanden terecht komen, kan doorspelen ook gunstig zijn (bijv. als het systeem met grote kans weer in de gunstige toestanden zal terugkeren). Indien het echter onmogelijk is om vanuit de niet-gunstige toestanden in de gunstige te komen, moet een optimale strategie "onmiddellijk stoppen" voorschrijven als het systeem in de niet-gunstige toestanden terecht komt. Dus de optimale stopverzameling is de verzameling van niet-gunstige toestanden. Hiermee is de volgende stelling aangetoond.

Stelling 5.6. *Zij* $r \equiv 0$ *en* $S = \{i: c(i) \geq 0\}$; *indien* $p(i,j) = 0$ *voor* $i \in S$ *en* $j \notin S$ *dan geldt dat de stoptijd met stopverzameling* S *optimaal is.*

In paragraaf 1 hebben we probleem I ingevoerd als optimaal stopprobleem; hiervoor geldt dat $c \equiv 0$. We zouden dit een *zuiver* optimaal stopprobleem kunnen noemen. Zojuist voerden we de "entrance-fee" problemen in, waarvoor $r \equiv 0$. Het in paragraaf 1 ingevoerde probleem II is een combinatie van deze problemen. We zullen optimaal stopproblemen van het type van probleem II *gemengde* problemen noemen.

In veel gevallen kan een "entrance-fee" probleem omgezet worden in een zuiver probleem en, omgekeerd, een zuiver probleem in een "entrance-fee" probleem.

Stelling 5.7.

i) *Een "entrance-fee" probleem met kostenfunktie* c *kan in een zuiver probleem worden omgezet indien* c *een lading is.*

ii) *Een zuiver probleem met opbrengstfunktie* r *kan in een "entrance-fee" probleem worden omgezet indien* r *een potentiaal is.*

iii) *Een gemengd probleem kan in een zuiver probleem worden omgezet indien kostenfunktie* c *een lading is. Een gemengd probleem kan in een "entrance-fee" probleem worden omgezet indien opbrengstfunktie* r *een potentiaal is.*

Bewijs.

i) Zij

$$r(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j} p^{n}(i,j)\ c(j)$$

Daar c een lading is, is r wel gedefinieerd en r is een potentiaal. Volgens lemma 2.2 geldt voor $\underline{\tau}$ een willekeurige Markovtijd dat

$$\mathbb{E}_i\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i[\sum_{k=\underline{\tau}}^{\infty} c(\underline{x}_k)] = r(i) - \mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_k)]. \tag{5.43}$$

Hieruit volgt dat een $\underline{\tau}$ die de kosten

$$\mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_k)] \qquad \text{"minimaliseert" ,}$$

de opbrengst

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \qquad \text{zal "maximaliseren",}$$

en omgekeerd. Een optimale stoptijd $\underline{\tau}$ voor het "entrance-fee" probleem zal

$$\mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} - c(\underline{x}_k)] \qquad \text{maximaal maken}$$

en dus ook

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \qquad\qquad \text{maximaal maken.}$$

Hieruit volgt dan dat $\underline{\tau}$ ook een optimale stoptijd is voor het zuivere probleem met opbrengstfunktie r.

Geheel analoog volgt dat, als $\underline{\tau}$ optimaal is t.o.v. het zuivere probleem, $\underline{\tau}$ dan ook optimaal is t.o.v. het "entrance-fee" probleem.

ii) Zij

$$c(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j).$$

r is een potentiaal, dus c is een lading en r is de bijbehorende potentiaal. Hieruit volgt dat (5.43) weer geldig is. We voeren hier natuurlijk het "entrance-fee" probleem met kostenfunktie c in. De verdere argumentatie verloopt als onder i.

iii) Het bewijs van iii volgt uit dat van i en ii. □

Een gevolg van deze stelling is dat voor eindige toestandsruimte E en voorbijgaande Markovketen ieder probleem in ieder ander kan worden omgezet. Immers, we stelden in (2.9) dat "voorbijgaand" equivalent is met

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n(i,j) < \infty \qquad\qquad \text{voor alle i en j.}$$

Met E eindig impliceert dit dat iedere funktie zowel een potentiaal als een lading is.

In de volgende stelling zullen we stelling 5.6 generaliseren voor het gemengde probleem. In die gevallen waarin het probleem in een "entrance-fee" probleem kan worden omgezet, volgt deze stelling dus uit stelling 5.6.

<u>Stelling 5.8</u>. *Veronderstel dat het optimaal stopprobleem met kostenfunktie* c *en opbrengstfunktie* r *stabiel is en dat er een optimale stoptijd bestaat. Zij*

$$S = \{i\colon c(i) - [\sum_j p(i,j)\, r(j) - r(i)] \geq 0\};$$

indien $p(i,j) = 0$, *voor* $i \in S$ *en* $j \notin S$, *dan is de stoptijd met stopverzameling* S *optimaal.*

Bewijs. We zullen bewijzen dat

(5.44) $\quad v_n(i) = r(i) \qquad$ voor $i \in S$ en alle $n \geq 0$.

Voor $n = 0$ geldt $v_0 = r$ en dus is (5.44) zeker vervuld. Neem aan dat (5.44) geldt voor $(n-1)$. Dan is voor $i \in S$

$$\begin{aligned} v_n(i) &= \max\,[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_{n-1}(j)] = \\ &= \max\,[r(i), -c(i) + \sum_{j \in S} p(i,j)\, v_{n-1}(j)] = \\ &= \max\,[r(i), -c(i) + \sum_{j \in S} p(i,j)\, r(j)] = \\ &= r(i) \qquad \text{(volgens de definitie van S).} \end{aligned}$$

Via volledige inductie volgt dan (5.44). Uit de stabiliteit volgt dan ook

$$v(i) = \lim_{n\to\infty} v_n(i) = r(i) \qquad \text{voor } i \in S.$$

Hieruit volgt dat S in de steunverzameling Γ_0 ligt. Voor $i \notin S$ geldt

$$c(i) - [\sum_j p(i,j)\, r(j) - r(i)] < 0,$$

dus

$$-c(i) + \sum_j p(i,j)\, r(j) > r(i).$$

Dit betekent dat, als i de begintoestand is, stoppen na één periode (dit is het linkerlid van bovenstaande ongelijkheid) meer opbrengt dan onmiddellijk stoppen. Daar Γ_0 de verzameling is waar onmiddellijk stoppen de "maximale" opbrengst oplevert, volgt dan dat $i \notin \Gamma_0$. Hiermee is aangetoond dat S en Γ_0 samenvallen. Daar gegeven is dat stoppen in Γ_0 optimaal is, is dus ook stoppen in S optimaal. □

Uit de definitie van S is duidelijk dat S precies uit die toestanden bestaat waarvoor onmiddellijk stoppen beter is dan stoppen na één periode. Dat stelling 5.8 tot interessante toepassingen kan leiden, toont het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 5.2. Verkoopprobleem

Iemand wenst zijn huis te verkopen en krijgt iedere dag een bod op het huis. We veronderstellen dat de geboden bedragen onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben. Zij de kans op een geboden bedrag ter grootte van j gelijk aan p_j voor $j = 1,\dots,N$. We nemen aan dat een bod op het huis, dat niet onmiddellijk geaccepteerd wordt, niet verloren gaat maar op een later tijdstip nog geaccepteerd kan worden. Verder zijn er voor iedere dag dat het huis nog niet verkocht is, onderhoudskosten ter grootte van een constant bedrag c. Voor de toestand op zeker tijdstip gebruiken we het tot dan toe grootste geboden bedrag. Hieruit volgt

$$p(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{als } j < i, \\ \sum_{k=0}^{i} p_k & \text{als } j = i, \\ p_j & \text{als } j > i. \end{cases}$$

De verzameling S uit stelling 5.8 wordt (met $i - i\sum_{k=0}^{i} p_k = \sum_{j=i+1}^{N} ip_j$)

$$\begin{aligned} S &= \{i\colon c - [i\sum_{k=0}^{i} p_k + \sum_{j=i+1}^{N} jp_j - i] \ge 0\} = \\ &= \{i\colon c \ge \sum_{j=i+1}^{N} (j-i)\, p_j\}. \end{aligned}$$

Daar $\sum_{j=i+1}^{N} (j-i)p_j$ monotoon niet-stijgend is in i vinden we

$$S = \{i^*, i^*+1, \dots, N\}$$

met

$$i^* = \min\,[i\colon c \ge \sum_{j=i+1}^{N} (j-i)p_j].$$

Daar $p(i,j) = 0$ als $j < i$, volgt $p(i,j) = 0$ voor $i \in S$ en $j \notin S$. Volgens stelling 5.4 is het probleem stabiel. Volgens stelling 5.5 is er een optimale strategie. Volgens stelling 5.8 is dan stoppen in S optimaal. "Optimaal verkopen" betekent dus het eerste bod, dat groter dan of gelijk aan i^* is, accepteren.

5.4. Oplossen door lineaire programmering

Uit praktisch oogpunt waarschijnlijk de meest interessante oplossingstechniek is om van het bepalen van v een lineaire programmeringsprobleem te maken.

Stelling 5.9. *De waarde van het spel,* v, *is de optimale oplossing van het lineair programmeringsprobleem:*

minimaliseer $\sum_j x(j)$ *onder de bijvoorwaarden*

$$\sum_j \{\delta(i,j) - p(i,j)\}\, x(j) \geq -c(i) \quad {}^{*)}$$

èn

$$x(i) \geq m(i),$$

waarin

$$m(i) = \max\,[r(i), -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)].$$

Bewijs. De optimale oplossing van het lineaire programmeringsprobleem is de kleinste c-excessieve majorant van r en volgens gevolg 3.2 dus gelijk aan v. □

---

*) $\delta(i,j) = 0$ als $i \neq j$ en $\delta(i,j) = 1$ als $i = j$.

HOOFDSTUK 2

DE MARTINRAND

R. POTHARST

1. DE GREENSE FUNKTIE, POTENTIALEN EN HARMONISCHE FUNKTIES

In hoofdstuk 1 hebben we gezien dat de klasse van de excessieve funkties bij een Markovketen een belangrijke rol speelt bij het optimaal stoppen van die keten. Deze klasse zullen we in dit hoofdstuk onderwerpen aan een nader onderzoek, dat zal leiden tot enkele karakteriseringen van de excessieve funkties. Tijdens dat onderzoek zullen we stuiten op de Martinrand van onze keten, een belangrijk begrip dat ook in andere delen van de theorie der Markovketens te voorschijn komt.

In dit hoofdstuk zullen we steeds uitgaan van een stationaire Markovketen $\{\underline{x}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *) met aftelbare toestandsruimte E en overgangswaarschijnlijkheden $\{p(i,j) : i,j \in E\}$, met voor elke $i \in E$

$$\sum_{j \in E} p(i,j) \leq 1.$$

We eisen verder dat alle toestanden doorgangstoestanden zijn, d.w.z. als voor $i \in E$

[1.1] $$q(i) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = i \text{ voor een } n \in \mathbb{N}]$$

de kans op terugkeer naar i voorstelt, dan luidt onze eis dat voor alle $i \in E$ geldt

[1.2] $$q(i) < 1.$$

In het vervolg zullen we vrijelijk gebruik maken van de volgende notaties: voor $n \in \mathbb{N}_0$, $i,j \in E$, is

---

*) $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$.

$$p^{(n)}(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n=j]$$

de kans om, uitgaande van i in n stappen in j te komen. In het bijzonder is $p^{(1)}(i,j) = p(i,j)$ en $p^{(0)}(i,j) = \delta(i,j)$, waarbij δ Kronecker's delta-funktie is (zie voetnoot op blz. 51). Evenzo is

$$\pi^{(n)}(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n=j \text{ en } \underline{x}_k\neq j \text{ voor alle k met } 1\leq k<n]$$

de kans om, uitgaande van i in n stappen voor het eerst in j te komen. Weer geldt $\pi^{(1)}(i,j) = p(i,j)$ en $\pi^{(0)}(i,j) = \delta(i,j)$. Verder definiëren we nog

$$\pi(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n=j \text{ voor een } n\in\mathbb{N}_0]$$

en

$$\pi_*(i,j) := \mathbb{P}_i[x_n=j \text{ voor een } n\in\mathbb{N}],$$

beide voorstellende de kans om, uitgaande van i, ooit in j te komen (alleen met twee verschillende betekenissen van "ooit"). Merk op dat voor $i \neq j$ geldt $\pi(i,j) = \pi_*(i,j)$, doch dat $\pi(i,i) = 1$, terwijl $\pi_*(i,i) = q(i) < 1$. Tenslotte zullen we nodig hebben

$$g(i,j) := \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\underline{x}_n=j\}}]$$

ofwel het verwachte aantal bezoeken aan j, uitgaande van i. De funktie $g(.,.)$ op $E \times E$ heet de *Greense funktie* van de Markovketen.

De zojuist ingevoerde funkties kunnen als volgt uitgedrukt worden in de overgangswaarschijnlijkheden van de Markovketen: voor $n \in \mathbb{N}_0$ is

[1.3] $$p^{(n+1)}(i,j) = \sum_{k\in E} p(i,k)\, p^{(n)}(k,j),$$

zodat $p^{(n)}$ achtereenvolgens voor $n = 2,3,\ldots$ berekend kan worden; evenzo kan $\pi^{(n)}$ berekend worden, als we bedenken dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt

[1.4] $$p^{(n)}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(i,j)\, p^{(n-k)}(j,j)$$

terwijl π_* en g gevonden kunnen worden door

[1.5] $$\pi_*(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{(n)}(i,j)$$

en

[1.6] $$g(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,j).$$

Al deze formules kunnen worden verkregen door eenvoudige kansinterpretatie (cf. [Feller I, pp. 383,388]). Uit het feit dat alle toestanden doorgangstoestanden zijn, volgt (cf. [Feller I, p. 389])

$$g(i,j) < \infty \qquad \text{voor alle } i,j \in E.$$

Uit overwegingen van leesbaarheid zullen we nog enkele operatoren invoeren. Hier zullen we slechts operatoren A beschouwen die aan een funktie $f: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ $(=[0,\infty])$ een funktie $Af: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ toevoegen. Zo is de identieke operator I gedefinieerd door $If := f$, terwijl de operator P aan een niet-negatieve funktie f de funktie Pf toevoegt met

$$Pf(i) := \sum_{j \in E} p(i,j)\, f(j).$$

Stellen we $P^0 := I$, dan kunnen we de rij operatoren $\{P^n\}$ als volgt definiëren:

$$P^{n+1}f := P(P^n f) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0,$$

dus P^n is het n maal achtereen toepassen van P. Uit [1.3] volgt, dat P^n ook rechtstreeks gedefinieerd had kunnen worden door

$$P^n f(i) = \sum_{j \in E} p^{(n)}(i,j)\, f(j) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vervolgens definiëren we de operator G als

$$Gf := f + Pf + P^2 f + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f,$$

zodat uit [1.6] volgt

$$Gf(i) = \sum_{j \in E} g(i,j)\, f(j).$$

Merk op, dat de beschouwde sommen eindig dan wel oneindig mogen zijn. Met de toegepaste verwisselingen van sommaties hebben we geen moeilijkheden omdat alle beschouwde grootheden niet-negatief zijn (stelling van Fubini).

Na deze inleidende opmerkingen kunnen we beginnen aan het onderzoek van de klasse der excessieve funkties. Zoals bekend, heet een funktie $f: E \to \mathbb{R}^+$ $(=[0,\infty))$ *excessief* als $Pf \le f$. Belangrijke voorbeelden van excessieve funkties zijn potentialen en harmonische funkties, die als volgt gedefinieerd worden:

Een funktie $h: E \to \mathbb{R}^+$ heet *harmonisch* *) als $Ph = h$.

Een funktie $f: E \to \mathbb{R}^+$ heet een *potentiaal* *) als er een funktie $\phi: E \to \mathbb{R}^+$ bestaat met $f = G\phi$.

Is f een potentiaal, dan bestaat er precies één funktie $\phi: E \to \mathbb{R}^+$ met $f = G\phi$. Immers, als $f = G\phi$, dan volgt met Fubini $Pf = P(G\phi) = G\phi - \phi = f - \phi$, of $\phi = f - Pf$, zodat ϕ eenduidig bepaald is. Deze ϕ heet de *lading* behorende bij f.

Daar "=" sterker is dan "≤", is elke harmonische funktie excessief. Ook potentialen zijn excessief; immers, is $f = G\phi$ een potentiaal dan is $Pf = f - \phi \le f$.

Vanzelfsprekend is de som van twee excessieve funkties weer excessief; in het bijzonder is dus de som van een potentiaal en een harmonische funktie excessief. Het zal nu echter blijken, dat ook omgekeerd elke excessieve funktie de som is van een potentiaal en een harmonische funktie. Dit leidt tot de eerste representatiestelling voor excessieve funkties.

Stelling [1.1]. *Elke excessieve funktie* f *is te schrijven als som van een potentiaal* $G\phi$ *en een harmonische funktie* h

[1.7] $$f = G\phi + h \;;$$

Bovendien is deze schrijfwijze uniek, terwijl ϕ *en* h *gegeven worden door*

[1.8] $$\phi = f - Pf$$

en

[1.9] $$h = \lim_{n\to\infty} P^n f.$$

---

*) Merk op het verschil met hoofdstuk 1: wij beschouwen hier slechts niet-negatieve funkties.

Bewijs.

a) We bewijzen eerst de uniciteit: als f te schrijven is volgens [1.7] met $\phi \geq 0$ en h harmonisch, dan is noodzakelijkerwijs

$$Pf = P(G\phi+h) = PG\phi + Ph = G\phi - \phi + h = f - \phi$$

zodat ϕ en dus ook $G\phi$ en h vastliggen (en tevens [1.8] bewezen is).

b) Vervolgens bewijzen we de eerste bewering van de stelling. Neem ϕ volgens [1.8]. Dan is $\phi \geq 0$, daar f excessief is. We hebben nu $f = \phi+Pf$, zodat voor $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $P^n f = P^n\phi+P^{n+1}f$, en dus

[1.10] $$f = \sum_{k=0}^{n} P^k\phi + P^{n+1}f \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0.$$

Uit deze afleiding volgt allereerst, dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt

[1.11] $$P^{n+1}f \leq P^n f,$$

zodat de rij $\{P^n f\}$ een eindige niet-negatieve limiet heeft, zeg h. Tevens volgt hieruit dat $G\phi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P^k\phi$ eindig is. Nemen we in [1.10] aan beide kanten van het gelijkteken de limiet, dan krijgen we [1.7]. Nog aangetoond moet worden, dat h harmonisch is: $Ph = P(\lim_{n\to\infty} P^n f) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}f = h$, waarbij het tweede gelijkteken een gevolg is van de gemajoreerde convergentie stelling: $0 \leq P^n f \leq f$, wegens [1.11]. □

Gevolg [1.1]. *Is* f *excessief dan geldt*

$$f \textit{ is een potentiaal} \iff P^n f \to 0 \textit{ voor } n \to \infty.$$

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit bovenstaande stelling. □

Met behulp van het lemma van Fatou ($f_n \geq 0 \Rightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$) kunnen we gemakkelijk inzien, dat de limiet van een rij excessieve funkties weer excessief is. In het bijzonder is dus de limiet van een rij potentialen excessief. Ook dit geldt echter weer omgekeerd: elke excessieve funktie is te schrijven als limiet van een rij potentialen. Voor het bewijs hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma [1.1]. *Het minimum van een potentiaal en een excessieve funktie is een potentiaal.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat het minimum f van twee excessieve funkties f' en f" weer excessief is: $Pf = P(\min[f',f"]) \le \min[Pf',Pf"] \le \min[f',f"] = f$. Is nu f' een potentiaal, dan moeten we aantonen dat ook f een potentiaal is. We doen dit met het kriterium uit gevolg [1.1].

$$0 \le P^n f = P^n(\min[f',f"]) \le P^n f' \to 0 \text{ voor } n \to \infty. \quad \square$$

Stelling [1.2]. *Is* f *excessief, dan bestaat er een niet-dalende rij potentialen* $\{G\phi_n\}$ *met*

$$f = \lim_{n\to\infty} G\phi_n.$$

Bewijs. Zij $\{B_n\}$ een rij eindige deelverzamelingen van E met $B_n \subset B_{n+1}$ en $\cup B_n = E$. Dan geldt voor elke n

$$G\chi_{B_n}(i) = \sum_{j\in B_n} g(i,j) < \infty ,$$

zodat $nG\chi_{B_n}$ een potentiaal is, en dus ook, wegens lemma [1.1]

$$f_n = \min[nG\chi_{B_n},f].$$

Wegens $B_n \subset B_{n+1}$ is de rij $\{f_n\}$ niet-dalend. Bij vaste $i \in E$ geldt voor n voldoende groot $f_n(i) = f(i)$; immers, voor n voldoende groot is

$$nG\chi_{B_n}(i) = n \sum_{j\in B_n} g(i,j) \ge ng(i,i) \ge n \to \infty ,$$

dus $f_n \to f$. $\square$

2. DE MARTINRAND

Voor het vervolg van ons verhaal hebben we in onze Markovketen minstens een toestand nodig, van waaruit alle andere toestanden bereikbaar zijn. We veronderstellen dus, dat voor zekere toestand, zeg $0 \in E$, geldt

[2.1] $\qquad \pi(0,j) > 0 \qquad\qquad$ voor alle $j \in E$, zodat ook $g(0,j) > 0$ voor elke $j \in E$ (zie [1.5] en [1.6]). Deze aanname garandeert ons dat de volgende definitie zinvol is.

Definitie [2.1]. *De funktie* $k\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$, *gegeven door*

$$k(i,j) := \frac{g(i,j)}{g(0,j)}$$

heet de *Martinkern* *van de Markovketen.*

Voor vaste $j \in E$, zullen we de functie $k(.,j)$ op E aangeven met k_j. Nu we de Martinkern gedefinieerd hebben kunnen we ons doel nader toelichten. Het gaat erom de excessieve funkties te schrijven als integralen over deze Martinkern, in een nader te preciseren zin. Voor het speciale geval van potentialen is deze representatie niet moeilijk in te zien. We beginnen daarom met dit speciale geval.

Stelling [2.1]. *Elke potentiaal* $f = G\phi$ *is te schrijven als*

$$f(i) = \int_E k(i,j)\, d\mu(j) \qquad [2.2]$$

voor precies één eindige maat μ *op* E. *Deze maat wordt gegeven door*

$$\mu(j) = g(0,j)\ \phi(j) \qquad \text{voor } j \in E.$$

Omgekeerd definieert [2.2] *voor elke eindige maat* μ *op* E *een potentiaal* f. *Verder is* $\mu(E) = f(0)$.

Bewijs. Bij nadere beschouwing blijkt in [2.2] niets anders te staan dan $f = G\phi$. Voor de derde bewering behoeven we alleen aan te tonen dat het rechterlid van [2.2] eindig is bij eindige μ. Dit volgt uit de afschatting voor k in het bewijs van stelling [2.2]. □

De funktie k_j uit definitie [2.1] is juist de potentiaal die resulteert wanneer we in [2.2] de maat μ massa 1 in het punt j geven en overal elders massa 0. Dus k_j is een potentiaal met lading geconcentreerd in j. Hieruit volgt onmiddellijk, dat de afbeelding $j \mapsto k_j$ een 1-1-correspondentie vastlegt tussen E en de funkties $\{k_j : j \in E\}$.

Definitie [2.2]. *Zij*

$$\mathbb{E}^* := \{k_j : j \in E\}$$

en

$$K := \{y : y = \lim_{n\to\infty} k_{j_n} \text{ voor een rij } \{j_n\} \text{ met } j_n \in E\}.$$

(De elementen van K zijn dus die funkties op E, welke te schrijven zijn als limiet van een rij funkties uit E^*. In het bijzonder is elke $k_j \in K$ (neem maar $j_n = j$ voor elke n), zodat $E^* \subset K$.) *De verzameling*

$$B := K \setminus E^*$$

heet nu de ***Martinrand*** *van de Markovketen.*

Door de 1-1-correspondentie tussen E en E^* is de toestandsverzameling E op natuurlijke wijze ingebed in K. In deze zienswijze is K een uitbreiding van E: de elementen van B zijn dan nieuwe "toestanden" toegevoegd aan de oude toestandsruimte E.

We definiëren de funktie $\tilde{k}: E \times K \to \mathbb{R}^+$ als volgt:

$$\tilde{k}(i,y) := y(i) \qquad \text{voor } i \in E,\ y \in K.$$

De funktie $\tilde{k}$ is in de volgende zin op te vatten als een uitbreiding van de Martinkern: als $j \in E$ en $y = k_j$ het bijbehorende element uit E^* is, dan geldt voor alle $i \in E$

[2.3] $\qquad \tilde{k}(i,y) = k(i,j).$

We kunnen nu iets preciezer het doel van ons huidige betoog omschrijven. Het gaat erom, voor excessieve funkties f een representatie van de vorm [2.2] te vinden, waarbij echter E vervangen moet worden door K, en boven k een ~ gezet moet worden. Dit doel zal echter pas in de volgende paragraaf bereikt worden. Eerst zullen we nog een aantal eigenschappen van K, B en $\tilde{k}$ moeten afleiden.

Stelling [2.2]. K *is begrensd; nl. als* $y \in K$, *dan geldt voor alle* $i \in E$

$$0 \le y(i) \le \frac{1}{\pi(0,i)} .$$

Voor het bewijs maken we gebruik van het volgende lemma.

Lemma [2.1]. *Voor alle* $i,j \in E$ *geldt*

i) $g(i,j) = \pi(i,j)\, g(j,j)$ *en* $g(i,i) = \dfrac{1}{1 - q(i)}$,

ii) $\pi(0,j) \geq \pi(0,i)\, \pi(i,j)$.

Bewijs.

i) Voor willekeurige $i,j \in E$ hebben we

$$g(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,j) = \delta(i,j) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(i,j)\, p^{(n-k)}(j,j) =$$

$$= \delta(i,j) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{(k)}(i,j) \sum_{n=k}^{\infty} p^{(n-k)}(j,j) =$$

$$= \delta(i,j) + \pi_*(i,j)\, g(j,j).$$

De beweringen volgen nu met gebruikmaking van $\pi(i,i) = 1$, $\pi_*(i,i) = q(i)$ en als $i \neq j$, $\pi_*(i,j) = \pi(i,j)$.

ii) Zij $A := \{\underline{x}_n = j$ voor een $n \in \mathbb{N}\}$ en $B := \{\underline{x}_m = i$ en $\underline{x}_n = j$ voor zekere $m,n \in \mathbb{N}$ met $m < n\}$; dan is duidelijk $B \subset A$, zodat $\mathbb{P}_0[B] \leq \mathbb{P}_0[A]$. Nu is per definitie $\pi_*(0,j) = \mathbb{P}_0[A]$, terwijl

$$\mathbb{P}_0[B] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_0[B \mid \underline{x}_m = i]\, \pi^{(m)}(0,i) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \pi_*(i,j)\, \pi^{(m)}(0,i) = \pi_*(0,i)\, \pi_*(i,j).$$

Mét sterren is bewering ii nu bewezen. Door de gevallen $0 = i$, $0 = j$ en $i = j$ te beschouwen, zien we dat de sterren ook weggelaten kunnen worden. □

Bewijs van stelling [2.2].

Het is voldoende te bewijzen dat de bewering geldt voor de funkties in E^*. Immers, als hij voor deze funkties geldt, dan ook voor hun limieten. Voor willekeurige $i,j \in E$ is, wegens lemma [2.1],

$$0 \le k_j(i) = k(i,j) = \frac{g(i,j)}{g(0,j)} = \frac{\pi(i,j)}{\pi(0,j)} \le \frac{1}{\pi(0,i)},$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit bewering i en de laatste ongelijkheid uit bewering ii. □

We willen vervolgens aantonen, dat K compact is. Om deze bewering inhoud te geven hebben we natuurlijk een topologie nodig voor de ruimte der reële funkties op E. We nemen hiervoor de topologie der puntsgewijze convergentie. K is nu de afsluiting van E^* in deze topologie. Om aan te tonen dat K compact is in deze topologie, zullen we laten zien dat K rijcompact is. In metrische ruimten zijn deze twee begrippen equivalent. We zijn dus klaar, als onze topologie metriseerbaar blijkt. De lezer wordt uitgenodigd na te gaan, dat in ons geval als metriek genomen kan worden

$$\rho(y,y') := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(0,i_n)}{2^n} |y(i_n) - y'(i_n)| \quad \text{voor } y,y' \in K,$$

waarbij $i_1, i_2, \ldots$ een aftelling is van de elementen uit E. Wordt in het vervolg impliciet een topologie op de ruimte der reële funkties op E verondersteld, dan bedoelen we steeds de bovenstaande.

Stelling [2.3]. K *is compact.*

Bewijs. Zij weer $i_1, i_2, \ldots$ een aftelling van E, en zij $\{y_n\}$ een willekeurige rij funkties uit K. We moeten aantonen, dat $\{y_n\}$ een convergente deelrij $\{z_n\}$ bezit met $z = \lim z_n \in K$. Wegens stelling [2.2] is het mogelijk een deelrij $\{y_n^{(1)}\}$ van $\{y_n\}$ te vinden waarvoor $\{y_n^{(1)}(i_1)\}$ convergeert. Evenzo kunnen we een deelrij $\{y_n^{(2)}\}$ van $\{y_n^{(1)}\}$ construeren, waarvoor $\{y_n^{(2)}(i_2)\}$ convergeert, enz. Zij nu $z_n := y_n^{(n)}$. Dan is $\{z_n\}$ een deelrij van $\{y_n\}$, puntsgewijs convergent, en, wegens de geslotenheid van K, met limiet in K. □

Voor elke $i \in E$ is de funktie $\tilde{k}(i,.)$ op K continu. Immers, als $y_n \to y$, dan ook $\tilde{k}(i,y_n) \to \tilde{k}(i,y)$, zoals onmiddellijk uit de definitie van $\tilde{k}$ volgt.

Als limieten van excessieve funkties (nl. van potentialen) zijn de funkties uit $K = E^* \cup B$ vanzelfsprekend weer excessief. De funkties uit E^* zijn potentialen (zie de opmerking na stelling [2.1]) en, zoals we later zullen zien, bevat B (indien niet leeg) altijd harmonische funkties. Hoewel dit voor de rest van ons betoog niet nodig is, zullen we nu laten zien, dat in een speciaal geval alle funkties uit B harmonisch zijn, nl. in het geval dat vanuit elke toestand in één stap slechts eindig veel toestanden bereikbaar zijn.

Stelling [2.4]. *Als voor elke* $i \in E$ *de verzameling* $\{j \in E\colon p(i,j) > 0\}$ *eindig is, dan bevat* B *slechts harmonische funkties.*

Bewijs. Zij $y \in B$ willekeurig, d.w.z. $y = \lim_{n\to\infty} k_{j_n}$ van een rij $\{j_n\}$ uit E, doch $y \notin E^*$. Uit dit laatste volgt, dat voor elke $i \in E$ geldt $\chi_{\{j_n\}}(i) = 0$ voor n voldoende groot. Immers, als dit niet het geval was, dan zou $j_n = i$ voor oneindig veel $n \in N$ gelden, zodat dan $y = k_i$ zou zijn, hetgeen uitgesloten is. Uit de eerder genoemde opmerking na stelling [2.1] volgt nu, dat voor elke n geldt

$$Pk_{j_n} = k_{j_n} - c_n \chi_{\{j_n\}}$$

voor een positieve constante c_n, zodat volgt

$$Py = P(\lim k_{j_n}) = \lim Pk_{j_n} = \lim k_{j_n} = y,$$

waarbij het tweede gelijkteken geldt wegens het feit dat, onder het gegeven van de stelling, de operator P slechts eindige sommen oplevert. □

Uit het bewijs blijkt dat de volgende iets sterkere bewerking ook geldt: *als voor zekere* $i \in E$ *de verzameling* $\{j \in E\colon p(i,j) > 0\}$ *eindig is, dan geldt voor elke* $y \in B$ *dat* $Py(i) = y(i)$.

3. DE TWEEDE REPRESENTATIESTELLING

Nu de verzameling K, de Martinrand B en de gegeneraliseerde Martinkern $\tilde{k}$ ingevoerd zijn, en de benodigde eigenschappen afgeleid, kunnen we komen tot in de vorige paragraaf aangekondigde representatiestelling voor de excessieve funkties. In het bewijs van deze stelling zullen we echter twee bekende resultaten uit de lineaire analyse aanroepen; voor het gemak van de lezer zullen we beide stellingen, echter zonder bewijs, vooraf laten gaan aan het resultaat waar het ons om gaat. Het zijn de representatiestelling van Riesz en de Hahn-Banach-stelling.

Zij L een reële lineaire ruimte. Een funktie $t\colon L \to \mathbb{R}$ heet een *ijkfunktie* als

i) $t(x+y) \leq t(x) + t(y)$ voor alle $x,y \in L$,

ii) $t(\alpha x) = \alpha t(x)$ voor $\alpha \geq 0$ en $x \in L$.

Zoals bekend, heet een funktie $f\colon L \to \mathbb{R}$ *lineair* als $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$ voor alle $x,y \in L$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Lineaire funkties op een lineaire ruimte heten ook wel *lineaire funktionalen*. Een *hypervlak* H in L is een verzameling van de vorm $H_\alpha = \{x \in L\colon f(x) = \alpha\}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $f \not\equiv 0$ een lineaire funktionaal op L. Het is duidelijk, dat $0 \in H_\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Stelling [3.1] (Hahn-Banach). *Zij* L *een reële lineaire ruimte en* M *een deelruimte van* L. *Zij* t *een ijkfunktie op* L *en* f *een lineaire funktionaal op* M *met* $f(x) \leq t(x)$ *voor alle* $x \in M$. *Dan bestaat er een lineaire funktionaal* f^* *op* L *met* $f = f^*$ *op* M *en* $f^*(x) \leq t(x)$ *voor alle* $x \in L$.

Zie voor het bewijs bijv. [Munroe, p. 56].

Is K een compacte metrische ruimte, laat dan C(K) de ruimte der continue reële funkties op K zijn. Een lineaire funktionaal ℓ op een funktieruimte L heet *positief* als $\ell(f) \geq 0$ voor alle niet-negatieve funkties f uit L.

Stelling [3.2] (Riesz). *Bij elke positieve lineaire funktionaal* ℓ *op* C(K) *bestaat een Borelmaat* μ *op* K *zódat voor elke* $f \in C(K)$ *geldt*

[3.1] $$\ell(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Zie voor het bewijs [Halmos, p. 247].

De funktie $f \equiv 1$ op K is continu. Substitueren we deze f in [3.1] dan vinden we als nevenresultaat $\mu(K) < \infty$.

Wij hebben de stelling van Riesz minder algemeen geformuleerd dan hij in [Halmos] staat: bij [Halmos] behoeft K slechts een locaal-compacte Hausdorff-ruimte te zijn. Wij zullen de stelling echter gebruiken in bovenstaande vorm. Van nu af aan is K weer de in paragraaf 2 ingevoerde verzameling.

Stelling [3.3]. *Elke excessieve funktie* f *is te schrijven als*

$$[3.2] \qquad f(i) = \int_K k(i,y)\, d\mu(y)$$

voor een eindige Borelmaat μ *op* K. *Omgekeerd definieert* [3.2] *voor zo'n maat* μ *een excessieve funktie* f. *Verder is* $f(0) = \mu(K)$.

Bewijs. De tweede bewering volgt onmiddellijk uit het feit dat een mengsel van excessieve funkties weer excessief is (Fubini). We bewijzen nu de eerste bewering.

Zij f een willekeurige excessieve funktie. Volgens stelling [1.2] is f dan de limiet van een rij potentialen $\{G\phi_n\}$, ofwel, met stelling [2.1] en de definitie van $\tilde{k}$,

$$f(i) = \lim_{n\to\infty} \int_E k(i,j)\, d\mu_n(j) = \lim_{n\to\infty} \int_{E^*} \tilde{k}(i,y)\, d\mu_n^*(y),$$

waarbij $\mu_n^*(y) = \mu_n(j)$ als y en j de met elkaar corresponderende elementen uit resp. E^* en E zijn. Nemen we $\mu_n^*(B) = 0$ en noemen we μ_n^* weer μ_n, dan krijgen we de representatie

$$[3.3] \qquad f(i) = \lim_{n\to\infty} \int_K \tilde{k}(i,y)\, d\mu_n(y)$$

voor een rij maten $\{\mu_n\}$ op K.

We beschouwen nu de lineaire ruimte C(K) van de continue funkties op K. Voor elke $i \in E$ is $\tilde{k}(i,.) \in C(K)$ (zie de opmerking na stelling [2.3]). Zij verder M de lineaire deelruimte van C(K) bestaande uit die continue funkties $c \in C(K)$ waarvoor $\lim_{n\to\infty} \int_K c\, d\mu_n$ bestaat. Uit [3.3] volgt dat voor elke $i \in E$ geldt $\tilde{k}(i,.) \in M$. We definiëren nu op M de volgende lineaire funktionaal ℓ:

$$\ell(c) := \lim_{n\to\infty} \int_K c\, d\mu_n \qquad\qquad \text{voor } c \in M.$$

Op C(K) definiëren we de ijkfunktie t aldus:

$$t(c) := \sup_{n\in N} \int_K c\, d\mu_n \qquad\qquad \text{voor } c \in C(K).$$

Dat dit supremum altijd eindig is zien we als volgt in

$$\int_K c\, d\mu_n \le \int_K |c|\, d\mu_n \le \mu_n(K) \max_{y\in K} |c(y)| = G\phi_n(0) \max_{y\in K} |c(y)|,$$

waarbij het laatste gelijkteken volgt uit de laatste bewering in stelling [2.1]. De eindigheid van het supremum volgt nu uit $G\phi_n \to f$.

Het is gemakkelijk na te gaan, dat t een ijkfunktie is. Vanzelfsprekend is $\ell \leq t$ op M. Volgens de Hahn-Banach stelling is er dus een uitbreiding ℓ^* van ℓ op C(K) met $\ell^* \leq t$ op C(K). We bewijzen dat de lineaire funktionaal ℓ^* positief is: als $c \geq 0$, dan is, volgens de definitie van t, $t(-c) \leq 0$, zodat $\ell^*(c) = -\ell^*(-c) \geq -t(-c) \geq 0$.

Volgens de stelling van Riesz bestaat er nu een eindige Borelmaat μ op K met voor alle $c \in C(K)$: $\ell^*(c) = \int_K c\, d\mu$. Nemen we in het bijzonder $c = \tilde{k}(i,.)$, dan krijgen we de gewenste representatie. □

In het algemeen is de maat μ op K behorende bij een excessieve funktie f niet eenduidig bepaald. Bovendien is het verband tussen de zojuist afgeleide representatie en die uit stelling [1.1] onduidelijk. Deze kwesties zullen we bespreken in de volgende paragrafen.

4. DE THEORIE VAN CHOQUET

Zoals aangekondigd in de vorige paragraaf, willen we nu een integraalvoorstelling voor excessieve funkties verkrijgen, zó dat bij elke excessieve funktie f precies één maat μ bestaat met $f = \int \tilde{k} d\mu$. Om dit te bereiken moeten we natuurlijk de klasse van te beschouwen maten inperken. Wij zullen dit doen door in plaats van alle maten op K alleen maten op een zekere deelverzameling van K te beschouwen. We zullen echter eerst in deze paragraaf de hiervoor benodigde theorie uiteenzetten, die dan in de volgende paragraaf toegepast zal worden op het zojuist geschetste probleem.

Een verzameling S heet *partieel geordend* als in S een relatie $\leq$ is gedefinieerd die reflexief, transitief en anti-symmetrisch is:

$$x \leq x \qquad\qquad (\textit{reflexiviteit})$$
$$x \leq y,\ y \leq z \implies x \leq z \qquad\qquad (\textit{transitiviteit})$$
$$x \leq y,\ y \leq x \implies x = y \qquad\qquad (\textit{anti-symmetrie}).$$

Twee partieel geordende verzamelingen S en S' heten *isomorf* als er een 1-1-correspondentie $x \leftrightarrow x'$ bestaat tussen de elementen van S en S' zó dat $x \leq y \Leftrightarrow x' \leq y'$.

Laten x en y twee elementen van een partieel geordende verzameling S zijn. Een element $z \in S$ heet dan een *grootste ondergrens* van x en y als

$$z \leq x \text{ en } z \leq y,$$

en

$$u \leq x \text{ en } u \leq y \Longrightarrow u \leq z \qquad \text{voor alle } u \in S.$$

Analoog definiëren we een *kleinste bovengrens*.

Uit de anti-symmetrie volgt, dat een grootste ondergrens (resp. kleinste bovengrens), als hij bestaat, uniek is.

Een partieel geordende verzameling S heet een *rooster* als elk tweetal elementen van S een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens heeft.

Zij L een lineaire ruimte. Een deelverzameling X van L heet *convex* als voor elk tweetal elementen $x_1, x_2 \in X$ ook elke convexe combinatie $p_1x_1+p_2x_2$ van x_1 en x_2 ($p_1,p_2 > 0$, $p_1+p_2 = 1$) een element is van X.

Een punt $x \in X$ heet een *extremaalpunt* van X als uit $x = p_1x_1+p_2x_2$ met $x_1,x_2 \in X$, $p_1,p_2 > 0$, $p_1+p_2 = 1$ volgt dat $x = x_1 = x_2$. De verzameling van extremaalpunten van X zullen we aanduiden met $\mathcal{E}(X)$.

Een deelverzameling C van L heet een *kegel* als $\rho x \in C$ voor alle $\rho \geq 0$ en $x \in C$.

Een kegel C heet een *echte kegel* als $C \cap (-C) = \{0\}$.

Is X een willekeurige deelverzameling van L, dan is $\Gamma(X) := = \{\rho x\colon \rho \geq 0,\ x \in X\}$ een kegel. $\Gamma(X)$ heet de *kegel voortgebracht door* X.

Het is eenvoudig na te gaan dat een kegel C convex is als voor elke $x,y \in C$ ook $x+y \in C$. Als X convex is, is ook $\Gamma(X)$ convex. Is bovendien $0 \notin X$, dan is $C(X)$ een convexe echte kegel. Op een convexe echte kegel C laat zich op natuurlijke wijze een partiële ordening definiëren, nl.

$$x \leq y \qquad \text{als} \qquad y-x \in C$$

(ga na, dat $\leq$ de benodigde eigenschappen heeft). Deze ordening van C heet z'n *natuurlijke ordening*. Waar in het vervolg op een echte convexe kegel een ordening verondersteld is, bedoelen we deze.

Opdat een convexe echte kegel C een rooster is, is het reeds voldoende dat elk tweetal elementen een grootste ondergrens bezit. Immers, is $z \in C$ de grootste ondergrens van x en y, dan is $x+y-z \in C$ de kleinste bovengrens van x en y (ga na).

We gaan nu het begrip simplex invoeren voor een algemene lineaire ruimte.

Definitie [4.1]. *Zij* X *een convexe verzameling in een lineaire ruimte* L. *Laat* $\tilde{X}$ *de kegel in* $\mathbb{R} \times L$ *zijn, voortgebracht door* $\{1\} \times X$, *dus* $\tilde{X} := \Gamma(\{1\} \times X)$. (Omdat $0 \notin \{1\} \times X$, is $\tilde{X}$ een convexe echte kegel.) *Nu heet* X *een simplex, als* $\tilde{X}$ *een rooster is.*

Als X ligt in een hypervlak dat niet door nul gaat, dan is $\tilde{X}$ isomorf met $\Gamma(X)$. In zo'n geval is X dus een simplex als $\Gamma(X)$ een rooster is.

We kunnen nu de stelling formuleren waar het ons om gaat.

Stelling [4.1] (Choquet). *Zij* X *een convexe compacte deelverzameling van een metrische lineaire ruimte* L *en zij* $x \in X$. *Dan bestaat er een kansmaat**) μ *op* $\mathcal{B}(X)$, *zó dat voor elke continue lineaire funktionaal* f *op* L *geldt*

$$f(x) = \int f \, d\mu .$$

Voor elke $x \in X$ *bestaat een unieke kansmaat met deze eigenschap dan en slechts dan als* X *een simplex is.*

Zie voor het bewijs [Phelps].

5. DE DERDE REPRESENTATIESTELLING

In deze paragraaf zullen we de theorie van Choquet toepassen en komen tot de laatste representatiestelling voor excessieve funkties. We doen dit door eerst de harmonische funkties te karakteriseren.

Zij $V := \{f\colon f \text{ excessief en } f(0) = 1\}$ en $H := \{h \in V\colon h \text{ harmonisch}\}$. Definiëren we op de lineaire ruimte van funkties $y\colon E \to R$ voor elke i de continue lineaire funktionaal ℓ_i als $\ell_i(y) := y(i)$, dan zien we dat V en H in het hypervlak $\{y\colon \ell_0(y) = 1\}$ liggen.

V *en* H *zijn convex en compact.* Immers, de convexiteit en geslotenheid zijn triviaal, en uit de stellingen [3.3] en [2.2] volgt voor $f \in V$

*) Een kansmaat op een metrische ruimte X is een maat μ op de Borelverzamelingen van X met $\mu(X) = 1$. De Borelverzamelingen van X vormen een σ-algebra van deelverzamelingen van X, nl. de kleinste σ-algebra die alle open verzamelingen bevat.

$$f(i) \le \frac{f(0)}{\pi(0,i)} = \frac{1}{\pi(0,i)} ,$$

zodat op dezelfde manier als in het bewijs van stelling [2.3] de compactheid volgt.

Elke excessieve funktie $g \not\equiv 0$ *kan geschreven worden in de vorm* $g = cf$ *voor precies één* $c > 0$ *en* $f \in V$. Immers, uit stelling [3.3] volgt: als voor een excessieve funktie g geldt $g(0) = 0$, dan is ook $\mu(K) = 0$ voor elke bijbehorende μ op K, zodat $f \equiv 0$. Hieruit volgt de existentie van c en f. De eenduidigheid volgt uit $g(0) = cf(0) = c$.

$\Gamma(V)$ *is dus de verzameling van excessieve funkties en* $\Gamma(H)$ *de verzameling der harmonische funkties. Beide zijn convexe echte kegels.*

Stelling [5.1]. H *is een simplex.*

Bewijs. Volgens de opmerking na definitie [4.1] behoeven we slechts aan te tonen dat de kegel $\Gamma(H)$ der harmonische funkties een rooster is. De natuurlijke ordening op $\Gamma(H)$ is: $h \le h'$ puntsgewijs (ga na). Volgens de laatste opmerking vóór definitie [4.1] moeten we nu bij elk tweetal harmonische funkties h_1 en h_2 een harmonische grootste ondergrens h aangeven. Uit het bewijs van lemma [1.1] blijkt dat min $[h_1,h_2]$ excessief is, zeg $G\phi+h$. We zullen aantonen dat deze h voldoet.

i) $h \le G\phi+h = \min\,[h_1,h_2]$.

ii) Zij $h' \le G\phi+h$ willekeurig, dan moeten we bewijzen dat $h' \le h$. Zij nu $f := G\phi+h-h'$, dan is $f \ge 0$ en $Pf \le f$, dus f is excessief en derhalve te schrijven als som van een potentiaal en een harmonische funktie. Deze laatste wordt in dit geval $h-h' \ge 0$, dus $h' \le h$. □

Stelling [5.2]. *Elke harmonische funktie* h *is te schrijven als*

$$[5.1] \qquad h(i) = \int \ell_i(y)\, d\mu(y)$$

voor precies één eindige Borelmaat μ *op* $\mathcal{E}(H)$.

Bewijs. Nemen we in stelling [4.1] $X = H$ en $f = \ell_i$ dan krijgen we de representatie [5.1] voor funkties $h \in H$. Tezamen met het feit dat elke harmonische funktie h' te schrijven is in de vorm $h' = ch$ voor precies één $c > 0$ en $h \in H$, geeft dit de stelling. □

Hoewel de representatie [5.1] ook op zichzelf al interessant is, wordt de samenhang met de vorige karakteriseringen pas gelegd door de nu volgende ontwikkelingen. Het blijkt namelijk dat de punten van $\mathcal{E}(H)$, de extreemharmonische funkties dus, zich alle in de Martinrand bevinden. Als aanloop voor het bewijs van deze bewering eerst twee lemma's.

Lemma [5.1]. $\mathcal{E}(V) \subset K$.

Bewijs. Zij f een extremaalpunt van V. Volgens stelling [3.3], is er een maat μ op K met $f(i) = \int \tilde{k}(i,y)\, d\mu(y)$ met $\mu(K) = f(0) = 1$. Wegens de compactheid van K moet er een $z \in K$ zijn zodat $\mu(U) > 0$ voor elke open omgeving $U \subset K$ van z. Immers, als dit niet het geval was, dan zouden er eindig veel U's zijn die K overdekken met $\mu(U) = 0$ voor elke U, zodat dan $\mu(K) = 0$ zou zijn, hetgeen niet waar is.

Als $\mu(U) = 1$ voor elke omgeving $U \subset K$ van z, dan is $\mu(\{z\}) = 1$, zodat $f = z \in K$ geldt en we klaar zijn. Als $\mu(U) < 1$ voor een U, dan kunnen we f ook schrijven als

$$f(i) = \mu(U) \int_U \frac{\tilde{k}(i,y)}{\mu(U)}\, d\mu(y) + (1-\mu(U)) \int_{K\setminus U} \frac{\tilde{k}(i,y)}{1-\mu(U)}\, d\mu(y).$$

Beide integralen zijn, als funkties van i, element van V, dus uit het feit dat f extremaal is volgt

$$f(i) = \int_U \frac{\tilde{k}(i,y)}{\mu(U)}\, d\mu(y).$$

Laten we U inkrimpen tot $\{z\}$, dan vinden we $f(i) = \tilde{k}(i,z) = z(i)$, zodat $f \in K$. □

Lemma [5.2]. $E^* \subset \mathcal{E}(V)$.

Bewijs. Volgens de opmerking na stelling [2.1] is $k_j \in E^*$ een potentiaal t.o.v. een éénpuntslading in het punt j. Stel $k_j = p_1 f_1 + p_2 f_2$ met $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $f_1, f_2 \in V$. Dan is $p_1 f_1 \leq k_j$, zodat $f_1 \leq k_j/p_1$, en dus $f_1 = \min\, [f_1, k_j/p_1]$, het minimum van een potentiaal en een excessieve funktie; dus f_1 is een potentiaal. Evenzo is f_2 een potentiaal, bijv. $f_1 = G\phi_1$ en $f_2 = G\phi_2$. Dan is $p_1\phi_1 + p_2\phi_2 = \phi$ zodat ook ϕ_1 en ϕ_2 éénpuntsladingen in het punt j zijn. Daar $f_1(0) = f_2(0) = k_j(0) = 1$, hebben we dan $f_1 = f_2 = k_j$. □

<u>Stelling [5.3]</u>. $B_e := \mathcal{E}(H) \subset B$.

<u>Bewijs</u>. Het is voldoende te laten zien dat $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(V)$. Immers, omdat $\mathcal{E}(H) \cap E^* = \emptyset$, volgt dan uit de vorige lemma's

$$\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(V)\backslash E^* \subset K\backslash E^* = B.$$

Zij h extremaalpunt van H. We moeten laten zien dat h ook extremaalpunt van V is. Stel $h = p_1 f_1 + p_2 f_2$ met $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $f_1, f_2 \in V$. Dan is $f_1 = G\phi_1 + h_1$ en $f_2 = G\phi_2 + h_2$, dus $h = G(p_1\phi_1 + p_2\phi_2) + p_1 h_1 + p_2 h_2$, zodat $p_1\phi_1 + p_2\phi_2 \equiv 0$ en dus $\phi_1 = \phi_2 \equiv 0$. Dus $h = p_1 h_1 + p_2 h_2$, maar $h \in \mathcal{E}(H)$ en dus $h = h_1 = h_2 = f_1 = f_2$. □

Combineren we de stellingen [5.2] en [5.3], opmerkende dat voor $y \in B$ geldt $\ell_i(y) = y(i) = \tilde{k}(i,y)$, dan krijgen we voor harmonische funkties de eenduidige representatie

$$h(i) = \int_{B_e} \tilde{k}(i,y)\, d\mu(y).$$

Combineren we dit met onze eenduidige representatie voor potentialen (stelling [2.1]), dan krijgen we: *elke excessieve funktie* f *is te schrijven als*

$$f(i) = \int_{E^* \cup B_e} \tilde{k}(i,y)\, d\mu(y)$$

voor precies één eindige Borelmaat μ, *waarbij de integraal over* E^* *een potentiaal is en die over* B_e *een harmonische funktie.*

HOOFDSTUK 3

OPGAVEN EN UITGEWERKTE OPLOSSINGEN

J.TH. RUNNENBURG

1. OPGAVEN OVER HOOFDSTUK 1

1) Laat $\underline{s}_n$ het aantal keren kruis zijn dat optreedt bij n onafhankelijke worpen met een zuivere munt. Geef een Markovtijd $\underline{n}$ aan, zó dat

$$\mathbb{E}[\underline{s}_{\underline{n}}/n] > \tfrac{1}{2}.$$

2) Een Markovketen heeft toestanden 0,1,2,3 en matrix van overgangskansen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Als uitbetaald wordt volgens

$$r = (0\ 1\ 2\ 1),$$

bepaal dan

$$v(i) = \max_{\underline{\tau}} \mathbb{E}_i r(\underline{x}_{\underline{\tau}})$$

en een $\underline{\tau}_0$ met

$$\mathbb{E}_i r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = v(i).$$

3) Beschouw de Markovketen met toestanden 1,2,..., n en overgangskansen

$$p(i,j) = \begin{cases} p & \text{als } j = i+1, \\ q & \text{als } j = i-1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bij stoppen in i wordt r(i) uitbetaald. Start met kans 1 in toestand a en bepaal een strategie zó, dat de verwachte uitbetaling bij stoppen maximaal is:

a) voor $p = \frac{1}{2}$,

b) voor $0 < p < 1$,

c) voor $0 < p < 1$ en 1,2,... als toestanden.

Beschrijf v(i) informeel.

Aanwijzing. Bij a) wordt v(i) gevonden door een touwtje van (0,0) naar (n+1,0) strak te trekken over (1,r(1)),(2,r(2)),..., (n,r(n)).

4) Een dief steelt op opeenvolgende dagen positieve gehele bedragen $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$, die onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling $\pi_k = \mathbb{P}[\underline{y}_1=k]$ bezitten met eindige verwachting. Als hij op de $\underline{n}^{de}$ dag gepakt wordt, waarbij voor een p met $0 < p < 1$ geldt

$$\mathbb{P}[\underline{n}=n] = (1-p)^{n-1}p \quad \text{voor } n=1,2,\ldots$$

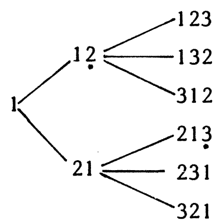
en $\underline{n},\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ onafhankelijk zijn, en dan zijn hele winst moet terugbetalen, wat is dan zijn optimale strategie voor het verkrijgen van een zo groot mogelijke "opbrengst" en hoe groot is de verwachte opbrengst?

Aanwijzing. Neem $\underline{x}_0 = 0$ en $\underline{x}_n$ = opbrengst van n dagen.

5) Uit een doos met n lootjes, elk met een ander reëel getal, trekken we aselect zonder teruglegging. Alleen de waarde van n is vooraf bekend. Na elke trekking noteren we de getrokken waarde. We proberen te stoppen bij het lot met de grootste waarde. Maximaliseer de kans op het aanwijzen van de grootste waarde over alle strategieën en bepaal die kans.

Aanwijzingen. Start met een equivalente formulering. Achtereenvolgens worden n verschillende reële getallen bekend. Het tweede komt met kans $\frac{1}{2}$ links dan wel rechts van het eerste op de reële as. Onafhankelijk daar-van komt het derde met kans 1/3 links van, tussen dan wel rechts van de eerste twee. Onafhankelijk van het voorgaande komt het vierde met kans 1/4 op één der vier nu beschikbare plaatsen, enz.

Als er k getallen bekend zijn, dan kunnen we het laatst verschenen getal accepteren óf wachten. We zullen het k^{de} verschenen getal zeker niet accepteren als het niet het grootste is van de dan bekende getallen. Beschouw onderstaande boom voor n = 3.



Met 213 bedoelen we, dat het eerste getal tussen het tweede (kleinste) en het derde (grootste) komt. Een strategie wordt beschreven door aan te geven waar we in de groei van deze boom stoppen. Zo kunnen we bij 1 stoppen: het eerste getal wordt geaccepteerd. Deze strategie geeft met kans 1/3 het grootste getal. We kunnen ook als aangegeven stoppen bij 12 of 213: we nemen het tweede getal, als dat groter is dan het eerste, en wachten anders het derde getal af. Dit geeft met kans 1/2 het grootste getal (ga na!). Tenslotte kunnen we ook nog op 123 of 213 wachten met kans 1/3 op de grootste. Er zijn hier essentieel maar drie mogelijke strategieën. Omdat er bij elke n slechts eindig veel strategieën mogelijk zijn, bestaat er één (minstens), die de grootste kans op succes geeft.

We kunnen zelfs stoppen alléén op grond van de laatstgevonden grootste waarde: als we het $(k-1)^{ste}$ getal niet geaccepteerd hebben, dan kunnen we (a) het k^{de} accepteren als dat het grootste van de eerste k is, of (b) het k^{de} niet accepteren. *Fijner onderscheid kan geen betere strategie geven* (ga na!). Alleen op *records* letten is dus voldoende om alle informatie in ons probleem te benutten: als voor n = 5 de uiteindelijke volgorde der getallen 52134 blijkt, dan is de essentiële informatie na de eerste, tweede, enz. trekking bevat in resp. 1,1,13, 134,134. Een strategie vertelt ons voor dit geval of we na 1 bij de eerste stap stoppen; zo niet, of we na 3 stoppen; zo niet, of we na 4 stoppen.

We gaan nu na, dat ons probleem het optimaal stoppen van een Markovketen betreft.

a) Neem $1,2,\ldots,n$ als toestanden en zeg, dat het trekkingsproces in toestand i is, als de i^{de} trekking een record geeft. Neem $\underline{x}_0$ = plaats eerste record = nummer van de trekking, waarbij het eerste record optreedt = 1, $\underline{x}_1$ = plaats tweede record, enz. Dan geldt voor $r \geq 0$ en $1 \leq i_\rho \leq n$ voor $\rho = 0,1,2,\ldots,r$ (ga na!)

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0=i_0,\underline{x}_1=i_1,\ldots,\underline{x}_r=i_r] = \delta_{1i_0}p(i_0,i_1)p(i_1,i_2)\ldots p(i_{r-1},i_r)$$

met

$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{i}{(j-1)j} & \text{als } 1 \leq i < j < n, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hier is $\underline{x}_0,\underline{x}_1,\ldots$ een Markovketen, die met kans 1 in 1 start met P als boven en (ga na!)

$$\sum_{j=1}^{n} p(i,j) = 1 - \frac{i}{n} \quad \text{voor } 1 \leq i \leq n.$$

Alle toestanden zijn dus doorgangstoestanden.

Neem voor $r(i)$ de kans, dat we bij het stoppen in toestand i het lot met de grootste waarde in handen hebben. Dan is (ga na!)

$$r(i) = \frac{i}{n} \quad \text{voor } 1 \leq i \leq n.$$

b) Bepaal v (in de volgorde $v(n),v(n-1),\ldots,v(1)$) als minimale excessieve majorant van r voor $n \geq 3$. Neem daarbij k_n het unieke natuurlijke getal met

$$\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} < 1 < \frac{1}{k_n-1} + \frac{1}{k_n} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

Ga na, dat

$$v(i) = \begin{cases} i/n & \text{als } k_n \leq i \leq n, \\ \dfrac{k_n-1}{n} \displaystyle\sum_{j=k_n}^{n} \frac{1}{j-1} & \text{als } 1 \leq i < k_n. \end{cases}$$

6) Als opgave 5, alleen met een andere kansverdeling voor de volgorden, waarin de getallen bekend worden. Alleen 1 2 3 ... n (opklimmend) en de daarmee te maken cyclische permutaties (n in totaal) treden met gelijke kans op.

7) Als opgave 5, weer met een andere kansverdeling. Alleen n n-1 ... 2 1 (dalend) en de daarmee te maken cyclische permutaties (n in totaal) treden met gelijke kans op.

8) Geef een voorbeeld van het optimaal stoppen van een Markovketen, waarbij $r(i) < \infty$ en $v(i) = \infty$ voor elke toestand i. Hier bestaat geen optimale strategie.

   Aanwijzing. Neem toestanden 1,2,... en (met $p+q=1$, $p>q$)

$$p(i,j) = \begin{cases} p & \text{als } j = i+1, \\ q & \text{als } j = i-1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

9) Geef een voorbeeld van het optimaal stoppen van een Markovketen, waarbij de strategie "stop op de ε-steunverzameling" $v_\varepsilon(i)$ oplevert (voor $\varepsilon>0$) en optimaal stoppen $v(i)$ met

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v_\varepsilon(i) \neq v(i).$$

   Bij *begrensde* r is dit niet mogelijk!

   Aanwijzing. Neem toestanden 0,1,2,... en

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } i = 1,2,\ldots \text{ en } (j-i) = 1, \\ 1 & \text{als } i = 0,\ j = 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   Neem $r(0) = 1$ en $r(i) = i$ voor $i = 1,2,\ldots$.

10) In voorbeeld 4.1 (blz.22) geeft stoppen op de steunverzameling geen optimale strategie. Bedenk een ε-optimale strategie voor $\varepsilon > 0$ en bewijs de bewering rechtstreeks.

11) Bij een quiz moeten n vragen beantwoord worden. Als de antwoorden van een deelnemer onafhankelijk zijn, hij met kans p_i het goede antwoord op de i^{de} vraag geeft en dan beloning $v_i > 0$ krijgt, een deelnemer bij een fout antwoord moet vertrekken met het al ontvangene en hij zelf de volgorde der vragen kan bepalen, hoe zal hij dan de vragen ordenen?

Aanwijzing. Verwissel in de verwachte opbrengst twee vragen.

12) Doe onafhankelijke trekkingen $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \ldots$ met kans p_i op i voor $i > 0$ (en $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$) en eindige verwachting. De beloning bij accepteren na n trekkingen is $\max(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n)$. Als we een trekkingsresultaat niet accepteren, moeten we een bedrag $c > 0$ betalen om de volgende trekking te mogen doen. Beschrijf het maximaliseren van de verwachte opbrengst als een optimaal stopprobleem met kosten en bepaal de oplossing ingeval $E\underline{y}_1 > c$ en $p_i > 0$ voor willekeurig grote i.

13) Beschouw opnieuw opgave 5. Is een rechtstreekse oplossing mogelijk, waarbij een Markovketen met toestanden (1,1), (2,12), (2,21), (3,123), (3,132),... gebruikt wordt en bijvoorbeeld $p((1,1),(2,12)) =$ $= p((1,1),(2,21)) = \frac{1}{2}$, $p((2,12),(3,123)) = \ldots = \frac{1}{3}$, enz. met beginkans 1 in (1,1)?

14) Als opgave 5, alleen zijn we nu tevreden als we de grootste of de op één na grootste waarde bemachtigen.

Aanwijzing. Neem als toestanden (1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3),..., (1,n), (2,n). Registreer alleen records en records-op-één-na. Het trekkingsproces is in toestand (1,i), als de i^{de} trekking een record geeft, en in toestand (2,i), als de i^{de} trekking een record-op-één-na geeft.

15) Neem onafhankelijke, niet-negatieve, geheelwaardige $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n$ voor een vaste $n \in \mathbb{N}$. Neem voor $1 \le k \le n$

$$\underline{r}_k = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \ldots + \underline{y}_k + (n-k) \max[\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_k].$$

Bepaal

$$\max_{\underline{k}} \mathbb{E}\underline{r}_{\underline{k}}$$

met $[\underline{k} \le k]$ in de kansruimte opgespannen door $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_k$.

Aanwijzing. Beschouw het optimaal stoppen van een Markovketen met toestanden (k,i,j), waarbij k het aantal y's, i de som en j het maximum van die y's aangeeft. Neem $0 \le k \le n$, $i \in \mathbb{N}_0$ en $j \in \mathbb{N}_0$. Begin met kans 1 in $(0,0,0)$.

16) Beschouw de Markovketen met toestanden $\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ en

$$p(i,j) = \begin{cases} p & \text{als } j = i+1, \\ q & \text{als } j = i-1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hier is $0 < q = 1 - p < \frac{1}{2}$. Neem $r(i) = |i|$ voor $i \le 0$ en $r(i) = 0$ voor $i > 0$. Begin met kans 1 in 0 en neem $c_n(i) = c$ voor $i \le n$ en $c_n(i) = 0$ voor $i > n$ als kosten per stap. Bepaal $v_n(0)$ en de optimale strategie voor $n = 0$ en zo mogelijk ook voor $n = \infty$.

2. OPGAVEN OVER HOOFDSTUK 2

1) Bepaal de Martinrand voor de Markovketen met $\mathbb{Z}$ als toestandsruimte en beginkans 1 in 0. De overgangskansen zijn

$$p(i,j) = \begin{cases} p & \text{als } j = i+1, \\ q & \text{als } j = i-1, \end{cases}$$

met $0 < q = 1 - p < \frac{1}{2}$. Zijn de gevonden harmonische funkties extreem? Ook voor een stochastische wandeling in $\mathbb{Z}^2$ kan men de harmonische funkties bepalen (in geval van doorgangstoestanden).

2) Bepaal de Martinrand voor de Markovketen met toestanden (n,i), waarbij $n,i \in \mathbb{N}_0$ met $0 \le i \le n$. Neem $0 < q = 1 - p < 1$ en

$$p((n,i),(n+1,j)) = \begin{cases} p & \text{als } j = i+1, \\ q & \text{als } j = i. \end{cases}$$

Bepaal de extreme harmonische funkties.

3) Bepaal de Martinrand voor de Pólya-vaas: $(\underline{u}_n, \underline{w}_n)$ is het totale aantal resp. het aantal witte ballen in een vaas op tijdstip n, die op tijdstip 0 met $w_0 > 0$ witte en $u_0 - w_0 > 0$ zwarte ballen gevuld is en op de tijdstippen 1,2,... van inhoud verandert op de volgende manier: er wordt aselect een bal getrokken uit de inhoud en die bal plus een extra bal van dezelfde kleur als de getrokkene worden in de vaas gedaan. Nu is $(\underline{u}_0, \underline{w}_0), (\underline{u}_1, \underline{w}_1), \ldots$ een Markovketen. Bepaal de extreme harmonische funkties.

4) Bepaal de Martinrand en de extreme harmonische funkties bij de volgende Markovketen: $\mathbb{N}_0$ is de toestandsruimte, we starten met kans 1 in 0 en

$$p(i,j) = \begin{cases} p_i & \text{voor } j = i+1, \\ q_i = 1 - p_i & \text{voor } j = 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

We veronderstellen $0 < p_i < 1$ en $\Pi_{i=0}^{\infty} p_i > 0$ (waarom?).

5) Bepaal de Martinrand en de extreme harmonische funkties bij de volgende Markovketen: 1 en (i,j) met $1 \le i \le m$ en $j \ge 1$ (met $m,i,j \in \mathbb{N}$) zijn de toestanden, $p(1,(i,1)) > 0$, $\sum_{i=1}^{m} p(1,(i,1)) = 1$, $0 < p((i,j),(i,j+1)) < 1$ en $p((i,j),1) = 1-p((i,j),(i,j+1))$. De keten heeft slechts doorgangstoestanden en start met kans 1 in 1.

6) Als opgave 5, maar met $m = \infty$.

7) Bepaal de Martinrand en de extreme harmonische funkties bij de volgende Markovketen: $\emptyset$, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000,... zijn de toestanden, de keten heeft slechts doorgangstoestanden, $0 < p(\emptyset,0) < 1$, $p(\emptyset,1) = 1-p(\emptyset,0)$, voor toestand $j \ne \emptyset$ geldt $p(j,\emptyset) + p(j,j0) + p(j,j1) = 1$ en $p(j,\emptyset)\, p(j,j0)\, p(j,j1) > 0$. Begin met kans 1 in $\emptyset$.

8) Bepaal de Martinrand en de extreme harmonische funkties bij de volgende Markovketen: $c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots$ zijn de toestanden, de keten heeft

slechts doorgangstoestanden, $p(c_0,a_1) = p(c_0,b_1) = \frac{1}{2}$, $p(a_i,a_{i+1}) = p(b_i,b_{i+1}) = p_i$, $p(a_i,c_i) = p(b_i,c_i) = 1-p_i$ en $p(c_i,c_{i-1}) = 1$ voor $i = 0,1,2,\ldots$ Hierbij is $0 < p_i < 1$ voor $i = 0,1,2,\ldots$ en we starten met kans 1 in c_0. Wat kunnen we zeggen van $\theta = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$?

3. OPLOSSINGEN VAN DE OPGAVEN OVER HOOFDSTUK 1

1) Neem $\underline{n} = 1$, als $\underline{s}_1 = 1$, en $\underline{n} = 2$, anders. Dit is een Markovtijd voor de Markovketen $0,\underline{s}_1,\underline{s}_2\ldots$ met

$$\mathbb{E}(\underline{s}_{\underline{n}}/\underline{n}) = \frac{5}{8}\,.$$

2) Schrijf v_i voor $v(i)$ en r_i voor $r(i)$. We moeten de minimale v_0,v_1,v_2,v_3 vinden met $v_0 = 0$, $v_1 \geq 1$, $v_2 \geq 2$, $v_3 \geq 1$, $\frac{7}{8}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{4}v_3 \geq 0$, $-\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 \geq 0$ en $-\frac{1}{8}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{7}{8}v_3 \geq 0$. Bij eindig veel toestanden is $v_i \leq \max r_j$ voor elke i. Dus $v_2 = 2$. Nu is $7v_1 - 2v_3 \geq 4v_2 = 8$ en $-v_1 + 7v_3 \geq 4v_2 = 8$, zodat ook $47v_1 \geq 72$ en $47v_3 \geq 64$. Maar dan kunnen we $v_1 = 72/47$, $v_2 = 2$ en $v_3 = 64/47$ nemen. De optimale strategie is hier "stop in 2" voor elke $i \in \{1,2,3\}$.

3) a) We zoeken v, de kleinste excessieve majorant van r. Dus $v(i) \geq r(i)$, $v(i) \geq \sum_{j=1}^{n} p(i,j)\, v(j)$, $v(i) \geq 0$ en $v(i)$ minimaal voor $1 \leq i \leq n$. De gegeven Markovketen heeft alleen voorbijgaande toestanden. Neem $v(0) = v(n+1) = 0$. Invullen van $p(i,j)$ geeft $v(i) \geq \frac{1}{2}v(i-1) + \frac{1}{2}v(i+1)$ voor $1 \leq i \leq n$. Blijkbaar is een excessieve funktie hier een op $[0,n+1]$ concave funktie met waarde 0 in 0 en $(n+1)$. Bepaal $v(i)$ door een touwtje over de punten $(0,0),(1,r(1)),\ldots,(n,r(n)),(n+1,0)$ strak te trekken (en in ieder geval door $(0,0)$ en $(n+1,0)$ te laten gaan). Ook $r(i) < 0$ is hier toegestaan.

b) Nu is $v(i) \geq r(i)$, $v(i) \geq q\,v(i-1) + p\,v(i+1)$, $v(i) \geq 0$ en $v(i)$ minimaal voor $1 \leq i \leq n$, waarbij weer $v(0) = v(n+1) = 0$. Tekenen we nu de punten $(0,0),(1,r(1)),(1+q/p,r(2)),\ldots,(1+q/p+(q/p)^2+\ldots+(q/p)^{n-1},r(n))$ en $(1+q/p+(q/p)^2+\ldots+(q/p)^n,0)$ in $\mathbb{R}^2$, dan is een excessieve funktie in *deze* figuur opnieuw een concave funktie op $\{0,1,1+q/p,\ldots,1+q/p+(q/p)^2+\ldots+(q/p)^n\}$ met waarde 0 in 0 en $1 + q/p + (q/p)^2+\ldots+(q/p)^n$. Ter bepaling van $v(i)$ kunnen we dus weer een touwtje strak trekken! Dit werkt voor $0 < p < 1$.

c) Hier is $v(i) \geq r(i)$, $v(i) \geq q\, v(i-1) + p\, v(i)$, $v(i) \geq 0$ en $v(i)$ minimaal voor $i \geq 1$. Neem eerst $q < p$, zodat $1 + q/p + (q/p)^2 + \ldots =$ $= \frac{p}{p-q} < \infty$. Een figuur als bij b) en een touwtje geven opnieuw $v(i)$. Omdat we $\sup_{i \in \mathbb{N}} r(i) = \infty$ hebben toegelaten, is

$$\text{óf } v(i) = \sup_{j \in \mathbb{N}} r(j) = \infty \text{ voor } i \geq 1,$$
$$\text{óf } v(i) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} r(j) < \infty \text{ voor } i \geq 1.$$

Neem nu $q \geq p$. Dan is $1 + q/p + (q/p)^2 + \ldots = \infty$. Weer werkt het touwtje. Ga na, dat in geval c) het touwtje soms nergens op de $r(i)$-waarden steunt!

4) Laat $\underline{x}_n$ de opbrengst van de eerste tot en met de n^{de} dag zijn. Dan geldt voor $k, i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0 = i_0, \underline{x}_1 = i_1, \ldots, \underline{x}_k = i_k] = \delta_{0i_0}\, p(i_0, i_1) \ldots p(i_{k-1}, i_k)$$

met

$$p(i,j) = \begin{cases} (1-p)\pi_{j-i} & \text{als } j > i, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De opbrengst bij stoppen in i is

$$r(i) = i \qquad \text{voor } i \geq 0.$$

We zoeken v met

$$(*) \qquad v(i) = \max\Big(i, (1-p) \sum_{j=i+1}^{\infty} \pi_{j-i}\, v(j)\Big) \qquad \text{voor } i \geq 0.$$

De constructie van de optimaliteitsvergelijking (zie stelling 5.1) geeft ons direct een deel der $v(i)$-waarden. Met $x_0(i) = 0$ voor alle i en

$$(**) \qquad x_{n+1}(i) = \max\Big(i, (1-p) \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j\, x_n(j+i)\Big) \qquad \text{voor alle } i$$

vinden we achtereenvolgens

$$x_1(i) = i \text{ voor alle } i,$$

$$x_2(i) = i \text{ voor alle } i \text{ met } (1-p) \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j(j+i) \leq i,$$

waarbij de ongelijkheid tot

$$i \geq \frac{1-p}{p} \mathbb{E}\underline{y}_1$$

vereenvoudigd kan worden. Neem nu $i_* \in \mathbb{N}$ met

$$i_* = [\frac{1-p}{p} \mathbb{E}\underline{y}_1].$$

Dan geldt (gebruik herhaalde substitutie in (**))

$$x_n(i) = i \text{ voor alle } i \geq i_* \text{ en alle } n \in \mathbb{N},$$

zodat

$$v(i) = i \text{ voor alle } i \geq i_* \; .$$

Met volledige inductie volgt verder $v(j) > j$ voor $0 \leq j < i_*$, zodat uit (*) achtereenvolgens $v(i_*-1)$, $v(i_*-2),\ldots, v(0)$ bepaald kunnen worden.

Ter bepaling van $v(0), v(1),\ldots, v(i_*-1)$ moeten we i_* lineaire vergelijkingen met i_* onbekenden oplossen. De hoofddeterminant is 1 en we vinden

$$v(0) = \begin{vmatrix} (1-p)a_0 & -(1-p)\pi_1 & -(1-p)\pi_2 & \cdots & -(1-p)\pi_{i-1} \\ (1-p)a_1 & 1 & -(1-p)\pi_1 & \ddots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \ddots & -(1-p)\pi_2 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & -(1-p)\pi_1 \\ (1-p)a_{i_*-1} & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

met

$$a_k = k + \mathbb{E}\underline{y}_1 - \pi_1(k+1) - \pi_2(k+2) - \ldots - \pi_{i_*-k-1}(i_*-1).$$

De optimale strategie is stoppen op $\{i | i \geq i_*\}$ met opbrengst $v(0)$. Dit bewijzen we met stelling 4.1.

5) We zoeken hier v met

$$(*) \qquad v(i) = i \max\left[\frac{1}{n}, \sum_{j=i+1}^{n} \frac{v(j)}{(j-1)j}\right] \qquad \text{voor } 1 \le i \le n.$$

Wegens de definitie van k_n is aan (*) voldaan door $v(i) = \frac{i}{n}$ voor $i \ge k_n$ en vinden we de bijpassende waarden voor $1 \le i < k_n$, die aan (*) voldoen, uit

$$v(i) = i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{v(j)}{(j-1)j} .$$

Nu is voor $1 < i < k_n$

$$v(i-1) - v(i) = (i-1) \sum_{j=i}^{n} \frac{v(j)}{(j-1)j} - i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{v(j)}{(j-1)j} = 0,$$

zodat

$$v(i) = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{als } k_n \le i \le n, \\ \frac{k_n - 1}{n} \sum_{j=k_n}^{n} \frac{1}{j-1} & \text{als } 1 \le i < k_n, \end{cases}$$

aan (*) voldoet. Als in opgave 4 blijkt de hier geconstrueerde v de gezochte v te zijn. De optimale strategie is stoppen op $\{i \mid i \ge k_n\}$ met opbrengst v(0). Hier is v(0) een dalende funktie van n met

$$\lim_{n\to\infty} v(i) = e^{-1} .$$

6) Verloopt als opgave 5, waarbij nu

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{n-i}{n-i+1} & \text{als } j = i+1,\ 1 \le i \le n, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

δ_{1i} de beginkans is en

$$r(i) = \frac{1}{n-i+1} \qquad \text{als } 1 \le i \le n.$$

Oplossen van

$$(*) \qquad v(i) = \max\Big[r(i), \sum_{j=i+1}^{n} p(i,j)\, v(j)\Big] \qquad \text{voor } 1 \le i \le n$$

geeft hier

$$v(i) = \frac{1}{n-i+1} \qquad \text{voor } 1 \le i \le n.$$

De gezochte maximale kans op succes is $\frac{1}{n}$, de optimale strategie is "direct stoppen" (als we stoppen bij het bereiken van de steunverzameling). In dit geval kunnen we ook bij het bereiken van i stoppen; dit gebeurt met kans $\frac{n-i+1}{n}$ en levert dan met kans $\frac{1}{n-i+1}$ de grootste waarde. Ook nu komt met kans $\frac{1}{n}$ het grootste getal te voorschijn. Omdat $v(i) = r(i)$ voor alle i kunnen we verwachten, dat elke stopprocedure met kans $\frac{1}{n}$ de grootste waarde oplevert. Dat is niet juist, tenzij we het laatste getal steeds accepteren, als we geen eerder getal nemen. Hoe is dit in het algemeen bij $v = r$?

7) Verloopt als opgave 5, waarbij nu

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{als } i = 1,\ 1 < j \le n, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

δ_{1i} de beginkans is en

$$r(i) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{voor } i = 1 \\ 1 & \text{voor } 1 < i \le n. \end{cases}$$

Oplossen van

$$(*) \qquad v(i) = \max\Big[r(i), \sum_{j=i+1}^{n} p(i,j)\, v(j)\Big] \qquad \text{voor } 1 \le i \le n$$

geeft hier

$$v(i) = \begin{cases} 1 & \text{als } 1 < i \le n, \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{als } i = 1. \end{cases}$$

De gezochte maximale kans op succes is dus $v(1) = 1 - \frac{1}{n}$, de optimale strategie is "stoppen op $\{2,3,\dots,n\}$". Dit betekent hier stoppen bij het eerste resultaat, dat het beginresultaat overtreft.

8) Met $r(i) = i$ volgt $v(i) = \infty$: we kunnen ons verzekeren van opbrengst $n > i$ bij starten in i, door op n te wachten. Dan is $v(i) \ge n$ voor elke $n > i$.

9) We zoeken de minimale $v(i)$ met $v(0) = 1$, $v(i) \ge i$ voor $i \ge 0$ en $v(i) \ge \frac{1}{2} v(i-1) + \frac{1}{2} v(i+1)$ voor $i \ge 1$. Nu is $v(i)$ concaaf (bol naar boven) met $v(0) = 1$ en $v(i+n) \ge i+n$, zodat $v(i) \ge 1 + i(1 - \frac{1}{i+n}) \to 1+i$ voor $n \to \infty$. Blijkbaar voldoet

$$v(i) = i + 1 \qquad \text{voor } i \ge 0.$$

Nu is

$$\Gamma_\varepsilon = \{i \mid v(i)-r(i) < \varepsilon\},$$

zodat $\Gamma_\varepsilon = \{0\}$ voor $\varepsilon \le 1$. Vanuit i komen we met kans 1 in 0 (onbeperkte stochastische wandeling op $\mathbb{Z}$ komt met kans 1 in elke toestand vanuit elke andere toestand), zodat

$$v_\varepsilon(i) = 1 \qquad \text{voor } i \ge 0 \text{ en } 0 < \varepsilon < 1.$$

10) Kies een $r(j)$ met $r(j) > 1 - \varepsilon$ en $j > i > 1$ bij gegeven i. Stop bij het bereiken van $\{1,j\}$ ingeval van starten in i. We komen met kans 1 in $\{1,j\}$ met minimale opbrengst $> 1 - \varepsilon$, terwijl $v(i) = 1$ voor $i \ge 1$. Een strategie onafhankelijk van de keuze van i wordt verkregen, door te stoppen op $\{1,j_1,j_2,\dots\}$ met $1 < j_1 < j_2 < \dots$ en $r(j_k) > 1 - \varepsilon$ voor $k = 1,2,\dots$.

11) Beantwoording in de volgorde 1 2 ... n heeft als verwachte opbrengst

$$a = v_1p_1 + v_2p_1p_2 + \dots + v_np_1p_2\dots p_n.$$

Elke volgordeverwisseling is te verkrijgen door telkens twee opeenvolgende vragen te verwisselen. Neem $1 \leq i < n$ en verwissel de vragen i en $i + 1$. De nieuwe opbrengst is a_i met

$$a - a_i = p_1p_2\dots p_{i-1}\{v_ip_i(1-p_{i+1}) - v_{i+1}p_{i+1}(1-p_i)\}.$$

Zonder essentiële beperking kunnen we $0 < p_i < 1$ en $v_i > 0$ voor alle i veronderstellen ($p_i=0$ of $v_i=0$, dan vraag aan het einde beantwoorden, omdat hij niets oplevert; $p_i=1$, dan vraag aan het begin beantwoorden, omdat hij geen risico geeft; bij $v_i=0$ ēn $p_i=1$ doet de plaats er niet toe). Nu geldt $a - a_i > 0$ als

$$\frac{v_ip_i}{1-p_i} > \frac{v_{i+1}p_{i+1}}{1-p_{i+1}},$$

zodat dan een verwisseling de opbrengst verlaagt. Conclusie: we moeten streven naar

$$(*) \qquad \frac{v_1p_1}{1-p_1} \geq \frac{v_2p_2}{1-p_2} \geq \dots \geq \frac{v_np_n}{1-p_n}.$$

Zolang dit niet vervuld is, kan door uitsluitend opeenvolgende vragen i en $i+1$ met $v_ip_i(1-p_{i+1}) < v_{i+1}p_{i+1}(1-p_i)$ te verwisselen, de situatie (*) naderbij worden gebracht. Daarbij neemt de opbrengst bij elke verwisseling toe.

12) Neem $\mathbb{N}_0$ als toestandsverzameling. Neem $\underline{x}_0 = 0$ en $\underline{x}_n = \max[\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n]$ voor $n = 1,2,\dots$. Dan is voor $k, i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0=i_0, \underline{x}_1=i_1, \dots, \underline{x}_k=i_k] = \delta_{0i_0}p(i_0,i_1)\dots p(i_{k-1},i_k)$$

met

$$p(i,j) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{i} p_\ell & \text{als } j = i\ , \\ p_j & \text{als } j > i\ , \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hier is

$$r(i) = i \text{ en } c(i) = c.$$

We zoeken $v(i)$ voor $i \in \mathbb{N}$ met $v(i) \geq r(i)$, $v(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)v(j)$, $v(i) \geq -\sum_j g(i,j)c(j)$ en $v(i)$ minimaal. Hierbij is wegens $c(i) > 0$ het derde stelsel ongelijkheden overbodig. Blijkbaar zoeken we de kleinste oplossing van

$$v(i) = \max[i, -c + \sum_{j=i}^{\infty} p(i,j)v(j)] \text{ voor } i \geq 0.$$

Nu is

$$\sum_{j=i}^{\infty} p(i,j)j = i \sum_{j=1}^{i} p_j + \sum_{j=i+1}^{\infty} jp_j \quad \text{voor } i \geq 0,$$

waarbij

$$[(i+1)\sum_{j=1}^{i+1} p_j + \sum_{j=i+2}^{\infty} jp_j - (i+1)] - [i\sum_{j=1}^{i} p_j + \sum_{j=i+1}^{\infty} jp_j - i] = -\sum_{j=i+1}^{\infty} p_j.$$

Blijkbaar is $i\sum_{j=1}^{i} p_j + \sum_{j=i+1}^{\infty} jp_j - i$ dalend in i, zodat er wegens $\mathbb{E}\underline{y}_1 > c$ en $p_i > 0$ voor willekeurig grote i een $i_0 \in \mathbb{N}$ bestaat met

$$i\sum_{j=1}^{i} p_j + \sum_{j=i+1}^{\infty} jp_j \begin{cases} > i+c & \text{voor } i < i_0, \\ \leq i+c & \text{voor } i \geq i_0. \end{cases}$$

Dit geeft

$$v(i) = \begin{cases} i & \text{voor } i \geq i_0, \\ \sum_{j=i}^{i_0-1} p(i,j)\, v(j) - c + \sum_{j=i_0}^{\infty} jp_j & \text{voor } i < i_0. \end{cases}$$

De regel van Cramer kan gebruikt worden om de oplossing af te maken. We kunnen gemakkelijk inzien, dat daarbij $v(i) > 0$ voor $0 \le i < i_0$ en

$$v(0) = (-c+\sum_{j=i_0}^{\infty} jp_j)\{1+\frac{p_1}{1-p_1}+\frac{p_2}{(1-p_1)(1-p_1-p_2)}+\frac{p_3}{(1-p_1-p_2)(1-p_1-p_2-p_3)}+ \dots + \frac{p_{i_0-1}}{(1-p_1-\dots-p_{i_0-2})(1-p_1-\dots-p_{i_0-1})}\}$$

de maximale opbrengst bij starten in 0 is. De optimale strategie is: stop op $\{i_0,i_0+1,\dots\}$. Als in opgave 4 kunnen we de minimaliteit van v aantonen.

Opmerking. Als we hier alleen het laatste toekenningsresultaat mogen accepteren, dan is de opbrengst nooit groter (bij starten in 0) dan de gevonden $v(0)$. Omdat we dit optimum verkrijgen door te stoppen bij eerste binnenkomst in $\{i_0,i_0+1,\dots\}$, blijft deze waarde ook nu bereikbaar! Daarmee is ook deze variant opgelost!

13) We voeren de volgende notatie in: zij $\underline{a}_k$ het rangnummer van het getal op het k^{de} getrokken lootje onder alle n lootjes. Dus $\underline{a}_k = 1$ betekent: op het k^{de} getrokken lootje staat het grootste van alle getallen; $\underline{a}_k = 2$: idem, maar het op één na grootste, enz. De vector $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n)$ neemt met kans $1/n!$ elke mogelijke permutatie van $1,\dots,n$ aan. Het probleem luidt nu: maximaliseer $P\{\underline{a}_{\underline{\tau}}=1\}$, de kans op stoppen bij het lootje met het grootste getal, over alle mogelijke strategieën $\underline{\tau}$.

Zij verder $\underline{y}_k$ het rangnummer van het getal op het k^{de} getrokken lootje maar nu onder de tot dan toe getrokken lootjes, dus: als $a_1,a_2,\dots,a_n$ gegeven zijn dan is y_k het aantal elementen van de verzameling $\{a_i : a_i \le a_k,\ 1 \le i \le k\}$. Het is gemakkelijk in te zien dat $\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n$ onderling onafhankelijke stochasten zijn met verdeling

$$P\{\underline{y}_k=i\} = \frac{1}{k} \qquad \text{voor } 1 \le i \le k;$$

dus $\underline{y}_k$ is homogeen verdeeld over de punten $1,2,\dots,k$.

Tijdens het trekken van de lootjes worden achtereenvolgens $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\dots$ waargenomen; $\underline{x}_k := (\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_k)$ bevat al onze kennis over het verloop van het proces op het moment dat zojuist het k^{de} lootje getrokken is. Het proces $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots$ vormt weer een Markovketen met toestandsruimte

$$E = \{x_k = (y_1,\ldots,y_k)\colon 1 \le k \le n,\ 1 \le y_i \le i \text{ voor } 1 \le i \le k\}$$

en overgangskansen

$$p(x_{k-1},x_k) = \frac{1}{k} \quad \text{voor } 2 \le k \le n \quad \text{en} \quad x_{k-1},x_k \in E,\ x_{k-1} \subset x_k$$

($x_\ell \subset x_k$ betekent: de eerste ℓ componenten van x_k zijn juist de componenten van x_ℓ). Op deze Markovketen willen we nu de oplossing van het vraagstuk baseren.

Om het probleem in te passen in de in hoofdstuk 1 ontwikkelde theorie moeten we nog een opbrengstfunktie r op E definiëren, en wel zo dat de verwachte opbrengst gelijk is aan de kans dat we bij het lootje met het grootste getal erop stoppen, voor elke mogelijke strategie. Het ligt voor de hand om r als volgt te kiezen

$$r(x_k) = P\{\underline{a}_k=1 \mid \underline{x}_k=x_k\} \qquad \text{voor } x_k \in E.$$

Inderdaad geldt dan, zoals gemakkelijk is na te gaan,

$$Er(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = P\{\underline{a}_{\underline{\tau}}=1\}.$$

Om de functiewaarde van r in elk punt van E te berekenen moeten we de bovenstaande voorwaardelijke kans uitrekenen. Zij $x_k'' = (y_1'',\ldots,y_k'') \in E$ een toestand met $y_k'' > 1$ en $x_k' = (y_1',\ldots,y_k') \in E$ een toestand met $y_k' = 1$. Nu kan de eventualiteit $\{\underline{a}_k=1\}$ geschreven worden als $\{\underline{y}_k = 1,\ \underline{y}_{k+1} > 1,\ \underline{y}_{k+2} > 1,\ldots,\underline{y}_n > 1\}$, zodat

$$r(x_k'') = 0$$

en

$$r(x_k') = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{k}{n}\ .$$

We moeten nu v, de kleinste excessieve majorant van r, zoeken. De excessieve funkties zijn in ons geval natuurlijk de niet-negatieve funkties f op E met

$$f(x_{k-1}) \geq \frac{1}{k} \sum_{\substack{x_k \in E \\ x_k \supset x_{k-1}}} f(x_k) \qquad \text{voor } x_{k-1} \in E,\ 2 \leq k \leq n.$$

Gebruik makend van dezelfde accenten-notatie als boven, kunnen we de volgende eigenschappen van v noteren:

$$v(x_n) \geq r(x_n),$$

$$\left.\begin{aligned} v(x'_{k-1}) &\geq \max\Big[r(x'_{k-1}) \,,\ \frac{1}{k} \sum_{\substack{x_k \in E \\ x_k \supset x'_{k-1}}} v(x_k)\Big] \\ v(x''_{k-1}) &\geq \frac{1}{k} \sum_{\substack{x_k \in E \\ x_k \supset x''_{k-1}}} v(x_k) \end{aligned}\right\} \quad \text{voor } 2 \leq k \leq n.$$

Een funktie v^*, die aan deze ongelijkheden voldoet, maar dan met overal gelijktekens, moet natuurlijk gelijk aan v zijn (immers, $v^* \leq v$, maar v^* is ook een excessieve majorant van r en dus $v^* \geq v$). We kunnen deze ongelijkheden dus vervangen door gelijkheden, en ze beschouwen als recursieve definitie van v: achtereenvolgens wordt v gedefinieerd in alle punten x_n, alle punten x_{n-1}, enz. Lossen we vervolgens dit stelsel op dan vinden we

$$\begin{cases} v(x'_k) = \frac{k}{n} = r(x'_k) \\ v(x''_k) = b_k > 0 = r(x''_k) \end{cases} \qquad \text{voor } k \geq k_n$$

en $$v(x_k) = b_{k_n - 1} > r(x'_k) \qquad \text{voor } k < k_n,$$

waarbij k_n het kleinste natuurlijke getal is waarvoor $b_k \leq \frac{k}{n}$, en de rij $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$ recursief gedefinieerd wordt volgens

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ b_{k-1} = \frac{1}{k}((k-1)b_k + \frac{k}{n}) \qquad \text{voor } 2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

De lezer wordt uitgenodigd te controleren dat

$$b_k = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \qquad \text{voor } 1 \leq k \leq n-1.$$

De optimale strategie luidt: alléén stoppen in de toestanden x'_k met $k \geq k_n$. We krijgen dus dezelfde oplossing als die bij opgave 5.

14) We kunnen nu ook de "op één na hoogste tot nu gevonden waarde" accepteren. Dat is dan wel niet de grootste, maar het kan de op één na grootste zijn. Van de bekend wordende getallen is de relevante informatie nu: de k^{de} is de grootste, dan wel: de k^{de} is de op één na grootste. Neem hier als toestanden:

$$(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),\ldots,(1,n),(2,n).$$

We registreren alleen records en records-op-één-na. We zeggen, dat het trekkingsproces in toestand $(1,i)$ is, als de i^{de} trekking een record geeft (dit is altijd zo voor $i=1$) en in toestand $(2,i)$, als de i^{de} trekking een record-op-één-na geeft. Neem $\underline{x}_0$ = eerste geregistreerde trekkingsresultaat, $\underline{x}_1$ = tweede geregistreerde trekkingsresultaat, enz. Dan is met $1 \leq i_\rho \leq n$ voor $\alpha_\rho = 1$ en $2 \leq i_\rho \leq n$ voor $\alpha_\rho = 2$ met $0 \leq \rho \leq r$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0 = (\alpha_0,i_0),\ \underline{x}_1 = (\alpha_1,i_1),\ldots,\underline{x}_r = (\alpha_r,i_r)] =$$

$$= \delta_{1\alpha_0}\,\delta_{1i_0}\,p((\alpha_0,i_0),(\alpha_1,i_1))\ldots\ p((\alpha_{r-1},i_{r-1}),(\alpha_r,i_r)),$$

waarbij

$$p((\alpha_1,i_1),(\alpha_2,i_2)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } \alpha_1=1,\ i_1=1 \text{ en } i_2=2\ , \\[2mm] \dfrac{(i_1-1)i_1}{(i_2-2)(i_2-1)i_2} & \text{als } 1 < i_1 < i_2\ , \\[2mm] 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Neem voor $r(\alpha,i)$ de kans, dat we bij stoppen in (α,i) het grootste of op één na grootste lot in handen hebben. Dan is

$$r(\alpha,i) = \begin{cases} \dfrac{i}{n} + \dfrac{(n-i)i}{(n-1)n} & \text{als } \alpha=1,\ 1 \leq i \leq n\ , \\[3mm] \dfrac{(i-1)i}{(n-1)n} & \text{als } \alpha=2,\ 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

We kunnen uit

$$v(\alpha,i) = \max[r(\alpha,i), \sum_{j=i+1}^{n} p((\alpha,i),(2,j)) \{v(1,j)+v(2,j)\}]$$

aflezen, dat

$$v(1,n) = r(1,n) = 1 \text{ en } v(2,n) = r(2,n) = 1$$

en algemener

$$v(\alpha,i) = r(\alpha,i)$$

voor

$$\frac{2i(n-i)}{(n-1)n} = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{(i-1)i}{(j-2)(j-1)j} \frac{2j}{n} \le r(\alpha,i).$$

Dit geeft

$$(*) \qquad v(2,i) = r(2,i) \qquad \text{voor } 2(n-i) \le i-1 \text{ of } i \ge [\tfrac{2n+1}{3}] = i_*$$

en ook

$$(**) \qquad v(1,i) = r(1,i) \qquad \text{(minstens) voor } i \ge i_*.$$

Daar voor $i < i_*$

$$r(2,i) < \sum_{j=i+1}^{n} p((2,i),(\alpha,j)) \{r(1,j) + r(2,j)\} \le$$

$$\le \sum_{j=i+1}^{n} p((\alpha,i),(2,j)) \{v(1,j) + v(2,j)\},$$

geldt voor alle $i < i_*$: $v(2,i) > r(2,i)$.

Voor de toestanden $(1,i)$ wordt het iets ingewikkelder. We zullen bewijzen dat er een $i_{**} \le i_*$ bestaat met

$$v(1,i) > r(1,i) \qquad \text{voor } i < i_{**},$$

$$v(1,i) = r(1,i) \qquad \text{voor } i \ge i_{**}.$$

Hiertoe eerst wat notaties. Zij

$$\Gamma_\alpha := \{(\alpha,i): v(\alpha,i) = r(\alpha,i)\} \ , \ (\alpha=1,2).$$

We weten al, dat $\Gamma_2 = \{(2,i_*),(2,i_*+1),\ldots,(2,n)\}$ en dat $\Gamma_1 \supset \{(1,i_*),(1,i_*+1),\ldots,(1,n)\}$. Voor $i < i_*$ definiëren we nu

$$B_i := \Gamma_2 \cup \{(1,i),(1,i+1),\ldots,(1,n)\},$$

en

$$\underline{\tau}_i := \text{het ogenblik van eerste binnenkomst in } B_i \ .$$

We zullen nu laten zien dat voor zeker getal i_{**}

$$E_{(1,i)} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_i}) \lesseqgtr r(1,i) \qquad \text{voor } i \lesseqgtr i_{**} \ .$$

Hebben we dit, dan zijn we klaar; immers, in de eerste plaats kan $(1,i)$ met $i < i_{**}$ niet in Γ_1 liggen, omdat, als dit wel zo was, onmiddellijk stoppen in $(1,i)$ optimaal zou zijn en dus $r(1,i) \geq E_{(1,i)} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})$ voor willekeurige $\underline{\tau}$, in het bijzonder voor $\underline{\tau}_i$. In de tweede plaats liggen alle punten $(1,i)$ met $i \geq i_{**}$ dan wel in Γ_1, omdat als voor zekere $i : (1,i+1),(1,i+2),\ldots,(1,n) \in \Gamma_1$ en $i \geq i_{**}$, dan ook $(1,i) \in \Gamma_1$; immers, ware dit niet het geval dan zou

$$r(1,i) < v(1,i) = E_{(1,i)} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{opt}}) = E_{(1,i)} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_i}) \ ,$$

omdat als we in toestand $(1,i)$ starten, $\underline{\tau}_i$ gelijk is aan de optimale strategie.

Om $E_{(1,i)} r(\underline{x}_{\underline{\tau}_i})$ te bepalen, berekenen we eerst de verdeling van $\underline{x}_{\underline{\tau}_i}$ bij begintoestand $(1,i)$ met $i < i_*$. Voor $i < j < i_*$ is

$$P_{(1,i)}\{\underline{x}_{\underline{\tau}_i} = (1,j)\} = P\{\underline{y}_{i+1} > 1,\ldots,\underline{y}_{j-1} > 1, \underline{y}_j = 1\} =$$

$$= \frac{i}{i+1} \cdot \frac{i+1}{i+2} \cdot \ldots \cdot \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{i}{j(j-1)} \ ,$$

terwijl voor $j \geq i_*$

$$P_{(1,i)}\{\underline{x}_{\underline{\tau}_i}=(\alpha,j)\} = P\{\underline{y}_{i+1}>1,\ldots,\underline{y}_{i_*-1}>1,\underline{y}_{i_*}>2,\ldots,\underline{y}_{j-1}>2,\underline{y}_j=1\} =$$

$$= P\{\underline{y}_{i+1}>1,\ldots,\underline{y}_{i_*-1}>1\} \cdot P(\underline{y}_{i_*}>2,\ldots,\underline{y}_{j-1}>2,\underline{y}_j=i\} =$$

$$= \frac{k}{i_*-1} \cdot p((\alpha,i_*-1),(\alpha,j)).$$

(Hier zijn de $\underline{y}_i$ op dezelfde manier gedefinieerd als in vraagstuk 13). Vervolgens is gemakkelijk na te gaan, dat

$$E_{(1,i)}r(\underline{x}_{\underline{\tau}_i}) = \frac{i}{n}\left(2\cdot \sum_{j=i+1}^{i_*-1} \frac{1}{j-1} + \frac{2n-3i_*+i+3}{n-1}\right).$$

Hieruit volgt dat $E_{(1,i)}r(\underline{x}_{\underline{\tau}_i}) \leq r(1,i)$ dan en slechts dan als

$$\sum_{j=i+1}^{i_*-1} \frac{1}{j-1} \leq \frac{3i_*-2i-4}{2(n-1)}.$$

Uit het verloop van beide leden van deze ongelijkheid met i is gemakkelijk te zien dat hij alleen geldt voor $i \geq i_{**}$, waarbij we i_{**} definiëren als het kleinste getal i waarvoor aan de ongelijkheid is voldaan.

15) Er is een mooie beschrijving voor de oplossing. Zie Chow, Robbins & Siegmund, *Great expectations*, blz. 58-59.

16) a) Neem n = 0 en laat n weg. Controleer eerst

$$\pi_*(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i < j, \\ 2q & \text{als } i = j, \\ (\frac{q}{p})^{i-j} & \text{als } i > j, \end{cases}$$

en

$$g(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{p-q} & \text{als } i \leq j, \\ \frac{(q/p)^{i-j}}{p-q} & \text{als } i > j. \end{cases}$$

Merk op, dat één stap de keten volgen in vergelijking met direct stoppen $q-p-c < 0$ oplevert voor $i < 0$, $q-c$ voor $i = 0$ en 0 voor $i > 0$. Alleen bij $q > c$ valt er dus iets te verdienen. Bij $q \le c$ moet direct stoppen optimaal blijken.

Voer nu s in met

$$s(i) = \sum_j g(i,j)c(j) = c \sum_{j=-\infty}^{0} g(i,j) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{pc}{(p-q)^2} \left(\dfrac{q}{p}\right)^i & \text{als } i \ge 0, \\ \dfrac{pc}{(p-q)^2} - \dfrac{ic}{p-q} & \text{als } i < 0, \end{cases}$$

zodat

$$c(i) = s(i) - \sum_j p(i,j)s(j)$$

en we $v(i)$ moeten bepalen uit

$$\begin{cases} v(i) + s(i) \ge r(i) + s(i), \\ v(i) + s(i) \ge \sum_j p(i,j)(v(j) + s(j)), \\ v(i) + s(i) \ge 0, \\ v(i) + s(i) \text{ minimaal.} \end{cases}$$

We hebben hier een zuiver probleem met uitbetaling $t = r + s$ verkregen, waarbij door optimaal stoppen $w = v + s$ wordt behaald. Als bij opgave 3 tekenen we de punten

$$\ldots,\left(-(\tfrac{p}{q})-(\tfrac{p}{q})^2, t(-2)\right),\left(-(\tfrac{p}{q}), t(-1)\right),\left(0, t(0)\right),\left(1, t(1)\right),\left(1+(\tfrac{q}{p}), t(2)\right),\ldots.$$

In deze figuur kunnen we ter bepaling van w van $(-\infty,0)$ naar $(\frac{p}{p-q},0)$ een touwtje over de aangegeven punten spannen. Daarbij liggen $\left(0,t(0)\right),\left(1,t(1)\right),\ldots,\left(\frac{p}{p-q},0\right)$ op een rechte ℓ. Vanuit $\frac{p}{p-q}$ gezien (op de horizontale as) verloopt het touwtje volgens ℓ óf het steunt op (minstens) één der punten

$$\left(-(\tfrac{p}{q}) - (\tfrac{p}{q})^2 - \ldots - (\tfrac{p}{q})^{-j}, t(j)\right)$$

voor $j < 0$. Omdat $-(\frac{p}{q}) - (\frac{p}{q})^2 - \ldots - (\frac{p}{q})^{-j}$ exponentieel groeit voor $j \to \infty$ en $t(j)$ lineair, is $w(j)$ eindig voor elke j en geldt $w(j) = t(j)$ voor $j < 0$ voor géén, één of twee opeenvolgende j's. Om dit in te zien vergelijken we voor $j \le 0$ de hellingen

$$a(j) = \frac{t(j)}{\frac{p}{p-q} + \frac{p}{q} + \ldots + (\frac{p}{q})^{-j}}$$

van de lijnen door $\left((\frac{p}{q})-(\frac{p}{q})^2- \ldots - (\frac{p}{q})^{-j}, t(j)\right)$ en $(\frac{p}{p-q}, 0)$. Nu is $a(j) \ge a(j-1)$ als

$$\frac{-j + \frac{pc}{(p-q)^2} - \frac{jc}{p-q}}{\frac{p}{p-q} + \frac{p}{q} + \ldots + (\frac{p}{q})^{-j}} \ge \frac{-j + 1 + \frac{pc}{(p-q)^2} - \frac{(j-1)c}{p-q}}{\frac{p}{p-q} + \frac{p}{q} + \ldots + (\frac{p}{q})^{-j+1}}$$

of

$$(*) \qquad -j \ge \frac{q-c}{p-q+c} .$$

Blijkbaar verbindt het touwtje $(\frac{p}{p-q}, 0)$ met $(j_*, t(j_*))$, waarbij

$$j_* = [\frac{c-q}{p-q+c}] .$$

Tevens gaat het touwtje door $(j, t(j))$ voor elke $j < j_*$ (ga na!). De optimale strategie is hier: stop bij het bereiken van j_*. De opbrengst van deze strategie bij starten in 0 met kans 1 is (afgelezen van het touwtje!)

$$v(0) = -j_*(\frac{q}{p})^{-j_*} - c\left\{\frac{p}{(p-q)^2} - (\frac{q}{p})^{-j_*}\left(\frac{p}{(p-q)^2} + \frac{-j_*}{p-q}\right)\right\}.$$

b) Bij $n > 0$ vinden we, dat

$$s_n(i) = \begin{cases} \frac{pc}{(p-q)^2}(\frac{q}{p})^{i-n} & \text{als } i \ge n, \\ \frac{pc}{(p-q)^2} + \frac{(n-i)c}{p-q} & \text{als } i < n, \end{cases}$$

en moeten we (in een plaatje als bij opgave 3 en hierboven bij a)) hellingen vergelijken om het steunpunt van de lijn door $(\frac{p}{p-q},0)$ te vinden. Nu blijkt voor $(n+1)c > q$ (en dat geval willen we alléén bekijken, omdat we $n \to \infty$ willen onderzoeken) deze lijn door alle

$$\left(1+(\tfrac{q}{p})+(\tfrac{q}{p})^2+\ldots+(\tfrac{q}{p})^{j-1}, t_n(j)\right) \qquad \text{met } j \geq n$$

te gaan. Hier is $t_n = r + s_n$ en is c_n met s_n geëlimineerd (als boven c met s). Nu blijkt de stopstrategie onafhankelijk van n (mits voldoende groot) van het type

"stop bij het bereiken van i_* of j_*"

te zijn, waarbij $j_* < 0 < i_*$. Dit betekent, dat het geen verschil maakt of voorbij een voldoende grote waarde van n al of niet kosten in rekening worden gebracht! Zo is het geval $c_\infty(i) = c$ voor alle $i \in \mathbb{Z}$ toch te behandelen door eliminatie van c_∞ via s_n in plaats van s_∞!

4. OPLOSSINGEN VAN DE OPGAVEN OVER HOOFDSTUK 2

1) Ga eerst na, dat

$$\pi(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } j \geq i, \\ (\frac{q}{p})^{i-j} & \text{als } j < i. \end{cases}$$

Omdat

$$k(i,j) = \frac{g(i,j)}{g(0,j)} = \frac{\pi(i,j)}{\pi(0,j)} \qquad \text{voor } i,j \in \mathbb{Z},$$

volgt

$$k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } j \geq 0,\ i \leq j, \\ (\frac{q}{p})^{i-j} & \text{als } j \geq 0,\ i \geq j, \\ (\frac{q}{p})^{j} & \text{als } j \leq 0,\ i \leq j, \\ (\frac{q}{p})^{i} & \text{als } j \leq 0,\ i \geq j\ . \end{cases}$$

Wil een rij $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ (met $j_n = j$ voor slechts eindig veel n voor elke $j \in \mathbb{Z}$)

voor elke $i \in \mathbb{Z}$ een limiet

$$y(i) = \lim_{n\to\infty} k(i,j_n)$$

opleveren, dan moet óf $j_n \to \infty$ óf $j_n \to -\infty$ gelden. In het eerste geval vinden we $y_+(i) = 1$ voor alle i en in het tweede $y_-(i) = (\frac{q}{p})^i$ voor alle i. De Martinrand bevat hier twee funkties: y_+ en y_-, die beide harmonisch zijn (zie stelling [2.4], blz.63) en extreem. Dit laatste is een gevolg van

$$H = \{\theta_+ y_+ + \theta_- y_- \mid \theta_+^+ \geq 0; \theta_- \geq 0; \theta_+ + \theta_- = 1\} ,$$

zodat de veronderstelling

$$y_+ = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \qquad \text{met } \alpha_1, \alpha_2 \geq 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1;\ h_1, h_2 \in H$$

tot

$$h_1 = h_2 = y_+$$

voert (analoog voor y_-).

Opmerking. Uit het feit "y_+ is de enige begrensde harmonische funktie in H" volgt óók, dat y_+ extreem is.

2) Op tijdstip 0 beginnen we met kans 1 in (0,0). Hier is

$$g((n,i),(m,j)) = \begin{cases} 0 & \text{als } n > m \text{ of } i > j, \\ \binom{m-n}{j-i} p^{j-i} q^{(m-n)-(j-i)} & \text{als } n \leq m \text{ en } i \leq j. \end{cases}$$

Dit geeft

$$k((n,i),(m,j)) = \begin{cases} 0 & \text{als } n > m \text{ of } i > j \text{ of } j-i > m-n, \\ \dfrac{\binom{m-n}{j-i}}{\binom{m}{j}} p^{-i} q^{i-n} & \text{als } n \leq m,\ i \leq j \text{ en } j-i \leq m-n. \end{cases}$$

Nu bestaat

$$y((n,i)) = \lim_{\ell\to\infty} k((n,i),(m_\ell,j_\ell)) \qquad \text{voor alle } 0 \le i \le n$$

(met $(m_\ell,j_\ell) = (m,j)$ voor slechts eindig veel ℓ voor elke (m,j)), als

a) $m_\ell \to \infty$ voor $\ell \to \infty$ (wegens "slechts eindig veel" conditie),

b1) $\{j_\ell\}_1^\infty$ begrensd is; er is nu een deelrij met j_ℓ constant, die

$$y_0((n,i)) = \begin{cases} 0 & \text{als } i > 0, \\ q^{-n} & \text{als } i = 0, \end{cases}$$

oplevert,

b2) $\{m_\ell-j_\ell\}_1^\infty$ begrensd is; er is nu een deelrij met $m_\ell - j_\ell$ constant, die

$$y_1((n,i)) = \begin{cases} 0 & \text{als } i < n, \\ p^{-n} & \text{als } i = n, \end{cases}$$

oplevert,

b3) $j_\ell \to \infty$ én $m_\ell - j_\ell \to \infty$; nu heeft

$$\frac{(m_\ell-n)!\,j_\ell!\,(m_\ell-j_\ell)!}{m_\ell!\,(j_\ell-i)!\,((m_\ell-n)-(j_\ell-i))!} = \left(\frac{j_\ell}{m_\ell}\right)^i \left(1-\frac{j_\ell}{m_\ell}\right)^{n-i} \{1+o(1)\}$$

een limiet als

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{j_\ell}{m_\ell} = \theta$$

voor een θ met $0 \le \theta \le 1$. Dit geeft

$$y_\theta((n,i)) = \left(\frac{\theta}{p}\right)^i \left(\frac{1-\theta}{1-p}\right)^{n-i},$$

waarbij we voor $\theta = 0$ de funktie y_0 van b1) terugvinden en y_1 van b2) voor $\theta = 1$.

Alle y_θ zijn harmonische funkties en y_p is de enige begrensde (en dus extreem). Ingeval y_θ voor een bepaalde θ uit $[0,1]$ niet extreem is, geldt

$$(*)\qquad y_\theta((n,i)) = \int_{[0,1]} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{i} \left(\frac{1-\alpha}{1-p}\right)^{n-i} dF_\theta(\alpha) \qquad \text{voor } 0 \le i \le n$$

voor een kansverdeling F_θ op $[0,1]$. Dit is alleen juist voor

$$F_\theta(\alpha) = i(\alpha-\theta)\ ,$$

zodat elk der gevonden y_θ een extreme harmonische funktie uit H is.

3) De rij $\underline{w}_1 - \underline{w}_0,\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1, \ldots$ bestaat uit *verwisselbare* stochastische variabelen, d.w.z. steeds is $\underline{w}_{n+1} - \underline{w}_n = 0$ of 1 en we hebben voor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{(u_0,w_0)}[\underline{w}_1-\underline{w}_0=\alpha_1,\ \underline{w}_2-\underline{w}_1=\alpha_1, \ldots, \underline{w}_n-\underline{w}_{n-1}=\alpha_n] = \\ &= \frac{v_0(v_0+1)\ldots(v_0+n-\beta_n-1)w_0(w_0+1)\ldots(w_0+\beta_n-1)}{u_0(u_0+1)\ldots(u_0+n-1)} = \\ &= \theta(u_0,w_0,u_0+n,w_0+\beta_n) \end{aligned}$$

met $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ en $v_0 = u_0 - w_0$.

Start nu met kans 1 in toestand $(u_0,w_0) = (2,1)$. Dan is (steeds met $1 \le w_1 < u_1$ en $1 \le w_2 < u_2$)

$$g((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = \begin{cases} 0 & \text{als } u_1>u_2 \text{ of } w_1>w_2 \text{ of } u_1-w_1>u_2-w_2, \\ \binom{u_2-u_1}{w_2-w_1}\theta(u_1,w_1,u_2,w_2) & \text{als } u_1\le u_2, w_1\le w_2 \text{ en} \\ & u_1-w_1\le u_2-w_2\ . \end{cases}$$

Dit geeft

$$k((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = \begin{cases} 0 & \text{als } u_1>u_2 \text{ of } w_1>w_2 \text{ of } u_1-w_1>u_2-w_2, \\ \dfrac{\binom{u_2-u_1}{w_2-w_1}}{\binom{u_2-2}{w_2-1}}\ \dfrac{\theta(u_1,w_1,u_2,w_2)}{\theta(2,1,u_2,w_2)} & \text{als } u_1\le u_2, w_1\le w_2 \text{ en} \\ & u_1-w_1\le u_2-w_2. \end{cases}$$

Nu is met $v_1 = u_1 - w_1$

$$\frac{\theta(u_1,w_1,u_2,w_2)}{\theta(2,1,u_2,w_2)} = \frac{(u_1-1)!}{(v_1-1)!(w_1-1)!} .$$

Wil een rij $\{(u_n,w_n)\}_1^\infty$ (met $(u_n,w_n) = (u,w)$ voor slechts eindig veel n voor elke (u,w) met $1 \le w \le u$) voor elke toestand (u_1,w_1) een limiet

$$y((u_1,w_1)) = \lim_{n\to\infty} k((u_1,w_1),(u_2,w_2))$$

opleveren, dan moet gelden

a) $u_n \to \infty$ (wegens "slechts eindig veel" conditie),

b1) $\{w_n\}_1^\infty$ begrensd; er is nu een deelrij met w_n constant, die

$$y_0((u_1,w_1)) = \begin{cases} 0 & \text{als } w_1 > 1, \\ u_1-1 & \text{als } w_1 = 1, \end{cases}$$

oplevert,

b2) $\{u_n-w_n\}_1^\infty$ begrensd; er is nu een deelrij met $u_n - w_n$ constant, die

$$y_1((u_1,w_1)) = \begin{cases} 0 & \text{als } w_1 < u_1-1, \\ u_1-1 & \text{als } w_1 = u_1-1, \end{cases}$$

oplevert,

b3) $w_n \to \infty$ en $u_n - w_n \to \infty$; nu heeft

$$\frac{\binom{u_n-u_1}{w_n-w_1}}{\binom{u_n-2}{w_n-1}} = \left(\frac{w_n}{u_n}\right)^{w_1-1} \left(1 - \frac{w_n}{u_n}\right)^{u_1-w_1-1} \{1+o(1)\}$$

een limiet voor alle $1 \le w_1 < u_1$ als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{u_n} = \theta$$

voor een θ met $0 < \theta < 1$. Dit geeft

$$y_\theta((u_1,w_1)) = \frac{(u_1-1)!}{(v_1-1)!(w_1-1)!}\,\theta^{w_1-1}(1-\theta)^{v_1-1} ,$$

waarbij y_0 en y_1 van b1) en b2) voor resp. $\theta = 0$ en $\theta = 1$ opnieuw gevonden worden.

Elke y_θ is een harmonische funktie. Omdat

$$\int_0^1 \frac{(u_1-1)!}{(v_1-1)!(w_1-1)!}\,\theta^{w_1-1}(1-\theta)^{v_1-1}\,d\theta = 1 \quad \text{voor alle } 1 \le w_1 < u_1 ,$$

is de funktie met waarde 1 in alle (u_1,w_1) een harmonische funktie, maar *niet* extreem. Omdat aan

$$\theta^{w_1-1}(1-\theta)^{v_1-1} = \int_{[0,1]} \alpha^{w_1-1}(1-\alpha)^{v_1-1}\,dF_\theta(\alpha)$$

met F_θ een kansverdeling op $[0,1]$ voor alle (w_1,v_1) slechts voldaan is ingeval

$$F_\theta(\alpha) = \iota(\alpha-\theta) ,$$

is elke y_α extreem.

4) Hier is

$$\pi(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i \le j, \\ q_i + p_i q_{i+1} + p_i p_{i+1} q_{i+2} + \dots = 1-\beta_i & \text{als } i > j, \end{cases}$$

met

$$\beta_i = \prod_{j=i}^{\infty} p_j \qquad \text{voor } i \ge 0.$$

Omdat we alleen doorgangstoestanden hebben, moet er een positieve kans op het doorlopen van alle toestanden (in de natuurlijke volgorde) zijn, d.w.z. we hebben $\beta_0 > 0$. Wegens

$$\pi_*(j,j) = p_j\ \pi(j+1,j) + q_j\ \pi(0,j) = p_j(1-\beta_{j+1}) + q_j = 1 - \beta_j\ ,$$

volgt

$$g(i,j) = \begin{cases} 1/\beta_j & \text{als } i \le j, \\ (1-\beta_i)/\beta_j & \text{als } i > j. \end{cases}$$

Dit geeft

$$k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i \le j, \\ 1-\beta_i & \text{als } i > j. \end{cases}$$

Nu bestaat

$$y(i) = \lim_{n\to\infty} k(i,j_n)$$

voor alle $i \ge 0$ voor een gegeven rij $\{j_n\}_1^\infty$ (met $j_n=j$ voor slechts eindig veel n voor elke $j \ge 0$), als $j_n \to \infty$ en in dat geval is

$$y(i) = 1 \qquad\qquad \text{voor } i \ge 0.$$

Er is nu dus precies één harmonische funktie in H, die dan ook extreem is.

5) Alleen dan komen we niet met kans 1 in 1 terug, als

$$\prod_{n=1}^{\infty} p((i,n),(i,n+1)) > 0$$

voor minstens één i met $1 \le i \le m$. We zullen gebruiken

$$\pi(1,(i,j_2)) = \pi(1,(i,j_1))\pi((i,j_1),(i,j_2)) \quad \text{als } j_1 \le j_2.$$

Nu bestaat

$$(*) \qquad y(i,j) = \lim_{n\to\infty} k((i,j),(i_n,j_n))$$

voor elke toestand (i,j) voor een rij $\{(i_n,j_n)\}_1^\infty$ (met $(i_n,j_n) = (i_*,j_*)$

voor slechts eindig veel n voor elke toestand (i_*, j_*)) alleen bij $j_n \to \infty$ en komt in $\{i_n\}_1^\infty$ minstens één waarde uit $1,2,\ldots,m$ oneindig vaak voor. We kunnen blijkbaar volstaan met het berekenen voor $j_n > j$ van

$$k((i,j),(i_n,j_n)) = \frac{\pi((i,j),(i_n,j_n))}{\pi(1,(i_n,j_n))} = \begin{cases} [\pi(1,(i,j))]^{-1} & \text{als } i_n = i, \\ \pi((i,j),1) & \text{als } i_n \neq i. \end{cases}$$

Veronderstel $[\pi(1,(i,j))]^{-1} = \pi((i,j),1)$. Dan is $\pi(1,(i,j)) = \pi((i,j),1) = 1$ en dus ook $\pi(1,1) = 1$, zodat 1 een terugkeertoestand is. Tegenspraak.

Blijkbaar geldt

$$[\pi(1,(i,j))]^{-1} > \pi((i,j),1) \quad \text{voor alle } (i,j).$$

Maar dan is als limiet in (*) alleen

$$y_i((i_1,j_1)) = \begin{cases} [\pi(1,(i_1,j_1))]^{-1} & \text{als } i_1 = i \\ \pi((i_1,j_1),1) & \text{als } i_1 \neq i \end{cases}$$

mogelijk met $i = 1,2,\ldots,m$. Dit geeft precies m harmonische funkties (ze zijn nieuw en verschillend), die extreem zijn bovendien: want als

$$y_i = \sum_{i_1=1}^{m} \theta_{i_1} y_{i_1} \text{ met } \theta_{i_1} \geq 0, \quad \sum_{i_1=1}^{m} \theta_{i_1} = 1,$$

dan volgt uit $\theta_i < 1$

$$y_i = \sum_{i_1 \neq i} \frac{\theta_{i_1}}{1-\theta_i} y_{i_1}$$

en dus

$$[\pi(1,(i,j))]^{-1} = y_i(i,j) = \sum_{i_1 \neq i} \frac{\theta_{i_1}}{1-\theta_i} y_{i_1}(i,j) = \pi((i,j),1).$$

Tegenspraak.

6) Als bij opgave 5 komen we niet met kans 1 in 1 terug, als

$$\prod_{n=1}^{\infty} p((i,n),(i,n+1)) > 0$$

voor minstens één $i \geq 1$.

Beschouw een rij $\{(i_n,j_n)\}_1^{\infty}$, waarvoor

$$y(i,j) = \lim_{n\to\infty} k((i,j),(i_n,j_n))$$

voor elke toestand (i,j) bestaat en met $(i_n,j_n) = (i_*,j_*)$ voor slechts eindig veel n voor elke toestand (i_*,j_*). Nu is mogelijk:

a) rij $\{i_n\}_1^{\infty}$ is begrensd. Dan is het geen beperking om $j_n \to \infty$ te veronderstellen en vinden we (als in opgave 5)

$$y_i((i_1,j_1)) = \begin{cases} [\pi(1,(i_1,j_1))]^{-1} & \text{als } i_1 = i \\ \pi((i_1,j_1),1) & \text{als } i_1 \neq i \end{cases}$$

voor $i = 1,2,\ldots$.

b) rij $\{j_n\}_1^{\infty}$ is begrensd. Dan is het geen beperking om $j_n = j_1$ te veronderstellen en $i_n \to \infty$. Omdat

$$k((i,j),(i_n,j_1)) = \pi((i,j),1) \qquad \text{voor } i_n > i,$$

geldt

$$y(i,j) = \lim_{n\to\infty} k((i,j),(i_n,j_1)) = \pi((i,j),1) = k((i,j),1).$$

Déze y is een ons bekende funktie.

c) Zonder beperking mag $i_n \to \infty$ én $j_n \to \infty$ genomen worden. Opnieuw vinden we de al in b) gevonden y, dus géén nieuwe funktie.

Alleen de onder a) gevonden y_i's kunnen we nu op al of niet harmonisch zijn onderzoeken. Stelling [2.4] is nu *niet*, maar de opmerking daarna is *wel* toepasbaar. Alleen de relatie

$$y_i(1) = \sum_{i_1=1}^{\infty} p(1,(i_1,1))y_i((i_1,1))$$

dienen we voor elke $i \geq 1$ te controleren om te weten, dat we met harmonische y_i's te doen hebben. Nu is

$$\pi(1,(i,1)) = p(1,(i,1)) + \sum_{i_1 \neq i} p(1,(i_1,1))\pi((i_1,1),1)\pi(1,(i,1)).$$

Deling door $\pi(1,(i,1))$ geeft inderdaad

$$y_i(1) = 1 = \sum_{i_1=1}^{\infty} p(1,(i_1,1))y_i((i_1,1)).$$

Als bij opgave 5 volgt, dat alle y_i ook extreem zijn.

7) Neem weer een rij $\{j_n\}_1^{\infty}$ met

$$(*) \qquad y(i) = \lim_{n\to\infty} k(i,j_n)$$

bestaat voor elke toestand i (en zó, dat $j_n=j$ slechts voor eindig veel n juist is). Het aantal nullen en énen van j_n moet dan naar oneindig gaan. Met de afspraak, dat i en j steeds andere toestanden dan $\emptyset$ (hier de "0" uit de theorie van §2, blz. 58) aangeven, geldt

$$\pi(\emptyset,j) = \pi(\emptyset,i)\pi(i,j) \qquad \text{als j met i begint}$$

en

$$\pi(i,j) = \pi(i,\emptyset)\pi(\emptyset,j) \qquad \text{als j niet met i begint.}$$

Dit geeft

$$k(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(\emptyset,i)} & \text{als j met i begint,} \\ \pi(i,\emptyset) & \text{als j niet met i begint.} \end{cases}$$

Tevens is hier

$$\pi(\emptyset,i)\pi(i,\emptyset) < 1,$$

omdat anders $\emptyset$ en i terugkeertoestanden zijn.

Van de rij $\{j_n\}_1^\infty$ kan de eerste component vanaf zekere n niet meer veranderen (anders is er in 0 geen limiet bij (*)). Na het vast worden van de eerste component zal ook de tweede vast worden (anders is er geen limiet in 00 of 10), enz. Zonder bezwaar kunnen we voor j_n de eerste n componenten van één vaste vector met aftelbaar veel componenten (alléén 0 en 1 treden op) nemen. Laat s zo'n vector zijn en j_n de vector van de eerste n componenten van s. Dan is

$$y_s(i) = \lim_{n\to\infty} k(i,j_n) = \begin{cases} [\pi(\emptyset,i)]^{-1} & \text{als s met i begint,} \\ \pi(i,\emptyset) & \text{als s niet met i begint.} \end{cases}$$

Elke s geeft een harmonische y_s. Een andere s geeft een andere y_s (ga na). Elke y_s is extreem. <u>Bewijs</u>. Veronderstel voor een vaste s, dat j_n uit de eerste n componenten van s bestaat voor n = 1,2,... . Veronderstel, dat harmonische funkties h_1 en h_2 bestaan met $h_1(\emptyset) = h_2(\emptyset) = 1$ en $\theta_1,\theta_2 > 0$ met $\theta_1 + \theta_2 = 1$, zó dat

$$y_s = \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 \ .$$

Bekend is (met $i=\emptyset$ toegestaan) dat

$$h_1(i) \geq \pi(i,j_n)h_1(j_n) \text{ en } h_2(i) \geq \pi(i,j_n)h_2(j_n) \qquad \text{voor alle i,}$$

omdat voor een excessieve funktie f

$$f(i) \geq \mathbb{E}_i f(\underline{x}_{\underline{\tau}})$$

en we hier voor f zowel h_1 als h_2 kunnen nemen en $\underline{\tau}$: stop in j_n. Verder geldt

$$y_s(i) = \pi(i,j_n)y_s(j_n) \qquad \text{voor alle i met hoogstens n componenten,}$$

zodat in dat geval

$$y_s(i) = \theta_1 h_1(i) + \theta_2 h_2(i) \geq \pi(i,j_n)(\theta_1 h_1(j_n) + \theta_2 h_2(j_n)) = \pi(i,j_n)y_s(j_n) = \\ = y_s(i).$$

Blijkbaar geldt

$$h_1(i) = \pi(i,j_n)h_1(j_n) \text{ en } h_2(i) = \pi(i,j_n)h_2(j_n)$$

voor elke i met hoogstens n componenten. Dit geeft eerst

$$y_s(j_n) = \frac{1}{\pi(\emptyset,j_n)} = h_1(j_n) = h_2(j_n)$$

en daarna

$$y_s(i) = h_1(i) = h_2(i) \qquad \text{voor alle } i.$$

8) Hier geldt $\theta > 0$ (anders geen doorgangstoestanden) en met $\theta_n = \prod_{\ell=n}^{\infty} p_\ell$

$$\pi(a_m,a_n) = \pi(b_m,b_n) = \begin{cases} \pi(c_0,a_n)\,[\pi(c_0,a_m)]^{-1} & \text{als } m \le n, \\ \pi(a_m,c_0)\,\pi(c_0,a_n) & \text{als } m > n, \end{cases}$$

$$\pi(a_m,b_n) = \pi(b_m,a_n) = \pi(a_m,c_0)\,\pi(c_0,b_n),$$

$$\pi(a_m,c_n) = \pi(b_m,c_n) = \begin{cases} 1-\theta_n & \text{als } m \le n, \\ 1-\theta_m & \text{als } m > n, \end{cases}$$

$$\pi(c_m,a_n) = \pi(c_m,b_n) = \pi(c_0,a_n),$$

$$\pi(c_m,c_n) = \begin{cases} 1-\theta_n & \text{als } m < n, \\ 1 & \text{als } m \ge n, \end{cases}$$

waarbij de expliciete formules direct berekend zijn. Dit geldt ook voor

$$\pi(c_0,a_n) = \pi(c_0,b_n) = (1+\theta_n)^{-1}$$

en

$$\pi(a_n,c_0) = \pi(b_n,c_0) = 1-\theta_n.$$

We vinden zo

$$k(a_m,a_n) = k(b_m,b_n) = \begin{cases} 1+\theta_m & \text{als } m \le n, \\ 1-\theta_m & \text{als } m > n, \end{cases}$$

$$k(a_m,b_n) = k(b_m,a_n) = 1-\theta_m,$$

$$k(a_m,c_n) = k(b_m,c_n) = \begin{cases} (1-\theta_m)(1-\theta_n)^{-1} & \text{als } m \ge n > 0, \\ 1-\theta_m & \text{als } m \ge n = 0, \\ 1 & \text{als } m < n, \end{cases}$$

$$k(c_m,a_n) = k(c_m,b_n) = 1,$$

$$k(c_m,c_n) = \begin{cases} (1-\theta_n)^{-1} & \text{als } m \ge n \ge 1, \\ 1 & \text{als } m < n \text{ of } n = 0. \end{cases}$$

Een rij $\{j_n\}_1^\infty$ met $j_n = i$ voor slechts eindig veel n voor elke toestand i bevat ǒf een deelrij van $\{a_n\}_1^\infty$ of van $\{b_n\}_1^\infty$ ǒf van $\{c_n\}_1^\infty$. We kunnen (omdat zowel voor $\{a_n\}_1^\infty$ als $\{b_n\}_1^\infty$ als $\{c_n\}_1^\infty$ als rij een punt van de Martinrand verkregen wordt) alleen die drie rijen onderzoeken.

Met $\{a_n\}_1^\infty$ als rij komt er

$$\begin{cases} y_a(a_m) = 1+\theta_m, \\ y_a(b_m) = 1-\theta_m, \\ y_a(c_m) = 1. \end{cases}$$

Een analoge y_b verschilt van y_a. Met $\{c_n\}_1^\infty$ als rij vinden we

$$y_c(a_m) = y_c(b_m) = y_c(c_m) = 1.$$

Dus hier is (voor de harmonische funkties y_a, y_b en y_c)

$$y_c = \tfrac{1}{2}y_a + \tfrac{1}{2}y_b.$$

Maar dan zijn y_a en y_b extreem, y_c niet.

LITERATUUR

BREIMAN, L., *Stopping rule problems,* in E.F. BECKENBACH (ed.), *Applied combinatorial mathematics,* J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

CHOW, Y.S., H. ROBBINS & D. SIEGMUND, *Great expectations; The theory of optimal stopping,* Houghton Mifflin Coy., Boston, 1971.

DERMAN, C., *Finite state Markovian decision processes,* Academic Press, New York, 1970.

DOOB, J.L., *Discrete potential theory and bounderies,* J. of Math. and Mech., 8 (1959) 433-458.

DYNKIN, E.B. & A.A. JUSCHKEWITSCH, *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse,* Springer-Verlag, Berlin etc., 1969.

FELLER, W., *An introduction to probability theory and its applications, vol. I,* J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.

FREEDMAN, D., *Markov chains,* Holden Day, San Francisco, 1971.

HALMOS, P.R., *Measure theory,* Van Nostrand, Toronto etc., 1950.

HENNEQUIN, P.L. & A. TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications,* Masson, Paris, 1965.

HUNT, G.A., *Markoff chains and Martin boundaries,* Illinois J. Math., 4 (1960) 313-340.

KEMENY, J.G., J. SNELL & A.W. KNAPP, *Denumerable Markov chains,* Van Nostrand, Princeton, 1966.

KUSHNER, H., *Introduction to stochastic control,* Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1971.

MEYER, P.A., *Processus de Markov: la frontière de Martin,* Springer-Verlag, Berlin etc., 1968.

MUNROE, M.E., *Introduction to measure and integration,* Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953.

PHELPS, R.R., *Lectures on Choquet's theorem,* Van Nostrand Mathematical Studies no. 7, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

ROSS, S.M., *Applied probability models with optimization applications* Holden-Day, San Francisco, 1970.

OVERIGE UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005.

MCS 1.1 F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, *Leergang Besliskunde deel 1: Wiskundige basiskennis*, 1965.

MCS 1.2 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 2: Kansrekening*, 1965.

MCS 1.3 J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek*, 1966.

MCS 1.4 G. DE LEVE & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketen en wachttijden*, 1966.

MCS 1.5 G. DE LEVE & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde*, 1966.

MCS 1.6a B. DORHOUT & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1*, 1968.

MCS 1.7a G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1*, 1968.

MCS 1.7b G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2*, 1970.

MCS 1.7c G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, 1971.

MCS 1.8 J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*, 1968.

MCS 2.1 G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*, 1967.

MCS 2.2 L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*, 1968.

MCS 3.1 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 1*, 1967.

MCS 3.2 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 2*, 1968.

MCS 3.3 H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 3*, 1968.

MCS 4 H.A. LAUWERIER, *Representaties van groepen*, 1968.

MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL, P.C. BAAYEN, *Colloquium discrete wiskunde*, 1968.

MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969.

MCS 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*, 1969.

MCS 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*, 1969.

MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1970.

MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1969.

MCS 9.2 W.P. VAN DE BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELLAERE, *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.

MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970.

MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.

MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971.

MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971.

MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium approximatietheorie*, 1971.

MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972.

MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973.

*MCS 15.3 P.A. BEENTJES e.a., *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*.

MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973.

MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973.

MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974.

MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974.

*MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE JONG, J.J. SEIDEL, A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974.

MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.TH. RUNNENBURG, *Optimaal stappen van Markovketens*, 1974.

*MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.