Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

COLLOQUIUM APPROXIMATIETHEORIE

DOOR H. BAVINCK W. GAUTSCHI G.M. WILLEMS

MC SYLLABUS 14

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1971

Voorwoord

In deze M.C. Syllabus 14 zijn de voordrachten van het colloquium "Approximatietheorie" gebundeld, dat in de eerste helft van 1971 plaatsvond onder leiding van Professor dr. H.A. Lauwerier.

Hoofdstuk 1 belicht aan de hand van enkele eenvoudige voorbeelden de verschillende aspecten van de approximatietheorie, die in dit boekje behandeld worden. In hoofdstuk 2 komt beste benadering in genormeerde ruimten aan de orde. De abstracte, functionaalanalytische theorie wordt in het vervolg concreet gemaakt in een aantal voorbeelden. Hoofdstuk 3 is gewijd aan approximatieprocessen voor functies op de reële as met behulp van singuliere integralen. De hier gebruikte methoden zijn in hoofdzaak ontleend aan de Fourieranalyse. In hoofdstuk 4 wordt een inleiding gegeven in de interpolatietheorie van J. Peetre, waarna deze theorie wordt gebruikt bij de bestudering van approximatieprocessen in Banach ruimten. Deze eerste vier hoofdstukken werden in nauwe samenwerking door H. Bavinck en G.H. Willems geschreven. Hoofdstuk 5, dat de constructie van Gauss-kwadratuurformules behandelt, is van de hand van Prof.dr. W. Gautschi, die als gastspreker een bijdrage tot het colloquium leverde. De in het colloquium gehouden voordracht van Prof.dr. S. Karlin kon helaas niet worden opgenomen.

September 1971.

Inhoud

1. INLEIDING

In de approximatietheorie tracht men in het algemeen objecten te benaderen door middel van bepaalde andere objecten, die in de gegeven situatie eenvoudiger en beter hanteerbaar zijn. Wij beperken ons tot het geval, dat het te benaderen object een element is van een genormeerde lineaire ruimte L, terwijl de objecten waarnee men benadert liggen in een vaste deelverzameling U van L. De mate van benadering wordt bepaald door de norm van het verschil. Allereerst is men geïnteresseerd in het bestaan en de eigenschappen van een "beste benadering".

1.1. Definitie. Zij L een genormeerde lineaire ruimte en U een deelverzameling van L. Een element $u_0 \in U$ heet een beste benadering van $f \in L$ (u_0 = b.b. (U,f)) als voor alle $u \in U$

$$||f-u_0|| \leq ||f-u|| \; .$$

Wij noemen

$$E(U,f) = \inf_{u \in U} ||f-u||$$

de kleinste afwijking van f tot U.

Deze definitie geeft aanleiding tot een aantal vragen:

a) Wanneer is er een beste benadering? (existentie)
b) Hoe kan men een beste benadering herkennen? (karakterisering)
c) Onder welke omstandigheden is er maar één beste benadering? (eenduidigheid)
d) Hoe vinden wij in een concreet geval de beste benadering? (constructie)

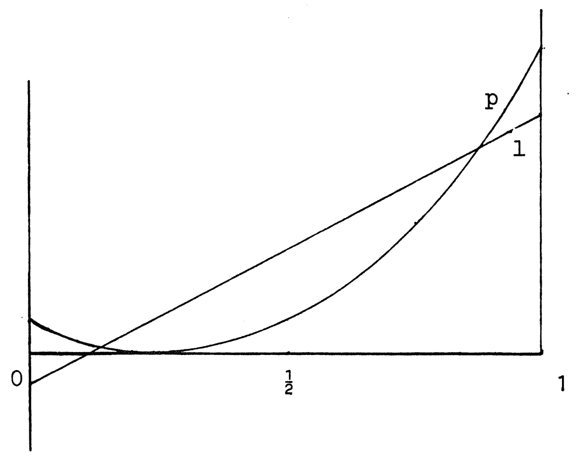
Alvorens enkele voorbeelden te geven willen wij enige notaties afspreken.

1.2. Notaties. Onder R verstaan wij de reële getallen en met $R_{2\pi}$ duiden wij R modulo 2π aan, waarbij als afstand $|x-x'|$ tussen x en x' uit $R_{2\pi}$ wordt genomen de minimale afstand tussen hun representanten in R. De ruimte van de continue functies op het interval $[a,b] \subset R$ voorzien van de supremumnorm $\|\ \|_\infty$ geven wij aan met $C[a,b]$. De ruimte van de continue functies op $R_{2\pi}$ voorzien van de supremumnorm $\|\ \|_\infty$ duiden wij aan met $C_{2\pi}$. Op de gebruikelijke manier worden ook op R, $[a,b]$ en $R_{2\pi}$ de L^p ruimten van functies waarvoor $|f|^p$ Lebesgue-integreerbaar is, ingevoerd. Wij zullen ze aangeven met resp. $L^p(R)$, $L^p[a,b]$ en $L^p_{2\pi}$. Wij zeggen dat de functie f tot de klasse C^k (k geheel ≥ 1) behoort, als f op het definitieinterval k maal differentieerbaar is met continue k^{de} afgeleide. Onder P_n verstaan wij de ruimte van de algebraïsche polynomen van de graad $\leq n$. De ruimte voortgebracht door 1, cos x, cos 2x,...,cos nx, sin x,...,sin nx (trigonometrische polynomen van de graad $\leq n$) wordt aangeduid met T_n.

1.3. Voorbeelden.

1) Gevraagd de functie $f \equiv 1$ in $C[0,1]$ te benaderen met functies van de vorm ax, $a \in R$. Duidelijk is dat voor alle $a \in R$ $\|1-ax\|_\infty \geq 1$. Verder geldt echter, dat voor $0 \leq a \leq 2$ $\|1-ax\|_\infty = 1$. Er bestaat hier dus wel een beste benadering, maar van eenduidigheid is geen sprake.

2) Gevraagd de lijn, die op $[0,1]$ de kleinste verticale afstand heeft tot de parabool $p(x) = (x-\frac{1}{4})^2$.



Figuur 1.1.

<u>Oplossing</u>. Zij l de gevraagde lijn en zij $E = ||p(x) - l(x)||_\infty$. Het is duidelijk dat p-l zowel de waarde E als -E op het interval [0,1] moet aannemen. Wij beweren dat p-l op [0,1] minstens 3× afwisselend de waarden E en -E aanneemt. Immers, vond een dergelijk alterneren van p-l niet plaats, dan bestond er een punt $\alpha \in (0,1)$ zodanig dat p-l op $[0,\alpha]$ slechts extrema van het ene teken had en op $[\alpha,1]$ slechts extrema van het andere teken. Dan kan er echter een λ gekozen worden waarvoor

$$||p(x) - l(x) + \lambda(x-\alpha)||_\infty < E ,$$

hetgeen een tegenspraak is.
Aangezien de afgeleide van p(x) - l(x) slechts 1 nulpunt heeft, moeten twee extrema van hetzelfde teken aan de uiteinden 0 en 1 liggen. De gevraagde lijn is dan van de vorm $l(x) = x/2+c$. De functie

$$p(x) - l(x) = x^2 - x + \frac{1}{16} - c$$

neemt zijn extremum aan in $x = 1/2$. Vergelijken wij de waarden van p(x) - l(x) in x = 0 en $x = 1/2$, dan vinden wij

$$l(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{16} .$$

Wij hebben dus aangetoond, dat, als er een beste benadering van p(x) bestaat, het de lijn $l(x) = x/2 - 1/16$ moet zijn. Dat deze lijn ook werkelijk een beste benadering is, volgt door bewijs uit het ongerijmde. Immers, is l'(x) een betere benadering van p(x), dan geldt:

$$\begin{aligned}
p(0) - l(0) &= E , & |p(0) - l'(0)| &< E , & \text{dus } l'(0) - l(0) &> 0 ;\\
p(\tfrac12) - l(\tfrac12) &= -E, & |p(\tfrac12) - l'(\tfrac12)| &< E , & \text{dus } l'(\tfrac12) - l(\tfrac12) &< 0 ;\\
p(1) - l(1) &= E , & |p(1) - l'(1)| &< E , & \text{dus } l'(1) - l(1) &> 0 .
\end{aligned}$$

De lijn l'(x) - l(x) zou dan 2 nulpunten moeten hebben, hetgeen onmogelijk is.

Het alternerend karakter van de verschilfunctie zal blijken een karakteristieke eigenschap van beste benaderingen te zijn.

<u>1.4</u>. Een andere groep problemen richt zich op het gedrag van de rij getallen $E(U_n,f)$, waarbij $U_n \subset U_{n+1} \subset L$, n=1,2,3,... . Als voorbeeld nemen wij weer de ruimte C[0,1], terwijl wij voor U_n de verzameling P_n kiezen.

Een eerste vraag die zich voordoet is die van de approximeerbaarheid: kan men elke functie uit $C[0,1]$ willekeurig dicht benaderen met behulp van polynomen? Met andere woorden: geldt voor iedere $f \in C[0,1]$: $E(P_n,f) \to 0$ als $n \to \infty$? Het bevestigende antwoord is in 1885 door Weierstrass [12] gegeven. Wij zullen hier een eenvoudiger bewijs geven volgens Bohman [2] en Korovkin [7]. Daarbij maken wij gebruik van de Bernstein operator B_n, die aan $f(t) \in C[0,1]$ het polynoom

$$(1.1) \qquad B_n f = B_n(f(t);x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(\tfrac{k}{n}) \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

toevoegt. Deze operator is ten duidelijkste lineair en bovendien heeft hij de belangrijke eigenschap dat voor $f(t) \geq$ op $[0,1]$ volgt dat $B_n f \geq 0$ op $[0,1]$. Operatoren met deze eigenschap noemen wij positieve operatoren. Voor enkele eenvoudige functies is $B_n f$ gemakkelijk uit te rekenen. Zo geldt

$$(1.2) \qquad B_n 1 = 1 \quad , \quad B_n t = x \quad , \quad B_n t^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n} .$$

De stelling van Weierstrass luidt:

<u>1.5. Stelling</u>. Als $f \in C[0,1]$, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een polynoom $p(x)$ zodanig dat

$$||f(t) - p(t)||_\infty < \varepsilon .$$

<u>Bewijs</u>. Nemen wij een willekeurig punt $\xi \in [0,1]$, dan geldt wegens de continuïteit van $f(t)$ in het punt ξ, dat bij iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat met

$$|f(t) - f(\xi)| < \varepsilon \qquad \text{als} \quad |t-\xi| < \delta , \qquad t \in [0,1].$$

Bovendien bestaat er een positief getal M, zodanig dat $|f(t)| < M$ op $[0,1]$. Voor alle $t \in [0,1]$ geldt de volgende ongelijkheid

$$(1.3) \qquad |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon + \frac{2M(\xi-t)^2}{\delta^2} \quad .$$

Op beide leden van deze ongelijkheid passen wij de operator B_n toe. Wegens de lineariteit en de positiviteit van de operator B_n krijgen wij

$$|B_n(f(t);\xi) - f(\xi)\, B_n(1;\xi)| < \varepsilon\, B_n(1;\xi) + $$
$$+ \frac{2M}{\delta^2} \{\xi^2\, B_n(1;\xi) - 2\xi\, B_n(t;\xi) + B_n(t^2;\xi)\}.$$

Wegens (1.2) wordt dit

$$|f(\xi) - B_n(f(t);\xi)| < \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2\, n}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \; .$$

Dit toont aan dat

$$(1.4) \qquad \lim_{n\to\infty} B_n(f(t);\xi) = f(\xi).$$

Omdat $f(t)$ continu is op het hele interval $[0,1]$, is hij daar uniform continu, waaruit volgt dat (1.3) bij gekozen ε en passende δ voor elke t en ξ uit $[0,1]$ geldt. Dan geldt (1.4) ook uniform in ξ.

Opmerking. Het is duidelijk dat hetzelfde bewijs gegeven kan worden, als in plaats van de Bernstein operator (1.1) willekeurige positieve operatoren L_n worden gekozen, die als wij schrijven

$$L_n t^k = x^k + \alpha_{nk}(x), \qquad (k = 0,1,2),$$

de eigenschap hebben dat

$$\lim_{n\to 0} \alpha_{nk}(x) = 0 \qquad (k = 0,1,2) \; .$$

Voor voorbeelden van dergelijke operatoren verwijzen wij naar Sikkema [11] en de daar aangegeven literatuur.

1.6. Een volgend probleem is de karakterisering van die elementen uit L, waarvoor de rij $E(U_n,f)$ een bepaald gedrag heeft. Wij onderscheiden stellingen van twee typen. Het eerste type levert een schatting voor $E(U_n,f)$, wanneer bepaalde eigenschappen van de functie f verondersteld zijn (directe stellingen). Het tweede type leidt zekere eigenschappen van de functie f af uit het gedrag van $E(U_n,f)$ (inverse stellingen). Om deze begrippen toe te lichten aan de hand van enkele voorbeelden geven wij de volgende definitie.

1.7. Definitie. Voor een functie f uit $C[a,b]$ of $C_{2\pi}$ definiëren wij de continuïteitsmodulus $\omega(f,h)$, $h > 0$, door

$$\omega(f,h) = \sup_{\substack{x,t \\ |x-t|\leq h}} |f(x) - f(t)| \, .$$

Wij zeggen dat f behoort tot de klasse $\mathrm{Lip}_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, $M > 0$, als

$$\omega(f,h) \leq Mh^{\alpha}.$$

Een functie f behoort tot $\mathrm{Lip}(\alpha)$ als er een $M > 0$ bestaat, zodanig dat $f \in \mathrm{Lip}_M(\alpha)$.

De volgende stellingen zullen in een latere voordracht bewezen worden.

1.8. Stelling van Jackson. Als $f \in C_{2\pi}$ en f behoort tot $\mathrm{Lip}(\alpha)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ dan is $E(T_n,f) = O(n^{-\alpha})$; als f een element van $C_{2\pi}^k$ is met $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ $(0 < \alpha \leq 1)$, dan is $E(T_n,f) = O(n^{-k-\alpha})$.

1.9. Stelling van Bernstein. Als $f \in C_{2\pi}$ en er geldt dat $E(T_n,f) = O(n^{-\alpha})$ $(0 < \alpha < 1)$, dan is $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$; als $E(T_n,f) = O(n^{-k-\alpha})$ (k geheel > 0, $0 < \alpha < 1$), dan is f een element van $C_{2\pi}^k$ met $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$.

1.10. Dikwijls zoekt men in plaats van naar de beste benadering van $f \in L$ met behulp van elementen uit U, naar een proces, waarmee op constructieve wijze een goede benadering van f gegeven kan worden binnen U. In vele gevallen is U een lineaire deelruimte van L en is het proces een lineaire operator A die L in U afbeeldt. Men komt er vaak toe, om een rij operatoren A_n, $n = 1,2,3,\ldots$ of een schaar operatoren A_t, $0 < t < \infty$, te bekijken, die naar de identieke operator convergeren. In vele gevallen is hier ook het onderzoek naar directe en inverse stellingen interessant. Wij behandelen de volgende voorbeelden.

1.11. Partiële sommen van de Fourierreeks. De operator s_n, die $C_{2\pi}$ in T_n afbeeldt, voegt aan een functie $f \in C_{2\pi}$ de n^{de} partiële som van de Fourierreeks van f toe, d.w.z.

$$s_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad , \tag{1.5}$$

waarbij

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \tag{1.6}$$

Aangezien

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(x-t) dt, \quad k = 1,2,\ldots,$$

en

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(2n+1)^{x}/2}{2 \sin {}^{x}/2} = D_n(x), \tag{1.7}$$

volgt

$$s_n f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t) dt.$$

$D_n(x)$ noemen wij de Dirichletkern.

De operatornorm

(1.8) $$||s_n|| = \sup_{||f||_\infty=1} ||s_n f||_\infty = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1) \ .$$

(zie Lorentz [8], pag. 5), zodat volgens de stelling van Banach-Steinhaus (Dunford and Schwartz [4], pag. 81) er continue functies bestaan, waarvoor

$$\lim_{n\to\infty} ||s_n f||_\infty = \infty \ .$$

Daar staat tegenover, dat voor k× differentieerbare functies $s_n f$ een goede benadering levert wegens

$$||f-s_n f||_\infty \leq ||f-\text{b.b.}(T_n,f)||_\infty + ||\text{b.b.}(T_n,f) - s_n f||_\infty$$

$$\leq ||f-\text{b.b.}(T_n,f)||_\infty \, (1 + ||s_n||)$$

$$\leq C\, n^{-k} \log n \qquad \text{(wegens 1.8).}$$

Hierbij is ervan gebruik gemaakt, dat de operator s_n elk trigonometrisch polynoom van de graad $\leq$ n in zichzelf afbeeldt.

<u>1.12. (C,1) gemiddelden van de Fourierreeks</u>. Een andere benaderingsoperator σ_n, die $C_{2\pi}$ in T_n afbeeldt, is het (C,1) gemiddelde van de Fourierreeks.

$$\sigma_n f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k f \ ,$$

wat wegens de relatie

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(2k+1)^{x}/2 = \frac{\sin^2(n+1)^{x}/2}{\sin x/2}$$

direct oplevert

$$\sigma_n f = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin(n+1)(x-t)/2}{\sin(x-t)/2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, F_n(x-t)dt.$$

$F_n(x)$ wordt de Fejérkern genoemd. Zowel $s_n f$ als $\sigma_n f$ kunnen opgevat worden als de convolutie van de functie f met een singuliere integraalkern. Voor $\sigma_n f$ is deze kern positief zodat de operatornorm gegeven wordt door

$$\frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(n+1)^t/2}{\sin {}^t/2}\right)^2 dt = 1 .$$

Voor de (C,1) som bewijzen wij een stelling van het Jackson type.

<u>1.13. Stelling</u>. Als $f \in Lip(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, dan geldt

$$||\sigma_n f - f||_\infty = O(n^{-\alpha}).$$

<u>Bewijs</u>. Voor de Fejérkern $F_n(x)$ gelden de volgende afschattingen:

(1.9) a) $F_n(x) = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)^x/2}{\sin {}^x/2}\right)^2 \leq n+1$,

b) $F_n(x) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)x^2}$, (omdat $\sin x > \frac{2}{\pi} x$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

$$||f(x)-\sigma_n f(x)||_\infty \leq ||\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\ \{f(x)-f(x-t)\}dt||_\infty$$

$$\leq C \int_0^{\pi} F_n(t)t^\alpha dt$$

$$\leq C \int_0^{1/(n+1)} t^\alpha(n+1)dt + C_1\int_{1/(n+1)}^{\pi} t^{\alpha-2}\,\frac{1}{n+1}\, dt$$

$$= O(n^{-\alpha}).$$

Wij zien dus dat voor functies uit Lip(α), $0 < \alpha < 1$, de (C,1) som van de Fourierreeks een benadering van f oplevert, die niet veel onderdoet voor de beste benadering. Heel anders wordt het voor functies, die meerdere malen differentieerbaar zijn. Nemen wij bijvoorbeeld de functies cos kx, dan geldt ($k < n$)

$$||\sigma_n \cos kx - \cos kx||_\infty = ||(1-\frac{k}{n+1})\cos kx - \cos kx||_\infty = \frac{k}{n+1} .$$

Hetzelfde geldt voor sin kx. De enige functies waarvoor

$$||\sigma_n f - f||_\infty = o(n^{-1})$$

zijn de constante functies.

Het blijkt, dat er een klasse van functies bestaat, waarvoor de orde van approximatie door middel van de (C,1) sommen van de Fourierreeks optimaal is. Deze optimale orde heet de saturatieorde en de klasse van functies, die met deze orde benaderd worden, noemen wij de saturatieklasse van het betreffende approximatieproces. Deze begrippen zijn ingevoerd door Favard [6].

In de volgende voordrachten zullen methoden geschetst worden om saturatieklassen van benaderingsoperatoren te bepalen. In het bijzonder zullen speciale approximatieprocessen in Banachruimten worden bestudeerd, waarbij de saturatieklasse zal worden opgespoord en tevens directe en inverse stellingen zullen worden bewezen in het kader van de theorie van de intermediaire ruimten.

<u>1.14. Splineapproximatie</u>. Tot voor de tweede wereldoorlog werden slechts polynomen, rationale functies en trigonometrische polynomen in de praktijk gebruikt om functies te benaderen. Sindsdien is door I.J. Schoenberg [9] een nieuwe klasse van benaderingsfuncties geïntroduceerd, de splinefuncties. Splinefuncties bestaan populair gezegd uit stukjes van polynomen, die op een gladde manier aan elkaar zijn geplakt. Nauwkeuriger geformuleerd: onder

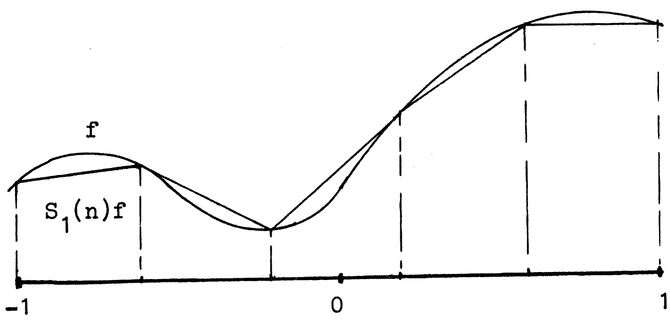
een spline op het interval [a,b] van de graad n met de knooppunten x_1 t/m x_m ($a = x_0 < x_i < x_{i+1} < x_{m+1} = b$, $i = 1,2,\ldots,m-1$) wordt verstaan een functie S die op elk interval (x_i, x_{i+1}) gelijk is aan een of ander polynoom p_i van de graad $\leq n$, zodanig dat $S \in C^{n-1}[a,b]$ d.w.z.

$$\left.\frac{d^k\, p_i(x)}{d\, x^k}\right]_{x=x_{i+1}} = \left.\frac{d^k\, p_{i+1}(x)}{d\, x^k}\right]_{x=x_{i+1}}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,m-1, \\ k = 0,1,\ldots,n-1\ . \end{array}$$

1.15. Als illustratie van een approximatieproces met splines beschouwen wij de operator $S_1(n)$, die aan een functie $f \in C[-1,1]$ de 1ste graads-spline $S_1(n)f$ toevoegt, die in de punten $\frac{2i-n}{n}$, $i = 0,1,\ldots,n$, de functie f interpoleert.

$$S_1(n)\, f(x) = f(\tfrac{2i-n}{n}) + \{f(\tfrac{2(i+1)-n}{n}) - f(\tfrac{2i-n}{n})\}\, \tfrac{n}{2}\, (x - \tfrac{2i-n}{n})\ ,$$

$$\frac{2i-n}{n} \leq x \leq \frac{2(i+1)-n}{n}\ , \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$



Figuur 1.2.

Het zal duidelijk zijn, dat de operator $S_1(n)$ de norm 1 heeft.

<u>1.16. Stelling</u>. Als $f \in C^2[-1,1]$, dan geldt

$$||f - S_1(n)f||_\infty = O(n^{-2}) .$$

<u>Bewijs</u>. Wij bewijzen dat voor $i = 0,1,\dots,n-1$

$$(1.10) \qquad |f(x) - S_1(n)\, f(x)| < C\, n^{-2} \quad , \quad \frac{2i-n}{n} \leq x \leq \frac{2(i+1)-n}{n} \quad .$$

Wegens de middelwaarde stelling is er een punt $\xi \in (\frac{2i-n}{n} , \frac{2(i+1)-n}{n})$, waarvoor geldt dat

$$f'(\xi) = (S_1(n)f)'\ (\xi).$$

De Taylorontwikkeling van f in het punt $x = \xi$ wordt

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + O(n^{-2}).$$

In het bijzonder

$$f(\frac{2i-n}{n}) = f(\xi) + f'(\xi)(\frac{2i-n}{n} - \xi) + O(n^{-2}).$$

Voor $S_1(n)\, f(x)$ kunnen wij schrijven

$$S_1(n)\, f(x) = f(\frac{2i-n}{n}) + f'(\xi)(x - \frac{2i-n}{n})$$

$$= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + O(n^{-2}) ,$$

zodat (1.10) volgt.

Ook met hogere graads splines kan worden geïnterpoleerd. Speciaal derde graads splines (cubische splines) zijn bijzonder hanteerbaar en leveren een redelijk nauwkeurige benadering op.

1.17. Definitie. Onder de Lagrange interpolatieoperator van de graad n en met de steunpunten x_0 t/m x_n verstaan wij de lineaire operator $L_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, die aan een functie $f \in C[-1,1]$ toevoegt het polynoom van de graad n, dat in de punten x_i gelijk is aan $f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Zoals door Erdös [5] werd aangetoond, geldt dat de norm van de Lagrange interpolatieoperator L_n voor elke verdeling van de steunpunten voldoet aan

$$||L_n|| > \frac{2}{\pi} \log n - c_1,$$

waarbij c_1 een constante is. Uit de stelling van Banach-Steinhaus volgt, dat voor een grote klasse functies uit $C[-1,1]$ het interpolatieproces divergeert. De interpolatieoperator $S_1(n)$ uit 1.12 gedraagt zich veel gunstiger in dit opzicht. Aangezien deze operator de norm 1 heeft en voor een dichte deelverzameling van $C[-1,1]$, namelijk de C^2 functies, volgens stelling 1.13 het interpolatieproces convergeert, volgt dat het proces voor alle functies uit $C[-1,1]$ convergeert. Analoge stellingen zijn de laatste tijd gevonden voor cubische en quintische splines, vgl. Ahlberg, Nilson en Walsh [1] en Cheney en Schurer [3], Schurer [10].

Literatuur

[1] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L. — The theory of splines and their applications. Academic Press, New York and London, 1967.

[2] Bohman, H. — On approximation of continuous and of analytic functions. Ark. Mat. 2(1952), 43-56.

[3] Cheney, E.W., Schurer, F. — On interpolating cubic splines with equally spaced nodes. Indag. Math. 30(1968), 517-524.

[4] Dunford, N., Schwartz, J.T. — Linear operators, part I. Interscience publishers, inc., New York, 1958.

[5] Erdös, P. — Problems and results..... . Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12(1961), 235-244.

[6] Favard, J. — Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. (Colloques Internationaux d'Analyse Harmonique 1947). Publ. Centre Nat. Rech. Sci., Paris 15(1949), 97-100.

[7] Korovkin, P.P. — Linear Operators and approximation theory. Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[8] Lorentz, G.G. — Approximation of functions. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[9] Schoenberg, I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.
Quart. Appl. Math. 4(1946), 44-99; 112-141.

[10] Schurer, F. On interpolating periodic quintic spline functions with equally spaced nodes.
Rapport 69-WSK-01. Technische Hogeschool Eindhoven, 1969.

[11] Sikkema, P.C. On some research in linear positive operators in approximation theory.
Nieuw Archief voor Wiskunde (3) XVIII (1970), 36-60.

[12] Weierstrass, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürliger Funktionen einer reellen Veränderlichen.
Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Berlin(1885), 633-639; 789-805.

2. BESTE APPROXIMATIE IN GENORMEERDE LINEAIRE RUIMTEN

In deze voordracht wordt nader ingegaan op problemen, die aan de orde komen, wanneer men in een genormeerde lineaire ruimte over de reële getallen L, bij een element l uit L een beste benadering uit een vaste n-dimensionale deelruimte L_n zoekt. Achtereenvolgens zal aandacht besteed worden aan de volgende onderwerpen, die in de inleiding §1.1. al genoemd zijn naar aanleiding van het begrip b.b.(L_n,l):

a) Existentie van een b.b.(L_n,l).
b) Karakterisering van een b.b.(L_n,l).
c) Eenduidigheid van een b.b.(L_n,l).

In het geval, dat men benadert met elementen uit een eindig dimensionale deelruimte van L, kan de existentievraag bevestigend beantwoord worden.

<u>2.1. Stelling</u>. Zij L een genormeerde lineaire ruimte en L_n een n-dimensionale deelruimte van L. Dan bestaat er voor elke $l \in L$ een b.b.(L_n,l).

<u>Bewijs</u>. Wij zullen in dit bewijs gebruik maken van continue functies op R^n. Voor het element $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in R^n$ zullen wij Λ schrijven en

$$||\Lambda|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^{1/2} .$$

Zij $l_1,\ldots,l_n$ een basis van L_n. De functies Φ en Ψ die R^n in R afbeelden, worden gedefinieerd door:

$$\Phi(\Lambda) = ||l-(\lambda_1 l_1+\ldots+\lambda_n l_n)||, \quad \Lambda \in R^n,$$
$$\Psi(\Lambda) = ||\lambda_1 l_1+\ldots+\lambda_n l_n||, \quad \Lambda \in R^n.$$

Het bestaan van een b.b.(L_n,l) is equivalent met:

$$\exists \Lambda_0 \in R^n \text{ zo, dat } \inf_{\Lambda\in R^n} \phi(\Lambda) = \phi(\Lambda_0) .$$

Aangezien Φ continu is en de verzameling

$$B(r) = \{\Lambda \in R^n \mid ||\Lambda|| \leq r,\ r > 0\}$$

compact, is het voldoende te bewijzen dat voor zekere $r > 0$

$$\inf_{\Lambda \in R^n} \phi(\Lambda) = \inf_{\Lambda \in B(r)} \phi(\Lambda) , \tag{2.1}$$

omdat een continue functie op een compacte verzameling zijn minimum aanneemt. Aangezien $l_1,\ldots,l_n$ lineair onafhankelijk zijn, geldt dat $\Psi(\Lambda) > 0$ als $\Lambda \neq 0$. Daar Ψ continu is en de verzameling $\{y \in R^n \mid ||y|| = 1\}$ compact is, bestaat er een $c > 0$ zo, dat

$$\Psi(\Lambda) > c > 0, \qquad \forall \Lambda,\ ||\Lambda|| = 1.$$

Hieruit volgt:

$$\Psi(\Lambda) = ||\Lambda||\ \Psi\left(\frac{\Lambda}{||\Lambda||}\right) \geq c||\Lambda|| . \tag{2.2}$$

Volgens de driehoeksongelijkheid geldt:

$$\Phi(\Lambda) = ||l-(\lambda_1 l_1+\ldots+\lambda_n l_n)|| \geq ||\lambda_1 l_1+\ldots+\lambda_n l_n||-||l|| = \Psi(\Lambda)-||l||. \tag{2.3}$$

Wanneer men (2.3) en (2.2) combineert, vindt men:

$$\Phi(\Lambda) \geq c||\Lambda|| - ||l|| .$$

Dus, voor $||\Lambda|| > \dfrac{2||l||}{c}$ geldt:

$$\Phi(\Lambda) > ||l|| = \Phi(0),$$

waaruit volgt dat aan (2.1) met $r = \dfrac{2||l||}{c}$ voldaan is. Hiermee is het bewijs voltooid.

Nu de existentie van de beste benadering verzekerd is, zullen enige stellingen worden behandeld, die de beste benadering karakteriseren met behulp van de duale ruimte L^* van L. Eerst geven wij enige definities, notaties en stellingen uit de functionaalanalyse.

<u>2.2. Definities</u>. In deze paragraaf is L steeds een genormeerde lineaire ruimte.

a) Wij noemen $S(L) = \{l \in L \mid ||l|| \leq 1\}$ de eenheidsbol van L.

b) Onder L^* verstaan wij de ruimte van alle continue lineaire functionalen op L. L^* wordt de duale ruimte van L genoemd. De ruimte L^* wordt genormeerd door voor $l^* \in L^*$ te definieren

$$||l^*|| = \sup_{l \in S(L)} |\langle l^*, l \rangle| \ .$$

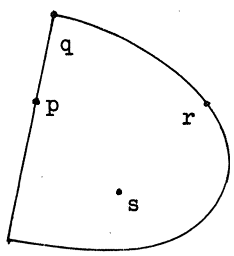
Naast de normtopologie op L^* hebben wij nodig de zwakke topologie $\sigma(L^*,L)$ op L^*. Dit is de grofste topologie L^* waarvoor voor alle $l \in L$ de functie

$$l^* \longmapsto \langle l^*, l \rangle$$

nog continu is.

c) Een verzameling $C \subset L$ heet convex d.e.s.d. als voor alle $c_1, c_2 \in C$ en alle $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, met $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ geldt $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in C$.

d) Een punt e van een verzameling V heet extremaalpunt van V d.e.s.d. als er geen $v_1, v_2 \in V$, met $v_1 \neq v_2$, en $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, met $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, zijn zodanig dat $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = e$.



Van de hier afgebeelde convexe verzameling in R^2 zijn de punten q en r extremaalpunten, p en s niet.

Figuur 2.1.

e) Voor een verzameling $V \subset L$ noemen wij

$$V^{\perp} = \{l^* \in L^* \mid \langle l^*,l \rangle = 0, \ \forall l \in V\}$$

de annihilator van V.

f) Voor $l \in L$ is

$$\Sigma_l = \{l^* \in S(L^*) \mid \langle l^*,l \rangle = \|l\|\} .$$

g) Voor $V_1,\dots,V_n \subset L$ duiden wij met $[V_1,\dots,V_n]$ aan de kleinste lineaire deelruimte van L die $V_1,\dots,V_n$ bevat.

h) Voor een deelverzameling $V \subset L$ is het convexe omhulsel van V, conv(V), de kleinste convexe deelverzameling van L die V omvat.

2.3. Stellingen.

a) Stelling van Hahn-Banach.

Zij m^* een continu lineair functionaal gedefinieerd op een deelruimte $D \subset L$, genormeerd met de door L geïnduceerde norm. Dan is er een continu lineair functionaal l^* op L met $\|l^*\| = \|m^*\|$ zo, dat de restrictie van l^* tot D gelijk aan m^* is, d.w.z. voor alle $d \in D$ is $\langle m^*,d \rangle = \langle l^*,d \rangle$.

b) Stelling van Krein-Milman.

Zij C een compacte convexe deelverzameling van een lineaire topologische ruimte, dan is de afsluiting van het convexe omhulsel van de extremaalpunten van C gelijk aan C. In het bijzonder bezit elke niet lege compacte convexe verzameling een extremaalpunt.

c) Stelling van Alaoglu.

De gesloten eenheidsbol $S(L^*)$ in de duale ruimte L^* is compact in de zwakke topologie $\sigma(L^*,L)$.

(Zie voor deze stellingen: Dunford en Schwartz [3], pag.60, 440 en 424).

<u>2.4. Stelling</u>. Zij L een genormeerde lineaire ruimte en L_n een lineaire deelruimte van dimensie n. Dan is $l_0 \in L_n$ een beste benadering van $l \in L$ d.e.s.d., als er een $l^* \in S(L^*) \cap L_n^{\perp}$ bestaat zo, dat

$$<l^*,l-l_0> = ||l-l_0||,$$

m.a.w., als $\sum_{l-l_0} \cap L_n^{\perp}$ niet leeg is.
Bovendien geldt:

$$E(L_n,l) = \inf_{m\in L_n} ||l-m|| = \sup_{l^*\in L_n^{\perp}\cap S(L^*)} <l^*,l> = \max_{l^*\in L_n^{\perp}\cap S(L^*)} <l^*,l> .$$

<u>Bewijs.</u> Wanneer er een $l^* \in S(L^*) \cap L_n^{\perp}$ bestaat zo, dat

$$<l^*,l-l_0> = ||l-l_0||,$$

dan geldt voor alle $l_n \in L_n$:

$$||l-l_n|| \geq <l^*,l-l_n> = <l^*,l-l_0> + <l^*,l_0-l_n> = <l^*,l-l_0> = ||l-l_0||.$$

Dus is l_0 een b.b.(L_n,l).

Om te bewijzen dat bij l_0 = b.b.(L_n,l) er een l^* bestaat met

$$l^* \in L_n \cap \sum_{l-l_0} ,$$

wordt de stelling van Hahn-Banach toegepast.

Beschouw het lineaire functionaal m^* dat op de lineaire deelruimte D van L, opgespannen door L_n en l, m.a.w. $D = [L_n,l]$, gedefinieerd is door:

$$<m^*,l_n> = 0, \qquad \forall l_n \in L_n,$$

en

$$<m^*,l> = ||l-l_0|| = E(L_n,l).$$

Het lineaire functionaal m^* heeft de norm 1, want

$$||m^*|| = \sup_{\substack{\lambda l - l_n \neq 0, \\ l_n \in L_n, \lambda \in R.}} \frac{|\langle m^*, \lambda l - l_n \rangle|}{||\lambda l - l_n||} =$$

$$\sup_{\substack{\lambda l - l_n \neq 0, \\ l_n \in L_n, \lambda \in R}} \frac{\lambda \, E(L_n, l)}{||\lambda l - l_n||} = \frac{E(L_n, l)}{\inf\limits_{l_n \in L_n} ||l - l_n||} = 1 .$$

Volgens de stelling van Hahn-Banach (stelling 2.3a) is er een $l^* \in L^*$ waarvoor geldt:

$$||l^*|| = ||m^*|| = 1,$$

en

$$\langle l^*, d \rangle = \langle m^*, d \rangle \ , \quad \forall d \in D.$$

Voor deze l^* geldt:

$$l^* \in S(L^*) \cap L_n^{\perp} \ ,$$

en

$$\langle l^*, l - l_0 \rangle = \langle l^*, l \rangle = E(L_n, l) = ||l - l_0|| \ .$$

Hiermee is het bewijs voltooid.

In de rest van deze voordracht zullen toepassingen van stelling 2.4 worden gegeven op de karakterisering van beste benaderingen. De karakterisering zal afhangen van de representatie, die a priori aan het functionaal l^* gegeven kan worden. De volgende stelling geeft een karakterisering voor de beste benadering in het geval van approximatie in $L^1[a,b]$ of $L^1_{2\pi}$.

2.5. Stelling. Zij L_n een n-dimensionale deelruimte van L^1, opgespannen door $l_1,\dots,l_n$. Dan is voor $l \in L^1$ een element $l_0 \in L_n$ een b.b.(L_n,l), wanneer geldt (voldoende voorwaarde):

$$\int \operatorname{sign}[(l-l_0)(x)] \; l_i(x)dx = 0, \quad i = 1,\dots,n . \tag{2.4}$$

Verder geldt

$$E(L_n,l) = \int \operatorname{sign}\,[(l-l_0)(x)]\; l(x)dx .$$

Voor het geval dat $\operatorname{sign}(l-l_0)$ slechts op een verzameling van de maat nul gelijk nul is, is (2.4) ook een noodzakelijke voorwaarde.

Bewijs. Wij gebruiken het feit dat L^{1*} gelijk is aan L^∞, (Dunford en Schwartz [3], pag. 289). Voor het functionaal

$$l^* = \operatorname{sign}[(l-l_0)(x)]$$

geldt: $||l^*|| = 1$ en bovendien $l^* \in \sum_{l-l_0}$. Aangezien (2.4) betekent dat $l^* \in L_n^\perp$, is aan de voorwaarde van stelling 2.4. voldaan zodat l_0 een b.b.(L_n,l) is en

$$E(L_n,l) = \langle l^*,l\rangle = \int \operatorname{sign}\,[(l-l_0)(x)] \;\; l(x)dx .$$

Voor het geval

$$\operatorname{sign}[(l-l_0)(x)] \neq 0 \quad \text{b.o.},$$

bestaat $\sum_{l-l_0}$ slechts uit één element, nl. $\operatorname{sign}(l-l_0)$.

Dus is volgens stelling 2.4. voorwaarde (2.4) ook noodzakelijk, opdat l_0 een b.b.(L_n,l) is. Hetgeen te bewijzen was.

In het vervolg van dit hoofdstuk zal stelling 2.5 gebruikt worden om in een aantal interessante gevallen b.b.(L_n, l) te bepalen en wel op de volgende manier:

a) Eerst selecteert men een signumfunctie $s(x)$, die precies in de punten x_i, $i = 1,\ldots,n$ van teken wisselt en die voldoet aan:

$$\int s(x)\, l_i(x)dx = 0, \quad i = 1,\ldots,n .$$

b) Vervolgens worden $\lambda_i \in R$, $i = 1,\ldots,n$, bepaald zo, dat

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k l_k(x_i) = l(x_i) \ , \quad i = 1,\ldots,n .$$

en $l - \sum \lambda_k l_k$ precies in de punten x_i, $i = 1,\ldots,n$ van teken wisselt. Dan volgt uit stelling 2.5., dat $\sum \lambda_k l_k$ een b.b.(L_n, l) is en dat

$$E(L_n, l) = \int s(x)\, l(x)dx. \tag{2.5}$$

Na deze toepassing op de L^1-approximatie keren we terug tot de verdere karakterisering van beste benaderingen.

<u>2.6. Stelling</u>. Voor $l \in L$ is een element $l_0 \in L_n$ een b.b.(L_n, l) d.e.s.d. als

$$\forall l_n \in L_n \quad 0 \in \{\langle l^*, l_n\rangle \mid \quad l^* \in \Sigma_{l-l_0}\}. \tag{2.6}$$

<u>Bewijs</u>. Uit het feit dat l_0 een b.b.(L_n, l) is, volgt volgens stelling 2.4., dat er een $l^* \in \Sigma_{l-l_0} \cap L_n^{\perp}$ bestaat; hiervan is (2.6) een direct gevolg. Stel nu dat l_0 geen b.b.(L_n, l) is; dan is er een $l_0' \in L_n$ zo, dat

$$||l-l_0|| > ||l-l_0'||.$$

Dus geldt voor alle $l^* \in \sum_{l-l_0}$:

$$<l^*,l-l_0> \; > \; <l^*,l-l_0+l_0-l_0'> \; = \; <l^*,l-l_0> + <l^*,l_0-l_0'> \; .$$

Hieruit volgt:

$$\forall_{l^*\in\sum_{l-l_0}} \qquad <l^*,l_0-l_0'> \; < 0 \quad ,$$

zodat

$$0 \notin \{<l^*,l_0-l_0'> \mid l^* \in \textstyle\sum_{l-l_0}\} \; .$$

Daar l_0-l_0' element van L_n is, is dit in tegenspraak met (2.6).

2.7. Lemma. De ruimten X en Y zijn lineaire topologische ruimten en T is een continue lineaire afbeelding van X in Y. Zij K een compacte convexe deelverzameling van X. Dan is elk extremaalpunt e van T(K) het beeld T(f) van een extremaalpunt f van K.

Bewijs. Zij e een extremaalpunt van T(K). Dan is $T^{-1}(e)$, het volledig origineel in K van e onder de afbeelding T, een gesloten convexe deelverzameling van K. Dus is $T^{-1}(e)$ een compacte convexe deelverzameling van X. Volgens de stelling van Krein-Milman 2.3.b) heeft $T^{-1}(e)$ nu tenminste één extremaalpunt f.

Om het bewijs nu te voltooien, is het voldoende aan te tonen, dat f ook extremaalpunt van K is. Stel f is geen extremaalpunt van K; dan zijn er $k_1,k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$ en $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ zo, dat

$$\lambda_1 k_1+\lambda_2 k_2 = f.$$

Maar dan is

$$T(f) = e = \lambda_1 \, T(k_1) + \lambda_2 \, T(k_2), \quad T(k_1),T(k_2) \in T(K).$$

Omdat e een extremaalpunt van $T(K)$ is, impliceert dit: $T(k_1) = T(k_2) = e$. Dus zijn k_1 en k_2 elementen van $T^{-1}(e)$. Dit levert een tegenspraak op, omdat f een extremaalpunt van $T^{-1}(e)$ is.

<u>2.8. Stelling</u>. Voor $l \in L$ is l_0 een b.b.(L_n,l) d.e.s.d., als

$$(2.7) \qquad \forall l_n \in L_n \quad 0 \in \operatorname{conv}\{<l^*,l_n> \mid l^* \in \Sigma_{l-l_0} \text{ en } l^* \text{ extremaalpunt van } S(L^*)\} \ .$$

<u>Bewijs.</u> In de zwakke topologie op L^* is Σ_{l-l_0} een gesloten deelverzameling van $S(L^*)$. Dit is eenvoudig in te zien door Σ_{l-l_0} te beschouwen als het volledig origineel in $S(L^*)$ van het punt $||l-l_0|| \in R$ onder de continue afbeelding (continu, wanneer men op $S(L^*)$ de zwakke topologie $\sigma(L^*,L)$ beschouwt)

$$l^* \longmapsto <l^*,l-l_0> \ .$$

Voor een $l_n \in L_n$ is de afbeelding van L^*, met de zwakke topologie $\sigma(L^*,L)$, naar R, gedefinieerd door $l^* \longmapsto <l^*,l_n>$, continu en lineair. Het beeld van Σ_{l-l_0} is, evenals Σ_{l-l_0} zelf, compact en convex in R; het is dus een interval [a,b]. Toepassing van lemma 2.7. levert op dat er extremaalpunten e_1^* en e_2^* van Σ_{l-l_0} zijn zo, dat

$$(2.8) \qquad <e_1^*,l_n> = a, \quad <e_2^*,l_n> = b \ .$$

Indien wij kunnen aantonen, dat de extremaalpunten van Σ_{l-l_0} ook extremaalpunten van $S(L^*)$ zijn, volgt hieruit dat (2.7) equivalent is met (2.6).

Als e^* extremaalpunt van Σ_{l-l_0} zou zijn en niet van $S(L^*)$, dan zouden er $l_1^*,l_2^* \in S(L^*)$, $l_1^* \neq l_2^*$ en $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ zijn zo, dat

$$\lambda_1 \, l_1^* + \lambda_2 \, l_2^* = e^* \ .$$

Maar dan zijn l_1^* en l_2^* beide in $\sum_{l-l_0}$, omdat

$$||l-l_0|| = \langle e^*, l-l_0\rangle = \lambda_1 \langle l_1^*, l-l_0\rangle + \lambda_2 \langle l_2^*, l-l_0\rangle \ .$$

Dit is echter in tegenspraak met de veronderstelling dat e^* een extremaalpunt is van $\sum_{l-l_0}$. Dus uit het feit, dat e^* een extremaalpunt van $\sum_{l-l_0}$ is, volgt, dat e^* een extremaalpunt van $S(L^*)$ is.

Wij hebben nu een resultaat van Minkowski [8] pag. 160 nodig voor verdere karakterisering van beste benaderingen. Dit resultaat is een verscherpte vorm van de stelling van Krein-Milman voor de R^n.

2.9. Lemma. Zij C een compacte convexe deelverzameling van R^n. Voor elk punt $c \in C$ zijn er dan m extremaalpunten $e_1,\dots,e_m$, $m \leq n+1$, en m getallen $\lambda_i > 0$, met $\lambda_1+\dots+\lambda_m = 1$ zodanig, dat

$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \quad .$$

Bewijs. Voor het bewijs hebben wij het volgende resultaat nodig (Eggleston [4] pag. 20). Voor een punt r uit de rand van C bestaat er een steunhypervlak H_r van C dat r bevat, d.w.z. er is een lineair functionaal Λ op R^n zo, dat

$$\langle\Lambda, c_1\rangle \leq \langle\Lambda, r\rangle, \quad \forall c_1 \in C \ ,$$

en

$$H_r = \{y \in R^n \mid \langle\Lambda, y\rangle = \langle\Lambda, r\rangle\}.$$

Wanneer $H_0 = \{y \in R^n \mid \langle\Lambda, y\rangle = 0\}$, dan is H_0 en (n-1)-dimensionale deelruimte van R^n en $H_r = r+H_0$.

Wij kunnen nu het bewijs van het lemma met behulp van inductie naar n voeren. Voor n = 1 is het resultaat triviaal, daar in dit geval een convexe compacte verzameling een gesloten interval is.

Het geval $n = k+1$ wordt nu bewezen, uitgaande van de veronderstelling, dat de stelling waar is voor $n = 1,\dots,k$. Kies een willekeurige $c \in C$. Uit de stelling van Krein-Milman volgt dat C tenminste één extremaalpunt e_1 heeft. De lijn door e_1 en c heeft, behalve e_1, tenminste nog één punt r met de rand van C gemeen.

Als H_r een steunhypervlak door r is, dan is $((H_r \cap C)-r)$ een compacte convexe deelverzameling in de $(n-1)$-dimensionale Euclidische ruimte $H_0 = \{y \in R^n \mid \langle \Lambda,y\rangle = 0\}$. Uit de inductieveronderstelling volgt nu dat er $m_0 \leq n$ extremaalpunten $e_2,\dots,e_{m_0+1}$ van $H_r \cap C$ zijn en m_0 getallen $\lambda_2,\dots,\lambda_{m_0+1}$, $\lambda_i \geq 0$, met $\lambda_2+\dots+\lambda_{m_0+1} = 1$ zo, dat

$$\sum_{i=2}^{m_0+1} \lambda_i e_i = r \quad .$$

Daar c op de verbindingslijn tussen e_1 en r ligt, is $c = \lambda_1 e_1+\mu_1 r$, met $\lambda_1,\mu_1 \geq 0$, $\lambda_1+\mu_1 = 1$, zodat

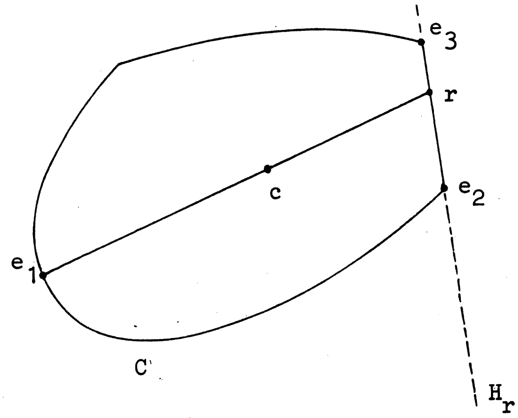
$$c = \lambda_1 e_1+\mu_1 \left(\sum_{i=2}^{m_0+1} \lambda_i e_i\right) = \lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^{m_0+1} \mu_1 \lambda_i e_i \quad .$$

Aangezien $\lambda_1 \geq 0$ en $\mu_1\lambda_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m_0+1$ en $\lambda_1+\mu_1\lambda_2+\dots+\mu_1\lambda_{m_0+1} = 1$, is het bewijs voltooid, wanneer aangetoond wordt, dat de extremaalpunten e_i, $i = 2,\dots,m_0+1$ van $H_r \cap C$ ook extremaalpunten van C zijn.

Stel dat $e \in H_r \cap C$ een extremaalpunt van $H_r \cap C$ is en niet van C. Dan zijn er $c_1,c_2 \in C$, $c_1 \neq c_2$ en $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ met $\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2 = e$. Maar $e \in H_r \cap C$ betekent

$$\langle \Lambda,e\rangle = \langle \Lambda,r\rangle \geq \langle \Lambda,c_i\rangle \quad .$$

Aangezien $\langle \Lambda,e\rangle = \lambda_1\langle \Lambda,c_1\rangle + \lambda_2\langle \Lambda,c_2\rangle$ moet $\langle \Lambda,c_i\rangle = \langle \Lambda,e\rangle$ zijn, zodat $e_i \in H_r$ en dus $c_i \in H_r \cap C$. Dan zou e ook geen extremaalpunt zijn van $H_r \cap C$, hetgeen een tegenspraak oplevert.



Figuur 2.2.

2.10 Stelling. Een nodige en voldoende voorwaarde dat l_0 een b.b.(L_n, l) is, is dat er $m \leq n+1$ extremaalpunten e_i^* van $S(L^*)$ zijn zo, dat er getallen $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ bestaan met

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i^* \in \Sigma_{l-l_0} \cap L_n^{\perp} .$$

Bewijs. Dat de voorwaarde voldoende is volgt direct uit stelling 2.4. De voorwaarde is ook noodzakelijk. Wij beschouwen de afbeelding Φ van L^* in R^n gedefinieerd door

$$l^* \longmapsto (\langle l^*, l_1 \rangle, \ldots, \langle l^*, l_n \rangle);$$

hierbij is $l_1, \ldots, l_n$ een basis van L_n. Wanneer men L^* met de zwakke topologie beschouwt, is de afbeelding Φ continu; aangezien Φ lineair is, is het beeld onder Φ van Σ_{l-l_0} een compacte convexe deelverzameling van de R^n. Wegens stelling 2.4. is $\Sigma_{l-l_0} \cap L_n^{\perp}$ niet leeg; dus $(0, \ldots, 0) \in \Phi(\Sigma_{l-l_0})$. Nu kunnen wij concluderen uit lemma 2.9., dat er $m \leq n+1$ extremaalpunten f_i van $\Phi(\Sigma_{l-l_0})$ en m getallen $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ zijn zo, dat

$$(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i .$$

Uit lemma 2.7. volgt, dat er dan bij f_i een extremaalpunt $e_i^* \in \sum_{l-l_0}$ is zo, dat $\Phi(e_i^*) = f_i$. Aangezien de extremaalpunten van $\sum_{l-l_0}$ ook extremaalpunten van $S(L^*)$ zijn (zie bewijs stelling 2.8.), zijn de e_i^* extremaalpunten van $S(L^*)$ en er geldt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i^* \in L_n^{\perp} \cap \sum_{l-l_0} .$$

Wanneer wij aan de deelruimte L_n van L nog een extra voorwaarde opleggen, die in het geval L = C[a,b] overeenkomt met de eis, dat een basis van L een Chebyshev-stelsel is, kunnen wij een uitspraak over de eenduidigheid doen.

2.11. Definitie. Wij zeggen dat de n-dimensionale deelruimte L_n van L aan de voorwaarde H voldoet, wanneer voor elk n-tal extremaalpunten e_i^* van $S(L^*)$, $e_i^* \neq \pm e_j^*$, en voor een basis $l_1,\ldots,l_n$ van L_n geldt dat

$$\det(\langle e_i^*, l_j \rangle) \neq 0 .$$

In het geval dat L_n aan de voorwaarde H voldoet, is de m uit stelling 2.10. gelijk n+1.

2.12. Stelling. Wanneer L een genormeerde lineaire ruimte is en L_n een n-dimensionale deelruimte van L, die aan de voorwaarde H voldoet, dan is de b.b.(L_n,l) eenduidig bepaald.

Bewijs. Stel l_0 is een b.b.(L_n,l). Dan zijn er n+1 extremaal punten $e_1^*,\ldots,e_{n+1}^*$ in $S(L^*)$ en n+1 getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1} = 1$, $\lambda_i > 0$ zo, dat

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle e_i^*, l_n \rangle = 0, \quad \forall\, l_n \in L_n,$$

en

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle e_i^*, l-l_0 \rangle = ||l-l_0|| .$$

Stel dat l_0' ook een b.b.(L_n,l) is, dan is ook

$$||l-l_0|| = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle e_i^*,l\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle e_i^*,l-l_0'\rangle .$$

Maar $||l-l_0|| = ||l-l_0'||$. Dus

$$\langle e_i^*,l-l_0'\rangle = ||l-l_0'|| = \langle e_i^*,l-l_0\rangle ,$$

zodat

$$\langle e_i^*,l_0-l_0'\rangle = 0, \qquad i=1,\dots,n+1 .$$

Dit nu is in tegenspraak met het feit dat L_n aan de voorwaarde H voldoet.

Wanneer wij de voorgaande stellingen willen toepassen, moeten wij de extremaalpunten van $S(L^*)$ kennen. Nu worden deze bepaald voor het geval van approximatie in $C[a,b]$.

2.13. Stelling. Een functionaal l^* uit $S(C[a,b]^*)$ is een extremaalpunt van $S(C[a,b]^*)$ d.e.s.d., als er een $c \in [a,b]$ bestaat zo, dat

$$\langle l^*,f\rangle = f(c), \qquad f \in C[a,b] . \tag{2.9}$$

Bewijs. Wij hebben nodig dat de duale ruimte van $C[a,b]$ gelijk is aan $M[a,b]$, de lineaire ruimte van de eindige reguliere borelmaten op $[a,b]$. $M[a,b]$ wordt genormeerd door

$$||\mu|| = \int d|\mu| , \qquad \mu \in M[a,b].$$

Hierbij is $|\mu|$ de totale variatie van μ (zie voor dit alles Dunford en Schwartz [3] pag. 97, 265).

Stel dat μ een extremaalpunt van $S(M[a,b])$ is en dat er geen punt $c \in [a,b]$ is zo, dat de maat μ slechts massa in c heeft, d.w.z. $|\mu|(\{c\}) = 1$. Dan is $[a,b]$ in twee intervallen $[a,\alpha]$ en $(\alpha,b]$ te verdelen zo, dat $|\mu|([a,\alpha]) = \lambda_1 > 0$ en $|\mu|((\alpha,b]) = \lambda_2 > 0$.
Wij kunnen aannemen dat $||\mu|| = 1$, aangezien anders μ in geen geval extremaalpunt van $S(M[a,b])$ is.

Definieer nu voor een borelverzameling B:

$$\mu_1(B) = \frac{1}{\lambda_1}\,\mu(B \cap [a,\alpha]) \quad ,$$

$$\mu_2(B) = \frac{1}{\lambda_2}\,\mu(B \cap (\alpha,b]).$$

Dan is $||\mu_1|| = ||\mu_2|| = 1$, $\mu_1 \neq \mu_2$ en $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$,

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2 = \mu;$$

dus is μ geen extremaalpunt van $S(M[a,b])$.
Wanneer de massa van μ tot c beperkt is, dan is μ van de vorm $\lambda\delta_c$, $|\lambda| \leq 1$, δ_c de dirac delta functie; waarbij δ_c gedefinieerd is door

$$\langle\delta_c,f\rangle = f(c).$$

Voor $\lambda = \pm 1$ is $\lambda\delta_c$ extremaalpunt van $S(M[a,b])$, zoals men eenvoudig inziet. Hiermee is het bewijs voltooid.

Wanneer l en l_0 beide tot $C[a,b]$ behoren, dan is $\pm\,\delta_c$ d.e.s.d. een extremaalpunt van $\sum_{l-l_0}$, als $l(c) - l_0(c) = \pm\,||l-l_0||$.
Wanneer wij dit gebruiken om stelling 2.8. en 2.10. toe te passen in het geval $C[a,b]$ vinden wij:

<u>2.8.' Stelling</u>. Zij $L = C[a,b]$ en L_n een n-dimensionale deelruimte van L. Dan is voor $l \in L$ het element l_0 een b.b.(L_n,l) d.e.s.d., als

$$\forall\, l_n \in L_n,\quad 0 \in \operatorname{conv}\{\operatorname{sign}((l-l_0)(c))\; l_n(c) \,|\, \delta_c\ \operatorname{sign}((l-l_0)(c)\in \textstyle\sum_{l-l_0}\}.$$

Dit is het klassieke criterium van Kolmogorov (zie Lorentz [7], pag. 18,20).

<u>2.10'. Stelling</u>. Zij $L = C[a,b]$ en L_n een n-dimensionale deelruimte van L. Dan is l_0 een b.b.(L_n,l) d.e.s.d., als er $m \leq n+1$ punten $c_1,\ldots,c_m \in [a,b]$ en getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ bestaan zo, dat

$$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_m| = 1 \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_n(c_i) = 0, \qquad \forall l_n \in L_n,$$

en

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (l-l_0)(c_i) = ||l-l_0||.$$

Deze stelling is een generalisatie van de klassieke stelling van Chebyshev.

<u>2.12'. Stelling</u>. Zij $L = C[a,b]$ en L_n een n-dimensionale deelruimte van L, die aan voorwaarde H voldoet; dat betekent in dit geval, dat voor een basis $l_1,\ldots,l_n$ van L_n en voor alle n-tallen punten $c_1,\ldots,c_n$, $c_i \neq c_j$, $c_i \in [a,b]$, $\det(l_i(c_j))$ ongelijk nul is. Dan is l_0 een b.b.(L_n,l) d.e.s.d., als er n+1 punten $p_1,\ldots,p_{n+1} \in [a,b]$ en een $\varepsilon = \pm 1$ bestaan zo, dat

$$(2.10) \qquad (l-l_0)(p_i) = \mathrm{sign}(\lambda_i) \; ||l-l_0|| ;$$

hierbij is $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, de eenduidig bepaalde oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$(2.11) \qquad \lambda_1 l_i(p_1) + \ldots + \lambda_n l_i(p_n) = -\lambda_{n+1} l_i(p_{n+1}), \; i = 1,\ldots,n \; ,$$

$$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_{n+1}| = 1, \quad \mathrm{sign}(\lambda_1) = \varepsilon.$$

Bewijs. Voorwaarde (2.11) is equivalent met

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \delta_{p_i} \in L_n^{\perp}.$$

Wegens voorwaarde H heeft het stelsel (2.11) een eenduidig bepaalde oplossing $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})$. Voorwaarde (2.10) is dan equivalent met

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \; \delta_{p_i} \in \sum_{l-l_0}.$$

Hiermee is het bewijs tot stelling 2.12 teruggebracht.

Het klassieke voorbeeld van een n-dimensionale deelruimte van C[a,b], die aan conditie H voldoet, is de ruimte P_{n-1} van de polynomen van de graad $\leq$ n-1. Dat deze aan de voorwaarde H voldoet, volgt uit de hoofdstelling van de algebra. In dit geval is de $\sum \lambda_i \delta_{p_i}$ uit stelling 2.12' gelijk aan de gedeelde differentie operator van de orde n met betrekking tot de punten $p_1,\ldots,p_{n+1}$.

Het resultaat van onze inspanningen is nu, dat we een aantal karakteriseringsstellingen (stelling 2.4., 2.8., 2.10. en 2.12.) voor een beste benadering in een willekeurige genormeerde lineaire ruimte hebben. Het belang hiervan wordt misschien wel goed geïllustreerd door het voorbeeld van approximatie in $L = C^1[a,b]$ genormeerd door

$$||f|| = ||f||_\infty + ||\tfrac{d}{dx}f||_\infty .$$

De extremaalpunten van $S(L^*)$ zijn in dit geval betrekkelijk eenvoudig te bepalen; ze zijn van de vorm (Laurent [6])

$$f \longmapsto \varepsilon\, f(c) + \frac{\varepsilon' df(d)}{dx} \quad \varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1 \ ,\ c,d \in [a,b].$$

Wanneer men dit met stelling 2.10. (eventueel 2.12.) combineert vindt men een karakteriseringsstelling, die men anders niet eenvoudig gevonden zou hebben.

Een groot deel van hun waarde ontlenen zulke karakteriseringsstellingen aan het feit, dat men er soms beste benaderingen mee kan bepalen. Het liefst zou men een expliciete (analytische) constructie voor het bepalen van beste benaderingen aangeven, maar meestal slaagt men daar hoogstens in voor een aantal uitzonderlijke elementen van L.

Meer succes is te verwachten, wanneer men uit een karakteriseringsstelling een algoritme voor de bepaling van beste benaderingen tracht af te leiden. Zo is stelling 2.12. de grondslag voor een generalisatie van de Remes-algoritme (Laurent [6]).

Het idee van deze algoritme is, dat, wanneer men de extremaalpunten e_i^* , $i = 1,\dots,n+1$ uit stelling 2.12. zou kennen, men de b.b.(L_n,l) zou kunnen bepalen door:

a) Uit het stelsel vergelijkingen

$$(2.12) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; \langle e_i^*, l_j\rangle = -\lambda_{n+1}\langle e_{n+1}^*, l_j\rangle \; , \quad j=1,\dots,n \; ,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \; ([l_1,\dots,l_n] = L_n) \; ,$$

bepaalt men de eenduidig bepaalde $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ zodat

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1}^* \in L_n^{\perp}.$$

b) Men schrijft l_0 als de combinatie $l_0 = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j l_j$ en bepaalt de μ_j, $j=1,\dots,n$ en d uit het stelsel vergelijkingen

$$(2.13) \qquad \langle e_i^*, l\rangle - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \; \langle e_i^*, l_j\rangle = d, \quad i = 1,\dots,n+1 \; .$$

De algoritme bestaat uit een iteratief proces, dat als volgt in zijn werk gaat:

Men kiest als startwaarde een (n+1)-tal extremaalpunten van $S(L^*)$ en bij elke stap van het iteratie-proces worden de vergelijkingen (2.12) en (2.13) opgelost en vervolgens wordt één van de e_i^* vervangen door een andere.
Het iteratie-proces convergeert lineair.
Wij willen nu enige aandacht besteden aan toepassingen van de karakteriseringsstellingen 2.5., 2.8., 2.10. en 2.12. in een aantal min of meer speciale gevallen.
Eerst zal nagegaan worden wat stelling 2.4. betekent in het geval, dat L een Hilbertruimte is. Voor het inproduct van de Hilbertruimte noteren wij (l,m). Zoals bekend is, gelden voor dit inproduct de volgende eigenschappen:

(2.14) a) $(l,l) > 0, \forall l \in L,\ l \neq 0$ en $(l,l) = 0$, voor $l = 0$.

b) (l,m) is lineair in l en m.

c) $(l,m) = (m,l)$.

Voor een n-dimensionale deelruimte L_n van L kan m.b.v. het Gram-Schmidt orthogonaliseringsproces een basis $l_1,\dots,l_n$ geconstrueerd worden, waarvoor geldt:

$$(l_i,l_j) = \delta_{ij}.$$

We noemen dit een orthonormale basis van L_n. Een verdere belangrijke eigenschap van de Hilbertruimte L is, dat, wanneer men L als genormeerde lineaire ruimte met norm $||l|| = (l,l)^{\frac{1}{2}}$ opvat, de duale ruimte L^* van L isometrisch isomorf is met L.
Dat wil zeggen, dat bij elk continu lineair functionaal m^* op L er een $m \in L$ is zo, dat

$$\langle m^*,l\rangle = (m,l), \forall l \in L.$$

In dit speciale geval, dat L een Hilbertruimte is, volgt uit stelling 2.4. een constructie voor de b.b.(l_n,l) voor een willekeurig element $l \in L$.
Weliswaar is dit ook langs meer elementaire weg (en ook eenvoudiger) af te leiden, maar deze toepassing moet gezien worden als illustratie.

2.14. Stelling. Zij L een Hilbertruimte en L_n een n-dimensionale deelruimte met orthonormale basis $l_1,\dots,l_n$. Dan is $l_0 \in L_n$ een b.b. (L_n,l) d.e.s.d. als

$$l_0 = \sum_{i=1}^{n} (l_i,l)\, l_i .$$

Bewijs. Wij zullen eerst voor $l' \in L$ de verzameling $\sum_{l'}$ bepalen. Aangezien L^* isometrisch isomorf is met L, kunnen wij $\sum_{l'}$ als deelverzameling van S(L) opvatten. Wanneer $m \in \sum_{l'}$ is, dan tonen wij aan, dat $m = \frac{l'}{||l'||}$.
Er geldt n.l.

$$(m - \frac{l'}{||l'||}, m - \frac{l'}{||l'||}) = (m,m) - \frac{2}{||l'||}(l',m) + \frac{(l',l')}{||l'||^2}$$

$$\leq 1 - 2 + 1 = 0,$$

aangezien $(m,m) = ||m||^2 \leq 1$, $(l',m) = ||l'||$, want $m \in \sum_{l'}$ en $(l',l') = ||l'||^2$. Wegens (2.14.a)) is $m = l'/||l'||$. En wanneer $m = l'/||l'||$ dan is $m \in \sum_{l'}$, omdat $(m,l') = (l',l')/||l'|| = ||l'||$.
Dus

$$(2.15) \qquad \sum_{l'} = \{ \frac{l'}{||l'||} \}.$$

Volgens stelling 2.4. en bovenstaande uitspraak is $l_0 \in L_n$ een b.b. (L_n,l) d.e.s.d. als

$$\frac{l-l_0}{||l-l_0||} \in L_n^{\perp} .$$

Wanneer wij schrijven $l_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i$, dan is $l-l_0 \in L_n^{\perp}$ equivalent met

$$0 = (l-l_0,l_i) = (l,l_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_j (l_j,l_i) = (l,l_i) - \lambda_i,\ i = 1,\dots,n;$$

dus $\lambda_i = (l,l_i)$ en $l_0 = \sum_{i=1}^{n} (l_i,l)l_i$, hetgeen te bewijzen was.

Wij tonen nu aan, dat elk punt $l \in L$ met $||l|| = 1$ een extremaalpunt van S(L) is. De veronderstelling, dat er $m_1, m_2 \in S(L)$ en $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$

zijn zo, dat $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = 1$, levert de uitdrukking

$$(2.16) \qquad 1 = ||1||^2 = (\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2)$$
$$= \lambda_1^2 \, ||m_1||^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \, (m_1, m_2) + \lambda_2^2 \, ||m_2||^2$$

op. De uitdrukking (2.16) is d.e.s.d. 1 als $||m_1|| = ||m_2|| = 1$ en $(m_1, m_2) = 1$, maar dit betekent $m_1 \in \sum_{m_2}$. Dus is wegens (2.15) $m_1 = m_2 = 1$. Dus is 1 extremaalpunt van $S(L)$.
Aangezien wij nu weten dat $(1-1_0)/_{||1-1_0||}$ uit stelling 2.14. een extremaalpunt is van $S(L)$ zo, dat $(1-1_0)/_{||1-1_0||} \in L_n^{\perp} \cap \sum_{1_0-1_0}$, kunnen de stellingen 2.8 en 2.10 geen verdere verfijning van het resultaat van stelling 2.14. geven.

Nu zullen we bezien, wat stelling 2.4. in het geval, dat L de ruimte $L^p[a,b], 1 < p < \infty$, is, betekent. Hiervoor hebben wij allereerst het resultaat nodig, dat de duale ruimte van $L^p[a,b]$ isometrisch isomorf is met $L^q[a,b]$, met $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Voor $g \in L^q[a,b]$ en $f \in L^p[a,b]$ is

$$\langle g,f \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

en voor $g \in L^q$ is de norm van g als element van de duale ruimte

$$||g|| = \int_a^b |g(x)|^q dx = ||g||_q.$$

(Zie hier voor Dunford en Schwartz [3] pag.286).
Ook in dit geval kunnen wij bij $1 \in L = L^p[a,b]$ eenvoudig de verzameling $\sum_1$ bepalen.
Voor $f \in L^p$ en $g \in L^q$ geldt:

$$\langle g,f \rangle = \int_a^b g(x) \, f(x)dx \leq ||g||_q \, ||f||_p$$

en er geldt $\quad \langle g,f \rangle = ||g||_q \, ||f||_p$ d.e.s.d., als

$$|g|^q = |f|^p \qquad \text{b.o.}$$

en

$$\text{sign } g = \text{sign } f \qquad \text{b.o.}$$

Dit is de ongelijkheid van Hölder (Dunford en Schwartz [3] pag. 119).
Hieruit leiden wij onmiddellijk af, dat

$$\sum_l = \{ \frac{|l|^{p/q} \text{ sign } l}{||l||_p} \} \quad .$$

Stelling 2.4. krijgt nu de vorm:

2.15. Stelling. Zij $L = L^p [a,b]$ en L_n een n-dimensionale deelruimte van L, dan is $l_0 \in L_n$ een b.b. (L_n,l) d.e.s.d. als

$$|l-l_0|^{p-1} \text{ sign}(l-l_0) \in L_n^{\perp}.$$

Bewijs. Het bewijs is een direct gevolg van het feit, dat $l-l_0$ een b.b. (L_n,l) is d.e.s.d. als er een $l^* \in \sum_{l-l_0} \cap L_n^{\perp}$ is en dat

$$\sum_{l-l_0} = \{ \frac{|l-l_0|^{p/q}}{||l-l_0||_p} \text{ sign } (l-l_0) \} \ .$$

In dit geval is het echter niet meer mogelijk een constructie aan te geven, die voor alle $l \in L$ een b.b. (L_n,l) oplevert.

Nu geldt, evenals in het geval, dat L een Hilbertruimte is, dat elke $l^* \in L^q$, waarvoor $||l^*||_q = 1$, een extremaalpunt van $S(L^q)$ is, omdat in de ongelijkheid van Minkowski

$$f^*, g^* \in L^q, \ ||f^*+g^*||_q \leq ||f^*||_q+||g^*||_q,$$

d.e.s.d. gelijkheid geldt, als $f^* = \lambda g^*$, $\lambda > 0$ (Dunford en Schwartz [3] pag. 120).
Precies als in het geval, dat L een Hilbertruimte is, kan men dan ook in dit geval stelling 2.1.5. niet verfijnen door stellingen 2.8 en 2.10 toe te passen.

Wij gaan nu voor enige functies de beste benadering in L^1 zin uitrekenen om hiermee een directe stelling, vergelijk met de stelling van Jackson 1.8., te bewijzen voor approximatie in $C_{2\pi}$ met functies uit T_n, de 2n+1 dimensionale deelruimte van $C_{2\pi}$, bestaande uit de trigonometrische polynomen van de graad $\leq n$.
Hiervoor hebben wij eerst enige definities en lemma's nodig.

2.16. Definitie en eigenschappen van de integrerende kern I_p.

a) De functie I_p wordt op $[-\pi,\pi]$ gedefinieerd door

$$I_p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(ik)^p} e^{ikx} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \left(e^{ikx} e^{-ip\frac{\pi}{2}} + e^{-ikx} e^{ip\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx-p\frac{\pi}{2})}{k^p}, \quad p = 1,2,\ldots .$$

$$I_0(x) = -\frac{1}{2\pi} .$$

Wij zien dat voor p = 2,3,... de Fourierreeks van I_p uniform convergeert. Voor I_1 convergeert de reeks puntsgewijs met uniform begrensde partiële sommen en uniform op het interval $\epsilon < x < \pi-\epsilon$. In dit geval is

$$I_1(x) = \frac{\pi-x}{2\pi} , \text{ (Zygmund [12], pag. 5, 183).}$$

Differentiatie van de reeks voor I_p levert $I'_p = I_{p-1}$; dus is I_p, $p > 1$, continue differentieerbaar en $I'_p = I_{p-1}$, behalve eventueel I_2 voor $x = 0$.

Voor het volgende merken wij op, dat voor de n-de Fouriercoëfficient de notatie

$$f^\wedge(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$$

gebruikt wordt.

Wij gebruiken de convolutie van twee functies uit $L^1_{2\pi}$. Deze is gedefinieerd door:

$$f*g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Er geldt:

a) $f*g \in L^1$.

b) $(f*g)^\wedge(n) = f^\wedge(n)\, g^\wedge(n)$.

De naam integrerende kern wordt gerechtvaardigd door de volgende eigenschap:
b) Bewering: Voor $f \in C^p_{2\pi}$ met $f^\wedge(0) = 0$ geldt

$$f(x) = I_p * f^{(p)}(x), \quad p = 1,2,\dots .$$

Het bewijs hiervan bestaat uit het vergelijken van de Fouriercoëfficienten van f en $I_p * f^{(p)}$.

c) Uit de definitie van I_p volgt dat I_p voor even p een even functie is en voor oneven p een oneven functie.
De volgende notatie zal worden gebruikt:
Een nulpunt x_0 van de functie f heeft multipliciteit 1 wanneer f in x_0 van teken wisselt; anders heeft het nulpunt de multipliciteit 2.

d) Wij zeggen dat een even functie F de eigenschap N heeft wanneer voor willekeurige $a_0,\dots,a_n \in R$

$$I_p - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx\ , \quad 0 < x < \pi,$$

ten hoogste n+1 nulpunten, met multipliciteit meegeteld, heeft. Voor het geval dat F een oneven functie is, zeggen wij, dat F de eigenschap N heeft, wanneer

$$I_p - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\ , \quad 0 < x < \pi,$$

voor willekeurige $a_1,\dots,a_n \in R$ ten hoogste n nulpunten, met multipliciteit meegeteld, heeft.

Bewering: De functie I_p heeft de eigenschap N voor $p = 1,2,\dots$.
Wij bewijzen deze bewering door:
α) Eerst aan te tonen dat I_1 eigenschap N bezit.
Het is bekend (Polya en Szegö [9], pag. 77, opgave 14), dat $t_n \in T_n$ op $R_{2\pi}$ ten hoogste 2n nulpunten heeft, multipliciteit meegeteld. Stel nu dat

$I_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ tenminste n+1 nulpunten, multipliciteit meegeteld, heeft

op $(0,\pi)$. Dan heeft volgens de stelling van Rolle

$$\left(I_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)' = \left(\frac{\pi-x}{2\pi} - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)'$$

$$= -\frac{1}{2\pi} - \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \cos kx$$

in $(0,\pi)$ tenminste n+1 nulpunten, aangezien $I_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ in π ook

nul is. Dit is een tegenspraak met het al eerder genoemde feit, dat een trigonometrisch polynoom van de graad n ten hoogste 2n nulpunten heeft,

aangezien $I_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ oneven is, en dus op $(-\pi,0)$ ook n+1 nulpunten heeft.

β) Vervolgens te bewijzen, dat uit het feit dat I_p eigenschap N niet heeft, volgt, dat I_{p-1} eigenschap N niet heeft.

Veronderstel, dat p even is en dat I_p niet aan eigenschap N voldoet. Dan

is er een $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ zo, dat $I_p - t_n$ n+2 nulpunten heeft op $(0,\pi)$,

zoals altijd met multipliciteit meegeteld. Uit de stelling van Rolle volgt

dan dat $(I_p - t_n)' = I_{p-1} + \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \sin kx$ op $(0,\pi)$ tenminste n+1 nulpunten

heeft, zodat I_{p-1} de eigenschap N ook niet heeft.
Voor p is oneven wordt dit precies zo bewezen, gebruik makend van het feit,

dat zowel I_p als $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ 0 en π de nulpunt hebben.

Uit α) en β) volgt met inductie dat I_p voor $p = 1,2,\ldots$ de eigenschap N heeft.

Nu zijn wij in staat om in $L^1[-\pi,\pi]$ voor de functies I_p een b.b.(T_n, I_p) te berekenen volgens de in 2.5 aangeduide methode.
Hiervoor hebben wij een signum functie in T_n, zoals daar beschreven, nodig.

__2.17. Lemma__. Zij $\phi(x) \in L^1_{2\pi}$ een $\frac{2\pi}{n+1}$ - periodieke functie zo, dat $\phi(x+\frac{\pi}{n+1}) = -\phi(x)$. Dan geldt $\phi \in T_n^\perp$, d.w.z.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, t_n(x)dx = 0 \qquad \forall_{t_n} \in T_n .$$

__Bewijs__. Voldoende hiervoor is aan te tonen dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, e^{ikx}\, dx = 0, \qquad k = -n,\ldots,n.$$

Nu is

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, e^{ikx}\, dx = \int_{-\pi+\frac{\pi}{n+1}}^{\pi+\frac{\pi}{n+1}} \phi(x)e^{ikx}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+\tfrac{\pi}{n+1})\, e^{ik(x+\frac{\pi}{n+1})}\, dx$$

$$= -e^{\frac{ik\pi}{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, e^{ikx}\, dx .$$

Omdat $e^{i\frac{k\pi}{n+1}} \neq -1$ voor $|k| = 0,1,\ldots,n$ is $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, e^{ikx}dx = 0$, $|k| = 0,1,\ldots,n$.

Met behulp van dit lemma 2.17. kunnen wij functies uit $T_n^{\perp}$ vinden, zoals wij nodig hebben bij de constructie uit 2.5 pag. 23. Voorbeelden zijn $\operatorname{sign}(\cos(n+1)x)$ en $\operatorname{sign}(\sin(n+1)x)$.

2.18. Lemma. Voor even p is het trigonometrische polynoom $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cos kx$, dat $I_p(x)$ interpoleert in de punten $x_i = \frac{(i-\frac{1}{2})\pi}{n+1}$, $i = 1,\ldots,n+1$, waar $\operatorname{sign}(\cos(n+1)x)$ van teken wisselt op $(0,\pi)$, een b.b.(T_n,I_p) in $L^1[-\pi,\pi]$.
Bovendien geldt

$$E(T_n,I_p) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(\cos(n+1)x)\ I_p(x)dx = \frac{K_p}{(n+1)^p} \quad ;$$

hierbij is $K_p = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{p+1}}$.

Bewijs. Dat het interpolatie polynoom bestaat, volgt uit het feit, dat het stelsel vergelijkingen voor $(a_0,\ldots,a_n)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx_i) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n+1$$

slechts de nuloplossing heeft (Polya en Szegö [11], pag. 77, opgave 14).

Aangezien I_p-t_n n+1 nulpunten heeft op $(0,\pi)$, n.l. de punten x_i, $i = 1,\ldots,n+1$, waar $\operatorname{sign}(\cos(n+1)x)$ van teken wisselt, en I_p-t_n op $(0,\pi)$ ten hoogste n+1 nulpunten heeft, met multipliciteit meegeteld (2.16.d), wisselt I_p-t_n precies in de punten x_i van teken. Hieruit volgt, dat $\operatorname{sign}(\cos(n+1)x)$ en $\operatorname{sign}(I_p-t_n)$ precies in dezelfde punten $\pm x_i$, $i = 1,\ldots,n+1$ op $(-\pi,\pi)$ van teken wisselen; dus

$$\operatorname{sign}(\cos(n+1)x) = \varepsilon \operatorname{sign}((I_p-t_n)(x)) \ , \quad x \in (-\pi,\pi),\ \varepsilon = \pm 1 \ .$$

Maar dan is t_n een b.b.(T_n,I_p) in $L^1[-\pi,\pi]$ volgens stelling 2.4, want $\operatorname{sign}(I_p-t_n) \in T_n^{\perp} \cap \Sigma_{I_p-t_n}$.

Volgens stelling 2.5. is dan

$$E(T_n,I_p) = \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(\cos(n+1)x)\ I_p(x)\ dx.$$

Om deze integraal uit te rekenen, wordt nu eerst de Fourierreeks van sign(cos(n+1)x) bepaald.

De functie sign(x), $-\pi \le x \le \pi$, heeft als Fourierreeks

$$\text{(2.17)} \qquad \operatorname{sign}(\sin x) = \operatorname{sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} \ .$$

Hieruit vinden wij de Fourierreeks van sign(cos(n+1)x) door in (2.17) voor x te substitueren $(n+1)x + \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{sign}(\cos(n+1)x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)((n+1)x+\frac{\pi}{2}))}{2m+1}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{e^{i(2m+1)(n+1)x} + e^{-i(2m+1)(n+1)x}}{2m+1} \ .$$

Nu volgt uit Parseval's formule:

$$E(T_n,I_p) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(\cos(n+1)x)\ I_p(x)\ dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{i(2m+1)(n+1)x} + e^{-i(2m+1)(n+1)x}\right)}{2m+1} \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(ik)^p}\right) dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\frac{1}{(2k+1)(n+1)}\right)^p$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{p+1}} \ .$$

Hiermee is het bewijs voltooid.

Een analoog resultaat geldt voor p oneven.

<u>2.19. Lemma</u>. Voor oneven p is het trigonometrische polynoom $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$, dat $I_p(x)$ interpoleert in de punten $x_i = \frac{i\pi}{n+1}$, $i = 1,\dots,n$, waar $\mathrm{sign}(\sin(n+1)x)$ van teken wisselt op $(0,\pi)$, een b.b.(T_n,I_p). Bovendien geldt

$$E(T_n,I_p) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sign}(\sin(n+1)x)\; I_p(x)dx = \frac{K_p}{(n+1)^p} \quad ;$$

Hierbij is $K_p = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{p+1}}$.

<u>Bewijs</u>. Het bewijs is volstrekt analoog aan dat van lemma 2.18.

Na deze voorbereidingen kunnen wij de directe stelling bewijzen.

<u>2.20. Stelling</u>. Zij $f \in C^p_{2\pi}$. Dan geldt

$$E(T_n,f) \le K_p \;\frac{||f^{(p)}||_\infty}{(n+1)^p} \quad ;$$

hierbij is K_p de constante, die in 2.18. respectievelijk 2.19. ingevoerd is en K_p is de laagst mogelijke constante.

<u>Bewijs</u>. Wij behoeven de stelling slechts te bewijzen voor functies, die voldoen aan $f^\wedge(0) = 0$.
Zij $B(n,p)$ de geconstrueerde b.b.(T_n,I_p).
Dan beweren wij dat:
a) $f^{(p)}*B(n,p) \in T_n$. Dit is eenvoudig in te zien daar

$$(f^{(p)}*B(n,p))^\wedge(k) = f^{(p)\wedge}(k) \;.\; B(n,p)^\wedge(k) \quad ,$$

en

$$B(n,p)^\wedge(k) = 0 \qquad \text{voor } |k| > n.$$

b) $$||f-f^{(p)}*B(n,p)||_\infty = ||I_p*f^{(p)} - B(n,p)*f^{(p)}||_\infty =$$

$$||(I_p-B(n,p))*f^{(p)}||_\infty \le ||I_p-B(n,p)||_1\; ||f^{(p)}||_\infty \le \frac{K_p}{(n+1)^p}\; ||f^{(p)}||_\infty \;.$$

Hiermee is dus aangetoond, dat geldt

$$E(T_n,f) \leq \frac{Kp}{(n+1)^p} \quad ||f^{(p)}||_\infty .$$

Om nu aan te tonen dat Kp de best mogelijke constante is voor even p, bezien wij de functie $f_p = I_p * \text{sign}(\cos(n+1)x)$, alhoewel deze geen element is van $C^p_{2\pi}$.

Aangezien sign(cos(n+1)x) periode $\frac{2\pi}{n+1}$ heeft en de eigenschap, dat $\text{sign}(\cos((n+1)(x+\frac{\pi}{n+1}))) = -\text{sign}(\cos(n+1)x)$, heeft f_p deze eigenschap ook. Een gevolg hiervan is dat f_p in 2n+2 equidistante punten $y_i = x_0 + \frac{i\pi}{n+1}$, $i = 1,\ldots,2n+2$ alternerend de waarde + $||f_p||_\infty$ en $-||f_p||_\infty$ aanneemt.

Het functionaal $l^* = \frac{\varepsilon}{(2n+2)} \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^i \, \delta_{y_i}$, $\varepsilon = \pm 1$ is element van $T_n^\perp$, aangezien

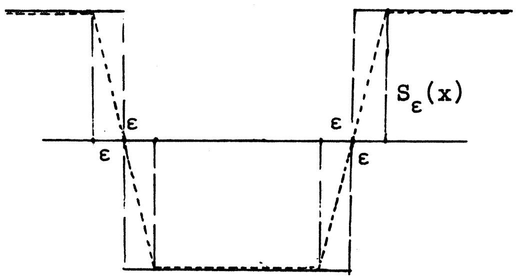
$$<l^*, e^{ikx}> = 0 \qquad \text{voor,} \ |k| \leq n.$$

Bij geschikte keuze van ε is $l^* \in T_n \cap \Sigma_{f_p}$; dus is 0 een b.b.(T_n,f_p) in $C_{2\pi}$ (stelling 2.4.).

Nu geldt dus

$$\begin{aligned} E(T_n,f_p) &= ||f_p||_\infty \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(\cos(n+1)x) \quad I_p(x)dx \\ &= \frac{Kp}{(n+1)^p} \quad . \end{aligned}$$

Wij kunnen nu sign(cos(n+1)x) in $L^1[-\pi,\pi]$ benaderen met functies $S_\varepsilon(x)$, zie fig. 2.3.



Figuur 2.3.

Voor $I_p * S_\varepsilon$ geldt:

(2.18) a) $I_p * S_\varepsilon \in C^p_{2\pi}$.

b) Evenals voor I_p * sign(cos(n+1)x) is

$$E(T_n, I_p * S_\varepsilon) = ||I_p * S_\varepsilon||_\infty \geq I_p * S_\varepsilon(0) .$$

c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_p * S_\varepsilon(0) = \dfrac{Kp}{(n+1)^{p+1}}$.

Uit (2.18) volgt nu dat K_p de best mogelijke constante is voor even p. Voor oneven p wordt dit op analoge manier aangetoond. Hiermee is het bewijs van stelling 2.20 voltooid.

Als toepassing van stelling 2.10' kan een stelling voor beste benadering met eerstegraads splines geformuleerd worden. Wij kiezen nu voor L_n de n-dimensionale deelruimte van C[0,1] bestaande uit de splines van de graad 1 met knooppunten $x_1,\ldots,x_{n-2}$, $(0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-2}<x_{n-1}=1)$. Wij geven nu in C[0,1] voor een functie f een karakterisering voor een b.b.(L_n,f).

2.21 Stelling. Voor $f \in C[0,1]$ is S_0 d.e.s.d. een b.b.(L_n,f), als er een interval $[x_i,x_{i+k}]$, $k \geq 1$, $i+k < n$, bestaat, waarin $k+2$ punten $c_1 < c_2 < \ldots < c_{k+2}$ liggen zo, dat

$$(f-S_0)(c_j) = \varepsilon(-1)^j \, ||f-S_0||_\infty, \; j = 1,\ldots,k+2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

De stellingen over approximatie in genormeerde ruimten komen voor bij Singer [11], Garkavi [5], Laurent [6] en Ault e.a. [1].
Voor stelling 2.5 zie Lorentz [7], pag. 112; voor stelling 2.8', 2.10' en 2.12' verwijzen wij naar Cheney [2], pag. 72 e.v.. De stelling 2.20 is het eerste bewezen door Favard. Het boek van Lorentz [7] is hiervoor een goede referentie. Stelling 2.21 is te vinden in Rice [10] pag. 152.

[1] Ault, D.A. Deutsch, F.R. Morris, P.D. Olson, J.E. — Interpolating subspaces in approximation theory. Journ. of Approx.Th. 3(1970), 164-182.

[2] Cheney, E.W. — Introduction to approximation theory McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[3] Dunford, N. Schwartz, J.T. — Linear operators, part I. Interscience publishers, inc, New York, 1958.

[4] Eggleston, H.G. — Convexity. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1958.

[5] Garkavi, A. — Over een criterium voor een beste benadering (Russ.) Sibirsk. Mat. Z. 5(1964), 472-476.

[6] Laurent, P.J. — Approximation dans un espace normé et algoritme de Rémès. Num. Math. 10(1967), 190-208.

[7] Lorentz, G.G. — Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[8] Minkowski, H. — Gesammelte Abhandlungen von H. Minkowski, Zweiter Band. Teubner, Leipzig, 1911.

[9] Pólya, G. Szegö, G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Dover, New York, 1945.

[10] Rice, J.R. The approximation of functions, vol. II. Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts, 1969.

[11] Singer, I. Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque. Acte. Sci. Math. Szeged 17(1956), 181-189.

[12] Zygmund, A. Trigonometric Series I. Cambridge University Press, 1968.

3. APPROXIMATIE MET SINGULIERE INTEGRALEN

3.1. In de eerste voordracht (paragraaf 1.10) is al opgemerkt, dat men niet alleen geïnteresseerd is in beste benaderingen, maar ook in goede benaderingen, die men op constructieve wijze bepalen kan.
Wij zullen in deze voordracht een aantal van deze approximatieprocessen, die voor functies gedefinieerd op R een goede benadering opleveren, bekijken. Deze approximatieprocessen hebben allemaal gemeen, dat ze bestaan uit een schaar operatoren K_λ van de volgende speciale vorm:

$$K_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, k(\lambda y)\, f(x-y)\, dy \,, \tag{3.1}$$

waarbij $k \in L^1(R)$ met $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\, dx = 1$.
Wij zullen laten zien, dat men veelal door een geschikte $k \in L^1(R)$ te kiezen een approximatieproces van de vorm K_λ uit (3.1) met de gewenste eigenschappen vinden kan. Bovendien blijken integralen van de vorm (3.1) toepassingen te hebben op rand- en beginwaarde problemen in de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen. Ook vele klassieke approximatieprocessen zijn in de vorm (3.1) te schrijven.

Wij geven nu eerst de notatie van de te gebruiken functieruimten op R.

3.2. Enige functieruimten op R.

Wij gebruiken:

a) De ruimte C(R) van continue functies, gedefinieerd op R en de deelruimte $C_c(R)$ van C(R), bestaande uit functies met compacte drager.
b) De ruimte $C^k(R)$, $k = 1,2,\dots,\infty$, bestaande uit k-maal continu differentieerbare functies, gedefinieerd op R en $C_c^k(R)$ de deelruimte van $C^k(R)$, bestaande uit functies met compacte drager.
c) De ruimte UCB, bestaande uit uniform continue en begrensde functies.
d) De ruimte $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$, bestaande uit meetbare functies op R, waarvoor $|f|^p$ Lebesgue-integreerbaar is; d.w.z. waarvoor de norm $||f||_p = (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx)^{1/p}$ eindig is.

e) De ruimte $L^{\infty}(R)$, bestaande uit de meetbare essentieel begrensde functies op R.

f) De ruimten $C_{2\pi}$, $C^k_{2\pi}$, $k = 1,2,\ldots,\infty$, $L^p_{2\pi}$ zijn de functieruimten op $R_{2\pi}$, die overeenkomen met de functieruimten $C(R)$, $C^k(R)$ respectievelijk $L^p(R)$.

In het vervolg is de convolutie een belangrijk hulpmiddel, doordat de integraal in (3.1) de convolutie is van f met de functie $k(x)$. Daarom geven wij in de volgende paragraaf enige eigenschappen van de convolutie.

3.3. Definitie en eigenschappen van convolutie.

a) Voor $f \in L^1(R)$ en $g \in L^p(R)$, $1 \leq p \leq \infty$, wordt de convolutie $f * g$ van f en g gedefinieerd door:

$$(3.2) \qquad f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = g*f(x) \; .$$

b) Er geldt $f*g \in L^p(R)$, wanneer $f \in L^1(R)$ en $g \in L^p(R)$, $1 \leq p \leq \infty$.

c) Zij $f \in L^1(R)$. Indien $g \in UCB$ dan is ook $f*g \in UCB$. Indien $g \in C^k$, met $g^k \in UCB$, $i = 0,1,\ldots,k$, dan heeft $f*g$ ook deze eigenschap.

d) Wij definiëren voor $f \in L^1(R)$:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixt}\, dx \; .$$

e) Voor f en $g \in L^1(R)$ geldt:

$$\widehat{(f*g)}(t) = \hat{f}(t)\, \hat{g}(t) \; .$$

f) Wanneer $g \in C_{2\pi}$ en $f \in L^1(R)$ dan is $f*g \in C_{2\pi}$.

Zoals gezegd is, associëren wij met een functie $k \in L^1(R)$ waarvoor $\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\, dy = 1$, de kern $K_\lambda(y) = \lambda k(\lambda y)$ en het approximatieproces

$$(K_\lambda f)(x) = (K_\lambda * f)(x) \ .$$

Voor de operator K_λ en de kern $K_\lambda(y) \in L^1(R)$ wordt dus dezelfde notatie gebruikt. Wij bewijzen nu een paar stellingen, die de naam approximatieproces voor K_λ rechtvaardigen.

3.4. Stelling. Zij $k \in L^1(R)$ en $\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\,dy = 1$. Dan geldt voor $f \in L^1(R)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} ||K_\lambda f - f||_1 = 0 \ .$$

Bewijs. Aangezien $\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\,dy = 1$, is ook $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, k(\lambda y)\,dy = 1$. Dus geldt:

$$K_\lambda f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))\, \lambda k(\lambda y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda) - f(x))\, k(y)\,dy \ .$$

En

$$||K_\lambda f - f||_1 \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y/\lambda) - f(x)|\ |k(y)|\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(y/\lambda)\ |k(y)|\,dy \ ; \qquad (3.3)$$

hierbij is $\Omega(t) = ||f(.) - f(.+t)||_1$ en dus is $|\Omega(t)| < 2||f||_1$, $-\infty < t < \infty$. Nu geldt dat $\Omega(t) \to 0$ voor $t \to 0$ voor alle $f \in L^1(R)$, aangezien dit voor functies uit $C_c(R)$ geldt, wegens de uniforme continuïteit van deze functies, en $C_c(R)$ dicht ligt in $L^1(R)$. Uit de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue en het feit, dat $\Omega(t) \to 0$ voor $t \to 0$, volgt nu dat de integraal (3.3) de limiet 0 heeft voor $\lambda \to \infty$.

3.5. Stelling. Zij $k \in L^1(R)$, met $\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\,dy = 1$, en zij f een continue en

begrensde functie op R.
Dan geldt

$$K_\lambda f(x) \to f(x)$$

uniform op elk compact interval van R. Bovendien geldt voor $f \in UCB$

$$||K_\lambda f - f||_\infty \to 0 \ .$$

<u>Bewijs</u>. Er geldt:

$$|K_\lambda f(x) - f(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} \lambda k(\lambda y) \ (f(x-y) - f(x)) \ \lambda k(\lambda y) \ dy|$$

$$= |\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda) - f(x)) \ k(y) \ dy|$$

(3.4) $$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y/\lambda) - f(x)| \ |k(y)| \ dy \ .$$

Aangezien f begrensd is en op elk compact interval $[a,b] \subset R$ uniform continu is, geldt voor de functie

$$\omega(\delta) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x+\delta) - f(x)| \ ,$$

dat $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$ en dat $\omega(\delta)$ begrensd is op R.
We kunnen dan m.b.v. (3.4) schrijven

$$\sup_{x \in [a,b]} |K_\lambda f(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega(y/\lambda) \ |k(y)| \ dy \ .$$

Door nu de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue toe te passen vinden wij

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{x \in [a,b]} |K_\lambda f(x) - f(x)| = 0 \ .$$

Dus geldt $K_\lambda f \to f$ uniform op elk compact interval.
Wanneer nu $f \in UCB$, gaat bovenstaand bewijs ook door voor het niet-compacte interval $(-\infty,\infty)$, aangezien dan de functie

$$\omega(\delta) = \sup_{x \in R} |f(x+\delta) - f(x)|$$

voldoet aan $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$ en $\omega(\delta)$ begrensd is op R.

3.6. Stelling. Zij $k \in L^1(R)$ met $\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\, dy = 1$ zo, dat

a) k een even functie is,

b) $xk(x) \to 0$ voor $|x| \to \infty$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, d|k(x)| < \infty$.

Zij σ een functie van begrensde variatie op R en zij x een punt van R, waar σ een begrensde symmetrische afgeleide

$$\sigma'(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(x+t) - \sigma(x-t)}{2t}$$

heeft. Dan geldt

$$\lim_{\lambda \to \infty} K_\lambda\, d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda k(\lambda y)\, d\sigma(x+y) = \sigma'(x) .$$

Bewijs. Er geldt

$$K_\lambda\, d\sigma(x) = \int_0^\infty \lambda k(\lambda y)\, d(\sigma(x+y) - \sigma(x-y))$$

$$= \lambda k(\lambda y)\, (\sigma(x+y) - \sigma(x-y)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (\sigma(x+y) - \sigma(x-y))\, \lambda dk(\lambda y)$$

(de stokterm is nul wegens het gegeven)

$$= - \int_0^\infty \frac{\sigma(x+y) - \sigma(x-y)}{2y}\, 2y\lambda dk(\lambda y) .$$

Volgens het gegeven van de stelling is $|y|d|k(y)|$ een begrensde maat op R en, aangezien σ van begrensde variatie is, is $|\sigma(x+y) - \sigma(x-y)|$ begrensd op R. Wij kunnen nu weer de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue toepassen:

$$K_\lambda d\sigma(x) = -2 \int_0^\infty \frac{\sigma(x+y/\lambda) - \sigma(x-y/\lambda)}{2(y/\lambda)} 2y dk(y)$$

$$= -2\sigma'(x) \int_0^\infty y dk(y)$$

$$= 2\sigma'(x) \int_0^\infty k(y)\, dy = \sigma'(x) .$$

Hetgeen te bewijzen was.

Er zijn vele toepassingen van bovenstaande convergentiestellingen. Wij noemen onder andere het feit, dat m.b.v. stelling 3.5 aangetoond kan worden door voor k een gehele functie te nemen, dat elke continue functie op een compact interval benaderd kan worden door een gehele functie, die op zijn beurt weer door de partiële sommen van zijn machtreeks benaderd kan worden, zodat wij hiermee een bewijs van de stelling van Weierstrass gevonden hebben. Ook willen wij eraan herinneren, dat in de Fourier-analyse dergelijke kernen gebruikt kunnen worden om de convergentie van de Fourier-reeks aan te tonen. Wij geven nu een elementaire toepassing van de stellingen 3.5 en 3.6 op het Dirichlet probleem voor een halfvlak in R^2.

3.7. Stelling. Zij $f \epsilon C(R)$ en begrensd respectievelijk $f \epsilon L^1(R)$. Dan is de functie

$$(3.5) \qquad u_f(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t)\, dt , \qquad y > 0 ,$$

harmonisch in $\{(x,y) \epsilon R^2 \mid y > 0\}$. Bovendien geldt

a) voor continue f, dat $\lim_{y \downarrow 0} u_f(x,y) = f(x), \ \forall x \epsilon R$,

b) voor $f \in L^1(R)$, dat $\lim\limits_{y \downarrow 0} u_f(x,y) = f(x)$, b.o.

<u>Bewijs</u>. De functie $y/(y^2+(x-t)^2)$ is harmonisch in $\{(x,y \in R^2 \mid y > 0\}$. Dus is u_f, zoals in (3.5) gedefinieerd, daar ook harmonisch. Voor u_f geldt

$$\begin{aligned}
\lim_{y \downarrow 0} u_f(x,y) &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t)\, dt \\
&= \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/y}{1 + (t/y)^2} f(x-t)\, dt \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1 + (\lambda t)^2} f(x-t)\, dt \ , \qquad \lambda = 1/y \ .
\end{aligned}$$

Voor een begrensde en continue f kunnen wij nu stelling 3.5 toepassen om aan te tonen, dat geldt

$$\lim_{y \downarrow 0} u_f(x,y) = f(x), \ \forall x \in R \ .$$

Voor $f \in L^1(R)$ hebben wij het resultaat, dat $\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ een functie van begrensde variatie is, waarvan een begrensde symmetrische afgeleide $\sigma'(x)$ b.o. bestaat en gelijk is aan $f(x)$, nodig. Met dit gegeven en stelling 3.6 vinden wij het resultaat 3.7.b).

Wij zullen ons nu gaan bezighouden met directe stellingen voor deze approximatieprocessen. Aangezien deze directe stellingen gewoonlijk de structuur hebben, dat uit gegeven "gladheid" van de functie f een bepaalde snelheid van convergentie van $K_\lambda f$ naar f volgt, zal nu eerst ingegaan worden op criteria voor de gladheid van de functie f. In de eerste plaats is het aantal malen, dat f differentieerbaar is, een maat voor de gladheid van f. Maar ook, en even belangrijk, zijn de continuïteitsmodulus en de gladheidsmoduli van verschillende orde, als middel om de gladheid van f te meten.

3.8. Definitie en eigenschappen van de gladheidsmodulus.

a) Wij definiëren de differenties Δ_t^r van de orde r door

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kt) .$$

b) Nu wordt de gladheidsmodulus $\omega_r(f,t)$ van de orde r gedefinieerd voor functies f uit UCB door

$$\omega_r(f,t) = \sup_{\substack{x\in R \\ \tau\leq t}} |\Delta_\tau^r f(x)| .$$

Aangezien de ruimte $C_{2\pi}$ als deelruimte van UCB kan opgevat worden, geldt bovenstaande definitie ook voor functies uit $C_{2\pi}$.

c) Wij zien dat voor r = 1 deze definitie overeenkomt met die uit paragraaf 1.7 voor de continuïteitsmodulus.

d) Aangezien geldt

$$(3.6) \qquad \Delta_t^r f(x) = \int_0^t \ldots \int_0^t f^{(r)} (x+\tau_1+\ldots+\tau_r)\, d\tau_1 \ldots d\tau_r ,$$

kunnen wij $\omega_r(f,t)$ afschatten door

$$(3.7) \qquad \omega_r(f,t) \leq t^r \sup_{x\in R} |f^{(r)}(x)| = t^r ||f^{(r)}||_\infty .$$

e) Aangezien

$$\Delta_{nt}^r f(x) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta_t^r f(x+k_1t+\ldots+k_rt) ,$$

kunnen wij $\omega_r(f,nt)$ afschatten door

$$(3.8) \qquad \omega_r(f,nt) \leq n^r \omega_r(f,t) .$$

Hieruit volgt de ongelijkheid

$$(3.9)\qquad \omega_r(f,\lambda t) \le (\lambda+1)^r\ \omega_r(f,t),\ (\lambda\in R,\ \lambda>0)\ .$$

Wij zullen nu eerst voor een klasse eenvoudig te hanteren kernen een directe stelling bewijzen.

<u>3.9. Stelling</u>. Zij $k\in L^1(R)$ zo, dat

$$t^j\ k(t) \in L^1(R)\ , \qquad j = 1,\dots,r,$$

$$(3.10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\ dt = 1\ , \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^j\ k(t)\ dt = 0\ , \qquad j = 1,\dots,r-1, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^r\ k(t)\ dt = B \ne 0\ . \end{cases}$$

Zij f begrensd op R en $f\in C^m(R)$, $0 \le m \le r-1$, met $f^{(m)}$ uniform continu op R. Dan geldt

$$\|K_\lambda f - f\|_\infty \le A(1/\lambda)^m\ \omega(f^{(m)},1/\lambda)\ ,$$

waarbij

$$A = \frac{1}{m!}\int_{-\infty}^{\infty} (|t|^m + |t|^{m+1})\ |k(t)|\ dt\ .$$

<u>Bewijs</u>. Het bewijs berust geheel op het goed benutten van de Taylor-formule

$$f(x+t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\ t^i + \frac{1}{(m-1)!}\int_x^{x+t} (f^{(m)}(y)-f^{(m)}(x))(x+t-y)^{m-1}\ dy.$$

Uit deze formule volgt

$$(3.11)\qquad |f(x+t) - f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, t^i| \le$$

$$\le \frac{1}{(m-1)!} \left|\int_x^{x+t} (f^{(m)}(y) - f^{(m)}(x))\,(x+t-y)^{m-1}\,dy\right|$$

$$\le \frac{1}{(m-1)!} \int_x^{x+t} \omega(f^{(m)},|x-y|)\,(x+t-y)^{m-1}\,dy$$

$$\le \frac{t^m}{m!}\,\omega(f^{(m)},t)\ .$$

Er geldt

$$|K_\lambda f(x)-f(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))\lambda k(\lambda y)\,dy\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda) - f(x))\,k(y)\,dy\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda)-f(x)-\sum_{i=1}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\,(-y/\lambda)^i)\,k(y)\,dy\right|$$

$$\le \frac{1}{m!} \int_{\infty}^{\infty} \omega(f^{(m)},|y|/\lambda)\,(|y|/\lambda)^m\,|k(y)|\,dy$$

$$\le \frac{1}{m!}\,(\frac{1}{\lambda})^m\,\omega(f^{(m)},1/\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (|y|+1)\,|y|^m\,|k(y)|\,dy\ .$$

En hieruit volgt de te bewijzen afschatting voor $||K_\lambda f - f||_\infty$.

Wij zien dat dit bewijs alleen maar doorgaat voor $m \leq r-1$. Voor $m \geq r$ vertoont deze klasse kernen een gedrag, dat leidt tot saturatie (zie 1.13).

3.10. Lemma. Zij f continu en begrensd en zij $f \in C^r(R)$. Zij k als in stelling 3.9.
Dan geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^r(K_\lambda f(x) - f(x)) = \frac{(-1)^r B}{r!} f^{(r)}(x).$$

Bewijs. Wij gebruiken weer de formule van Taylor:

$$f(x+t) = \sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} t^i + o(|t|^r) . \tag{3.12}$$

Dus is

$$\lambda^r(K_\lambda f(x)-f(x)) = \lambda^r \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda)-f(x))\, k(y)\, dy$$

$$= \lambda^r \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y/\lambda)-f(x)-\sum_{i=1}^{r-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (-y/\lambda)^i)\, k(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f(x-y/\lambda)-f(x)-\sum_{i=1}^{r-1}(f^{(i)}(x)/i!)(-y/\lambda)^i]}{(-y/\lambda)^r} (-y)^r k(y) dy.$$

De breuk onder het integraalteken is begrensd en convergeert voor $\lambda \to \infty$ puntsgewijs naar $(f^{(r)}(x)/r!)$; wij kunnen dus de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue toepassen. Wij vinden dan

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^r(K_\lambda f(x) - f(x)) = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} (-y)^r\, k(y)\, dy,$$

hetgeen te bewijzen was.

Zoals al gezegd, duidt het voorgaande lemma al aan, dat er van saturatie sprake zal zijn. Wij kunnen nu de volgende saturatiestelling bewijzen.

3.11. Stelling. Zij k als in stelling 3.9.
Dan geldt voor een begrensde en continue functie f

$$||K_\lambda f - f||_\infty = O(1/\lambda^r)$$

d.e.s.d. als $f \in C^{r-1}(R)$ en $\omega(f^{(r-1)},t) \leq c_f t$, waarbij c_f voor elke f een constante is, en

$$||K_\lambda f - f||_\infty = o(1/\lambda^r)$$

d.e.s.d. als f constant is.

Bewijs. Het bewijs steunt op Lemma 3.10 en een regulariseringsproces. Hieronder wordt verstaan een approximatieproces J_μ, dat ontstaat door convolutie met de kern $J_\mu(x) = \mu j(\mu x)$, waarbij $j \in L^1(R) \cap C^\infty(R)$. Er geldt dan voor $f \in L^\infty(R) \cap C(R)$, dat $J_\mu(f) \to f$ voor $\mu \to \infty$ uniform op elk compact deelinterval van R, zie stelling 3.5, en dat $J_\mu f \in L^\infty(R) \cap C^\infty(R)$.

Uit stelling 3.9 volgt, dat voor $f \in C^{(r-1)}(R)$ met $\omega(f^{(r-1)},t) \leq c_f t$, geldt

$$||K_\lambda f - f||_\infty = O(1/\lambda^r) .$$

Wij bewijzen nu de andere kant van de bewering.
Wanneer

$$||K_\lambda f - f||_\infty \leq D/\lambda^r ,$$

dan geldt

$$\begin{aligned} ||K_\lambda J_\mu f - J_\mu f||_\infty &= ||J_\mu * (K_\lambda f - f)||_\infty \\ &\leq ||J_\mu||_1 \, ||K_\lambda f - f||_\infty \leq \frac{D||j||_1}{\lambda^r} . \end{aligned}$$

Wegens lemma 3.10 geldt dan dat

$$||\frac{d^r}{dx^r}(J_\mu f)||_\infty \leq C \ , \quad C \text{ een constante onafhankelijk van } \mu.$$

Hieruit volgt dat $(J_\mu f)^{(m)}(x)$, $m = 1,2,\ldots,r-1$, ook uniform in μ en x begrensd is, zie Kolmogorov [4]. En aangezien geldt $\lim_{\mu\to\infty} J_\mu f(x) = f(x)$ uniform op elk compact interval, zie stelling 3.5, volgt door herhaalde toepassing van de stelling van Arzelà-Ascoli (Dunford en Schwartz [1], p.226), dat f $(r-1)$-maal continu differentieerbaar is en dat geldt $\omega(f^{(r-1)},t) \leq Ct$.

Om te bewijzen, dat

$$||K_\lambda f - f||_\infty = o(1/\lambda^r)$$

slechts als f constant is, passen wij hetzelfde procédé toe.
Uit

$$||K_\lambda f - f||_\infty = o(1/\lambda^r)$$

volgt

$$||K_\lambda J_\mu f - J_\mu f||_\infty = o(1/\lambda^r) \ .$$

Hieruit en uit Lemma 3.10 volgt, dat $\frac{d^r}{dx^r}(J_\mu f) = 0$. Dus is f uniform op elk compact interval de limiet van de rij functies $J_\mu f$, met $\frac{d^r}{dx^r} J_\mu f = 0$. Hieruit volgt, dat f een polynoom van de graad $< r$ is, aangezien f op elk compact interval uniform de limiet is van een rij polynomen. Uit de begrensdheid van f volgt dan, dat f een constante is. Dat voor constante f geldt

$$||K_\lambda f - f||_\infty = o(1/\lambda^r)$$

volgt direct uit het feit dat $K_\lambda f = f$ voor constante f.
Hiermee is het bewijs voltooid.

Voorbeelden van klassieke kernen, die aan de voorwaarden van stelling 3.11 voldoen voor $r = 2$ zijn:

a) $k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ (de Weierstrass kern),

b) $k(t) = \frac{3}{2\pi} (\frac{\sin t}{t})^4$ (de Jackson kern).

Maar wij zien, dat de kernen

a) $k(t) = \frac{1}{\pi} (\frac{\sin t}{t})^2$ (de Fejér-de la Vallée Poussin kern),

b) $k(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + t^2}$ (de Cauchy kern),

niet aan de voorwaarden (3.10) voldoen, aangezien voor beide geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} tk(t) = 0, \quad \text{maar } t^2k(t) \notin L^1(R).$$

Om voor deze kernen het saturatiegedrag te bepalen, leiden wij de volgende lemma's af.

<u>3.12. Lemma</u>. Zij $k(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + t^2}$. Zij $f \in L^{\infty}(R) \cap C(R)$ zo, dat de integraal

$$J(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t^2}\, dt \tag{3.13}$$

bestaat (als Lebesgue-integraal) voor zekere x. Dan geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(K_\lambda f(x) - f(x)) = J(f,x) .$$

<u>Bewijs</u>. Er geldt

$$\lambda(K_\lambda f(x) - f(x)) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))\, K_\lambda(y)\, dy$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} (f(x+y) - 2f(x) + f(x-y))\, K_\lambda(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(f(x+y) - 2f(x) + f(x-y))}{y^2} \frac{\lambda^2 y^2}{1 + \lambda^2 y^2}\, dy \; .$$

Aangezien $\left|\frac{\lambda^2 y^2}{1 + \lambda^2 y^2}\right| < 1$ is, kan de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue toegepast worden. Wij vinden

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(K_\lambda f(x) - f(x)) = J(f,x) \; ,$$

hetgeen te bewijzen was.

<u>3.12'. Lemma</u>. Zij $k(t) = \frac{1}{\pi} (\frac{\sin t}{t})^2$ en $f \epsilon L^\infty(R)$, zo dat de integraal $J(f,x)$ als Lebesgue-integraal bestaat voor zekere x. Dan geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(K_\lambda f(x) - f(x)) = \frac{1}{2} J(f,x) \; . \tag{3.14}$$

<u>Bewijs</u>. Evenals in lemma 3.12 vinden wij

$$\lambda(K_\lambda f(x) - f(x)) = \int_0^{\infty} (f(x+y) - 2f(x) + f(x-y))\lambda K_\lambda(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^2} \sin^2 \lambda y\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\lambda y)\right) dy.$$

Door nu het lemma van Riemann-Lebesgue toe te passen, vinden wij het gewenste resultaat (3.14).

Nu vinden wij voor de saturatie van deze kernen de stelling 3.13, die analoog is aan stelling 3.11.

3.13. Stelling. Zij $k(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$ of $k(y) = \frac{1}{\pi}(\frac{\sin y}{y})^2$. Zij f begrensd en continu op R. Dan geldt:

a) $||K_\lambda f - f||_\infty = O(1/\lambda)$ d.e.s.d. als f de uniforme limiet is van functies $f_\mu \epsilon C^\infty(R) \cap L^\infty(R)$, waarvoor uniform in μ geldt $||J(f_\mu, x)||_\infty < \infty$.

b) $||K_\lambda f - f||_\infty = o(1/\lambda)$ d.e.s.d. als f de uniforme limiet is van $f_\mu \epsilon C^\infty(R) \cap L^\infty(R)$, waarvoor geldt $J(f_\mu, x) = 0$.

Bewijs. Het is direct in te zien, dat voor $f \epsilon C^2(R) \cap L^\infty(R)$ de integraal $J(f,x)$ bestaat. Door nu op dezelfde wijze als in stelling 3.11 een regulariseringsproces toe te passen wordt het bewijs geleverd.

Wij bewijzen nu nog een directe stelling, waarin geen afgeleiden voorkomen, maar hogere orde gladheidsmoduli.

3.14. Stelling. Zij $k \epsilon L^1(R)$ met $\int_{-\infty}^{\infty} k(t) = 1$ en $t^j k(t) \epsilon L^1(R)$, $j = 1, \ldots, p$. Zij $f \epsilon UCB$. Dan geldt

$$||(\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \binom{p}{i} K_{(\lambda/i)} f) - f||_\infty \leq B\, \omega_p(f, 1/\lambda) \;;$$

B is een constante, die slechts van k en p afhangt.

Bewijs. Er geldt

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\binom{p}{i}K_{(\lambda/i)}f\right)-f\right\|_\infty = \left\|\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\binom{p}{i}K_{(\lambda/i)}(y)f(x-y)dy-f(x)\right\|_\infty$$

$$= \left\|\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\left[\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\binom{p}{i}f(x-(iy/\lambda))\right)-f(x)\right]dy\right\|_\infty$$

$$= \left\|\int_{-\infty}^{\infty} k(y)\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}\binom{p}{i}f(x-(iy/\lambda))\right)dy\right\|_\infty$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |k(y)|\ |\Delta^{p}{}_{(y/\lambda)}f|\ dy$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |k(y)|\ \omega_p(f,y/\lambda)\ dy$$

$$\leq \omega_p(f,1/\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} |k(y)|\ (1+|y|)^p\ dy$$

$$\leq B\ \omega_p(f,1/\lambda)\ .$$

Hetgeen te bewijzen was.

Als toepassingen van stelling 3.9 en 3.14, bewijzen wij nu twee vormen van de stelling van Jackson, zie stelling 1.8.

3.15. Stelling. Zij $f\epsilon C_{2\pi}^{r-1}$. Dan geldt

$$E(T_n,f) \leq B_{r-1}\ n^{-(r-1)}\ \omega(f^{(r-1)},1/n)\ ;$$

B_{r-1} is een constante, die slechts voor r-1 afhangt.

Bewijs. De stelling wordt bewezen door aan te tonen, dat er een $k\epsilon L^1(R)$ bestaat, die aan de voorwaarden (3.10) van stelling 3.9 voldoet en die voldoet aan

$$K_n\, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} n\, k(ny)\, g(x-y)\, dy \in T_n, \qquad g\in C_{2\pi} .$$

Voor $g\in C_{2\pi}$ en $k\in L^1(R)$ geldt $K_\lambda g = K_\lambda * g \in C_{2\pi}$.
Het is dus zinvol om de Fouriercoëfficiënten van $K_\lambda * g$ uit te rekenen:

$$\begin{aligned}
(K_\lambda * g)\hat{}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (K_\lambda * g)(x)\, e^{-imx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda k(\lambda y)\, g(x-y)\, dy\right) e^{-imx}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\, e^{-im(x-y)}\, dx\right) \lambda k(\lambda y)\, e^{-imy}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda k(\lambda y)\, e^{-imy}\, dy\; g\hat{}(m) \\
&= \hat{k}\left(\frac{m}{\lambda}\right) g\hat{}(m) .
\end{aligned}$$

Wanneer $\hat{k}(y) = 0$ voor $|y| > 1$, dan geldt $(K_n * g)\hat{}(m) = 0$ voor $|m| > n$ en dus is dan $K_n g\in T_n$. Wij gaan nu aantonen, dat er een $k\in L^1(R)$ is, die voldoet aan $\hat{k}(y) = 0$, $|y| > 1$ en aan de voorwaarden (3.10) van stelling 3.9. Hiertoe beschouwen wij een functie $h\in C^{r+3}(R)$, waarvoor geldt

a) $h(y) = 0 \quad , \quad |y| > 1,$

b) $h^{(j)}(0) = 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,r-1,$

c) $h(0) = 1.$

Nu definiëren wij $k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx}\, h(y)\, dy$. Door partiële integratie vinden wij $k(t) = O(|t|^{-(r+3)})$ voor $|t| \to \infty$ en daaruit volgt $t^j k(t)\in L^1(R)$, $j = 0,1,\dots,r$. De andere eigenschappen uit (3.10) volgen uit de eigen-

schappen a), b) en c) van de functie h.
Aangezien voor deze $k(x)$ geldt, dat $\hat{k}(y) = 0$, voor $|y| > 1$ en dat k aan de voorwaarden (3.10) van stelling 3.19 voldoet, is het bewijs van de stelling nu eenvoudig af te maken. Er geldt namelijk:

a) $K_n*f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} nk(ny)\, f(x-y)\, dy \in T_n$, wegens $\hat{k}(y) = 0$, $|y| > 1$,

b) $||K_n*f - f||_\infty \leq A\, n^{-r+1}\, \omega(f^{(r-1)}, 1/n)$ volgens stelling 3.9.

Op dezelfde wijze kan stelling 3.14 gebruikt worden om de volgende stelling te bewijzen.

3.15'. Stelling Zij $f \in C_{2\pi}$. Dan geldt

$$E(T_n, f) \leq B_p\, \omega_p(f, 1/n) \; ;$$

hierbij is B_p een constante, die slechts van p afhangt.

Tot dusver hebben wij enige directe stellingen voor het approximatieproces K_λ en voor beste approximatie met trigonometrische polynomen behandeld. Nu zullen wij eerst enige klassieke inverse stellingen voor beste approximatie met trigonometrische polynomen bewijzen. Daarna zullen wij in navolging van H.S. Shapiro [7] beide typen stellingen van een wat algemener gezichtspunt bezien.

Om de inverse stellingen voor beste approximatie met trigonometrische polynomen te kunnen bewijzen, hebben wij de volgende ongelijkheid nodig.

3.16. Lemma. (S.N. Bernstein). Zij $t_n \in T_n$. Dan bestaat er een constante c zo, dat

$$||t_n'||_\infty \leq cn||t_n||_\infty . \tag{3.15}$$

Bewijs. Wij zullen hiervoor gebruik maken van de Fejéroperator σ_n, die in 1.11 ingevoerd is. Daar is uiteengezet, dat σ_n de volgende eigenschappen heeft:

a) $$\sigma_n f = F_n * f, \text{ waarbij } F_n(x) = \sum_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

b) $$||\sigma_n|| = ||F_n||_1 = 1.$$

Bewering: Wanneer $G_n(t) = in(F_{n-1}(t)e^{int} - F_{n-1}(t)e^{-int})$, dan geldt

$$t_n' = G_n * t_n, \; \forall t_n \in T_n.$$

Wij bewijzen de bewering door vergelijken van de Fouriercoëfficiënten.
Er geldt

$$n\, F_{n-1}(t)e^{int} = \sum_{k=1}^{n} ke^{ikt} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k)e^{ikt}$$

en

$$-n\, F_{n-1}(t)e^{-int} = \sum_{k=-1}^{-n} ke^{ikt} + \sum_{k=-n-1}^{-2n+1} (-2n-k)e^{ikt};$$

dus

$$\begin{aligned}(G_n * t_n)\hat{}(m) = \hat{G}_n(m)\hat{t}_n(m) &= 0 \quad , |m| > n \\ &= im\, \hat{t}(m), \; |m| \leq n.\end{aligned}$$

Maar dan geldt

$$||t_n'||_\infty \leq ||G_n||_1 \; ||t_n||_\infty.$$

Wegens de driehoeksongelijkheid en bovenstaande eigenschap b) van F_n geldt:

$$\begin{aligned}||G_n(t)||_1 &\leq n(||e^{int}F_{n-1}(t)||_1 + ||e^{-int}F_{n-1}(t)||_1) \\ &\leq n(||F_{n-1}(t)||_1 + ||F_{n-1}(t)||_1) \\ &\leq 2n.\end{aligned}$$

Wij merken hierbij het volgende op:

a) De best mogelijke waarde van de constante c uit (3.15) is 1, zie Lorentz [5] pag. 39.

b) Door de ongelijkheid (3.15) herhaald toe te passen vindt men:

$$(3.16) \qquad ||t_n^{(p)}||_\infty \le c^p n^p ||t_n||_\infty, \qquad \forall t_n \in T_n.$$

Nu zijn wij in staat om enige inverse stellingen te bewijzen.

3.17. Stelling. Zij $f \in C_{2\pi}$ zo, dat $E(T_n,f) = O(n^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, geldt. Dan is $f \in Lip(\alpha)$.

Bewijs. Wij moeten dus aantonen, dat uit $E(T_n,f) = O(n^{-\alpha})$ volgt, dat $||f(x+h)-f(x)||_\infty = O(|h|^\alpha)$. Zij voor $n = 1, 2, \ldots$ s_n een b.b. (T_n,f). Dan geldt

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} ||f(x+h)-f(x)||_\infty &\le ||s_{2^n}(x+h)-s_{2^n}(x)||_\infty + 2E(T_{2^n},f) \\ &\le ||s'_{2^n}(x)||_\infty |h| + 2E(T_{2^n},f). \end{aligned}$$

Nu wordt $||s'_{2^n}||_\infty$ afgeschat met behulp van Bernsteins ongelijkheid:

$$\begin{aligned} ||s'_{2^n}||_\infty &= ||\sum_{i=1}^{n} (s_{2^i}-s_{2^{i-1}})'+s'_1||_\infty \\ &\le \sum_{i=1}^{n} c2^i \, ||s_{2^i}-s_{2^{i-1}}||_\infty + c||s_1||_\infty \\ &\le c \sum_{i=1}^{n} 2^i \, 2E(T_{2^{i-1}},f) + 2cE(T_1,f) \\ &= O(2^{n(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

De n in formule (3.17) wordt nu zo gekozen, dat $2^n \le 1/|h| \le 2^{n+1}$. Dan geldt

$$||f(x+h)-f(x)||_\infty = |h| \; O(|h|^{\alpha-1}) + O(|h|^\alpha) = O(|h|^\alpha),$$

hetgeen te bewijzen was.

Wij maken enige opmerkingen:

a) Door de stellingen 3.15' en 3.17 te combineren vinden wij de karakterisering $\mathrm{Lip}(\alpha) = \{f\in C_{2\pi} | E(T_n,f) = O(n^{-\alpha})\}$, $0<\alpha<1$.

b) Wanneer in het bewijs van stelling 3.17 $\alpha=1$ genomen wordt, vinden wij

$$||f(x+h)-f(x)||_\infty = O(|h \log|h||). \tag{3.18}$$

Aangezien (3.18) voor $f\in C_{2\pi}$ niet impliceert, dat $E(T_n,f) = O(1/n)$, hebben wij hiermee nog geen karakterisering voor $\{f\in C_{2\pi}|E(T_n,f) = O(1/n)\}$ gevonden.

c) Door (3.16) te gebruiken, kunnen wij met behulp van de bewijstechniek van stelling 3.17 de volgende stelling bewijzen.

<u>3.18. Stelling</u>. Zij $f\in C_{2\pi}$ zo, dat $E(T_n,f) = O(n^{-k-\alpha})$, $0<\alpha<1$, $k=1,2,\ldots$. Dan is $f\in C^k_{2\pi}$ en $f^{(k)}\in \mathrm{Lip}(\alpha)$.

<u>Bewijs</u>. Zij s_n een b.b. (T_n,f), $n=1,2,\ldots$. Er wordt nu eerst aangetoond, dat f een element van $C^k_{2\pi}$ is. Er geldt in $C_{2\pi}$:

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (s_{2^i}-s_{2^{i-1}}) + s_1.$$

Maar het rechterlid van bovenstaande gelijkheid is k-maal continu differentieerbaar wegens het feit, dat

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||(s_{2^i}-s_{2^{i-1}})^{(k)}||_\infty &\le \sum_{i=1}^{\infty} c^k 2^{ik} ||s_{2^i}-s_{2^{i-1}}||_\infty \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} c^k 2^{ik} 2E(T_{2^{i-1}},f) \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hieruit volgt, dat f k-maal continu differentieerbaar is. Bovendien geldt

$$f^{(k)} = s_{2n}^{(k)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} (s_{2^i}-s_{2^{i-1}})^{(k)};$$

dus kan met de methode uit (3.19) de afschatting

$$(3.20) \qquad ||f^{(k)}-s_{2n}^{(k)}||_\infty \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} ||(s_{2^i}-s_{2^{i-1}})^{(k)}||_\infty$$
$$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} c^k 2^{ik}\, 2E(T_{2^{i-1}},f) = O(2^{-n\alpha})$$

gemaakt worden.

Om nu aan te tonen, dat $f^{(k)}\epsilon\mathrm{Lip}(\alpha)$, gaan wij te werk als in de vorige stelling:

$$(3.21) \quad ||f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)||_\infty \leq ||s_{2n}^{(k)}(x+h)-s_{2n}^{(k)}(x)||_\infty + 2||f^{(k)}-s_{2n}^{(k)}||_\infty.$$

Op dezelfde manier, als in de vorige stelling volgt nu uit de ongelijkheid van Bernstein 3.16 en de resultaten (3.20) en (3.21), dat

$$||f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)||_\infty = O(|h|^\alpha),$$

hetgeen te bewijzen was.

Evenals hierboven levert een combinatie van stelling (3.15) en (3.18) de karakterisering $\{f\epsilon C_{2\pi}|f^{(k)}\epsilon\mathrm{Lip}(\alpha)\} = \{f\epsilon C_{2\pi}|E(T_n,f)=O(n^{-k-\alpha})\}$, $0<\alpha<1$, $k=0,1,\ldots$ op. Ook vinden wij nu weer voor $\alpha=1$:

$f\epsilon C_{2\pi}^{(k)}$ en $\omega(f^{(k)},h) = O(|h \log|h||)$.

Om in het geval $\alpha=1$ de klasse functies, waarvoor $E(T_n,f) = O(n^{-k-\alpha})$, te kunnen karakteriseren, hebben wij de hogere orde gladheidsmoduli nodig.

<u>3.19. Stelling</u>. (Zygmund). Zij $f\epsilon C_{2\pi}$ zo, dat $E(T_n,f) = O(n^{-r})$, $r>0$. Dan geldt $\omega_{p+1}(f,h) = O(|h|^r)$, waarbij p geheel is en $r<p+1$.

<u>Bewijs</u>. Zij voor $n=1,2,\ldots$ s_n een b.b. (T_n,f). Dan geldt

$$\omega_{p+1}(f,h) \leq \omega_{p+1}(s_{2^n},h) + 2^{p+1}||f-s_{2^n}||_\infty$$

$$\leq |h|^{p+1} \, ||s_{2^n}^{(p+1)}||_\infty + 2^{p+1} \, ||f-s_{2^n}||_\infty.$$

Wij zien, dat wij $||s_{2^n}^{(p+1)}||_\infty$ moeten afschatten:

$$||s_{2^n}^{(p+1)}||_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} ||(s_{2^i}-s_{2^{i-1}})^{(p+1)}||_\infty + ||s_1^{(p+1)}||_\infty$$

$$\leq c^{p+1} \sum_{i=1}^{n} 2^{i(p+1)} \, ||s_{2^i}-s_{2^{i-1}}||_\infty + c^{p+1}||s_1||_\infty$$

$$\leq c^{p+1} \sum_{i=1}^{n} 2^{i(p+1)} \, 2E(T_{2^{i-1}},f) + c^{p+1} \, 2E(T_1,f)$$

$$= O(2^{n(p+1-r)}).$$

Nu wordt n zo gekozen, dat geldt $2^n < 1/|h| < 2^{n+1}$. Dan volgt

$$\omega_{p+1}(f,h) = h^{p+1} \, O(h^{-(p+1)+r}) + O(h^r) = O(h^r)$$

hetgeen te bewijzen was.

Wanneer wij nu de stellingen 3.19 en 3.15' combineren, dan vinden wij de karakterisering $\{f\epsilon C_{2\pi}|\omega_{p+1}(f,h)=O(h^p)\} = \{f\epsilon C_{2\pi}|E(T_n,f)=O(n^{-p})\}$.

Wij merken op, wanneer wij de uitspraak $\omega_p(f,h) = O(h^\alpha)$ bezien, dat deze equivalent is met

$$(3.22) \qquad ||\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda) \, d\beta_p(y)||_\infty = O(1/\lambda^\alpha),$$

waarbij wij voor β_p de maat $\beta_p(x) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \delta(y-i)$ nemen. Hierbij is δ de delta-functie van Dirac. Indien σ een eindige reguliere Borelmaat is, voeren wij voor een begrensde continue functie f de notatie in

$$D_\sigma(f,\lambda) = ||\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)d\sigma(y)||_\infty.$$

Dan is het ook mogelijk de approximatie-eigenschappen van het proces K_λ in termen van $D_\sigma(f,\lambda)$ uit te drukken. Wanneer wij $\sigma(x) = -\delta(x) + k(x)$ nemen, dan is

$$||K_\lambda f-f|| \quad = O(\phi(\lambda))$$

equivalent met

$$D_\sigma(f,\lambda) \quad = O(\phi(\lambda)).$$

En wij zien, dat directe stellingen voor K_λ vaak van de vorm

$$D_\sigma(f,\lambda) = O(\phi(\lambda)) \rightarrow D_\rho(f,\lambda) = O(\psi(\lambda)) \tag{3.23}$$

zijn, waarbij $\sigma = \beta_p$, de met de gladheidsmodulus ω_p geassocieerde maat en ρ de met de kern k geassocieerde maat is.

Dit is een aanleiding om ons in het vervolg bezig te gaan houden met zogenaamde vergelijkingsstellingen voor maten op R, die als inhoud een implicatie van de vorm (3.23) hebben.

Hiertoe hebben wij eerst enige resultaten over maten op R en hun convolutiestructuur nodig.

3.20. Maten op R en hun convolutiestructuur.

a) Wij gebruiken de ruimte M(R), bestaande uit reguliere eindige Borelmaten gedefinieerd op R. De ruimte M(R) wordt genormeerd door voor $\mu \in M(R)$ te nemen

$$||\mu||_M = \text{totale variatie } (\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu(x)|.$$

In het vervolg duiden wij een reguliere eindige Borelmaat kort aan door maat. Wij zullen vaak $f \in L^1(R)$ identificeren met de maat $d\mu(x) = f(x)dx$.

b) Voor μ en $\nu \in M(R)$ wordt het convolutieproduct $\mu * \nu \in M(R)$ gedefinieerd door

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d(\mu*\nu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)d\mu(x)d\nu(y), \ \forall f\in C_c(R).$$

c) De convolutie is een commutatieve en associatieve operatie. Bovendien geldt

$$||\mu*\nu||_M \leq ||\mu||_M ||\nu||_M.$$

d) Voor $\mu\in M(R)$, wordt de Fouriergetransformeerde $\hat{\mu}(t)$ gedefinieerd door

$$\hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, d\mu(x).$$

De maat μ is eenduidig bepaald door zijn Fouriergetransformeerde; d.w.z. $\hat{\mu}(t) = 0$, $\forall t$ d.e.s.d. als $\mu = 0$.

e) Wij hebben verder nog het volgende resultaat nodig.

<u>Lemma van Wiener</u>

Laten μ_1 en μ_2 elementen van $M(R)$ zijn zo, dat er een compacte deelverzameling $K\subset R$ bestaat met $\hat{\mu}_1(t)\neq 0$ voor $t\in K$ en $\hat{\mu}_2(t)=0$, $\forall t\in R\backslash K$. Dan bestaat er een $\nu\in M(R)$ zo, dat $\mu_1*\nu = \mu_2$.

Dit lemma is een direct gevolg van de stelling uit Pitt [6], pag. 98.

Met behulp van bovenstaande resultaten kunnen wij de volgende elementaire vergelijkingsstelling formuleren.

<u>3.21. Stelling</u>. Zij $\mu,\nu\in M(R)$ zo, dat er een $\rho\in M$ bestaat met $\mu=\rho*\nu$. Dan geldt voor alle continue en begrensde f

$$D_\mu(f,\lambda) \leq ||\rho||_M\, D_\nu(f,\lambda).$$

<u>Bewijs</u>. Er geldt wegens 3.20 b) voor begrensde en continue f

$$D_\mu(f,\lambda) = \left|\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-(y_1+y_2)/\lambda)\ d\nu(y_1)d\rho(y_2)\right|\right|_\infty$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} d|\rho(y_2)|\ \left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y_1/\lambda)d\nu(y_1)\right|\right|_\infty$$

$$\leq ||\rho||_M\ D_\nu(f,\lambda),$$

hetgeen te bewijzen was.

3.22. Gevolgen.

a) Wanneer μ en ν elementen van $M(R)$ zijn zo, dat er een compacte verzameling $K\subset R$ is met $\hat{\mu}(t)\neq 0$ op K en $\hat{\nu}(t)=0$ op $R\backslash K$, dan geldt voor begrensde en continue f

(3.24) $$D_\nu(f,\lambda) \leq cD_\mu(f,\lambda);$$

hierbij is c een getal, dat van μ en ν afhangt, maar niet van f.

Bewijs. Wanneer men stelling 3.21 met 3.20 e) combineert, volgt daaruit onmiddellijk het bewijs van (3.24).

b) Laten k en j kernen zijn; d.w.z. $k,j\in L^1(R)$, $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} j(x)dx=1$.

Dan beschouwen wij de maten $\sigma_1(x) = k(x) - \delta(x)$ en $\sigma_2(x) = j(x) - \delta(x)$, hierbij is $\delta(x)$ de deltafunctie van Dirac. Wanneer er nu een $\mu\in M(R)$ bestaat zo, dat

(3.25) $$\frac{\hat{j}(t)-\hat{k}(t)}{1-\hat{j}(t)} = \hat{\mu}(t),\quad \forall t\in R,$$

dan geldt

$$D_{\sigma_1}(f,\lambda) \leq ||\mu+\delta||_M\ D_{\sigma_2}(f,\lambda).$$

Bewijs. Uit de relatie (3.25) volgt $(1-\hat{j}(t))\ (\hat{\mu}(t)+1) = 1-\hat{k}(t)$, $\forall t\in R$. Aangezien $(\hat{\mu}(t)+1) = (\widehat{\mu+\delta})(t)$, is hiermee het bewijs tot stelling 3.21 teruggebracht.

3.23. Toepassingen.

a) Wij bezien het approximatieproces K_λ, met $k(x) = 1/2$ voor $|x|\leq 1$ en $k(x)=0$ elders.

Bewering. Er geldt

$$||K_\lambda f-f||_\infty \leq c\omega_2(f,1/\lambda),\ \text{c constante.}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
|K_\lambda f(x)-f(x)| &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} k(y)(f(x-y/\lambda)-f(x))dy\right| \\
&\leq \int_0^\infty k(y)\ |f(x+y/\lambda)-2f(x)+f(x-y/\lambda)|dy \\
&\leq \int_0^\infty k(y)\ \omega_2(f,y/\lambda)dy \\
&\leq \omega_2(f,1/\lambda) \int_0^\infty k(y)(1+y)^2 dy \\
&\leq c\omega_2(f,1/\lambda).
\end{aligned}$$

Maar nu passen wij stelling 3.21 toe om aan te tonen, dat er een constante C bestaat zo, dat

$$\omega_2(f,1/\lambda) \leq C||K_\lambda f-f||_\infty. \tag{3.26}$$

Aangezien (3.26) equivalent is met $D_{\beta_2}(f,\lambda) \leq CD_\sigma(f,\lambda)$, waarbij $\sigma(x) = k(x)-\delta(x)$, is het volgens stelling 3.21 voldoende om aan te tonen, dat er een $\mu \in M(R)$ bestaat zo, dat $\hat{\beta}_2(t) = \hat{\mu}(t)\hat{\sigma}(t)$. Nu is $\hat{\beta}_2(t) = 1-2e^{-it}+e^{-2it} = (1-e^{-it})^2$ en $\hat{\sigma}(t) = (\sin t/t-1)$; dus $\hat{\mu}(t)$ zou gelijk aan

$$e(t) = (1-e^{-it})^2/(\sin t/t-1)$$

moeten zijn. Maar

$$e(t) = \hat{\beta}_2(t)+(1-e^{-it})^2(1/(\sin t/t-1)-1) = \hat{\beta}_2(t)+g(t),$$

met

$$g(t) = \hat{\beta}_2(t)(1/(\sin t/t-1)-1).$$

Aangezien geldt $g, g' \in L^2(R)$ kan het volgende resultaat gebruikt worden:

Wanneer g en $g' \in L^2(R)$ zijn, dan zijn $\hat{g}$ en $t\hat{g}(t) \in L^2(R)$, zie Titchmarsh [8] pag. 92. Maar dan volgt met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, dat $\hat{g}$ een element van $L^1(R)$ is, zodat g de Fouriergetransformeerde is van een functie h uit $L^1(R)$. Nu kunnen wij $\mu(x) = \beta_2(x)+h(x)$ nemen. Dan geldt $\hat{\beta}_2(t) = \hat{\mu}(t)\hat{\sigma}(t)$. Dus is β_2 deelbaar door σ, zodat (3.26) geldt volgens stelling 3.21 .

Wij hebben nu een bevredigende directe en inverse stelling voor het approximatieproces K_λ gevonden, aangezien wij een karakterisering $\{f \in C_{2\pi} \mid \|K_\lambda f-f\|_\infty = O(\phi(\lambda))\} = \{f \in C_{2\pi} \mid \omega_2(f,1/\lambda) = O(\phi(\lambda))\}$ verkregen hebben.

b) Als tweede toepassing van stelling 3.21 wordt aangetoond, dat er positieve constanten c en C zijn zo, dat voor alle continue en begrensde f geldt

$$c\|K_\lambda f-f\|_\infty \leq \|J_\lambda f-f\|_\infty \leq C\|K_\lambda f-f\|_\infty,$$

waarbij $j(x) = 1/\pi(\sin x/x)^2$ en $k(x) = 1/\pi(1/(1+x^2))$ respectievelijk de Fejér-de la Vallée Poussin kern en de Cauchy kern zijn.

Wij tonen aan, dat de functies

$$\phi_1(t) = \frac{\hat{j}(t)-\hat{k}(t)}{1-\hat{j}(t)} = \frac{1-|t|-e^{-|t|}}{|t|}, \quad |t| \le 1,$$
$$= e^{-|t|}, \quad |t| > 1,$$

en

$$\phi_2(t) = \frac{\hat{k}(t)-\hat{j}(t)}{1-\hat{k}(t)} = \frac{e^{-|t|}-1+|t|}{1-e^{-|t|}}, \quad |t| \le 1,$$
$$= \frac{e^{-|t|}}{1-e^{-|t|}}, \quad |t| > 1,$$

de Fourier getransformeerden zijn van functies ψ_1 respectievelijk ψ_2 uit $L^1(R)$. Aangezien $\phi_1,\phi_1' \in L^1(R)$ en $\phi_2,\phi_2' \in L^1(R)$ is dit weer een gevolg van het resultaat van Titchmarsh [8] pag.92. Met behulp van 3.22 b) vinden wij nu het te bewijzen.

Hiermee hebben wij dus aangetoond, dat de Fejér-de la Vallée Poussin kern en de Cauchy kern een gelijk approximatiegedrag vertonen.

Wij bewijzen nu een minder elementaire vergelijkingsstelling.

3.24. Stelling. Laten σ_1 en σ_2 reële maten op R zijn zo, dat er een $\mu \in M(R)$ en een positief getal c bestaan met $\hat{\mu}(t) = \hat{\sigma}_2(t)/\hat{\sigma}_1(t)$, $\forall |t| \le c$. Veronderstel bovendien, dat $\hat{\sigma}_1(t) \ne 0$, $\forall |t| \in [b^2x_0, x_0]$, waarbij $x_0 > 0$ en $0<b<1$ is. Dan bestaan er positieve constanten A, B en C, die slechts van σ_1 en σ_2 afhangen zo, dat geldt

$$D_{\sigma_2}(f,\lambda) \le CD_{\sigma_1}(f,\lambda) + A \sum_{i=0}^{\infty} D_{\sigma_1}(f,B\lambda/b^i). \tag{3.27}$$

Bewijs. Wij beschouwen de stuksgewijs lineaire functie $P(x)$, die voor $|x| \le b^2x_0$ identiek 1 is en die voor $|x| \ge bx_0$ identiek 0 is. Dan is $P(x)$ de Fouriergetransformeerde van een functie p uit $L^1(R)$. Aangezien $P(xx_0/c)$ identiek nul is voor $|x|>c$, geldt

$$\hat{\sigma}_1(t)\hat{\mu}(t)-\hat{\sigma}_2(t) = (\hat{\sigma}_1(t)\hat{\mu}(t)-\hat{\sigma}_2(t))(1-P(tx_0/c)), \ \forall t \in R.$$

Maar dit betekent wegens 3.20 d), dat, wanneer wij $\sigma(x) = \delta(x) - \frac{c}{x_0}\, p(cx/x_0)$ nemen, geldt

$$\sigma_2 = \sigma_1 * \mu - (\sigma_1 * \mu - \sigma_2) * \sigma.$$

Dan volgt uit stelling 3.21, dat

$$D_{\sigma_2}(f,\lambda) \leq A_1 D_{\sigma_1}(f,\lambda) + A_2 D_{\sigma}(f,\lambda), \tag{3.28}$$

waarbij $A_1 = ||\mu||_M$ en $A_2 = ||\sigma_1 * \mu - \sigma_2||_M$. Het is nu duidelijk, dat wij $D_\sigma(f,\lambda)$ moeten afschatten.

Zij $Q(x) = P(x) - P(bx)$. Voor $Q(x)$ geldt:

a) $Q(x)$ is slechts ongelijk nul voor $|x| \in (b^2 x_0, x_0)$.
b) $Q(x)$ is de Fouriergetransformeerde van de functie $q(t) = p(t) - (1/b)p(t/b)$ uit $L^1(R)$.

Aangezien σ_1 en q aan de voorwaarden van het lemma van Wiener 3.20 e) voldoen, wanneer wij q identificeren met de maat $q(x)dx$, is er een $\rho \in M(R)$ zo, dat $\rho * \sigma_1 = q$. Nu levert stelling 3.21

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\left(p(y) - \frac{1}{b} p(y/b)\right) dy\right| \leq A D_{\sigma_1}(f,\lambda), \tag{3.29}$$

voor zeker getal $A>0$, dat slechts van σ_1 afhangt.

Wanneer wij in (3.29) herhaald $\lambda' = \lambda/b$ substitueren vinden wij

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\left(\frac{1}{b^n} p(y/b^n) - \frac{1}{b^{n+1}} p(y/b^{n+1})\right) dy\right| \leq A D_{\sigma_1}(f,\lambda/b^n), \tag{3.30}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Door optellen van de ongelijkheden 3.30 voor $n = 0,1,2,\ldots,N$ en door toepassen van de driehoeksongelijkheid vinden wij:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\left(p(y) - \frac{1}{b^{N+1}} p(y/b^{N+1})\right) dy\right| \leq A \sum_{i=1}^{\infty} D_{\sigma_1}(f,\lambda/b^i).$$

Wegens het feit, dat $p \in L^1(R)$ en $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \hat{p}(0) = 1$, geldt volgens stelling 3.5

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\,\frac{1}{b^N}\,p(y/b^N)dy = f(x), \quad \forall x\in R.$$

Wij vinden dus

$$\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\,p(y)dy - f(x)\right|\right|_\infty \le A \sum_{i=0}^{\infty} D_{\sigma_1}(f,\lambda/b^i).$$

Hiermee schatten wij $D_\sigma(f,\lambda)$ af:

$$(3.31) \qquad D_\sigma(f,\lambda) = \left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\,\frac{c}{x_0}\,p(cy/x_0)dy - f(x)\right|\right|$$

$$= \left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0y/(c\lambda))p(y)dy - f(x)\right|\right|$$

$$\le A \sum_{i=0}^{\infty} D_{\sigma_1}(f,c\lambda/(x_0b^i)).$$

Uit (3.31) en (3.28) volgt het te bewijzen direct.

Als eenvoudige toepassing geven wij nu aan, hoe men een directe stelling voor beste approximatie met trigonometrische polynomen uit stelling 3.24 kan afleiden.

Zij $k\in L^1(R)$, met $\hat{k}(x) = 0$ voor $|x|\ge 1$ en $\hat{k}(x) = 1$ voor $|x|<1/2$. Dan weten wij, zie stelling 3.15, dat $K_\lambda f\in T_n$ voor $f\in C_{2\pi}$ en $|\lambda|\le n$. Aangezien voor de maat $\sigma(x) = \delta(x)-k(x)$ geldt $\hat{\sigma}(t) = 0$, $|t|<1/2$ voldoen σ en β_p aan de voorwaarden van stelling 3.24.
Er geldt dus

$$||f-K_nf|| = D_\sigma(f,n) \le C\omega_p(f,1/n) + A \sum_{i=0}^{\infty} \omega_p(f,B/(nb^i))$$

voor zekere positieve getallen A,B, C en b die onafhankelijk van f zijn.
Wij hebben de directe stelling

$$E(T_n,f) \le C\omega_p(f,1/n) + A \sum_{i=0}^{\infty} \omega_p(f,Bb^i/n), \qquad f\in C_{2\pi},\ p=1,2,\ldots$$

gevonden.

Een tweede toepassing van stelling 3.24 is de volgende inverse stelling voor het met de kern k(x) geassocieerde approximatieproces K_λ.

3.25. Stelling. Zij k een kern en f een begrensde continue functie op R. Dan volgt uit

$$||K_\lambda f-f||_\infty = O(\lambda^{-\alpha}),\ 0<\alpha<\infty,$$

dat voor elk geheel getal $r>\alpha$

$$\omega_r(f,1/\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}).$$

Bewijs. Zij $P(x)\in C^\infty(R)$ zo, dat $P(x) = x^r$ voor $|x|<1$ en $P(x) = 0$ voor $|x|>2$. Dan is P de Fouriergetransformeerde van een functie $p\in L^1(R)$.
Zij $\tau(x) = \frac{1}{2}\, p(x/2)-2^r p(x)$. Dan is $\tau\in L^1(R)$ en wij kunnen τ als element van M(R) opvatten. Aangezien $\hat{\tau}(t) = P(2t)-2^r P(t)$ identiek nul is voor $|t|<1/2$ en $\beta_r(t) = (1-e^{-it})^r$, voldoen β_r en τ aan de voorwaarden van stelling 3.24. Dus geldt voor zekere positieve constante A'

$$D_\tau(f,\lambda) \le CD_\sigma(f,\lambda) + A \sum_{i=0}^{\infty} D_\sigma(f,B\lambda/b^i) \le A'\ 1/\lambda^\alpha.$$

Hieruit volgt, dat

$$(3.32)\qquad ||\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)(\tfrac{1}{2}\, p(y/2)-2^r p(y))dy||_\infty$$

$$= ||\int_{-\infty}^{\infty} f(x-2y/\lambda)p(y)dy - 2^r \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)p(y)dy||_\infty \le A'\ 1/\lambda^\alpha.$$

Uit (3.32) leiden wij voor de functie $\phi(\lambda)$, die gedefinieerd is door

$$\phi(\lambda) = ||\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y/\lambda)\ p(y)dy||_\infty ,$$

de relatie

$$(3.33) \qquad \phi(\lambda) \leq A'2^{-r}\lambda^{-\alpha} + 2^{-r}\phi(\lambda/2)$$

af. Uit (3.33) en het feit dat $\phi(\lambda)$ uniform begrensd is, volgt

$$\phi(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}),$$

zie H.S. Shapiro [7], pag.91.
Aangezien $p \in L^1(R)$, kunnen wij p als element van $M(R)$ opvatten. Dan is $\phi(\lambda) = D_p(f,\lambda)$.

Wij gaan nu nogmaals de vergelijkingsstelling 3.24 toepassen. Aangezien $\hat{\beta}_r(t)/t^r$ de Fouriergetransformeerde is van een maat, zelfs van een functie uit $L^1(R)$, zoals men eenvoudig inziet, geldt voor zekere $\rho \in M(R)$

$$\hat{\beta}_r(t)/\hat{p}(t) = \hat{\rho}(t), \quad |t|<1.$$

Hieruit volgt, dat ρ en β_r aan de voorwaarden van stelling 3.24 voldoen, zodat wij de afschatting

$$(3.34) \qquad D_{\beta_r}(f,\lambda) \leq C_o D_p(f,\lambda) + A_o \sum_{i=0}^{\infty} D_p(f, B_o\lambda/b_o^i))$$

vinden, met A_o, B_o en C_o positieve constanten en $0<b_o<1$.
Uit (3.34) en de al eerder verkregen afschatting voor $D_p(f,\lambda)$ volgt

$$D_{\beta_r}(f,\lambda) = \omega_r(f,1/\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}),$$

hetgeen te bewijzen was.

De resultaten uit dit hoofdstuk zijn voor het merendeel in het boek van Shapiro [7] te vinden.
De approximatie eigenschappen van het approximatieproces K_λ zijn al lang bekend, bijvoorbeeld Weierstrass en Lebesgue hebben dit al onderkend. Behalve in het boek van Shapiro kan men ook in het artikel van Butzer [1] en het boek van Butzer en Berens [2] veel resultaten over deze approximatieprocessen vinden.

Literatuur

[1] Butzer, P.L. — Representation and approximation of functions by general singular integrals. Indag. Math., 22 (1960), 1-24.

[2] Butzer, P.L., Berens, H. — Semigroups of operators and approximation. Grundlehren der Math. Wissenschaften, band 145, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[3] Dunford, N., Schwartz, J.T. — Linear operators, part I. Interscience publishers, inc., New York, 1958.

[4] Kolmogorov, A. — On inequalities between upperbounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. Uchen Zap. Moskov. Gos. Univ. Math. 30 (1939), 3-16.

[5] Lorentz, G.G. — Approximation of functions. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[6] Pitt, H.R. — Tauberian Theorems. Oxford University,Press, London, 1958.

[7] Shapiro, H.S. — Smoothing and approximating of functions. Van Nostrand Reinbold Company, New York, etc., 1969.

[8] Titchmarsh, E.C. — Introduction to the theory of Fourier integrals, second edition. Oxford University Press, London, 1948.

4. APPROXIMATIEPROCESSEN IN BANACHRUIMTEN

In dit hoofdstuk zullen een aantal stellingen worden behandeld over rijen van begrensde lineaire operatoren, die een Banachruimte X afbeelden in een deelruimte Y. Van deze rijen operatoren zullen wij steeds eisen, dat zij in de norm naar de identiteit I convergeren, zodat een dergelijke rij operatoren kan worden beschouwd als een approximatieproces. Er zullen aan deze approximatieprocessen voorwaarden worden opgelegd, waardoor het mogelijk wordt uitspraak te doen over de snelheid van convergentie. Het zal dan blijken dat de elementen voor X, die een bepaalde convergentiesnelheid van het approximatieproces toelaten, behoren tot een lineaire deelruimte van X, die het best is te karakteriseren met behulp van de theorie van de intermediaire ruimten, zoals die door J. Peetre is geïntroduceerd. Wij zullen in een beknopte vorm datgene uit deze theorie behandelen, wat nodig is voor de studie van de approximatieprocessen.

4.1. Definitie. Neem aan X en Y zijn Banachruimten. Wij zeggen dat Y een Banachdeelruimte is van X, hetgeen wij aangeven met $Y \subset X$, indien Y als verzameling een deelverzameling is van X en de norm voldoet aan de relatie

$$(4.1) \qquad ||f||_X \leq M||f||_Y \quad , \qquad (f \in Y) ,$$

waarbij M een constante is die niet van f afhangt.

In het vervolg zullen wij er steeds van uitgaan, dat X_0 een Banachruimte is en dat X_1 een Banachdeelruimte is, die dicht ligt in X_0. Wij noemen een Banachruimte X een intermediaire ruimte van X_0 en X_1, als $X_1 \subset X \subset X_0$. Wij nemen aan, dat voor alle $f \in X_1$ geldt: $||f||_{X_0} \leq ||f||_{X_1}$.

In navolging van Peetre voeren wij de functienorm in

$$(4.2) \qquad K(t,f) = K(t,f,X_0,X_1) = \inf_{\substack{f=f_0+f_1 \\ f_0 \in X_0 \\ f_1 \in X_1}} (||f_0||_{X_0} + t||f_1||_{X_1}) \quad , \qquad (0 < t < \infty, f \in X_0)$$

en

$$(4.3)\quad J(t,f) = J(t,f;X_0,X_1) = \max(||f||_{X_0}, t||f||_{X_1}), \quad (0 < t < \infty, f \in X_1).$$

4.2. Lemma. a) Voor elke $f \in X_0$ is $K(t,f)$ een continue, monotoon stijgende functie op $(0,\infty)$ en voor $0 < s,t < \infty$, geldt

$$(4.4)\quad \min(1,t/s)\; K(s,f) \leq K(t,f) \leq \max(1,t/s)\; K(s,f).$$

b) Voor elke $f \in X_1$ is $J(t,f)$ een continue, monotoon stijgende functie op $(0,\infty)$ en voor $0 < s,\ t < \infty$ geldt

$$(4.5)\quad \min(1,t/s)\; J(s,f) \leq J(t,f) \leq \max(1,t/s)\; J(s,f).$$

c) Voor elke $f \in X_1$ en voor $0 < s,t < \infty$ geldt

$$(4.6)\quad K(t,f) \leq \min(1,t/s)\; J(s,f).$$

d) Verder geldt

$$(4.7)\quad K(t^{-1},f) = K(1,f) = ||f||_{X_0} \qquad (f \in X_0,\ 0 < t \leq 1),$$

$$(4.8)\quad tJ(t^{-1},f) = J(1,f) = ||f||_{X_1} \qquad (f \in X_1,\ 0 < t \leq 1).$$

Bewijs. De relaties (4.4) en (4.5) volgen onmiddellijk uit de definitie van $K(t,f)$ en $J(t,f)$. Formule (4.6) volgt wegens de ongelijkheden

$$K(t,f) \leq ||f||_{X_0} \leq J(s,f)$$

en

$$K(t,f) \leq t||f||_{X_1} = \frac{t}{s}\, s||f||_{X_1} \leq \frac{t}{s}\, J(s,f).$$

Door in (4.4) en (4.5) de parameter t naar s te laten naderen krijgen wij $\lim_{t\to s} K(t,f) = K(s,f)$ en $\lim_{t\to s} J(t,f) = J(s,f)$, d.w.z. de continuïteit van beide functienormen. Voor het bewijs van (4.7) merken wij eerst op dat wegens (4.1) en (4.2)

$$||f||_{X_0} \geq \inf_{f=f_0+f_1} (||f_0||_{X_0} + ||f_1||_{X_1}) \geq \inf_{f=f_0+f_1} (||f_0||_{X_0} + ||f_1||_{X_0}) \geq$$

$$\geq ||f||_{X_0} \qquad (f \in X_0),$$

zodat $K(1,f) = ||f||_{X_0}$. Bovendien geldt

$$K(1,f) \leq K(t^{-1},f) \leq ||f||_{X_0} = K(1,f) , \qquad (0 < t \leq 1) .$$

De relatie (4.8) volgt direct uit (4.1) en (4.3).

<u>4.3. Definitie</u>. Wij geven met l^q_* aan de Banachruimte van reële of complexe getallenrijen $a = \{a_1,a_2,\ldots\}$, waarvoor de norm

$$||a||_{l^q_*} = \begin{cases} \{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q n^{-1}\}^{1/q} & (1 \leq q < \infty) , \\ \sup_{n=1,2,..} |a_n| & (q = \infty) , \end{cases}$$

eindig is.

<u>4.4. Definitie</u>. Wij definiëren $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$, $-\infty < \theta < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, als de ruimte van alle elementen $f \in X_0$ waarvoor $n^\theta K(n^{-1},f) \in l^q_*$.

<u>4.5. Stelling</u>. Voor $1 \leq q \leq \infty$, $\theta < 1$ en $q = \infty$, $\theta = 1$ zijn de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ niet-lege Banachruimten onder de norm

$$(4.9) \qquad ||f||_{\theta,q;K} = ||n^{\theta}\, K(n^{-1},f)||_{l^q_*} \quad ,$$

die voldoen aan de inclusierelatie

$$(4.10) \qquad X_1 \subset [X_0,X_1]_{\theta,q;K} \subset X_0 .$$

In alle andere gevallen bestaan de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ slechts uit het nulelement.

Bovendien geldt voor $\theta < 0$, $1 \leq q \leq \infty$ en $\theta = 0$, $q = \infty$,

$$(4.11) \qquad [X_0,X_1]_{\theta,q;K} \stackrel{\sim}{=} X_0 \quad ,$$

d.w.z. de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ en X_0 zijn gelijk en hebben equivalente normen.

Bewijs. Op grond van (4.4) en (4.7) kunnen wij schrijven voor $f \neq 0$ in X_0

$$(4.12) \qquad ||n^{\theta}\min(1,n^{-1})||_{l^q_*}\; ||f||_{X_0} \leq ||n^{\theta}K(n^{-1},f)||_{l^q_*} \quad .$$

De getallenrij $n^{\theta-1}$, $n = 1,2,\ldots$, behoort dan en slechts dan tot l^q_* als $\theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ of $\theta = 1$, $q = \infty$, zodat f slechts in die gevallen tot $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ kan behoren. Verder volgt uit (4.12), dat $||f||_{\theta,q;K} = 0$ impliceert $f = 0$, zodat $||\cdot||_{\theta,q;K}$ een norm is. Het is duidelijk dat de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ genormeerde lineaire ruimten zijn onder de norm (4.9) met de gegeven waarden van θ en q. Wij tonen de volledigheid van $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ aan door te bewijzen dat iedere absoluut convergente reeks van elementen van de ruimte convergeert. Neem aan dat $\sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;K} < \infty$. Dan volgt uit (4.12) dat

$$\sum_{r=1}^{\infty} K(1,f_r) = \sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{X_0} < \infty$$

en $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f_r = f$ in de X_0 norm wegens de volledigheid van X_0.

Omdat voor alle t met $0 < t < \infty$ geldt, dat

$$K(t,f) \le \sum_{r=1}^{\infty} K(t,f_r) \quad ,$$

volgt

$$||f||_{\theta,q;K} \le \sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;K} < \infty \, .$$

Dus is $f \in [X_0,X_1]_{\theta,q;K}$

en

$$|| \sum_{r=1}^{n} f_r - f||_{\theta,q;K} \le \sum_{r=n+1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;K} \to 0 \, ,$$

als $n \to \infty$, waarmee de volledigheid bewezen is.

Verder is uit (4.6) en (4.8) direct af te leiden dat voor $f \in X_1$

(4.13) $$||f||_{\theta,q;K} \le J(1,f) \; ||n^{\theta}\min(1,n^{-1})||_{l^q_*} = A(\theta,q) \; ||f||_{X_1} \; ,$$

waarbij $A(\theta,q) = ||n^{\theta-1}||_{l^q_*}$.

Uit (4.12) en (4.13) volgt de inclusierelatie (4.10) onmiddellijk. In het geval $\theta < 0$, $1 \le q \le \infty$ of $\theta = 0$, $q = \infty$ leiden wij uit (4.7) af

$$||f||_{\theta,q;K} \le K(1,f) \; ||n^{\theta}||_{l^q_*} \quad ,$$

hetgeen samen met (4.10) de relatie (4.11) bewijst.

4.6. Definitie. Wij definiëren $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$, $-\infty < \theta < \infty$, $1 \le q \le \infty$, als de ruimte van alle elementen $f \in X_0$, waarvoor een rij $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ bestaat zo, dat $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/n$ in de X_0-norm en $n^{\theta}J(n^{-1},u_n) \in l^q_*$.

4.7. Stelling. Voor $1 \le q \le \infty$, $\theta > 0$ en $q = 1$, $\theta = 0$ zijn de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ niet-lege Banachruimten onder de norm

$$(4.14) \qquad ||f||_{\theta,q;J} = \inf_{f=\sum_{n=1}^{\infty} u_n/n} ||n^{\theta}J(n^{-1},u_n)||_{l^q_*} \quad ,$$

waarvoor de volgende inclusierelatie geldt:

$$(4.15) \qquad X_1 \subset [X_0,X_1]_{\theta,q;J} \subset X_0 .$$

Bovendien geldt voor $\theta > 1$, $1 \leq q \leq \infty$ en $\theta = 1$, $q = 1$,

$$(4.16) \qquad [X_0,X_1]_{\theta,q;J} \overset{\sim}{=} X_1 \ .$$

Bewijs. Uit (4.6) en de ongelijkheid van Hölder leiden wij af

$$||f||_{X_0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{X_0}/n = \sum_{n=1}^{\infty} K(1,u_n)/n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \min(1,n)\ J(n^{-1},u_n)/n$$

$$\leq ||n^{\theta}J(n^{-1},u_n)||_{l^q_*} \ ||n^{-\theta}||_{l^{q'}_*} \ ,$$

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right),$$

voor elke rij $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ zo, dat $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/n$.

Dus

$$(4.17) \quad ||f||_{X_0} \leq ||f||_{\theta,q;J}\ ||n^{-\theta}\min(1,n)||_{l^{q'}_*} = B(\theta,q')\ ||f||_{\theta,q;J} \ ,$$

waarbij $B(\theta,q') = ||n^{-\theta}||_{l^{q'}_*}$.

$B(\theta,q')$ is eindig, indien $1 \leq q \leq \infty$, $\theta > 0$ en $q = 1$, $\theta = 0$.
Het is gemakkelijk aan te tonen, dat de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ genormeerde lineaire ruimten zijn onder de norm (4.14) met de gegeven waarden van θ en q.

Is $f \in X_1$, dan schrijven wij $u_n = f.\delta_{1,n}$ ($\delta_{k,n} = 1$ als $k = n$, $\delta_{k,n} = 0$ als $k \neq n$). Dan geldt $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/n$ en

$$(4.18) \qquad ||f||_{\theta,q;J} \leq J(1,u_1) = J(1,f) = ||f||_{X_1} .$$

Uit (4.17) en (4.18) volgt de inclusierelatie (4.15). De relatie (4.16) volgt uit (4.15) en de ongelijkheid

$$||f||_{X_1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{X_1}/n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\, J(n^{-1},u_n)/n$$

$$\leq ||n^{\theta} J(n^{-1},u_n)||_{l_*^q}\ ||n^{1-\theta}||_{l_*^{q'}}$$

voor iedere representatie $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/n$ in de X_0 norm. Om de volledigheid van de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ aan te tonen, nemen wij aan dat voor een rij elementen $f_r \in [X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ geldt

$$\sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;J} < \infty.$$

Voor een willekeurige $\varepsilon > 0$ kunnen wij bij elke f_r een rij $\{u_{n,r}\}_{n=1}^{\infty} \in X_1$ vinden zo, dat

$$||n^{\theta} J(n^{-1},u_{n,r})||_{l_*^q} \leq ||f_r||_{\theta,q;J} + \varepsilon.2^{-r}.$$

Hieruit volgt voor vaste n, $1 \leq n < \infty$,

$$\sum_{r=1}^{\infty} ||u_{n,r}||_{X_1}/n = \sum_{r=1}^{\infty} J(1,u_{n,r})/n \leq n^{-\theta}\max(1,n) \sum_{r=1}^{\infty} J(n^{-1},u_{n,r})n^{\theta}/n$$

$$\leq n^{-\theta+1}\ \{\sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;J} + \varepsilon\} < \infty.$$

Wegens de volledigheid van X_1 geldt dus $\sum_{r=1}^{\infty} u_{n,r} = u_n \in X_1$. Verder geldt evenals in het bewijs van (4.17)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{X_0}/n &\leq \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} ||u_{n,r}||_{X_0}/n \\ &\leq B(\theta,q')\{\sum_{r=1}^{\infty} ||n^{\theta}\ J(n^{-1},u_{n,r})||_{l_*^q}\} \\ &\leq B(\theta,q')\{\sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;J} + \varepsilon\} < \infty.\end{aligned}$$

Dus is wegens de volledigheid van X_0, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/n = f \in X_0$.

Op grond van de ongelijkheid van Minkowski volgt

$$\begin{aligned}||n^{\theta}\ J(n^{-1},u_n)||_{l_*^q} &\leq \sum_{r=1}^{\infty} ||n^{\theta}\ J(n^{-1},u_{n,r})||_{l_*^q} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} (||f_r||_{\theta,q;J} + \varepsilon.2^{-r})\ ,\end{aligned}$$

en omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen kan worden is

$$||f||_{\theta,q;J} \leq \sum_{r=1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;J} < \infty\ .$$

Tenslotte geldt voor $n \to \infty$

$$||f - \sum_{r=1}^{n} f_r||_{\theta,q;J} \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} ||f_r||_{\theta,q;J} = o(1) \ ,$$

waarmee de volledigheid is bewezen.

4.8. Stelling. Voor $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ en $q = \infty$, $\theta = 1$ leveren de uitdrukkingen

$$(4.19) \qquad \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} K(a^{-n},f)]^q\}^{1/q}, \qquad a > 1 \ ,$$

normen voor de ruimte $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ die equivalent zijn met (4.9) en dus ook onderling equivalent.

Bewijs. Wij bewijzen slechts de equivalentie van de normen (4.9) en (4.19).

Aangezien $\log a \leq \sum_{n(k)} \equiv \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k} \leq 2\log a$, $n = 0,1,\dots$, kunnen wij schrijven

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta}K(a^{-n},f)]^q = \sum_{n=0}^{\infty} [a^{n\theta}K(a^{-n},f)]^q + \sum_{n=1}^{\infty} [a^{-n\theta}K(a^{n},f)]^q$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} [a^{n\theta}K(a^{-n},f)]^q (\log a)^{-1}\sum_{n(k)} + K(1,f)(\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n\theta q})$$

$$\leq (\log a)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} [k^{\theta}K(ak^{-1},f)]^q \frac{1}{k} + K(1,f)(\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n\theta q})$$

$$\leq \frac{a^q}{\log a} \sum_{k=1}^{\infty} [k^{\theta}K(k^{-1},f)]^q \frac{1}{k} + K(1,f)(\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n\theta q})$$

$$\leq 2C \sum_{k=1}^{\infty} [k^{\theta}K(k^{-1},f)]^q \frac{1}{k} \ , \qquad \text{(wegens (4.7) en (4.12))},$$

waarbij $C = \max(\frac{a^q}{\log a}, \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n\theta q})$.

Omgekeerd geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k^\theta K(k^{-1},f)]^q \frac{1}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} [k^\theta K(k^{-1},f)]^q \frac{1}{k}$$

$$\leq a^{\theta q} \sum_{n=0}^{\infty} [a^{n\theta} K(a^{-n},f)]^q \sum_{n(k)}$$

$$\leq 2a^{\theta q} \log a \sum_{n=0}^{\infty} [a^{n\theta} K(a^{-n},f)]^q$$

$$\leq 2a^{\theta q} \log a \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} K(a^{-n},f)]^q .$$

4.9. Stelling. Voor $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ en $q = 1$, $\theta = 0$ leveren de uitdrukkingen

$$(4.20) \qquad \inf_{f=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n} \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q\}^{1/q} \quad , \quad a > 1,$$

waarbij $u_n \in X_1$, $-\infty < n < \infty$, en $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ in de X_0 norm, normen voor de ruimte $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$, die equivalent zijn met (4.14) en dus ook onderling equivalent.

Bewijs. Wij bewijzen slechts de equivalentie van de normen (4.14) en (4.20). Indien er een representatie $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ in X_0 bestaat zo, dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q < \infty$, dan kiezen wij

$$\tilde{u}_k = \Big(\sum_{n(k)}\Big)^{-1} u_n \quad , \quad \text{voor } [a^n] \le k < [a^{n+1}], \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$\tilde{u}_1 = \sum_{n=-\infty}^{0} u_n \quad ,$$

waarbij $\sum\limits_{n(k)} = \sum\limits_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k}$. Dan geldt dat $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k/k$.

Er geldt dan wegens (4.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k^\theta J(k^{-1},\tilde{u}_k)]^q \frac{1}{k} \le \sum_{n=1}^{\infty} [a^{(n+1)\theta} J(a^{-n}, (\sum_{n(k)})^{-1} u_n)]^q \sum_{n(k)} + \{J(1,\tilde{u}_1)\}^q$$

$$\le 2a^{\theta q}(\log a)^{1-q} \sum_{n=1}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q + \{\sum_{n=-\infty}^{0} a^n J(a^{-n},u_n)\}^q$$

$$\le 2a^{\theta q}(\log a)^{1-q} \sum_{n=1}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q +$$

$$+ \{\sum_{n=-\infty}^{0} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q\}\{\sum_{n=-\infty}^{0} a^{n(1-\theta)q'}\}^{q/q'}$$

$$\le C \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},u_n)]^q.$$

Als er omgekeerd een representatie $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k/k$ in X_0 bestaat zo, dat

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} [k^\theta J(k^{-1},u_k)]^q \frac{1}{k} < \infty$, dan kiezen wij

$$v_n = 0 \quad , \quad n < 0 \, ,$$

$$v_n = \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} u_k/k \quad , \quad n \ge 0 \, ,$$

zodat $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n$ in de X_0 norm.

Wij krijgen dan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta} J(a^{-n},v_n)]^q \leq \sum_{n=0}^{\infty} [a^{n\theta} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} J(a^{-n},u_k)/k]^q$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} a^{nq\theta} \Big(\sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} [J(a^{-n},u_k)]^q \frac{1}{k}\Big)\Big(\sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k}\Big)^{q/q'}$$

$$\leq a^q(2\log a)^{q/q'} \sum_{k=1}^{\infty} [k^\theta J(k^{-1},u_k)]^q \frac{1}{k} \quad ,$$

hetgeen te bewijzen was.

Wij zullen nu gaan aantonen, dat voor $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ en $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ samenvallen. Wij bewijzen:

<u>4.10. Lemma</u>. Voor $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ geldt

$$[X_0,X_1]_{\theta,q;J} \subset [X_0,X_1]_{\theta,q;K} .$$

<u>Bewijs</u>. Zij $f \in [X_0,X_1]_{\theta,q;J}$. Dan geldt volgens stelling 4.9, dat $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$ in X_0, waarbij $u_k \in X_1$ en $\sum_{k=-\infty}^{\infty} [2^{k\theta} J(2^{-k},u_k)]^q < \infty$. Wegens (4.6) kunnen wij schrijven

$$K(2^{-n},f) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(2^{-n},u_{n-k})$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \min(1,2^{-k})\, J(2^{-n+k},u_{n-k}),$$

zodat wegens de ongelijkheid van Minkowski volgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2^{n\theta}K(2^{-n},f)]^q \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\theta-1)} \; 2^{(n-k)\theta} \; J(2^{-n+k},u_{n-k})]^q$$

$$\leq \{\sum_{k=-\infty}^{\infty} [2^{k(\theta-1)}]\}^q \; . \; \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2^{(n-k)\theta} \; J(2^{-n+k},u_{n-k})]^q$$

$$= C \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2^{n\theta}J(2^{-n},u_n)]^q \; .$$

Daar dit voor alle mogelijke representaties $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$ in X_0 geldt, volgt het gestelde.

__4.11. Lemma__. Voor $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ geldt

$$[X_0,X_1]_{\theta,q;K} \subset [X_0,X_1]_{\theta,q;J} \; .$$

__Bewijs__. Voor iedere $f \in X_0$ en iedere n, $-\infty < n < \infty$, bestaan er wegens de definitie van de K-functienorm functies $f_{i,n} \in X_i$, $i = 0,1$, met $f = f_{0,n} + f_{1,n}$ en

(4.21) $$||f_{0,n}||_{X_0} + 2^{-n}||f_{1,n}||_{X_1} \leq 2K(2^{-n},f).$$

Is nu $f \in [X_0,X_1]_{\theta,q;K}$, $0 < \theta < 1$, dan volgt voor $n \to \infty$

(4.22) $$||f_{0,n}||_{X_0} \leq 2K(2^{-n},f) \leq 2.2^{-n\theta}||f||_{\theta,q;K} = o(1)$$

en voor $n \to -\infty$

(4.23) $$||f_{1,n}||_{X_1} \leq 2^{n+1}K(2^{-n},f) \leq 2^{1+n(1-\theta)} \; ||f||_{\theta,q;K} = o(1).$$

Verder volgt er

$$\sum_{n=-N}^{N} (f_{0,n}-f_{0,n+1}) = \sum_{n=-N}^{N} (f_{1,n+1} - f_{1,n}) = f - f_{0,N+1} - f_{1,-N} ,$$

waardoor wegens (4.22) en (4.23) kan geschreven worden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_{0,n} - f_{0,n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = f$$

in de X_0 norm, terwijl de functies $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in X_1$. Bovendien geldt op grond van (4.21)

$$J(2^{-n},u_n) \leq \max(||f_{0,n}||_{X_0} + ||f_{0,n+1}||_{X_0} , 2^{-n}(||f_{1,n}||_{X_0} + ||f_{1,n+1}||_{X_1}))$$

$$\leq 2K(2^{-n},f) + 4K(2^{-n-1},f) \leq 6K(2^{-n},f).$$

Wij krijgen

$$||f||_{\theta,q;J} \leq \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2^{n\theta}J(2^{-n},u_n)]^q\}^{1/q} \leq 6\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2^{-n\theta}K(2^{-n},f)\}^q\}^{1/q}$$

$$\leq 6||f||_{\theta,q;K} .$$

Uit de lemma's 4.10 en 4.11 volgt:

<u>4.12. Stelling</u>. Voor $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ geldt

$$[X_0,X_1]_{\theta,q;J} \cong [X_0,X_1]_{\theta,q;K} .$$

Voor de grensgevallen hebben wij

$$[X_0,X_1]_{0,1;J} \subset X_0 \quad , \quad X_1 \subset [X_0,X_1]_{1,\infty;K} .$$

4.13. Stelling. Voor $0 \leq \theta' < \theta < 1$ geldt

a) $[X_0,X_1]_{\theta,q;K} \subset [X_0,X_1]_{\theta,p;K}$, $(1 \leq q \leq p \leq \infty)$,

b) $[X_0,X_1]_{\theta,q;K} \subset [X_0,X_1]_{\theta',p;K}$, $(1 \leq q,\ p \leq \infty)$.

Bewijs. Eerst wordt a) bewezen. Zij $a = \{\ldots,a_{-1},a_0,a_1,\ldots\}$ een rij getallen en zij

$$||a||_{l^q} = \begin{cases} \{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^q\}^{1/q} & 1 \leq q < \infty \\ \sup\limits_{-\infty<n<\infty} |a_n| & q = \infty. \end{cases}$$

Kies $b = \{b_n = a_n/||a||_{l^q},\ -\infty<n<\infty\}$, dan is $|b_n| \leq 1$, zodat $||b||_{l^p} \leq ||b||_{l^q} = 1$, als $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Hieruit volgt $||a||_{l^p} \leq ||a||_{l^q}$, hetgeen inclusie a) direct impliceert.

De inclusie b) is een gevolg van de ongelijkheid van Hölder en inclusie a), omdat voor $b_n \geq 0$ en $q > r$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^{\theta'} b_n]^r \frac{1}{n} \leq \{\sum_{n=1}^{\infty} [n^{\theta} b_n]^q \frac{1}{n}\}^{r/q} \{\sum_{n=1}^{\infty} [n^{\theta'-\theta}]^{q/(q-r)} \frac{1}{n}\}^{(q-r)/q} .$$

4.14. Voorbeeld. Wij beschouwen het geval, dat $X_0 = C_{2\pi}$, voorzien van de supnorm, en $X_1 = C^1_{2\pi}$ met de norm

$$||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty .$$

Wij zullen aantonen dat in dit geval de intermediaire ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ voor $q = \infty$ samenvallen met de klassen Lip(θ), terwijl voor $1 \leq q < \infty$ deze ruimten generalisaties ervan leveren.

Wij splitsen een functie $f \in C_{2\pi}$ in $f = f_0 + f_1$, waarbij $f_0 \in C_{2\pi}$ en $f_1 \in C^1_{2\pi}$. Uit de definitie van continuïteitsmodulus volgt

$$\omega(f_0,t) \le 2||f_0||_\infty .$$

Uit de middelwaardestelling volgt

$$\omega(f_1,t) \le t||f_1'||_\infty .$$

Dus is

$$\begin{aligned}\omega(f,t) &\le \omega(f_0,t) + \omega(f_1,t)\\ &\le 2(||f_0||_\infty + t||f_1'||_\infty).\end{aligned}$$

Aangezien

$$\min(1,t)||f||_\infty \le ||f_0||_\infty + t||f_1||_\infty ,$$

krijgen wij

$$\min(1,t)||f||_C + \omega(f,t) \le 3(||f_0||_C + t||f_1||_{C^1}) ,$$

hetgeen wegens de definitie van de functienorm $K(t,f)$ leidt tot

$$\min(1,t)||f||_C + \omega(f,t) \le 3\, K(t,f;C,C^1). \tag{4.24}$$

Om het omgekeerde te bewijzen introduceren wij de functies

$$f_{1,t}(x) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x+\tau)d\tau,$$

$$f_{0,t}(x) = f - f_{1,t} .$$

De functie $f_{1,t}(x) \in C^1_{2\pi}$ en er geldt

$$(4.25) \qquad t\, f'_{1,t}(x) = f(x+t) - f(x)\ .$$

Verder geldt

$$f_{0,t}(x) = -\frac{1}{t}\int_0^t \{f(x+\tau) - f(x)\}d\tau\ ,$$

waaruit volgt

$$\|f_{0,t}(x)\|_C \leq \omega(f,t)\ .$$

Uit (4.25) leiden wij af

$$\|f_{1,t}\|_{C^1} = \|f_{1,t}\|_C + \|f'_{1,t}\|_C$$

$$\leq \|f\|_C + t^{-1}\omega(f,t)\ ,$$

zodat wegens $K(t,f) \leq \|f\|_C$ volgt

$$(4.26) \qquad \begin{aligned} K(t,f) &\leq \|f_{0,t}\|_C + t\|f_{1,t}\|_{C^1} \\ &\leq 2(\min(1,t)\|f\|_\infty + \omega(f,t)). \end{aligned}$$

Combinatie van (4.24) en (4.26) levert de equivalentie van de Lipschitzklassen Lip(θ) met de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,\infty;K}$.

De kracht van de K-methode ligt in het feit, dat hij de intermediaire ruimten karakteriseert onafhankelijk van elk approximatieproces, dit in tegenstelling tot de klassieke definitie van de Lipschitzklassen, die met behulp van de translatieoperator werden gedefinieerd.

In het volgende gedeelte zullen wij de vraag behandelen, welke ruimten men verkrijgt indien men de K- of de J- methode herhaald toepast. Het zal blijken, dat men in dat geval steeds weer uitkomt op ruimten van het type $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$ of $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$. Daartoe voeren wij de volgende definitie in.

4.15. Definitie. Een intermediaire ruimte X van X_0 en X_1 behoort tot
a) de klasse $\mathcal{K}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, als er een constante C_1 bestaat zo, dat

$$(4.27) \qquad K(t,f) \leq C_1 t^{\theta} ||f||_X \ , \qquad (f \in X,\ 0 < t < 1);$$

b) de klasse $\mathcal{J}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, als er een constante C_2 bestaat zo, dat

$$(4.28) \qquad ||f||_X \leq C_2 t^{-\theta} J(t,f) \ , \qquad (f \in X_1,\ 0 < t < 1);$$

c) de klasse $\mathcal{H}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, als X zowel tot de klasse $\mathcal{K}(\theta;X_0,X_1)$ als tot de klasse $\mathcal{J}(\theta;X_0,X_1)$ behoort.

4.16. Lemma. Een intermediaire ruimte X van X_0 en X_1 behoort tot
a) de klasse $\mathcal{K}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, dan en slechts dan als

$$(4.29) \qquad X \subset [X_0,X_1]_{\theta,\infty;K} \quad ;$$

b) de klasse $\mathcal{J}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, dan en slechts dan als

$$(4.30) \qquad [X_0,X_1]_{\theta,1;J} \subset X \quad ;$$

c) de klasse $\mathcal{H}(\theta;X_0,X_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$, dan en slechts dan als

$$(4.31) \qquad [X_0,X_1]_{\theta,1;J} \subset X \subset [X_0,X_1]_{\theta,\infty;K} \ .$$

Bewijs. a) Wegens de monotonie van $K(t,f)$ is (4.27) equivalent met

$$\sup_{n=1,2,..} n^{\theta} K(n^{-1},f) \leq C_1 ||f||_X \ ,$$

hetgeen weer equivalent is met (4.29).

b) Zij X van de klasse $\mathcal{J}(\theta;X_0,X_1)$ en $f \in [X_0,X_1]_{\theta,1;J}$.

Dan bestaat er een rij $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ zo, dat $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/n$, met

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^{\theta} J(n^{-1}, u_n)] \frac{1}{n} < \infty .$$

Wegens (4.28) geldt echter

$$(4.32) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_X \frac{1}{n} \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta} J(n^{-1}, u_n) \frac{1}{n} < \infty .$$

Uit de volledigheid van X volgt nu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{1}{n} = f'$ voor een element $f' \in X$. Dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{1}{n} = f'$ in de X_0 norm en dus is $f' = f$. Dus volgt uit (4.32)

$$||f||_X \leq C_2 ||f||_{\theta,1;J} ,$$

zodat $[X_0,X_1]_{\theta,1;J} \subset X$.

Is omgekeerd $[X_0,X_1]_{\theta,1;J} \subset X$ en $f \in X_1$, dan kiezen wij voor f de speciale representatie $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n$ met $v_n = f. \delta_{k,n} \in X_1$ ($\delta_{k.n}$ = Kronecker delta) voor vaste k, $0 < k < \infty$. Wij krijgen dan volgens stelling 4.9

$$||f||_X \leq D||f||_{\theta,1;J} \leq D \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{n\theta} J(2^{-n}, v_n) = D2^{k\theta} J(2^{-k}, f).$$

Wegens de monotonie van $J(t,f)$ volgt hieruit (4.28). Dit bewijst gedeelte b). Het gedeelte c) volgt uit a) en b).

<u>4.17. Gevolg</u>. De ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;K}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ en $0 \leq \theta \leq 1$, $q = \infty$ en de ruimten $[X_0,X_1]_{\theta,q;J}$, $0 < \theta < 1$, $1 < q \leq \infty$ en $0 \leq \theta \leq 1$, $q = 1$ zijn van de klasse $\mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$.

<u>Bewijs</u>. Volgt uit de stellingen 4.12, 4.13 en lemma 4.16.

<u>4.18. Lemma</u>. Gegeven twee intermediaire ruimten X_{θ_1} en X_{θ_2} van X_0 en X_1 zo, dat $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 1$ en X_{θ_i} behoort tot de klasse $\mathcal{K}(\theta_i;X_0,X_1)$, $i = 1,2$. Dan is voor $\theta = (1-\theta')\theta_1 + \theta'\theta_2$

$$[X_{\theta_1},X_{\theta_2}]_{\theta',q;K'} \subset [X_0,X_1]_{\theta,q;K} \ ,$$

$(0 < \theta' < 1,\ 1 \leq q \leq \infty$ en $0 \leq \theta' \leq 1,\ q = \infty)$.

<u>Bewijs</u>. Is $f \in [X_{\theta_1},X_{\theta_2}]_{\theta',q;K'}$, dan geldt voor elke mogelijke splitsing $f = f_{\theta_1} + f_{\theta_2}$, $f_{\theta_i} \in X_{\theta_i}$, $i = 1,2$, wegens het gegeven

$$\begin{aligned} K(a^{-n},f;X_0,X_1) &\leq K(a^{-n},f_{\theta_1}) + K(a^{-n},f_{\theta_2}) \\ &\leq C_{\theta_1}\, a^{-n\theta_1}||f_{\theta_1}||_{X_{\theta_1}} + C_{\theta_2}\, a^{-n\theta_2}||f_{\theta_2}||_{X_{\theta_2}} \\ &\leq M\, a^{-n\theta_1}(\ ||f_{\theta_1}||_{X_{\theta_1}} + b^{-n}||f_{\theta_2}||_{X_{\theta_2}}) \ , \end{aligned}$$

waarbij $M = \max(C_{\theta_1},C_{\theta_2})$ en $b = a^{(\theta_2-\theta_1)}$. Dus is

$$K(a^{-n},f) \leq M\, a^{-n\theta_1}\, K'(b^{-n},f;X_{\theta_1},X_{\theta_2}) \ ,$$

zodat volgens stelling 4.8

$$\begin{aligned} ||f||_{\theta,q;K} &\leq M\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta'(\theta_2-\theta_1)}K'(b^{-n},f)]^q\}^{1/q} \\ &= M||f||_{\theta',q;K'} \ , \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

<u>4.19. Lemma</u>. Gegeven twee intermediaire ruimten X_{θ_1} en X_{θ_2} van X_0 en X_1 zo, dat $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$ en X_{θ_i} behoort tot de klasse $\mathcal{J}(\theta_i;X_0,X_1)$, $i = 1,2$. Dan is voor $\theta = (1-\theta')\theta_1 + \theta'\theta_2$

$$[X_0,X_1]_{\theta,q;J} \subset [X_{\theta_1},X_{\theta_2}]_{\theta',q;J'} ,$$

$(0 < \theta' < 1,\ 1 \le q \le \infty$ en $0 \le \theta' \le 1,\ q = 1)$.

<u>Bewijs</u>. Zij $f \in [X_0,X_1]_{\theta,q;J}$ en zij $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ in de X_0 norm een representatie van f met $u_n \in X_1$ en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta}J(a^{-n},u_n)]^q < \infty.$$

Omdat $X_1 \subset X_{\theta_i}$, is $u_n \in X_{\theta_1}$ en dus volgt voor $b = a^{(\theta_2-\theta_1)}$

$$J'(b^{-n},u_n;X_{\theta_1},X_{\theta_2}) = \max(||u_n||_{X_{\theta_1}},\ a^{-n(\theta_2-\theta_1)}||u_n||_{X_{\theta_2}})$$

$$\le \max(D_{\theta_1}\ a^{n\theta_1}J(a^{-n},u_n),\ D_{\theta_2}\ a^{n\theta_1}J(a^{-n},u_n))$$

$$\le M\ a^{n\theta_1}J(a^{-n},u_n;X_0,X_1),$$

waarbij $M = \max(D_{\theta_1},D_{\theta_2})$.

Nu geldt wegens (4.5)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} ||u_n||_{X_{\theta_1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K'(1,u_n) \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \min(1,b^n)J'(b^{-n},u_n)$$

$$\le \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [b^{n\theta'}J'(b^{-n},u_n)]^q\}^{1/q} \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [b^{-n\theta'}\min(1,b^n)]^{q'}\}^{1/q'}$$

$$\le M\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [b^{-n\theta'}\min(1,b^n)]^{q'}\}^{1/q'} \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n\theta}J(a^{-n},u_n)]^q\}^{1/q} < \infty$$

Wegens de volledigheid van X_{θ_1} geldt dus $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = f'$ in de X_{θ_1} norm en dus in de X_0 norm, dus $f = f'$.
Uit de laatste ongelijkheid volgt na het nemen van het infinum op grond van stelling 4.9

$$||f||_{\theta',q;J'} \le M||f||_{\theta,q;J} .$$

Wij komen nu tot de volgende stelling.

<u>4.20. Stelling</u>. Zijn de ruimten X_{θ_i} intermediaire ruimten van X_0 en X_1 die behoren tot de klasse $\mathcal{H}(\theta_i;X_0^i,X_1)$, $i = 1,2$ en $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$. Dan geldt voor $0 < \theta' < 1$, $1 \le q \le \infty$ en $\theta = (1-\theta')\theta_1 + \theta'\theta_2$

$$[X_{\theta_1},X_{\theta_2}]_{\theta',q;K'} \cong [X_0,X_1]_{\theta,q;K} \cong [X_0,X_1]_{\theta,q;J} \cong [X_{\theta_1},X_{\theta_2}]_{\theta',q;J'} ,$$

d.w.z. de ruimten zijn onderling gelijk en hebben equivalente normen.

<u>Bewijs</u>. Deze stelling volgt door combinatie van de lemma's 4.18 en 4.19 met stelling 4.12.

Combinatie van gevolg 4.17 met stelling 4.20 levert:

<u>4.21. Gevolg</u>. Voor $0 < \theta' < 1$, $1 \le q,p,r \le \infty$ en $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$ met $\theta = (1-\theta')\theta_1 + \theta'\theta_2$ geldt

$$[[X_0,X_1]_{\theta_1,p;K}, [X_0,X_1]_{\theta_2,r;K}]_{\theta',q;K'} \stackrel{\sim}{=} [X_0,X_1]_{\theta,q;K}$$

en

$$[[X_0,X_1]_{\theta_1,p;J} , [X_0,X_1]_{\theta_2,r;J}]_{\theta',q;J'} \stackrel{\sim}{=} [X_0,X_1]_{\theta,q;J} .$$

Dit is de iteratie-eigenschap, die wij al hadden aangekondigd.

Wij kunnen met behulp van de tot dusver afgeleide resultaten enige directe en inverse stellingen bewijzen voor approximatieprocessen die bestaan uit een rij respectievelijk een schaar naar de identiteit convergerende operatoren van een Banachruimte $X \to X$.

<u>4.22. Definitie</u>. Zij $B = \{B_s, 0 < s < \infty\}$ een schaar begrensde lineaire operatoren die de Banachruimte X in zichzelf afbeelden. Dan noemen wij B een (abstract) approximatieproces, wanneer geldt:

$$(4.33)\quad \begin{cases} \text{a) } ||B_s|| \leq M , \quad 0 < s < \infty, \\ \text{waarbij de constante M niet van s afhangt.} \\ \text{b) } \lim\limits_{s\to\infty} ||B_s f-f||_X = 0, \ \forall f \in X. \\ \text{c) } B_s B_t = B_t B_s , \quad 0 < s,t < \infty. \end{cases}$$

<u>4.23. Opmerking</u>. Een voorbeeld van een dergelijk approximatieproces B wordt gevormd door de schaar translatieoperatoren $\{T_t, 0 < t < \infty\}$, die op $C_{2\pi}$ gedefinieerd zijn door

$$T_s\, f(x) = f(x+1/s), \quad 0 < s < \infty.$$

Evident is

$$\text{a) } ||f||_\infty = ||T_s f||_\infty \quad , f \in C_{2\pi} ;$$

$$\text{b) } \lim_{s\to\infty} ||T_s f-f||_\infty = 0 \quad , f \in C_{2\pi} .$$

Het is nu mogelijk de continuïteitsmodulus op te vatten als een maat voor de approximatiesnelheid van het proces T_s. Er geldt namelijk

$$\omega(f,t) = \sup_{0<1/s<t} ||T_s f-f||_\infty \quad .$$

Ook kan men op deze wijze de functieklassen Lip(α), $0 < \alpha \leq 1$, interpreteren als de klasse elementen f uit $C_{2\pi}$, waarvoor

$$||T_s f-f||_\infty = O(s^{-\alpha}).$$

In de volgende definities worden deze begrippen gegeneraliseerd voor een algemeen approximatieproces B.

4.24. Definities.

a) De B-approximatiemodulus $\omega_B(f,t)$ van $f \in X$ gedefinieerd door

$$\omega_B(f,t) = \sup_{s \geq t} ||B_s f-f||_X, \quad 0 < t < \infty . \tag{4.34}$$

b) Op X wordt gedefinieerd de gegeneraliseerde norm ($\alpha \geq 0$)

$$||f||_{\alpha,q,B} = \begin{cases} ||f||_X + \{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^\alpha \, \omega_B(f,n))^q \frac{1}{n}\}^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \\ ||f||_X + \sup\limits_{1 \leq n < \infty} n^\alpha \, \omega_B(f,n) & , \; q = \infty. \end{cases} \tag{4.35}$$

c) De deelruimte $X_{\alpha,q,B} = \{f \in X| \; ||f||_{\alpha,q,B} < \infty\}$.

4.25. Eigenschappen van $\omega_B(f,t)$.

Voor f, $f_0 \in X$ en $s,t > 0$ geldt:

a) $\omega_B(f,s) \leq \omega_B(f,t)$, $s > t$.

b) $\omega_B(f,t) \leq 2M \,||f||_X$, $t > 0$, (zie (4.33)).

c) $\omega_B(f+f_0,t) \leq \omega_B(f,t) + \omega_B(f_0,t)$, (driehoeksongelijkheid).

Er geldt de volgende stelling:

4.26. Stelling. Zij B een approximatieproces op X, dat wil zeggen, dat B aan voorwaarde (4.33) voldoet. Dan geldt voor elk paar (α,q), $\alpha > 0$, $1 \leq q \leq \infty$, dat $X_{\alpha,q,B}$ een Banachdeelruimte van X is met als norm (4.35).

Bewijs. Het is duidelijk, dat $||.||_{\alpha,q,B}$ aan de driehoeksongelijkheid voldoet en dus een norm is. Bijgevolg is $X_{\alpha,q,B}$ een lineaire, genormeerde deelruimte van X. Wij bewijzen nu, dat $X_{\alpha,q,B}$ volledig is op dezelfde manier als in stelling 4.5. Aangezien de volledigheid van $X_{\alpha,q,B}$ equivalent is met het feit, dat elke absoluut convergente reeks uit $X_{\alpha,q,B}$ convergent is in $X_{\alpha,q,B}$, hoeven wij dit laatste feit slechts te bewijzen. Veronderstel, dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ een absoluut convergente reeks uit $X_{\alpha,q,B}$ is, dat wil zeggen, dat $f_n \in X_{\alpha,q,B}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\alpha,q,B} < \infty$. Dan geldt wegens (4.35) $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_X < \infty$ en dus bestaat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ in X, omdat X een Banachruimte is. Voor deze f geldt, wegens de driehoeksongelijkheid

$$||f||_{\alpha,q,B} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\alpha,q,B} < \infty,$$

dus $f \in X_{\alpha,q,B}$. Aangezien

$$||f-\sum_{k=1}^{n} f_k||_{\alpha,q,B} \leq \sum_{k=1+n}^{\infty} ||f_k||_{\alpha,q,B} \quad ,$$

geldt $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ in $X_{\alpha,q,B}$; dus is $X_{\alpha,q,B}$ volledig.

Analoog aan 4.8. voeren wij ook hier een norm in, die equivalent is met de norm (4.35). Hiertoe hebben wij de norm $||.||_{l^q}$, $1 \leq q \leq \infty$, nodig. Wij definiëren de normen $||a||_{l^q}$, voor een getallenrij $a = \{a_n, -\infty < n < \infty\}$ door:

$$(4.36) \qquad ||a||_{l^q} = \begin{cases} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q} & , \quad 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{-\infty<n<\infty} |a_n| & , \quad q = \infty. \end{cases}$$

<u>4.27. Stelling</u>. Voor $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \alpha$, zijn de normen

$$||f||_{\alpha,q,B,a} = ||f||_X + ||a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n)||_{l^q} \quad , \quad a > 1,$$

equivalent met de norm $||f||_{\alpha,q,B}$.

<u>Bewijs</u>. Wij moeten aantonen, dat er constanten $C_0(\alpha,q,a)$ en $C_1(\alpha,q,a) > 0$ bestaan zo, dat geldt

$$(4.37) \qquad C_0(\alpha,q,a)\,[||f||_X + (\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^{n\alpha}\ \omega_B(f,a^n))^q)^{1/q}]$$

$$\leq ||f||_X + (\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha}\ \omega_B(f,n))^q\ \frac{1}{n})^{1/q}$$

$$\leq C_1(\alpha,q,a)\,[||f||_X + (\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n))^q)^{1/q}]$$

Het bewijs is analoog met het bewijs van stelling 4.8. Ook hier wordt gebruik gemaakt van de ongelijkheid

$$\log a \le \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} {}^{1}/k \le 2\log a, \quad n \ge 0. \tag{4.38}$$

Wij bewijzen eerst de linkerhelft van (4.37) met behulp van de ongelijkheid van Minkowski, (4.38) en het feit, dat $\omega_B(f,t) < 2M||f||_X$:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n))^q\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\sum_{n=-\infty}^{0} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n))^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n))^q\right)^{1/q}$$

$$\le 2M||f||_X\left(\sum_{n=-\infty}^{0} a^{n\alpha q}\right)^{1/q} + a\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k}\right\}^{-1} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^{n+1}))^q \frac{1}{k}\right)^{1/q}$$

$$\le 2M\left(\frac{1}{1-a^{-\alpha q}}\right)^{1/q} ||f||_X + {}^{a}/(\log a)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^{\alpha}\omega_B(f,k))^q \frac{1}{k}\right)^{1/q}$$

$$\le C_0^{-1}(\alpha,q,a)\left(||f||_X + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^{\alpha}\omega_B(f,k))^q \frac{1}{k}\right)^{1/q}\right).$$

Voor het bewijs van de rechterongelijkheid hebben wij alleen 4.25 a) en (4.38) nodig:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha}\omega_B(f,n))^q \frac{1}{n}\right)^{1/q} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k} (k^{\alpha}\omega_B(f,k))^q\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=[a^n]}^{[a^{n+1}]-1} \frac{1}{k} (a^{(n+1)\alpha}\, \omega_B(f,a^n))^q\right)^{1/q}$$

$$\le (2\log a)^{1/q}\, a^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n))^q\right)^{1/q}$$

$$\le C_1(\alpha,q,a)\ ||f||_{\alpha,q,B} \quad .$$

Hiermee is het bewijs voltooid voor $1 \le q < \infty$; het geval $q = \infty$ is triviaal.

Wij kunnen de volgende inclusiestelling bewijzen.

4.28. Stelling. Er gelden de volgende inclusies:

a) $X_{\alpha,q_1,B} \subset X_{\alpha,q_2,B}$ $(\alpha > 0,\ 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty)$;

en

b) $X_{\alpha_1,q_1,B} \subset X_{\alpha_2,q_2,B}$ $(\alpha_1 > \alpha_2 > 0,\ 1 \leq q_1,q_2 \leq \infty)$.

Een evident gevolg hiervan is, dat geldt voor $f \in X_{\alpha,q,B}$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$,

$$\omega_B(f,s) = O(s^{-\alpha}) \qquad (s \to \infty). \tag{4.39}$$

Bewijs. Eerst wordt a) bewezen. Er geldt $||a||_{l^p} \leq ||a||_{l^q}$, $a = \{a_n, -\infty < n < \infty\}$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Zij namelijk

$$b = \{b_n = {}^{a_n}/_{||a||_{l^q}}\ , -\infty < n < \infty\} .$$

Dan is $|b_n| \leq 1$, dus

$$||b||_{l^p} \leq ||b||_{l^q} = 1.$$

Hieruit volgt $||a||_{l^p} \leq ||a||_{l^q}$, hetgeen aan te tonen was. De inclusie a) is hiervan een direct gevolg.

Nu a) bekend is, hoeven wij slechts aan te tonen

$$X_{\alpha_1,\infty,B} \subset X_{\alpha_2,1,B} \ ,$$

om b) te bewijzen.

Stel $f \in X_{\alpha_1,\infty,B}$. Dan geldt wegens 4.25 b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n\alpha_2}\omega(f,a^n) \le ||f||_X\, 2M \sum_{n=-\infty}^{0} a^{n\alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{n\alpha_2}\omega_B(f,a^n)$$

$$\le ||f||_X \frac{2M}{1-a^{-\alpha_2}} + \sup_{0<n<\infty} (a^{n\alpha_1}\omega_B(f,a^n)) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n(\alpha_2-\alpha_1)}$$

$$\le \quad C[||f||_X + \sup_{-\infty<n<\infty} (a^{n\alpha_1}\omega_B(f,a^n))]$$

$$\le \quad C||f||_{\alpha_1,\infty,B,a} ,$$

hetgeen te bewijzen was.

4.29. Nu zullen wij voor de rest van de voordracht behalve (4.33) aan het approximatieproces nog de eis opleggen, dat geldt:

Er is met B geassocieerd een getal $j_0 > 0$ en een gesloten lineaire operator A, die als definitiegebied D(A) een dichte deelruimte van X heeft en die D(A) in X afbeeldt zo, dat geldt in de norm van X

(4.40) $$\lim_{s\to\infty} s^{j_0}(B_s f-f) = Af, \quad f \in D(A).$$

Men kan het definitiegebied D(A) van een gesloten lineaire operator A, $D(A) \to X$, opvatten als een Banachdeelruimte van X onder de norm

(4.41) $$||f||_{D(A)} = ||f||_X + ||Af||_X , \quad f \in D(A).$$

Wij zullen dit aantonen. Het is duidelijk dat D(A) onder de norm (4.41) een genormeerde deelruimte van X is, die aan de norm ongelijkheid (4.1) met M = 1 voldoet. Alleen de volledigheid hoeft dus nog aangetoond te worden. Hiertoe is de geslotenheid van de operator A nodig: Een operator A heet gesloten wanneer geldt: $f_n \to f$ en $Af_n \to g$ impliceert $f \in D(A)$ en $Af = g$. Wij zien eenvoudig in, dat de geslotenheid van A equivalent ermee is, dat

$$\{(f,Af) \mid f \in D(A)\}$$

een gesloten deelverzameling van $X \times X$ met norm $||(f_1,f_2)||_{X\times X} = ||f_1||_X + ||f_2||_X$ is. Nu komt de norm (4.41) met de genoemde norm op $X \times X$ overeen en dus is $D(A)$ als gesloten deelverzameling van de volledige ruimte $X \times X$ volledig.

Wanneer B aan (4.33) en (4.40) voldoet, dan zijn wij in staat om voor B een saturatiestelling en een directe stelling te bewijzen, beide gevat in het formalisme van intermediaire ruimten.
Wij geven nu eerst de directe stelling.

4.30. Stelling. Laat B aan (4.33) en (4.40) voldoen en laat bovendien gelden, dat $B_s f \in D(A)$, $\forall f \in X$, $s > 0$. Dan geldt

$$[X,D(A)]_{\alpha/j_0,q;K} \subset X_{\alpha,q,B}, \qquad \begin{matrix} 1 \le q \le \infty, & 0 < \alpha < j_0, \\ q = \infty, & \alpha = j_0. \end{matrix}$$

Bewijs. Wij bewijzen nu eerst, dat voor alle $f \in D(A)$ geldt

$$(4.42) \qquad s^{j_0}||B_s f-f||_X \le N||f||_{D(A)}, \ N \text{ constante}, \ N > 0.$$

Wegens (4.40) geldt voor alle $f \in D(A)$, dat er een getal $N_f > 0$ bestaat zo, dat

$$s^{j_0}||B_s f-f||_X \le N_f.$$

Nu volgt door toepassing van de stelling van Banach-Steinhaus, (zie Dunford en Schwartz [4], pag. 81) op de schaar begrensde operatoren $C_s = s^{j_0}(B_s-I)$, die $D(A)$ in X afbeelden, dat er een constante N bestaat zo, dat (4.42) geldt voor alle $f \in D(A)$.

Voor $f = f_1+f_2$, $f_1 \in X$, $f_2 \in D(A)$ geldt wegens (4.42) en 4.25 b) de relatie

$$\omega_B(f,t) \leq \omega_B(f_1,t) + \omega_B(f_2,t)$$

$$\leq M_0(||f_1||_X + t^{-j_0}||f_2||_{D(A)} \quad .$$

Aangezien dit voor elke splitsing $f = f_1+f_2$ van f geldt, volgt hieruit de relatie

$$\omega_B(f,t) \leq M_0 K(t^{-j_0},f;X,D(A)). \tag{4.43}$$

Nu is de gewenste inclusie eenvoudig te bewijzen. Stel $f \in [X,D(A)]_{\alpha/j_0,q;K}$ dan geldt wegens (4.43):

$$||a^{n\alpha}\omega_B(f,a^n)||_{l^q} \leq M||a^{n\alpha}K(a^{-j_0 n},f;X,D(A))||_{l^q}$$

$$\leq M_0||b^{n\alpha/j_0} K(b^{-n},f;X,D(A))||_{l^q}, \quad b = a^{j_0} \quad ,$$

$$< \infty \; .$$

En dus is $f \in X_{\alpha,q,B}$, (zie Stelling 4.8) en geldt
$||f||_{\alpha,q,B} \leq N_0||f||_{\alpha/j_0,q;K}$.

De stelling 4.30 is een directe stelling, omdat erin voorwaarden gegeven worden, onder welke een zekere approximatiesnelheid van het proces B volgt. Nu bewijzen wij de saturatiestelling voor het proces B.

<u>4.31. Stelling</u>. Laat B aan (4.33) en (4.40) voldoen en laat bovendien gelden, dat $B_s f \in D(A)$, $\forall f \in X$, $s > 0$. Dan geldt

a) $\omega_B(f,t) = o(t^{-j_0})$, dan en slechts dan als $f \in N(A)$, de nulruimte van de operator A.

b) $\omega_B(f,t) = O(t^{-j_0})$, dan en slechts dan als $f \in [X,D(A)]_{1,\infty;K}$.

<u>Bewijs</u>. Eerst wordt a) aangetoond. Uit relatie (4.40) is het duidelijk, dat voor $f \in N(A)$ geldt $\omega_B(f,t) = o(t^{-j_0})$. Wanneer anderzijds $\omega_B(f,t) = o(t^{-j_0})$, dan vinden wij de afschatting:

$$||B_tB_sf-B_sf||_X = o(t^{-j_0}) \ .$$

Maar uit (4.40) en het feit, dat $B_sf \in D(A)$, leiden wij af

$$A\ B_sf = 0 \ , \quad \forall s > 0.$$

Aangezien $B_sf \to f, s\to\infty$, in X, $A\ B_sf = 0$, $s > 0$, volgt $A\ B_sf \to 0$. Daar de operator A gesloten is, geldt $f \in D(A)$ en $Af = 0$, hetgeen te bewijzen was.

Nu tonen wij b) aan. Uit stelling 4.30 volgt al

$$[X,D(A)]_{1,\infty;K} \subset X_{j_0,\infty,B},$$

zodat wij nog slechts aan hoeven tonen, dat uit $\omega_B(f,t) = O(t^{-j_0})$ volgt $f \in [X,D(A)]_{1,\infty;K}$. Er geldt wegens (4.33) en (4.40):

$$(4.44) \qquad ||B_tf-f||_X \leq t^{-j_0}||f||_{j_0,\infty,B} \ , \quad t > 0 \ .$$

$$(4.45) \qquad \begin{aligned} ||B_tf||_{D(A)} &= ||B_tf||_X + || + ||A\ B_tf||_X \\ &= ||B_tf||_X + \lim_{s\to\infty} ||s^{j_0}(B_s-I)B_tf||_X \\ &\leq M(||f||_X + \lim_{s\to\infty} ||s^{j_0}(B_sf-f)||_X) \\ &\leq M||f||_{j_0,\infty,B}. \end{aligned}$$

Door in (4.44) en (4.45) te stellen $t = n^{1/j_0}$ vinden wij:

$$n\,K(n^{-1},f) \le n(||B_t f-f||_X + n^{-1}||B_t f||_{D(A)})$$

$$\le n(||f||_{j_0,\infty,B}\, t^{-j_0} + n^{-1}M\, ||f||_{j_0,\infty,B})$$

$$\le M'\, ||f||_{j_0,\infty,B} \;.$$

Dus is

$$X_{j_0,\infty,B} \subset [X,D(A)]_{1,\infty;K}\;,$$

hetgeen te bewijzen was.

Om een inverse stelling voor het approximatieproces B te bewijzen zo, dat een volledige karakterisering van de approximatieruimten $X_{\alpha,q,B}$ bereikt wordt, moeten wij nog de volgende voorwaarde aan het approximatieproces opleggen:

$$\text{(4.46)}\quad \begin{aligned} &a)\ B_s f \in D(A) \qquad f \in X,\ s > 0.\\ &b)\ ||A\,B_s f||_X \le N\, s^{j_0}||f||_X\,, \quad s > 0,\ f \in X. \end{aligned}$$

<u>4.32. Stelling</u>. Laat het approximatieproces B aan (4.46), (4.40) en (4.33) voldoen. Dan geldt:

$$X_{\alpha,q,B} \subset [X,D(A)]_{\alpha/j_0,q;K}\;, \quad 0 < \alpha < j_0.$$

<u>Bewijs.</u> Wij tonen eerst aan

$$\text{(4.47)}\quad K(t^{-j_0},f) \le M\,\min(1,t^{-j_0})||f||_X + 2^{j_0+1}N\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kj_0}\,\omega_B(f,2^{-k}t),$$
$$t > 0,\ f \in X.$$

Het bewijs van (4.47) is analoog aan dat van stelling 3.17. Wij splitsen f in $f = f_1+f_2$, $f_1 = f-B_sf \in X$, $f_2 = B_sf \in D(A)$. Dan vinden wij de relaties

$$
(4.48)\qquad
\begin{aligned}
||f_1||_X &= ||B_sf-f||_X \leq \omega_B(f,s), \\
||f_2||_{D(A)} &= ||B_sf||_X + ||AB_sf||_X \leq M||f||_X + ||AB_sf||_X .
\end{aligned}
$$

Er geldt voor $m = 1,2,\ldots$:

$$
A\,B_sf = \sum_{k=0}^{m} (A\,B_{2^{-k}s}f - AB_{2^{-k-1}s}f) + A\,B_{2^{-m-1}s}f ,
$$

en dus geldt

$$
(4.49)\qquad
\begin{aligned}
&||A\,B_sf||_X \\
&\leq \sum_{k=0}^{m} (||A\,B_{2^{-k}s}||\;||B_{2^{-k-1}s}f-f||_X + ||A\,B_{2^{-k-1}s}||\;||B_{2^{-k}s}f-f||_X) + \\
&\qquad + ||A\,B_{2^{-m-1}s}||\;||f||_X ,
\end{aligned}
$$

waarbij de driehoeksongelijkheid is toegepast op

$$
||A\,B_{2^{-k}s}f-A\,B_{2^{-k-1}s}||_X = ||A\,B_{2^{-k}s}(I-B_{2^{-k-1}s})f - A\,B_{2^{-k-1}s}(I-B_{2^{-k}s})f||_X .
$$

Wanneer (4.48) en (4.46) gecombineerd worden met (4.49), vinden wij

$$
(4.50)\qquad
\begin{aligned}
&||A\,B_sf||_X \\
&\leq N\,s^{j_0}\Big(\sum_{k=0}^{m}\{2^{-kj_0}\omega_B(f,2^{-k-1}s) + 2^{-(k+1)j_0}\omega_B(f,2^{-k}s)\} + 2^{-(m+1)j_0}||f||_X\Big) \\
&\leq 2^{j_0+1}\,N\,s^{j_0}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kj_0}\,\omega_B(f,2^{-k}s).
\end{aligned}
$$

Nu hebben wij voor $t > 0$, en $0 \leq s \leq \infty$ de relatie

$$K(t,f) \leq ||f_1||_X + t||f_2||_{D(A)}$$

$$\leq \omega_B(f,s) + M\, t||f||_X + t\, 2^{j_0+1} N\, s^{j_0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kj_0}\, \omega_B(f,2^{-k}s).$$

Aangezien $K(t,f) \leq ||f||_X$ voor alle $t > 0$, volgt (4.47) uit de vorige formule, wanneer er $t = s^{-j_0}$ ingevuld wordt.

Veronderstel nu, dat f een element van $X_{\alpha,q,B}$ is, $0 < \alpha < j_0$, $1 \leq q \leq \infty$, dan volgt uit (4.47) en de Minkowski-ongelijkheid:

$$||f||_{\alpha/j_0,q;K} \leq C||2^{n\alpha}K(2^{-j_0 n},f)||_{l^q}$$

$$\leq C\{M\, ||2^{n\alpha}\min(1,2^{-j_0 n})||_{l^q}\, ||f||_X +$$

$$2^{j_0+1}N \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-j_0 k}\, ||2^{n\alpha}\omega_B(f,2^{-k}2^{n})||_{l^q}\}$$

$$\leq C\{M\, ||2^{n\alpha}\min(1,2^{-j_0 n})||_{l^q}\, ||f||_X +$$

$$2^{j_0+1}\, N \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\alpha-j_0)k}\, ||2^{-\alpha k}2^{\alpha n}\, \omega_B(f,2^{-k}2^{n})||_{l^q}\}$$

$$\leq C'\, ||f||_{\alpha,q,B}\, ,$$

hetgeen te bewijzen was.

Nu zal aan de hand van een betrekkelijk eenvoudig voorbeeld uit hoofdstuk 3 toegelicht worden, hoe de voorgaande stellingen toegepast worden. In hoofdstuk 3 hebben wij approximatieprocessen K_λ, geassocieerd met een kern $k \in L^1(R)$, bestudeerd. Zo'n proces K_λ werd gedefinieerd door: $K_\lambda f = f * \lambda k(\lambda x)$, $f \in L^p$, U C B of $C_{2\pi}$, zie (3.1) en paragraaf 3.3.

<u>4.33. Stelling</u>. Zij de kern m gelijk aan de karakteristieke functie van het interval $[-1,0]$; dat wil zeggen

$$m(t) = 1 \quad , \quad -1 \leq t \leq 0,$$
$$m(t) = 0 \quad , \quad \text{elders} .$$

Zij $X = C_{2\pi}$ en $A = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}$.
Dan geldt voor het approximatieproces $M = \{M_\lambda ;\ 0 < \lambda < \infty\}$ dat met de kern m geassocieerd is:

a) $X_{\alpha,q,M} \cong [X,D(A)]_{\alpha,q;K}$, $0 < \alpha < 1,\ 1 \leq q \leq \infty$.

b) $X_{1,\infty,M} \cong [X,D(A)]_{1,\infty;K}$.

c) Wanneer voor $f \in X$ geldt

$$\omega_M(f,t) = o(t^{-1}),$$

dan geldt $f \in D(A)$ en $Af = 0$.

<u>Bewijs</u>. Aangezien $m \in L^1(R)$ en $\int_{-\infty}^{\infty} m(t)\, dt = 1$, is het approximatieproces M_λ gedefinieerd door

$$M_\lambda f(x) = f * \lambda m(\lambda x) \ , \qquad f \in C_{2\pi},$$
$$= \lambda \int_0^{1/\lambda} f(x+t)\, dt,$$
$$= \lambda \int_x^{x+1/\lambda} f(t)\, dt$$

een approximatieproces op $C_{2\pi}$ in de zin van definitie 4.22. Immers, (4.33a) volgt uit het feit dat $||M_\lambda|| \leq ||m||_{L^1(R)}$,

(4.33b) volgt uit stelling 3.5,

(4.33c) volgt uit de stelling van Fubini.

Nu wordt eerst aangetoond, dat voor $f \in D(A)$ geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(M_\lambda f-f) = Af, \ f \in D(A) \ .$$

Hierbij wordt de limiet in de X-norm bedoeld.
Wij kunnen schrijven: $f(x+{}^t/\lambda) = f(x) + {}^t/\lambda \ f'(x) + o({}^t/\lambda)$. De rest-term is $o({}^t/\lambda)$ uniform in x. Hieruit volgt m.b.v. de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue:

$$(4.51) \qquad \begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(M_\lambda f-f)(x) &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^1 (f(x+{}^t/\lambda) - f(x))dt \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^1 (f'(x){}^t/\lambda + o({}^t/\lambda))dt \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^1 (f'(x)t + \lambda o({}^t/\lambda))dt \\ &= \tfrac{1}{2} f'(x). \end{aligned}$$

Aangezien $\lambda o({}^t/\lambda)$ in (4.51) uniform in x naar nul gaat, geldt ook in de norm van $C_{2\pi}$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(M_\lambda f-f) = Af, \qquad f \in C_{2\pi} \ .$$

Bovendien geldt:

$$M_\lambda f \in D(A), \quad f \in C_{2\pi} \quad ,$$

zodat het proces M ook aan (4.40) voldoet.

Wij vinden de relatie

$$||A\ M_\lambda f||_\infty = ||\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lambda \int_x^{x+1/\lambda} f(t)dt||_\infty$$

$$= ||\tfrac{1}{2}\lambda(f(x+{}^1/\lambda) - f(x)||_\infty$$

$$\leq \lambda\ ||f(x)||_\infty\ ,$$

zodat het proces M aan de voorwaarden (4.33), (4.40) en (4.46) voldoet, met $j_0 = 1$ en $A = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}$. Het te bewijzen is nu een gevolg van de stellingen 4.30, 4.31 en 4.32.

4.34. Opmerking. In dit hoofdstuk hebben wij al laten zien, dat de ruimten $[C_{2\pi}, D(\frac{d}{dx})]_{\alpha,q,K}$ generalisaties van de ruimten Lip(α) zijn. Bovendien geldt $[C_{2\pi}, D(\frac{d}{dx})]_{1,\infty,K}$ = Lip(1), zoals men direct inziet uit relatie (4.20) en (4.26).

Wij zullen nu enkele minder triviale voorbeelden behandelen.

4.35. Wij onderzoeken eerst het approximatieproces, dat ontstaat door convolutie met de Weierstrass kern, die in 3.11 al is ingevoerd. De kern $w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ geeft aanleiding tot het volgende approximatieproces voor $f \in C_{2\pi}$

(4.52) $$W_\lambda\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2 y^2}\ f(x-y)\ dy\ .$$

Na de substitutie $\lambda^2 = 1/4t$ gaat (4.52) over in

(4.53) $$V_t\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t}\ f(x-y)\ dy$$

en het is gemakkelijk na te gaan dat $V_t\ f(x)$ de oplossing is van de warmtevergelijking

$$(4.54)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad\qquad (0 < x < 2\pi\ ;\ t > 0)$$

met de randvoorwaarden

$$u(0,t) = u(2\pi,t)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t)$$

en de beginvoorwaarde

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)\ .$$

Voor de Weierstrass kern (4.52) is in lemma 3.10 al een puntsgewijze limietrelatie afgeleid. Indien $f \in C^2_{2\pi}$, dan geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2(W_\lambda f(x) - f(x)) = \tfrac{1}{4}f''(x)$$

omdat

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, e^{-y^2}\, dy = \tfrac{1}{2}\ .$$

Aangezien voor functies uit $C^2_{2\pi}$ de tweede afgeleide uniform continu is, kan het bewijs van deze limietrelatie zo worden aangepast, dat volgt

$$(4.55)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} ||\lambda^2(W_\lambda f - f) - \tfrac{1}{4}f''||_\infty = 0\ .$$

Dit is een limietrelatie van de vorm (4.40), waarbij $j_0 = 2$ en $A = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}$. Er geldt dat $W_\lambda f \in D(A)$.

Om een ongelijkheid van het type (4.46) te vinden maken wij gebruik van het feit dat na de substitutie $\lambda^2 = \frac{1}{4t}$ $V_t f$ voldoet aan de differentiaalvergelijking (4.54).

$$\frac{d^2}{dx^2} V_t f(x) = \frac{d}{dt} V_t f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-y^2/4t}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \left(- \frac{1}{2t^{3/2}} e^{-y^2/4t} + \frac{y^2}{4t^{5/2}} e^{-y^2/4t}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-2t^{1/2}z) \left(-\tfrac{1}{2}e^{-z^2} + z^2 e^{-z^2}\right) dz .$$

Hieruit volgt gemakkelijk

$$(4.56) \qquad ||A\, W_\lambda\, f||_\infty \leq C\lambda^2\, ||f||_\infty ,$$

de gewenste ongelijkheid van het type (4.46).
Nu kunnen wij voor het aproximatieproces $W = \{W_\lambda,\ \lambda>0\}$ de approximatieruimten $X_{\alpha,q,W}$ karakteriseren.

4.36. Stelling. Zij $W = \{W_\lambda,\ \lambda>0\}$ het approximatieproces (4.52), dat geassocieerd is met de Weierstrass kern. Laat $X = C_{2\pi}$, $A = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}$ zijn. Dan geldt:

a) $X_{\alpha,q,W} \cong [X,D(A)]_{\alpha/2,q;K}$, $\quad 0 < \alpha < 2$, $\quad 1 \leq q \leq \infty$.

b) $X_{2,\infty,W} \cong [X,D(A)]_{1,\infty;K}$.

c) Voor $f \in C_{2\pi}$ geldt $||W_\lambda f - f||_\infty = o(\lambda^{-2})$, dan en slechts dan als $f \in D(A)$ en $Af = 0$.

Bewijs. Wij hebben aangetoond dat het approximatieproces W aan alle voorwaarden voor de stellingen 4.30, 4.31 en 4.32 voldoet. Toepassing van deze stellingen levert het gestelde.

Het is gewenst om de intermediaire ruimten $[C_{2\pi}, C^2_{2\pi}]_{\alpha,q;K}$ nader te karakteriseren. Wij hebben daartoe het volgende resultaat van Landau nodig.

<u>4.37. Lemma</u>. Zij $f \in C^2_{2\pi}$. Dan geldt

$$||f'||_\infty \le 2||f||_\infty^{1/2}\ ||f''||_\infty^{1/2}\ .$$

<u>Bewijs</u>. Als $f \in C^2_{2\pi}$, dan geldt voor alle reële s

$$f(x+s) = f(x) + sf'(x) + \int_0^s (s-t)\ f''(x+t)\ dt,$$

zodat

$$s||f'||_\infty \le 2||f||_\infty + \tfrac{1}{2}s^2||f''||_\infty$$

of

$$||f'||_\infty \le \frac{2}{s}\ ||f||_\infty + \frac{s}{2}\ ||f''||_\infty\ .$$

Kiezen wij $s = 2(||f||_\infty/||f''||_\infty)^{1/2}$, dan volgt

$$||f'||_\infty \le 2||f||_\infty^{1/2}\ ||f''||_\infty^{1/2}\ .$$

Om de ruimten $[C_{2\pi},C^2_{2\pi}]_{\alpha,q;K}$ te karakteriseren met behulp van de bekende Lipschitz-klassen willen wij gebruik maken van stelling 4.20. Daartoe moet worden aangetoond, dat $C^1_{2\pi}$ een deelruimte van $C_{2\pi}$ is van de klasse $\mathcal{H}(\tfrac{1}{2};C_{2\pi},C^2_{2\pi})$ (definitie 4.15).

<u>4.38. Lemma</u>. Zij $X = C_{2\pi}$ en $A = \frac{1}{4}\ \dfrac{d^2}{dx^2}$. Dan behoort de deelruimte $C^1_{2\pi}$ genormeerd met

$$||f||_{C^1_{2\pi}} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

tot de klasse $\mathcal{H}(\tfrac{1}{2};X,D(A))$.

<u>Bewijs</u>. Volgens stelling 4.16 c) hoeven wij slechts te bewijzen dat

$$(4.57) \qquad [X,D(A)]_{\frac{1}{2},1;J} \subset C^1_{2\pi} \subset [X,D(A)]_{\frac{1}{2},\infty;K}\ .$$

Eerst tonen wij de linker inclusie aan. Zij $f \epsilon [X,D(A)]_{\frac{1}{2},1;J}$, dan bestaat er volgens stelling 4.9 een rij $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon D(A) = C_{2\pi}^2$ zo, dat
$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ in $C_{2\pi}$ en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{1}{2}n} J(a^{-n},u_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{1}{2}n} \max(||u_n||_X, a^{-n}||u_n||_{D(A)}) < \infty .$$

Voor deze rij u_n volgt met behulp van lemma 4.37

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ||u_n'||_X &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} ||u_n||_X^{\frac{1}{2}} \, ||u_n''||_X^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{J(a^{-n},u_n)\}^{\frac{1}{2}} \{a^n J(a^{-n},u_n)\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{1}{2}n} J(a^{-n},u_n) < \infty . \end{aligned}$$

Dus $f \epsilon C_{2\pi}^1$ en

$$||f'||_X \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{1}{2}n} J(a^{-n},u_n) . \tag{4.58}$$

Door in (4.58) het infimum over alle representaties $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ te nemen volgt met behulp van stelling 4.9

$$||f'||_X \leq C||f||_{\frac{1}{2},1;J} ,$$

waarmee de linker inclusie is aangetoond.

Om de rechter inclusie in (4.57) te bewijzen maken wij gebruik van het approximatieproces M, dat wij in 4.33 hebben onderzocht, om een splitsing te krijgen voor de K-functienorm. Zij $f \epsilon D(A)$, dan is

$$M_\lambda f(x) = \lambda \int_0^{1/\lambda} f(x+t)\, dt .$$

Er geldt wegens de middelwaardestelling

$$||M_\lambda f - f||_X = \lambda \, ||\int_0^{1/\lambda} (f(x+t) - f(x))\, dt||_X$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \, ||f'||_X \, .$$

Verder is $M_\lambda f \in C^2_{2\pi}$ en

$$||\frac{d^2}{dx^2} M_\lambda f||_X = \lambda ||f'(x+1/\lambda) - f'(x)||_X$$

$$\leq 2\lambda ||f'||_X \, .$$

Dus volgt

$$n^{\frac{1}{2}} K(n^{-1},f;X,D(A)) \leq n^{\frac{1}{2}} \, ||f - M_{n^{\frac{1}{2}}} f||_X + n^{-\frac{1}{2}}(||M_{n^{\frac{1}{2}}} f||_X + ||\frac{d^2}{dx^2} M_{n^{\frac{1}{2}}} f||)_X$$

$$\leq C(||f||_X + ||f'||_X) \, ,$$

zodat $f \in [X,D(A)]_{\frac{1}{2},\infty;K}$ en de gewenste normongelijkheid geldt voor de rechter inclusie in (4.57).

Wij passen nu stelling 4.20 toe op $C_{2\pi}$, $C^1_{2\pi}$ en $C^2_{2\pi}$.

<u>4.39. Stelling</u>. Voor $0 < \alpha < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ geldt

a) $$[C_{2\pi}, C^2_{2\pi}]_{\alpha/2,q;K} \cong [C_{2\pi}, C^1_{2\pi}]_{\alpha,q;K} \, .$$

b) $$[C_{2\pi}, C^2_{2\pi}]_{\frac{1}{2}+\alpha/2,q;K} \cong [C^1_{2\pi}, C^2_{2\pi}]_{\alpha,q;K} \, .$$

In het bijzonder geldt

c) $$[C_{2\pi}, C^2_{2\pi}]_{\alpha/2,\infty;K} \cong \mathrm{Lip}(\alpha) \, , \quad 0 < \alpha < 1 \, .$$

d) $[C_{2\pi},C^2_{2\pi}]_{\frac{1}{2}+\alpha/2,\infty;K} = \{f\in C^1_{2\pi} \mid f'\in \mathrm{Lip}(\alpha)\}, \quad 0 < \alpha < 1.$

<u>Bewijs</u>. Beweringen a) en b) volgen direct door toepassing van stelling 4.29. Voor de beweringen c) en d) wordt gebruik gemaakt van het feit dat

$$[C_{2\pi},C^1_{2\pi}]_{\alpha,\infty;K} \cong \mathrm{Lip}(\alpha) \quad , \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$[C^1_{2\pi},C^2_{2\pi}]_{\alpha,\infty;K} \cong \{f'\in C^1_{2\pi} \mid f'\in \mathrm{Lip}(\alpha)\} \quad , \quad 0 < \alpha < 1.$$

<u>4.40. Opmerking</u>. Combinatie van de stellingen 4.36 en 4.39 geeft in vele gevallen een karakterisering van de approximatieruimten $X_{\alpha,q;W}$, die behoren bij de Weierstrass kern. Om tot een volledige karakterisering van de ruimten $[C_{2\pi},C^r_{2\pi}]_{\alpha,q;K}$, $r \geq 2$, te komen, moet gebruik worden gemaakt van de hogere orde gladheidsmodulus $\omega_r(f,t)$, die wij in 3.8 hebben ingevoerd. Hiervoor kan, op analoge wijze als in 4.14 voor $\omega(f,t)$ werd gedaan, de volgende equivalentie van functienormen worden aangetoond:

4.59) $$c_1 K(t^r,f;C_{2\pi},C^r_{2\pi}) \leq \min(1,t^r)||f||_\infty + \omega_r(f,t^r) \leq c_2 K(t^r,f;C_{2\pi},C^r_{2\pi})$$

(zie Butzer-Berens [2], pag. 192).
Ook kunnen de hoger gegeven stellingen gemakkelijk worden uitgebreid voor functies $f\in L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$ in plaats van $f\in C_{2\pi}$.

<u>4.41</u>. Wij onderzoeken nu het approximatieproces dat verkregen wordt door convolutie met de Cauchy kern, die wij in 3.11 hebben ingevoerd. De kern $c(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$ levert het volgende approximatieproces voor $f\in C_{2\pi}$

(4.60) $$C_\lambda\, f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda^2t^2}\, f(x-t)\, dt \;, \qquad 0 < \lambda < \infty.$$

Wij hebben in stelling 3.7 al aangetoond, dat de substitutie $\lambda = \frac{1}{y}$ (4.60) overvoert in

(4.61) $$D_y\, f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2+t^2}\, f(x-t)\, dt, \qquad y > 0,$$

waarbij D_y f(x) een oplossing is van de Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < 2\pi,\ y > 0)$$

met de randvoorwaarden

$$u(0,y) = u(2\pi,y)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y)$$

en

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x)\ , \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0\ .$$

Voor de Cauchy kern hebben wij in lemma 3.12 een puntsgewijze limietrelatie afgeleid. Voor $f\in C_{2\pi}$ zo, dat de integraal

$$J(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t^2}\, dt$$

bestaat, geldt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(C_\lambda f(x) - f(x)) = J(f,x)\ .$$

Wij eisen nu $J(f,x)\in C_{2\pi}$ en wij berekenen de Fouriercoëfficiënten van $J(f,x)$:

$$\begin{aligned} J(f)^\wedge(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\, J(f,x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,\{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\, f^\wedge(n)\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\,(e^{int}-2+e^{-int}) \\ &= -\,\frac{2}{\pi}\,|n|\, f^\wedge(n)\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \;=\; -|n|\, f^\wedge(n). \end{aligned}$$

Wij zeggen dat $f \in D(A)$ als er een $g \in X$ bestaat zo, dat

$$(4.60) \qquad -|n|\ f^\wedge(n) = g^\wedge(n)\ .$$

De operator A: $D(A) \to X$ voegt aan $f \in D(A)$ het element $Af = g \in X$ toe, waarvoor (4.62) geldt. Gemakkelijk is te bewijzen dat A een gesloten operator is. (zie bv. Butzer-Scherer [3], lemma 4.1.1).

4.42. Lemma. Voor $\lambda > 0$ is $C_\lambda f \in D(A)$ en er geldt

$$(4.63) \qquad C_\lambda\ f(x) - f(x) = \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{\mu^2}\ A\ C_\mu\ f(x)\ .$$

Bewijs: Het is duidelijk dat $C_\lambda f \in D(A)$. Aangezien de Fouriertransform van de Cauchy kern gelijk is aan $e^{-|x|}$ volgt voor $f \in C_{2\pi}$ dat

$$(C_\lambda f - f)^\wedge(n) = (e^{-|\frac{n}{\lambda}|} - 1)\ f^\wedge(n)\ .$$

Voor het rechterlid vinden wij als Fouriercoëfficiënten

$$\begin{aligned}(\int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{\mu^2}\ A\ C_\mu\ f)^\wedge(n) &= -|n|\ f^\wedge(n) \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{\mu^2}\ e^{-|\frac{n}{\mu}|} \\ &= -|n|\ f^\wedge(n) \int_0^{1/\lambda} e^{-|n|\tau}\ d\tau \\ &= (e^{-|\frac{n}{\lambda}|} - 1)\ f^\wedge(n)\ ,\end{aligned}$$

zodat (4.63) volgt uit de eenduidigheidsstelling voor Fourierreeksen.

Het is nu eenvoudig om een limietrelatie van het type (4.40) af te leiden.

4.43. Lemma. Voor het approximatieproces geassocieerd met de Cauchy kern geldt in de $C_{2\pi}$-norm de limietrelatie

(4.64) $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(C_\lambda f-f) = Af , \qquad (f\in D(A)).$$

Bewijs. Wegens (4.63) is

$$||\lambda(C_\lambda f-f) - Af||_\infty = ||\lambda \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{\mu^2} (C_\mu Af-Af)||_\infty = o(1), \ (\lambda \to \infty) .$$

Door vergelijking van de Fouriercoëfficiënten is gemakkelijk aan te tonen dat voor de Cauchy kern na substitutie $\lambda = 1/y$ geldt

(4.65) $$\frac{d}{dy} D_y f(x) = A D_y f(x) , \qquad (f \ C_{2\pi}, y > 0).$$

Dan volgt

$$A D_y f = \frac{d}{dy} D_y f(x) = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{y^2-t^2}{(y^2+t^2)^2} dt ,$$

zodat

$$||A D_y f||_\infty \le ||f||_\infty \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{y^2-t^2}{(y^2+t^2)^2}| dt \le \frac{2}{\pi} y^{-1} ||f||_\infty .$$

Dus geldt ook

(4.66) $$||A C_\lambda f||_\infty \le \frac{2}{\pi} \lambda ||f||_\infty ,$$

waarmee wij een ongelijkheid van het type (4.46) hebben aangetoond. Door toepassing van de stellingen 4.30, 4.31 en 4.32 volgt nu onmiddellijk:

4.44. Stelling. Zij $C = \{C_\lambda, \lambda > 0\}$ het approximatieproces (4.60), dat geassocieerd is met de Cauchy kern. Zij $X = C_{2\pi}$ en zij A de operator, die in 4.41 is gedefinieerd met behulp van (4.62). Dan geldt

a) $X_{\alpha,q,C} \cong [X,D(A)]_{\alpha,q;K}$, $\qquad 0 < \alpha < 1, \ 1 \le q \le \infty.$

b) $X_{1,\infty,C} \cong [X,D(A)]_{1,\infty;K}$.

c) Voor $f \in C_{2\pi}$ geldt $||C_\lambda f-f||_\infty = o(\lambda^{-1})$, dan en slechts dan als $f \in D(A)$ en $AF = 0$, dat wil zeggen f is constant.

Het is gewenst D(A) en de intermediaire ruimten $[X,D(A)]_{\alpha,q;K}$ nader te karakteriseren. Daartoe introduceren wij bij $f \in L^1_{2\pi}$, waarmee de Fourrierreeks

$$(4.67) \qquad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\hat{}(n)\, e^{inx}$$

geassocieerd is, de geconjugeerde Fourierreeks van f

$$(4.68) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(i \operatorname{sign} n)\, f\hat{}(n)\, e^{inx} .$$

Hierbij is sign $n = n/|n|$ voor alle gehele $n \neq 0$ en sign $0 = 0$. Ook voeren wij de geconjugeerde functie $\tilde{f}$ in door

$$(4.69) \qquad \tilde{f}(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\pi [f(x+u) - f(x-u)]\ \tfrac{1}{2} \cot \frac{u}{2}\, du .$$

Deze limiet bestaat bijna overal, maar $\tilde{f}$ hoeft in het algemeen niet tot $L^1_{2\pi}$ te behoren. Is echter $\tilde{f} \in L^1_{2\pi}$, dan is (4.68) de Fourierreeks, die met $\tilde{f}$ is geassocieerd. Als $f \in L^1_{2\pi}$, dan geldt voor de (C,1) sommen van de reeks (4.68) (paragraaf 1.12)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f) = f \qquad\qquad (\text{b.o.}) .$$

Is $f \in C_{2\pi}$, dan behoeft $\tilde{f}$ niet continu te zijn. Is evenwel $\tilde{f} \in C^1_{2\pi}$ dan geldt voor de Fouriercoëfficiënten van $(\tilde{f})'$

$$[(\tilde{f})']\hat{}(n) = |n|\ f\hat{}(n) .$$

Wij hebben dan:

4.45. Lemma. Zij r een vast geheel getal > 0. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent voor $f \in C_{2\pi}$:

1) $\exists g \in C_{2\pi}$: $g^{\wedge}(n) = |n|^r f^{\wedge}(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

2) $\begin{cases} f \in C_{2\pi}^r & , r \text{ even}, \\ \tilde{f} \in C_{2\pi}^r & , r \text{ oneven}. \end{cases}$

Bewijs. Wij bewijzen slechts het geval $r = 1$.
Voldoet f aan 1), dan volgt door vergelijking van de Fouriercoëfficiënten

$$\tilde{\sigma}_n(f)(x) - \tilde{\sigma}_n(f)(y) = \int_y^x \sigma_n(g)(u)\, du \,. \tag{4.70}$$

Nu convergeert $\sigma_n(g) \to g$ in de sup-norm als $n \to \infty$, zodat het rechterlid van (4.70) voor $n \to \infty$ convergeert naar

$$\int_y^x g(u)\, du \,.$$

Aangezien $\tilde{\sigma}_n(f)(x)$ naar $\tilde{f}(x)$ convergeert voor bijna alle x, volgt

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_y^x g(u)\, du \,,$$

zodat $\tilde{f} \in C_{2\pi}^1$.

Is omgekeerd aan 2) voldaan, dan volgt uit de eigenschappen van Fouriercoëfficiënten

$$[(\tilde{f})']^{\wedge}(n) = (in)[\tilde{f}]^{\wedge}(n) = (in)(-i \operatorname{sign} n) f^{\wedge}(n) = |n|\, f^{\wedge}(n)$$

voor alle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, waaruit 1) volgt.
Wij kunnen dus concluderen dat $D(A)$ bestaat uit alle $f \in C_{2\pi}$ waarvoor $\tilde{f} \in C_{2\pi}^1$.
Verder geldt $Af = -(\tilde{f})'$.

Als wij onder $A^r f$ verstaan $A(A^{r-1} f)$ dan is het duidelijk dat

$$D(A^r) = \{ f \in X \mid \exists g \in X: |k|^r f^{\wedge}(k) = g^{\wedge}(k) \} \,.$$

Er kan dan ook geconcludeerd worden dat $D(A^r)$ bestaat uit alle functies $f \in C^2_{2\pi}$ en $A^2 f = -f''$.

Wij zullen nu de ruimten $[X,D(A)]_{\alpha,q;K}$ karakteriseren met behulp van de intermediaire ruimten $[X,D(A^2)]_{\alpha,q;K}$, die wij al kennen (stelling 4.39 en opmerking 4.40). Analoog aan lemma 4.37 leiden wij een ongelijkheid van het Landau-type af.

4.46. Lemma. Zij A de operator gedefinieerd in 4.41 en zij $f \in D(A^2)$. Dan is

$$||Af||_\infty \leq 2||f||_\infty^{\frac{1}{2}} \, ||A^2 f||_\infty^{\frac{1}{2}} \, .$$

Bewijs. Uit (4.63) volgt na substitutie $y = \frac{1}{\lambda}$ onmiddellijk voor $f \in C^2_{2\pi}$

$$\begin{aligned} D_y \, f(x) - f(x) &= \int_0^y A \, D_\tau \, f(x) \, d\tau \\ &= -[(y-\tau) \, D_\tau \, A \, f(x)]_0^y + \int_0^y (y-\tau) \, \frac{d}{d\tau} \, D_\tau \, A \, f(x) \, d\tau \\ &= y \, A \, f(x) + \int_0^y (y-\tau) \, A^2 \, D_\tau \, f(x) \, d\tau \, , \end{aligned}$$

zodat wegens $||D_y|| = 1$ volgt

$$y||Af||_\infty \leq 2||f||_\infty + \tfrac{1}{2}y^2||A^2 f||_\infty \, ,$$

waaruit het gestelde volgt door $y = 2(||f||_\infty/||A^2 f||_\infty)^{\frac{1}{2}}$ te nemen.

4.47. Lemma. Zij $X = C_{2\pi}$ en A de operator gedefinieerd in 4.41. Dan behoort de ruimte $D(A)$ tot de klasse $\mathcal{H}(\frac{1}{2};X,D(A^2))$.

Bewijs. Volgens stelling 4.16 c) hoeven wij slechts te bewijzen dat

$$[X,D(A^2)]_{\frac{1}{2},1;J} \subset D(A) \subset [X,D(A^2)]_{\frac{1}{2},\infty;K} \, .$$

Het bewijs van de linker inclusie verloopt, gebruik makend van lemma 4.46, geheel analoog aan het eerste gedeelte van lemma 4.38.

Wij bewijzen de rechter inclusie.

Zij $f \in D(A)$. Dan is

$$f_y(x) = \frac{1}{y} \int_0^y D_\tau f \, d\tau$$

een element van $D(A^2)$ wegens de geslotenheid van de operator A. Om de K-functienorm af te schatten maken wij gebruik van de splitsing $f_0 = f - f_y$, $f_1 = f_y$.

Er geldt voor $f \in D(A)$

$$\begin{aligned} ||f - f_y||_X &= ||\frac{1}{y} \int_0^y (D_\tau f - f) \, d\tau||_X \\ &\leq \frac{1}{y} \int_0^y ||D_\tau f - f||_X \, d\tau \\ &\leq y||Af||_X \end{aligned}$$

Verder is

$$\begin{aligned} ||A^2 f_y||_X &= ||(\frac{1}{y} \int_0^y A D_\tau f \, d\tau)||_X \\ &= || \frac{D_y Af - Af}{y} ||_X \\ &\leq \frac{2}{y} ||Af||_X . \end{aligned}$$

Dus volgt

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}} K(n^{-1}, f; X, D(A^2)) &\leq n^{\frac{1}{2}} ||f - f_{n^{-\frac{1}{2}}}||_X + n^{-\frac{1}{2}}(||f_{n^{-\frac{1}{2}}}||_X + ||A^2 f_{n^{-\frac{1}{2}}}||_X) \\ &\leq C(||f||_X + ||Af||_X) , \end{aligned}$$

waaruit de rechter inclusie volgt.

Met behulp van de stelling 4.20 en 4.39 volgt nu:

<u>4.48. Stelling</u>. Zij A de operator gedefinieerd in 4.41. Dan geldt voor $0 < \alpha < 1$, $1 \leq q \leq \infty$

$$[C_{2\pi}, C^1_{2\pi}]_{\alpha,q;K} \cong [C_{2\pi}, D(A)]_{\alpha,q;K} \; .$$

In het bijzonder

$$[C_{2\pi}, D(A)]_{\alpha,\infty;K} \cong \mathrm{Lip}(\alpha) \qquad , \; 0 < \alpha < 1 \; .$$

Combinatie van de stellingen 4.44 en 4.48 levert de gewenste karakterisering van de approximatieruimten $X_{\alpha,q,C}$, behorend bij de Cauchy kern.

De theorie der intermediaire ruimten werd door Peetre [5] geïntroduceerd. De diskrete K- en J-methode is behandeld in Butzer-Scherer [3]. Een goede referentie voor de theorie der intermediaire ruimten is het boek van Butzer-Berens [2], hoofdstuk 3. De stellingen 4.30 t/m 4.31 zijn ontleend aan Berens [1]. Voor de in 4.44 geponeerde feiten over de geconjugeerde functie zij verwezen naar Zygmund [6].

Literatuur.

[1] Berens, H. Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. Lecture Notes no. 64. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[2] Butzer, P.L., Berens, H. Semigroups of operators and approximation. Grundlehren der Math. Wiss., band 145, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[3] Butzer, P.L., Scherer, K. Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden. Hochschulskripten 826/826^A. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.

[4] Dunford, N., Schwartz, J.T. Linear operators, part I. Interscience publishers, Inc., New York, 1958.

[5] Peetre, J. A theory of interpolation of normed spaces. Notes Universidade de Brasilia, 1963.

[6] Zygmund, A. Trigonometric series vol. I and II. Second edition, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1968.

5. GENERATION OF GAUSSIAN QUADRATURE RULES AND ORTHOGONAL POLYNOMIALS

5.1. Introduction. We consider the problem of numerically generating Gaussian quadrature rules corresponding to an arbitrary given weight function. An essentially equivalent problem is that of generating orthogonal polynomials. These latter may be used for purposes other than quadrature, e.g. for weighted L^2-approximation of functions, or, what is less known, for weighted one-sided L^1-approximation [1]. We are naturally interested in cases where the given weight function does not belong to the classical repertoire of weight functions, so that the desired orthogonal polynomials are not explicitly known.

Classical methods, due to Christoffel, Stieltjes, Gram-Schmidt and others, basically amount to an orthogonalization of the successive powers by one method or another. It has been known for some time, however, that such processes are difficult to carry out when high-degree polynomials are required. The procedures rapidly lose accuracy and eventually collapse upon reaching some critical polynomial degree (which need not be very large). One of the purposes of this article is to analyze the underlying reasons for this difficulty, which are related to the ill-conditioned nature of the problem. Another purpose is to present alternative methods of orthogonalization which are less susceptible to error growth. For complete details we must refer to [5], [6].

5.2. Statement of the problem. We recall that a quadrature rule

$$(5.1) \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\,\omega(t)dt = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r^{(n)} f(\xi_r^{(n)}) + R_n(f)$$

is called *Gaussian* if

$$(5.2) \qquad R_n(f) = 0, \qquad\qquad \text{for all } f \in P_{2n-1},$$

where P_{2n-1} denotes the class of polynomials of degree $\leq 2n-1$. The interval (α,β) may be finite, half-infinite, or infinite. If ω is a *weight function,* i.e., has finite moments $\mu_k = \int_\alpha^\beta t^k\,\omega(t)dt$ and is positive a.e., the Gaussian quadrature rules (5.1) exist uniquely for each $n = 1, 2, 3, \ldots$. Each one, in fact, has maximum algebraic degree of exactness.

The interest in Gaussian quadrature rules is often due to the weight function ω having a singularity at one or both endpoints of (α,β), or being otherwise ill-behaved. The singularity of ω, for example, may be located in the complex plane, close to the interval (α,β).

The problem we want to consider is that of computing the *Gaussian weights* $\lambda_r^{(n)}$, and the *Gaussian abscissas* $\xi_r^{(n)}$, given the weight function ω. We are particularly interested in methods which are also effective for large values of n, so that high-order Gaussian quadrature rules can be constructed.

The connection with orthogonal polynomials is well-known: Defining an inner product by

$$(5.3) \qquad (f,g) = \int_\alpha^\beta f(t)\ g(t)\ \omega(t)dt$$

(which is certainly meaningful if f and g are polynomials), there is an unique set of polynomials $\{\pi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ such that

$$(5.4) \qquad \begin{cases} \pi_k(t) = c_k t^k + \ldots, \quad c_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \\ (\pi_r,\pi_s) = \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

These are called the *orthonormal polynomials* belonging to the weight function ω. The Gaussian abscissas $\xi_r^{(n)}$ are precisely the zeros of π_n,

$$(5.5) \qquad \pi_n(\xi_r^{(n)}) = 0, \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$

while the weights $\lambda_r^{(n)}$ can be expressed in various ways in terms of the π_k, e.g. by

$$(5.6) \qquad \lambda_r^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} [\pi_k(\xi_r^{(n)})]^2} .$$

Once the orthogonal polynomials $\{\pi_k\}_{k=0}^n$ are known, the construction of Gaussian quadrature rules involves nothing more than a root-finding process to get the $\xi_r^{(n)}$, and a simple (stable!) algebraic computation to get the $\lambda_r^{(n)}$.

5.3. Some general remarks on condition. When we talk about the condition of a problem we are interested in knowing how sensitive the problem is with respect to small perturbations in the data. If such perturbations cause substantial errors in the results, the problem is considered ill-conditioned, otherwise well-conditioned. It is desirable to measure the degree of condition by a single number, commonly called *condition number*, such that large condition numbers correspond to ill-conditioned problems, and condition numbers of the order of magnitude 1 correspond to well-conditioned problems.

In order to define such a number, it is convenient to think of a problem as a map

$$P : X \to Y \tag{5.7}$$

from a space X ("data space") into a space Y ("result space"). We assume X and Y to be normed linear spaces. P be defined in an open domain $D \subset X$. We wish to define the condition of P at a point $x_0 \in D$. Following Rice [9], we first introduce the *ε-condition number*

$$\kappa(\varepsilon) = \sup_{||\Delta x||=\varepsilon} \frac{||P(x_0+\Delta x)-Px_0||}{||Px_0||} \Big/ \frac{||\Delta x||}{||x_0||}, \tag{5.8}$$

which measures the maximum magnification of relative errors under the map P. (The term "relative error" is meant here in a global sense, i.e. an element $\bar{x}$ in X approximating $x \neq \theta_x$ in X has relative error $||\bar{x}-x|| \,/\, ||x||$. Similarly in the space Y.) The number in (5.8) is well-defined for all ε sufficiently small, if $x_0 \neq \theta_x$ and $Px_0 \neq \theta_y$. Since, typically, our perturbations are due to rounding errors, we are only interested in very small values of ε (say, $\varepsilon = 10^{-10}$ on a 10-decimal digit computer). It is natural, therefore, to consider the limit

$$(5.9) \qquad \kappa = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \kappa(\varepsilon)$$

and call it, if it exists, the *asymptotic condition number* of P at the point x_0.

Equivalently we can write

$$(5.9') \qquad \kappa = \frac{||x_0||}{||Px_0||} \, ||P'_{x_0}||,$$

where P'_{x_0} denotes the Fréchet derivative of P at x_0 (assumed to exist).

5.4. A problem in data compression. Returning to our problem of constructing n-point Gaussian quadrature rules, we note that our data space X is a function space, the space of weight functions, while the result space Y is finite-dimensional, the space of 2n-vectors $\begin{bmatrix}\lambda_r \\ \xi_r\end{bmatrix}$. Our problem can be viewed as that of performing the map P which associates to each weight function in X the corresponding Gaussian weights and abscissas. Endowing X and Y with suitable norms, it would make sense to discuss the condition number $\kappa = \kappa_n$ of this map. To our knowledge, this question of condition has never been investigated, although it would be of some interest to do so.

From a practical point of view, however, we are not really interested in the map P as we just defined it. After all, we cannot represent function spaces in a computer, unless they are finite-dimensional (and even then we can do it only approximately). What is needed is, first, a compression of the data into a space of finite dimension, and then a new map from the compressed data space into the result space which is equivalent to the original map. In general, there are infinitely-many ways of data compression which are permissible in this sense. The problem is to select one which leads to a map that is as well-conditioned as possible.

The classical procedure of data compression codifies the weight function by means of its moments. It will be shown in the following section that this is not a satisfactory procedure from the point of view of condition.

5.5. Classical approach. The first 2n moments

$$(5.10)\qquad \mu_k = \int_\alpha^\beta t^k\,\omega(t)dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

of the weight function ω determine uniquely the n-point Gaussian quadrature rule (5.1). In fact, by (5.2), we have

$$(5.11)\qquad \sum_{r=1}^{n} \lambda_r\,\xi_r^k = \mu_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

which represents a system of 2n algebraic equations in 2n unknowns $\{\lambda_r\}$, $\{\xi_r\}$. The system is linear in the λ's but nonlinear in the ξ's, and has an unique solution.

In the notation of section 5.3, we let

$$(5.12)\qquad x_0 = [\mu_k]_{k=0}^{2n-1}, \quad Px_0 = \begin{bmatrix}\lambda_r^{(n)}\\ \xi_r^{(n)}\end{bmatrix},$$

where $\lambda_r^{(n)}$, $\xi_r^{(n)}$ is the solution of the system (5.11). Thus, P is a map from the Euclidean space R^{2n} into itself. Execution of the map P requires, in principle, the solution of the nonlinear system (5.11).

It is easy to see that the functional matrix of the system (5.11) is nonsingular at the exact solution, so that P is defined not only at x_0, but also in a certain neighborhood $D \subset R^{2n}$ of x_0. It thus makes sense to talk about the (asymptotic) condition number $\kappa = \kappa_n$ of P at x_0.

Since we are dealing with a map $P : R^{2n} \to R^{2n}$, the Fréchet derivative P'_{x_0} is a functional matrix, in fact, since we are inverting (5.11), the inverse of the functional matrix of the system (5.11) (evaluated at the exact solution Px_0). It so happens that this matrix is of the Vandermonde variety, whose inverse not only can be obtained explicitly, but also can be estimated in norm [3]. It is possible, therefore, to arrive at the following result.

Theorem. Let $[\alpha,\beta] = [0,1]$, $\mu_0 = 1$ and R^{2n} be normed by the ∞-vector norm $||\cdot||_\infty$ (uniform norm). Then

$$(5.13) \qquad \kappa_n > \frac{1}{2} \max_{1\le r\le n} \left[\frac{\pi_n(-1)}{\pi_n'(\xi_r^{(n)})}\right]^2,$$

where π_n is the n-th degree orthonormal polynomial belonging to the weight function ω.

Before discussing the result, we make the following remarks. First, we assumed that the basic interval is $[0,1]$. A similar result, however, could be obtained for any interval $[0,\beta]$, where $\beta > 0$ is finite or infinite. Secondly, the assumption $\mu_0 = 1$ is just a normalization: Multiplying all moments by a constant has only the effect of multiplying all Gaussian weights by the same constant. This should not influence the condition of the map P. Finally, the choice $||\cdot||_\infty$ for the vector norm is one of convenience, simplifying the computations leading to (5.13).

It is already evident from the lower bound in (5.13) that the condition number κ_n may become quite large. The orthogonal polynomial $\pi_n(t)$ in fact oscillates on the interval $[0,1]$ and grows rapidly in modulus, both as t moves away from either endpoint and as n increases. Since the point $t = -1$ is well outside of $[0,1]$, and the derivative π_n' at the zero $\xi_r^{(n)}$ grows only moderately with n, the ratio $|\pi_n(-1)/\pi_n'(\xi_r^{(n)})|$ indeed grows rapidly with n. Having to take the square of this ratio, and the maximum over r, is just another perturbing feature of (5.13).

It is instructive to consider the example

$$(5.14) \qquad \pi_n(t) = T_n^*(t),$$

where T_n^* is the (normalized) Chebyshev polynomial of degree n adjusted to the interval $[0,1]$. This example is representative for a larger class of weight functions, since the zeros of orthogonal polynomials on $[0,1]$ behave asymptotically (as $n \to \infty$) like the zeros of T_n^*. For the choice (5.14), the lower bound in (5.13) can be evaluated explicitly, and one finds that

$$(5.15) \qquad \kappa_n > \frac{(17+6\sqrt{8})^n}{64n^2} \doteq \frac{(34)^n}{64n^2} .$$

A few numerical values should suffice to indicate the severity of the situation:

n	$\kappa_n >$
5	2.8×10^4
10	3.2×10^{11}
15	6.4×10^{18}
20	1.6×10^{26}

As can be seen from (5.15), the condition number κ_n grows exponentially at a rate exp(3.53n). Interestingly enough, this coincides with the rate of growth of the (Turing-) condition number for the problem of inverting the Hilbert matrix of order n. Generating Gaussian quadrature rules from the moments is thus an undertaking which is about as ill-conditioned as inverting Hilbert matrices - a fact which does not seem to be widely recognized.

5.6. A discretization process. The difficulty with the usual orthogonalization processes is that they all require the evaluation of inner products

$$(5.16) \qquad (f,g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, g(t)\, \omega(t)dt,$$

where f, g are polynomials (those orthogonal polynomials already obtained). Not knowing how to do the integration, one normally expands the polynomial $f(t)\, g(t)$ in the usual power form and integrates term by term. In so doing, one expresses the inner product (5.16) in terms of the moments μ_k, and thus, in essence, solves the ill-conditioned problem discussed in the previous section. Not surprisingly, therefore, the evaluation of (5.16) involves large cancellation errors.

To circumvent this difficulty it is natural to discretize the inner product (5.16), and replace it by

$$(5.17) \qquad [f,g]_N = \sum_{k=1}^{N} w_k^{(N)}\, f(x_k^{(N)})\, g(x_k^{(N)}), \quad w_k^{(N)} > 0,$$

e.g. by applying a simple-minded quadrature rule to the integral (5.16) (ignoring the possible singularity in ω). The integer N is used to control the quality of the discretization.

To an inner product, such as (5.17), there belongs a finite set of orthonormal polynomials $\{\overset{N}{\pi}_k\}_{k=0}^{N-1}$, the so-called *discrete orthogonal polynomials*,

$$[\overset{N}{\pi}_r, \overset{N}{\pi}_s]_N = \delta_{r,s}, \qquad r, s = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.18}$$

Assuming $N > n$, we may now determine the zeros $\overset{N}{\xi}{}_r^{(n)}$ of $\overset{N}{\pi}_n(x)$ and the weight factors $\overset{N}{\lambda}{}_r^{(n)}$, just as we did before with π_n (cf. (5.5) and (5.6)). These are taken to approximate the desired Gaussian abscissas and weights.

It is important to note that the evaluation of (5.17) for polynomials f, g presents no difficulties, and there is no need to express f(t) g(t) in power form. Thus, we do not have to fall back on moments, and the ill-conditioned problem of section 5.5 is avoided.

Our process can be justified on the following grounds.

Theorem. If $\lim_{N\to\infty} [f,g]_N = (f,g)$, whenever f and g are polynomials, then for each $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\overset{N}{\pi}_n(x) \to \pi_n(x),\ \overset{N}{\xi}{}_r^{(n)} \to \xi_r^{(n)},\ \overset{N}{\lambda}{}_r^{(n)} \to \lambda_r^{(n)} \text{ as } N \to \infty. \tag{5.19}$$

The assumption of the theorem means that our quadrature process (5.17) should converge, even if the weight function ω is singular. Fortunately, most quadratures converge in the presence of singularities, at least if they occur at the endpoints of the interval (α,β) and are monotonic [2], [4], [8]. From a practical point of view, however, the discretization (5.17) must be selected carefully so as to produce a reasonably fast rate of convergence. This seems to require nonequidistant abscissas $x_k^{(N)}$, and appropriate weights $w_k^{(N)}$, as described in detail in [5].

5.7. Approach using modified moments. Intuitively, the ill-conditioning observed in section 5.5 must have something to do with the fact that the power t^k is very flat near $t = 0$, when k is large, and very steep near $t = 1$. In forming the moment $\mu_k = \int_0^1 t^k\, \omega(t)dt$, much information about ω is thus "washed out", particularly since the neighborhoods of $t = 0$ and $t = 1$ may be those containing the most critical information. It would appear more sensible to use some polynomial $p_k(t)$ in place of t^k, which oscillated on $[0,1]$, the oscillations being more frequent near the endpoints than in the middle range of the interval. With such a choice, the integral $\nu_k = \int_0^1 p_k(t)\,\omega(t)dt$ "engages" the weight function ω more rigorously, particularly near the endpoints of the interval, and it would seem that more information on ω is being extracted that way than before. Sack and Donovan [10] in fact have observed empirically that by choosing for p_k some classical orthogonal polynomials (typically, the Chebyshev polynomials), the Gaussian weights and abscissas belonging to some other classical weight function can be obtained very accurately from the ν_k.

These remarks, however vague, suggest the following approach. Let $\{p_k(t)\}$ be a system of polynomials with p_k having exact degree k. Define the *modified moments* of ω by

$$(5.20) \qquad \nu_k = \int_\alpha^\beta p_k(t)\,\omega(t)dt, \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

As in the case of ordinary moments, the first 2n modified moments determine the desired n-point Gaussian quadrature rule uniquely. By (5.2), in fact,

$$(5.21) \qquad \sum_{r=1}^{n} \lambda_r\, p_k(\xi_r) = \nu_k, \qquad k = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

representing a system of 2n equations in 2n unknowns which is uniquely solved by the Gaussian weights $\lambda_r^{(n)}$ and abscissas $\xi_r^{(n)}$. In the notation of section 5.3, we now have the map $P : R^{2n} \to R^{2n}$, where

$$(5.22) \qquad x_0 = [\nu_k]_{k=0}^{2n-1}, \quad Px_0 = \begin{bmatrix} \lambda_r^{(n)} \\ \xi_r^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Again, P is well-defined in a certain neighborhood of x_0.

We expect good condition of P if $\{p_k\}$ themselves are orthogonal. We assume therefore that the system $\{p_k\}$ is orthonormal on $[a,b]$ with respect to some weight function $w(t)$. (The interval $[a,b]$ need not be the same as $[\alpha,\beta]$.) This, incidentally, automatically excludes the powers $p_k(t) = t^k$, since they cannot be orthogonal with respect to a positive weight function.

It is now possible to estimate the (asymptotic) condition number $\kappa = \kappa_n$

of P from above, according to the following theorem.

Theorem. Let $[a,b]$ be finite, and $\{p_k\}$ be a system of polynomials orthonormal on $[a,b]$ with respect to the weight function $w(t)$. Let R^{2n} be normed by $||\cdot||_1$ (the L^1-norm). Then

$$\kappa_n \leq \kappa_n^{(1)} \kappa_n^{(2)} \kappa_n^{(3)}, \tag{5.23}$$

where

$$\kappa_n^{(1)} = \frac{\max(1, \frac{1}{\min \lambda_r^{(n)}}) \, [1+(2\sigma_n+1)\Delta_n]}{\mu_0 + \sum_{r=1}^{n} |\xi_r^{(n)}|}, \tag{5.23$_1$}$$

$$\kappa_n^{(2)} = \max_{0\leq k\leq 2n-1} ||p_k||_{\infty[a,b]}, \tag{5.23$_2$}$$

$$\kappa_n^{(3)} = ||\nu||_1 \int_a^b \left(\sum_{\lambda=1}^{n} l_\lambda^2(t)\right) w(t)dt. \tag{5.23$_3$}$$

Here, $l_\lambda(x)$ are the elementary Lagrange interpolation polynomials (of degree $n-1$) which belong to the abscissas $\xi_r^{(n)}$, and

$$\sigma_n = \max_\lambda |l_\lambda'(\xi_\lambda^{(n)})|, \quad \Delta_n = \max_{\substack{1\leq\lambda\leq n \\ x\in[a,b]}} |\xi_\lambda^{(n)} - x|. \tag{5.24}$$

We remark that $\kappa_n^{(1)}$ depends only on the weight function ω, $\kappa_n^{(2)}$ only on w, while $\kappa_n^{(3)}$ depends on both ω and w. A similar theorem holds for infinite intervals $[a,b]$.

As an illustration of this theorem, let us consider ultraspherical weight functions

$$\omega(x) = (1-x^2)^\alpha, \quad w(x) = (1-x^2)^\beta \quad \text{on } [-1,1],$$

where $-\frac{1}{2} \leq \alpha,\ \beta \leq 0$. It is possible, with some effort, to further estimate the quantities in (5.23_{1-3}) in this case, leading to the result that

$$\kappa_n \leq \kappa_n^*, \quad \kappa_n^* \stackrel{\bullet}{\sim} \begin{cases} n^{2(\alpha+\beta)+5} & \text{if } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq \beta, \\ n^{2\beta+7} & \text{if } \alpha = 0,\ \beta \neq 0, \\ n^{3\alpha+7/2} & \text{if } \alpha = \beta. \end{cases}$$

The symbol $\stackrel{\bullet}{\sim}$ means that the ratio of the quantity on the left to the quantity on the right, while not necessarily tending to 1 as $n \to \infty$, remains between fixed positive bounds which depend on α and β, but not on n.

It is rather striking that the condition number κ_n now grows at most like a relatively small power of n, which is a long way from the exponential growth observed earlier.

For infinite intervals (α,β) the condition may still be quite poor, as one can show by examples, and as is also indicated by the appearence of $1/\min \lambda_r^{(n)}$ in (5.23_1). In these cases the discretization algorithm of section 5.6 (which can be adapted to infinite intervals) will usually be more effective.

5.8. <u>An algorithm based on modified moments</u>. Assume that we are given a system of polynomials $\{p_k\}$ satisfying the three-term recurrence relation

$$(5.25)\qquad x\, p_j(x) = a_j\, p_{j+1}(x) + b_j\, p_j(x) + c_j\, p_{j-1}(x),$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots;\ p_{-1}(x) \equiv 0,\ a_j \neq 0.$$

For the purpose of this section these polynomials need not necessarily be orthogonal. What we wish to obtain is the analogous recursion

$$(5.26)\qquad x\, \pi_j(x) = \alpha_j\, \pi_{j+1}(x) + \beta_j\, \pi_j(x) + \alpha_{j-1}\, \pi_{j-1}(x),$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots;\ \pi_{-1}(x) \equiv 0,$$

for the desired *orthonormal* polynomials (5.4).

To solve this problem, we begin with computing the Gram matrix

(5.27) $\quad M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n}\,, \qquad m_{i,j} = (p_i, p_j).$

For $i = -1$, one clearly has $m_{-1,j} = 0$, while for $i = 0$ one gets $m_{0,j} = p_0 \nu_j$, where p_0 is a known constant and ν_j are the modified moments, also assumed to be known. The remaining entries for $i > 0$ can be obtained recursively, according to

$$m_{i,j} = \frac{1}{a_{i-1}} [a_j m_{i-1,j+1} + (b_j - b_{i-1}) m_{i-1,j} + c_j m_{i-1,j-1} - c_{i-1} m_{i-2,j}],$$

as follows from (5.25).

Since the matrix M is positive-definite, it admits a Cholesky decomposition

(5.28) $\quad M = R^T R, \quad R = [r_{i,j}]$ upper triangular,

which can be obtained by well-known algorithms.

The problem is now solved, since

$$(5.29) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{r_{j+1,j+1}}{r_{j,j}}\, a_j \\ \beta_j &= b_j + \frac{r_{j,j+1}}{r_{j,j}}\, a_j - \frac{r_{j-1,j}}{r_{j-1,j-1}}\, a_{j-1} \end{aligned}\right\} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In the (unstable!) case $p_k(x) = x^k$, these formulas have previously been obtained by Golub and Welsch [7].

The success of the algorithm depends critically on the ability to compute the modified moments with any degree of accuracy. This is by no means a trivial problem, since $p_k(t)$ may be highly oscillatory and ω singular. Sometimes it is possible to express these moments analytically in terms of known functions, as the following example illustrates.

Consider Gaussian quadrature rules with weight function $\omega(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos m\,\pi t)$ on $[-1,1]$. (These may be useful in Fourier analysis.) Our algorithm will produce them most conveniently with the choice $w(t) = 1$, i.e. the Legendre polynomials $p_k(t) = P_k(t)$, since then

$$\nu_0 = 1,\ \nu_{2k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2m}} J_{2k+\frac{1}{2}}(m\pi),\ \nu_{2k-1} = 0.$$

The modified moments are thus expressible in terms of spherical Bessel functions, which in turn can be accurately computed by well-known methods. Other examples may be found in [6], [10].

5.9 A discretization method in reverse. In section 5.7 we used a certain prespecified discretization of the inner product (5.16) to generate discrete orthogonal polynomials which in turn approximate the desired (continuous) orthogonal polynomials. A procedure, which in a sense is the reverse, has recently been proposed by Wilson [11]. Here, the desired orthogonal polynomials are interpreted as the orthogonal polynomials belonging to a discrete inner product, and the object of the method is to determine this discrete inner product.

That such an inner product exists, should not come as a surprise, since the polynomials $\{\pi_r\}_{r=0}^{n}$ are indeed orthonormal with respect to the discrete inner product

$$[f,g] = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{(N)} f(\xi_k^{(N)}) g(\xi_k^{(N)}),$$

where N is any integer exceeding n. Only, this particular inner product is not useful for constructive purposes, since it presupposes knowledge of the Gaussian weights and abscissas.

A more useful inner product can be obtained based on the following observation. Given N distinct points $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, then for any integer $m < N$ we can construct an N-point quadrature rule

$$(5.30) \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\ \omega(t)dt \doteq \sum_{k=1}^{N} \omega_k f(t_k)$$

which has degree of exactness m. In fact, choose any set of N positive weights w_k which sum up to the first moment μ_0 [cf. (5.10)],

$$(5.31) \qquad \sum_{k=1}^{N} w_k = \mu_0, \quad w_k > 0 \ \text{ all } k.$$

Then take $\omega_k = \omega_k^{(m)}$, where

$$(5.32)\qquad \omega_k^{(m)} = w_k[1 + \sum_{j=1}^{m} \overset{N}{\pi}_j(t_k)\int_\alpha^\beta \overset{N}{\pi}_j(t)\omega(t)dt], \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Here, $\{\overset{N}{\pi}_r\}_{r=0}^{N-1}$ is the set of orthonormal polynomials belonging to the discrete inner product

$$(5.33)\qquad [f,g] = \sum_{k=1}^{N} w_k\, f(t_k)\, g(t_k).$$

Positivity of the weight function ω, incidentally, need not be assumed in this construction.

It is interesting to observe that the choice (5.32) of the coefficients ω_k has the distinctive property of minimizing $\sum_{k=1}^{N} \omega_k^2/w_k$ among all quadrature rules (5.30) which have degree of exactness m.

If we now consider the bilinear form

$$(5.34)\qquad \langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^{N} \omega_k^{(m)}\, f(t_k)\, g(t_k)$$

(which need not be a true inner product, the $\omega_k^{(m)}$ not necessarily being all positive), and assume that

$$(5.35)\qquad 2n \leq m < N,$$

it turns out that the desired orthogonal polynomials $\{\pi_r\}_{r=0}^{n}$ are also orthogonal relative to the bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$. This is true even if the weight function ω is not positive, provided that the bilinear form (5.3) has a set of orthogonal polynomials $\{\pi_r\}_{r=0}^{n}$ associated with it. We can thus obtain the polynomials $\{\pi_r\}_{r=0}^{n}$ by generating their three-term recurrence relation in the usual way using the bilinear form (5.34) rather than the inner product (5.3).

The main difficulty with this procedure lies in the computation of the integrals in (5.32). Suppose, however, that modified moments

$$(5.36)\qquad \nu_j = \int_\alpha^\beta p_j(t)\ \omega(t)dt, \qquad j = 0, 1, \ldots, m,$$

are available, where the polynomials $\{p_r\}_{r=0}^{m}$ are orthonormal on [a,b] with respect to the weight function $w(t)$. Assuming further that

$$(5.37) \qquad \int_a^b w(t)dt = \int_\alpha^\beta \omega(t)dt,$$

we may take for (5.33) the inner product

$$(5.38) \qquad [f,g] = \sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \, f(x_k^{(N)}) \, g(x_k^{(N)}),$$

where $l_k^{(N)}$, $x_k^{(N)}$ are the Gaussian weights and abscissas belonging to the weight function w. For, by virtue of $m < N$, we have

$$[p_r,p_s] = \sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \, p_r(x_k^{(N)}) \, p_s(x_k^{(N)})$$

$$= \int_a^b p_r(x) \, p_s(x) \, w(x)dx = \delta_{rs}, \quad 0 \le r, \ s \le m,$$

and (5.3) is insured by (5.37). The weights $\omega_k^{(m)}$ in (5.32) are now easily computed, using

$$w_k = l_k^{(N)}, \ \overset{N}{\pi}_j(t) = p_j(t), \ \int_\alpha^\beta \overset{N}{\pi}_j(t) \, \omega(t)dt = \nu_j;$$

$$k = 1, 2, \ldots, N; \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

In effect we have obtained another realization of the map (5.22) studied in section 5.7.

For proofs of the statements made in this section we refer to [11]. One finds in this reference also a useful modification of the algorithm in section 5.6.

References

[1] Bojanic, R., De Vore, R. On polynomials of best one sided approximation. Enseignement Math. (2) 12 (1966), 139-164.

[2] Davis, P.J., Rabinowitz, P. Ignoring the singularity in approximate integration. SIAM J. Numer. Anal. 2 (1965), 367-383.

[3] Gautschi, W. On inverses on Vandermonde and confluent Vandermonde matrices II. Numer. Math. 5 (1963), 425-430.

[4] Gautschi, W. Numerical quadrature in the presence of a singularity. SIAM J. Numer. Anal. 4 (1967), 357-362.

[5] Gautschi, W. Construction of Gauss-Christoffel quadrature formulas. Math. Comp. 22 (1968), 251-270.

[6] Gautschi, W. On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments. Math. Comp. 24 (1970), 245-260.

[7] Golub, G.H., Welsch, J.H. Calculation of Gauss quadrature rules. Math. Comp. 23 (1969), 221-230.

[8] Rabinowitz, P. Gaussian integration in the presence of a singularity. SIAM J. Numer. Anal. 4 (1967), 191-201.

[9] Rice, J.R. A theory of condition. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 287-310.

[10] Sack, R.A., Donovan, A.F. An algorithm for Gaussian quadrature given generalized moments. Dept. of Mathematics, Univ. of Salford, Salford, England, 1969.

[11] Wilson, M.W. Discrete least squares and quadrature formulas. Math. Comp. 24 (1970), 271-282.