Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

M.C. SYLLABUS

11

M.C. SYLLABUS

11

COLLOQUIUM HALFALGEBRA'S EN POSITIEVE OPERATOREN

DOOR

H. BART
M.A. KAASHOEK
H.G.J. PIJLS
W.J. DE SCHIPPER
J. DE VRIES

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

1971

Voorwoord

In het academisch jaar 1969-1970 werd op het Mathematisch Centrum een colloquium gehouden over halfalgebra's en positieve operatoren. Het ging daarbij vooral om de spectrale eigenschappen van positieve operatoren en elementen van bepaalde halfalgebra's. Ook de samenhang tussen beide onderwerpen werd besproken. Dit boekje geeft een verslag van de in dit colloquium gehouden voordrachten. Voor de lezer is er een appendix aan toegevoegd, waarin een overzicht wordt gegeven van de voornaamste begrippen en stellingen uit de spectraaltheorie. Bij de samenstelling van de verschillende hoofdstukken van dit boekje werd het in de appendix behandelde als bekend verondersteld.

Augustus 1970

M.A. Kaashoek

Inhoudsopgave

Voorwoord

Hoofdstuk I. Lokaal kompakte halfalgebra's, door M.A. Kaashoek 1
1. Definitie en voorbeelden 1
2. Idealen 4
3. Enkelvoudige halfalgebra's 10
4. Halfenkelvoudig monothetische halfalgebra's 14
5. Irreducibele positieve operatoren 25

Hoofdstuk II. Positieve operatoren, door H. Bart en H. Pijls 37
Notaties 37
1. Geordende lokaal convexe ruimten 38
2. De stelling van Pringsheim 48
3. Positieve operatoren 54
4. Sterk-positieve operatoren 64

Hoofdstuk III. Het spektrum van positieve operatoren in komplekse Banach-roosters, door W.J. de Schipper 70
1. Komplekse Banachroosters 70
2. Positieve operatoren en roosteroperatoren in C(X) 82
3. Het spektrum van roosteroperatoren in Banachroosters 91
4. Het spektrum van roosteroperatoren in C(X) 94
5. Het spektrum van positieve operatoren in Banachroosters 105
6. Het spektrum van irreducibele operatoren 115

Hoofdstuk IV. Operator-polynomen met positieve koëfficiënten, door H. Bart 122
0. Inleiding 122
1. Operator-matrices 124
2. Linearisering van operator-polynomen 130
3. Operator-polynomen met positieve koëfficiënten 135
4. Machtreeksen met kompakte positieve koëfficiënten 141

Hoofdstuk V. Enkele opmerkingen over strikte halfalgebra's, door M.A. Kaashoek en H. Pijls 143
1. Spectrale eigenschappen 143
2. Een nodige en voldoende voorwaarde voor positiviteit 147

Appendix, door W.J. de Schipper en J. de Vries 153
1. Spectraaltheorie in Banachalgebra's 153
2. Het spektrum van een operator in een Banachruimte 162
3. Onderverdelingen van het spektrum 166
4. Een spektrum-bewarende inbedding 171
5. De kompleksifikatie van een reële Banachruimte 173

Hoofdstuk I

Lokaal kompakte halfalgebra's

door

M.A. Kaashoek

1. Definitie en voorbeelden

Zij B een Banachalgebra met een eenheidselement e. Een niet-lege deelverzameling A van B heet halfalgebra als

$$a,b\in A,\ \alpha \geq 0 \Longrightarrow a+b,\ ab,\ \alpha a\in A.$$

Een halfalgebra A heet lokaal kompakt als $A \neq \{0\}$ en

$$A\cap\{x\in B:\ ||x|| \leq 1\}$$

is kompakt.

Zij A een halfalgebra in B. Dan is

$$E = A - A$$

een reële deelalgebra van B. Als $A \neq \{0\}$ en $\dim E < +\infty$, dan is A zeker lokaal kompakt. Niet alle voorbeelden zijn zo triviaal.

1.1 Stelling. Zij $t \neq 0$ in B. Onderstel dat het spektrum $\sigma(t)$ van t splitst in twee disjunkte gesloten deelverzamelingen σ_1 en σ_2 en wel zo dat

(i) σ_1 is een eindige (eventueel lege) deelverzameling van polen van t en $\sigma_1\cap\{\alpha\in\mathbb{R}:\ \alpha > 0\} = \emptyset$;

(ii) σ_2 is leeg of er is een getal $\alpha > 0$ in σ_2 zo dat

$$\sigma_2 = \sigma(t)\cap\{\lambda:\ |\lambda| \leq \alpha\}$$

en

$$\sigma_2\cap\{\lambda:\ |\lambda| = \alpha\}$$

is een eindige verzameling van polen van t.

Dan is de gesloten halfalgebra voortgebracht door t lokaal kompakt.

Zij $t \in B$. De gesloten halfalgebra voortgebracht door t geven we aan met A(t). Per definitie is A(t) de afsluiting (in de normtopologie van B) van de verzameling

$$\{\alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^k : \alpha_i \geq 0 \ (i = 1,\ldots,k),\ k = 1,2,\ldots\} .$$

Zij

$$E = A(t) - A(t) .$$

Als $\dim E < +\infty$, dan is er een niet-konstante veelterm p(X) met p(t) = 0. Volgens de spectrale afbeeldingsstelling (Appendix 1.9) moet $\sigma(t)$ dan eindig zijn. We kunnen dus Stelling 1.1 gebruiken om "oneindig dimensionale" lokaal kompakte halfalgebra's te konstrueren.

1.2 Probleem. Is het omgekeerde van Stelling 1.1 ook juist? In §4 van dit hoofdstuk zullen we aantonen dat dit onder bepaalde voorwaarden inderdaad het geval is. Zonder deze extra voorwaarden is het antwoord op de gestelde vraag nog onbekend.

1.3 Bewijs van Stelling 1.1 (Schets). Zij p_1 de spectrale idempotent behorende bij de spectrale deelverzameling σ_1, en zij p_2 die behorende bij σ_2 (zie §1 van de Appendix). Het is voldoende om te bewijzen dat $A(tp_1)$ en $A(tp_2)$ lokaal kompakt zijn of alleen uit het nulelement bestaan. Omdat σ_1 een eindige verzameling is van polen van t, ligt $A(tp_1)$ in een eindig dimensionale deelalgebra van B. Dus $A(tp_1)$ is lokaal kompakt of $A(tp_1) = \{0\}$.

Uit de spectraaltheorie volgt nu dat we verder zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen aannemen dat $\sigma_1 = \emptyset$. Dan is $p_2 = e$, en dus $t = tp_2$. Door t te vervangen door $\alpha^{-1}t$ zien we ook dat we zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen aannemen dat $\alpha = 1$. Er geldt dan

$$r(t) = 1\epsilon\sigma(t) \ .$$

Hier duidt r(s) de spectraalradius aan van een element s in B.

Blijft te bewijzen dat A(t) lokaal kompakt is. Neem b_n in A(t) met $||b_n|| \leq 1$ voor n = 1,2,... . We moeten bewijzen dat de rij $\{b_n\}$ een convergente deelrij heeft. Daar b_n tot de afsluiting behoort van de verzameling

$$\{\alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^k : \alpha_i \geq 0\}$$

is het voldoende deze bewering te verifiëren voor het geval dat

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) t^k$$

met $\alpha_k(n) \geq 0$ en $\alpha_k(n) = 0$ voor n voldoende groot. Omdat

$$r(t) = 1\epsilon\sigma(t)$$

volgt uit de spectrale afbeeldingsstelling dat

$$r(b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) \ .$$

Daar $r(b_n) \leq ||b_n|| \leq 1$ volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) \leq 1 \ .$$

Maar dan is er een deelrij $\{n_i\}$ van de rij der natuurlijke getallen waarvoor geldt dat de rij $\{\alpha_k(n_i)\}_i$ convergeert voor iedere k. Door over te gaan op de deelrij $\{n_i\}$ mogen we aannemen dat

$$\beta_k = \lim_n \alpha_k(n)$$

bestaat. Merk op dat

$$\beta_k \geq 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \leq 1 \ .$$

Zij p de spectrale idempotent behorende bij de spectrale verzameling

$$\sigma(t)\cap\{\lambda\colon |\lambda| = 1\} ,$$

en zij $s = t(e-p)$. Omdat $r(s) < 1$ volgt dat $||s^n|| \to 0$, en dus convergeert de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k s^k$$

in de norm van B. Zij d de som van deze reeks. Dan volgt uit het bovenstaande dat

$$d = \lim_n b_n(e-p) .$$

Om te bewijzen dat de rij $\{b_n\}$ een convergente deelrij heeft, is het dus voldoende om aan te tonen dat de rij $\{b_n p\}$ een convergente deelrij heeft. Immers

$$b_n = b_n(e-p) + b_n p \qquad (n = 1,2,\ldots) .$$

De existentie van zo'n deelrij volgt direkt uit het feit dat deze rij een begrensde rij is gelegen in een eindig dimensionale ruimte.

Stelling 1.1 is een uitbreiding van Theorem 5 in [2] (zie ook Theorem 9 in [5]).

2. Idealen

Zij A een halfalgebra. Een niet-lege deelverzameling J van A heet een rechtsideaal in A als

(i) J is een halfalgebra,

(ii) uit $x\in A$, $a\in J$ volgt $ax\in J$.

Evenzo definieert men een linksideaal en een twee-zijdig ideaal. Een ideaal J in A heet gesloten als J een gesloten deelverzameling is van A in de relatieve topologie geïnduceerd in A door de normtopologie van B. Daar een

lokaal kompakte halfalgebra gesloten is, is in een lokaal kompakte halfalgebra een gesloten ideaal gesloten in de Banachalgebra B.

Een gesloten rechtsideaal J heet een minimaal gesloten rechtsideaal als $J \neq (0)$ en de gesloten rechtsidealen van A bevat in J zijn het nulideaal en J.

2.1 Lemma. In een lokaal kompakte halfalgebra bevat ieder gesloten rechtsideaal $\neq (0)$ een minimaal gesloten rechtsideaal. Een soortgelijke uitspraak geldt voor gesloten linksidealen en gesloten 2-zijdige idealen.
Bewijs: Zie [1], Lemma 1.

In een lokaal kompakte halfalgebra is er dus een "minimum conditie" op de gesloten rechtsidealen.

Zij D een deelverzameling van de halfalgebra A, die niet-leeg is. De rechter annihilator van D (notatie: D_r) is per definitie de verzameling van alle x in A met $ax = 0$ voor iedere a in D. Dus

$$D_r := \{x \in A: ax = 0 \text{ voor iedere } a \in D\} .$$

Evenzo definieert men de linker annihilator van een niet-lege deelverzameling van A.

Merk op dat D_r een gesloten rechtsideaal is. Is D zelf een rechtsideaal, dan is D_r een gesloten 2-zijdig ideaal.

2.2 Lemma. Zij E een gesloten deelverzameling van de lokaal kompakte halfalgebra A, en onderstel dat $\alpha E \subset E$ ($\alpha \geq 0$). Zij a een element in A met

$$\{a\}_r \cap E = (0) .$$

Dan is aE gesloten.
Bewijs: Zie [1], Lemma 2.

Een idempotent p (zie Appendix 1.11) in A noemen we een rechts minimaal idempotent van A als pA een minimaal gesloten rechtsideaal is in A. Merk op dat een rechts minimaal idempotent ongelijk nul is.

2.3 Propositie. Zij A een lokaal kompakte halfalgebra, en zij M een minimaal gesloten rechtsideaal in A. Als $p \neq 0$ een idempotent is in M dan

$$pm = m \qquad (m \in M) .$$

I.h.b. geldt $pA = M$, en dus is p een rechts minimaal idempotent.
Bewijs. Zij $J = \{m \in M: m - pm \in M\}$. Dan is J een gesloten rechtsideaal bevat in M. Omdat $0 \neq p \in J$ en M minimaal is, volgt $M = J$. Daaruit volgt

$$m - pm \in \{p\}_r \cap M \qquad (m \in M) .$$

Nu is $\{p\}_r \cap M$ een gesloten rechtsideaal bevat in M, echter $\neq M$ want $p \notin \{p\}_r$. Dus $\{p\}_r \cap M = (0)$, en daaruit volgt dan $m = pm$ voor iedere m in M.

2.4 Propositie. Zij A een lokaal kompakte halfalgebra, en zij M een minimaal gesloten rechtsideaal in A. Neem a in A, en stel $aM \neq (0)$. Dan is aM een minimaal gesloten rechtsideaal.
Bewijs. Merk op dat $\{a\}_r \cap M$ een gesloten rechtsideaal is bevat in M. Uit het gegeven volgt dat

$$\{a\}_r \cap M \neq M .$$

Daar M minimaal is, volgt dan direct $\{a\}_r \cap M = (0)$, en dus is volgens Lemma 2.2 aM gesloten.

De verzameling aM is zeker een rechtsideaal. We moeten dus alleen nog bewijzen dat aM minimaal is. Zij I een gesloten rechtsideaal gelegen in aM, en onderstel dat $I \neq aM$. Zij

$$J = \{m \in M: am \in I\} .$$

Dan is J een gesloten rechtsideaal in M en $J \neq M$. Dus $J = (0)$, maar dan ook $I = (0)$. Daaruit volgt dat aM een minimaal gesloten rechtsideaal is.

We noemen een halfalgebra D een delingshalfalgebra als

$$D^* := D \setminus \{0\}$$

een groep is t.o.v. de vermenigvuldiging.

2.5 Stelling. Zij p een rechts minimaal idempotent in de lokaal kompakte halfalgebra A. Dan is D = pAp een lokaal kompakte delingshalfalgebra.
Bewijs. (vergelijk [1], Theorem 2). Zij pap ≠ 0 voor een element a in A. We gaan eerst bewijzen dat de vergelijking

$$papX = p$$

een oplossing heeft in D. Daarvoor is het voldoende om aan te tonen dat de vergelijking

$$(pa)Y = p \qquad (*)$$

een oplossing heeft in M = pA.

Volgens het gegeven is M een minimaal gesloten rechtsideaal, en $(pa)M \neq (0)$ want $p = p^2$ behoort tot M en pap ≠ 0. Uit Propositie 2.4 volgt dan dat (pa)M een minimaal gesloten rechtsideaal is. Maar $(pa)M \subset M$. Dus (pa)M = M. De vergelijking (*) heeft dus een oplossing in M.

Neem nu d_1 en d_2 in D^*, en stel $d_1d_2 = 0$. Volgens het voorgaande is er een d in D zodat $d_2d = p$. Daaruit volgt

$$d_1 = d_1p = d_1(d_2d) = (d_1d_2)d = 0 \ .$$

Contradictie. Dus $d_1d_2 \neq 0$, en D^* is gesloten t.o.v. de vermenigvuldiging.

Merk op dat p een éénelement is in D^*. Verder heeft ieder element d in D^* een inverse, want de vergelijking dX = p is oplosbaar in D en de oplossing ligt in D^* want p ≠ 0. Dus D^* is een groep.

Zonder moeite is in te zien dat D een halfalgebra is. Verder is D een gesloten deelverzameling van A. Dus D is lokaal kompakt.

Een halfalgebra A heet strikt als $A \cap (-A) = (0)$, d.w.z. als uit a en -a in A volgt a = 0. Een element p in een halfalgebra A heet een éénelement als

$$pa = ap = p \qquad (a \in A) \ .$$

Merk op dat een éénelement idempotent is.

2.6 Stelling. Zij A een strikte gesloten delingshalfalgebra met éénelement p. Dan $A = \mathbb{R}^+p$.

Bewijs. (Zie [1], Theorem 3). Zij $u\in A$. We bewijzen eerst dat $\lambda p-u\in A$ voor $\lambda > ||u||$. Definieer voor $\lambda > ||u||$

$$b_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{\lambda^n}$$

waarbij $u^0 = p$. Dan $b_\lambda\in A$ en $b_\lambda(\lambda p-u) = (\lambda p-u)\, b_\lambda = p$. Dus

$$\lambda e - u = b_\lambda^{-1}\in A \ .$$

Zij $\mu = \inf\{\lambda: \lambda p-u\in A\}$. Omdat A strikt is, is $\mu \geq 0$. Omdat A gesloten is, is $\mu p - u$ in A. We zullen bewijzen dat

$$y = \mu p - u = 0 \ .$$

Stel $y \neq 0$. Dan is $\nu p - y^{-1}$ in A voor ν voldoende groot en positief. Maar dan ook

$$(\mu-\varepsilon)p - u = y - \varepsilon p = \varepsilon y(\frac{1}{\varepsilon}\, p-y^{-1})\in A$$

voor $\varepsilon > 0$ voldoende klein. Contradictie, want $\mu = \inf\{\lambda: \lambda p-u\in A\}$. Dus $y = 0$ en $u = \mu p$. Daaruit volgt $A\subset\mathbb{R}^+p$. Daar $p\in A$ geldt zeker $\mathbb{R}^+p\subset A$.

2.7 Stelling. Zij A een lokaal kompakte halfalgebra, en zij M een minimaal gesloten rechtsideaal in A met $M^2 \neq (0)$. Dan bevat M een idempotent $\neq 0$.

Bewijs. (vergelijk [1], Theorem 1). Het bewijs gaat in vier stappen.

1. Volgens het gegeven is er een element $t\in M$ zo dat $tM \neq (0)$. Zij

$$J = \{t\}_r\cap M \ .$$

Dan is J een gesloten rechtsideaal bevat in M en $J \neq M$. Daar M minimaal is, volgt $J = (0)$. Dus

$$tx \neq 0 \qquad (0 \neq x\in M) \ . \qquad (1)$$

2. Neem aan dat A kommutatief is. Uit (1) volgt dat $xM \neq (0)$ voor iedere $0 \neq x \in M$. Daar $xM \subset M$ volgt dan uit Propositie 2.4 dat

$$xM = M \qquad (0 \neq x \in M) \ .$$

Het is niet moeilijk om aan te tonen dat de laatste formule impliceert dat $M^* = M \setminus \{0\}$ een groep is t.o.v. de vermenigvuldiging in A. Het éénelement van deze groep is een idempotent $\neq 0$ en ligt in M. Voor het kommutatieve geval is de stelling dus bewezen.

3. We keren nu weer terug naar het algemene geval. Zij t als in 1. Beschouw A(t), de gesloten halfalgebra voortgebracht door t. Daar $A(t) \subset M$ geldt voor iedere $s \neq 0$ in A(t) dat $ts \neq 0$ (zie formule (1)). Maar A(t) is kommutatief. Dus $st \neq 0$ voor iedere $s \neq 0$ in A(t). Maar dan ook

$$sM \neq (0) \qquad (0 \neq s \in A(t)) \ .$$

We kunnen nu de argumentatie van 1. herhalen om te bewijzen dat

$$sx \neq (0) \qquad (0 \neq x \in M) \ .$$

I.h.b. geldt

$$s_1 s_2 \neq 0 \tag{2}$$

voor ieder paar s_1 en s_2 ongelijk nul in A(t).

4. Merk op dat A(t) een lokaal kompakte kommutatieve halfalgebra is. Volgens Lemma 2.1 bevat A(t) een minimaal gesloten ideaal, zeg N. Omdat A(t) geen nuldelers heeft (zie formule (2)), geldt $N^2 \neq (0)$. Volgens 2. bevat N dan een idempotent $p \neq 0$. Daar $N \subset A(t) \subset M$, is p een idempotent ongelijk nul in M.

We merken nog op dat in het bewijs van Stelling 2.7 geen gebruik is gemaakt van de eigenschappen van de norm. Het mag daarom verwacht worden dat deze stelling ook juist is voor lokaal kompakte halfalgebra's gelegen in topologische (niet noodzakelijk normeerbare) algebra's.

3. Enkelvoudige halfalgebra's

Een halfalgebra A heet enkelvoudig als A alleen maar triviale 2-zijdige idealen heeft, d.w.z., als (0) en A de 2-zijdige idealen in A zijn.

3.1 Voorbeeld. Zij $M_n(\mathbb{C})$ de algebra van alle n×n-matrices met complexe elementen. We veronderstellen dat $M_n(\mathbb{C})$ voorzien is van een of andere algebra-norm. Met zo'n norm is $M_n(\mathbb{C})$ dan een Banachalgebra.

De verzameling $M_n(\mathbb{R}^+)$ van alle n×n-matrices met niet-negatieve elementen is een halfalgebra in $M_n(\mathbb{C})$. Deze halfalgebra is lokaal kompakt, strikt, enkelvoudig en heeft een éénelement. Het blijkt dat $M_n(\mathbb{R}^+)$ door deze vier eigenschappen wordt gekarakteriseerd.

3.2 Stelling. (zie [1], Theorem 10). Als A een lokaal kompakte, strikte, enkelvoudige halfalgebra is met een éénelement, dan is A isomorf met $M_n(\mathbb{R}^+)$ voor een of ander natuurlijk getal n.

Het bewijs gaat in een aantal stappen. In het volgende is A een lokaal kompakte, strikte, enkelvoudige halfalgebra met éénelement 1. Omdat $A \neq (0)$, is $1 \neq 0$. Als B en D niet-lege deelverzamelingen zijn van A, dan is per definitie

$$BD = \{\sum_i b_i d_i : b_i \in B,\ d_i \in D\} .$$

1. Zij $M \neq (0)$ een rechtsideaal in A. Dan $M^2 \neq (0)$.

Bewijs. Stel $M^2 = (0)$. Dan

$$(AM)(AM) \subset AM^2 = (0) . \qquad (1)$$

Merk op dat AM een 2-zijdig ideaal is. Omdat $1 \in A$, is $AM \neq (0)$. Dus volgt $AM = A$. Uit (1) volgt dan dat $A^2 = (0)$. Contradictie, want $1 \in A^2$ en $1 \neq 0$.

Omdat A lokaal kompakt is, bevat A volgens Lemma 2.1 minimale gesloten rechtsidealen. Volgens 1. voldoet ieder minimaal gesloten rechtsideaal in A aan de voorwaarden van Stelling 2.7. Er zijn dus rechts minimale idempotenten in A. Zij F de verzameling van alle rechts minimale idempotenten

in A. Dan $F \neq \emptyset$ en

2. $FA = A$.

Bewijs. Merk op dat FA een rechtsideaal $\neq (0)$ is. Omdat A enkelvoudig is, is het dus voldoende om te bewijzen dat

$$AFA \subset FA .$$

Neem $p \in F$ en $a \in A$. Als $ap = 0$, dan $apx = 0 \in FA$ voor iedere $x \in A$. Stel $ap \neq 0$. Dan is $(ap)(pA) \neq (0)$, en dus (zie Propositie 2.4) is $(ap)(pA)$ een minimaal gesloten rechtsideaal in A. Daaruit volgt de existentie van een $q \in F$ zo dat

$$(ap)(pA) = qA .$$

Maar dan $ap = qb$ voor een $b \in A$ en dus $apx = q(bx) \in FA$ voor iedere $x \in A$. Daaruit volgt $AFA \subset FA$.

3. Voor iedere p en q in F geldt $pAq \neq (0)$.

Bewijs. Stel $pAq = 0$. Dan $q \in (pA)_r$. Omdat $(pA)_r$ een 2-zijdig ideaal is en $q \neq 0$ volgt hieruit dat $(pA)_r = A$. Contradictie, want $p \notin (pA)_r$.

4. Zijn p en q in F, dan is er een $u \neq 0$ zo dat

$$pAq = \mathbb{R}^+ u .$$

Als $p = q$, dan kunnen we $u = p$ nemen.

Bewijs. Neem $0 \neq v = qap \in qAp$. Dan $v(pA) \neq (0)$ en dus is vpA een minimaal gesloten rechtsideaal (zie Propositie 2.4). Omdat $vpA \subset qA$ volgt $vpA = qA$, en dus

$$v(pAq) = qAq .$$

Maar dan is er een element u in pAq zo dat $vu = q$. Merk op dat

$$(pAq)v = pAqap \subset pAp = \mathbb{R}^+ p$$

volgens de Stellingen 2.5 en 2.6. I.h.b. geldt dan

$$pAq = (pAq)vu \subset \mathbb{R}^+ pu = \mathbb{R}^+ u .$$

Daar $u \in pAq$ geldt zeker $\mathbb{R}^+u \subset pAq$. Dus $pAq = \mathbb{R}^+u$.

5. Er zijn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in F zo dat

$$1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ , \quad u_i u_j = 0 \qquad (i \neq j) \ .$$

Bewijs. Omdat $1 \in A$ en $FA = A$ zijn er $e_i \in F$ en $a_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$ zo dat

$$1 = e_1 a_1 + e_2 a_2 + \ldots + e_n a_n \ . \qquad (2)$$

Kies de representatie van 1 zó dat n zo klein mogelijk is in (2). We zullen dan bewijzen dat $u_i = e_i a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ de gewenste eigenschappen heeft.

Vermenigvuldig (2) rechts met e_1 en bedenk dat (volgens 4) $e_1 a_1 e_1 = \lambda e_1$ met $\lambda \geq 0$, dan volgt

$$(1-\lambda) e_1 = e_2 a_2 e_1 + \ldots + e_n a_n e_1 \ . \qquad (3)$$

Daaruit volgt $\lambda \geq 1$, want als $0 \leq \lambda < 1$ dan kunnen we e_1 substitueren in (2) en krijgen dan een representatie van 1 van de vorm

$$1 = e_2 b_2 + \ldots + e_n b_n \ .$$

Deze representatie is "korter" dan (2). Dus $\lambda \geq 1$. Omdat A strikt is volgt uit (3) direct dat $\lambda > 1$ onmogelijk is. Blijft $\lambda = 1$, d.w.z.

$$e_1 a_1 e_1 = e_1 \ , \quad e_2 a_2 e_1 + \ldots + e_n a_n e_1 = 0 \ .$$

Omdat A strikt is, volgt uit de laatste gelijkheid $e_i a_i e_1 = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$. Door e_1 te verwisselen met e_j krijgen we dan

$$e_j a_j e_j = e_j \ , \quad e_i a_i e_j = 0 \qquad (i \neq j) \ .$$

Nemen we $u_i = e_i a_i$ voor $i = 1, \ldots, n$, dan volgt hieruit

$$1 = u_1 + \ldots + u_n \ , \quad u_i^2 = u_i \ , \quad u_i u_j = 0 \quad (i \neq j) \ .$$

Omdat $0 \neq u_i = u_i^2 = u_i(e_i a_i)$ is $u_i(e_i A) \neq (0)$, en dus is $u_i(e_i A)$ een minimaal gesloten rechtsideaal (Propositie 2.4) dat u_i bevat. Maar dan $u_i \in F$ volgens Propositie 2.3.

6. Voor iedere i en j is

$$u_i A u_j = \mathbb{R}^+ e_{ij} \tag{4}$$

voor een of ander element $e_{ij} \neq 0$ in $u_i A u_j$. De elementen e_{ij} kunnen zo gekozen worden dat

$$e_{ii} = u_i \ (i = 1,\ldots,n), \quad e_{ij}e_{jk} = e_{ik} \ (i,j,k = 1,\ldots,n),$$

$$e_{ij}e_{kl} = 0 \ (j \neq k).$$

Bewijs. Omdat $u_i \in F$, bestaan er volgens 4. elementen e_{ij} die voldoen aan formule (4). Bovendien mogen we volgens 4. $e_{ii} = u_i$ nemen $(i = 1,\ldots,n)$. Dat doen we dan ook. Hoe we nu verder ook e_{ij} $(i \neq j)$ kiezen, steeds is voldaan aan $e_{ij}e_{kl} = 0$ voor $j \neq k$, want $u_j u_k = 0$ voor $j \neq k$. De keuze van e_{ij} $(j \neq i)$ wordt dus bepaald door de eis $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$.

We beginnen met e_{1k} $(k \neq 1)$ zo te kiezen dat voldaan is aan de formule (4). Neem vervolgens $j \neq 1$ en k willekeurig. Omdat $(Au_k)_l$ een 2-zijdig ideaal is, dat u_k niet bevat, volgt uit het enkelvoudig zijn van A dat $(Au_k)_l = (0)$. Daaruit volgt dat

$$(0) \neq e_{1j}Au_k = e_{1j}u_j Au_k \subset u_1 Au_k$$

en dus

$$e_{1j}u_j Au_k = u_1 Au_k \ .$$

De vergelijking

$$e_{1j}X = e_{1k} \tag{5}$$

heeft dus een (en precies een) oplossing in $u_j Au_k$, zeg e_{jk}. Daarmee is e_{jk} gekozen voor elke j en k. Merk op dat voor $j = k \geq 2$ de oplossing van (5) gelijk is aan u_j. Verder is $e_{jk} \neq 0$ in $u_j Au_k$, dus is zeker voldaan aan formule (4).

Uit (5) volgt dat $e_{1j}e_{jk} = e_{1k}$ voor $j \neq 1$. Omdat $e_{11}e_{1k} = e_{1k}$ geldt dus

$$e_{1j}e_{jk} = e_{1k} \qquad (j,k = 1,\ldots,n) .$$

Neem nu i, j en k willekeurig. Omdat

$$e_{ij}e_{jk} \in u_iAu_k = \mathbb{R}^+e_{ik} ,$$

is $e_{ij}e_{jk} = \lambda e_{ik}$ en dus

$$e_{1k} = e_{1i}(e_{ij}e_{jk}) = \lambda e_{1i}e_{ik} = \lambda e_{1k} .$$

Daaruit volgt $\lambda = 1$ en $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$ voor iedere i, j en k.

We hebben nu genoeg gegevens verzameld om Stelling 3.2 te bewijzen. Neem $x \in A$. Dan

$$x = 1.x.1 = \sum_{i,j=1}^{n} u_ixu_j = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}e_{ij} .$$

De toevoeging $x \mapsto (\lambda_{ij})$ geeft het gewenste isomorfisme.

4. Halfenkelvoudige monothetische halfalgebra's

Zij A een halfalgebra. We noemen A halfenkelvoudig als het nulideaal het enige gesloten 2-zijdige ideaal J in A is met $J^2 = (0)$.

4.1 Lemma. Zij A een halfenkelvoudige halfalgebra, en zij I een (links, rechts of 2-zijdig) ideaal in A met $I^n = (0)$ voor een of ander natuurlijk getal n. Dan is $I = (0)$.
Bewijs. Zie [1], Lemma 3.

4.2 Lemma. Zij A een kommutatieve halfalgebra. Dan is A halfenkelvoudig als en alleen als uit $0 \neq a \in A$ volgt $a^2 \neq 0$.
Bewijs. Stel A is halfenkelvoudig. Neem $a \in A$ met $a^2 = 0$. Zij

$$I = \{ab + \alpha a : b \in A, \alpha \geq 0\} .$$

Dan is I een ideaal in A met $I^2 = (0)$. Maar dan $I = (0)$ en dus $a = 0$.

Het omgekeerde is triviaal.

4.3 Propositie. Zij A een lokaal kompakte kommutatieve halfalgebra. Dan is A halfenkelvoudig als en alleen als

$$r(a) = \lim_n ||a^n||^{1/n} > 0$$

voor iedere $0 \neq a \in A$.

Bewijs. (verg. [1], Lemma 8). Stel A is halfenkelvoudig. Zij

$$I = \{x \in A: r(x) = 0\} .$$

Dan is I een gesloten ideaal in A (zie Appendix 1.3 (vi)). Neem aan dat $I \neq (0)$. Dan bevat I een minimaal gesloten ideaal, zeg M (Lemma 2.1). Volgens Lemma 4.1 voldoet M aan de voorwaarden van Stelling 2.7. Er is dus een idempotent $p \neq 0$ in M. Echter $r(p) = 1$ (zie Appendix 1.12). Contradictie, want $p \in I$. Daaruit volgt $I = (0)$ en $r(a) > 0$ voor $0 \neq a \in A$.

Het omgekeerde is triviaal.

Zij A een gesloten halfalgebra. We noemen A monothetisch als er een element t in A is zo dat

$$A = A(t) .$$

Het element t noemen we dan een voortbrengend element van A. In deze paragraaf geven we een karakterisering van monothetische, halfenkelvoudige, lokaal kompakte halfalgebra's met behulp van de spectrale eigenschappen van de voortbrengende elementen. Voor een algemene structuurtheorie van enkelvoudige, lokaal kompakte halfalgebra's verwijzen we naar [1].

4.4 Stelling. Zij $t \neq 0$ in B. Dan is A(t) lokaal kompakt en halfenkelvoudig als, en alleen als het spectrum $\sigma(t)$ van t splitst in twee disjunkte gesloten deelverzamelingen σ_1 en σ_2 en wel zo dat

(i) σ_1 is een eindige (eventueel lege) verzameling van enkelvoudige polen van t en $\sigma_1 \cap \{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha > 0\} = \emptyset$;

(ii) σ_2 is leeg of er is een getal $\alpha > 0$ in σ_2 zo dat

$$\sigma_2 = \sigma(t) \cap \{\lambda: |\lambda| \leq \alpha\}$$

en

$$\sigma_2 \cap \{\lambda: |\lambda| = \alpha\}$$

is een eindige verzameling van enkelvoudige polen van t.

4.5 Stelling. Zij $t \neq 0$ in B. Dan is A(t) lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt als en alleen als

$$0 < r(t) \in \sigma(t)$$

en het perifere spectrum van t is een eindige verzameling van enkelvoudige polen van t.

N.B. Vergelijk de Stellingen 4.4 en 4.5 met Stelling 1.1. Zie ook Probleem 1.2.

Voor het bewijs van de Stellingen 4.4 en 4.5 maken we gebruik van het volgende.

4.6 Propositie. Is A een kommutatieve, halfenkelvoudige lokaal kompakte halfalgebra, dan is er een positieve constante D zo dat

$$||a|| \leq Dr(a) \qquad (a \in A).$$

Bewijs. Zij $A_1 = \{x \in A: ||x|| = 1\}$. Dan is A_1 een kompakte verzameling en de funktie

$$x \longmapsto r(x)$$

is continu op A_1 (zie Appendix 1.3 (vi)). Bovendien $r(x) > 0$ voor iedere $x \in A_1$ (Propositie 4.3). Er is dus een $\varepsilon > 0$ zo dat $r(x) \geq \varepsilon > 0$ voor iedere $x \in A_1$. Maar dan

$$r(x) \geq \varepsilon \, ||x|| \qquad (x \in A) .$$

Neem $D = \varepsilon^{-1}$.

Zij $0 \neq t \in B$, en zij $r(t) = 1$. Als $A(t)$ lokaal kompakt en halfenkelvoudig is, dan volgt uit Propositie 4.6 dat t equibegrensde machten heeft en dan is dus

$$\Lambda(t) = \{t, t^2, t^3, \ldots\}$$

een voorwaardelijk kompakte deelverzameling van B.

4.7 Stelling. Zij $0 \neq t \in B$, en zij $r(t) = 1$. Als $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt is, dan

$$\frac{1}{n}(t+t^2+\ldots+t^n) \to p \qquad (n \to +\infty)$$

in de norm van B, p is een idempotent in B en

$$(t-e)p = p(t-e) = 0 .$$

Als bovendien gegeven is dat $1 \in \sigma(t)$, dan is 1 een enkelvoudige pool van t en p is de spectrale idempotent behorende bij de spectrale deelverzameling $\{1\}$. Als $1 \notin \sigma(t)$, dan $p = 0$.

De verzameling $\Lambda(t)$ is voorwaardelijk kompakt als en alleen als

$$\{\lambda \in \sigma(t): |\lambda| = 1\} \tag{1}$$

een eindige verzameling is van enkelvoudige polen van t, en in dat geval is de spectrale idempotent behorende bij de spectrale verzameling (1) de uniforme limiet van een deelrij van de rij $\{t, t^2, t^3, \ldots\}$.

Bewijs. Zij (zie Appendix 1.19)

$$t_n = \frac{1}{n}(t+\ldots+t^n) \qquad (n = 1,2,\ldots) .$$

Merk op dat $\{t_n\}$ een rij is in het gesloten convexe omhulsel Σ van $\Lambda(t)$. Omdat $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt is, is Σ kompakt, en de rij $\{t_n\}$ heeft dus minstens een ophopingspunt. Merk verder nog op dat de elementen van Σ onderling commuteren.

Zij p een ophopingspunt van de rij $\{t_n\}$. Uit

$$(t-e)t_n = \frac{1}{n}(t^{n+1}-t) \to 0 \qquad (n \to +\infty)$$

volgt $(t-e)p = 0$, en dus ook $p(t-e) = 0$. Voor p geldt dus $tp = p$. Maar dan ook

$$t_n p = p \qquad (n = 1,2,\ldots). \qquad (2)$$

Is q een of ander ophopingspunt van de rij $\{t_n\}$, dan volgt uit de laatste gelijkheid dat

$$qp = p \ . \qquad (3)$$

I.h.b. $p^2 = p$. Dus p is een idempotent. Verder volgt uit (3) dat

$$p = qp = pq = q \ .$$

De rij $\{t_n\}$ heeft dus precies één ophopingspunt. D.w.z. $t_n \to p$ in de norm van B.

Als $1 \in \sigma(t)$, dan volgt uit de spectrale afbeeldingsstelling dat $1 \in \sigma(t_n)$ voor $n = 1,2,\ldots$ en dus, vanwege de kontinuïteit van de spectraalradius, $1 \in \sigma(p)$. Maar dan $p \neq 0$.

Neem aan dat $p \neq 0$. Daar p de uniforme limiet is van een rij polynomen in t, is p een spectrale idempotent behorende bij een niet-lege (want $p \neq 0$) spectrale deelverzameling, zeg σ, van $\sigma(t)$. (zie [3], Theorem 3.1). Omdat $tp = p$, volgt $\sigma = \{1\}$ (zie Appendix 1.15). Dus $1 \in \sigma(t)$ en 1 is een geisoleerd punt in $\sigma(t)$. Verder volgt uit $(e-t)p = 0$ dat 1 een enkelvoudige pool is van t (zie Appendix 1.17).

Samenvattend volgt dat $1 \in \sigma(t)$ impliceert dat 1 een enkelvoudige pool is van t met bijbehorende spectrale idempotent p. Als $1 \notin \sigma(t)$, dan moet volgens het voorgaande $p = 0$ zijn. Dus p heeft de gewenste eigenschappen.

Als $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt is, dan geldt hetzelfde voor $\Lambda(\beta t)$ met $|\beta| = 1$. Neem

$$\alpha \in \{\lambda \in \sigma(t): |\lambda| = 1\} \ ,$$

en zij $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt. Als $\beta = \alpha^{-1}$, dan $1 \in \sigma(\beta t)$ en volgens het bovenstaande is 1 een enkelvoudige pool van βt. Maar dan volgt direct

dat α een enkelvoudige pool is van t. Dus, als $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt is, dan is de verzameling (1) een eindige verzameling van enkelvoudige polen van t.

Nu omgekeerd. Stel (1) is een eindige verzameling van enkelvoudige polen van t, zeg $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Zij e_i de spectrale idempotent behorende bij $\{\lambda_i\}$, en zij

$$q = e_1 + \ldots + e_k .$$

Dan is q de spectrale idempotent behorende bij (1) en

$$t^n = t^n(e-q) + \{\lambda_1^n e_1 + \ldots + \lambda_k^n e_k\}$$

voor $n = 1,2,\ldots$. Daar de spectraalradius van $t(e-q)$ echt kleiner is dan 1, geldt

$$t^n(e-q) = \{t(e-q)\}^n \to 0 \qquad (n \to +\infty) .$$

Daar verder $\{\lambda_1^n e_1 + \ldots + \lambda_k^n e_k : n = 1,2,\ldots\}$ een begrensde verzameling is in een eindig dimensionale deelruimte van B, volgt het voorwaardelijk kompakt zijn van de verzameling $\Lambda(t)$.

Merk op dat er een deelrij $\{n_i\}$ van de rij der natuurlijke getallen is zo dat

$$(\lambda_1^{n_i},\ldots,\lambda_k^{n_i}) \to (1,\ldots,1)$$

in $\mathbb{C}^k$. Daaruit volgt $t^{n_i} \to (e_1+\ldots+e_k) = q$ in de norm van B. Dus de spectrale idempotent behorende bij (1) is de uniforme limiet van een deelrij van de rij $\{t,t^2,\ldots\}$.

4.8 Opmerking. Als $r(t) > 1$, dan is $\Lambda(t)$ niet voorwaardelijk kompakt. Is $r(t) < 1$, dan $t^n \to 0$ in de norm van B. I.h.b. geldt dan dat $\Lambda(t)$ voorwaardelijk kompakt is.

4.9 Stelling. Zij $0 \neq t \in B$, en zij $r(t) = 1$. Equivalent zijn

(i) $A(t)$ is lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt;

(ii) $\Lambda(t)$ is voorwaardelijk kompakt en $1 \in \sigma(t)$.

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii). We hebben al bewezen dat $A(t)$ voorwaardelijk kompakt is. Volgens Stelling 4.7 is

$$\text{Per } \sigma(t) = \{\lambda \epsilon \sigma(t): |\lambda| = 1\} \tag{4}$$

dan een verzameling van enkelvoudige polen van t en de spectrale idempotent q behorende bij de verzameling (4) is in A(t). Zij

$$t_1 = tq .$$

Dan is $\sigma(t_1)$ gelijk aan de verzameling (4) eventueel verenigt met $\{0\}$ (zie Appendix 1.14). Dus $0 \neq t_1 \epsilon B$ en $r(t_1) = 1$. Verder is $A(t_1)$ lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt want $t_1 \epsilon A(t)$.

Zij M een minimaal gesloten ideaal in $A(t_1)$. Omdat $A(t_1)$ halfenkelvoudig is, is er een idempotent $p \neq 0$ in M (zie Stelling 2.7) zo dat $M = pA(t_1)$ (zie Propositie 2.3). Daar $A(t_1)$ ook strikt is, volgt (zie Stellingen 2.5 en 2.6)

$$pA(t_1) = \mathbb{R}^+ p .$$

I.h.b. geldt $t_1 p = \alpha p$ voor een $\alpha \geq 0$. Als $\alpha = 0$, dan $t_1^n p = 0$ voor $n=1,2,\ldots$, en dus $sp = 0$ voor iedere s in $A(t_1)$. I.h.b. $p^2 = 0$. Contradictie, want p is een idempotent $\neq 0$. Dus $\alpha > 0$. Maar dan $\alpha = 1$ en $1 \epsilon \sigma(t)$, want $tp = \alpha p$ impliceert $\alpha \epsilon \sigma(t_1)$ en dus

$$0 < \alpha \epsilon \sigma(t_1) \subset \{\lambda \epsilon \sigma(t): |\lambda| = 1\} \cup \{0\} .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Uit de Stellingen 4.7 en 1.1 volgt direct dat A(t) lokaal kompakt is. Blijft te bewijzen dat A(t) halfenkelvoudig en strikt is.

We weten dat $r(t) = 1$ een enkelvoudige pool is van t. Zij p de spectrale idempotent behorende bij de spectrale verzameling $\{1\}$. Dan $tp = p$, en dus $t^n p = p$ $(n = 1,2,\ldots)$. Daaruit volgt

$$p(t)p = p(1)p \tag{5}$$

voor iedere veelterm p(X). Merk nu op dat uit de spectrale afbeeldingsstelling volgt dat

$$r(p(t)) = p(1) \qquad (6)$$

voor iedere veelterm p(X) met niet-negatieve coëfficiënten. Daar de spectraalradius r(s) een continue funktie van s is op A(t), volgt uit (5) en (6)

$$sp = r(s)p \qquad (s\epsilon A(t)) \ . \qquad (7)$$

Zij p(X) een veelterm met niet-negatieve coëfficiënten. Omdat t equibegrensde machten heeft, is er een konstante D > 0 zo dat

$$||p(t)|| \leq p(1)D \ .$$

Volgens (6) kunnen we ook schrijven

$$||p(t)|| \leq r(p(t))D \ .$$

Maar dan geldt ook

$$||s|| \leq r(s)D \qquad (s\epsilon A(t)) \qquad (8)$$

Stel $s\epsilon A(t)$ en $s^2 = 0$. Dan volgt uit $r(s)^2 = r(s^2) = 0$ dat $r(s) = 0$. Volgens formule (8) is dan $s = 0$. Dus A(t) is halfenkelvoudig (zie Lemma 4.2).

Stel $s\epsilon A(t) \cap (-A(t))$. Dan, volgens formule (7),

$$r(s)p = sp \ , \quad -r(s)p = -sp = r(-s)p = r(s)p \ .$$

Dus r(s) = 0. Maar dan ook s = 0 (formule (8)). Dus A(t) is strikt.

4.10 Bewijs van Stelling 4.5. Zij $0 \neq t\epsilon B$, en zij r(t) > 0. Als

$$s = \frac{1}{r(t)} t \ ,$$

dan geldt A(s) = A(t), r(s) = 1 en s en t hebben dezelfde spectrale eigenschappen. Daaruit volgt dat Stelling 4.5 een direct gevolg is van de Stelling 4.7 en 4.9 samen met Propositie 4.3.

4.11 Stelling. Zij A een kommutatieve halfalgebra $\neq (0)$ in B. Dan is A lokaal kompakt en halfenkelvoudig als en alleen als er een idempotent p in A is zo dat

(i) $A = \{p\}_r \oplus Ap$;

(ii) $Ap = (0)$ of Ap is lokaal kompakt, halfenkelvoudig en $Ap = -Ap$;

(iii) $\{p\}_r = (0)$ of $\{p\}_r$ is lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt.

Bewijs. Stel A is lokaal kompakt en halfenkelvoudig. Is A strikt, dan nemen we $p = 0$. Stel dus

$$J = A \cap (-A) \neq (0) .$$

Merk op dat J een gesloten ideaal is in A, en dat J een eindig dimensionale reële lineaire ruimte is.

Zij M een minimaal gesloten ideaal in A. Omdat A halfenkelvoudig is, is er een idempotent $e_M \neq 0$ in M (zie Stelling 2.7). Daar

$$M = e_M A = e_M A e_M$$

volgens Stelling 2.5 een delingshalfalgebra is, is er precies één idempotent $\neq 0$ in M. Dus e_M is éénduidig bepaald. Als M_1 en M_2 twee verschillende minimale gesloten idealen zijn, dan volgt uit

$$M_1 M_2 \subset M_1 \cap M_2 = (0)$$

dat

$$e_{M_1} \cdot e_{M_2} = 0 \quad . \tag{9}$$

Zij V de verzameling van alle minimale gesloten idealen van A die gelegen zijn in J. Op grond van Lemma 2.1 is V niet leeg. Daar J een eindig dimensionale lineaire ruimte is, volgt uit (9) dat V eindig is. Dus

$$p = \sum_{M \in V} e_M$$

is een wel gedefinieerde idempotent. Merk op dat $0 \neq p \in A$.

Beschouw het gesloten ideaal $I = \{p\}_r \cap J$. Als $I \neq (0)$, dan bevat I een minimaal gesloten ideaal N. Merk op dat $N \in V$. Daaruit volgt

$$pe_N = e_N \neq 0 .$$

Contradictie, want $e_N \in I$. Dus

$$I = \{p\}_r \cap J = (0) . \tag{10}$$

Als $a \in A$, dan

$$a - ap \in \{p\}_r \ , \ ap \in J . \tag{11}$$

I.h.b. geldt voor $a \in J$ dat $a - ap \in \{p\}_r \cap J$, en dus $a = ap$. Maar daaruit volgt dat

$$J = Ap$$

en dus $Ap = -Ap$. Uit (10) en (11) volgt ook nog dat

$$A = \{p\}_r \oplus Ap .$$

Het is verder gemakkelijk te controleren dat p de gewenste eigenschappen heeft.

Het omgekeerde is triviaal.

4.12 Lemma. Zij $0 \neq t \in B$. Dan is $A(t)$ lokaal kompakt, halfenkelvoudig en

$$A(t) = -A(t)$$

als en alleen als $\sigma(t)$ een eindige verzameling is van enkelvoudige polen van t met

$$\sigma(t) \cap \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\} = \emptyset .$$

Bewijs. Stel $A(t)$ is lokaal kompakt, halfenkelvoudig en $A(t) = -A(t)$. Daar $t \neq 0$, is, volgens Propositie 4.3, $r(t) > 0$. Zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen we aannemen dat $r(t) = 1$. Daaruit volgt dat de verzameling

$$\Lambda(t) = \{t, t^2, \ldots\}$$

voorwaardelijk kompakt is. Volgens Stelling 4.7 is

$$\text{Per } \sigma(t) = \{\lambda \epsilon \sigma(t): |\lambda| = 1\}$$

dan een verzameling van enkelvoudige polen van t, en volgens Stelling 4.9 geldt

$$1 \notin \{\lambda \epsilon \sigma(t): |\lambda| = 1\} ,$$

want A(t) is niet strikt. Het perifere spektrum van t bestaat dus uit enkelvoudige polen van t en bevat geen positieve reële getallen.

Zij q de spectrale idempotent behorende bij Per $\sigma(t)$ en zij $s = t - tq$. Als $\lambda \epsilon \sigma(t) \backslash \text{Per } \sigma(t)$, dan is λ in $\sigma(s)$ en λ is een enkelvoudige pool van t als en alleen als λ een enkelvoudige pool is van s. Het is dus voldoende om te bewijzen dat s de gevraagde spectrale eigenschappen heeft.

Als $s = 0$, dan is dit zeker het geval. Stel $s \neq 0$. Dan is A(s) lokaal kompakt en halfenkelvoudig, want $s \epsilon A(t)$. Verder is gemakkelijk in te zien dat

$$A(s) = -A(s) .$$

Daar de dimensie van de lineaire ruimte A(s) echt kleiner is dan die van A(t), volgt het bewijs dus door volledige inductie naar de dimensie van A(t).

Nu omgekeerd. Uit Stelling 1.1 volgt direct dat A(t) lokaal kompakt is. Omdat

$$t = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r ,$$

waarbij $\sigma(t) \backslash \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ en e_i de spectrale idempotent is behorende bij $\{\lambda_i\}$, is iedere s in A(t) van de vorm

$$s = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_r e_r$$

voor zekere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in $\mathbb{C}$. Daaruit volgt dat

$$s^2 = \alpha_1^2 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \ldots + \alpha_r^2 e_r \ .$$

Maar dan impliceert $s^2 = 0$ dat $\alpha_i = 0$ $(i = 1,\ldots,r)$ en dus $s = 0$. Volgens Lemma 4.2 is $A(t)$ dan enkelvoudig. Blijft te bewijzen dat $A(t) = -A(t)$.

Omdat $A(t)$ lokaal kompakt en halfenkelvoudig is, is er volgens Stelling 4.11 een idempotent p in $A(t)$ zodanig dat

$$A(t) = \{p\}_r \oplus A(t)p \ ,$$

$A(t)p = -A(t)p$ en $\{p\}_r$ is een strikte halfalgebra. Het is voldoende om te bewijzen dat $\{p\}_r = (0)$. Merk op dat

$$A(t-tp) = \{p\}_r \ .$$

Als $\{p\}_r \neq (0)$, dan is $A(t-tp)$ een strikte, lokaal kompakte, halfenkelvoudige halfalgebra, want $t-tp \in A(t)$. Volgens Stelling 4.5 geldt dan

$$0 < r(t-tp) \in \sigma(t-tp) \ .$$

Omdat $p \in A(t)$, is p een spectrale idempotent van t. Hetzelfde geldt dan voor $e-p$. Daaruit volgt dat $\sigma(t-tp) \subset \sigma(t) \cup \{0\}$, en dus $0 < r(t-tp) \in \sigma(t)$. Contradictie, want

$$\sigma(t) \cap \{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha > 0\} = \emptyset \ .$$

Dus $\{p\}_r = (0)$, en $A(t) = A(t)p$. Maar dan ook $A(t) = -A(t)$.

4.13 Opgave. Bewijs Stelling 4.4.

De Stellingen 4.4 en 4.5 zijn van de hand van M.A. Kaashoek en T.T. West (zie [5] en [6]).

5. Irreducibele positieve operatoren

In deze paragraaf is E een geordende reële Banachruimte, d.w.z., E is reële Banachruimte met een gesloten positieve kegel K. We veronderstellen

altijd dat $K \neq (0)$. De ordening in E wordt aangegeven met $\leq$, dus

$$x \leq y \iff y-x \in K .$$

5.1 Definitie. Een punt $0 \neq y \in K$ noemen we een quasi-inwendig punt van K als de verzameling

$$[0,y] = \{x \in E: 0 \leq x \leq y\}$$

een totale deelverzameling is van E. Als de kegel K quasi-inwendige punten heeft, dan is

$$E = \overline{K - K} .$$

We merken verder op dat ieder inwendig punt van K een quasi-inwendig punt is van K. Als het inwendige van K niet-leeg is, dan is het omgekeerde ook juist (zie [7], Exercise 10(b) van Chapter V).

5.2 Propositie. Neem aan dat aan een der volgende voorwaarden voldaan is.

(i) Het inwendige van K is niet-leeg;
(ii) K is lokaal kompakt in de relatieve normtopologie;
(iii) E is een Banachrooster.

Als bovendien geldt dat iedere $0 \neq x \in K$ een quasi-inwendig punt is van K, dan is de lineaire ruimte E ééndimensionaal.
Bewijs. (i) Als int K, het inwendige van K, niet-leeg is, dan is ieder quasi-inwendig punt van K een inwendig punt van K. Volgens het gegeven geldt dus

$$0 \neq x \in K \Longrightarrow x \in \text{int } K .$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af dat

$$K = \{\alpha u: \alpha \geq 0\}$$

voor een $0 \neq u \in K$. Dus K - K is ééndimensionaal. Maar dan is

$$K - K = \overline{K - K} = E ,$$

en dus is ook E ééndimensionaal.

(ii) Zij

$$K' = \{f\epsilon E' : f(x) \geq 0 \text{ voor iedere } x\epsilon K\} .$$

Neem $0 \neq f\epsilon K'$. Stel $f(u) = 0$ voor een $0 \neq u\epsilon K$. Daar $f\epsilon K'$ volgt daaruit dat

$$f(x) = 0 \qquad (x\epsilon[0,u]) . \tag{1}$$

Volgens het gegeven is $[0,u]$ een totale deelverzameling van E. Dus (1) impliceert dat f nul is op E. Contradictie. Dus

$$f(u) > 0 \qquad (0 \neq u\epsilon K)$$

voor iedere $f \neq 0$ in K'.

Omdat K een gesloten positieve kegel is, volgt uit de separatiestellingen voor konvexe verzamelingen dat $K' \neq (0)$ en

$$K = \cap_{f\epsilon K'} \{x\epsilon E : f(x) \geq 0\} . \tag{2}$$

Neem een vaste $f_0 \neq 0$ in K'. Dan is

$$X = \{x\epsilon K : f_0(x) = 1\}$$

een kompakte konvexe basis van K. Zij f in K', en zij

$$\mu = \sup\{\lambda : f - \lambda f_0 \epsilon K'\} .$$

Dan $0 \leq \mu < +\infty$ en $f - \mu f_0$ in K'. Als $f \neq \mu f_0$, dan is volgens het voorgaande

$$(f - \mu f_0)(u) > 0 \qquad (0 \neq u\epsilon K) ,$$

en er bestaat dus een $\varepsilon > 0$ zo dat

$$(f - \mu f_0)(x) \geq \varepsilon > 0 \qquad (x\epsilon X) ,$$

want X is kompakt. Maar dan is $f - (\mu+\varepsilon)f_0$ in K'. Contradictie. Iedere f

in K' is dus een niet-negatief veelvoud van f_0. Maar dan volgt uit (2) dat

$$K = \{x: f_0(x) \geq 0\} . \tag{3}$$

Als $f_0(x) = 0$, dan geldt volgens (3) dat $x \in K \cap (-K)$. Dus $x = 0$. De nulruimte van f_0 is dus (0), maar dan moet dim E gelijk 1 zijn.

(iii) Onderstel dat E een Banachrooster is. Neem x en y in E. Dan geldt

$$x - (x \wedge y) \geq 0 , \quad y - (x \wedge y) \geq 0$$

en

$$x - (x \wedge y) \perp y - (x \wedge y) . \tag{4}$$

Stel $x - (x \wedge y) \neq 0$. Merk op dat uit (4) volgt

$$z \perp y - (x \wedge y) \qquad (z \in [0, x - (x \wedge y)]) . \tag{5}$$

Daar volgens het gegeven $[0, x-(x \wedge y)]$ een totale deelverzameling is van E, en daar de roosteroperaties in E kontinu zijn, volgt uit (5) dat $y - (x \wedge y) = 0$, en dus $x \geq y$. Is $x - (x \wedge y) = 0$, dan $y \geq x$. De ruimte E is dus lineair geordend. Maar een lineair geordende, Archimedische Riesz-ruimte is ééndimensionaal (zie [7], Exercise 2 van Chapter V). Dus dim E = 1.

5.3 Definitie. Zij

$$T: E \to E$$

een begrensde positieve lineaire operator op E. We noemen T irreducibel als er een $\lambda > r(T)$ is zó dat

$$T(\lambda - T)^{-1} x$$

een quasi-inwendig punt is van K voor iedere $0 \neq x \in K$. Hier is r(T) de spectraalradius van de reële lineaire operator T (zie Appendix 5.1). Merk op dat een irreducibele lineaire operator ongelijk de nuloperator is, want $K \neq (0)$.

5.4 Definitie. Een kegel K_0 in E heet een volle deelkegel van K als

(i) $K_0 \subset K$,

(ii) uit $0 \leq x \leq k \in K_0$ volgt $x \in K_0$.

5.5 Propositie. Zij T een begrensde positieve lineaire operator $\neq 0$ op E. Dan is T irreducibel als en alleen als iedere T-invariante volle deelkegel $\neq (0)$ van K totaal is in E.

Bewijs. Stel T is irreducibel. Zij K_0 een T-invariante volle deelkegel $\neq (0)$ van K. Neem $0 \neq x \in K_0$. Dan

$$y = T(\lambda - T)^{-1} x \in K_0$$

voor $\lambda > r(T)$. Er is een $\lambda > r(T)$ zo dat $[0,y]$ een totale deelverzameling is van E. Maar $[0,y] \subset K_0$, want K_0 is een volle deelkegel van K. Dus K_0 is een totale deelverzameling van E.

Nu omgekeerd. Zij $0 \neq x \in K$. Definieer

$$K_x = \{z: 0 \leq z \leq nx \text{ voor een } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dan is K_x een volle deelkegel $\neq (0)$ van K.

Als $Tx = 0$, dan volgt $TK_x = (0)$. I.h.b. geldt K_x is T-invariant. Volgens het gegeven is K_x dan een totale deelverzameling van E. Daar T nul is op K_x volgt dan T is nul op E. Contradictie. Dus $Tx \neq 0$.

Neem $\lambda > r(T)$, en zij

$$y = T(\lambda - T)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n x \ .$$

Daar $0 \neq Tx \in K$, volgt $0 \neq y \in K$. Merk op dat

$$0 \leq Ty \leq \lambda y \ .$$

Dus $TK_y \subset K_y$. Maar dan is K_y een T-invariante volle deelkegel $\neq (0)$ van K. Dus K_y is een totale deelverzameling van E. Daar

$$K_y = \cup_{n \in \mathbb{N}} n[0,y] \ ,$$

volgt dat [0,y] een totale deelverzameling is van E. Dus T is irreducibel.

5.6 Opmerkingen. 1. Zij E een Riesz-ruimte, en zij I een ideaal in E. Dan is

$$K_0 = I \cap K$$

een volle deelkegel van K en

$$I = K_0 - K_0 . \qquad (6)$$

Omgekeerd, als K_0 een volle deelkegel is van K, dan is I gedefinieerd door (6) een ideaal in E en $K_0 = I \cap K$.

2. Zij E een reëel Banachrooster met positieve kegel K. Zij K_0 een volle deelkegel van K, en zij $I = K_0 - K_0$. Dan volgt uit de kontinuïteit van de roosteroperaties dat $\bar{K}_0$ een volle deelkegel is van K en dat

$$\bar{I} = \bar{K}_0 - \bar{K}_0 .$$

Hier duidt $\bar{B}$ de afsluiting aan van de verzameling B.

Uit het voorgaande volgt dat in E de afsluiting van een volle deelkegel weer een volle deelkegel is. Bovendien, als K_0 een gesloten volle deelkegel is van K, dan is het ideaal $I = K_0 - K_0$ een gesloten ideaal in E. Deze opmerkingen gekombineerd met Propositie 5.5 geven onmiddellijk de volgende stelling.

5.7 Propositie. Zij T een begrensde positieve lineaire operator $\neq 0$ op een reëel Banachrooster E. Dan is T irreducibel als en alleen als T alleen maar triviale T-invariante gesloten idealen heeft in E.

5.8 Opmerking. Zij T een niet-negatieve n×n-matrix $\neq 0$. Dan definieert T op natuurlijke wijze een lineaire operator op $\mathbb{R}^n$, die we ook weer met T aangeven. Merk op dat $\mathbb{R}^n$ coördinaatsgewijs geordend een reëel Banachrooster is, en dat T een begrensde positieve lineaire operator $\neq 0$ is. Uit Propositie 5.7 volgt dat de lineaire operator T irreducibel is als en alleen als de matrix T irreducibel is.

5.9 Definitie. Een lineaire operator

$$T: E \to E$$

heet positief definiet als

$$0 \neq Tx \in K \qquad (0 \neq x \in K) .$$

Als T positief definiet is, dan is T een positieve lineaire operator. Merk op dat iedere irreducibele lineaire operator positief definiet is. De volgende hulpstelling is een uitbreiding van deze bewering.

5.10 Lemma. Als T en S begrensde positieve lineaire operatoren $\neq 0$ zijn op E met

$$TS - ST \geq 0 ,$$

en als T irreducibel is, dan is S positief definiet.
Bewijs. Zij $K_0 = \{x \in K: Sx = 0\}$. Dan is K_0 een volle deelkegel van K. Daar $TS - ST \geq 0$, is

$$STx \leq 0 \qquad (x \in K_0) .$$

Anderzijds is $STx \geq 0$ voor iedere x in K_0, want $K_0 \subset K$. Dus $STx = 0$ voor iedere x in K_0. Daaruit volgt $TK_0 \subset K_0$. Maar T is irreducibel. Dus $K_0 = (0)$ of K_0 is een totale deelverzameling van E (zie Propositie 5.5). Het laatste impliceert $S = 0$, en leidt dus tot een contradictie. Dus $K_0 = (0)$ en S is positief definiet.

5.11 Lemma. Zij T een irreducibele en zij S een positief definiete begrensde lineaire operator op E met $TS \leq S$. Dan is S irreducibel.
Bewijs. Zij K_0 een volle deelkegel $\neq (0)$ van K invariant onder S. Zij

$$K_1 = \{x: 0 \leq x \leq Sk \text{ voor een } k \in K_0\} .$$

Dan is K_1 een volle deelkegel van K en $SK_0 \subset K_1 \subset K_0$. Omdat $TS \leq S$, is $TK_1 \subset K_1$. Maar T is irreducibel. Dus $K_1 = (0)$ of K_1 is een totale deelverzameling van E.

Als $K_1 = (0)$, dan $SK_0 = (0)$. Omdat S positief definiet is, volgt daaruit $K_0 = (0)$. Contradictie. Dus K_1 is een totale deelverzameling van E, maar dan geldt hetzelfde voor K_0. Daaruit volgt dat S irreducibel is (zie Propositie 5.5).

5.12 Propositie. Zij P een irreducibele begrensde positieve projektie op E. Dan is dim PE = 1, als aan een der volgende voorwaarden is voldaan.

(i) Het inwendige van K is niet-leeg;

(ii) P is een kompakte lineaire operator;

(iii) E is een reëel Banachrooster.

Bewijs. Zij F = PE, en zij L = PK. Dan is F een reële geordende Banachruimte met gesloten positieve kegel L. Uit het gegeven volgt dat Px een quasi-inwendig punt is van K voor iedere $x \neq 0$ in K. I.h.b. geldt dan dat iedere $x \neq 0$ in L een quasi-inwendig punt is van L. Merk nu op dat (i) impliceert dat het inwendige van L niet-leeg is, dat (ii) impliceert dat L lokaal kompakt is, want dim $F < +\infty$ in dat geval en dat uit (iii) volgt dat F een reëel Banachrooster is. Het te bewijzene is dus een direct gevolg van Propositie 5.2.

We zijn geïnteresseerd in de spectrale eigenschappen van een irreducibele lineaire operator T, d.w.z., we hebben belangstelling voor de spectrale eigenschappen van de kompleksifikatie T^c van T (zie Appendix 5.1). Merk op dat T^c een element is van de Banachalgebra $L(E^c)$.

5.13 Stelling. Zij T een irreducibele begrensde positieve lineaire operator op E. Dan is de halfalgebra $A(T^c)$ halfenkelvoudig en strikt.

Bewijs: We bekijken eerst A(T), de gesloten halfalgebra voortgebracht door T in $L(E)$. Neem S in A(T). Daar S de uniforme limiet is van polynomen in T met niet-negatieve coëfficiënten, is S een begrensde positieve lineaire operator op E. Dus A(T) is een halfalgebra van positieve lineaire operatoren. Daaruit volgt dat A(T) strikt is.

Neem $S \neq 0$ in A(T). Daar S kommuteert met T volgt uit Lemma 5.10 dat S positief definiet is. Neem $0 \neq x \in K$. Dan $0 \neq Sx \in K$, en dus ook $0 \neq S^2x \in K$. Daaruit volgt $S^2 \neq 0$. Dus A(T) is halfenkelvoudig.

Dat $A(T^c)$ ook strikt en halfenkelvoudig is, volgt nu direct door op te merken dat

$$A(T^c) = \{S^c : S \in A(T)\} .$$

5.14 Hulpstelling. Zij t een element $\neq 0$ in een Banachalgebra B. Neem aan

(i) A(t) is strikt en halfenkelvoudig;

(ii) Per $\sigma(t) \subset$ Pol $\sigma(t)$.

Dan is A(t) lokaal kompakt.

Bewijs. Als $r(t) = 0$, dan volgt uit het gegeven dat t nilpotent is. Daar A(t) halfenkelvoudig is, impliceert dit $t = 0$ (zie Lemma 4.2). Volgens het gegeven is $t \neq 0$, en dus moet $r(t) > 0$ zijn. Zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen we aannemen dat $r(t) = 1$. Zij p de spectrale idempotent behorende bij de spectrale deelverzameling Per $\sigma(t)$. Merk op dat $r(tp) = 1$ en $r(t(e-p)) < 1$. Zij verder B_0 de gesloten deelalgebra van B voortgebracht door tp. Uit het gegeven volgt dat B_0 eindig dimensionaal is (zie Appendix 1.17).

We zullen eerst bewijzen dat t equi-begrensde machten heeft. Uit het ongerijmde. Stel er is een deelrij $\{n_i\}$ van de rij der natuurlijke getallen zo dat $||t^{n_i}|| \to +\infty$ voor $i \to +\infty$. Zij

$$s_i = ||t^{n_i}||^{-1} t^{n_i} \qquad (i = 1,2,\ldots) .$$

Daar $r(t(e-p)) < 1$ volgt

$$t^n(e-p) = \{t(e-p)\}^n \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Dus $s_i(e-p) \to 0$ voor $i \to +\infty$. De rij $\{s_i p\}$ is een begrensde rij in de eindig dimensionale Banachalgebra B_0. De rij $\{s_i p\}$ heeft dus een convergente deelrij. Door over te gaan op deze deelrij, mogen we aannemen dat de rij $\{s_i p\}$ een limiet heeft, zeg q.

Merk op dat $q \in B_0$. Verder volgt uit

$$s_i = s_i(e-p) + s_i p \to q \qquad (i \to +\infty) \qquad (7)$$

In Hulpstelling 5.14 is de voorwaarde A(t) is halfenkelvoudig overbodig. Het bewijs van deze bewering verschijnt elders.

dat $q\in A(t)$. Daar $r(tp) = 1$, volgt $r(t^{n_i}p) = 1$, en dus

$$r(s_i p) = \frac{1}{||t^{n_i}||}\, r(t^{n_i}p) \to 0 \qquad (i \to +\infty) .$$

Daaruit volgt $r(q) = 0$. Daar $q\in B_0$ en $\dim B_0 < +\infty$, impliceert dit dat q nilpotent is. Maar $q\in A(t)$ en $A(t)$ is halfenkelvoudig. Dus $q = 0$. Volgens formule (7) geldt dan $\lim s_i = 0$. Contradictie, want $||s_i|| = 1$ $(i = 1,2,\ldots)$. De rij $\{t^n\}$ is dus uniform begrensd.

Daar t equi-begrensde machten heeft, geldt voor $|\lambda| > r(t) = 1$ dat

$$||R(\lambda;t)|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}}\, ||t^n|| \leq D(|\lambda|-1)^{-1}$$

voor een zekere constante D. Daaruit volgt echter dat iedere pool in het perifere spektrum van t enkelvoudig is. In ons geval geldt dus

$$\text{Per } \sigma(t) = \{\lambda\in\sigma(t):\ |\lambda| = r(t) = 1\}$$

is een verzameling van enkelvoudige polen van t. Uit Stelling 4.7 volgt dan dat $p\in A(t)$.

Merk nu op dat $tp\in A(t)\cap B_0$. Dus $A(tp)$ is lokaal kompakt, strikt en halfenkelvoudig. Volgens Stelling 4.9 geldt dan $1\in\sigma(tp)$. Daar $\sigma(tp)\subset\sigma(t)\cup\{0\}$, volgt daaruit $1\in\sigma(t)$. Maar dan is $A(t)$ lokaal kompakt volgens Stelling 1.1.

5.15 Stelling. Zij T een irreducibele begrensde positieve lineaire operator op de geordende reële Banachruimte E. Als

$$\text{Per } \sigma(T) \subset \text{Pol } \sigma(T) ,$$

dan is $A(T^c)$ lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt, en dus

(i) $0 < r(T)\in\sigma(T)$,

(ii) Per $\sigma(T)$ is een verzameling van enkelvoudige polen van T.

Bovendien is de spectrale projektie behorende bij de pool $r(T)$ de kompleksifikatie van een irreducibele begrensde positieve projektie P met

$$P\in A(T) .$$

Dus r(T) is een eigenwaarde behorende bij een positieve eigenvektor. De bij r(T) behorende eigenruimte is ééndimensionaal als aan een der volgende voorwaarden is voldaan.

(j) Het inwendige van K is niet-leeg,

(jj) T is een kompakte lineaire operator met een positieve spectraalradius,

(jjj) E is een Banachrooster.

Bewijs. Uit 5.13 en 5.14 volgt dat $A(T^c)$ lokaal kompakt, halfenkelvoudig en strikt is. We kunnen dan Stelling 4.5 gebruiken om de punten (i) en (ii) te bewijzen.

Zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen we verder aannemen dat $r(T) = 1$. Zij Q de spectrale projektie bij r(T). Uit Stelling 4.7 volgt dat $Q = P^c$, waarbij P de uniforme limiet is van de rij

$$\frac{1}{n}(T+\ldots+T^n) \qquad (n = 1,2,\ldots) .$$

Merk op dat $P \in A(T)$ en P is een begrensde positieve projektie op E. Daar P kommuteert met T volgt uit Lemma 5.10 dat P positief definiet is; daar $TP = P$ volgt uit Lemma 5.11 de irreducibiliteit van P. Uit $TP = P$ en P positief definiet volgt ook nog de existentie van een positieve eigenvector bij $r(T) = 1$. De bij r(T) behorende eigenruimte is PE. We kunnen Propositie 5.12 gebruiken om te bewijzen dat dim PE = 1 als aan een der voorwaarden (j), (jj), (jjj) is voldaan. Daarbij zij opgemerkt dat (jj) impliceert dat P kompakt is.

5.16 Opmerkingen. 1. Stelling 5.15 is voor kompakte operatoren bewezen door F.F. Bonsall en B.J. Tomiuk [2]. De hier gegeven uiteenzetting volgt in grote lijnen §4 in [2].

2. Als het inwendige van K niet-leeg is of als T een kompakte lineaire operator is, dan kan in het algemeen zonder extra voorwaarden Stelling 5.15 niet verscherpt worden (zie Satz 3.3 in [4]); dit is wel het geval als E een Banachrooster is (zie bijvoorbeeld §6 in hoofdstuk III van deze Syllabus).

Literatuur

[1] F.F. Bonsall, Locally compact semi-algebras, Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 51-70.

[2] F.F. Bonsall and B.J. Tomiuk, The semi-algebra generated by a compact linear operator, Proc. Edinburgh Math. Soc. 14 (1965), 177-196.

[3] N. Dunford, Spectral theory I. Convergence to projections, Trans. American Math. Soc. 54 (1943), 185-217.

[4] L. Elsner, Monotonie und Randspektrum bei vollstetigen Operatoren, Arch. Rational Mech. Anal. 36 (1970), 356-365.

[5] M.A. Kaashoek and T.T. West, Locally compact monothetic semi-algebras, Proc. London Math. Soc. 18 (1968), 428-438.

[6] M.A. Kaashoek and T.T.WWest, Semi-simple locally compact monothetic semi-algebras, Proc. Edinburgh Math. Soc. 16 (1969), 215-219.

[7] H.H. Schaefer, Topological vector spaces, New York, 1966.

Hoofdstuk II

Positieve Operatoren

door

H. Bart en H. Pijls

Notaties

Zij E een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Dan zal E_0 de reële restrictie van E zijn, d.w.z. E_0 is de ruimte E opgevat als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

Zij E een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$. Dan zal E^c de complexificatie van E zijn (zie Appendix 5.1).

Zij E een Banachruimte of een lokaal convexe Hausdorff-ruimte (l.c.r.) over $\mathbb{R}$ of over $\mathbb{C}$.
We gebruiken de volgende notaties:

E' : de duale ruimte van E ;

$\sigma(E,E')$: de zwakke topologie op E (de topologie van puntsgewijze convergentie op E') ;

$\sigma(E',E)$: de zg. zwak*-topologie op E' (de topologie van puntsgewijze convergentie op E) ;

$\beta(E',E)$: de sterke topologie op E' (de topologie van uniforme convergentie op begrensde verzamelingen van E) ;

E_σ : E voorzien van de $\sigma(E,E')$-topologie ;

E'_σ : E' voorzien van de $\sigma(E',E)$-topologie ;

E'_β : E' voorzien van de $\beta(E',E)$-topologie.

1. Geordende lokaal convexe ruimten

1.0 In deze paragraaf is E steeds een reële Banachruimte of een reële lokaal convexe Hausdorff ruimte (l.c.r.). Verder is K steeds een kegel in E, d.w.z. er geldt:
(i) $\alpha K \subset K \quad (\alpha \geq 0)$,
(ii) $K + K \subset K$,
(iii) $K \cap (-K) = \{0\}$.
De kegel K induceert op E een partiële ordening, welke gedefinieerd wordt door:

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} y - x \in K.$$

Met deze ordening is E een geordende vectorruimte met positieve kegel K (zie [6], Ch.1, §1).

1.1 Definitie. De ruimte E heet een geordende Banachruimte (geordende l.c.r.) als K gesloten is in E.

1.2 Definitie. De kegel $K \subset E$ heet
- voortbrengend als $K - K = E$,
- totaal als $K - K$ dicht is in E ,
- ruimtelijk als K niet-leeg inwendige bezit.

1.3 Propositie.
(i) K ruimtelijk $\Rightarrow$ K voortbrengend ;
(ii) K voortbrengend $\Rightarrow$ K totaal.
Bewijs. Triviaal.

1.4 Definitie. Een lineaire funktionaal f op E heet positief indien $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in K$. De verzameling van alle continue positieve lineaire funktionalen op E geven we aan met K', dus

$$K' = \{f \in E' \mid f \text{ is positief}\}.$$

1.5 Er geldt:
(i) $\alpha K' \subset K' (\alpha \geq 0)$,
(ii) $K' + K' \subset K'$.
Hoewel K' geen kegel hoeft te zijn, noemen we K' toch de duale kegel.

1.6 Stelling.
(i) K totaal $\Longleftrightarrow$ K' is een kegel ;
(ii) $\overline{K}$ is een kegel $\Longleftrightarrow$ K' - K' is dicht in E'_σ .
Bewijs.
(i) Zij K totaal. Stel $f \in K' \cap (-K')$. Dan is $f(x) = 0$ voor alle $x \in K$. Daar f continu is, volgt hieruit dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \overline{K-K} = E$. Dus $f = 0$. Dus K' is een kegel.
Omgekeerd, zij K' een kegel. Zij $f \in E'$ nu zó dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in K-K$. Dan is $f \in K' \cap (-K')$. Dus $f = 0$. De bewering volgt nu uit de stelling van Hahn-Banach (zie [1], 21.8).
(ii) Zie [6], Ch.2, 1.19.

1.7 Definitie. Een verzameling $U \subset E$ heet vol als

$$x \leq z \leq y, \quad x \in U, \quad y \in U \Longrightarrow z \in U .$$

De kleinste volle verzameling die U omvat heet het volle omhulsel van U; notatie: [U].

1.8 Opmerking. Er geldt: $[U] = (U+K) \cap (U-K)$. Hieruit volgt: U absoluut convex $\Longrightarrow$ [U] absoluut convex.

1.9 Definitie. Zij $\mathcal{T}$ de topologie van E. De kegel $K \subset E$ heet normaal in E (of: normaal m.b.t. de topologie $\mathcal{T}$) als E een nulomgevingbasis van volle nulomgevingen bezit.
Als K normaal is in E_σ (normaal m.b.t. de topologie $\sigma(E,E')$) dan heet K zwak normaal.

1.10 Opmerking. Op grond van 1.8 zijn de volgende beweringen equivalent:
(i) K is normaal in E ,
(ii) E bezit een nulomgevingsbasis van absoluut convexe volle nulomgevingen.

1.11 Definitie. Een halfnorm p op E heet monotoon als

$$0 \leq x \leq y \Longrightarrow p(x) \leq p(y).$$

1.12 Stelling. ([7], V, 3.1). Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:
(i) K is normaal in E ,
(ii) er bestaat een nulomgevingsbasis $\mathcal{U}$ in E zó dat voor iedere $U \in \mathcal{U}$ geldt:

$$0 \leq y \leq x, \quad x \in U \Longrightarrow y \in U ,$$

(iii) er bestaat een stelsel monotone halfnormen op E dat de topologie op E voortbrengt.

Bewijs.
(i)$\Longrightarrow$(ii). Triviaal.
(ii)$\Longrightarrow$(i). Zij $U_1 \in \mathcal{U}$. Dan bestaat er een $U_2 \in \mathcal{U}$ met $U_2 + U_2 \subset U_1$. Verder bestaat er een nulomgeving U_3 met $U_3 - U_3 \subset U_2$. Beschouw nu $V = [U_3]$. Dan is V een volle nulomgeving. En er geldt: $V \subset U_1$. Immers, als $z \in V$, dan bestaan er $x, y \in U_3$ met $x \leq z \leq y$; maar dan is $0 \leq z - x \leq y - x \in U_2$ en dus $z - x \in U_2$; dus $z \in U_1$.
(i)$\Longrightarrow$(iii). Uit 1.10 volgt dat E een nulomgevingsbasis $\mathcal{U}$ van absoluut convexe volle nulomgevingen bezit. Zij, voor $U \in \mathcal{U}$, p_U de Minkowski-funktionaal van U, d.w.z.

$$p_U(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \geq 0, x \in \lambda U\} \quad (x \in E).$$

Dan is p_U een halfnorm op E. Daar U vol is, volgt dat p_U monotoon is. Hieruit volgt de bewering.
(iii)$\Longrightarrow$(ii). Zij p een monotone halfnorm op E en zij $U_\varepsilon = \{x \in E \mid p(x) < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$). Dan geldt:

$$0 \leq y \leq x, \quad x \in U_\varepsilon \Longrightarrow y \in U_\varepsilon .$$

Hieruit volgt de bewering.

1.13 Propositie. Zij $(E, ||.||)$ een genormeerde lineaire ruimte en zij K een kegel in E. Dan zijn equivalent:
(i) K is normaal in E,
(ii) $\exists\, \gamma > 0$ zó dat $0 \leq x \leq y \Longrightarrow ||x|| \leq \gamma\, ||y||$.
Bewijs. Zie [6], Ch.2, 1.7.

1.14 Propositie. Zij E een l.c.r. en zij K een normale kegel in E. Dan is iedere orde-begrensde verzameling begrensd in E.
Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een nulomgevingsbasis bestaande uit absoluut convexe volle nulomgevingen. Zij B een orde-begrensde verzameling, i.e. $B \subset \{z | x \leq z \leq y\}$ voor zekere $x, y \in E$. Als $U \in \mathcal{U}$, dan bestaat er een $\lambda \geq 0$ met $x, y \in \lambda U$. Daar U vol is, volgt hieruit dat $B \subset \lambda U$.

1.15 Lemma. Zij E een geordende lineaire ruimte met positieve kegel K. Zij p een sublineaire funktionaal op E, d.w.z.

$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \qquad (\alpha \geq 0,\ x \in E)$$

$$\text{en } p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad (x,y \in E).$$

En zij q een superlineaire funktionaal op K, d.w.z.

$$q(\alpha x) = \alpha\, q(x) \qquad (\alpha \geq 0,\ x \in K)$$

$$\text{en } q(x+y) \geq q(x) + q(y) \qquad (x,y \in K).$$

Als $q(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in K$, dan bestaat er een lineaire funktionaal h op E zó dat

$$q(x) \leq h(x) \text{ voor alle } x \in K$$

$$\text{en } h(x) \leq p(x) \quad \text{voor alle } x \in E.$$

Bewijs. Voor $x \in K$, $y \in E$ geldt: $q(x) \leq p(x+y) + p(-y)$; dus $-p(-y) \leq$ $\leq p(x+y) - q(x)$. Zij

$$r(y) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in K} (p(x+y) - q(x)) .$$

Men gaat gemakkelijk na dat r een sublineaire funktionaal is. Op grond van de stelling van Hahn-Banach (zie [1], 21.1) bestaat er een lineaire funktionaal h zó dat

$$h(y) \leq r(y) \text{ voor alle } y \in E.$$

Daar $r(y) \leq p(y) \qquad (y \in E)$

en $r(-x) \leq -q(x) \qquad (x \in K)$,

volgt de bewering.

1.16 Stelling. Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E. Dan geldt:
K normaal in $E \Longrightarrow K'$ voortbrengend in E'.
Bewijs. Zij $f \in E'$. Daar f continu en K normaal is, bestaat er een continue monotone halfnorm p op E zó dat

(1) $$f(x) \leq p(x) \text{ voor alle } x \in E$$

(zie 1.12). Definieer nu $q : K \to R$ door

(2) $$q(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq z \leq x} f(z) \qquad (x \in K) ;$$

deze definitie is zinvol want op grond van 1.14 is $\{f(z) \mid 0 \leq z \leq x\}$ begrensd in R. Uit (2) volgt:

(3) $$0 \leq q(x) \text{ en } f(x) \leq q(x) \text{ voor alle } x \in K.$$

Daar p monotoon is, volgt uit (1) en (2) dat

$$q(x) \leq p(x) \text{ voor alle } x \in K.$$

Gemakkelijk gaat men na dat de funktionaal q superlineair is op K. Op grond van 1.15 bestaat er dan een lineaire funktionaal h op E zó dat

(4) $\qquad q(x) \leq h(x) \qquad$ voor alle $x \in K$

(5) $\qquad$ en $\quad h(x) \leq p(x) \qquad$ voor alle $x \in E$.

Uit (3) en (4) volgt:

$$h(x) \geq 0 \text{ en } h(x) \geq f(x) \quad \text{voor alle } x \in K.$$

Uit (5) volgt:

$$h \in E' .$$

Dus $f = h-(h-f)$, waarbij $h \in K'$ en $h-f \in K'$.

1.17 Stelling. Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E. Dan geldt:
K' voortbrengend in $E' \Longrightarrow$ K zwak normaal.
Bewijs. Ieder element $f \in E'$ definieert een halfnorm q_f op E:

$$q_f(x) \overset{\text{def}}{=} |f(x)| \qquad (x \in E).$$

Het stelsel halfnormen $\{q_f | f \in E'\}$ brengt de topologie $\sigma(E,E')$ voort. Als nu $f \in E'$, dan is f te schrijven als $f = g - h$ met g en $h \in K'$. Hieruit volgt dat het stelsel $\{q_h | h \in K'\}$ reeds de topologie $\sigma(E,E')$ voortbrengt. Maar als $h \in K'$, dan is de halfnorm q_h monotoon. De bewering volgt nu uit 1.12.

1.18 Stelling. ([7], V, 3.3 Cor.3). Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E. Dan geldt: K zwak normaal $\Longleftrightarrow$ K' voortbrengend in E'.
Bewijs. Dit volgt uit 1.17 en 1.16 en het feit dat $(E'_\sigma)' = E$ (zie [7], IV, 1.2).

1.19 Gevolg. Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E. Dan geldt:
K normaal $\Longrightarrow$ K zwak normaal.
Bewijs. Dit volgt uit 1.16 en 1.18.

1.20 Opmerking. Zij E een l.c.r. over $\mathbb{C}$ en zij K een kegel in E.
Een lineaire funktionaal f op E heet positief (m.b.t. de kegel K) als
Re $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in K$. De verzameling

$$K' = \{f \in E' \mid f \text{ is positief}\}$$

heet weer de duale kegel.
De reële restrictie van E resp. E' geven we aan met E_0 resp. $(E')_0$.
De kegel K heet normaal als K normaal is in E_0; K heet zwak normaal als K normaal is in $(E_\sigma)_0$.
Als $f \in E'$, dan is Re $f \in (E_0)'$ en er geldt:

$$(*) \qquad f(x) = \text{Re } f(x) - i \text{ Re } f(ix) \qquad (x \in E)$$

(zie [7], I, 7.1). De afbeelding $f \mapsto$ Re f blijkt dan een (algebraïsch) isomorfisme van $(E')_0$ op $(E_0)'$ te zijn (zie [7], I, 7.2). Onder dit isomorfisme gaat K' over in

$$C := \{g \in (E_0)' \mid g(x) \geq 0 \ \forall x \in K\} ;$$

merk op dat C de duale kegel van K in $(E_0)'$ is.
Uit (*) volgt verder dat $\sigma(E,E')$-topologie samenvalt met de $\sigma(E_0,(E_0)')$-topologie; de kegel K is dus zwak normaal dan en slechts dan als K normaal is in $(E_0)_\sigma$.
Met behulp van deze opmerkingen bewijst men gemakkelijk dat 1.18 en 1.19 ook gelden in het geval dat E een l.c.r. over $\mathbb{C}$ is.

1.21 Definitie. Zij E een l.c.r. en zij K een kegel in E . Als $\mathcal{S}$ een collectie van begrensde verzamelingen in E is, dan heet K een $\mathcal{S}$ -kegel (resp. strikte $\mathcal{S}$ -kegel) als voor iedere $S \in \mathcal{S}$ een $S' \in \mathcal{S}$ bestaat zó dat

$$S \subset \overline{S' \cap K - S' \cap K} \text{ (resp. } S \subset S' \cap K - S' \cap K).$$

Als $\mathcal{S}$ de collectie van alle begrensde verzamelingen van E is, dan spreken we van een b-kegel (resp. strikte b-kegel).

1.22 Stelling ([6], Ch.2, 1.14). Zij $(E, ||.||)$ een Banachruimte en zij K een kegel in E. Dan geldt: K voortbrengend $\Longrightarrow$ K is een b-kegel.
Bewijs. Voor $r \geq 0$ definiëren we:

$$B_r = \{x \mid ||x|| \leq r\}$$

$$\text{en} \quad C_r = \overline{B_r \cap K - B_r \cap K}.$$

Als K voortbrengend is, dan geldt:

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad .$$

Op grond van de stelling van Baire bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zó dat het inwendige van C_n niet leeg is. Daar C_n absoluut convex is, is 0 een inwendig punt van C_n; dus voor zekere $r > 0$ geldt: $B_r \subset C_n$. Hieruit volgt de bewering.

1.23 Laten E en F l.c.r. zijn. Zij $\mathcal{S}$ een collectie van begrensde verzamelingen in E. Onder de $\mathcal{S}$-topologie op $L(E,F)$ verstaan we de topologie van uniforme convergentie op verzamelingen uit $\mathcal{S}$.
Als $Q = \{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een stelsel halfnormen op F is dat de topologie op F voortbrengt, dan wordt de $\mathcal{S}$-topologie voortgebracht door het stelsel halfnormen $\{p_{\alpha,S} \mid \alpha \in A, S \in \mathcal{S}\}$ waarbij

$$p_{\alpha,S}(T) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in S} q_\alpha(Tx) \qquad (T \in L(E,F)).$$

Als het lineair omhulsel van $\bigcup\{S \mid S \in \mathcal{S}\}$ dicht is in E, dan is de $\mathcal{S}$-topologie op $L(E,F)$ Hausdorffs (zie [7], III, 3.2).

1.24 Definitie. Zij E (resp. F) een geordende lineaire ruimte met positieve kegel K (resp. L). Een lineaire afbeelding $T : E \to F$ heet positief indien $T(K) \subset L$.

1.25 Propositie. Zij E (resp. F) een geordende l.c.r. met positieve kegel K (resp. L) (zie 1.2). Zij $T : E \to F$ een continue positieve lineaire

afbeelding. Zij $T' : F' \to E'$ de geadjungeerde afbeelding. Dan geldt: $T'(L') \subset K'$.
Bewijs. Triviaal.

1.26 Stelling. Zij E (resp. F) een geordende l.c.r. met positieve kegel K (resp. L). Zij

$$K = \{T \mid T \in L(E,F),\ T(K) \subset L\}$$

de verzameling van alle continue positieve lineaire afbeeldingen van E in F. Dan geldt:
K is een kegel $\Longleftrightarrow$ K is totaal.
Bewijs. Zie [7], V, 5.1.

1.27 Stelling. Zij E (resp. F) een geordende l.c.r. met positieve kegel K (resp. L). Zij $\mathcal{S}$ een collectie van begrensde verzamelingen in E met $\cup\{S \mid S \in \mathcal{S}\} = E$. Dan is

$$K = \{T \mid T \in L(E,F),\ T(K) \subset L\}$$

gesloten in de $\mathcal{S}$-topologie op $L(E,F)$.
Bewijs. Zie [7], V, 5.1.

1.28 Stelling ([7], V, 5.2). Zij E (resp. F) een geordende l.c.r. met positieve kegel K (resp. L). Zij $\mathcal{S}$ een collectie van begrensde verzamelingen in E zó dat het lineair omhulsel van $\cup\{S \mid S \in \mathcal{S}\}$ dicht is in E. Als K een $\mathcal{S}$-kegel is en als L normaal is m.b.t. de topologie op F, dan is

$$K = \{T \mid T \in L(E,F),\ T(K) \subset L\}$$

een normale kegel in $L(E,F)$ m.b.t. de $\mathcal{S}$-topologie.
Bewijs. Daar K een $\mathcal{S}$-kegel is, is K totaal. Uit 1.26 volgt dat K een kegel is. Daar L normaal is bestaat er een stelsel $\{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van monotone halfnormen op F dat de topologie van F voortbrengt. Voor $\alpha \in A$ en $S \in \mathcal{S}$ definiëren we

$$q_{\alpha,S} = \sup_{x \in S \cap K} q_\alpha(Tx) \quad (T \in L(E,F)).$$

Daar K een $\mathcal{S}$-kegel is, brengt het stelsel halfnormen $\{q_{\alpha,S} | \alpha \in A, S \in \mathcal{S}\}$ de $\mathcal{S}$-topologie op $L(E,F)$ voort. Daar iedere q_α monotoon is, is ook iedere $q_{\alpha,S}$ monotoon. Uit 1.12 volgt dan het gestelde.

2. De stelling van Pringsheim

2.0 In deze paragraaf is E een l.c.r. over $\mathbb{C}$ die rijvolledig is.

2.1 Definitie. Zij Ω een niet-lege open deelverzameling van de Riemann-bol $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Een funktie $f : \Omega \to E$ heet

- analytisch in een punt $z_0 \in \Omega$ $(z_0 \neq \infty)$ als $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

bestaat voor alle z in een zekere omgeving van z_0,

- analytisch in het punt ∞ (als $\infty \in \Omega$) als $1 = \lim_{z \to \infty} f(z)$

bestaat en als de funktie g, gedefinieerd door

$$g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & \text{als } z \neq 0 \\ 1 & \text{als } z = 0 \end{cases}$$

analytisch is in het punt 0,

- lokaal analytisch op Ω, als f analytisch is in ieder punt van Ω.

2.2 Stelling. Zij E een rijvolledige l.c.r. over $\mathbb{C}$ en zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij elementen in E. Er bestaat dan een getal R, $0 \leq R \leq \infty$, zó dat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeert als $|z| < R$ en divergeert als $|z| > R$. Er geldt:

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (a_n r^n)_{n=0}^{\infty} \text{ is begrensd in E}\} .$$

Het getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks en de cirkel $|z| = R$ heet de convergentiecirkel. Binnen de convergentiecirkel stelt de machtreeks een analytische funktie voor.

Bewijs. Dit verloopt geheel analoog aan dat voor het geval $E = \mathbb{C}$ (zie [2], p. 498 en 499).

2.3 Stelling ([2], p.500). Zij E een rijvolledige l.c.r. over $\mathbb{C}$ en zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij elementen in E. Als $f \in E'$, dan geven we met R_f aan de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)\, z^n$. Als R de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ is, dan geldt:

$$R = \inf_{f \in E'} R_f .$$

Bewijs. Op grond van 2.2 geldt:

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (a_n r^n) \text{ is begrensd in } E\} .$$

Nu geldt: een verzameling $B \subset E$ is begrensd in E dan en slechts dan als B begrensd is in E_σ (zie [7], IV, 3.3).
Dus

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (a_n r^n) \text{ is } \sigma(E,E')\text{-begrensd}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \forall f \in E' \text{ is } (f(a_n) r^n) \text{ begrensd}\}. \end{aligned}$$

Hieruit is gemakkelijk af te leiden:

$$R = \inf_{f \in E'} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (f(a_n) r^n) \text{ is begrensd}\}.$$

En dus

$$R = \inf_{f \in E'} R_f .$$

2.4 Gevolg. Ook geldt: $R = \inf_{f \in (E_0)'} R_f$

(hierin is E_0 de reële restrictie van E).
Bewijs. De $\sigma(E,E')$-topologie valt samen met de $\sigma(E_0,(E_0)')$-topologie (zie 1.20). Het gestelde volgt hiermee uit het bewijs van 2.3.

2.5 Stelling. Zij E een rijvolledige l.c.r over $\mathbb{C}$ en zij Ω een niet-lege open deelverzameling van de Riemann-bol. Zij verder $f : \Omega \to E$ een lokaal analytische funktie. Als $z_0 \in \Omega$, dan is f om het punt z_0 in een machtreeks te ontwikkelen; de convergentiestraal van deze machtreeks is gelijk aan de straal van de grootste cirkel met middelpunt z_0, tot op het inwendige waarvan f een analytische voortzetting $\tilde{f}$ bezit; binnen de convergentiecirkel convergeert de machtreeks naar $\tilde{f}(z)$.
Bewijs. Zie [7], IV, Exercise 39.

2.6 Gevolg. Op de convergentiecirkel van een machtreeks (met waarden in een rijvolledige l.c.r.) ligt steeds een singulier punt.

We zullen nu het vectorwaardig analogon van de volgende stelling van Pringsheim bewijzen.

2.7 Stelling (Pringsheim). Zij gegeven de machtreeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Als $a_n \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ en als R de convergentiestraal van deze machtreeks is, dan heeft f(z) een singulier punt in $z = R$.
Bewijs. Zij $0 \leq \rho < R$. Ontwikkelen we f(z) om het punt $z = \rho$ in een machtreeks, dan krijgen we

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\rho)^n,$$

waarbij $b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\rho) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n \rho^{n-k}$ $(k = 0,1,2\ldots)$.

Als r de convergentiestraal van $(*)$ voorstelt, dan is zeker $r \geq R-\rho$. Om nu te bewijzen dat $z = R$ een singulier punt van f(z) is, is het voldoende om aan te tonen dat $r \leq R-\rho$.

Zij $Re^{i\alpha}$ $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ een singulier punt van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Beschouw nu de machtreeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\rho e^{i\alpha})^n,$$

waarbij $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\rho e^{i\alpha}) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n \rho^{n-k} e^{i(n-k)\alpha}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

De convergentiestraal van deze machtreeks is dan precies gelijk aan $R-\rho$. Daar $a_n \geq 0$ is, is $|c_n| \leq b_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Hieruit volgt:

$$\frac{1}{R-\rho} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \frac{1}{r} \quad .$$

Dus $r \leq R-\rho$.

2.8 Stelling ([7], App. 2.1). Zij E een l.c.r. over $\mathbb{C}$ die rijvolledig is. Zij K een kegel in E die zwak normaal is (zie 1.20). Zij $a_n \in K$ $(n=0,1,2,..)$. Stel dat de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gelijk is aan 1. Dan geldt:

(i) de analytische funktie die binnen de eenheidscirkel door deze machtreeks wordt voorgesteld heeft een singulier punt in $z = 1$;

(ii) als deze singulariteit een pool is, dan heeft deze maximale orde onder de polen op $|z| = 1$.

Bewijs. Voor $|z| < 1$ definiëren we: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Zij $0 \leq \rho < 1$. Ontwikkelen we $f(z)$ in een machtreeks om het punt $z = \rho$, dan krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\rho)^n \quad ,$$

waarbij $b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \rho^{n-k} a_n$ $(k = 0,1,2,\ldots)$; zij r de convergentiestraal van deze machtreeks.

Zij E_0 de reële restrictie van E. Als $f \in (E_0)'$, dan geven we met R_f (resp. r_f) de convergentiestraal aan van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a_n) z^n \text{ (resp. } \sum_{n=0}^{\infty} f(b_n)\ (z-\rho)^n) \quad .$$

Uit 2.4 volgt:

(1) $$\inf_{f\in(E_0)'} R_f = 1 \text{ en } \inf_{f\in(E_0)'} r_f = r.$$

Daar K zwak normaal is, is

$$C := \{f \in (E_0)' \mid f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in K\}$$

voortbrengend in $(E_0)'$ (zie 1.18 en 1.20).
Hieruit volgt:

(2) $$\inf_{f\in(E_0)'} R_f = \inf_{f\in C} R_f \text{ en } \inf_{f\in(E_0)'} r_f = \inf_{f\in C} r_f .$$

Voor $f \in C$ is $f(a_n) \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Op grond van 2.7 volgt dan

(3) $$R_f - \rho = r_f \quad \text{als } f \in C.$$

Combineren we (1), (2) en (3), dan vinden we $r = 1-\rho$. Dit betekent (zie 2.5) dat $z = 1$ een singulier punt is.
Laten we aannemen dat de singulariteit $z = 1$ een pool van orde k is. Als $\zeta = e^{i\theta}$ een punt van de eenheidscirkel is en als $z = t\zeta$, $0 \leq t < 1$, dan is

$$\lim_{t\uparrow 1} f(|z|)\,|z-\zeta|^p = 0$$

voor iedere $p > k$. Daar K zwak normaal is, volgt (zie 1.12) dat

$$(1-t)^p \sum_{n=0}^{\infty} (t^n \cos n\theta)a_n \text{ en } (1-t)^p \sum_{n=0}^{\infty} (t^n \sin n\theta)a_n$$

voor iedere $p > k$ naar 0 convergeren in E_σ als $t \uparrow 1$.
(want: $0 \leq (t^n \cos n\theta)a_n + |z|^n a_n \leq 2|z|^n a_n$ en
$0 \leq (t^n \sin n\theta)a_n + |z|^n a_n \leq 2|z|^n a_n$).

Dus voor iedere $p > k$ convergeert $f(z)\ |z-\zeta|^p$ naar 0 in E_σ als $t \uparrow 1$.
Hieruit volgt dat, voor $p > k$, $\{f(z)\ |z-\zeta|^p \mid 0 \leq t < 1\}$ begrensd is in E_σ, en dus ook in E (zie [7], IV, 3.3).
Hieruit volgt dat, voor $p > k$ en $\varepsilon > 0$, $f(z)\ |z-\zeta|^{p+\varepsilon}$ naar 0 convergeert in E als $t \uparrow 1$.
Stel nu dat ζ een pool van de orde m is, dan volgt uit het bovenstaande dat $m \leq k$.

3. Positieve operatoren

3.0 In deze paragraaf is E steeds een reële geordende Banachruimte of een geordende lokaal convexe ruimte (l.c.r.) met positieve kegel K (dus K is gesloten in E).

3.1 Stelling. Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K. Als K ruimtelijk is of als K voortbrengend en normaal is, dan is iedere positieve lineaire operator op E continu.
Bewijs. Zie [7], V, 5.5 en 5.6.

3.2 Stelling ([7], App. 2.2). Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K die voortbrengend en normaal is. Zij T een positieve lineaire operator op E. Dan geldt:
(i) T is continu en $r(T) \in \sigma(T)$;
(ii) als $r(T) \in \mathrm{Pol}\,\sigma(T)$, dan is $r(T)$ een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$.
Bewijs. De continuïteit van T volgt uit 3.1. Zij

$$K = \{S \in L(E) \mid S(K) \subset K\}.$$

Daar K voortbrengend en dus totaal is, is K een kegel (zie 1.26). Verder is K een b-kegel (zie 1.22) . Op grond van 1.28 is K dan normaal in $L(E)$ m.b.t. de topologie van uniforme convergentie op begrensde verzamelingen van E (i.e. de norm-topologie op $L(E)$).
Zij ϕ: $L(E) \longrightarrow L(E^c)$ de natuurlijke inbedding, d.w.z. $\phi(S) = S^c$ (zie Appendix 5.1).
Uit 1.12 volgt dat $\phi(K)$ normaal is in $L(E^c)_0$ (= de reële restrictie van $L(E^c)$) m.b.t. de norm-topologie op $L(E^c)$. Op grond van 1.19 en 1.20 is op $\phi(K)$ dan ook zwak normaal in $L(E^c)$.
Zij nu $r(T) > 0$. Dan kunnen we 2.8 toepassen op de funktie

$$\lambda \longmapsto R\left(\frac{r(T)}{\lambda}\ ;\ T^c\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{r(T)}\right)^{n+1} (T^c)^n.$$

Daar de coëfficienten van bovenstaande machtreeks elementen zijn van de kegel $\phi(K)$, volgt dat $r(T)$ een singulier punt is van $R(\lambda;T^c)$; dit betekent $r(T) \in \sigma(T)$.
De bewering (ii) volgt ook direct uit 2.8.
Als $r(T) = 0$ dan is de bewering triviaal.

3.3 Stelling ([7], App. 2.4). Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K, die totaal is. Zij T een continue positieve lineaire operator op E zó dat Per $\sigma(T) \cap$ Pol $\sigma(T) \neq \emptyset$. Dan geldt:
(i) $r(T) \in \sigma(T)$;
(ii) als $r(T) \in$ Pol $\sigma(T)$, dan is $r(T)$ een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$.

Bewijs.
(i) Het geval $r(T) = 0$ is triviaal. We mogen dus aannemen dat $r(T) > 0$. Uit 1.6 (ii) volgt dat $K' - K'$ dicht is in E'_σ. Dus $K' - K'$ scheidt de punten van E (zie [7], IV, 1.3). We beschouwen nu het duale paar $< E,K'-K' >$ (zie [7], IV, 1). Zij $F = (E, \sigma(E,K'-K'))$, d.w.z. F is de ruimte E voorzien van de topologie van puntsgewijze convergentie op K'. Dan is F een l.c.r. en er geldt: $F' = K' - K'$ (zie [7], IV, 1.2). Op grond van 1.18 is K normaal in F.
We voorzien nu $L(E)$ en $L(E^c)$ van de norm-topologie (i.e. de topologie van uniforme convergentie op begrensde verzamelingen). De ruimte $L(E,F)$ resp. $L(E^c,F^c)$ voorzien van de topologie van puntsgewijze convergentie op K geven we aan met $L_\sigma(E,F)$ resp. $L_\sigma(E^c,F^c)$. Daar K totaal is in E, zijn $L_\sigma(E,F)$ en $L_\sigma(E^c,F^c)$ lokaal convexe Hausdorff-ruimten (zie [7], III, 3.2).
Beschouw nu onderstaand diagram:

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \xrightarrow[\phi_1]{} & L(E^c) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} \\ L_\sigma(E,F) & \xrightarrow[\phi_2]{} & L_\sigma(E^c,F^c) \end{array}$$

Hierin zijn ψ_1 en ψ_2 de natuurlijke injecties; ϕ_1 en ϕ_2 zijn gedefinieerd door

$$\phi_1(S) = S^c \quad (S \in L(E))$$
$$\phi_2(S) = S^c \quad (S \in L(E,F)).$$

Dan is bovenstaand diagram commutatief.
De afbeeldingen ϕ_1 en ϕ_2 zijn topologisch; ψ_1 en ψ_2 zijn continu.
Als $S \in L(E)$ resp. $L(E^c)$ dan schrijven we in plaats van $\psi_1(S)$ resp. $\psi_2(S)$ ook wel $\tilde{S}$.
Zij $K = \{S \in L(E) \mid S(K) \subset K\}$ de verzameling van alle continue positieve lineaire operatoren op E. Daar K totaal is, is K een kegel (zie 1.26).
Als $\mathcal{Y} = \{\{x\} \mid x \in K-K\}$, dan is K een strikte $\mathcal{Y}$-kegel. Daar K normaal is in F, volgt (zie 1.28) dat de kegel $H = \{S \in L(E,F) \mid S(K) \subset K\}$ normaal is in $L_\sigma(E,F)$.
Daar $\tilde{K} := \psi_1(K) \subset H$, is $\tilde{K}$ normaal in $L_\sigma(E,F)$. Daar ϕ_2 topologisch is, is $\tilde{K}^c := \phi_2(\tilde{K})$ normaal in $L_\sigma(E^c,F^c)$. Dus $\tilde{K}^c$ is ook zwak normaal (zie 1.19 en 1.20).
Zij nu $\zeta \in \mathrm{Per}\,\sigma(T)$ een pool van orde k. Als

$$Q := \lim_{\lambda\to\zeta} (\lambda-\zeta)^k R(\lambda;T^c) ,$$

dan is $Q \neq 0$. Dan is ook

$$0 \neq \tilde{Q} = \lim_{\lambda\to\zeta} (\lambda-\zeta)^k \tilde{R}(\lambda;T^c).$$

Stel nu $r(T) \notin \sigma(T)$. Dan is $\lambda \longmapsto R(\lambda;T^c)$ en dus ook $\lambda \longmapsto \tilde{R}(\lambda;T^c)$ analytisch in $\lambda = r(T)$. De coëfficienten van de machtreeksontwikkeling

$$\tilde{R}(\lambda;T^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (\tilde{T}^c)^n$$

zijn elementen van de zwak normale kegel $\tilde{K}^c$. Daaruit volgt (zie 2.5 en 2.8)

dat $\tilde{R}(\lambda;T^c)$ een voortzetting heeft met waarden in de completering van $L_\sigma(E^c,F^c)$ die analytisch is voor $|\lambda| > r$, waarbij $0 \leq r < r(T)$. Hieruit volgt dat $\{\tilde{R}(\lambda;T^c) \mid |\lambda| > r(T)\}$ begrensd is in $L_\sigma(E^c,F^c)$. Dit impliceert $\tilde{Q} = 0$. Tegenspraak. Dus $r(T) \in \sigma(T)$.
(ii) We merken op dat een pool van $R(\lambda;T^c)$ op de cirkel $|\lambda| = r(T)$ een pool van dezelfde orde van $\tilde{R}(\lambda;T^c)$ is. De bewering volgt met behulp van het bovenstaande nu uit 2.8.

Opmerking. Een kort en elegant bewijs van 3.3 wordt gegeven in [3], §4.2.

3.4 Stelling ([8], Satz 1(1.3)). Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K die totaal is. Zij T een continue positieve lineaire operator op E zó dat Per $\sigma(T) \subset$ Pol $\sigma(T)$. Dan geldt:
(i) $r(T) \in \sigma(T)$ en $r(T)$ is een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$;
(ii) $\exists x \in K \setminus \{0\}$ zó dat $Tx = r(T)x$;
(iii) $\exists f \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $T'f = r(T)f$.
Bewijs. De bewering (i) volgt direct uit 3.3.
Zij $T^c : E^c \longrightarrow E^c$ de complexificatie van T (zie Appendix 5.1). Als $\lambda \in \mathbb{R}$, dan zal $R(\lambda;T)$ de restrictie van $R(\lambda;T^c)$ tot E zijn.
Daar $r(T) \in$ Per $\sigma(T)$, is $r(T)$ een pool van zeg orde k.
We beschouwen eerst het geval dat $r(T) > 0$.
Als

$$Q := \lim_{\lambda \downarrow r(T)} R(\lambda;T)(\lambda - r(T))^k,$$

dan is $Q \neq 0$. Als $\lambda > r(T)$, dan geldt $R(\lambda;T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n$. Daar K gesloten is, volgt dat $R(\lambda;T)$ positief is voor $\lambda > r(T)$. Uit 1.27 volgt dat Q positief is.
Daar K totaal is, bestaat er een $y \in K \setminus \{0\}$ zó dat $Q(y) \in K \setminus \{0\}$; immers uit $Q(K) = \{0\}$ zou volgen

$$Q(E) = Q(\overline{K-K}) \subset \overline{Q(K-K)} = \{0\}.$$

Nu is $$(r(T)I-T)\,Q = \lim_{\lambda \downarrow r(T)} (\lambda I-T)\,R(\lambda;T)(\lambda-r(T))^k$$
$$= \lim_{\lambda \downarrow r(T)} I(\lambda-r(T))^k = 0 .$$

Als $x := Q(y)$, dan is $x \in K \setminus \{0\}$ en $Tx = r(T)x$. Hiermee is (ii) bewezen.
Om (iii) te bewijzen passen we bovenstaande redenering toe op de geadjungeerde operator $T' : E'_\beta \longrightarrow E'_\beta$.
Daar K totaal is, is K' een kegel (zie 1.6). Daar K' ook gesloten is in E'_β (dit volgt uit 1.27), is E'_β een geordende Banachruimte met positieve kegel K'.
Daar $R(\lambda;T)' = R(\lambda;T')$, volgt

$$Q' = \lim_{\lambda \downarrow r(T)} R(\lambda;T')(\lambda-r(T))^k .$$

Omdat $Q \neq 0$ is, is ook $Q' \neq 0$. Daar Q positief is, is Q' ook positief (zie 1.25). Verder is

$$Q' : E'_\sigma \longrightarrow E'_\sigma$$

continu (zie [7], IV, 2.1).

Uit 1.6 volgt dat K' totaal is in E'_σ. Hieruit volgt dat er een $g \in K' \setminus \{0\}$ is met $Q'(g) \in K' \setminus \{0\}$; immers uit $Q'(K') = \{0\}$ zou volgen $Q'(E') = \{0\}$, dus $Q' = 0$. Verder is $(r(T)I-T')Q' = 0$.
Als $f := Q'(g)$, dan is $f \in K' \setminus \{0\}$ en $Q'(f) = r(T)f$.
Hiermee zijn (ii) en (iii) bewezen voor het geval $r(T) > 0$.
Zij nu $r(T) = 0$. De Laurent-reeks van $R(\lambda;T^c)$ om het punt 0 wordt dan gegeven door

$$R(\lambda;T^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T^c)^n}{\lambda^{n+1}} .$$

Daar $\lambda = 0$ een pool van orde k is, is $(T^c)^{k-1} \neq 0$ en $(T^c)^k = 0$; dus $T^{k-1} \neq 0$ en $T^k = 0$.

Daar T continu en K totaal is, is er een $y \in K \setminus \{0\}$ zó dat $T^{k-1} y \in K \setminus \{0\}$. Stellen we $x := T^{k-1}y$ dan is $x \in K \setminus \{0\}$ en $Tx = 0$.
Uit $T^{k-1} \neq 0$ en $T^k = 0$ volgt $(T')^{k-1} \neq 0$ en $(T')^k = 0$. Daar $T' : E'_\sigma \longrightarrow E'_\sigma$ ook continu is (zie [7], IV, 2.1) en daar K' totaal is in E'_σ, is er een $g \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $(T')^{k-1} g \in K' \setminus \{0\}$. Stellen we $f := (T')^{k-1}g$ dan is $f \in K' \setminus \{0\}$ en $T'f = 0$.

3.5 Gevolg. Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K die totaal is. Zij T een positieve lineaire operator op E zó dat $r(T) > 0$ en T^p compact is voor zekere $p \in \mathbb{N}$. Dan geldt:
(i) $r(T) \in \sigma(T)$ en $r(T)$ is een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$;
(ii) $\exists x \in K \setminus \{0\}$ zó dat $Tx = r(T)x$;
(iii) $\exists f \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $T'f = r(T)f$.
Bewijs. Daar $r(T) > 0$ en daar T^p compact is, volgt:

$$\text{Per } \sigma(T) \subset \sigma(T) \setminus \{0\} \subset \text{Pol } \sigma(T).$$

Het gestelde volgt nu uit 3.4.

3.6 Definitie. Zij K een kegel in een reële lineaire ruimte E. Een deelverzameling $B \subset K$ heet een basis voor K als er voor iedere $x \in K$ precies één $\alpha \geq 0$ bestaat zó dat $x = \alpha b$ voor zekere $b \in B$.

3.7 Opmerking. Zij E een reële l.c.r. en zij K een kegel in E met compacte convexe basis B. Uit een gevolg van de stelling van Hahn-Banach (zie [1], 21.12) volgt dat er een $f \in E'$ bestaat zó dat

$$\inf\{f(x) \mid x \in B\} \geq 1.$$

De verzameling $\{x \mid f(x) = 1\} \cap K$ is dan ook een compacte convexe basis voor K. Merk op dat $f \in K'$.

3.8 Lemma. Zij E een lineaire ruimte (over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$) en laten $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ lokaal convexe Hausdorff topologieën op E zijn zó dat $\mathcal{T}_1$ fijner is dan $\mathcal{T}_2$. Als er in $E[\mathcal{T}_1]$ een nulomgevingsbasis is bestaande uit verzamelingen die volledig zijn in $E[\mathcal{T}_2]$, dan is $E[\mathcal{T}_1]$ volledig.
Bewijs. Zie [7], I, 1.6.

3.9 Zij E een reële l.c.r. en zij K een kegel in E met compacte convexe basis. Uit 3.7 volgt dat er een $f \in K'$ bestaat zó dat

$$B := \{x \mid f(x) = 1\} \cap K$$

een compacte convexe basis voor K is.
We bewijzen dat K gesloten is in E. Zij nl. $x \in \overline{K}$. Dan is er een net $\{x_\sigma \mid \sigma \in S\}$ in K met $x = \lim x_\sigma$. Zij $x_\sigma = \alpha_\sigma b_\sigma$ met $b_\sigma \in B$ $(\sigma \in S)$. Dan is $f(x) = \lim f(x_\sigma) = \lim \alpha_\sigma \geq 0$. Daar B compact is, bevat het net $\{b_\sigma \mid \sigma \in S\}$ een deelnet $\{b_{\sigma(\tau)} \mid \tau \in T\}$ dat convergeert, zeg naar $b_0 \in B$. Dan volgt:

$$\lim \alpha_{\sigma(\tau)} b_{\sigma(\tau)} = f(x) b_0.$$

Dus $x = f(x) b_0 \in K$.
Zij U het convex omhulsel van $B \cup (-B)$. Dan is U absoluut convex. Daar B compact is, is ook U compact (zie [7], II, 10.2).
Zij $E_1 := K - K$. Dan is U een absoluut convexe absorberende verzameling in E_1. Zij p de Minkowski-funktionaal van U, d.w.z.

$$p(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \geq 0,\ x \in \lambda U\} \qquad (x \in E_1).$$

Dan is (E_1, p) een genormeerde ruimte.
De norm p heet de basis-norm behorende bij B.
Daar U compact is, is U begrensd en volledig. Uit de begrensdheid van U volgt direct dat de natuurlijke inbedding

$$(E_1, p) \longrightarrow E$$

continu is. Daar K gesloten is in E, is K ook gesloten in (E_1,p). Uit het feit dat U volledig is, volgt (zie 3.8) dat (E_1,p) een Banachruimte is. We bewijzen tenslotte dat K een normale kegel in (E_1,p) is. Zij V het convexe omhulsel van $\{0\} \cup B$. We tonen aan dat $U \cap K = V$. Het is duidelijk dat $V \subset U \cap K$. Stel nu $x \in U \cap K$. Daar $x \in U$, is $x = \lambda b_1 - (1-\lambda)b_2$, waarbij $0 \leq \lambda \leq 1$ en $b_i \in B$ $(i = 1,2)$; daar $x \in K$, is $x = \alpha b_3$ met $\alpha \geq 0$ en $b_3 \in B$. Hieruit volgt $f(x) = 2\lambda - 1 = \alpha$; dit impliceert $0 \leq \alpha \leq 1$. Dus $x \in V$. Daar $U \cap K = V$, is $p(x) = f(x)$ voor alle $x \in K$. Daar $f \in K'$ (zie boven), volgt dat p monotoon is. Op grond van 1.12 is K dan normaal in (E_1,p).

3.10 Stelling ([7], App. 2.6). Zij E een reële l.c.r. en zij K een kegel in E met compacte convexe basis. Zij T een lineaire operator op de deelruimte $E_1 = K - K$ van E, zó dat $T(K) \subset K$ en zó dat de restrictie van T tot K continu is. Dan geldt:
$\exists r \geq 0$ en $x \in K \setminus \{0\}$ zó dat $Tx = rx$.

Bewijs. We gebruiken in dit bewijs de notaties van 3.9.
Uit 3.9 volgt dat (E_1,p) een geordende Banachruimte is met positieve kegel K die voortbrengend en normaal is. We vatten T nu op als operator op (E_1,p). Uit 3.2 volgt dan dat T continu is en dat $r(T) \in \sigma(T)$ (mogelijk is $r(T) = 0$).
Als $\lambda \in \mathbb{R}$, dan zal $R(\lambda;T)$ de restrictie van $R(\lambda;T^c)$ tot E zijn
($T^c : E^c \longrightarrow E^c$ is de complexificatie van T, zie Appendix 5.1).
Zij (λ_n) een rij met $\lambda_n \downarrow r(T)$. Dan is

$$\sup_n ||R(\lambda_n;T)|| = \infty$$

Stel nl. $\sup_n ||R(\lambda_n;T)|| \leq M < \infty$. Kies dan een n zó dat $r(T) \leq \lambda_n < r(T) + \frac{1}{M}$. Uit Appendix 1.3 (iv) volgt dan dat $r(T) \notin \sigma(T)$. Tegenspraak.
Op grond van de stelling van Banach-Steinhaus (zie [7], III, 4.2) bestaat er een $y \in E_1$, zó dat

$$\sup_n p(R(\lambda_n;T)y) = \infty.$$

Er is dus een deelrij (μ_n) van (λ_n) zó dat

$$\lim_{n\to\infty} p(R(\mu_n;T)y) = \infty.$$

Daar K voortbrengend is in E_1, mogen we aannemen dat $y \in K$. Stellen we

$$x_n := \frac{R(\mu_n;T)y}{p(R(\mu_n;T)y)} \quad ,$$

dan is $x_n \in B$ en er geldt:

$$\lim_{n\to\infty} p((\mu_n I - T)x_n) = 0.$$

Hieruit volgt:
$$\lim_{n\to\infty} p(Tx_n - r(T)x_n) = 0.$$

Daar de inbedding $(E_1,p) \longrightarrow E$ continu is (zie 3.9) volgt dat ook

$$Tx_n - r(T)x_n \to 0 \text{ in } E, \text{ als } n \to \infty.$$

Daar $x_n \in B$ $(n = 1,2,\ldots)$ en daar B compact is, bezit de rij (x_n) een limietpunt $x \in B$. Daar verder de restrictie van T tot K continu is, volgt $Tx = r(T)x$.

3.11 Stelling ([7], App. 2.6 Cor.). Zij E een geordende Banachruimte met positieve kegel K. Zij T een positieve operator op E.
Als K ruimtelijk is, dan is T continu en er geldt:
$\exists r \geq 0$ en $f \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $T'f = rf$.
Is K bovendien normaal, dan geldt:
$\exists f \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $T'f = r(T)f$.
Bewijs. Zij K ruimtelijk. Uit 3.2 volgt dat T continu is. Daar K ruimtelijk is, is K voortbrengend en dus totaal (zie 1.3). Op grond hiervan is K' een kegel in E' (zie 1.6).
Zij $S = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ de eenheidsbol in E en zij x_0 een inwendig punt van K. Dan is er een $\alpha > 0$ zó dat $x_0 + \alpha S \subset K$. Hieruit volgt

$$\alpha S \subset (-x_0+K) \cap (x_0-K) (=\{x \in E | -x_0 \leq x \leq x_0\}).$$

Zij H het hypervlak $H = \{f \in E | f(x_0) = 1\}$ en zij $f \in H \cap K'$. Dan is $|f(x)| \leq 1$ voor alle x met $-x_0 \leq x \leq x_0$, dus zeker voor alle $x \in \alpha S$. Dit betekent dat $||f|| \leq \frac{1}{\alpha}$. Hieruit volgt dat de verzameling $H \cap K'$ equicontinu is. Verder zijn H en K', en dus ook $H \cap K'$, convex en gesloten in E'_σ. Op grond van de stelling van Alaoglu (zie [7], III, 4.3) is $H \cap K'$ dan compact in E'_σ. We tonen aan dat $H \cap K'$ een basis is voor K'. Zij nl. $f \in K' \setminus \{0\}$. Dan is $\beta = f(x_0) > 0$; immers uit $f(x_0) = 0$ zou volgen dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \alpha S$, dus dat $f = 0$. Verder is $g = \frac{f}{f(x_0)} \in H \cap K'$. Dus $f = \beta g$ met $g \in H \cap K'$. Stel $f = \beta g = \beta_1 g_1$ met $g_1 \in H \cap K'$. Dan is $f(x_0) = \beta = \beta_1$. In E'_σ is K' dus een kegel met compacte convexe basis $H \cap K'$.

Daar T continu is, is ook $T' : E'_\sigma \longrightarrow E'_\sigma$ continu (zie [7], IV, 2.1). Daar T positief is, is ook T' positief (zie 1.25).

Op grond van 3.10 bestaat er een $r \geq 0$ en een $f \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $T'f = rf$. Zij p de basis-norm (zie 3.9) op $F := K' - K'$ behorende bij de basis $H \cap K'$. Uit het bewijs van 3.10 volgt dat r gelijk is aan de spectraalradius van de operator $T' : (F,p) \longrightarrow (F,p)$.

Als K bovendien normaal is, dan is K' voortbrengend in E' (zie 1.6); dus $F = E'$. Daar $H \cap K'$ begrensd is in E'_β, is de identieke afbeelding

$$(E',p) \longrightarrow E'_\beta$$

continu. Uit de open-afbeeldingsstelling (zie [7], III, 2.1) volgt dan dat de topologie afkomstig van p samenvalt met de $\beta(E',E)$-topologie. Nu is de spectraalradius van T' als operator op E'_β gelijk aan r(T) (zie Appendix 3.6). Hieruit volgt het gestelde.

4. Sterk-Positieve Operatoren

4.0 In deze paragraaf is E een geordende Banachruimte met positieve kegel K en A een (m.b.t. K) positieve lineaire operator in E.

4.1 Notatie. Het inwendige, resp. het lineair omhulsel van een deelverzameling V van E duiden we aan met V^o, resp. sp V.

4.2 Propositie.
(i) $K + K^o \subset K^o$
(ii) $\alpha K^o \subset K^o$ $(\alpha > 0)$
Bewijs. Triviaal.

4.3 Propositie. Als $x,y \in E$ en $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, dan geldt $x = y$.
Bewijs. Uit $x + ((1-\alpha)/\alpha)y \in K$ $(\alpha > 0)$ volgt

$$x - y = \lim_{\alpha\to\infty}[x + ((1-\alpha)/\alpha)y] \in \overline{K} = K.$$

Uit $(\alpha/(1-\alpha))x + y \in K$ $(\alpha < 1)$ volgt

$$y - x = \lim_{\alpha\to-\infty}[(\alpha/(1-\alpha))x + y] \in \overline{K} = K.$$

Dus $x - y \in K \cap -K = \{0\}$.

4.4 Propositie. Als $f \in K'$ en $f \neq 0$, dan $f(x) > 0$ $(x \in K^o)$.
Bewijs. Onderstel $\exists y \in K^o : f(y) = 0$. Als $x \in E$, dan geldt voor geschikte $\delta > 0$: $y + \delta x \in K$ en $y - \delta x \in K$. Dus $0 \leq f(y + \delta x) = \delta f(x)$ en $0 \leq f(y - \delta x) = -\delta f(x)$. Hieruit volgt $f(x) = 0$. Dus $f = 0$. Tegenspraak.

4.5 Propositie. Als $A \neq 0$, dan $Ax \neq 0$ $(x \in K^o)$.
Bewijs. Analoog aan dat van propositie 4.4.

4.6 Propositie. Als $A(E) \cap K^o \neq \emptyset$, dan $A(K^o) \subset K^o$.
Bewijs. Kies $x \in E$ zó dat $Ax \in K^o$. Zij $y \in K^o$. Voor geschikte $\delta > 0$ geldt $y - \delta x \in K$ en dus $Ay - \delta Ax = A(y - \delta x) \in K$. Hieruit volgt (zie 4.2) $Ay \in \delta K^o + K \subset K^o + K \subset K^o$.

4.7 Definitie. Zij $u \in K$, $u \neq 0$. We noemen A u-positief (m.b.t. K) als voor alle $x \in K \setminus \{0\}$ positieve getallen α en β en een natuurlijk getal $p \geq 1$ bestaan zó dat $\alpha u \leq A^p x \leq \beta u$.

4.8 Definitie. We noemen A sterk-positief (m.b.t. K) als voor alle $x \in K \setminus \{0\}$ een natuurlijk getal $m \geq 1$ bestaat zó dat $A^m x \in K^o$.

4.9 Propositie. Als $E \neq \{0\}$, $u \in K^o$ en A sterk-positief, dan A u-positief.
Bewijs. $E \neq \{0\}$ en $u \in K^o \Longrightarrow u \in K \setminus \{0\}$.
Als $x \in K \setminus \{0\}$, dan bestaat er een $m \geq 1$ zó dat $A^m x \in K^o$. Voor geschikte $\gamma > 0$ geldt dus $A^m x - \gamma u \in K$, d.w.z. $A^m x \geq \gamma u$. Uit $u \in K^o$ volgt dat voor geschikte $\delta > 0$ geldt $u - \delta A^m x \in K$, d.w.z. $A^m x \leq \delta^{-1} u$.

4.10 Propositie. A sterk-positief $\Longrightarrow A(K^o) \subset K^o$.
Bewijs. Z.b.d.a. $K \neq \{0\}$. Kies $x \in K \setminus \{0\}$. Voor zekere $m \geq 1$ geldt $A^m x \in K^o$. Dus $A^m(E) \cap K^o \neq \emptyset$. Uit $A(E) \supset A^m(E)$ en prop. 4.6 volgt nu het gestelde.

4.11 Propositie. Als $E \neq \{0\}$, K ruimtelijk en $A \in L(E)$ sterk-positief, dan geldt $r(A) > 0$.
Bewijs. Kies $u \in K^o$. Dan $u \neq 0$ (want $E \neq \{0\}$). Volgens 4.9 is A u-positief en er bestaan dus een $n \geq 1$ en een $\alpha > 0$ zó dat $A^n u \geq \alpha u$. Stellen we $B = \alpha^{-1} A^n$, dan $B \in L(E)$, B positief en $B^m u \geq u (m = 1,2,\ldots)$. Daar $r(B) = \alpha^{-1} r(A)^n$ is het voldoende aan te tonen dat $r(B) > 0$. Onderstel $r(B) = 0$. Dan $B^m u \to 0$ als $m \to \infty$. Uit $B^m u \geq u (m = 1,2,\ldots)$ volgt nu $0 \geq u$. Dus $0 = u$. In strijd met $u \neq 0$.

4.12 Propositie. Zij $A \in L(E)$ sterk-positief en $\alpha > 0$.

(i) $[x \in K \setminus \{0\}$ en $Ax = \alpha x] \Longrightarrow x \in K^o$

(ii) $[f \in K' \setminus \{0\}$ en $A'f = \alpha f] \Longrightarrow f(x) > 0 \quad (x \in K \setminus \{0\})$.

Bewijs.

(i) Kies $m \geq 1$ zó dat $A^m x \in K^o$. Uit $A^m x = \alpha^m x$ volgt nu $x \in \alpha^{-m} K^o \subset K^o$ (zie 4.2).

(ii) Zij $x \in K \setminus \{0\}$. Kies $m \geq 1$ zó dat $A^m x \in K^o$. Dan $f(A^m x) > 0$ (zie 4.4). Hieruit volgt $\alpha^m f(x) = ((A')^m f)(x) = ((A^m)'f)(x) = f(A^m x) > 0$. Dus $f(x) > 0$.

4.13 Stelling ([8], Satz 2(1.3)). Zij E niet-triviaal en $A \in L(E)$. Is K ruimtelijk, A sterk-positief, Per $\sigma(A) \subset$ Pol $\sigma(A)$ en $r = r(A)$, dan geldt:

(i) $0 < r \in \sigma(A)$

(ii) er bestaat een $x \in K^o$ zó dat

  (a) $Ax = rx$

  (b) $[\overline{r} > 0, \overline{x} \in K \setminus \{0\}$ en $A\overline{x} = \overline{rx}] \Rightarrow \overline{r} = r$ en $\overline{x} \in sp\{x\}$

(iii) r is enkelvoudige eigenwaarde van A

(iv) r is enkelvoudige pool van A

(v) Per $\sigma(A) = \{r\}$

(vi) er bestaat een $f \in K'$ zó dat

  (a) $A'f = rf$ en $f(t) > 0 \quad (t \in K \setminus \{0\})$

  (b) $[\overline{r} > 0, \overline{f} \in K' \setminus \{0\}$ en $A'\overline{f} = \overline{rf}] \Rightarrow \overline{r} = r$ en $\overline{f} \in sp\{f\}$

Bewijs.

(0) K ruimtelijk $\Longrightarrow$ K totaal (zie 1.3). We kunnen dus 3.4 toepassen.

(i) Uit 4.11 en 3.4 volgt: $0 < r \in \sigma(A)$.

(ii) Uit 3.4 en 4.12 volgt: $\exists x \in K^o : Ax = rx$.

Onderstel nu: $\overline{r} > 0$, $\overline{x} \in K \setminus \{0\}$ en $A\overline{x} = \overline{rx}$. We zullen aantonen dat $\overline{r} = r$ en $\overline{x} \in sp\{x\}$. Volgens 4.12 $\overline{x} \in K^o$. Kies $g \in K' \setminus \{0\}$ zó dat $A'g = rg$ (zie 3.4). Het is duidelijk dat

$$\overline{r}\, g(\overline{x}) = g(A\overline{x}) = (A'g)(\overline{x}) = r\, g(\overline{x}) .$$

Uit $\overline{x} \in K^o$ en $g \in K' \setminus \{0\}$ volgt $g(\overline{x}) > 0$ (zie 4.4). Dus $\overline{r} = r$ en $A\overline{x} = r\overline{x}$.

Zij nu $V := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha x + (1-\alpha)\overline{x} \in K\}$. Dan $V \neq \emptyset$.

Is $V = \mathbb{R}$, dan $\overline{x} = x \in sp\{x\}$ (zie 4.3). Onderstel nu $V \neq \mathbb{R}$. Zij β een randpunt van V en $y = \beta x + (1-\beta)\overline{x}$. Dan is y een randpunt van K. Uit $\overline{K} = K$ volgt $y \in K$. Voorts geldt $Ay = ry$. M.b.v. 4.12 is nu gemakkelijk in te zien dat $y = 0$. Hieruit volgt $\overline{x} \in sp\{x\}$.

(iii) Zij $v \in E$ en $Av = rv$. We zullen aantonen dat $v \in sp\{x\}$. Daar $x \in K^o$ geldt voor geschikte $\delta > 0$: $x + \delta v \in K \setminus \{0\}$. Het is duidelijk dat $A(x+\delta v) = r(x+\delta v)$. Dus $x + \delta v \in sp\{x\}$. Hieruit volgt $v \in sp\{x\}$.

(iv) Zij $u \in K^o$. Volgens 4.9 is A u-positief. Bovendien is K voortbrengend (zie 1.2). We kunnen dus [5], Theorem 2.10 toepassen:

$$N(r-A) = N((r-A)^n) \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Het klimgetal van $r - A$ is dus gelijk aan 1. Hieruit volgt direkt dat ook het klimgetal van $r - A^c = (r-A)^c$ gelijk is aan 1. Uit $r \in \sigma(A)$ en $Per\ \sigma(A) \subset Pol\ \sigma(A)$ volgt dat r een pool is van A^c. De orde van deze pool is gelijk aan het klimgetal van $r - A^c$, dus 1. Konklusie: r is een enkelvoudige pool van A.

(v) Het is duidelijk dat $r \in Per\ \sigma(A)$. Onderstel nu $\lambda \in Per\ \sigma(A)$ en $\lambda \neq r$. Dan is λ een pool van A^c en dus een eigenwaarde van A^c. Volgens [5], Theorem 2.13 geldt $|\lambda| < r$. Dit is in strijd met $\lambda \in Per\ \sigma(A)$. Konklusie: $Per\ \sigma(A) = \{r\}$.

(vi) Uit 3.4 en 4.12 volgt: $\exists f \in K' \setminus \{0\}$: $A'f = rf$ en $f(t) > 0$ $(t \in K \setminus \{0\})$. Onderstel nu dat $\overline{r} > 0$, $\overline{f} \in K' \setminus \{0\}$ en $A'\overline{f} = \overline{rf}$. We zullen aantonen dat $\overline{r} = r$. Het is duidelijk dat

$$\overline{r}\,\overline{f}(x) = (A'\overline{f})(x) = \overline{f}(Ax) = \overline{f}(rx) = r\,\overline{f}(x).$$

Uit $x \in K^o$ en $\overline{f} \in K' \setminus \{0\}$ volgt $\overline{f}(x) > 0$ (zie 4.4). Dus $\overline{r} = r$. Hieruit volgt $\overline{f} \in N(r-A')$. We zijn klaar als we aantonen dat $\dim N(r-A') = 1$. Daar r een enkelvoudige pool is van A geldt:

$$E = N(r-A) \oplus R(r-A).$$

Volgens [4], IV, 1.12 is R(r-A) gesloten. We kunnen dus [4], I.6.4 toepassen:

$$\dim(E/R(r-A))' = \dim R(r-A)^{\perp} .$$

Daar r een enkelvoudige eigenwaarde van A is geldt

$$\dim E/R(r-A) = \dim N(r-A) = 1.$$

Dus $\dim R(r-A)^{\perp} = 1$. Uit

$$N(r-A') = N((r-A)') = R(r-A)^{\perp}$$

volgt nu $\dim N(r-A') = 1$.

4.14 Opmerking. Merk op dat iedere sterk-positieve operator irreducibel is (vgl. I. 5.3).

Literatuur

[1] Choquet, G., Lectures on Analysis (3 vol.), Benjamin, New York (1969).

[2] Garnir, H.G., De Wilde, M. et Schmets, J. Analyse fonctionelle, Birkhaüser Verlag, Basel und Stuttgart (1968).

[3] Georg, K., Zur Spektraltheorie kegelinvarianter Operatoren, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Nr. 9, Bonn (1969).

[4] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill Book Company, New York (1966).

[5] Krasnoselskii, M.A., Positive solutions of operator equations, P. Noordhoff, Groningen (1964).

[6] Peressini, A.L., Ordered topological vector spaces, Harper & Row, New York etc. (1967).

[7] Schaefer, H.H., Topological vector spaces, Macmillan, New York (1966).

[8] Maibaum, G., Über Scharen positiver Operatoren, Math. Ann. 184, 238-256 (1970).

Hoofdstuk III

Het spektrum van positieve operatoren in komplekse Banachroosters

door

W.J. de Schipper

§1. Komplekse Banachroosters

1.0 In dit hoofdstuk zijn X en Y steeds niet-lege kompakte T2-ruimten;
$C(X)$ is de verzameling van alle komplekswaardige kontinue funkties op X;
$C_r(X)$ is de verzameling van alle reëelwaardige kontinue funkties op X;
$C^+(X)$ is de verzameling van alle niet-negatieve kontinue funkties op X.

1.1 $C(X)$ is een komplekse kommutatieve Banach-*-algebra met eenheid 1_X. $C_r(X)$ is een reële kommutatieve Banachalgebra met eenheid 1_X en tevens een Banachrooster met sterke orde-eenheid 1_X; $C^+(X)$ is de positieve kegel.

$C_r(X)$ is een gesloten reële deelruimte in $C(X)$ en
$C(X)_0 = C_r(X) \oplus i\, C_r(X)$ ($C(X)_0$ is de reële restriktie van $C(X)$). Bovendien geldt voor $f = g + ih \in C(X)$:

$$||f|| = ||f||_c \ (:= \sup\{||g \cos \alpha + h \sin \alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\}).$$

$C(X)$ is derhalve isometrisch isomorf met de kompleksifikatie van $C_r(X)$ (zie ook appendix §5).

Op $C(X)$ is een absolute waarde $|.| : C(X) \to C^+(X)$ gedefinieerd door $|f|(x) := |f(x)|$.
Als $f = g + ih$ dan geldt:

$$|f| = \sqrt{g^2 + h^2} = \sup\{g \cos \alpha + h \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(dit supremum is het supremum in $C_r(X)$; men gaat gemakkelijk na dat het be-

staat). Voor die absolute waarde gelden o.a. de volgende formules:

(i) $|f+g| \leq |f| + |g|$;

(ii) $|\alpha f| = |\alpha|\,|f|$;

(iii) $|f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

(iv) $\| |f| \| = \|f\|$;

(v) $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$;

(vi) $|f.g| = |f| \,.\, |g|$;

(vii) $\{f \in C(X) \mid \|f\| \leq 1\} = \{f \in C(X) \mid |f| \leq 1_X\}$;

(viii) $|f| = |\overline{f}|$.

1.2 Definitie

Een kompleks Banachrooster is een geordend drietal (E,E_r,E^+), waarbij:

(i) E is een komplekse Banachruimte;

(ii) E_r is een gesloten reële deelruimte van E en $E_0 = E_r \oplus i\,E_r$ (E_0 is de reële restriktie van E);

(iii) E^+ is een kegel in E_r, zó dat (E_r,E^+) een reëel Banachrooster is.

1.3 In het vervolg zullen we "kompleks Banachrooster" afkorten tot "Banachrooster". Wanneer we het reële geval beschouwen spreken we uitdrukkelijk van "reëel Banachrooster".

We laten het triviale Banachrooster $E = \{0\}$ steeds buiten beschouwing zonder dit steeds expliciet te vermelden.

Verder zullen we, zoals gebruikelijk, meestal spreken van het Banachrooster E i.p.v. (E,E_r,E^+).

1.4 Opmerking

Op grond van appendix Lemma 5.1 is een Banachrooster E topologisch isomorf met de kompleksifikatie van E_r. Als P_1: $E_0 \to E_r$ en P_2: $E_0 \to iE_r$ de projekties zijn, dan wordt het verband tussen de a priori aanwezige norm $\|.\|$ en de kompleksifikatie-norm $\|.\|_c$ gegeven door:

$$\tfrac{1}{2}\|z\| \leq \|z\|_c \leq (\|P_1\| + \|P_2\|)\,\|z\| \qquad (1.4.1)$$

1.5 Voorbeeld

$(C(X), C_r(X), C^+(X))$ is een Banachrooster; dit Banachrooster zal een belangrijke rol spelen in onze beschouwingen.

Zij nu (E,E_r,E^+) een Banachrooster. We willen de in E_r gedefinieerde absolute waarde uitbreiden tot E. Daartoe bewijzen we eerst twee stellingen over reële Banachroosters.

1.6 Stelling (Lotz [4], Satz 1.1)

Zij E een reëel Banachrooster; zij $0 < x \in E$.

Het ideaal $E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n[-x,x]$ is roosterisomorf met een ruimte $C_r(X)$; onder het isomorfisme is 1_X beeld van x.

Bewijs:

Het orde-interval $[-x,x]$ is konveks, gecirkeld, en radiaal in E_x. Zij p de ijkfunktie van $[-x,x]$. p is een halfnorm op E_x. Omdat E archimedisch geordend is, is p zelfs een norm op E_x. Verder geldt:

$$\{z \in E_x \mid p(z) < 1\} \subset [-x,x] \subset \{z \in E_x \mid p(z) \leq 1\}.$$

Zij nu $z \in E_x$ met $p(z) = 1$. Dan is er een rij $\{\lambda_n\}$ in $\mathbb{R}$ zó dat $\lambda_n \downarrow 1$ en $\frac{z}{\lambda_n} \in [-x,x]$. Daaruit volgt:

$z = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{\lambda_n} \in [-x,x]$, want $[-x,x]$ is gesloten in $(E,||.||)$.

Dus
$$[-x,x] = \{z \in E_x \mid p(z) \leq 1\}. \qquad (1)$$

Zij nu $u, v \in E_x$ met $|u| \leq |v|$. Als $\lambda > 0$ en $\frac{1}{\lambda} v \in [-x,x]$ dan $\frac{1}{\lambda} |u| \leq \frac{1}{\lambda} |v| \leq x$ dus $\frac{1}{\lambda} u \in [-x,x]$. Daaruit volgt:

$$p(u) = \inf\{\lambda > 0 \mid \tfrac{u}{\lambda} \in [-x,x]\} \leq \inf\{\lambda > 0 \mid \tfrac{v}{\lambda} \in [-x,x]\} = p(v).$$

Dus (E_x,p) is een genormeerde Riesz-ruimte met sterke orde-eenheid x.

We laten vervolgens zien dat (E_x,p) norm-volledig is.

Zij $\{y_n\}$ een fundamentaalrij in (E_x,p). Omdat voor iedere $y \in E_x$ geldt: $||y|| \leq p(y) \cdot ||x||$, is $\{y_n\}$ ook een fundamentaalrij in $(E,||.||)$. $(E,||.||)$ is een Banachruimte, dus $\{y_n\}$ heeft een limiet y_0. Kies $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N$: $p(y_n - y_m) < \varepsilon$. Uit (1) volgt dat voor $n,m \geq N$ geldt $y_n - y_m \in \varepsilon[-x,x]$. $[-x,x]$ is gesloten in $(E,||.||)$, en $y_N - y_m \to y_N - y_0$ (in norm), dus $y_N - y_0 \in \varepsilon[-x,x]$, zodat $y_0 \in E_x$. Voor $n \geq N$ geldt $y_n - y_0 \in \varepsilon[-x,x]$, dus $p(y_n - y_0) \leq \varepsilon$. Daaruit volgt $y_0 = p\text{-}\lim y_n$.

Volgens de representatiestelling van Kakutani is (E_x,p) isometrisch roosterisomorf met een funktieruimte $C_r(X)$; onder dit isomorfisme is 1_X het beeld van x. Dus $(E_x,||.||)$ is roosterisomorf met $C_r(X)$.

▨

1.7 Stelling (Lotz [4], Satz 1.2)

Zij E een reëel Banachrooster.Voor ieder tweetal $x, y \in E$ bestaat $\sup\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Bewijs:

Zij $E \neq \{0\}$ en zij $x \neq 0$ of $y \neq 0$ (anders is de bewering triviaal). Zij $u = |x| + |y|$. Volgens stelling 1.6 is $E_u = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n[-u,u]$ roosterisomorf met een ruimte $C_r(X)$. Derhalve bestaat $\sup_{E_u} \{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Omdat E_u een ideaal is, is dit supremum tevens het supremum van $\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ in E.

▨

1.8 Definitie. Uitbreiding van de absolute waarde

Zij (E,E_r,E^+) een kompleks Banachrooster; zij $z = x + iy \in E$. Definieer de komplekse absolute waarde $|z|_c$ van z door

$$|z|_c := \sup_{E_r} \{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1.9 Stelling (Lotz [4], Satz 1.3)

(0) $\forall z \in E : |z|_c \in E^+$

Voor $z = x + iy$ geldt: $|x| \vee |y| \leq |z|_c \leq |x| + |y|$; (1.9.0)

(i) $\forall z_1, z_2 \in E : |z_1+z_2|_c \leq |z_1|_c + |z_2|_c$; (1.9.1)

(ii) $\forall z \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda z|_c = |\lambda|\ |z|_c$; (1.9.2)

(iii) $\forall z \in E : |z|_c = 0 \Leftrightarrow z = 0$; (1.9.3)

(iv) $\forall x \in E_r : |x|_c = |x|$; (1.9.4)

(v) $\forall x, y \in E_r : |x|_c \leq |x+iy|_c$; (1.9.5)

(vi) $\forall z \in E : ||z||_c \leq || \, |z|_c \, || \leq (||P_1||+||P_2||) \, ||z||$; (1.9.6)

(vii) De afbeelding $|.|_c : E \to E^+$ is uniform kontinu (met betrekking tot $||.||$).

Bewijs:

(0) Zij $z = x + iy \in E$.
$|x| \leq \sup\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = |z|_c$;
$|y| \leq \sup\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = |z|_c$;
derhalve: $0 \leq |x| \vee |y| \leq |z|_c$.
Voor alle β geldt:
$$x \cos \beta + y \sin \beta \leq | \, x \cos \beta + y \sin \beta \, | \leq |x| + |y|;$$
derhalve $|z|_c = \sup\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq |x| + |y|$.

(i) $|z_1+z_2|_c = \sup\{(x_1+x_2) \cos \alpha + (y_1+y_2) \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq$
$\leq \sup\{x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} + \sup\{x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$
$= |z_1|_c + |z_2|_c$.

(ii) Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ en zij $\phi = \arg \lambda$, dus $\lambda = |\lambda| e^{i\phi}$. Dan geldt:
$|\lambda z|_c = \sup\{|\lambda|(x \cos \phi - y \sin \phi)\cos \alpha + |\lambda|(x \sin \phi + y \sin \phi)\sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
$= |\lambda| \sup\{x \cos(\alpha-\phi) + y \sin(\alpha-\phi) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$
$= |\lambda| \sup\{x \cos \beta + y \sin \beta \mid \beta \in \mathbb{R}\} = |\lambda| \, . \, |z|_c$.

(iii) volgt uit 1.9.0.

(iv) Uit 1.9.0 volgt $|x| \leq |x|_c$. Voor alle β geldt: $x \cos \beta \leq$
$\leq |x \cos \beta| \leq |x|$, dus $|x|_c = \sup\{x \cos \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq |x|$.

(v) volgt uit 1.9.1 en 1.9.4.

(vi) Zij $z = x + iy$. Voor alle β geldt $x \cos \beta + y \sin \beta \leq |z|_c$ en
$-(x \cos \beta + y \sin \beta) = x \cos(\beta+\pi) + y \sin(\beta+\pi) \leq |z|_c$;
Dus $|x \cos \beta + y \sin \beta| \leq |z|_c$. Daaruit volgt:
$$||x \cos \beta + y \sin \beta|| \leq || \, |z|_c \, ||, \text{ dus}$$
$||z||_c = \sup\{||x \cos \beta + y \sin \beta|| \mid \beta \in \mathbb{R}\} \leq || \, |z|_c \, ||$.
Anderzijds geldt $|z|_c \leq |x| + |y|$, dus $|| \, |z|_c \, || \leq$
$|| \, |x|+|y| \, || \leq ||x||+||y|| = ||P_1 z||+||P_2 z|| \leq (||P_1||+||P_2||)||z||$.

(vii) volgt uit 1.9.6.

∎

1.10 Opmerking

Uit eigenschap 1.9.4 volgt dat $|.|_c : E \to E^+$ een uitbreiding is van $|.| : E_r \to E^+$. We laten voortaan de index $_c$ weg, en spreken van "de absolute waarde".

1.11 Opmerking

We kunnen in E nog een derde norm definiëren door

$$|||z||| := || \, |z| \, ||.$$

Uit 1.4.1 en 1.9.6 volgt dat de drie normen equivalent zijn, immers:

$$\tfrac{1}{2}||z|| \leq ||z||_c \leq |||z||| \leq (||P_1||+||P_2||) \, ||z||. \quad (1.11.1)$$

Op E_r vallen de drie normen samen: als $x \in E_r$ dan

$$||x|| = ||x||_c = |||x|||.$$

In de ruimte C(X) vallen de drie normen samen.

De $|||.|||$-norm heeft nog de volgende extra eigenschappen:

(i) $$|||z||| = ||| \, |z| \, |||; \quad (1.11.2)$$

(ii) $$|z_1| \leq |z_2| \Rightarrow |||z_1||| \leq |||z_2|||. \quad (1.11.3)$$

1.12 Definitie

Zij (E,E_r,E^+) een Banachrooster en zij F een lineaire deelruimte van E.

F heet een Riesz-deelruimte van E als $F = F_r + iF_r$, waarbij $F_r = F \cap E_r$ een Riesz-deelruimte in het reële Banachrooster E_r is.

F heet een ideaal in E als $F = F_r + iF_r$, waarbij $F_r = F \cap E_r$ een ideaal is in het reële Banachrooster E.

1.13 Lemma

Zij F een lineaire deelruimte in een Banachrooster E.

F is een ideaal als en slechts als

$$\forall z \in F \quad \forall y \in E : |y| \leq |z| \Rightarrow y \in F.$$

▨

1.14 Definitie

(E,E_r,E^+) en (F,F_r,F^+) zijn twee Banachroosters.

Zij $T : E \to F$ een lineaire afbeelding.

T heet positief als T de kompleksifikatie is van een (reële) positieve operator $T_r : E_r \to F_r$.

T heet een roosteroperator als T de kompleksifikatie is van een (reële) roosteroperator $T_r : E_r \to F_r$.

1.15 Lemma (Lotz [4], Satz 1.6)

Zij $T : E \to F$ een lineaire operator. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) T is positief;

(ii) $T(E^+) \subset F^+$;

(iii) $\forall z \in E : |Tz| \leq T|z|$.

Bewijs:

(i) $\Rightarrow$ (iii): Zij $z = x + iy \in E$. Voor alle β geldt: $x \cos \beta + y \sin \beta \leq |z|$.
Dus $Tx.\cos \beta + Ty.\sin \beta = T_r(x \cos \beta + y \sin \beta) \leq T_r|z| = T|z|$.
Daaruit volgt: $|Tz| = \sup\{Tx \cos \alpha + Ty \sin \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq T|z|$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Zij $x \in E^+$. Dus: $Tx = T|x| \geq |Tx| \geq 0$, dus $Tx \in F^+$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $T(E^+) \subset F^+$, dus $T(E_r) \subset F_r$. Daaruit volgt dat T de kompleksifikatie is van de operator $T_r : E_r \to F_r$. Omdat $T_r(E^+) = T(E^+) \subset F^+$ is T positief.

▨

In stelling 2.16 geven we een soortgelijke karakterisering van een roosteroperator.

1.16 Lemma

Een positieve operator is begrensd.

Bewijs: volgt uit stelling II.3.1.

▨

1.17 Stelling (Lotz [4], Satz 1.5)
Zij E een Banachrooster en zij $0 < x \in E$. Dan is het ideaal $E_x := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n.\{z \in E \mid |z| \leq x\}$ roosterisomorf met een ruimte C(X); het beeld van x onder dit isomorfisme is 1_X.
Bewijs: volgt direkt uit stelling 1.6.
∎

1.18 Lemma (Lotz [4], Satz 1.9)
Zij E een Banachrooster en zij $x, y \in E$. Als $|z| \leq |x| + |y|$ dan is er een dekompositie $z = z_1 + z_2$ met $|z_1| \leq |x|$ en $|z_2| \leq |y|$.
Bewijs:
Stel $x \neq 0$ of $y \neq 0$ (anders is de bewering triviaal). We identificeren $E_{|x|+|y|}$ volgens stelling 1.17 met C(X), dus $|x| + |y|$ met 1_X; voorts x met f, y met g en z met h. Dan geldt $|h| \leq |f| + |g| = 1_X$. Zij $h_1 = h.|f|$ en $h_2 = h.|g|$. Dan $|h_1| \leq |f|$, $|h_2| \leq |g|$ en $h = h_1 + h_2$. Hieruit volgt de bewering.
∎

1.19 Stelling (Lotz [4], Satz 1.12)
Zij E een Banachrooster en stel F en G zijn twee lineaire deelruimten.
Dan geldt:

(i) als F en G idealen zijn, dan ook F + G;

(ii) als F en G gesloten idealen zijn, dan ook F + G.

Bewijs:

(i) volgt direkt uit lemma 1.13 en lemma 1.18.

(ii) We moeten bewijzen dat F + G gesloten is. Zij $z = \lim z_n$ met $\{z_n\} \subset F + G$. Uit de kontinuïteit van $|.|$ volgt: $|z_n| \to |z|$. Verder konvergeren ook $\{|z_n| \wedge |z| \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\{\sup\{|z| \wedge |z_k| \mid k \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ naar $|z|$. We mogen dus aannemen dat $\{x_n\}$ een monotoon niet-dalende rij van positieve elementen uit F + G is, die konvergeert naar $|z|$. Op grond van een dekompositieeigenschap van reële Banachroosters ([6], theorem V.1.1) is er een dekompositie $x_n = a_n + b_n$ met $a_n \in F$ en $b_n \in G$ waarbij de rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ monotoon niet-dalende rijen van positieve elementen zijn. Daar $0 \leq a_m - a_n \leq x_m - x_n \leq |z| - x_n$ voor $m \geq n$, is $\{a_n\}$ een fundamentaalrij,

evenals $\{b_n\}$. Daaruit volgt: $|z| = \lim a_n + \lim b_n \in F + G$, want F en G zijn gesloten.

∎

1.20 Lemma

Zij E een reële genormeerde Riesz-ruimte en zij M een gesloten ideaal in E. Dan is E/M (met de quotiëntnorm en de quotiënt-ordening) een genormeerde Riesz-ruimte.

Bewijs:

E/M is een genormeerde ruimte en een Riesz-ruimte; de kanonieke projektie P: $E \to E/M$ is een begrensde rooster-operator ([3], stelling 5.9). We bewijzen nu:

(i) $\forall x \in E : ||\hat{x}|| = || \, |\hat{x}| \, ||$ en (ii) $0 \leq \hat{x} \leq \hat{y} \Longrightarrow ||\hat{x}|| \leq ||\hat{y}||$.

Hieruit volgt direkt: $|\hat{x}| \leq |\hat{y}| \Longrightarrow ||\hat{x}|| \leq ||\hat{y}||$, d.w.z. E/M is een reële genormeerde Riesz-ruimte.

(i) Zij $\hat{x} \in E/M$.

Kies $\varepsilon > 0$; $\exists x_1 \in \hat{x} : ||x_1|| < ||\hat{x}|| + \varepsilon$. Dan geldt:

$$||\hat{x}|| + \varepsilon > ||x_1|| = || \, |x_1| \, || \geq || \, |\hat{x}| \, ||, \text{ dus } || \, |\hat{x}| \, || \leq ||\hat{x}|| \tag{1}$$

Zij $x \in \hat{x}$ willekeurig en zij $\varepsilon > 0$. $\exists z_1 \in |\hat{x}| : ||z_1|| < || \, |\hat{x}| \, || + \varepsilon$. Uit $z_1 \in |\hat{x}|$ volgt $|z_1| \in |\hat{x}|$ want P is een roosteroperator, dus zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen $z_1 \geq 0$. Zij $z_2 = z_1 \wedge |x|$; dan $z_2 \in |\hat{x}|$ want P is een roosteroperator, $0 \leq z_2 \leq z_1$, dus $||z_2|| \leq ||z_1|| < || \, |\hat{x}| \, || + \varepsilon$, en $0 \leq z_2 \leq |x|$. Zij $m = |x| - z_2$. Dan geldt: $0 \leq m \leq |x| = x^+ + x^-$ en $m \in M$. Uit de dekompositieeigenschap van Riesz-ruimten ([3], stelling 6.6) volgt:

$\exists m_1 \in E \ \exists m_2 \in E : 0 \leq m_1 \leq x^+$, $0 \leq m_2 \leq x^-$ en $m_1 + m_2 = m$.

Uit $0 \leq m_1 \leq m$ en $0 \leq m_2 \leq m$ volgt $m_1 \in M$ en $m_2 \in M$. Zij $y^+ = x^+ - m_1$ en $y^- = x^- - m_2$. Dan: $y^- \geq 0$, $y^+ \geq 0$ en $0 \leq y^+ \wedge y^- = (x^+ - m_1) \wedge (x^- - m_2) \leq$ $\leq x^+ \wedge x^- = 0$, zodat $y^+ \wedge y^- = 0$. Zij $y = y^+ - y^-$; dan geldt:

$y = y^+ - y^- = (x^+ - m_1) - (x^- - m_2) = x + (m_2 - m_1)$, dus $y \in \hat{x}$.

$|y| = y^+ + y^- = (x^+ - m_1) + (x^- - m_2) = |x| - m = z_2$. Daaruit volgt:

$$|| \, |\hat{x}| \, || + \varepsilon \geq ||z_1|| \geq ||z_2|| = || \, |y| \, || = ||y|| \geq ||\hat{x}||. \tag{2}$$

Uit (1) en (2) volgt: $||\hat{x}|| = || \, |\hat{x}| \, ||$.

(ii) Zij $0 \leq \hat{x} \leq \hat{y}$ en zij $\varepsilon > 0$. $\exists y_1 \in \hat{y} : ||y_1|| < ||\hat{y}|| + \varepsilon$. We kunnen weer zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $y_1 \geq 0$. Kies nu $0 \leq x \in \hat{x}$ en $0 \leq z \in \hat{y} - \hat{x}$ (dat kan omdat $\hat{x} \geq \hat{0}$ en $\hat{y} - \hat{x} \geq \hat{0}$). Zij $y_2 = x + z$ en $y_3 = y_2 \wedge y_1$. Dan $0 \leq y_2 \in \hat{y}$ en $0 \leq y_3 \in \hat{y}$, terwijl $0 \leq y_3 \leq y_1$ zodat $||y_3|| \leq ||y_1|| < ||\hat{y}|| + \varepsilon$.

Zij $m = y_2 - y_3$; dan $0 \leq m \leq y_2 = x + z$.

We passen nogmaals de dekompositieeigenschap toe

$\exists m_1 \in E \;\; \exists m_2 \in E : 0 \leq m_1 \leq x$, $0 \leq m_2 \leq z$ en $m_1 + m_2 = m$.

Uit $0 \leq m_1 \leq m$ en $0 \leq m_2 \leq m$ volgt $m_1 \in M$ en $m_2 \in M$. Zij nu $x_1 = x - m_1$; dan $x_1 \in \hat{x}$ en $x + m = x + m_1 + m_2 \leq x + z + m_1 = y_2 + m_1$, dus $0 \leq x_1 = x - m_1 \leq y_2 - m = y_3$. Daaruit volgt:

$||\hat{y}|| + \varepsilon > ||y_1|| \geq ||y_3|| \geq ||x_1|| \geq ||\hat{x}||$.

Dus $0 \leq ||\hat{x}|| \leq ||\hat{y}||$.

∎

1.21 Stelling (Lotz [4], Satz 1.10)

Zij (E, E_r, E^+) een Banachrooster, zij F een gesloten ideaal in E en zij $F_r = F \cap E_r$. Dan is $(E/F, E_r/F_r, (E_r/F_r)^+)$ een Banachrooster, en de kanonieke projektie $\tau : E \to E/F$ is een roosteroperator.

Bewijs:

E is topologisch isomorf met $(E_r)^c$, F is topologisch isomorf met $(F_r)^c$. Verder zijn E/F en $(E_r/F_r)^c$ topologisch isomorf. E_r/F_r is met de kanonieke ordening ($[x] \geq 0 :\Longleftrightarrow x \in E^+ + F_r$) een reëel Banachrooster, en de kanonieke afbeelding $\tau_r : E_r \to E_r/F_r$ is een roosteroperator. Daaruit volgt dat E/F een Banachrooster is, en dat τ een roosteroperator is, want τ is de kompleksifikatie van τ_r

∎

1.22 Stelling (Lotz [4], Satz 2.5)

Zij E een Banachrooster en zij $\overline{E}$ de uitbreiding van E die gedefinieerd is in §4 van de appendix.

$\overline{E}$ is op natuurlijke wijze een Banachrooster, en de kanonieke inbedding $\eta_E : E \to \overline{E}$ is een roosteroperator.

Bewijs:

Zij $m(E)^+ = \{(x_n)_n \in m(E) \mid \forall n \in \mathbb{N}: x_n \geq 0\}$ en $m(E)_r = \{(x_n)_n \in m(E) \mid \forall n \in \mathbb{N}: x_n \in E_r\}$. Dan is $(m(E), m(E)_r, m(E)^+)$ een Banachrooster; voor de absolute waarde geldt: $|(x_n)_n| = (|x_n|)_n$. De inbedding $x \mapsto (x_n)_n$ met $x_n = x$ voor alle n is een roosteroperator. $c_0(E)$ is een een gesloten ideaal in m(E), dus op grond van stelling 1.21 is $\overline{E}$ een Banachrooster, en is de kanonieke inbedding η_E een roosteroperator.

▨

1.23 Stelling

$\overline{C(X)}$ is isometrisch roosterisomorf met C(W), waarbij $W = \beta(X \times \mathbb{N}) \setminus (X \times \mathbb{N})$.

Schets het bewijs: (zie [9]).

Zij E = C(X). De ruimte m(E) is isometrisch roosterisomorf met het Banachrooster van alle begrensde kontinue funkties op de lokaalkompakte ruimte $X \times \mathbb{N}$, dus isometrisch roosterisomorf met $C(\beta(X \times \mathbb{N}))$, waarbij $\beta(X \times \mathbb{N})$ de Čech-Stone kompaktifikatie van $X \times \mathbb{N}$ is. De verzameling $c_0(E)$ korrespondeert met het ideaal in $C(\beta(X \times \mathbb{N}))$ van de funkties die nul zijn op $W = \beta(X \times \mathbb{N}) \setminus (X \times \mathbb{N})$. Daaruit volgt dat $\overline{E}$ isometrisch roosterisomorf is met C(W).

▨

1.24 Stelling (Lotz [4], Satz 2.6)

Zij E een Banachrooster en zij $T \in L(E)$. Zij $\overline{E}$ de uitbreiding van E en $\overline{T}$ de uitbreiding van T tot $\overline{E}$ (zie §4 van de appendix). Dan geldt:

(i) als T positief is, dan is $\overline{T}$ positief;

(ii) als T een roosteroperator is, dan is $\overline{T}$ een roosteroperator.

Bewijs:

Als T positief, resp. een roosteroperator is, dan ook de afbeelding $(x_n)_n \mapsto (Tx_n)_n$ in m(E). Omdat $c_0(E)$ een gesloten ideaal is, en de kanonieke afbeelding van m(E) op $\overline{E}$ een roosteroperator, gelden deze eigenschappen ook voor $\overline{T}$ in $\overline{E}$.

▨

1.25 Stelling (Lotz [4], Satz 2.7)
Zij T een positieve operator in een Banachrooster E. Dan $r(T) \in \sigma(T)$.
Bewijs: Zie stelling II.3.2.
We geven nog een tweede bewijs, dat berust op de eigenschappen van de inbedding van E in $\overline{E}$.

$$\emptyset \neq \partial\sigma(T) \subset A\sigma(T) \qquad \text{(appendix, stelling 3.3)}$$

Volgens appendix, stelling 4.3 geldt $A\sigma(T) = P\sigma(\overline{T})$. Er is dus een eigenwaarde α van $\overline{T}$ met $|\alpha| = r(\overline{T}) = r(T)$. Volgens de vorige stelling is $\overline{T}$ een positieve operator.
Uit $\overline{T}\theta = \alpha\theta$ volgt (lemma 1.15):

$$\overline{T}|\theta| \geq |\overline{T}\theta| = |\alpha\theta| = |\alpha|\ |\theta| = r(T)\ |\theta|.$$

Voor $\lambda > r(T)$ is $R(\lambda;\overline{T})$ positief dus

$$R(\lambda;\overline{T})\ |\theta| \geq \frac{|\theta|}{\lambda - r(T)}\ .$$

Daaruit volgt:

$$||R(\lambda;\overline{T})\ |\theta|\ || \geq \frac{||\ |\theta|\ ||}{\lambda - r(T)}\ .$$

Dus $$\lim_{\lambda \downarrow r(T)} ||R(\lambda;\overline{T})\ |\theta|\ || = \infty.$$

Dus $$r(T) \in \sigma(\overline{T}) = \sigma(T).$$

▨

§2. Positieve operatoren en roosteroperatoren in C(X)

2.1 Definitie
Een lineaire deelruimte I van C(X) heet een algebraisch ideaal als
$\forall f \in I \ \forall g \in C(X) : f.g \in I$.

2.2 Stelling
Zij I een gesloten algebraisch ideaal in C(X). Dan is er een gesloten verzameling $S_I \subset X$ (de drager van I genaamd) zó dat

$$I = \{f \in C(X) \mid f(S_I) = \{0\}\}.$$

Als $I = C(X)$ dan $S_I = \emptyset$ en omgekeerd.
Bewijs: zie [3], stelling 6.13.
▨

2.3 Stelling
Zij I een gesloten lineaire deelruimte van C(X).
I is een algebraisch ideaal als en slechts als I een (orde-)ideaal is.
Bewijs: zie [3], stelling 6.14.
▨

2.4 Stelling
Zij I een gesloten ideaal in C(X) met drager S.
Dan is de afbeelding ω: $C(X)/I \to C(S)$, gedefinieerd door
$\omega(\hat{f})(x) = f(x)$ $(x \in S, f \in C(X))$ een isometrisch rooster- en algebra-isomorfisme.
Bewijs:

Men gaat gemakkelijk na dat ω goed gedefinieerd is. ω is lineair, injektief en surjektief (lemma van Tietze). ω is een isometrie, immers voor $f \in C(X)$ geldt:

$$||\omega(\hat{f})|| = \sup\{|\omega(\hat{f})(x)| \mid x \in S\} = \sup\{|f(x)| \mid x \in S\}$$

$$= \inf\{\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} \mid g \in I\} =$$

$$= \inf\{||f-g|| \mid g \in I\} = ||\hat{f}||.$$

Dat ω een roosteroperator en een algebra-homomorfisme is volgt direkt uit het feit dat de kanonieke projektie $P : C(X) \to C(X)/I$ een roosteroperator en een algebra-homomorfisme is.

∎

2.5 Stelling

Zij μ een lineaire funktionaal op $C(X)$.

De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) μ is positief;

(ii) μ is kontinu en $||\mu|| = \mu(1_X)$.

Bewijs:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Zij $0 \neq f \in C(X)$; dan $|f| \leq ||f||\ 1_X$, dus $|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq ||f||\ \mu(1_X)$. Daaruit volgt dat μ kontinu is, en dat $||\mu|| \leq \mu(1_X)$. Uit $|\mu(1_X)| = \mu(1_X) = \mu(1_X).||1_X||$ volgt $||\mu|| = \mu(1_X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Zij $0 \leq f \in C(X)$; dan $0 \leq f \leq ||f||.1_X$. Zij $g = ||f||.1_X - f$; dan $0 \leq g \leq ||f||.1_X$ en $||g|| \leq ||f||$. Dus $||f||.\mu(1_X) - \mu(f) = \mu(g) \leq ||\mu||.||g|| \leq \mu(1_X).||f||$, dus $\mu(f) \geq 0$. Derhalve is μ positief.

∎

2.6 Stelling

Zij $K(X) := \{\mu \in C(X)' \mid ||\mu|| = \mu(1_X) = 1\}$.

$K(X)$ is een niet-lege konvekse w^*kompakte deelverzameling van $C(X)'$.

Bewijs: zie [3], stelling 10.4.

∎

2.7 Stelling

Zij μ een lineaire funktionaal op $C(X)$.

De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) μ is een roosteroperator (d.w.z.: μ is de kompleksifikatie van een reële roosteroperator $\mu_r \in C_r(X)^*$) en $\mu(1_X) = 1$;

(ii) $\mu \in \text{ex } K(X)$;

(iii) $\forall f \in C(X)$: $|\mu(f)| = \mu(|f|)$ en $\mu(1_X) = 1$;

(iv) $\exists!\ x \in X\ \ \forall f \in C(X)$: $\mu(f) = f(x)$;

(v) μ is een niet-triviale multiplikatieve lineaire funktionaal;

(vi) μ is een niet-triviale symmetrische multiplikatieve lineaire funktionaal.

Bewijs:

(i) $\Rightarrow$ (vi): Zij μ de kompleksifikatie van μ_r. μ_r is een reële roosteroperator, dus volgens [3], stelling 11.4 een niet-triviale multiplikatieve lineaire funktionaal. Zij $f_1 = g_1 + ih_1 \in C(X)$ en $f_2 = g_2 + ih_2 \in C(X)$; dan geldt

$$\mu(f_1.f_2) = \mu((g_1g_2-h_1h_2) + i(g_1h_2+g_2h_1)) =$$

$$= \mu_r(g_1g_2-h_1h_2) + i\mu_r(g_1h_2+g_2h_1) =$$

$$= (\mu_r(g_1)+i\,\mu_r(h_1)).(\mu_r(g_2)+i\,\mu_r(h_2)) = \mu(f_1).\mu(f_2)$$

en $\quad \mu(\overline{f}_1) = \mu(g_1-ih_1) = \mu_r(g_1) - i\,\mu_r(h_1) = \overline{\mu(f_1)}$.

(vi) $\Rightarrow$ (v): triviaal.

(v) $\Rightarrow$ (iv): Zij μ een niet-triviale multiplikatieve lineaire funktionaal. Dan is μ kontinu en $||\mu|| = \mu(1_X) = 1$.
$N(\mu) = \{f \in C(X) \mid \mu(f) = 0\}$ is een algebraisch ideaal. Zij S de drager van $N(\mu)$. $S \neq \emptyset$ want $1_X \notin N(\mu)$.
We tonen aan dat S uit één punt bestaat. Stel $x, y \in S$, $x \neq y$.
$\exists f, g \in C(X)$: $f(x) = g(y) = 1$ en $f(y) = g(x) = 0$. Dan $f, g \notin N(\mu)$, dus $\mu(f) \neq 0$ en $\mu(g) \neq 0$. Zij nu $h = \mu(g).f - \mu(f).g$. Het is duidelijk dat $\mu(h) = 0$. Echter: $h(x) = \mu(g)f(x) - \mu(f)g(x) = \mu(g) \neq 0$.
Dit is in tegenspraak met $x \in S$. Konklusie: $S = \{x_0\}$. Dan geldt: $f - f(x_0).1_X \in N(\mu)$ voor alle $f \in C(X)$, dus

$$\mu(f) = \mu(f(x_0).1_X) = f(x_0).$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii): triviaal.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Uit (iii) volgt $\mu \in K(X)$.
Stel nu $\mu = \lambda\sigma + (1-\lambda)\tau$ met $\sigma, \tau \in K(X)$ en $0 < \lambda < 1$.
Dan geldt voor alle $f \in C(X)$:

$$|\lambda\sigma(f)| \leq \lambda\sigma(|f|) \leq \mu(|f|) = |\mu(f)|.$$

Dus $N(\mu) \subset N(\sigma)$, waaruit volgt dat $\sigma = \alpha\mu$. Omdat $\sigma(1_X) = 1 = \mu(1_X)$ is $\alpha = 1$, dus $\sigma = \tau = \mu$. Derhalve: $\mu \in \text{ex } K(X)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Zij $\mu \in \text{ex } K(X)$. μ is positief, dus μ is de kompleksifikatie van een positieve lineaire funktionaal μ_r. Zij nu $f, g \in C_r(X)$ en $f \wedge g = 0$. Volgens [3] stelling 9.5 geldt:

$$\exists \phi_f \in C_r(X)' : 0 \leq \phi_f \leq \mu_r,\ \phi_f(f) = \mu_r(f) \text{ en } \phi_f(g) = 0.$$

Voor deze ϕ_f moet gelden $\phi_f = \phi_f(1_X).\ \mu_r$, immers als $\phi_f(1_X) = 0$ of $\phi_f(1_X) = 1$ dan is deze bewering triviaal; stel dus $0 \leq \phi_f(1_X) < \mu_r(1_X) = 1$.

Definieer nu $\sigma = \dfrac{\phi_f}{\phi_f(1_X)}$ en $\tau = \dfrac{\mu_r - \phi_f}{1-\phi_f(1_X)}$.

Het is duidelijk dat $\sigma^c \in K(X)$ en $\tau^c \in K(X)$; verder geldt

$$\phi_f(1_X).\sigma^c + (1-\phi_f(1_X)).\tau^c = \mu \in \text{ex } K(X),$$

dus $\sigma^c = \tau^c = \mu$ en daarmee $\sigma = \tau = \mu_r$.
Daaruit volgt $\phi_f(f) = \phi_f(1_X).\mu_r(f) = \mu_r(f)$. Dus $\phi_f(1_X) = 0$ maar dan $\mu_r(f) = 0$, dus $\mu_r(f) \wedge \mu_r(g) = 0$ of $\phi_f(1_X) = 1$ maar dan $\mu_r = \phi_f$ dus $\mu_r(g) = \phi_f(g) = 0$ zodat $\mu_r(f) \wedge \mu_r(g) = 0$. Hieruit volgt dat μ_r een roosteroperator is. ([3], stelling 6.17). Maar dan is ook μ een roosteroperator. $\mu(1_X) = 1$ want $\mu \in K(X)$.

▨

2.8 Definitie

De lineaire funktionaal μ, gedefinieerd door $\mu(f) = f(x)$ (voor zekere $x \in X$), heet de Dirac-maat ε_x.
Zij $D(X) = \{\varepsilon_x \mid x \in X\}$ de verzameling der Dirac-maten. Stelling 2.7 zegt dat D(X) precies de verzameling is van de roosteroperatoren $\mu: C(X) \to \mathbf{C}$ met $\mu(1_X) = 1$, dat D(X) ook precies de verzameling is van alle (symmetrische) multiplikatieve lineaire funktionalen op C(X), en dat $D(X) = \text{ex } K(X)$.
D(X) voorzien van de relatieve $\sigma(C(X)', C(X))$-topologie noemen we de struktuurruimte van C(X).

2.9 Stelling

De afbeelding H: $X \to D(X)$, gedefinieerd door $H(x) = \varepsilon_x$ is een homeomorfisme.

Bewijs: zie [3], stelling 11.3.

2.10 Stelling

Zij T: $C(X) \to C(Y)$ een positieve operator.

Dan is T kontinu, en $||T|| = ||T\ 1_X||$.

Bewijs:

Volgens lemma 1.16 is T kontinu.

Zij $f \in C(X)$; dan $|f| \leq ||f||.1_X$, dus

$$||Tf|| = || \ |Tf| \ || \leq ||T|f| \ || \leq ||f||.||T\ 1_X||.$$

$||T\ 1_X|| \leq ||T||.||1_X|| = ||T||$, dus $||T|| = ||T\ 1_X||$.

∎

2.11 Stelling

Zij T: $C(X) \to C(Y)$ een begrensde operator; dan geldt: T is positief als en slechts als T' positief is.

Bewijs:

Als T positief is is T' zeker ook positief.

Stel dat T niet positief is. $\exists f_0 \in C(X)$: $f_0 \in C^+(X)$ en $Tf_0 \notin C^+(Y)$.

$Tf_0 \notin C^+(Y)$ impliceert: $\exists y \in Y$: $Tf_0(y) \notin \mathbb{R}^+$.

Maar dan $(T'\varepsilon_y)(f_0) = \varepsilon_y(Tf_0) = Tf_0(y) \notin \mathbb{R}^+$, dus $T'\varepsilon_y$ is niet positief, en daarmee is T' niet positief.

∎

2.12 Stelling

Zij T: $C(X) \to C(Y)$ een lineaire operator.

De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) T is positief, en $T1_X = 1_Y$;

(ii) $||T|| = 1$, $T1_X = 1_Y$ en $\forall f \in C(X)$: $T\overline{f} = \overline{Tf}$;

(iii) T is begrensd en $T'(K(Y)) \subset K(X)$;

(iv) T is positief en $\forall 0 \leq \mu \in C(Y)'$: $||T'\mu|| = ||\mu||$.

Bewijs:

(i) $\Longrightarrow$(iv): Zij $0 \leq \mu \in C(Y)'$. T' is positief, dus $T'\mu \geq 0$.
Uit stelling 2.5 volgt dan:

$$||T'\mu|| = T'\mu(1_X) = \mu(T1_X) = \mu(1_Y) = ||\mu||.$$

(iv) $\Longrightarrow$(iii): Omdat T positief is, is T begrensd en T' positief. Zij $\mu \in K(Y)$. Dan $0 \leq \mu$ en $||\mu|| = \mu(1_Y) = 1$. T' is positief dus $T'\mu \geq 0$.
Daaruit volgt:

$$T'\mu(1_X) = ||T'\mu|| = ||\mu|| = 1.$$

Dus $T'\mu \in K(X)$.

(iii) $\Longrightarrow$(ii): $(T1_X)(y) = \varepsilon_y(T1_X) = T'\varepsilon_y(1_X) = 1$ want $T'\varepsilon_y \in K(X)$; derhalve $T1_X = 1_Y$.
Zij $f \in C(X)$; $||Tf|| = \sup\{|Tf(y)| \mid y \in Y\} =$
$= \sup\{|T'\varepsilon_y(f)| \mid y \in Y\} \leq ||f||$, want $|T'\varepsilon_y(f)| \leq$
$\leq ||T'\varepsilon_y|| \,.\, ||f|| = ||f||$ omdat $||T'\varepsilon_y|| = 1$.
Uit $T1_X = 1_Y$ volgt $||T|| = 1$.
Zij $f = g + ih \in C(X)$. $T\overline{f}(y) = T'\varepsilon_y(\overline{f}) = T'\varepsilon_y(g) - iT'\varepsilon_y(h) =$
$= \overline{T'\varepsilon_y(g) + iT'\varepsilon_y(h)} = \overline{Tf(y)} = \overline{Tf}(y)$, dus $T\overline{f} = \overline{Tf}$
(immers $T'\varepsilon_y \in K(X)$, dus $(T'\varepsilon_y)\,(C_r(X)) \subset \mathbb{R}$).

(ii) $\Longrightarrow$(i): Uit $T\overline{f} = \overline{Tf}$ volgt $T(C_r(X)) \subset C_r(Y)$.
Zij nu $0 \leq f \in C(X)$, $f \neq 0$ en kies ε zó dat $0 < \varepsilon < ||f||^{-1}$.
Dan geldt voor alle $x \in X$: $0 \leq \varepsilon f(x) \leq 1$, dus $0 \leq 1 - \varepsilon f(x) \leq 1$.
Daaruit volgt $||1_X - \varepsilon f|| \leq 1$. Voor alle $y \in Y$ geldt:

$$|1 - \varepsilon(Tf)(y)| = |T(1_X - \varepsilon f)(y)| \leq ||T||.||1_X - \varepsilon f|| \leq 1.$$

Omdat $Tf \in C_r(Y)$ geldt: $0 \leq \varepsilon(Tf)(y)$, dus $Tf \in C^+(Y)$.

∎

2.13 Stelling

Zij $T: C(X) \to C(Y)$ een lineaire operator.

De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) T is een roosteroperator, (d.w.z.: T is de kompleksifikatie van een reële roosteroperator $T_r: C_r(X) \to C_r(Y)$), en $T1_X = 1_Y$;

(ii) $\forall f \in C(X)$: $|Tf| = T|f|$ en $T1_X = 1_Y$;

(iii) $\exists ! \phi \in C(Y,X)$ $\forall f \in C(X)$: $Tf = f \circ \phi$;

(iv) T is begrensd en $T'(D(Y)) \subset D(X)$;

(v) T is een algebra-homomorfisme en $T1_X = 1_Y$;

(vi) T is een symmetrisch algebra-homomorfisme en $T1_X = 1_Y$.

Bewijs:

(i) $\Rightarrow$ (vi): Zij T de kompleksifikatie van een reële roosteroperator T_r. Uit $T1_X = 1_Y$ volgt $T_r 1_X = 1_Y$. Volgens [3], stelling 11.4 is T_r een algebra-homomorfisme. Hieruit volgt gemakkelijk dat T een symmetrisch algebra-homomorfisme is.

(vi) $\Rightarrow$ (v): triviaal.

(v) $\Rightarrow$ (iv): C(Y) is halfenkelvoudig, dus T is begrensd; (zie [5], theorem 2.5.17, p. 75). $T': C(Y)' \to C(X)'$ is zwak*kontinu; (zie [6], 7.4, p. 158).
$T'\varepsilon_y(f) = \varepsilon_y(Tf) = Tf(y)$; daaruit volgt direkt $T'\varepsilon_y(1_X) = 1$ en $T'\varepsilon_y(f.g) = T'\varepsilon_y(f).T'\varepsilon_y(g)$.
Dus $T'\varepsilon_y$ is een niet-triviale multiplikatieve lineaire funktionaal op C(X), zodat volgens stelling 2.7: $T'\varepsilon_y \in D(X)$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Definieer $\phi: Y \to X$ als kompositie

$$Y \xrightarrow{H_Y} D(Y) \xrightarrow{T'|D(Y)} D(X) \xrightarrow{H_X^{-1}} X.$$

H_Y en H_X zijn homeomorfismen, en T' is zwak*kontinu, dus ϕ is kontinu. Verder geldt voor $f \in C(X)$, als $T'\varepsilon_y = \varepsilon_x$:

$$f \circ \phi(y) = (f \circ H_X^{-1} \circ T' \circ H_Y)\,(y) = (f \circ H_X^{-1} \circ T')\,(\varepsilon_y) =$$

$$(f \circ H_X^{-1})\,(\varepsilon_x) = f(x) = \varepsilon_x(f) = T'\varepsilon_y(f) = \varepsilon_y(Tf) = Tf(y).$$

Dus $Tf = f \circ \phi$; de eenduidigheid van ϕ is evident.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): is triviaal.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): T is positief, dus T is de kompleksifikatie van een reële operator T_r: $C_r(X) \to C_r(Y)$. Uit $|T_r f| = T_r|f|$ volgt dat T_r een reële roosteroperator is.

▨

2.14 Definitie

Zij T: $C(X) \to C(Y)$ een roosteroperator met $T1_X = 1_Y$.
De unieke bij T behorende funktie $\phi \in C(Y,X)$ heet de met T geassocieerde funktie.

2.15 Stelling

Zij T: $C(X) \to C(Y)$ een roosteroperator met $T1_X = 1_Y$ en zij ϕ de met T geassocieerde funktie. Dan geldt:

(i) $N(T) = \{0\} \iff$ T is een isometrie $\iff \phi$ is surjektief;

(ii) $R(T) = C(Y) \iff \phi$ is injektief.

Bewijs:

(i) Zij ϕ surjektief; dan geldt voor $f \in C(X)$:

$$||Tf|| = \sup\{|Tf(y)| \mid y \in Y\} = \sup\{|f(\phi(y))| \mid y \in Y\}$$

$$= \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} = ||f||.$$

Een isometrie is 1-1 duidig.
Stel tenslotte dat ϕ niet surjektief is. $\phi(Y)$ is kompakt, en $\phi(Y) \neq X$. Volgens het lemma van Urysohn is er een $f \in C(X)$ met $f \neq 0$ en $f(\phi(Y)) = \{0\}$. Dan $Tf = 0$, dus $N(T) \neq \{0\}$.

(ii) Als $R(T) = C(Y)$ dan is ϕ zeker injektief. Omgekeerd: als ϕ injektief is, dan is ϕ: $Y \to \phi(Y)$ een homeomorfisme. Zij $g \in C(Y)$; definieer

f_0: $\phi(Y) \to \mathbb{C}$ door $f_0 = g \circ \phi^{-1}$. Volgens het lemma van Tietze heeft f_0 een uitbreiding tot een kontinue funktie $f: X \to \mathbb{C}$. Dan geldt $Tf = f \circ \phi = f_0 \circ \phi = g$, dus $R(T) = C(Y)$.

∎

2.16 Stelling (Lotz [4], Satz 1.8)
E en F zijn twee Banachroosters en $T: E \to F$ is een lineaire operator. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) T is een roosteroperator;

(ii) $\forall x \in E : |Tx| = T|x|$.

Bewijs:

(ii) $\Longrightarrow$ (i): evident.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Zij $x \in E$; zij T_1 de restriktie van T tot het ideaal

$E_{|x|} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\{y \in E \mid |y| \leq |x|\}$.

T_1 beeldt $E_{|x|}$ af in $F_{T|x|} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\{z \in F \mid |z| \leq T|x|\}$.

We identificeren nu overeenkomstig stelling 1.17 $E_{|x|}$ met C(X) en $F_{T|x|}$ met C(Y), dus $|x|$ met 1_X en $T|x|$ met 1_Y. T_1 is een roosteroperator met $T_1\, 1_X = 1_Y$, dus volgens stelling 2.13 geldt: $T_1|x| = |T_1 x|$. Dus $T|x| = |Tx|$.

∎

§3. Het spektrum van roosteroperatoren in Banachroosters

3.0 In §3 bewijzen we met behulp van de representatiestelling 1.17 en de spektrum-bewarende inbedding (appendix, stelling 4.3): Het approximatieve puntspektrum van een roosteroperator is cyklisch.

3.1 Definitie
Een Markov-operator is een positieve operator in C(X) met de eigenschap $T1_X = 1_X$.

3.2 Een Markov-operator is begrensd; $||T|| = ||T1_X|| = 1$ (stelling 2.10). Voorts geldt: $r(T) = 1$ en $1 \in \sigma(T)$ (stelling 1.24).

3.3 Definitie
Een eigenfunktie f van een Markov-operator T bij eigenwaarde α heet unimodulair als $|\alpha| = 1$ en $|f| = 1_X$.

3.4 Stelling (Lotz [4], Satz 3.1)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$.
Dan vormen de unimodulaire eigenfunkties van T een groep G, en de afbeelding in X: $G \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $X(f).f = Tf$ $(f \in G)$ is een karakter van G.
Bewijs:

T is een roosteroperator met $T1_X = 1_X$, dus T is een Markov-operator en een symmetrisch algebra-homomorfisme. (Stelling 2.13). 1_X is een unimodulaire eigenfunktie, dus $G \neq \emptyset$.
Als $Tf = \alpha f$ en $Tg = \beta g$ met $|\alpha| = |\beta| = 1$ en $|f| = |g| = 1_X$ dan geldt:

(1) $$T(f\bar{g}) = (\alpha.\bar{\beta})\ (f.\bar{g});$$

(2) $$T(\tfrac{1}{f}) = \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{1}{f} \quad \text{(wegens } T1_X = 1_X\text{)}.$$

(Merk op: $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$ en $\frac{1}{f} = \bar{f}$).

Hieruit volgt dat de unimodulaire eigenfunkties van T een (konjugatie-invariante) groep vormen in C(X). De afbeelding die aan de elementen van die groep de bijbehorende eigenwaarden toevoegt is op grond van (1) en (2) een karakter; zelfs geldt $X(\bar{g}) = \overline{X(g)}$.

∎

3.5 Definitie

Een verzameling $A \subset \mathbb{C}$ heet cyklisch als voor $\alpha \neq 0$ geldt:

$$\alpha \in A \Rightarrow \{|\alpha| \ (\frac{\alpha}{|\alpha|})^k \ | k \in \mathbb{Z}\} \subset A.$$

3.6 Stelling (Lotz [4], Satz 3.2)

Zij T een roosteroperator in een Banachrooster E.

Dan is $P\sigma(T)$ cyklisch.

Bewijs:

Zij $0 \neq \alpha \in P\sigma(T)$, $\alpha = |\alpha|.\beta$ en zij x een eigenvektor van T bij α.

T is een roosteroperator, dus (stelling 2.16):

$$T|x| = |Tx| = |\alpha x| = |\alpha|.|x|.$$

$E_{|x|}$ is een T-invariant ideaal in E; zij S de restriktie van $\frac{T}{|\alpha|}$ tot $E_{|x|}$. We identificeren $E_{|x|}$ met een funktieruimte C(X), dus $|x|$ met 1_X (stelling 1.17); S wordt dan een Markov-operator, en x is een unimodulaire eigenfunktie van S bij de eigenwaarde β. Uit stelling 3.4 volgt $\{\beta^k | k \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(S)$, dus $\{\beta^k|\alpha| \ | \ k \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(T)$. Dus $P\sigma(T)$ is cyklisch.

▨

3.7 Stelling (Lotz [4], Satz 3.3)

Zij T een roosteroperator in een Banachrooster E.

Dan is $A\sigma(T)$ cyklisch.

Bewijs:

Volgens stelling 1.24 is $\overline{T}$ een roosteroperator; volgens appendix stelling 4.3 is $A\sigma(T) = P\sigma(\overline{T})$; volgens stelling 3.8 is $A\sigma(T) = P\sigma(\overline{T})$ cyklisch.

▨

3.8 Stelling (Lotz [4], Satz 3.4)

Zij T een lineaire operator in een Banachrooster E.

Als T en T' roosteroperatoren zijn, dan is $\sigma(T)$ cyklisch.

Bewijs:

Volgens appendix, stelling 3.6 is $\sigma(T) = A\sigma(T) \cup P\sigma(T')$. Uit stelling 3.6 en stelling 3.7 volgt dan dat $\sigma(T)$ cyklisch is.

▨

3.9 Stelling (Lotz [4], Satz 3.5)
Zij T een lineaire operator in een Banachrooster E.
Als T een roosterisomorfisme van E op E is, dan is $\sigma(T)$ cyklisch.
Bewijs:

Zij E^+ resp. E'^+ de positieve kegel in E resp. E'. Omdat T een roosterisomorfisme is van E op E is $T(E^+) = E^+$. Daaruit volgt $T'(E'^+) = E'^+$ zodat ook T' een roosterisomorfisme is; immers als $L \in E'_r$ en $x \in E^+$ dan geldt:

$$|T'L|(x) = \sup\{T'L(z) \mid z \in E_r, |z| \leq x\} =$$

$$= \sup\{L(Tz) \mid z \in E_r, |z| \leq x\} = \sup\{L(y) \mid y \in E_r, |y| \leq Tx\}$$

$$= |L|(Tx) = T'|L|(x).$$

Dus $|T'L| = T'|L|$. T' is als kompleksifikatie van een reële roosteroperator een roosteroperator. Volgens stelling 3.8 is $\sigma(T)$ dan cyklisch.
▨

3.10 Stelling (Lotz [4], Satz 3.6)
Zij T een roosteroperator in een Banachrooster E.
Als $\alpha \in \sigma(T)$ dan $|\alpha| \in \sigma(T)$.
Bewijs:

Zij $\alpha \in \sigma(T)$; er zijn twee mogelijkheden:

1°) $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |\alpha|\} \subset \sigma(T)$; dan zeker $|\alpha| \in \sigma(T)$;

2°) $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |\alpha|\} \not\subset \sigma(T)$. Uit de kompaktheid van $\sigma(T)$ volgt dan: $\partial\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |\alpha|\} \neq \emptyset$. Zij $\beta \in \partial\sigma(T)$ met $|\beta| = |\alpha|$. Uit stelling 3.7 en appendix, stelling 3.3 volgt dan: $|\alpha| = |\beta| \in A\sigma(T) \subset \sigma(T)$.
▨

§4. Het spektrum van roosteroperatoren in C(X)

4.0 Volgens stelling 3.7 is het approximatieve puntspektrum van een roosteroperator cyklisch. Voor het spektrum van een roosteroperator T in C(X) met de extra eigenschap $T1_X = 1_X$ is een sterkere uitspraak mogelijk: $\sigma(T)$ is óf de hele eenheidscirkelschijf, óf een vereniging van ondergroepen van de cirkelgroep, eventueel vermeerderd met 0.

4.1 Lemma (Wolff [7], Lemma 1.5)
We identificeren een begrensde lineaire funktionaal $\mu \in C(X)'$ met zijn eenduidig bepaalde voortzetting tot een reguliere Borelmaat op X.
Zij B(X) het Banachrooster van de begrensde komplekswaardige Borelfunkties op X.

(i) De afbeelding $V: B(X) \to C(X)''$ gedefinieerd door

$$Vf(\mu) = \int f d\mu \quad (f \in B(X);\ \mu \in C(X)') \tag{1}$$

is een isometrische roosteroperator;

(ii) Zij T een positieve lineaire operator op C(X).
Dan is V(B(X)) invariant onder T'', en

$$\forall f \in B(X)\ \ \forall \mu \in C(X)':\ T''(Vf)(\mu) = \int f d(T'\mu). \tag{2}$$

Bewijs:

(i) V is een 1-1 duidige lineaire operator
V is de kompleksifikatie van de reële operator $V_r: B_r(X) \to C_r(X)''$, gedefinieerd door $V_r f(\mu) = \int f d\mu$ $(f \in B_r(X),\ \mu \in C_r(X)')$. Zij nu $f \in B_r(X)$ en $0 \leq \mu \in C_r(X)'$; dan geldt:

$$(V_r f)^+(\mu) = \sup\{(V_r f)(\nu) \mid 0 \leq \nu \leq \mu\} =$$

$$= \sup\{\int f d\nu \mid 0 \leq \nu \leq \mu\} \quad \text{(zie [3], stelling 7.9).}$$

$(V_r f^+)(\mu) = \int f^+ d\mu$; $f \leq f^+$ dus als $0 \leq \nu \leq \mu$ dan geldt:

$$\int f d\nu \leq \int f^+ d\nu \leq \int f^+ d\mu.$$

Daaruit volgt: $(V_r f)^+(\mu) \leq (V_r f^+)(\mu)$.
Zij $Y = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$; definieer een reguliere Borelmaat ν door $\nu(S) = \mu(S \cap Y)$ (S Borelverzameling in X);
Dan is $0 \leq \nu \leq \mu$ en

$$\int f d\nu = \int_Y f d\mu = \int f^+ d\mu \geq \int f d\mu.$$

Dus $(V_r f)^+(\mu) \geq (V_r f^+)(\mu)$, zodat $(V_r f)^+(\mu) = (V_r f^+)(\mu)$. V_r is een reële roosteroperator, dus V is een roosteroperator.

V is een isometrie immers voor $f \in B(X)$ geldt:

$$|Vf(\mu)| = \left|\int f d\mu\right| \leq ||f||.||\mu||, \text{ zodat } ||Vf|| \leq ||f||. \quad (3)$$

Anderzijds, als $\varepsilon > 0$ dan is er een x_0 zó dat $|f(x_0)| > ||f|| - \varepsilon$.
Dan $V|f|(\varepsilon_{x_0}) = \int |f| d\varepsilon_{x_0} = |f|(x_0) > ||f|| - \varepsilon$. Daaruit volgt:

$$||Vf|| = || \, |Vf| \, || = ||V|f| \, || > ||f|| - \varepsilon. \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt $||Vf|| = ||f||$.

(ii) Zij $\mu \in C(X)'$. $\forall f \in C(X)$: $(T'\mu)(f) = \mu(Tf)$ dus

$$\forall f \in C(X) \; \exists g \in C(X) \; \forall \mu \in C(X)' : \int f d(T'\mu) = \int g d\mu. \quad (5)$$

Zij A een gesloten deelverzameling van X en zij $\{f_\alpha\}_\alpha$ een naar beneden gericht stelsel van kontinue funkties zó dat voor elke $x \in X$ geldt: $\lim_\alpha f_\alpha(x) = X_A(x)$. Dan geldt:

$$\int X_A d(T'\mu) = \lim_\alpha \int f_\alpha d(T'\mu) = \lim_\alpha \int Tf_\alpha d\mu.$$

(Zie [2], Ch. IV, Cor. 2, p. 145.)
Omdat T positief is, is $\{Tf_\alpha\}_\alpha$ een begrensd, naar beneden gericht stelsel kontinue funkties. Zij g gedefinieerd door $g(x) = \lim_\alpha Tf_\alpha(x)$. g is

een begrensde Borelfunktie, en

$$\int X_A d(T'\mu) = \int g d\mu \quad \text{(zie [2], Ch. IV, Cor. 2, p. 145).} \qquad (6)$$

Zij nu $H := \{f \in B(X) \mid \forall g \in B(X)\ \forall \mu \in C(X)' : \int f d(T'\mu) = \int g d\mu\}$. Zij $\{f_n\}_n$ een monotone begrensde rij in H en zij h de puntsgewijze limiet van $\{f_n\}_n$. Dan is h een begrensde Borelfunktie, en volgens de monotone konvergentiestelling geldt $h \in H$. Volgens (5) bevat H de kontinue funkties en volgens (6) bevat H de karakteristieke funkties van de gesloten deelverzamelingen. Daaruit volgt dat $H = B(X)$, dus

$$\forall f \in B(X)\ \exists g \in B(X)\ \forall \mu \in C(X)' : \int f d(T'\mu) = \int g d\mu. \qquad (7)$$

Hieruit volgt dat $V(B(X))$ invariant is onder T'', terwijl

$$T''(Vf)(\mu) = Vf(T'\mu) = \int f d(T'\mu).$$

▨

4.2 Lemma (Wolff [7], Lemma 2.3)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie. Dan geldt:

(i) T is een isometrie $\iff$ ϕ is surjektief;

(ii) $0 \in A\sigma(T) \iff 0 \in P\sigma(T) \iff \phi$ is niet surjektief;

(iii) $0 \notin \sigma(T) \iff \phi$ is een homeomorfisme;

(iv) $0 \in \sigma(T) \setminus A\sigma(T) \iff \phi$ is surjektief maar niet injektief.

Bewijs: volgt direkt uit stelling 2.15.
▨

4.3 Lemma (Wolff [7])
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}: N(T^n) \neq N(T^{n+1})$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: \phi^n(X) \neq \phi^{n+1}(X)$.

Bewijs:

Uit $Tf = f \circ \phi$ volgt $T^n f = f \circ \phi^n$. Daaruit volgt:

$$N(T^n) = \{f \in C(X) \mid T^n f = 0\} = \{f \in C(X) \mid f(\phi^n(X)) = \{0\}\}.$$

De bewering volgt nu direkt m.b.v. het lemma van Urysohn.

∎

4.4 Lemma (Wolff [7])

Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie.

Zij F het gesloten T-invariante ideaal $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} N(T^n)}$ en zij $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^n(X)$.

Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

(i) de door T in C(X)/F geïnduceerde operator $\tilde{T}$ is surjektief;

(ii) de restriktie ψ van ϕ tot Y is injektief.

Bewijs:

We tonen eerst aan dat Y de drager van F is. Merk op dat $Y \neq \emptyset$ want X is kompakt. Zij $y \in Y$; $\forall k \in N \ \exists x_k \in X$: $\phi^k(x_k) = y$. Zij $f \in F$ en zij $\varepsilon > 0$. Er is een $f_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} N(T^n)$ zó dat $||f - f_1|| < \varepsilon$. Dan geldt:

$0 = T^k f_1(x_k) = f_1(\phi^k(x_k)) = f_1(y)$, dus $|f(y)| < \varepsilon$. Daaruit volgt $f(y) = 0$.

Omgekeerd: stel $f(y) = 0$ voor alle $f \in F$. Dan geldt voor alle $k \in N$: als $T^k f = 0$ dan $f(y) = 0$, dus als $f(\phi^k(X)) = 0$ dan $f(y) = 0$. Derhalve moet gelden: $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \phi^k(X) = Y$.

Volgens stelling 2.4 is de afbeelding ω: $C(X)/F \to C(Y)$, gedefinieerd door $\omega(\hat{f})(y) = f(y)$, een isometrisch roosterisomorfisme. Zij $S = \omega \circ \tilde{T} \circ \omega^{-1}$. S is een roosteroperator in C(Y) met $S1_Y = 1_Y$. Zij nu $f \in C(X)$, zij g de restriktie van f tot Y en zij $y \in Y$. Dan geldt:

$$Sg(y) = (\omega \circ \tilde{T} \circ \omega^{-1})(g)(y) = \omega \circ \tilde{T}(\hat{f})(y) = \omega(\widehat{Tf})(y) = Tf(y) = f(\phi(y)).$$

Daaruit volgt: de met S geassocieerde kontinue funktie ψ is de restriktie van ϕ tot Y. Merk op dat $\phi(Y) \subset Y$, immers

$$\phi(Y) = \phi(\bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^n(X)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^{n+1}(X) = Y.$$

ψ is surjektief, immers zij $y \in Y$.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in X: \phi^k(x_k) = y.$$

Zij $y_k = \phi^k(x_{k+1})$; dan geldt voor alle k: $\phi(y_k) = \phi^{k+1}(x_{k+1}) = y$ en $y_k = \phi^k(x_{k+1}) \in \phi^k(X)$. $\{y_k\}_k$ heeft een verdichtingspunt y_0.
$\forall k \in N \quad \forall l \geq k : y_l \in \phi^l(X) \subset \phi^k(X)$; $\phi^k(X)$ is gesloten, dus
$\forall k \in N : y_0 \in \phi^k(X)$. Daaruit volgt: $y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^n(X) = Y$; $\phi(y_0) = y$ dus $y \in \phi(Y) = \psi(Y)$.

$\tilde{T}$ is injektief, immers als $\tilde{T}\hat{f} = 0$ en $f \in \hat{f}$ dan $Tf \in F$. Zij $g \in N(T^n)$ zó dat $||T^n f - g|| < \varepsilon$. Voor zekere n_0 is $T^{n_0} g = 0$, dus $||T^{n_0+1} f|| = ||T^{n_0+1} f - T^{n_0} g|| \leq ||T^{n_0}|| \, ||Tf - g|| < \varepsilon$. Dus $T^{n_0+1} f = 0$ zodat $f \in F$ dus $\hat{f} = 0$.

Stel nu dat ψ injektief is. Volgens lemma 4.2 is S dan surjektief, dus ook $\tilde{T}$ is surjektief.

Stel dat $\tilde{T}$ surjektief is; S is dan ook surjektief. Volgens lemma 4.2 is ψ injektief.

□

4.5 Lemma (Wolff [7], Lemma 2.4)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie.
Als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ $\phi^{n+1}(X) \neq \phi^n(X)$, dan geldt:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}.$$

Bewijs:

Voor iedere n geldt $\phi^{n+1}(X) \subset \phi^n(X)$; zij $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^n(X)$. Uit het gegeven volgt: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : \phi^n(x_n) = y_n \in \phi^n(X) \setminus \phi^{n+1}(X)$. Daaruit volgt dat voor alle n geldt:

$$\phi^{-(n+1)}(y_n) = \emptyset \quad \text{en} \quad \phi^{-m}(y_n) \neq \emptyset \quad \text{als } 0 \leq m \leq n. \tag{1}$$

Verder geldt voor $m \geq 0$ en $r \geq 1$:

$$\phi^{-m}(y_n) \cap \phi^{-(m+r)}(y_n) = \emptyset. \tag{2}$$

Immers, stel $y \in \phi^{-m}(y_n) \cap \phi^{-(m+r)}(y_n)$.

$\forall s \in \mathbb{N}\ \exists t, k \in \mathbb{N} : s + t = m + kr$, dus:

$$\phi^s(\phi^t(y)) = \phi^{kr}(\phi^m(y)) = y_n.$$

Daaruit volgt $y_n \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \phi^s(X) = Y$, in strijd met $y_n \notin \phi^{n+1}(X)$.

Zij nu $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$ en zij $z \in X$. Op grond van (1) en (2) is er bij elke n hoogstens één $m \geq 0$ zó dat $z \in \phi^{-m}(y_n)$. Definieer f_n door:

$$f_n(z) = \begin{cases} \lambda^{n-m} & \text{als } z \in \phi^{-m}(y_n),\ 0 \leq m \leq n; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

$\phi^{-m}(y_n)$ is gesloten, dus f_n is een Borelfunktie.
Uit (1) volgt: $||f_n|| = 1$ want $f_n(x_n) = \lambda^0 = 1$. Verder geldt:

$$f_n(\phi(z)) = \begin{cases} \lambda^{n-m+1} & \text{als } z \in \phi^{-m}(y_n),\ 1 \leq m \leq n; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Volgens lemma 4.1 geldt:

$$(\lambda V f_n - T'' V f_n)(\varepsilon_z) = (\lambda f_n - f_n \circ \phi)(z) = \begin{cases} \lambda^{n+1} & \text{als } z = y_n; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Daaruit volgt: $||\lambda V f_n - T'' V f_n|| = |\lambda|^{n+1}$, dus

$$\lambda \in A\sigma(T'') \subset \sigma(T'') = \sigma(T).$$

Daar $r(T) = 1$ en $\sigma(T)$ is gesloten, geldt: $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$.
∎

4.6 Lemma (Wolff [7], Lemma 2.5)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie.
Als er een $\lambda \in \mathbb{C}$ is met $0 < |\lambda| < 1$ en $\lambda \in A\sigma(T)$, dan is ϕ niet surjektief.
Bewijs:
Stel ϕ is surjektief, dan is T een isometrie (lemma 4.2). Voor $0 < |\lambda| < 1$ geldt dan:

$$||(\lambda-T)f|| \geq | \, |\lambda| \, ||f|| - ||T||.||f|| \, | = (1-|\lambda|) \, ||f||.$$

Volgens appendix, stelling 3.2 geldt dan $\lambda \notin A\sigma(T)$.
∎

4.7 Stelling (Wolf [7], Satz 2.2)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$.
Zij F het gesloten T-invariante ideaal $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} N(T^n)$.
Als (i) $\forall n \in \mathbb{N} : N(T^{n+1}) \neq N(T^n)$;
of (ii) De door T in C(X)/F geïnduceerde operator $\tilde{T}$ is niet surjektief
dan geldt: $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$.
Als (i) noch (ii) geldt, dan is $\sigma(T)\backslash\{0\}$ de vereniging van een aantal ondergroepen van de cirkelgroep $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.
Bewijs:

1°) Volgens lemma 4.3 is (i) equivalent met:
(i)' $\forall n \in \mathbb{N} : \phi^{n+1}(X) \neq \phi^n(X)$.
Volgens lemma 4.5 volgt uit (i)':

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}.$$

2°) Volgens lemma 4.4 is (ii) equivalent met:
(ii)' de restriktie ψ van ϕ tot $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^n(X)$ is niet injektief.
Zij nu, als in het bewijs van lemma 4.4 ω: C(X)/F → C(Y) het kanonieke isometrische roosterisomorfisme, en zij $S = \omega \circ \tilde{T} \circ \omega^{-1}$ de door T in C(Y) geïnduceerde operator. $\psi = \phi|Y$ is de met S geassocieerde kontinue funktie.

ψ is niet injektief, dus volgens lemma 4.2 geldt $0 \in \sigma(S)\backslash A\sigma(S)$.

Zij $M = \sigma(S)\backslash A\sigma(S)$. M is een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ (appendix, stelling 3.5), en $M \neq \emptyset$ want $0 \in M$. Verder geldt $\overline{M}\backslash M \subset A\sigma(S)$. Omdat ψ surjektief is, is S een isometrie (lemma 4.2), en $r(S) = 1$ dus volgens lemma 4.6 geldt:

$$\overline{M}\backslash M \subset A\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}.$$

Volgens appendix, stelling 3.6 geldt: $M \subset K\sigma(S) = P\sigma(S')$.

Zij $P: C(X) \to C(X)/F$ de kanonieke projektie en zij $U: C(X) \to C(Y)$ gedefinieerd door $U = \omega \circ P$. U is surjektief, dus U' is injektief. Voorts geldt $U'S' = T'U'$, dus

$$P\sigma(S') \subset P\sigma(T') \subset \sigma(T).$$

Uit $r(T) = 1$ volgt $\overline{M} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} \subset \overline{M}$ dus

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}.$$

3°) Stel (i)' noch (ii)' geldt. ψ is bijektief dus S en S^{-1} zijn isometrische roosterisomorfismen en $S1_Y = 1_Y$. Daaruit volgt $r(S) = r(S^{-1}) = 1$. Uit de spektrale afbeeldingsstelling volgt:

$$\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}.$$

Uit de ontkenning van (i)' volgt: $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \ \phi^n(X) = \phi^{n+1}(X)$. Dus de restriktie T_F van T tot F is nilpotent, d.w.z.: $\sigma(T_F) \subset \{0\}$. Volgens appendix, stelling 3.7 is $\sigma(T) \subset \sigma(\tilde{T}) \cup \sigma(T_F)$, dus $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. In dat geval is $\sigma(T) = \partial\sigma(T) = A\sigma(T)$, (appendix, stelling 3.3), en volgens stelling 3.7 is $A\sigma(T)$ cyklisch. Derhalve is $\sigma(T)\backslash\{0\}$ de vereniging van ondergroepen van de cirkelgroep.
∎

4.8 Lemma (Wolff [7], Lemma 3.1)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie.

Definieer $k: X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ door $k(x) := \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \phi^k(x) = x\}$, waarbij per definitie $\inf \emptyset = \infty$. Dan geldt:

(i) als voor minstens één $x \in X$ geldt: $k(x) = k < \infty$, dan is $H_k \subset P\sigma(T')$, waarbij H_k de groep van de k^e-machts eenheidswortels is.

(ii) als voor minstens één $x \in X$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $k(\phi^n(x)) = \infty$, dan is $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} \subset P\sigma(T'')$.

Bewijs:

(i) Zij $x \in X$ zó dat $k(x) = k < \infty$ en zij $\alpha \in H_k$.
Zij $\mu = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{-l} \varepsilon_{\phi^l(x)}$. Dan geldt:

$$T'\mu = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{-l} \varepsilon_{\phi^{l+1}(x)} = \alpha\mu, \quad \text{dus } \alpha \in P\sigma(T').$$

(ii) Zij $x \in X$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $k(\phi^n(x)) = \infty$.
Zij $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; definieer voor alle $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ $M_{m,n}$ door: $M_{m,n} := \phi^{-m}(\phi^n(x))$. $M_{m,n}$ is een Borelverzameling. Zij $y \in M_{m_1,n_1} \cap M_{m_2,n_2}$. Dan geldt:

$$\phi^{m_1}(y) = \phi^{n_1}(x) \quad \text{en} \quad \phi^{m_2}(y) = \phi^{n_2}(x).$$

Stel $m_2 - m_1 = r \geq 0$. Dan geldt:

$$\phi^{n_2}(x) = \phi^{m_2}(y) = \phi^{m_1+r}(y) = \phi^{n_1+r}(x),$$

dus $n_2 = n_1 + r$, zodat $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$.

Zij $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Definieer een funktie f op X door

$$f(z) = \begin{cases} \lambda^{n-m} & \text{als } z \in M_{m,n}; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

f is een begrensde Borelfunktie; bovendien geldt:

$$f(\phi(z)) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^{n-m} & \text{als } \phi(z) \in M_{m,n}; \\ 0 & \text{anders;} \end{array} \right\} = \lambda f(z).$$

Daaruit volgt $T''(Vf) = \lambda(Vf)$, dus $\lambda \in P\sigma(T'')$.

∎

4.9 Stelling (Wolff [7], Proposition 3.2; 3.3)
Zij T een roosteroperator in $C(X)$ met $T1_X = 1_X$ en zij ϕ de met T geassocieerde kontinue funktie.
De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) $\exists k \in \mathbb{N} : \phi^k = \phi^{2k}$;

(ii) $\exists k \in \mathbb{N} : T^k = T^{2k}$ (d.w.z.: T^k is een projektie);

(iii) T voldoet aan een niet-triviale polynoomvergelijking $p(T) = 0$;

(iv) $\sigma(T)$ bestaat uit polen van $R(\lambda;T)$;

(v) 1 is een pool van $R(\lambda;T)$;

(vi) $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} \notin \sigma(T)$.

Bewijs:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) evident.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): zie [2], Exercise VII, 5.17, p. 582.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (vi) evident.

(vi) $\Longrightarrow$ (i). Uit stelling 4.7 volgt $\sigma(T) \subset \{0\} \cup V$, waarbij V de vereniging is van ondergroepen van de cirkelgroep Γ. Volgens lemma 4.5 geldt:

$$\exists r \in \mathbb{N} : \phi^{r+1}(X) = \phi^r(X).$$

Zij r_0 het kleinste getal met deze eigenschap; zij $Y = \phi^{r_0}(X)$. Volgens lemma 4.4 en stelling 4.7 is de restriktie ψ van ϕ tot Y bijektief.
Omdat $\Gamma \notin \sigma(T)$ geldt volgens lemma 9.8 (ii):

$$\forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \phi^k(\phi^n(x)) = \phi^n(x).$$

Omdat ψ bijektief is geldt:

$$\forall g \in Y \quad \exists k \in \mathbb{N} : \phi^k(y) = y.$$

Daaruit volgt: $\sup\{k(y) \mid y \in Y\} < \infty$, immers stel er is een rij $\{y_n\}$ in Y zó dat $k(y_n) = k_n \to \infty$. Volgens lemma 9.8 (i) geldt $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{k_n} \subset \sigma(T)$, zodat $\Gamma \subset \sigma(T)$, in strijd met het gegeven.

De verzameling $\{k(y) \mid y \in Y\}$ heeft een kleinste gemene veelvoud q. Dan geldt $\psi^q = 1_Y$, dus $\phi^{r_0+q} = \phi^{r_0}$. De vergelijking $r_0 = tq + s$ heeft één oplossing (t,s) met $0 \leq t$ en $0 \leq s \leq q-1$. Zij $k = (t+1)q$. Voor alle $x \in X$ geldt: $\phi^k(x) = \phi^{r_0+q-s}(x) \in Y$, en voor alle $y \in Y$ geldt $\phi^k(y) = \phi^{(t+1)q}(y) = y$, zodat $\phi^{2k} = \phi^k$,

▨

4.10 Stelling (Wolff [7], Proposition 3.2)
Zij T een roosteroperator in C(X) met $T1_X = 1_X$.
Stel $\Gamma \not\subset \sigma(T)$; volgens stelling 9.9 is voor zekere $k \in \mathbb{N}$ T^k een projektie.
Als bovendien gegeven is dat $\dim N(1-T) = 1$, dan is $\dim R(T^k) < \infty$.
Bewijs:

We gebruiken dezelfde letters als in het bewijs van stelling 9.9.
Definieer voor $y \in Y$ F_y door:

$$F_y := \{\phi^r(y) \mid 0 \leq r \leq q-1\}.$$

Kies $y \in Y$ en stel $F_y \neq Y$. Zij $z \in Y \setminus F_y$. Omdat ψ bijektief is, is $F_y \cap F_z = \emptyset$.
Zij $f \in C(X)$ zó dat $f(F_y) = \{1\}$ en $f(F_z) = \{0\}$;
zij $g \in C(X)$ zó dat $g(F_y) = \{0\}$ en $g(F_z) = \{1\}$.
Zij $P = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} T^{r_0+n}$; dan $PT = TP = P$, dus $T(Pf) = Pf$ en $T(Pg) = Pg$ en
$Pf(F_y) = Pg(F_z) = \{0\}$ en $Pg(F_y) = Pf(F_z) = \{1\}$, zodat Pf en Pg lineair onafhankelijke eigenfunkties van T bij de eigenwaarde 1 zijn, in strijd met $\dim N(1-T) = 1$. Daaruit volgt: $F_y = Y$;

T^k is een projektie, dus $C(X) = R(T^k) \oplus N(T^k)$;
$N(T^k) = \{f \in C(X) \mid f(\phi^k(X)) = \{0\}\} = \{f \in C(X) \mid f(Y) = \{0\}\}$. Daaruit volgt $R(T^k) \simeq C(Y)$, dus $\dim R(T^k) \leq q$.

▨

§5. Het spektrum van positieve operatoren in Banachroosters

5.0 Met behulp van de representatiestelling 1.17 en de spektrumbewarende inbedding (appendix §4) bewijzen we in deze paragraaf: Een positieve operator in een Banachrooster E, die voldoet aan een voorwaarde (W) (zie definitie 5.6) heeft een cyklisch perifeer spektrum.
Uit deze stelling volgt o.a dat het perifere spektrum van een positieve kompakte operator cyklisch is.

5.1 Definities en opmerkingen
Zij $f \in C(X)$; onder de drager van f verstaan we de verzameling
$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.

Zij $\mu \in C(X)'$; een open verzameling $U \subset X$ heet een μ-nulverzameling als voor iedere $f \in C(X)$ geldt:

$$\operatorname{supp} f \subset U \Longrightarrow \mu(f) = 0.$$

De vereniging van μ-nulverzamelingen is weer een μ-nulverzameling; daaruit volgt dat er een grootste μ-nulverzameling is. Onder de drager van μ, supp μ, verstaan we het komplement van de grootste μ-nulverzameling.
Nu gelden de volgende twee stellingen:

(i) Als $\mu \in C(X)'$, $f \in C(X)$ en $f(\operatorname{supp} \mu) = \{0\}$ dan $\mu(f) = 0$;

(ii) Als $0 \leq \mu \in C(X)'$, $0 \leq f \in C(X)$ en $\mu(f) = 0$ dan $f(\operatorname{supp} \mu) = \{0\}$.

(Zie [1], Ch. III. §2, 3; i.h.b.: proposition 8, 9).

5.2 Lemma
Zij T een Markov-operator in C(X) en zij f een unimodulaire eigenfunktie van T bij de eigenwaarde α.
Dan geldt voor iedere $x \in X$:

$$\operatorname{supp} T'\varepsilon_x \subset \{y \in X \mid f(y) = \alpha f(x)\}.$$

Bewijs:
Zij $x \in X$ en zij $g = \frac{f}{\alpha f(x)}$; dan geldt:

$$T'\varepsilon_x(g) = \varepsilon_x\left(\frac{f}{\alpha f(x)}\right) = 1 \text{ en } T'\varepsilon_x(1_X) = \varepsilon_x(T1_X) = 1,$$

dus $T'\varepsilon_x(1_X - g) = 0$.
Daar $T'\varepsilon_x \geq 0$ en $1_X - \operatorname{Re} g \geq 0$ geldt volgens 5.1 (ii):

$$\operatorname{Re} g(y) = 1 \quad \text{voor alle} \quad y \in \operatorname{supp} T'\varepsilon_x.$$

Omdat $|g| = 1_X$ moet gelden $g(y) = 1$, dus

$$\operatorname{supp} T'\varepsilon_x \subset \{y \in X \mid f(y) = \alpha f(x)\}.$$

∎

5.3 Stelling (Lotz [4], Satz 4.2)
Zij T een Markov-operator in C(X) en zij G de verzameling van unimodulaire eigenfunkties van T.
Zij F de door G voortgebrachte gesloten Riesz-deelruimte van C(X). Dan is F rooster- en algebra-isomorf met een ruimte $C(\tilde{X})$, en de restriktie van T tot F is een roosteroperator.
Bewijs:

Per definitie is $F = F_r + iF_r$ waarbij $F_r = F \cap C_r(X)$ een Riesz-deelruimte van $C_r(X)$ is. F_r is gesloten en $1_X \in F_r$, dus F_r is een gesloten deelalgebra van $C_r(X)$. Daaruit volgt weer dat F een gesloten konjugatie-invariante deelalgebra van C(X) is.

Definieer nu in X een equivalentierelatie ~ door:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \forall g \in G : g(x) = g(y).$$

Zij $\tilde{X} = X/\sim$ (voorzien van de quotiënttopologie) en zij $P: X \to \tilde{X}$ de kanonieke projektie; $\tilde{X}$ is een kompakte T_2-ruimte en P is kontinu.

Zij $H = \{f \in C(X) \mid x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y)\}$. H is een gesloten konjugatie-invariante deelalgebra van C(X) en een gesloten Riesz-deelruimte van C(X). Uit $G \subset H$ volgt $F \subset H$.

Definieer $\phi: H \to C(\tilde{X})$ door

$$(\phi(h))(\hat{x}) = h(x) \quad (h \in H,\ x \in \hat{x}).$$

Men gaat gemakkelijk na dat ϕ een isometrisch algebra- en roosterhomomorfisme is.

Beschouw $\phi(F)$; $\phi(F) \subset \phi(H) \subset C(\tilde{X})$. $\phi(F)$ is als homomorf beeld van F een konjugatie-invariante deelalgebra van $C(\tilde{X})$; $\phi(F)$ is gesloten; $1_{\tilde{X}} \in \phi(F)$ want $1_X \in F$ en $\phi(F)$ scheidt de punten van $\tilde{X}$, want $\phi(G)$ scheidt de punten van $\tilde{X}$ al. Uit de stelling van Stone-Weierstrass volgt dan $\phi(F) = C(\tilde{X})$. Daaruit volgt $F = H$ en F is isometrisch algebra- en roosterisomorf met de funktieruimte $C(\tilde{X})$.

Zij $x \in X$. Uit lemma 5.2 volgt: als $z_1, z_2 \in \text{supp } T'\varepsilon_x$, dan $\forall g \in G : g(z_1) = \lambda_g\, g(x) = g(z_2)$. Dus supp $T'\varepsilon_x$ behoort geheel tot een $\sim$-equivalentieklasse. Als $x \sim y$, $z_1 \in \text{supp } T'\varepsilon_x$ en $z_2 \in \text{supp } T'\varepsilon_y$ dan geldt voor alle $g \in G$:

$$g(z_1) = \lambda_g\, g(x) = \lambda_g\, g(y) = g(z_2),$$

dus supp $T'\varepsilon_x$ en supp $T'\varepsilon_y$ behoren tot dezelfde $\sim$-equivalentieklasse.

F is een T-invariante deelruimte, immers zij $f \in F$ en zij $x \sim y$. supp $T'\varepsilon_x$ en supp $T'\varepsilon_y$ behoren tot dezelfde $\sim$-equivalentieklasse; op die klasse is f konstant: $f(\text{supp } T'\varepsilon_x) = f(\text{supp } T'\varepsilon_y) = \{f_0\}$. Daaruit volgt $(f-f_0 \cdot 1_X)\,(\text{supp } T'\varepsilon_x) = (f-f_0 \cdot 1_X)\,(\text{supp } T'\varepsilon_y) = \{0\}$, dus volgens opmerking 5.1 (i):

$$Tf(x) = (T'\varepsilon_x)(f) = f_0(T'\varepsilon_x)(1_X) = f_0 = f_0(T'\varepsilon_y)(1_X) = (T'\varepsilon_y)(f) = Tf(y).$$

Dus $Tf \in F$.

De restriktie T_F van T tot F is een roosteroperator, immers zij $f \in F$, $x \in X$ en zij $f(\text{supp } T'\varepsilon_x) = \{f_0\}$. Dan geldt:

$$|Tf|(x) = |Tf(x)| = |(T'\varepsilon_x)(f)| = |f_0|(T'\varepsilon_x)(1_X) =$$

$$= (T'\varepsilon_x)(|f|) = T|f|(x).$$

Dus $|T_F f| = T_F|f|$.

▨

5.4 Stelling (Lotz [4], Satz 4.3)
Zij T een Markov-operator in C(X).
Dan vormen de unimodulaire eigenfunkties van T een groep G, en de afbeelding X: $G \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door $Tg = X(g).g$ is een karakter van G.
Bewijs:
Zij G de verzameling van unimodulaire eigenfunkties en zij F de door G voortgebrachte gesloten Riesz-deelruimte van C(X). F is isometrisch algebra- en roosterisomorf met $C(\tilde{X})$ en de restriktie T_F van T tot F is een roosteroperator (stelling 5.3). G is precies de verzameling van unimodualire eigenfunkties van T_F. Uit stelling 3.4 volgt dan dat G een groep is, en dat X een karakter van G is.
▨

5.5 Stelling (Lotz [4], Satz 4.4)
Zij T een Markov-operator in C(X) en zij f een unimodulaire eigenfunktie van T bij de eigenwaarde α.
Definieer U_f: $C(X) \to C(X)$ door $U_f(h) = fh$; dan geldt:

(i) $U_f^{-1} T U_f = \alpha T$;

(ii) $\sigma(T) = \alpha\sigma(T)$;

(iii) $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(T)$.

Bewijs:
U_f is inverteerbaar; $U_f^{-1} = U_{\bar{f}}$ en $||U_f|| = 1$. Zij $h \in C(X)$ en $x \in X$. Volgens lemma 5.2 geldt voor alle $y \in \text{supp } T'\varepsilon_x$: $f(y) = \alpha f(x)$. Daaruit volgt voor $y \in \text{supp } T'\varepsilon_x$:

$$(fh)(y) = \alpha f(x).h(y), \text{ dus } T'\varepsilon_x(fh) = \alpha f(x) T'\varepsilon_x(h).$$

Daaruit volgt weer $T(fh)(x) = \alpha f(x)\, Th(x)$, dus $T(fh) = \alpha f.Th$, dus $U_f^{-1} \circ T \circ U_f = \alpha T$.
(ii) en (iii) volgen direkt uit (i) en uit het feit dat U_f inverteerbaar is.
▨

5.6 Definitie

Zij T een begrensde lineaire operator in een komplekse Banachruimte E.
T heeft de eigenschap (W) als:

$$\exists C > 0 \quad \forall \lambda > r = r(T) : (\lambda - r)\,||R(\lambda;T)|| < C.$$

5.7 Lemma

Zij T een positieve operator in een Banachrooster E met $r(T) = 1$ en zij $0 < x \leq Tx$.
Als T de eigenschap (W) heeft dan is er een gesloten, T-invariant ideaal F in E zó dat $Tx - x \in F$ en $x \notin F$.
Bewijs:
(i) $\exists C > 0 \quad \forall \lambda > 1 : (\lambda-1)\,||R(\lambda;T)|| < C$.
Voor $\lambda > 1$ is $R(\lambda;T)$ positief. Definieer voor $\lambda > 1$ $p_\lambda: E \to \mathbb{R}$ door
$p_\lambda(z) := \sup\{(\nu-1)||R(\nu;T)|z|\,||\,|\ 1 < \nu \leq \lambda\}$ en definieer
$q: E \to \mathbb{R}$ door $q(z) = \lim_{\lambda \downarrow 1} p_\lambda(z)$. p_λ en q zijn kontinue rooster-halfnormen, immers men verifieert gemakkelijk:

(1) $p_\lambda(z_1+z_2) \leq p_\lambda(z_1) + p_\lambda(z_2)$;

(2) $p_\lambda(\alpha z) = |\alpha| p_\lambda(z)$;

(3) p_λ is kontinu (volgt met behulp van stelling 1.9 (vii) uit de eigenschap (W));

(4) als $|z_1| \leq |z_2|$ dan $p_\lambda(z_1) \leq p_\lambda(z_2)$.

Evenzo voor q.
Hieruit volgt dat $F := \{z \in E \mid q(z) = 0\}$ een gesloten ideaal is.

(ii) $p_\lambda(Tz) = \sup\{(\nu-1)\,||\,R(\nu;T)|Tz|\,||\,|\ 1 < \nu \leq \lambda\}$

$\leq \sup\{(\nu-1)\,||\,R(\nu;T)T|z|\,||\,|\ 1 < \nu \leq \lambda\}$

$\leq \sup\{(\nu-1)\,||\,R(\nu;T)\nu|z|\,||\,|\ 1 < \nu \leq \lambda\}$

$= \lambda p_\lambda(z)$.

Dus $q(Tz) = q(z)$, zodat $T(F) \subset F$.

(iii) $R(\lambda;T)(Tx-x) = (\lambda-1)\,R(\lambda;T)\,x - x$ en

$$||(\lambda-1)R(\lambda;T)x-x|| \leq ||(\lambda-1)R(\lambda;T)||\;||x|| + ||x|| \leq (C+1)\;||x||,$$

dus $$p_\lambda(Tx-x) = \sup\{(\nu-1)\;||\;R(\nu;T)|Tx-x|\;||\;|\;1 < \nu \leq \lambda\}$$
$$\leq \sup\{(\nu-1)(C+1)||x||\;|\;1 < \nu \leq \lambda\} =$$
$$= (\lambda-1)(C+1)||x||.$$

Dus $$q(Tx-x) = \lim_{\lambda \downarrow 1} p_\lambda(Tx-x) = 0,$$ zodat $Tx - x \in F$.

(iv) $(\lambda-1)R(\lambda;T)x - x = R(\lambda;T)(Tx-x) \geq 0$ $(\lambda > 1)$, dus

$(\lambda-1)R(\lambda;T)x \geq x$ $(\lambda > 1)$, zodat $p_\lambda(x) \geq ||x||$.

Daaruit volgt $q(x) \geq ||x|| > 0$, dus $x \notin F$.
∎

5.8 Stelling (Lotz [4], Satz 4.7)
Zij T een positieve operator in een Banachrooster E.
Als T de eigenschap (W) heeft dan is Per $\sigma(T)$ cyklisch.
Bewijs:

Als $r = r(T) = 0$ dan is de bewering triviaal; stel dus $r = r(T) > 0$.
We mogen zonder beperking der algemeenheid aannemen: $r(T) = 1$.

Volgens appendix stelling 4.3 geldt: $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$ dus
Per $\sigma(T)$ = Per $\sigma(\overline{T})$, en $A\sigma(T) = A\sigma(\overline{T}) = P\sigma(\overline{T})$, dus Per $\sigma(\overline{T}) \subset P\sigma(\overline{T})$. Uit appendix lemma 4.2 volgt dat ook $\overline{T}$ de eigenschap (W) heeft. Volgens stelling 1.24 is $\overline{T}$ positief.

Zij $\alpha \in$ Per $\sigma(T)$ = Per $\sigma(\overline{T})$, dus $|\alpha| = 1$. Zij θ een eigenvektor van $\overline{T}$ bij de eigenwaarde α, en zij $\eta = |\theta|$.
Omdat $\overline{T}$ positief is geldt $0 < \eta \leq \overline{T}\eta$. Volgens lemma 5.7 is er een gesloten ideaal F in $\overline{E}$ zó dat $\overline{T}(F) \subset F$, $\overline{T}\eta - \eta \in F$ en $\eta \notin F$.
Zij $\tilde{T}$ de door $\overline{T}$ in $\tilde{E} = \overline{E}/F$ geïnduceerde operator. Dan geldt $\tilde{T}\hat{\theta} = \alpha\hat{\theta}$ en $|\hat{\theta}| = \hat{\eta} \neq 0$. We identificeren nu $\tilde{E}_{\hat{\eta}} = \{\hat{\zeta} \in \tilde{E} \mid |\hat{\zeta}| \leq \hat{\eta}\}$ met een funktieruimte C(X) (stelling 1.17). De restriktie $\tilde{T}_1$ van $\tilde{T}$ tot $\tilde{E}_{\hat{\eta}}$ is een Markov-operator,

dus volgens stelling 5.5 geldt:

$$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(\tilde{T}_1).$$

Voor $\lambda > 1$ en $k \in \mathbb{Z}$ geldt: $||R(\lambda\alpha^k;T_1)|| \leq ||R(\lambda\alpha^k;\overline{T})||$, dus $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(\overline{T})$ zodat $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Per } \sigma(T)$. Derhalve is Per $\sigma(T)$ cyklisch.

∎

5.9 Definitie

Zij T een positieve operator in een Banachrooster E.
Een eindige keten van gesloten T-invariante idealen $\{E_m \mid 0 \leq m \leq n\}$ met $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = E$ heet T-oplosbaar als voor $1 \leq m \leq n$ de door T in E_m/E_{m-1} geïnduceerde operator de eigenschap (W) heeft.
T heet oplosbaar als er een T-oplosbare idealenketen bestaat.

5.10 Stelling (Lotz [4], Satz 4.9)

Zij T een oplosbare operator in een Banachrooster E.
Dan is Per $\sigma(T)$ cyklisch.

Bewijs:

Als $r(T) = 0$ is de bewering triviaal; stel dus $r(T) \neq 0$; zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen $r(T) = 1$. We leveren het bewijs door volledige inductie naar de lengte n van een T-oplosbare idealenketen.

1°) Stel er is een T-oplosbare idealenketen met lengte 1. Dan heeft T de eigenschap (W), dus volgens stelling 5.8 is Per $\sigma(T)$ cyklisch.

2°) Inductieaanname: Zij Per $\sigma(S)$ cyklisch voor alle operatoren S met $r(S) \neq 0$ die een S-oplosbare idealenketen hebben met lengte $k \leq n-1$ $(n > 1)$.

Zij $\{E_m \mid 0 \leq m \leq n\}$ een T-oplosbare idealenketen met lengte n en zij U resp. V de door T in E_{n-1} resp. in E/E_{n-1} geïnduceerde operator. Zij $\alpha \in \text{Per } \sigma(T)$, dus $|\alpha| = 1$. Volgens appendix stelling 3.7 geldt: $\alpha \in \sigma(U) \cup \sigma(V)$.

Stel $\alpha \in \sigma(U)$; $\{E_m \mid 0 \leq m \leq n-1\}$ is een U-oplosbare idealenketen met lengte n-1, dus volgens de induktie-aanname geldt

$$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Per } \sigma(U). \tag{1}$$

Stel $\alpha \in \sigma(V)$; V heeft de eigenschap (W), dus volgens stelling 5.8 geldt

$$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Per } \sigma(V). \tag{2}$$

Voor $\lambda > 1$ geldt

$$||R(\lambda\alpha^k;U)|| \leq ||R(\lambda\alpha^k;T)||$$

en

$$||R(\lambda\alpha^k;V)|| \leq ||R(\lambda\alpha^k;T)||,$$

dus

$$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Per } \sigma(T).$$

∎

5.11 Stelling (Lotz [4], Satz 4.10)
Zij T een positieve operator in een Banachrooster E.
Als $r = r(T)$ een pool is van $R(\lambda;T)$ dan is Per $\sigma(T) = r.V$ waarbij V een eindige vereniging van groepen eenheidswortels is.
Bewijs:

Als $r = r(T) = 0$ dan is de bewering triviaal; stel dus $r > 0$. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen $r = 1$.

We bewijzen door volledige induktie naar de orde n van de pool in $r(T) = 1$, dat T een oplosbare operator is.

1°) Als $n = 1$ dan heeft T de eigenschap (W), dus T is oplosbaar.

2°) Induktieaanname: elke positieve operator S met $r(S) \neq 0$, waarvoor $r(S)$ een pool is van $R(\lambda;S)$ van de orde k met $1 \leq k \leq n-1$, $n > 1$, is oplosbaar. Stel nu dat 1 een pool is van $R(\lambda;T)$ van de orde $n > 1$.

Zij $Q = \lim_{\lambda \downarrow 1} (\lambda-1)^n R(\lambda;T)$; als $\lambda > 1$ dan is $R(\lambda;T)$ positief, dus Q is positief. Verder geldt $QT = Q$.
Zij $F = \{z \in E \mid Q(|z|) = 0\}$. F is een gesloten T-invariant ideaal in E.
Zij T_F resp. $\tilde{T}$ de door T in F resp. $\tilde{E} = E/F$ geïnduceerde operator, en zij

$P: E \to \tilde{E}$ de kanonieke projektie.

Daar $F \subset N(Q)$ heeft $R(\lambda;T_F)$ in 1 een pool van de orde

$$k_1 < n. \tag{1}$$

Zij nu $S \in L(E)$ zó dat $P \circ S \geq 0$ en $Q \circ S = 0$. Dan geldt $P \circ S = 0$, immers als $x \geq 0$ dan is $PSx \geq 0$ dus er is een $y \in F$ zó dat $Sx - y \geq 0$; daaruit volgt $|Sx| \leq Sx - y + |y|$, dus $Q|Sx| = 0$ zodat $Sx \in F$, dus $P \circ S = 0$.
Pas dit toe op de koëfficiënten van de reeksontwikkeling van $R(\lambda;T)$ om 1.
De koëfficiënten B_k $(1 < k \leq n)$ voldoen aan de voorwaarden $P \circ B_k \geq 0$ en $Q \circ B_k = 0$, dus $\tilde{B}_k = 0$ $(1 < k \leq n)$.
Dus $R(\lambda;\tilde{T})$ heeft in 1 een pool van de orde $k_2 \leq 1$. Volgens appendix, stelling 3.8 geldt $n \leq k_1 + k_2$, dus $k_1 = n-1$ en $k_2 = 1$. Daaruit volgt: 1 is een pool van de eerste orde van $R(\lambda;\tilde{T})$, dus T heeft de eigenschap (W), en 1 is een pool van de orde $n-1$ van $R(\lambda;T_F)$.
Volgens de induktieaanname is er in F een T_F-oplosbare idealenketen $\{F_k\}$.
Omdat $\tilde{T}$ de eigenschap (W) heeft is $\{E\} \cup \{F_k\}$ een T-oplosbare idealenketen, dus T is oplosbaar.

Volgens stelling 5.10 is Per $\sigma(T)$ cyklisch; omdat 1 geïsoleerd punt is van $\sigma(T)$, bestaat Per $\sigma(T)$ uit een eindige vereniging van groepen eenheidswortels.

▨

5.12 Stelling (Lotz [4], Korollar 4.11)
Zij T een positieve kompakte operator in een Banachrooster E.
Dan is Per $\sigma(T)$ cyklisch.
Bewijs: gevolg van stelling 5.11.
▨

5.13 Definitie
Zij T een begrensde operator in een Banachruimte E.
Definieer M_n door $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$
T heet uniform ergodisch als de rij $\{M_n\}$ konvergeert in de norm-topologie van $L(E)$.

5.14 Opmerking

Uit appendix, stelling 1.19 volgt:

Als T uniform ergodisch is, dan is $r(T) \leq 1$.

Als $1 \in \sigma(T)$ dan is 1 een enkelvoudige pool van $R(\lambda;T)$.

5.15 Stelling (Lotz [4], Satz 4.12)

Zij T een positieve, uniform ergodische operator in een Banachrooster E met $r(T) = 1$.

Dan bestaat Per $\sigma(T)$ uit een eindige vereniging van groepen eenheidswortels.

Bewijs:

Gevolg van stelling 5.11 en opmerking 5.14.

▨

§6. Het spektrum van irreducibele operatoren

6.0 In deze paragraaf geven we een verscherping van stelling I. 5.15 over het spektrum van een irreducibele operator voor het geval dat E een Banachrooster is.

6.1 Definitie
Een begrensde operator U op een Banachrooster E heet een torsie als:

(i) U is inverteerbaar;
(ii) $\forall x \in E : |Ux| = |x|$.

Voorbeeld: zij f een unimodulaire funktie in C(X). Definieer U_f: C(X) → C(X) door $U_f(h) = f.h$. Dan is U_f een torsie op C(X).

6.2 Lemma (Lotz [4], Satz 1.11)
Zij $|x|$ een kwasi-inwendig punt in een Banachrooster E.
Dan is er een torsie $U \in L(E)$ met $U|x| = x$.
Bewijs:
We identificeren $E_{|x|}$ met C(X), x met f, $|x|$ met 1_X (stelling 1.17). Definieer U_f: C(X) → C(X) door $U_f(h) = f.h$; U_f is een torsie, U_f is een isometrie en $U_f(1_X) = f$. Omdat $|U_f(h)| = |h|$ is U_f kontinu m.b.t. $||.||$. (zie opmerking 1.11). $E_{|x|}$ ligt dicht in E dus U_f is voortzetbaar tot een inverteerbare operator U. (U^{-1} is de voortzetting van U_f^{-1}). Uit de kontinuiteit van de absolute waarde (stelling 1.9) volgt:

$$\forall y \in E : |Uy| = |y|.$$

∎

6.3 Stelling (Lotz [4], Theorem 5.2)
Zij T een irreducibele operator in een Banachrooster E met r(T) = 1 en zij het perifere puntspektrum van T niet leeg (Per $\sigma(T) \cap P\sigma(T) \neq \emptyset$).
Als: 1°) T heeft de eigenschap (W);
of 2°) 1 is een eigenwaarde van T' met een positieve eigenvektor ϕ;
dan geldt:

(i) 1 is eigenwaarde van T, iedere positieve eigenvektor is een kwasi-inwendig punt, en de bij 1 behorende eigenruimte N(1-T) is ééndimen-

sionaal;

(ii) de perifere eigenwaarden vormen een groep;

(iii) elk van deze eigenwaarden is enkelvoudig;

(iv) als α een perifere eigenwaarde is van T, dan $\sigma(T) = \alpha\sigma(T)$;

(v) 1 is de enige eigenwaarde van T met een positieve eigenvektor.

Bewijs:

(i) Zij $\alpha \in \text{Per } \sigma(T) \cap P\sigma(T)$; zij z een eigenvektor van T bij de eigenwaarde α; omdat T positief is geldt:

$$|z| = |\alpha z| = |Tz| \leq T|z|.$$

a) Stel T heeft de eigenschap (W). Volgens lemma 5.7 is er een gesloten, T-invariant ideaal F zó dat $T|z| - |z| \in F$ en $|z| \notin F$. T is irreducibel dus $F = \{0\}$ (propositie I. 5.7).
Daaruit volgt $T|z| = |z|$ dus $1 \in P\sigma(T)$.

b) Stel 1 is een eigenwaarde van T' met een positieve eigenvektor ϕ.
Omdat T irreducibel is, is ϕ positief definiet (zie definitie I. 5.9), immers zij $x > 0$ en stel $\phi(x) = 0$.
Voor zekere $\lambda > r(T)$ is $TR(\lambda;T)x$ een kwasi-inwendig punt (zie definitie I. 5.3).

$$0 = \phi(x).\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(T^n x)}{\lambda^n} = \phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^n}\Big) = \phi(TR(\lambda;T)x).$$

Daaruit volgt $\phi = 0$, in strijd met het feit dat ϕ een eigenvektor van T' is.
Uit $\phi(T|z|) = T'\phi(|z|) = \phi(|z|)$ volgt $\phi(T|z|-|z|) = 0$. Omdat ϕ positief definiet is, is $T|z| = |z|$, dus $1 \in P\sigma(T)$.

Stel nu dat x een positieve eigenvektor is bij 1.
$TR(\lambda;T)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} x = \frac{x}{\lambda-1}$ is een kwasi-inwendig punt voor zekere $\lambda > 0$. Maar dan is ook x een kwasi-inwendig punt. De bij 1 behorende eigenruimte $N(1-T)$ is een gesloten Riesz-deelruimte. De restriktie T_1 van T tot $N(1-T)$ is irreducibel, en elke positieve eigenvektor van T

bij 1 is kwasi-inwendig punt van deze Riesz-deelruimte. Volgens propositie I. 5.2 is N(1-T) ééndimensionaal.

(ii) Zij z een eigenvektor van T bij een perifere eigenwaarde α. $|z| = x > 0$ is dan een eigenvektor van T bij de eigenwaarde 1. We identificeren E_x met C(X); de restriktie T_1 van T tot E_x korrespondeert met een Markov-operator, en z korrespondeert met een unimodulaire eigenfunktie van T_1. Uit stelling 5.4 volgt dat perifere eigenwaarden een groep vormen.

(iii) Zij weer $Tz = \alpha z$, $|\alpha| = 1$ en zij $|z| = x$; we identificeren nogmaals E_x met C(X). Volgens lemma 5.5 is er een torsie U op E_x zó dat $U^{-1}TU = \alpha T$. Omdat 1 een enkelvoudige eigenwaarde van T is, en dus van T_1, is α een enkelvoudige eigenwaarde van T_1 en daarmee van T.

(iv) E_x is een T-invariant ideaal; omdat T irreducibel is, is E_x dicht in E. De torsie U uit (iii) is voort te zetten tot een torsie $V \in L(E)$ (zie het bewijs van lemma 6.2). Dan geldt: $V^{-1}TV = \alpha T$, dus $\sigma(T) = \alpha\sigma(T)$.

(v) Zij $0 < x \in E$ en $Tx = \nu x$. T is positief, dus $0 \leq \nu \leq 1$ en $0 \leq Tx \leq x$.

a) Stel T heeft de eigenschap (W). Als in het bewijs van lemma 5.7 tonen we aan: er is een gesloten T-invariant ideaal F in E met $x - Tx \in F$ (de ongelijkheid $0 < x \leq Tx$ wordt in het bewijs van lemma 5.7 alleen gebruikt om aan te tonen dat $x \notin F$). T is irreducibel, dus 1 is eigenwaarde van T met een positieve eigenvektor u. $Tu = u$, dus voor $\lambda > 1$ geldt $R(\lambda;T)u = \frac{u}{\lambda-1}$. Daaruit volgt (zie voor de notatie van het bewijs van lemma 5.7): $p_\lambda(u) = ||u||$, dus $q(u) = \lim_{\lambda \downarrow 1} p_\lambda(u) = ||u||$, zodat $u \notin F$. Omdat T irreducibel is, is $F = \{0\}$, dus $Tx = x$. Daaruit volgt: $\nu = 1$.

b) Stel 1 is eigenwaarde van T' met een positieve eigenvektor ϕ. ϕ is dan positief definiet, en

$$0 < \phi(x) = T'\phi(x) = \phi(Tx) = \phi(\nu x) = \nu\phi(x).$$

Dus $\nu = 1$.

∎

6.4 Stelling (Lotz [4], Theorem 5.3)
Zij T een irreducibele operator in C(X) met r(T) = 1, en zij het perifere puntspektrum van T niet leeg.
Dan gelden de beweringen (i) - (v) van stelling 6.3.
Bewijs:
gevolg van stelling 6.3 en de stelling van Krein-Rutman (stelling II. 3.11).
∎

6.5 Stelling (Lotz [4], Theorem 5.4; Lotz en Schaefer [8], Theorem 1)
Zij T een irreducibele operator in een Banachrooster E met r(T) = 1.
Als 1 een pool is van $R(\lambda;T)$ dan geldt:

(i) Per $\sigma(T)$ is de groep van k^e machts-eenheidswortels;

(ii) elke $\alpha \in$ Per $\sigma(T)$ is een enkelvoudige eigenwaarde van T en een pool van de eerste orde van $R(\lambda;T)$;

(iii) als $\alpha \in$ Per $\sigma(T)$ dan $\sigma(T) = \alpha\sigma(T)$;

(iv) 1 is de enige eigenwaarde van T met een positieve eigenvektor.

Bewijs:
Zij 1 een pool van de orde k van $R(\lambda;T)$. Zij $Q = \lim_{\lambda\downarrow 1}(\lambda-1)^k R(\lambda;T)$.
Q is de hoofdterm van de reeksontwikkeling van $R(\lambda;T)$ om 1. Q is positief, en QT = Q. Q' is dus ook positief en $Q' \neq 0$. De positieve kegel E'^+ in E' is voortbrengend, dus

$$\exists \phi \in E' : Q'\phi = \psi > 0.$$

Dan geldt: $\psi(x) = Q'\phi(x) = \phi(Qx) = \phi(QTx) = T'Q'\phi(x) = T'\psi(x)$, dus $T'\psi = \psi$. 1 is eigenwaarde van T' met een positieve eigenvektor. Daarmee is voldaan aan voorwaarde 2°) van stelling 6.3, dus 1 is een enkelvoudige eigenwaarde van T met een positieve eigenvektor u.

We tonen vervolgens aan dat elke $\alpha \in$ Per $\sigma(T)$ een pool is van $R(\lambda;T)$ van de eerste orde, dus een eigenwaarde van T. De beweringen (i) - (iv) volgen dan direkt uit stelling 6.3.

Zij $F = \{z \in E \mid Q(|z|) = 0\}$; F is een T-invariant gesloten ideaal,

dus $F = \{0\}$. Daaruit volgt dat $Q^2 \neq 0$, dus $k = 1$. 1 is een pool van de eerste orde van $R(\lambda;T)$, en Q is het residu van $R(\lambda;T)$ in 1.

Uit appendix, lemma 4.2 volgt dat 1 ook een pool is van de eerste orde van $R(\lambda;\overline{T})$, en dat $\overline{Q}$ het residu is van $R(\lambda;\overline{T})$ in 1. Zij $\overline{T}\eta = \eta$; dan geldt $\overline{Q}\eta = \eta$. De equivalentieklasse η bevat derhalve een rij $(y_n)_n \in m(E)$ met $\lim_{n\to\infty}(Qy_n - y_n) = 0$. Omdat 1 enkelvoudige eigenwaarde is van T geldt $Qy_n = \gamma_n u$ $(\gamma_n \in \mathbb{C})$, dus $\eta = \gamma\bar{u}$, waarbij $\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n$, en $\bar{u}$ het beeld is van u onder de kanonieke inbedding $\eta_E: E \to \overline{E}$. Daaruit volgt dat 1 een enkelvoudige eigenwaarde is van $\overline{T}$.

Zij $R := \{\eta \in \overline{E} \mid \overline{Q}(|\eta|) = 0\}$. R is een $\overline{T}$-invariant gesloten ideaal in $\overline{E}$. Zij $\tilde{T}$ resp. $\tilde{Q}$ de door $\overline{T}$ resp. $\overline{Q}$ in $\tilde{E} = \overline{E}/R$ geïnduceerde operator. Dan geldt: $\tilde{Q}\tilde{T} = \tilde{Q}$, en uit de definitie van R volgt dat $\tilde{Q}$ positief definiet is. Zij $\overline{T}_1$ de door $\overline{T}$ in R geïnduceerde operator. De restriktie van $\overline{Q}$ tot R is 0, dus $\overline{T}_1$ heeft in 1 geen pool. Derhalve geldt $r(\overline{T}_1) < 1$. Uit appendix, stelling 3.7 en 3.8 volgt dan: $R(\lambda;\tilde{T})$ heeft in 1 een pool van de eerste orde met residu $\tilde{Q}$. 1 is weer enkelvoudige eigenwaarde van $\tilde{T}$.

Zij $\tilde{u}$ het beeld van $\bar{u}$ onder de projektie $\overline{E} \to \tilde{E}$.
Zij $E_{\tilde{u}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\{\tilde{\eta} \in \tilde{E} \mid |\tilde{\eta}| \leq \tilde{u}\}$. Zij H de afsluiting van $E_{\tilde{u}}$.
Omdat $\tilde{T}\tilde{u} = \tilde{u}$ is H een gesloten $\tilde{T}$-invariant ideaal in $\tilde{E}$. Zij S_1 de restriktie van $\tilde{T}$ tot H en zij S_2 de door $\tilde{T}$ in $\tilde{E}/H$ geïnduceerde operator. Omdat $\tilde{Q}(\tilde{E}) \subset H$ heeft S_2 in 1 geen pool.

$$1 \notin \sigma(S_2), \text{ dus } r(S_2) < 1.$$

Uit appendix, stelling 3.7 en 3.8 volgt weer: $R(\lambda;S_1)$ heeft in 1 een pool van de eerste orde. S_1 is een irreducibele operator, immers, stel $G \neq \{0\}$ is een S_1-invariant ideaal in H. G is ook een $\tilde{Q}$-invariant ideaal in $\tilde{E}$. Omdat 1 een enkelvoudige eigenwaarde van $\tilde{T}$ is, geldt $\tilde{u} \in G$. Maar $\tilde{u}$ is een kwasi-inwendig punt van H, dus $G = H$.

Zij nu $\alpha \in \mathrm{Per}\,\sigma(T)$, dus $|\alpha| = 1$. Dan geldt volgens appendix, stelling 4.3: $\alpha \in P\sigma(\overline{T})$. Zij $\overline{T}\theta = \alpha\theta$ $(\theta \neq 0)$. Dan geldt $|\theta| \leq \overline{T}(|\theta|)$ en $|\theta| \leq \overline{Q}(|\theta|)$.
Daaruit volgt: $\theta \notin R$, dus $\tilde{T}\tilde{\theta} = \alpha\tilde{\theta} \neq \tilde{0}$. Daaruit volgt $|\tilde{\theta}| \leq \tilde{T}|\tilde{\theta}|$; omdat $\tilde{Q}\tilde{T} = \tilde{Q}$ en omdat $\tilde{Q}$ positief definiet is, geldt: $\tilde{T}|\tilde{\theta}| = |\tilde{\theta}|$. $|\tilde{\theta}|$ is een veel-

voud van $\tilde{u}$, dus $\tilde{\theta} \in H$. Daaruit volgt: $\alpha \in P\sigma(S_1)$. Er is een torsie V op H zó dat $V^{-1}S_1V = \alpha S_1$ (zie het bewijs van stelling 6.3). Daaruit volgt dat α een pool is van de eerste orde van $R(\lambda;S_1)$.

Omdat $r(S_2) < 1$ is α een pool van de eerste orde van $R(\lambda;\tilde{T})$; omdat $r(T_1) < 1$ is α een pool van de eerste orde van $R(\lambda;\overline{T})$ (volgt uit appendix, stelling 3.8). Uit appendix, lemma 4.2 volgt dat: α is een pool van de eerste orde van $R(\lambda;T)$.

□

6.6 Opmerkingen

1. Stelling 6.5 is een verscherping van stelling I. 5.15 voor het geval dat E een Banachrooster is.
2. Als T een irreducibele operator is in een Banach-rooster E en $r = r(T)$ is een pool van $R(\lambda;T)$, dan is $r > 0$. Daaruit volgt dat de voorwaarde $r(T) = 1$ in stelling 6.5 geen beperking der algemeenheid betekent. (Bij de eigenwaarde r behoort een positieve eigenvektor x; immers, zij $Q = \lim_{\lambda \downarrow 1} (\lambda - r)^k R(\lambda;T)$ de hoofdterm van de Laurent-ontwikkeling van $R(\lambda;T)$ om r. Q is positief en $TQ = rQ$; de positieve kegel E^+ in E is voortbrengend, dus $\exists y \in E : Qy = x > 0$; dan geldt $Tx = TQy = rQy = rx$. Voor zekere $\lambda > r(T) = y = TR(\lambda;T)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{\lambda})^n x$ een kwasi-inwendig punt. Daaruit volgt: $r > 0$ en x is een kwasi-inwendig punt.)

Literatuur

[1] N. Bourbaki, Intégration, Ch. I-IV, Hermann, Paris, 1965.

[2] N.Dunford and J.T. Schwartz,Linear operators I, Interscience, New York, 1958.

[3] M.A. Kaashoek, Geordende vektorruimten (kollegediktaat), Vrije Universiteit, 1969.

[4] H.P. Lotz, Über das Spektrum positiver Operatoren, Math. Zeitschrift 108,(1968), 15-32.

[5] C.E. Rickart, General theory of Banach algebras, D. van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.

[6] H.H. Schaefer, Topological vector spaces, MacMillan Co., New York, 1966.

[7] M. Wolff, Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in C(X), Math. Ann. 182,(1969), 161-169.

[8] H.P. Lotz und H.H. Schaefer, Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima, Math. Zeitschrift 108,(1968), 33-36.

[9] H.H. Schaefer, Invariant ideals of positive operators in C(X) I, Illinois J. of Math., 11,(1967), 703-715.

Hoofdstuk IV.
Operator-Polynomen met Positieve Koëfficiënten

door

H. Bart

0. Inleiding

0.0 Onder een operator verstaan we een lineaire afbeelding van een Banachruimte in zichzelf. Identieke operatoren duiden we steeds aan met het symbool I. De verzameling van alle kompakte operatoren in een Banachruimte E duiden we aan met $K(E)$. Het inwendige, resp. het lineair omhulsel, van een deelverzameling V van een Banachruimte duiden we aan met V^o, resp. spV. Is E een komplekse Banachruimte en A een operator in E, dan stellen we gemakshalve $E^c = E$ en $A^c = A$ (vgl. Appendix 5.1).

0.1 Zij E een Banachruimte en n een positief natuurlijk getal. Voorzien van de produktoperaties en een produktnorm is E^n een Banachruimte.

Zij $i \in \{1,\ldots,n\}$. De afbeelding $\pi_i : E^n \to E$, gedefinieerd door

$$\pi_i(x_1,\ldots,x_n) := x_i ,$$

is een kontinue lineaire afbeelding van E^n op E en wordt de i^e projektie. van E^n op E genoemd; de afbeelding $\sigma_i : E \to E^n$, gedefinieerd door

$$\sigma_i(x) := (0,\ldots,0,x,0,..,0) \text{ (met x op de } i^e \text{ plaats)},$$

is een kontinue lineaire afbeelding van E in E^n en wordt de i^e inbedding van E in E^n genoemd.

0.2 Zij E een Banachruimte en n een positief natuurlijk getal. Als $g \in (E^n)'$ en $i \in \{1,\ldots,n\}$, dan $g\sigma_i \in E'$. Definieren we $J : (E^n)' \to (E')^n$ door $J(g) := (g\sigma_1,\ldots,g\sigma_n)$, dan is J een topologische isomorfie van $(E^n)'$ op $(E')^n$. Voor $f = (f_1,\ldots,f_n) \in (E')^n$ en $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ geldt

$$J^{-1}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

0.3 Zij E een reële Banachruimte en n een positief natuurlijk getal. Definieren we $T : (E^n)^c \to (E^c)^n$ door

$$T((x_1,\ldots,x_n) + i(y_1,\ldots,y_n)) := (x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n),$$

dan is T een topologische isomorfie van $(E^n)^c$ op $(E^c)^n$.

0.4 Zij E een Banachruimte over $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$), n een positief natuurlijk getal en $A_k \in L(E)$ $(k=1,\ldots,n)$. De afbeelding $L : \mathbb{K} \to L(E)$, gedefinieerd door

$$L(\lambda) := \lambda^n I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} A_k,$$

heet het <u>operator-polynoom</u> met <u>koëfficiënten</u> A_1 t/m A_n. L is een differentieerbare afbeelding van $\mathbb{K}$ in $L(E)$.

0.5 In het volgende zullen we laten zien dat verschillende stellingen uit de spektraaltheorie der positieve begrensde operatoren - waaronder de stelling van Krein-Rutman- met behulp van een van H. Wielandt afkomstige lineariseringsmethode gegeneraliseerd kunnen worden tot uitspraken over operator-polynomen met positieve koëfficiënten. De betreffende generalisaties zijn ontleend aan Maibaum, G. : Über Scharen positiver Operatoren, Math. Ann. 184, 238-256 (1970).

1. Operator-Matrices

1.0 In deze paragraaf is E een Banachruimte en n een positief natuurlijk getal. Voor de betekenis der symbolen π_i, σ_i (i=1,...,n), J en T verwijzen we naar 0.1 t/m 0.3.

1.1 Definitie Als A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n), dan is $A : E^n \to E^n$, gedefinieerd door

$$(Ax)_i := \sum_{k=1}^{n} A_{ik}x_k \quad (x = (x_1,...,x_n) \in E^n;\ i = 1,...,n),$$

een operator in E^n. We schrijven kortweg

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ of } A = (A_{ik}).$$

1.2 Propositie Zij A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Zij B_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $B = (B_{ik})$. Dan $AB = (C_{ik})$ met

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} \qquad (i,k = 1,...,n).$$

Bewijs: Evident.

1.3 Propositie Zij A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Dan

(i) $A_{jm} = \pi_j A\, \sigma_m \quad (j,m = 1,...,n)$,

(ii) $A = \sum_{i,k=1}^{n} \sigma_i A_{ik} \pi_k$.

Bewijs: Is eenvoudig na te rekenen.

1.4 Propositie Zij A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Dan

(i) $A \in L(E^n) \Longleftrightarrow A_{ik} \in L(E)$ (i,k = 1,...,n),

(ii) $A \in K(E^n) \Longleftrightarrow A_{ik} \in K(E)$ (i,k = 1,...,n).

Bewijs: Volgt direkt uit prop. 1.3.

1.5 Propositie Zij $A_{ik} \in L(E)$ (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Dan geldt

$$JA'J^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{n1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{n2} \\ & & & \\ A'_{1n} & A'_{2n} & \cdots & A'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Bewijs: Volgt direkt uit de definities.

1.6 Propositie Zij $A_k \in K(E)$ (k = 1,...,n) en zij A gedefinieerd door

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I \quad 0 \end{bmatrix}.$$

Dan $A^n \in K(E^n)$.

Bewijs: Zij $m \in \{1,...,n\}$. M.b.v. prop. 1.2 leiden we gemakkelijk af:

$$A^m = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{m rijen}$$

Hierin duiden de sterretjes kompakte operatoren (in E) aan. Het gestelde volgt nu uit prop. 1.4.

1.7 In de rest van deze paragraaf is E een reële Banachruimte en K een gesloten kegel in E.

1.8 Propositie Zij A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Dan

$$TA^cT^{-1} = \begin{pmatrix} A^c_{11} & A^c_{12} & \cdots & A^c_{1n} \\ A^c_{21} & A^c_{22} & \cdots & A^c_{2n} \\ & & & \\ A^c_{n1} & A^c_{n2} & \cdots & A^c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bewijs: Volgt direkt uit de definities.

1.9 Propositie

(i) K^n is een gesloten kegel in E^n.
(ii) $J((K^n)') = (K')^n$.
(iii) K^n totaal $\Longleftrightarrow$ K totaal.
(iv) K^n voortbrengend $\Longleftrightarrow$ K voortbrengend,
(v) $(K^n)^o = (K^o)^n$; K^n ruimtelijk $\Longleftrightarrow$ K ruimtelijk.
(vi) K^n normaal $\Longleftrightarrow$ K normaal.

Bewijs: Volgt direkt uit de definities.

1.10 Propositie Zij A_{ik} operator in E (i,k = 1,...,n) en $A = (A_{ik})$. Dan geldt: A positief (m.b.t. K^n) $\Longleftrightarrow$ A_{ik} positief (m.b.t. K) (i,k = 1,...,n).
Bewijs: Het is duidelijk dat $\sigma_i(K) \subset K^n$ en $\pi_i(K^n) \subset K$ (i = 1,...,n).
Het gestelde volgt nu uit prop. 1.3.

1.11 Propositie Zij A_k een van de nul-operator verschillende (m.b.t. K) positieve operator in E (k = 1,...,n-1) en zij A_n een (m.b.t. K) sterk-positieve operator in E. Is A gedefinieerd door

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots\cdots & A_n \\ I & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0\ I & 0 \end{pmatrix},$$

dan is A sterk-positief (m.b.t. K^n).

Bewijs: Zij A_0 := I. M.b.v. prop. 1.2 leiden we gemakkelijk af:

$$A^j = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & (A_n +\!\!*) & * & \cdots & (A_{j-1}A_n +\!\!*) \\ * & \cdots & * & * & (A_n +\!\!*) & \cdots & (A_{j-2}A_n +\!\!*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & & & & (A_n +\!\!*) & (A_1A_n +\!\!*) \\ * & \cdots & & & & \cdots & A_n \\ I & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0\ I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} j \text{ rijen} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (j = 1,\ldots,n),$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (A_n +\!\!*) & * & * & \cdots & (A_{n-1}A_n + *) \\ & (A_n +\!\!*) & * & \cdots & (A_{n-2}A_n + *) \\ & & (A_n +\!\!*) & \cdots & (A_{n-3}A_n + *) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

$$A^{nm} = \begin{pmatrix} (A_n^m + *) & * & * & \cdots & (A_{n-1}A_n^m + *) \\ * & (A_n^m + *) & * & \cdots & (A_{n-2}A_n^m + *) \\ * & * & (A_n^m + *) & \cdots & (A_{n-3}A_n^m + *) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & (A_n^m + *) \end{pmatrix} \quad (m = 1,2,\ldots), \qquad (1)$$

$$A^{nm+j} = \begin{pmatrix} * \cdots * & (A_{n-1}A_n^m + *) & * \cdots * \\ * \cdots * & (A_{n-2}A_n^m + *) & * \cdots * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ * \cdots * & (A_n^m + *) & * \cdots * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (m = 1,2,\ldots) \\ (j = 0,\ldots\ldots,n-1). \end{matrix} \qquad (2)$$

$(n-j)^e$ kolom

Hierin duiden de sterretjes positieve operatoren (m.b.t. K) aan. Zij $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K^n \setminus \{0\}$. Kies $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ en $m \geq 1$ zó dat $x_{n-j} \in K \setminus \{0\}$ en $A_n^m x_{n-j} \in K^o$. Definieren we $y = (y_1,\ldots,y_n) \in E^n$ door $y := A^{nm+j}x$ dan geldt

$$y_k - A_{n-k}A_n^m x_{n-j} \in K \qquad (k = 1,\ldots,n). \qquad \text{(zie (2))}$$

$[A_n^m x_{n-j} \in K^o$ en $A_{n-k} \neq 0] \Rightarrow A_{n-k}A_n^m x_{n-j} \in K \setminus \{0\} \Longrightarrow y_k \in K \setminus \{0\}$ $(k=1,\ldots,n)$ (zie prop. II.4.5).

$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \exists m_k \geq 1 : A_n^{m_k} y_k \in K^o$. Voor $M := \max\{m_k : k = 1, \ldots,n\}$ geldt nu

$$A_n^M y_k \in K^o \qquad (k = 1,\ldots,n) \qquad \text{(zie prop. II.4.10)}.$$

Definieren we $z = (z_1,\ldots,z_n) \in E^n$ door $z := A^{nM}y$, dan geldt

$$z_k - A^M_n y_k \in K \quad (k = 1,\ldots,n), \qquad \text{(zie (1))}$$

en dus

$$z_k \in K^o + K \subset K^o \quad (k = 1,\ldots,n). \quad \text{(zie II.4.2).}$$

Stellen we $N := n(M + m) + j$, dan

$$A^N x = A^{nM}y = z \in (K^o)^n = (K^n)^o. \quad \text{(zie prop. 1.9)}$$

Hiermede is de stelling bewezen.

2. Linearisering van Operator-Polynomen

2.0 In deze paragraaf is E een niet-triviale Banachruimte over $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$), n een positief natuurlijk getal en $A_k \in L(E)$ $(k = 1,\ldots,n)$. L is het operator-polynoom met koëfficiënten A_1 t/m A_n, d.w.z.

$$L(\lambda) = \lambda^n I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} A_k \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Voor de betekenis der symbolen π_i, σ_i $(i = 1,\ldots,n)$, J en T verwijzen we naar 0.1 t/m 0.3.

2.1 Definitie Het operator-polynoom met koëfficiënten A_1' t/m A_n' noemen we het aan L geadjungeerde operator-polynoom en duiden we aan met L'; het operator-polynoom met koëfficiënten A_1^c t/m A_n^c noemen we de kompleksifikatie van L en duiden we aan met L^c.

2.2 Opmerking Is $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dan $L = L^c$. (vgl. 0.0). $\forall \lambda \in \mathbb{K} : L'(\lambda) = L(\lambda)'$ en $L^c(\lambda) = L(\lambda)^c$.

2.3 Definitie De verzameling $\rho(L)$ van alle $\lambda \in \mathbb{C}$ zó dat $L^c(\lambda)$ inverteerbaar is (in $L(E^c)$) heet de resolvente verzameling van L. Het komplement van $\rho(L)$ in $\mathbb{C}$ noemen we het spektrum van L en duiden we aan met $\sigma(L)$. Daar, zoals in 2.12 zal blijken, $\sigma(L)$ een niet-lege kompakte deelverzameling is van $\mathbb{C}$, is het zinvol de spektraalradius van L te definieren door $r(L) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}$. Onder het perifere spektrum Per $\sigma(L)$ van L verstaan we de verzameling van alle $\lambda \in \sigma(L)$ met $|\lambda| = r(L)$. De afbeelding $\lambda \mapsto L^c(\lambda)^{-1}$ is een differentieerbare afbeelding van de open verzameling $\rho(L)$ in $L(E^c)$ en wordt de resolvente van L genoemd. Een geïsoleerd punt λ_o van $\sigma(L)$ heet een pool van L van de orde m als λ_o een pool is van de resolvente van L van de orde m; is m = 1 dan noemen we λ_o een enkelvoudige pool van L. De verzameling van alle polen van L duiden we aan met Pol $\sigma(L)$. Een getal $\lambda_o \in \mathbb{K}$ heet een eigenwaarde van L als $L(\lambda_o)$ niet injektief is; een element $x_o \in E$ heet een bij de eigenwaarde λ_o behorende eigenvektor als

$L(\lambda_o)x_o = 0$ en $x_o \neq 0$. Onder de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde λ_o van L verstaan we de dimensie van de nulruimte van $L(\lambda_o)$. Is de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde λ_o van L gelijk aan 1, dan noemen we λ_o een enkelvoudige eigenwaarde van L.

2.4 Opmerking De in 2.3 ingevoerde begrippen zijn generalisaties van noties uit de (gewone) spektraaltheorie; deze korrespondeert met het geval n = 1.

2.5 Definitie Onder de eerste lineariserende operator van L verstaan we de operator $A_L \in L(E^n)$ gedefinieerd door

$$A_L := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots\cdots & A_n \\ I & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & I & 0 \cdots\cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0\ I & 0 \end{bmatrix} .$$

Onder de tweede lineariserende operator van L verstaan we de operator $B_L \in L(E^n)$ gedefinieerd door

$$B_L := \begin{bmatrix} A_1 & I & 0 \cdots\cdots & 0 \\ A_2 & 0 & I\ 0 \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ A_{n-1} & 0 & \cdots 0 & I \\ A_n & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} .$$

2.6 Opmerking Uit 1.4 volgt: $A_L, B_L \in L(E^n)$.

2.7 Propositie

(i) Als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dan $T(A_L)^c T^{-1} = A_{L^c}$.

(ii) $J(A_L)'J^{-1} = B_{L'}$.

Bewijs: Volgt direkt uit de proposities 1.8 en 1.5.

2.8 Propositie Zij $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ en $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\text{(i)}\quad A_L x = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} L(\lambda)x_n = 0 \\ x_k = \lambda^{n-k}x_n \quad (k = 1,\ldots,n-1). \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad B_L x = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} L(\lambda)x_1 = 0 \\ x_k = [\lambda^{k-1}I - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{k-1-i}A_i]x_1 \quad (k = 2,\ldots,n). \end{cases}$$

Bewijs: Volgt direkt uit de definities.

2.9 Gevolg Zij $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\lambda I - A_L$ injektief $\Longleftrightarrow$ $L(\lambda)$ injektief.

(ii) $\lambda I - B_L$ injektief $\Longleftrightarrow$ $L(\lambda)$ injektief.

(iii) λ eigenwaarde van $A_L[B_L]$ met meetkundige multipliciteit m $\Longleftrightarrow$ λ eigenwaarde van L met meetkundige multipliciteit m.

2.10 Propositie Zij $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\lambda I - A_L$ surjektief $\Longleftrightarrow$ $L(\lambda)$ surjektief.

(ii) $\lambda I - B_L$ surjektief $\Longleftrightarrow$ $L(\lambda)$ surjektief.

Bewijs: We tonen alleen (i) aan; het bewijs van (ii) verloopt analoog.

(a) Zij $\lambda I - A_L$ surjektief en $y \in E$. Kies $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ zó dat $(\lambda I - A_L)x = \sigma_1 y$. Dan $L(\lambda)(\pi_n x) = L(\lambda)x_n = y$.

(b) Zij $L(\lambda)$ surjektief en $y = (y_1,\ldots,y_n) \in E^n$. Definieer $\phi_k(\lambda) : E^n \to E$ door $\phi_k(\lambda) := \sum_{i=0}^{n-k-1} \lambda^{n-k-1-i}\pi_{n-i}$ $(k = 0,\ldots,n-1)$.

Kies $u \in E$ zó dat

$$L(\lambda)u = [\phi_o(\lambda) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,\phi_k(\lambda)]y.$$

Definieren we $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ door

$$x_k := \begin{cases} u & (k = n) \\ \lambda^{n-k}u - \phi_k(\lambda)y & (k=1,\ldots,n-1), \end{cases}$$

dan geldt

$$(\lambda I - A_L)x = y.$$

2.11 Propositie

(i) $\rho(L) = \rho(A_L)$.
(ii) $\sigma(L) = \sigma(A_L)$.
(iii) $r(L) = r(A_L)$.
(iv) Per $\sigma(L)$ = Per $\sigma(A_L)$.

Bewijs: Het is voldoende (i) aan te tonen. We onderscheiden twee gevallen namelijk (a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en (b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) $\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(\lambda)$ bijektief$\}$ = (zie 2.9 en 2.10)
$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A_L$ bijektief$\}$ =
$= \rho(A_L)$

(b) Per definitie geldt $\rho(L) = \rho(L^c)$ en $\rho(A_L) = \rho((A_L)^c)$. Uit 2.7 en 0.3 volgt $\rho((A_L)^c) = \rho(A_{Lc})$. Onder (a) is bewezen $\rho(L^c) = \rho(A_{Lc})$. Hieruit volgt $\rho(L) = \rho(L^c) = \rho(A_{Lc}) = \rho((A_L)^c) = \rho(A_L)$.

2.12 Gevolg $\sigma(L)$ is een niet-lege kompakte deelverzameling van $\mathbb{C}$.
Bewijs: $[E^n \neq \{0\}$ en $A_L \in L(E^n)] \Longrightarrow \sigma(A_L)$ niet-lege kompakte deelverzameling van $\mathbb{C}$. Het gestelde volgt nu uit 2.11.

2.13 Propositie Zij $\lambda_o \in \mathbb{C}$ en m een natuurlijk getal. Dan geldt: λ_o pool van A_L van de orde $m \Longleftrightarrow \lambda_o$ pool van L van de orde m.
Bewijs: Zij $A := A_L$.

(i) We behandelen eerst het geval $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zij λ_o pool van A van de orde m. Uit propositie 2.11 volgt dat λ_o een geïsoleerd punt is van $\sigma(L)$. Uit het eerste gedeelte van het bewijs van 2.10 blijkt dat

$$L(\lambda)^{-1} = \pi_n(\lambda I - A)^{-1}\sigma_1 \qquad (\lambda \in \rho(L) = \rho(A)).$$

Hieruit volgt direkt dat λ_o een pool is van L met orde $\leq$ m.
Zij λ_o een pool van L van de orde m. Uit propositie 2.11 volgt dat λ_o een geïsoleerd punt is van $\sigma(A)$. Definieren we ψ op $\mathbb{C}$ door

$$\psi(\lambda) := \phi_o(\lambda) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot \phi_k(\lambda)$$

(hierin is $\phi_k(\lambda)$ gedefinieerd als in het bewijs van 2.10), dan is ψ een differentieerbare afbeelding van $\mathbb{C}$ in de Banachruimte van alle begrensde operatoren van E^n in E. Uit het tweede gedeelte van het bewijs van 2.10 blijkt dat

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k}\sigma_k L(\lambda)^{-1}\psi(\lambda) - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \phi_k(\lambda) \quad (\lambda \in \rho(A) = \rho(L)).$$

Hieruit volgt direkt dat λ_o een pool is van A met orde $\leq$ m.
Hiermede is het gestelde in het geval $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bewezen.

(ii) Vervolgens behandelen we het geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dan geldt:

λ_o pool van A van de orde m $\iff$ (per def.)
λ_o pool van A^c van de orde m $\iff$ (zie 2.7 en 0.3)
λ_o pool van A_{L^c} van de orde m $\iff$ (zie (i))
λ_o pool van L^c van de orde m $\iff$ (zie 2.3)
λ_o pool van L van de orde m.

2.14 Gevolg Pol $\sigma(L)$ = Pol $\sigma(A_L)$.

2.15 Opmerking Voor B_L gelden analoge beweringen.

3. Operator-Polynomen met Positieve Koëfficiënten

3.0 In deze paragraaf is E een niet-triviale reële Banachruimte, K een gesloten kegel in E, n een positief natuurlijk getal, $A_k \in L(E)$ positief (m.b.t. K) (k = 1,...,n) en L het operator-polynoom met koëfficiënten A_1 t/m A_n, d.w.z.

$$L(\lambda) = \lambda^n I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} A_k \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Voor de betekenis der symbolen σ_1 en J verwijzen we naar 0.1 en 0.2.

3.1 Stelling ([1], Satz 1(2.2)).
Is K totaal, r = r(L) en Per $\sigma(L) \subset$ Pol $\sigma(L)$, dan geldt:
(i) $r \in \sigma(L)$ en r is een pool van maximale orde in Per $\sigma(L)$,
(ii) $\exists x \in K\setminus\{0\} : L(r)x = 0$,
(iii) $\exists f \in K'\setminus\{0\} : L'(r)f = 0$.

Bewijs: Zij $A := A_L$ en $B := B_{L'}$.

(0) E^n is een niet-triviale reële Banachruimte. M.b.v. de resultaten uit de paragrafen 1 en 2 verifiëren we gemakkelijk: K^n is een totale gesloten kegel in E^n, $A \in L(E^n)$ is positief (m.b.t. K^n), r(A) = r(L) = r en Per $\sigma(A) \subset$ Pol $\sigma(A)$. Hieruit blijkt dat we II.3.4 kunnen toepassen.

(i) Volgt direkt uit II.3.4, 2.11 en 2.13.

(ii) $\exists y = (y_1,\ldots,y_n) \in K^n\setminus\{0\} : Ay = ry$ (zie II.3.4). Stellen we $x := y_n$, dan geldt (zie 2.8)

$$x \in K\setminus\{0\} \text{ en } L(r)x = 0.$$

(iii) $\exists g \in (K^n)'\setminus\{0\} : A'g = rg$ (zie II.3.4). Definieren we $h = (h_1,\ldots,h_n) \in (E')^n$ door $h := Jg$, dan

$$h \in (K')^n\setminus\{0\} \text{ en } Bh = rh . \qquad \text{(zie 0.2, 1.9 en 2.7).}$$

Stellen we $f := h_1$, dan

$$f \in K'\setminus\{0\} \text{ en } L'(r)f = 0. \qquad \text{(zie 2.8)}$$

3.2 Stelling Is K totaal, $r = r(L) > 0$ en $A_k \in K(E)$ $(k = 1,\ldots,n)$, dan geldt:

(i) $r \in \sigma(L)$ en r is een pool van maximale orde in Per $\sigma(L)$,
(ii) $\exists x \in K \setminus \{0\} : L(r)x = 0$,
(iii) $\exists f \in K' \setminus \{0\} : L'(r)f = 0$.

Bewijs: Zij $A := A_L$.
Daar $A^n \in K(E^n)$ (zie 1.6) en $r(A) = r(L) = r > 0$ (zie 2.11) geldt:

$$\text{Per } \sigma(A) \subset \sigma(A) \setminus \{0\} \subset \text{Pol } \sigma(A)).$$

M.b.v. 2.11 en 2.14 vinden we

$$\text{Per } \sigma(L) \subset \text{Pol } \sigma(L).$$

Het gestelde volgt nu uit stelling 3.1.

3.3 Stelling [1], Satz 3(2.2)).
Is K ruimtelijk, $A_k \neq 0$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$, A_n sterk-positief (m.b.t. K), Per $\sigma(L) \subset$ Pol $\sigma(L)$ en $r = r(L)$, dan geldt:

(i) $0 < r \in \sigma(L)$,
(ii) er bestaat een $x \in K^o$ zó dat
  (a) $L(r)x = 0$
  (b) $[\overline{r} > 0, \overline{x} \in K \setminus \{0\}$ en $L(\overline{r})\overline{x} = 0] \Rightarrow \overline{r} = r$ en $\overline{x} \in \text{sp}\{x\}$,
(iii) r is enkelvoudige eigenwaarde van L,
(iv) r is enkelvoudige pool van L,
(v) Per $\sigma(L) = \{r\}$,
(vi) er bestaat een $f \in K'$ zó dat
  (a) $L'(r)f = 0$ en $f(t) > 0$ $(t \in K \setminus \{0\})$
  (b) $[\overline{r} > 0, \overline{f} \in K' \setminus \{0\}$ en $L'(\overline{r})\overline{f} = 0] \Rightarrow \overline{r} = r$ en $\overline{f} \in \text{sp}\{t\}$.

Bewijs: Zij $A := A_L$ en $B := B_{L'}$.

(0) E^n is een niet-triviale reële Banachruimte. M.b.v. de resultaten uit de paragrafen 1 en 2 verifiëren we gemakkelijk: K^n is een ruimtelijke gesloten kegel in E^n, $A \in L(E^n)$ is sterk-positief (m.b.t. K^n), Per $\sigma(A) \subset \text{Pol } \sigma(A)$ en $r = r(L) = r(A)$. Hieruit blijkt dat we stelling II.4.13 kunnen toepassen.

(i) Uit stelling II.4.13 en propositie 2.11 volgt

$$0 < r \in \sigma(A) = \sigma(L).$$

(ii) Volgens II.4.13 $\exists y = (y_1,\ldots,y_n) \in (K^n)^o$ zó dat

(1) $Ay = ry$

(2) $[\overline{r} > 0, \overline{y} \in (K^n)\setminus\{0\}$ en $A\overline{y} = \overline{ry}] \Rightarrow \overline{r} = r$ en $y \in \text{sp}\{y\}$.

Stellen we $x := y_n$, dan

$$x \in K^o \text{ en } L(r)x = 0. \qquad \text{(zie 1.9 en 2.8).}$$

Onderstel nu: $\overline{r} > 0$, $\overline{x} \in K\setminus\{0\}$ en $L(\overline{r})\overline{x} = 0$. We zullen aantonen dat $\overline{r} = r$ en $\overline{x} \in \text{sp}\{x\}$.
Definieren we $\overline{y} \in E^n$ door

$$\overline{y} := (\overline{r}^{n-1}\,\overline{x},\ldots,\overline{rx},\ \overline{x}),$$

dan

$$\overline{y} \in K^n\setminus\{0\} \text{ en } A\overline{y} = \overline{ry}. \quad \text{(zie 2.8).}$$

Dus

$$\overline{r} = r \text{ en } \overline{y} \in \text{sp}\{y\}.$$

Het is nu duidelijk dat

$$\overline{x} = \overline{y}_n \in \text{sp}\{y_n\} = \text{sp}\{x\}.$$

Konklusie:

$$\overline{r} = r \text{ en } \overline{x} \in \text{sp}\{x\}.$$

(iii) Volgens II.4.13 is r een enkelvoudige eigenwaarde van A. Uit 2.9 volgt dat r een enkelvoudige eigenwaarde is van L.

(iv) Volgens II.4.13 is r een enkelvoudige pool van A. Uit 2.13 volgt dat r een enkelvoudige pool is van L.

(v) Uit II.4.13 en 2.11 volgt

$$\text{Per } \sigma(L) = \text{Per } \sigma(A) = \{r\}.$$

(vi) Volgens II.4.13 : $\exists\, g \in (K^n)'$ zó dat

(1) $A'g = rg$ en $g(v) > 0 \quad (v \in K^n \setminus \{0\})$

(2) $[\bar{r} > 0,\ \bar{g} \in (K^n)' \setminus \{0\}$ en $A'\bar{g} = \overline{rg} \Rightarrow \bar{r} = r$ en $\bar{g} \in \text{sp}\{g\}$.

Definieren we $h = (h_1,\ldots,h_n) \in (E')^n$ door $h := Jg$,
dan

$$h \in (K')^n \text{ en } Bh = rh \,. \qquad \text{(zie 1.9 en 2.7)}$$

Stellen we $f := h_1$, dan $f \in K'$.
Bovendien geldt:

$$L'(r)f = 0. \qquad \text{(zie 2.8)}$$

Als $t \in K \setminus \{0\}$, dan $\sigma_1 t \in K^n \setminus \{0\}$ en dus

$$0 < g(\sigma_1 t) = h_1(t) = f(t). \qquad \text{(zie 0.2)}$$

Dus

$$f \in K',\ f(t) > 0 \quad (t \in K \setminus \{0\}) \text{ en } L'(r)f = 0.$$

Onderstel nu: $\bar{r} > 0$, $\bar{f} \in K' \setminus \{0\}$ en $L'(\bar{r})\bar{f} = 0$. We zullen aantonen dat $\bar{r} = r$ en $\bar{f} \in \text{sp}\{f\}$.
Definieer $\bar{h} = (\bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_n) \in (E')^n$ door

$$\bar{h}_k := \begin{cases} \bar{f} & (k=1) \\ [\bar{r}^{k-1} I - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{r}^{k-1-i} A_i'] \bar{f} & (k = 2,\ldots,n) \end{cases} .$$

Dan

$$\bar{h} \neq 0 \text{ en } B\bar{h} \doteq \overline{rh} . \qquad \text{(zie 2.8).}$$

Dus

$$\begin{cases} A_k' \bar{f} + \bar{h}_{k+1} = \overline{rh}_k & (k = 1,\ldots,n-1) \\ A_n' \bar{f} = \overline{rh}_n . \end{cases} \qquad \text{(zie 2.5)}$$

Als $u \in K$, dan $A_k u \in K$ en dus $\bar{f}(A_k u) \geq 0$ $(k = 1,\ldots,n)$.

Hieruit volgt

$$\bar{r}\,\bar{h}_n(u) = (A_n' \bar{f})(u) = \bar{f}(A_n u) \geq 0,$$

en dus

$$\bar{h}_n(u) \geq 0.$$

Voorts

$$\bar{r}\,\bar{h}_{n-1}(u) = \bar{h}_n(u) + (A_{n-1}' \bar{f})(u) = \bar{h}_n(u) + \bar{f}(A_{n-1} u) \geq 0,$$

en dus

$$\bar{h}_{n-1}(u) \geq 0$$

Zo voortgaande vinden we:

$$\bar{h}_k(u) \geq 0 \quad (k = 1,\ldots,n).$$

Hieruit volgt

$$\overline{h} \in (K')^n.$$

Definieren we $\overline{g}$ door

$$\overline{g} := J^{-1}\overline{h},$$

dan geldt

$$\overline{g} \in (K^n)' \setminus \{0\} \text{ en } A'\overline{g} = \overline{rg}. \text{ (zie 0.2, 1.9 en 2.7)}$$

Dus

$$\overline{r} = r \text{ en } \overline{g} \in sp\{g\}.$$

Hieruit volgt

$$\overline{h} = J\overline{g} \in sp\{Jg\} = sp\{h\},$$

en dus

$$\overline{f} = \overline{h}_1 \in sp\{h_1\} = sp\{f\}.$$

3.4 Stelling ([1], Satz 6(2.2)).
Is K ruimtelijk en normaal, dan geldt:

$$\exists f \in K' \setminus \{0\} : L'(r)f = 0;$$

hierin is $r = r(L)$.
Bewijs: Zij $A := A_L$.
E^n is een niet-triviale reële Banachruimte. M.b.v. de resultaten uit de paragrafen 1 en 2 verifiëren we gemakkelijk: K^n is een ruimtelijke normale gesloten kegel in E^n, $A \in \mathcal{L}(E^n)$ is positief (m.b.t. K^n) en $r = r(L) = r(A)$. Hieruit blijkt dat we stelling II.3.11 kunnen toepassen:

$$\exists g \in (K^n)' \setminus \{0\} : A'g = rg.$$

Het betoog kan nu worden voltooid met het laatste gedeelte van het bewijs van stelling 3.1.

4. Machtreeksen met Kompakte Positieve Koëfficiënten

4.0 In deze paragraaf is E een niet-triviale reële Banachruimte en $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij in $L(E)$. Onderwerp van onze beschouwingen is de machtreeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

We onderstellen dat de konvergentiestraal R van deze machtreeks positief is (eventueel $R = \infty$); haar som duiden we aan met A. Dus

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k \qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| < R).$$

4.1 De machtreeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k' \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

heeft konvergentiestraal R; haar som duiden we aan met A'. Dus

$$A'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k' \qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| < R).$$

Het is duidelijk dat

$$A'(\lambda) = A(\lambda)' \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| < R).$$

4.2 De machtreeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k^c \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

heeft konvergentiestraal R; haar som duiden we aan met A^c. Dus

$$A^c(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A_k^c \qquad (\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < R).$$

Het is duidelijk dat

$$A^c(\lambda) = A(\lambda)^c \qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| < R).$$

4.3 Onder S verstaan we de verzameling van alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < R$, waarvoor $I - A^c(\lambda)$ niet inverteerbaar is.

Als $A_k \in K(E)$ $(k = 1,2,\ldots)$, dan is S de verzameling van alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < R$, waarvoor 1 eigenwaarde is van $A^c(\lambda)$. Dit volgt direkt uit de equivalentie van de volgende 4 beweringen:

(i) $A(\lambda) \in K(E)$ $\qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| < R)$,
(ii) $A_k \in K(E)$ $\qquad (k = 1,2,\ldots)$,
(iii) $A_k^c \in K(E^c)$ $\qquad (k = 1,2,\ldots)$,
(iv) $A^c(\lambda) \in K(E^c)$ $\qquad (\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < R)$.

4.4 Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling:

Stelling [1], Satz 1(3.2))
Is K een totale gesloten kegel in E, A_k positief (m.b.t. K) en kompakt $(k = 1,\ldots,n)$, $S \neq \emptyset$ en $r = \inf\{|\lambda| : \lambda \in S\}$, dan geldt:

(i) $0 < r \in S$,
(ii) $\exists x \in K \setminus \{0\} : A(r)x = x$,
(iii) $\exists f \in K' \setminus \{0\} : A'(r)f = f$.

Literatuur

[1] Maibaum, G.: Über Scharen positiver Operatoren.
Math. Ann. 184, 238-256 (1970).

Hoofdstuk V

Enkele opmerkingen over strikte halfalgebra's

door

M.A. Kaashoek en H. Pijls

1. Spektrale eigenschappen

Zij B een Banachalgebra met eenheidselement e. In deze paragraaf zijn we geïnteresseerd in de spektrale eigenschappen van een element t in B gelegen in een strikte lokaal kompakte halfalgebra.

1.1 Stelling. Zij A een strikte lokaal kompakte halfalgebra in de Banachalgebra B. Zij $t \in A$. Dan

(i) $r(t) \in \sigma(t)$,

(ii) als $r(t)$ een pool is van t, dan is het een pool van maximale orde in het perifere spektrum van t.

Deze stelling is een analogon van Stelling 3.2 in hoofdstuk II. Het bewijs berust ook op een gegeneraliseerde versie van de stelling van Pringsheim (zie II, §2). We beginnen met een hulpstelling.

1.2 Lemma. Zij A een strikte lokaal kompakte halfalgebra in de Banachalgebra B. Dan is A een gesloten normale kegel in B.

Bewijs. De halfalgebra A is zeker een gesloten kegel in B. Schrijf, voor x en y in B, $x \geq y$ of $y \leq x$ als $x-y \in A$. Om te bewijzen dat A normaal is, moeten we aantonen dat

$$0 \leq x_n \leq y_n \quad (n = 1,2,\ldots), \quad \lim_n y_n = 0 \tag{1}$$

impliceert $\lim_n x_n = 0$.

Neem eerst aan dat de rij $\{x_n\}$ begrensd is. Daar A lokaal kompakt is, heeft de rij $\{x_n\}$ minstens een convergente deelrij. Het is dus voldoende om te bewijzen dat iedere convergente deelrij van $\{x_n\}$ naar nul convergeert. Zij $\{x_{n_i}\}$ een convergente deelrij van de rij $\{x_n\}$, en zij

$$x_0 = \lim_i x_{n_i} \quad .$$

Dan volgt uit (1) dat x_0 en $-x_0$ in A zijn. Maar A is strikt. Dus $x_0 = 0$. Vervolgens nemen we aan dat de rij $\{x_n\}$ niet begrensd is. Er is dan een deelrij $\{x_{n_i}\}$ met $||x_{n_i}|| \geq i$ voor $i = 1,2,\ldots$.
Zij

$$z_i = ||x_{n_i}||^{-1} x_{n_i} \quad , \quad w_i = ||x_{n_i}||^{-1} y_{n_i}$$

voor $i = 1,2,\ldots$. Dan volgt uit (1) dat

$$0 \leq z_i \leq w_i \quad (i = 1,2,\ldots) \quad , \quad \lim_i w_i = 0.$$

Daar de rij $\{z_i\}$ begrensd is, volgt uit het voorgaande dat $z_i \to 0$ voor $i \to +\infty$. Contradictie, want $||z_i|| = 1$ voor $i = 1,2,\ldots$. De rij $\{x_n\}$ is dus wel begrensd. Daaruit volgt $x_n \to 0$ voor $n \to +\infty$.

Daar iedere normale kegel ook zwak normaal is (zie II.1.19), en daar B een volledige genormeerde lineaire ruimte is, kunnen we Stelling II.2.8 gebruiken om de volgende stelling te bewijzen.

1.3 Stelling. Zij A een strikte lokaal kompakte halfalgebra in de Banachalgebra B. Als $a_n \in A$ voor $n = 0,1,\ldots$, en als de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$$

convergentie-straal 1 heeft, dan heeft de analytische functie die binnen de eenheidscirkel door deze machtreeks wordt voorgesteld, een singulier

punt in 1. Als deze singulariteit een pool is, dan heeft deze maximale orde onder de polen op $|z| = 1$.

We willen deze stelling toepassen op de Neumann-reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n t^{n-1}$$

waarbij t behoort tot een strikte lokaal kompakte halfalgebra A. Merk op dat niet noodzakelijk $t^0 = e \in A$. Daarom vermelden we eerst de volgende hulpstelling.

1.4 Lemma. Zij A een halfalgebra in de Banachalgebra B. Zij

$$A_e = \{a + \alpha e : a \in A, \alpha \geq 0\}.$$

Dan
(i) A_e is strikt als en alleen als A strikt is.
Als $A \neq (0)$ en gesloten in B is, dan
(ii) A_e is lokaal kompakt als en alleen als A lokaal kompakt is.
Bewijs: Triviaal.

1.5 Bewijs van Stelling 1.1. Als $r(t) = 0$, dan is de bewering triviaal. Stel daarom $r(t) > 0$. Als $s = \alpha t$ met $\alpha > 0$, dan is s in A, s en t hebben dezelfde spektrale eigenschappen en $r(s) = \alpha\, r(t)$. Zonder bezwaar voor de algemeenheid mogen we dus aannemen dat $r(t) = 1$.
Dan is de convergentie-straal van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\, t^{n-1} \qquad (2)$$

gelijk aan 1. Merk op dat de coëfficiënten van deze machtreeks in A_e zijn. Volgens het gegeven en Lemma 1.4 is A_e lokaal kompakt en strikt. Maar dan volgt uit Stelling 1.3 dat de analytische functie

$$z \longmapsto R(\tfrac{1}{z};t)$$

(dit is de analytische functie die door de machtreeks (2) wordt voorgesteld) singulier is in $z = 1$. Dus $r(t) = 1 \in \sigma(t)$. Verder volgt uit Stelling 1.3 dat, indien 1 een pool is van t, 1 een pool is van maximale orde onder de polen op $|z| = 1$.

1.6 Opmerking. Zij $0 \neq t \in B$. Neem aan dat

$$r(t) \in \sigma(t) \quad , \quad \text{Per } \sigma(t) \subset \text{Pol } \sigma(t). \tag{3}$$

Volgens Stelling I.1.1. is $A(t)$ dan lokaal kompakt. Als we bovendien nog veronderstellen dat $A(t)$ strikt is, dan volgt uit Stelling 1.1 van deze paragraaf dat $r(t)$ een pool is van maximale orde in het perifere spektrum van t. Het is interessant om te vermelden dat ook het omgekeerde juist is. Dus $r(t)$ is een pool van maximale orde in het perifere spektrum van t is niet alleen een nodige, maar ook een voldoende voorwaarde voor het strikt zijn van $A(t)$, aangenomen dat t voldoet aan (3). Voor het bewijs van het voldoende zijn van deze voorwaarden verwijzen we naar §2 van [2] . In de nu volgende paragraaf zullen we ons bezig houden met een speciaal geval van deze bewering.

2. Een nodige en voldoende voorwaarde voor positiviteit.

In II.3 zijn zekere eigenschappen bewezen van het spektrum van een positieve operator. Het is de bedoeling van deze paragraaf na te gaan in hoeverre de daar gevonden eigenschappen karakteristiek zijn voor de operatoren die een kegel invariant laten.

2.1 Stelling. Zij T een lineaire operator op $\mathbb{R}^n$. Stel er geldt:
(i) $r(T) \in \sigma(T)$,
(ii) $r(T)$ is een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$.
Dan bestaat er een gesloten ruimtelijke kegel K in $\mathbb{R}^n$ die invariant is onder T.

Bewijs. We vatten T op als operator op $\mathbb{C}^n$, m.a.w. we identificeren T met zijn complexificatie T^c (zie Appendix 5.1).
We behandelen eerst het geval $r(T) \neq 0$; zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat $r(T) = 1$. Er bestaat dan een basis

$$\{x_{ij} \mid i = 1,2,\ldots,k \; ; \; j = 1,2,\ldots,m_i\}$$

van $\mathbb{C}^n$ en een verzameling S van complexe getallen

$$S = \{\lambda_i \mid i = 1,2,\ldots,k\}$$

zó dat het volgende geldt:

(1a) $Tx_{i1} = \lambda_i x_{i1}$ $\quad (i = 1,2,\ldots,k)$;

(1b) $Tx_{ij} = \lambda_i x_{ij} + x_{ij-1}$ $\quad (i = 1,2,\ldots,k \; ; \; j = 2,3,\ldots,m_i)$;
(de matrix van T ten opzichte van de basis $\{x_{ij}\}$ heeft de Jordan-normaalvorm);

(2) er bestaat een permutatie τ van $\{1,2,\ldots,k\}$ zó dat $\lambda_{\tau(i)} = \overline{\lambda}_i$, $m_{\tau(i)} = m_i$ en $x_{\tau(i)j} = \overline{x}_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,k; \; j = 1,2,\ldots,m_i)$
(er geldt dan:
$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} x_{ij} \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{pq}$ als $x_{ij} = \overline{x}_{pq}$).

Onder de getallen in S zullen in het algemeen gelijke voorkomen.
Als $\lambda \in S$, dan stellen we

$$d(\lambda) := \{i \mid \lambda_i = \lambda\}.$$

Merk op dat $\{x_{i1} \mid i \in d(\lambda)\}$ een basis is van $N(\lambda I-T)$ ($N(\lambda I-T)$ is de nulruimte van $\lambda I-T$).
Verder volgt dat het klimgetal $\alpha(\lambda)$ van $\lambda I - T$ voor $\lambda \in S$ gelijk is aan

$$\max\{m_i \mid i \in d(\lambda)\}.$$

Hieruit volgt (zie Appendix 2.6) dat $\lambda \in S$ een pool van T is van de orde $\alpha(\lambda) = \max\{m_i \mid i \in d(\lambda)\}$.

We mogen aannemen dat $\lambda_1 = 1$ (= r(T)) en dat voor zekere p ($1 \leq p \leq k$) geldt:

$$(3) \qquad 1 = \lambda_1 = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_k| .$$

Daar r(T) een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$ is, mogen we verder aannemen dat

$$(4) \qquad m_1 \geq m_i \qquad (i = 1,2,\ldots,p).$$

We definiëren nu

$$(5) \qquad \varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{als } p = k, \\ 1 - |\lambda_{p+1}| & \text{als } p < k. \end{cases}$$

Na hernormering van de x_{ij}'s mogen we dan (1b) vervangen door

$$(1b') \quad Tx_{ij} = \lambda_i x_{ij} + \varepsilon x_{ij-1} \quad (i = 1,2,\ldots,k \; ; \; j = 2,\ldots,m_i).$$

We definiëren nu:

$$(6)\quad \tilde{K} := \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\, x_{ij};\ |\mathrm{Im}(\alpha_{1j})| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1j}),\ 1 \leq j \leq m_1\ ;$$
$$|\alpha_{ij}| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1j}),\quad 1 \leq j \leq m_1\ ;$$
$$|\alpha_{ij}| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1m_1}),\quad m_1 \leq j \leq m_i\}.$$

Het is duidelijk dat $\tilde{K}$ een gesloten kegel is.
Verder is $\tilde{K}$ ruimtelijk. Zij

$$x_0 := \sum_{j=1}^{m_1} x_{1j} \text{ en}$$

$$V := \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\, x_{ij};\ |\alpha_{ij}| < \tfrac{1}{2}\}.$$

Dan is V een nulomgeving in $\mathbb{C}^n$ en er geldt: $x + V \subset \tilde{K}$. Dus $x_0 \in \mathrm{int}(\tilde{K})$.
We bewijzen tenslotte dat T de kegel $\tilde{K}$ invariant laat. Zij
$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\, x_{ij} \in \tilde{K}$. Dan is $Tx = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij}\, x_{ij}$,

waarbij

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij}\,\lambda_i + \varepsilon\,\alpha_{ij+1} \text{ als } 1 \leq j \leq m_i$$
$$\beta_{im_i} = \alpha_{im_i}\,\lambda_i.$$

Het is duidelijk dat $|\mathrm{Im}(\beta_{1j})| \leq \mathrm{Re}(\beta_{1j})$ $(j = 1,\ldots,m_1)$. We moeten nog aantonen:

$$|\beta_{ij}| \leq \mathrm{Re}(\beta_{1j}) \text{ als } 1 \leq j \leq m_1,$$
$$|\beta_{ij}| \leq \mathrm{Re}(\beta_{1m_1}) \text{ als } j > m_1\ .$$

Daartoe onderscheiden we 4 gevallen.
(a) $j < m_i$, $j < m_1$:

$$|\beta_{ij}| = |\alpha_{ij}\lambda_i + \varepsilon\,\alpha_{ij+1}| \leq |\alpha_{ij}| + \varepsilon|\alpha_{ij+1}| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1j} + \varepsilon\,\alpha_{1j+1}) = \mathrm{Re}(\beta_{1j}).$$

(b) $j < m_i$, $j \geq m_1$:
daar $m_1 < m_i$, is $i \geq p+1$ (zie (4)) en dus (zie (3) en (5)) is
$|\lambda_i| \leq 1-\varepsilon$; dus

$$|\beta_{ij}| = |\alpha_{ij}\lambda_i + \varepsilon\,\alpha_{ij+1}| \leq |\alpha_{ij}|(1-\varepsilon) + \varepsilon|\alpha_{ij+1}| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1m_1}) = \mathrm{Re}(\beta_{1m_1}).$$

(c) $j = m_i$, $j < m_1$:

$$|\beta_{im_i}| = |\alpha_{im_i}\lambda_i| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1m_i} + \varepsilon\,\alpha_{1m_i+1}) = \mathrm{Re}(\beta_{1m_i}).$$

(d) $j = m_i$, $j \geq m_1$:

$$|\beta_{im_i}| = |\alpha_{im_i}\lambda_i| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1m_1}) = \mathrm{Re}(\beta_{1m_1}).$$

Definieer nu $K := \tilde{K} \cap \mathbb{R}^n$.
Dan is K een gesloten kegel in $\mathbb{R}^n$. Daar $x_0 = \sum_{j=1}^{m_1} x_{1j} \in \mathbb{R}^n \cap \mathrm{int}(\tilde{K})$,
is K ruimtelijk in $\mathbb{R}^n$. Daar T verder $\mathbb{R}^n$ invariant laat, is K invariant onder T.
Hiermee is de stelling bewezen voor het geval $r(T) \neq 0$.
Zij nu $r(T) = 0$. Er bestaat dan een basis

$$\{x_{ij} \mid i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,m_i\}$$

van $\mathbb{C}^n$ zó dat

$$T x_{i1} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,k),$$
$$T x_{ij} = x_{ij-1} \quad (i = 1,2,\ldots,k;\ j = 2,3,\ldots,m_i).$$

We mogen aannemen dat $m_1 \geq m_i$ $(i = 2,3,\ldots,k)$.
We definiëren nu

$$\tilde{K} := \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}x_{ij};\ |\mathrm{Im}(\alpha_{1j})| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1j}),\ 1 \leq j \leq m_1;\ |\alpha_{ij}| \leq \mathrm{Re}(\alpha_{1j}), 1 \leq j \leq m_i\}.$$

Het bewijs verloopt nu verder analoog aan dat voor het geval $r(T) \neq 0$.

2.2 Opmerking. Stelling 2.1 blijft geldig als $\mathbb{R}^n$ vervangen wordt door $\mathbb{C}^n$; dit volgt direct uit het boven gegeven bewijs.

2.3 Stelling. Zij E een reële of complexe Banachruimte. Stel $T \in L(E)$ voldoet aan de volgende voorwaarden:

(i) $r(T) \in \sigma(T)$,

(ii) Per $\sigma(T) \subset$ Pol $\sigma(T)$,

(iii) $r(T)$ is een pool van maximale orde in Per $\sigma(T)$,

(iv) de spektrale projectie P behorende bij Per $\sigma(T)$ is van eindige rang, d.w.z. dim $P(E) < \infty$.

Dan bestaat er een gesloten ruimtelijke kegel $K \subset E$ die invariant is onder T.

Bewijs. Zie[1], Satz 3.1 en 5.

Het verband tussen 2.3 en de theorie van de halfalgebra's wordt gegeven door het volgende lemma.

2.4 Lemma. Zij E een reële of complexe Banachruimte en zij K een gesloten totale kegel in E. Stel $T \in L(E)$ laat de kegel K invariant. Dan is de door T voortgebrachte halfalgebra $A(T) \subset L(E)$ strikt.

Bewijs. Zij E een reële Banachruimte. Daar K totaal is, is

$$K := \{S \in L(E) \mid S(K) \subset K\}$$

een kegel (zie II.1.26). Daar $A(T) \subset K$, is A(T) strikt. Als E een complexe Banachruimte is, dan vatten we T op als operator op de reële restrictie E_0 van E. Dan is A(T) strikt in $L(E_0)$ en dus in $L(E)$.

2.5 Gevolg. Zij E een reële of complexe Banachruimte. Stel dat $T \in L(E)$ voldoet aan de voorwaarden (i) t/m (iv) uit 2.3. Dan is de door T voortgebrachte halfalgebra $A(T) \subset L(E)$ strikt.

Bewijs. Dit volgt uit 2.3 en 2.4.

2.6 Opmerking. Het is niet bekend of voorwaarde (iv) in 2.3 gemist kan worden. Wel kan de voorwaarde (iv) in 2.5 gemist worden (zie [2], §2).

Literatuur

[1] Elsner, L., Monotonie und Randspektrum bei vollstegigen Operatoren. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 36 (1970), 356-365.

[2] Kaashoek, M.A., A note on strict locally compact semi-algebras, Rapport Wiskundig Seminarium der Vrije Universiteit, nr. 8 (1970).

Appendix

door

W.J. de Schipper en J. de Vries

1. Spectraaltheorie in Banachalgebra's.

1.1 In deze paragraaf is B steeds een complexe Banachalgebra met eenheid e; dat wil zeggen: B is een complexe Banachruimte, waarin een associatieve vermenigvuldiging is gedefinieerd, die distributief is ten opzichte van de optelling, zodanig dat B met de optelling en deze vermenigvuldiging een ring met eenheid e is. Bovendien moet

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in B,\ y \in B)$$

en

$$||e|| = 1,\ ||xy|| \leq ||x||.||y|| \qquad (x \in B,\ y \in B).$$

1.2 Definitie. Een element $x \in B$ heet regulier als er een element $x^{-1} \in B$ is zó, dat $xx^{-1} = x^{-1}x = e$; het element x^{-1} met deze eigenschap is dan ondubbelzinnig bepaald, en wordt de inverse van x genoemd. Onder de resolvente verzameling van een element $a \in B$ verstaan we de verzameling

$$\rho(a) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \ \&\ (\lambda e - a) \text{ is regulier}\}.$$

Onder het spectrum van een element $a \in B$ verstaan we de verzameling

$$\sigma(a) := \mathbb{C} \setminus \rho(a).$$

Voor alle $\lambda \in \rho(a)$ is

$$R(\lambda;a) := (\lambda e - a)^{-1}$$

gedefinieerd. De functie $\lambda \longmapsto R(\lambda;a)$ van $\rho(a)$ naar B heet de resolvente van a. Indien a een vast gekozen element van B is, schrijven we $R(\lambda)$ in plaats van $R(\lambda;a)$.

1.3 Stelling. Zij $a \in B$. Dan gelden de volgende beweringen:

(i) $\rho(a)$ is een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en de functie $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ is lokaal analytisch op $\rho(a) \cup \{\infty\}$. (zie 1.5 voor de betekenis hiervan).

(ii) $\sigma(a)$ is een niet lege compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$.

(iii) $r(a) := \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}$ bestaat, en er geldt:

$$r(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$$
$$r(a) \leq ||a||.$$

Op grond hiervan wordt $r(a)$ de spectraalradius van a genoemd.

(iv) Als $\lambda_0 \in \rho(a)$, dan is voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ met $|\lambda-\lambda_0| < ||R(\lambda_0)||^{-1}$ ook $\lambda \in \rho(a)$, en

$$R(\lambda) = R(\lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0)^{n+1} .$$

(v) Voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ met $|\lambda| > r(a)$ is $\lambda \in \rho(a)$ en

$$R(\lambda) = \lambda^{-1}e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n$$

De reeks in het rechterlid divergeert als $|\lambda| < r(a)$.

(vi) Indien ook $b \in B$, en $ab = ba$, dan is

$$r(ab) \leq r(a).r(b) \text{ en } r(a+b) \leq r(a) + r(b).$$

In het bijzonder is de functie $a \longmapsto r(a)$ continu op B indien B commutatief is.

Bewijs. Voor (i) tot en met (v): zie [1], Sec. 4.7. Voor (vi): zie [5], Theorem 1.4.1.

1.4 Opmerking. Op grond van (ii) en (iii) is de verzameling

$$\{\lambda \in \sigma(a) \mid |\lambda| = r(a)\}$$

niet leeg. Deze verzameling wordt het perifere spectrum genoemd. Notatie: $\mathrm{Per}\sigma(a)$.

1.5 Opmerking. Zij D een niet-lege open deelverzameling van de Riemannbol $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en zij E een complexe Banachruimte (het is voldoende om van E te eisen dat het een rij-volledige lokaalconvexe topologische vectorruimte over $\mathbb{C}$ is).
Een functie $f : D \longrightarrow E$ heet

- analytisch in een punt $\lambda_0 \in D$ $(\lambda_0 \neq \infty)$ als

$$f'(\lambda) := \lim_{\mu \to \lambda} \frac{1}{\mu - \lambda} [f(\mu) - f(\lambda)]$$

  bestaat voor elke λ uit zekere omgeving van λ_0

- analytisch in het punt ∞ (als $\infty \in D$) als $f(\infty) = \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda)$ en de functie g, gedefinieerd door

$$g(\lambda) = \begin{cases} f(\frac{1}{\lambda}) & \text{als } \lambda \neq 0 \\ f(\infty) & \text{als } \lambda = 0 \end{cases}$$

  analytisch is in het punt 0.

- lokaal analytisch op D als f analytisch is in ieder punt van D.

Op grond van [1], Theorem 3.10.1 is f analytisch in een punt $\lambda_0 \in D$ als en slechts als voor elke $x' \in E'$ de functie $\lambda \longmapsto \langle f(\lambda), x' \rangle$ van D naar $\mathbb{C}$ analytisch is in λ_0 (hierin is E' de duale ruimte van E en voor $x \in E$, $x' \in E'$ is $\langle x, x' \rangle = x'(x)$).
Veel stellingen uit de gewone complexe functietheorie gelden ook voor "vectorwaardige" analytische functies. Van belang is daarbij het volgende: Als Γ een rectificeerbare kromme is in $\mathbb{C}$, gegeven door de continue functie van begrensde variatie $t \longmapsto \lambda(t)$ van $[a,b]$ naar $\mathbb{C}$, dan is de Riemann-Stieltjes integraal

$$\int_a^b f(\lambda(t))\, d\lambda(t) = \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$$

gedefinieerd voor iedere functie f met waarden in E die continu is op Γ, en voor elke $x' \in E'$ geldt:

$$< \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda, \quad x' > \; = \; \int_\Gamma < f(\lambda), x' > d\lambda$$

Met behulp hiervan kan een groot aantal stellingen uit de gewone complexe functie theorie ook voor vectorwaardige functies aangetoond worden.
We noemen slechts: de integraal stelling en de integraal formules van Cauchy, de stelling van Cauchy- Hadamard, de Taylor- en Laurent-ontwikkelingen, het maximum-modulus (of liever: maximum-norm) principe en de stelling van Liouville. Zie [1], Sec. 3.11.

1.6 Definitie. Zij $a \in B$ en f een complexwaardige functie, die lokaal analytisch is op een open omgeving D van $\sigma(a)$. Dan is er een omgeving U van $\sigma(a)$ met $\sigma(a) \subset U \subset \overline{U} \subset D$ zó, dat

(i) het aantal componenten van U is eindig en de afsluitingen in $\mathbb{C}$ van deze componenten zijn onderling disjunct;

(ii) de rand Γ van U bestaat uit een eindig positief aantal gesloten rectificeerbare Jordan curven (die twee aan twee disjunct zijn).

Door de (welgedefinieerde!) integraal

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda;a)d\lambda$$

wordt dan een element $f(a)$ van B gedefinieerd. Merk op, dat $f(a)$ onafhankelijk is van de keus van Γ en U (mits aan (i) en (ii) voldaan is).

1.7 Stelling. Zij $H_a(D)$ de algebra van alle complexwaardige functies, die lokaal analytisch zijn op een gegeven omgeving D van $\sigma(a)$. Dan is de in 1.6 gedefinieerde afbeelding $f \longmapsto f(a)$ van $H_a(D)$ naar B een algebra-homomorfisme:

(i) Als $f(\lambda) = 1$ voor alle $\lambda \in D$, dan is $f(a) = e$

(ii) Als $f(\lambda) = \lambda$ voor alle $\lambda \in D$, dan is $f(a) = a$

(iii) Als $f = \lambda g + \mu h$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ en $g, h \in H_a(D)$ dan is $f \in H_a(D)$ en

$$f(a) = \lambda g(a) + \mu h(a)$$

(iv) Als $f = gh$ met $g, h \in H_a(D)$, dan is $f \in H_a(D)$, en

$$f(a) = g(a)\, h(a).$$

Voorts is genoemde afbeelding continu in de volgende zin:

(v) Als $\{f_n\}$ een rij is in $H_a(D)$ die puntsgewijs naar $f \in H_a(D)$ convergeert, uniform op compacte deelverzamelingen van D, dan is

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(a) - f(a)|| = 0$$

Bewijs: Zie [3], Ch. III, § 11.6 of ook [1], Theorem 5.2.5.

1.8 Opmerking. In het bijzonder volgt uit 1.7:

1°. Als $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ en D is bevat in het convergentiegebied der reeks, dan is $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ (convergentie in de normtopologie van B)

2°. Als $0 \notin \sigma(a)$, dan is $f : \lambda \longmapsto \frac{1}{\lambda}$ element van $H_a(D)$ voor geschikte D, en $f(a) = a^{-1}$.

3°. Als $f, g \in H_a(D)$ voor zekere open omgeving D van $\sigma(a)$, dan is

$$f(a)\, g(a) = g(a)\, f(a).$$

In het bijzonder is $a.f(a) = f(a).a$.

1.9 Stelling. (spectrale afbeeldingsstelling).
Zij $a \in B$. Indien de complexwaardige functie f lokaal analytisch is op een open omgeving van $\sigma(a)$, dan is

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(a)\}.$$

1.10 Stelling. Zij $a \in B$. Indien de complexwaardige functie f lokaal analytisch is op een open omgeving van $\sigma(a)$ en de complexwaardige functie g op een open omgeving van $\sigma(f(a))$, dan is $g \circ f$ lokaal analytisch op een omgeving van $\sigma(a)$, en $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Bewijs: Voor 1.9 en 1.10: zie [1], Sec. 5.3.

1.11 Definitie. Onder een idempotent in B verstaan we een element $x \in B$ zó dat $x^2 = x$.

1.12 Opmerking. Voor een idempotent $x \in B$ gaat de in 1.3(v) genoemde reeks voor de resolvente over in:

$$R(\lambda;x) = \frac{1}{\lambda} e + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\lambda})^{n+1} x = \frac{e-x}{\lambda} + \frac{x}{\lambda-1} .$$

voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ met $|\lambda| > r(x) = \lim_{n\to\infty} ||x||^{1/n} = 1$. Het is duidelijk, dat het rechterlid eveneens $R(\lambda;x)$ is als $|\lambda| \leq 1$, maar $\lambda \neq 0$ of $\lambda \neq 1$, mits $x \notin \{0,e\}$. In dat geval is dus $\sigma(x) = \{0,1\}$.
Een idempotent $x \notin \{0,e\}$ heeft dus een niet-samenhangend spectrum. Met behulp van 1.9 blijkt nu, dat met ieder element $a \in B$ waarvan het spectrum onsamenhangend is, een aantal idempotenten correspondeert.

1.13 Definitie. Zij $a \in B$. Onder een spectrale deelverzameling σ van $\sigma(a)$ verstaan we een deelverzameling σ van $\sigma(a)$ die zowel open als gesloten is in $\sigma(a)$ (daar $\sigma(a)$ gesloten is in $\mathbb{C}$ is dit equivalent met: σ en $\sigma(a) \setminus \sigma$ zijn disjuncte, gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{C}$).

1.14 Stelling. Zij $a \in B$ en neem aan, dat $\sigma(a) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, waarin σ_1 en σ_2 onderling disjuncte, niet lege spectraalverzamelingen zijn. Dan zijn er idempotenten e_1 en e_2 in B zó, dat

$$e_1 + e_2 = e \text{ en } e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0 \quad ,$$

terwijl $e_i \notin \{0,e\}$ voor $i = 1,2$. Indien voor $i = 1,2$

$$a_i := e_i a \quad (= a e_i)$$

dan is $a_1 + a_2 = a$, $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$, en tenslotte

$$\sigma(a_i) = \sigma_i \cup \{0\} \qquad (i = 1,2).$$

Indien $\sigma_1 = \emptyset$ (resp. $\sigma_1 = \sigma(a)$), dan is $e_1 = 0$ (resp. $e_1 = e$) en $a_1 = 0$ (resp. $a_1 = a$) zodat in deze gevallen $\sigma(a_i) = \sigma_i$ $(i = 1,2)$.
Bewijs. Zie [1], Theorem 5.6.1. In feite is $e_1 = f(a)$ voor een geschikt gekozen complexwaardige functie f, lokaal analytisch op een omgeving van $\sigma(a)$, die 1 is op een omgeving van σ_1 en 0 op een omgeving van σ_2.

1.15 Opmerking. In de situatie van 1.14 kan men nog iets meer aantonen, namelijk dat σ_i juist het spectrum is van a_i met betrekking tot de deelalgebra $e_i B e_i$ van B (e_i is eenheid van deze deelalgebra alhoewel in het algemeen $||e_i|| \neq 1$), en dat $e_i R(\lambda;a)$ juist de resolvente is van a_i in deze deelalgebra voor λ niet in $\sigma(a)$.

1.16 Definitie van pool van $R(\lambda;a)$ (ook pool van a genoemd), waarin $a \in B$. Stel $\sigma(a)$ heeft een geïsoleerd punt λ_0; de lokaal analytische functie $\lambda \longmapsto R(\lambda;a)$ heeft dan een geïsoleerd singulier punt λ_0. Dan kan deze functie in een Laurent-reeks ontwikkeld worden naar machten van $\lambda - \lambda_0$ (vgl. 1.5):

$$R(\lambda;a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{-n} d_n$$

met c_n, $d_n \in B$ voor alle n. Deze reeks convergeert in de norm van B voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ met $0 < |\lambda-\lambda_0| <$ afstand van λ_0 tot $\sigma(a) \setminus \{\lambda_0\}$. Indien $d_n = 0$ voor alle $n \geq k+1$, waarin $k \geq 1$, en $d_k \neq 0$, dan wordt λ_0 een pool van de orde k van $R(\lambda;a)$ genoemd. De verzameling polen van $R(\lambda;a)$ wordt aangeduid met Pol $\sigma(a)$. Men noemt deze punten ook wel polen van a.

1.17 Opmerking. De coefficienten c_n en d_n in de Laurent ontwikkeling van $R(\lambda;a)$ vindt men met de gebruikelijke formules (zie [1], Sec. 3.11; vgl. ook [4], § 5.8). Met name blijkt dan:
1°. d_1 is de idempotent die correspondeert met de spectrale deelverzameling $\{\lambda_0\}$ van $\sigma(a)$(zie 1.14; neem daar $\sigma_1 = \{\lambda_0\}$ en $\sigma_2 = \sigma(a) \setminus \{\lambda_0\}$,

tenzij $\sigma(a) \setminus \{\lambda_0\} = \emptyset$: in dat geval is $d_1 = e$).

2°. Voor $n = 1,2,\ldots$ is

$$d_{n+1} = (a-\lambda_0 e)^n d_1 \quad .$$

Indien dus $d_k \neq 0$ $(k \geq 1)$, dan is $d_n \neq 0$ voor $1 \leq n \leq k$, en indien $d_{k+1} = 0$, dan is $d_n = 0$ voor alle $n \geq k+1$ (in deze situatie is λ_0 dus een pool van de orde k).

3°. Indien λ_0 een pool is van $R(\lambda;a)$ van de orde k, dan is ad_1 nulpunt van een polynoom in B met complexe coefficienten:

$$0 = a\, d_{k+1} = (a-\lambda_0 e)^k\, ad_1 = \sum_{n=1}^{k+1} \mu_n\, a^n d_1 = \sum_{n=1}^{k+1} \mu_n (ad_1)^n \ ,$$

want $d_1^n = d_1$ en $ad_1 = d_1 a$. De Banachalgebra, voortgebracht door ad_1 is dan dus eindig-dimensionaal.

4°. Tenslotte: λ_0 is een enkelvoudige pool van $R(\lambda;a)$ als en slechts als

$$(a-\lambda_0 e)d_1 = 0, \text{ dat wil zeggen: } ad_1 = \lambda_0 d_1 \ .$$

1.18 Opmerking. Indien $a \in B$, $\sigma(a) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, waarin σ_1 en σ_2 onderling disjuncte niet lege spectrale deelverzamelingen van $\sigma(a)$ zijn, dan is (notatie: zie 1.14).

$$\sigma(a_1) = \sigma_1 \cup \{0\} \quad .$$

Indien $0 \notin \sigma_1$, dan is 0 een enkelvoudige pool van $R(\lambda;a_1)$. (schets van bewijs: zij d_1 de idempotent, horend bij de spectrale deelverzameling $\{0\}$ van $\sigma(a_1)$; aangetoond moet worden, dat $a_1 d_1 = 0$ (zie $1.17(4^o)$). Welnu: $a_1 = a\, f(a)$ en $d_1 = g(a_1)$ voor geschikte lokaalanalytische functies f en g. Uit 1.7 en 1.10 volgt dan, dat $a_1 d_1 = h(a)$, waarin $h(\lambda) = \lambda\, f(\lambda).g(\lambda f(\lambda))$. Het blijkt, dat f en g zó gekozen kunnen worden, dat h nul is op een omgeving van $\sigma(a)$. Dus $a_1 d_1 = 0$).

1.19 Stelling. Indien voor $a \in B$ geldt, dat

$$p := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a^i\right)$$

bestaat, dan is

(i) $p = pa = ap = p^2$.

(ii) $r(a) \leq 1$, dus $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \;\&\; |\lambda| \leq 1\}$

(iii) Als $1 \notin \sigma(a)$, dan is $p = 0$.

(iv) Als $1 \in \sigma(a)$, dan is $p \neq 0$. In dat geval is 1 een enkelvoudige pool van $R(\lambda;a)$, en p is de idempotent die hoort bij de spectrale deelverzameling $\{1\}$ van $\sigma(a)$.

Bewijs: Uit de aanname volgt vlot, dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a^n = 0$, en met behulp hiervan toont men (i) en (ii) gemakkelijk aan. Als $1 \notin \sigma(a)$, dan is $p = p(e-a)(e-a)^{-1} = 0.(e-a)^{-1} = 0$. Als $1 \in \sigma(a)$, dan $1 \in \sigma(a_n)$, waarin $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a^i$ (zie 1.9), dus $\|a_n\| \geq 1$ voor alle n, en dus $p \neq 0$. Door [2], VII.8.3 met stelling 1.14 te combineren kan de rest van (iv) aangetoond worden.

2. Het spectrum van een operator in een Banachruimte.

2.1 Zij E een complexe Banachruimte, en zij $L(E)$ de ruimte van alle begrensde lineaire operatoren van E in E. Voorzien van de gebruikelijke norm en met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging en met compositie van functies als ring-vermenigvuldiging is $L(E)$ een Banachalgebra met eenheid. De eenheid van $L(E)$ is de identieke afbeelding van E op zichzelf, en we geven deze aan met 1_E. Op deze algebra zijn dus alle begrippen en stellingen uit §1 van toepassing. Gezien de aard van de elementen van deze algebra is er een zekere verfijning mogelijk. Indien we, zoals gebruikelijk is, noteren:

$$N(T) = \{x \in E \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(0)$$

$$R(T) = \{x \in E \mid \exists y \in E,\ x = T(y)\} = T(E)$$

waarin $T \in L(E)$ is, dan is de resolvente verzameling van T

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N(\lambda-T) = \{0\} \ \&\ R(\lambda-T) = E\}$$

(dat dit de resolvente verzameling is volgt uit de open afbeeldingsstelling van Banach; zie hiervoor bijvoorbeeld [2], II.2.2). Het spectrum van T is dus

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N(\lambda-T) \neq \{0\} \quad \text{of } R(\lambda-T) \neq E\}.$$

Het spectrum wordt meestal als volgt onderverdeeld (voor andere speciale deelverzamelingen van het spectrum: zie 1.4, 1.16 en voorts §3).

2.2 Definitie. Zij $T \in L(E)$, waarin E een complexe Banachruimte $\neq \{0\}$ is. We verstaan onder

- het puntspectrum van T de verzameling
  $P\sigma(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda-T) \neq \{0\}\}$.

- het continue spectrum van T de verzameling

$$C\,\sigma(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda-T) = \{0\} \;\&\; \overline{R(\lambda-T)} = E\}$$

- het rest spectrum van T de verzameling

$$R\,\sigma(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda-T) = \{0\} \;\&\; \overline{R(\lambda-T)} \neq E\}$$

(hierin is steeds $\overline{R(\lambda-T)}$ de afsluiting van $R(\lambda-T)$ in de normtopologie van E).

2.3 Opmerking 1°. $P\,\sigma(T)$, $C\,\sigma(T)$ en $R\,\sigma(T)$ zijn paarsgewijs disjunkte deelverzamelingen van $\sigma(T)$, en

$$\sigma(T) = P\,\sigma(T) \cup C\,\sigma(T) \cup R\,\sigma(T) \quad .$$

2°. Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

$$\lambda \in P\,\sigma(T) \iff \exists x \in E:\ x \neq 0 \text{ en } Tx = \lambda x \ .$$

In dat geval heet λ een eigenwaarde van T, x een eigenvector van T bij de eigenwaarde λ en $N(\lambda-T)$ de eigenruimte van T bij de eigenwaarde λ.

In de algebra $L(E)$, E een Banachruimte, zijn de idempotenten juist de continue projecties op de gesloten deelruimten:

2.4 Stelling. 1°. Indien $E = E_1 \oplus E_2$, waarin E_1 en E_2 gesloten deelruimten van de Banachruimte E zijn, dan zijn er ondubbelzinnig bepaalde idempotenten P_1 en P_2 in $L(E)$ zó, dat

(i) $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ en $P_1 + P_2 = 1_E$

(ii) $E_j = R(P_j) = N(1_E-P_j)$ voor $j = 1,2$.

2°. Indien omgekeerd P_1 en P_2 idempotenten in $L(E)$ zijn zó, dat (i) geldt, dan wordt door

$$E_j := R(P_j) = N(1_E-P_j) = \{x \in E \mid P_jx = x\}$$

voor j = 1,2 een gesloten deelruimte van E gedefinieerd, en

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad .$$

Bewijs: Zie [4], §4.8.

Met behulp van 2.4 kan de volgende aanvulling op 1.14 gegeven worden:

2.5 Stelling. Zij $T \in L(E)$ en neem aan, dat $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ waarin σ_1 en σ_2 onderling disjuncte, niet lege gesloten verzamelingen zijn. Dan zijn er projecties P_1 en P_2 op gesloten deelruimten E_1 en E_2 van E zó, dat $E = E_1 \oplus E_2$ en zó, dat T volledig wordt gereduceerd door het paar $\{E_1, E_2\}$, dat wil zeggen: $T(E_j) \subseteq E_j$ voor j = 1,2. Bovendien, als $T_j = T|E_j$, opgevat als element van $L(E_j)$, dan is σ_j juist het spectrum van T_j met betrekking tot de algebra $L(E_j)$ (j = 1,2).
Bewijs: Zie [4], Theorem 5.7-B.

2.6 Stelling. Zij $T \in L(E)$ en zij λ_0 een pool van $R(\lambda;T)$ van de orde k, en zij P_1 de projectie die correspondeert met de spectrale deelverzameling $\{\lambda_0\}$ van $\sigma(T)$ (vgl. 1.17(1°)). Dan is $R(P_1) = N((\lambda_0-T)^k)$ en $R(1_E-P_1) = R((\lambda_0-T)^k)$, dus de in 2.5 genoemde decompositie van E is

$$E = N((\lambda_0-T)^k) \oplus R((\lambda_0-T)^k) \quad .$$

Bovendien zijn het daal- en het klimgetal van λ_0-T beide gelijk aan k.
Bewijs: Zie [4], 5.8-A.

2.7 Opmerking. Het daalgetal van T is het kleinste niet-negatieve gehele getal k zó, dat $R(T^{n+1}) = R(T^n)$ voor alle $n \geq k$; het deelgetal wordt gedefinieerd als ∞, als $R(T^{n+1}) \neq R(T^n)$ voor alle n = 1,2,... . Het klimgetal van T is het kleinste niet-negatieve gehele getal k zó, dat $N(T^{n+1}) = N(T^n)$ voor alle $n \geq k$; het klimgetal wordt gedefinieerd als ∞, als $N(T^{n+1}) \neq N(T^n)$ voor alle n = 1,2,... . Het is mogelijk, deze getallen algebraïsch te karakteriseren, zó, dat de laatste bewering van 2.6

letterlijk en de overige beweringen van 2.6 bij geschikte interpretatie blijven gelden in een willekeurige Banachalgebra met eenheid. Zie [6].

2.8 Stelling. Gegeven de situatie van 2.6. Dan is λ_0 een eigenwaarde van T.
Bewijs: Zie [4], 5.8-A.

2.9 Stelling. Zij $T \in L(E)$, en zij $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zodanig, dat voor zekere $n \in \mathbb{N}$

$$(*) \qquad E = N((\lambda_0-T)^n) \oplus R((\lambda_0-T)^n).$$

Dan is λ_0 een pool van $R(\lambda;T)$ van de orde k, waarin k het kleinste der natuurlijke getallen n is, waarvoor (*) geldt.
Bewijs: Volgens S. Goldberg "Unbounded linear operators", Theorem IV. 1.12 is $R((\lambda_0-T)^n)$ gesloten als aan (*) voldaan is. Zie verder [4], 5.8-D.

3. Onderverdelingen van het spectrum.

3.0 Zie 2.2 voor de definitie van P $\sigma(T)$, C $\sigma(T)$ en R $\sigma(T)$.

3.1 Definitie. Zij E een komplekse Banachruimte, $E \neq \{0\}$ en zij $T \in L(E)$. $\lambda \in \mathbb{C}$ heet een approximatieve eigenwaarde van T als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : ||x|| = 1 \text{ en } ||(\lambda-T)x|| < \varepsilon .$$

Het approximatieve puntspektrum van T is de verzameling

$$A\,\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ is een approximatieve eigenwaarde van } T\}.$$

Het kompressiespektrum van T is de verzameling

$$K\,\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{R(\lambda-T)} \neq E\}.$$

3.2 Stelling. Zij $T \in L(E)$ en zij $\lambda \in \mathbb{C}$. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) $\lambda \in A\,\sigma(T)$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : x \neq 0$ en $||(\lambda-T)x|| < \varepsilon\,||x||$;

(iii) Er is een rij $\{x_n\}_n$ in E met $||x_n|| = 1$ voor allen en $(\lambda-T)x_n \to 0$;

(iv) $\lambda-T : E \to R(\lambda-T)$ heeft geen begrensde inverse.

Bewijs:

(i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii): triviaal.

(i)$\Longleftrightarrow$(iv): [7], p. 304.

3.3 Stelling. Zij $T \in L(E)$. Dan geldt:

(i) $P\,\sigma(T) \cup C\,\sigma(T) \subset A\,\sigma(T)$;

(ii) $R\,\sigma(T) \subset K\,\sigma(T)$;

(iii) $\partial\sigma(T) \subset A\,\sigma(T)$, (waarbij $\partial\sigma(T)$ de topologische rand van $\sigma(T)$ is).

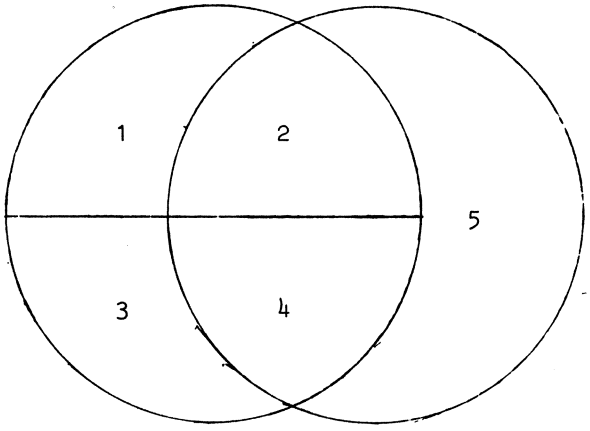
Bewijs:

(i) [7], p. 305; [2], Exercise 26, p. 583.

(ii) triviaal.

(iii) [8], Problem 63,

3.4 Schematische voorstelling van de verdeling van het spectrum.



$1 \cup 2 = P\,\sigma(T)$.
$3 = C\,\sigma(T)$.
$4 \cup 5 = R\,\sigma(T)$.
$1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 = A\,\sigma(T)$.
$2 \cup 4 \cup 5 = K\,\sigma(T)$.

3.5 Stelling. Zij $T \in L(E)$. Dan geldt:
(i) $\sigma(T) \setminus A\,\sigma(T)$ is open in $\mathbb{C}$;
(ii) $A\,\sigma(T)$ is gesloten in $\mathbb{C}$.
Bewijs: [8], Problem 62.

3.6 Stelling. Het verband tussen $\sigma(T)$ en $\sigma(T')$.
Zij $T \in L(E)$ en zij T' de geadjungeerde operator. Dan geldt:
(i) $\sigma(T) = \sigma(T')$;
(ii) $K\,\sigma(T) = P\,\sigma(T')$;
(iii) $P\,\sigma(T) \subset K\,\sigma(T')$;
(iv) $C\,\sigma(T') \subset C\,\sigma(T)$;
(v) $\sigma(T) = A\,\sigma(T) \cup P\,\sigma(T')$;
(vi) ν is een pool van de orde $k(\geq 1)$ van $R(\lambda;T)$ als en slechts als ν een pool is van de orde k van $R(\lambda;T')$.

Bewijs. Volgens [7], Exercise 18.1, p. 304 geldt:
(a) $\rho(T) = \rho(T')$, dus $\sigma(T) = \sigma(T')$; (b) $R\,\sigma(T) \subset P\,\sigma(T')$;
(c) $P\,\sigma(T) \subset P\,\sigma(T') \cup R\,\sigma(T')$ en (d) $C\,\sigma(T') \subset C\,\sigma(T)$.
De beweringen (b) en (c) zijn gemakkelijk te verscherpen tot (ii) en (iii). Zie ook [2], lemma VII. 3.7, p. 568 en Exercise VII. 5.9 p. 581 en [8], Problem 58. (v) volgt direkt uit (ii) en uit het feit dat

$$\sigma(T) = P\,\sigma(T) \cup C\,\sigma(T) \cup R\,\sigma(T) = A\,\sigma(T) \cup K\,\sigma(T).$$

3.7 Stelling. Zij E een komplekse Banachruimte, $E \neq \{0\}$; zij $T \in L(E)$ en zij F een gesloten T-invariante deelruimte ongelijk aan {0} en E. Zij T_F resp. $\tilde{T}$ de door T in F resp. $\tilde{E} = E/F$ geïnduceerde operator. Dan geldt:

(i) $\sigma(T) \subset \sigma(T_F) \cup \sigma(\tilde{T})$;

(ii) $\rho_\infty(T) \subset \rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T})$. (hierbij is $\rho_\infty(T)$ de onbegrensde komponent van $\rho(T)$).

Bewijs:

(i) Als $N(\lambda-T_F) = \{0\}$ en $N(\lambda-\tilde{T}) = \{0\}$ dan $N(\lambda-T) = \{0\}$. Als $R(\lambda-T_F) = F$ en $R(\lambda-\tilde{T}) = \tilde{E}$ dan $R(\lambda-T) = E$, immers zij $x \in E$. Omdat $R(\lambda-\tilde{T}) = \tilde{E}$ is er een $\tilde{y} \in \tilde{E}$ zó, dat $(\lambda-\tilde{T})\tilde{y} = \tilde{x}$. Daaruit volgt het bestaan van $y_1 \in E$ en $z_1 \in F$ zó, dat $(\lambda-T)y_1 = z + z_1$. Omdat $R(\lambda-T_F) = F$ is er een $y_2 \in F$ zó, dat $(\lambda-T)y_2 = z_1$. Maar dan geldt $(\lambda-T)(y_1-y_2) = z$ zodat $z \in R(\lambda-T)$. Derhalve: $\rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T}) \subset \rho(T)$.

(ii) Als $\lambda \in \rho_\infty(T)$ dan hebben T, $R(\lambda;T)$ en $\lambda - T$ dezelfde gesloten invariante deelruimten. Daaruit volgt direkt dat $(\lambda-T)(F) = F = R(\lambda;T)(F)$ voor $\lambda \in \rho_\infty(T)$, zodat $R(\lambda-T_F) = F$. Uit $N(\lambda-T) = \{0\}$ volgt $N(\lambda-T_F) = \{0\}$ en uit $R(\lambda-T) = E$ volgt $R(\lambda-\tilde{T}) = \tilde{E}$. Tenslotte volgt uit $N(\lambda-T) = \{0\}$ en $R(\lambda-T_F) = F$ dat $N(\lambda-\tilde{T}) = \tilde{E}$, immers zij $\tilde{x} \in N(\lambda-\tilde{T})$ en zij $x \in \tilde{x}$. Dan $(\lambda-T)x \in F$. Omdat $R(\lambda-T_F) = F$ is er een $y \in F$ zó dat $(\lambda-T)x = (\lambda-T)y$ Uit $N(\lambda-T) = \{0\}$ volgt $x = y$, dus $x \in F$ en daarmee $\tilde{x} = 0$.
Hieruit volgt dus $\rho_\infty(T) \subset \rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T})$

3.8 Stelling. Zij E een komplekse Banachruimte, $E \neq \{0\}$; zij $T \in L(E)$ en zij F een niet-triviale gesloten T-invariante deelruimte van E. Zij T_F resp. $\tilde{T}$ de door T in F resp. $\tilde{E} = E/F$ geïnduceerde operator. Zij $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, zó, dat

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon \Longrightarrow \lambda \in \rho_\infty(T).$$

(d.w.z.: een omgeving van λ_0, uitgezonderd eventueel λ_0 zelf, ligt in de onbegrensde komponent van $\rho(T)$).

(i) Als λ_0 een pool is van $R(\lambda;T)$ van de orde $n \geq 0$, dan is λ_0 een pool van $R(\lambda;T_F)$ van de orde $k_1 \geq 0$ en een pool van $R(\lambda;\tilde{T})$ van de orde $k_2 > 0$ zó dat

$$k_1 \vee k_2 \leq n \leq k_1 + k_2 \ . \tag{1}$$

(ii) Als λ_0 een pool is van $R(\lambda;T_F)$ van de orde $k_1 \geq 0$ en een pool van $R(\lambda;\tilde{T})$ van de orde $k_2 \geq 0$ dan is λ_0 een pool van $R(\lambda;T)$ van de orde $n \geq 0$ zó dat

$$k_1 \vee k_2 \leq n \leq k_1 + k_2 \tag{2}$$

(We noemen λ_0 een pool van de orde 0 van $R(\lambda;T)$ als $\lambda_0 \in \rho(T)$).

Bewijs:
(i) Als $n = 0$ dan $\lambda_0 \in \rho_\infty(T)$ dus $\lambda_0 \in \rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T})$, zodat $k_1 = k_2 = 0$. Formule (1) is in dat geval juist. Stel nu $n \geq 1$. Dan is λ_0 een geïsoleerd punt van $\sigma(T)$. Uit stelling 3.7. volgt dan: als $\lambda_0 \in \sigma(T_F)$ resp. $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{T})$ dan is λ_0 geïsoleerd punt van $\sigma(T_F)$ resp. van $\sigma(\tilde{T})$.
Ontwikkel $R(\lambda;T)$ in een Laurentreeks om λ_0:

$$R(\lambda;T) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda-\lambda_0)^{-n} B_k + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n A_k .$$

F is een invariante deelruimte van alle koëfficiënten A_k en B_k. Daaruit volgt:
De Laurentreeksontwikkeling van $R(\lambda;T_F)$ om λ_0 is

$$R(\lambda;T_F) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda- \lambda_0)^{-k} B_{kF} + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda- \lambda_0)^k A_{kF}$$

waarbij $A_{kF} = A_k|F$ en $B_{kF} = B_k|F$.
De Laurentreeksontwikkeling van $R(\lambda;\tilde{T})$ om λ_0 is

$$R(\lambda;\tilde{T}) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda-\lambda_0)^{-k} \tilde{B}_k + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k \tilde{A}_k$$

waarbij $\tilde{A}_k$ resp. $\tilde{B}_k$ de door A_k resp. B_k in $\tilde{E} = E/F$ geïnduceerde operator is. Hieruit volgt: $R(\lambda;T_F)$ resp. $R(\lambda;\tilde{T})$ heeft in λ_0 een pool van de orde k_1 resp. k_2 met $0 \leq k_1 \leq n$ en $0 \leq k_2 \leq n$, zodat $k_1 \vee k_2 \leq n$.
Als $k_1 = n$ of $k_2 = n$ dan geldt zeker $n \leq k_1 + k_2$. Stel nu dat $R(\lambda;T_F)$ een pool heeft van de orde $k_1 < n$ (eventueel $k_1 = 0$).

Dan $F \subset N(B_{k_1+1})$. Nu geldt $B_{k_1+1} \circ B_{n-k_1} = B_n \neq 0$, dus $R(B_{n-k_1}) \not\subset N(B_{k_1+1})$, waaruit volgt $R(B_{n-k_1}) \not\subset F$ dus $\tilde{B}_{n-k_1} \neq 0$. Konklusie: $k_2 \geq n - k_1$, dus $n \leq k_1 + k_2$.

(ii) Als $k_1 = k_2 = 0$ dan $\lambda_0 \in \rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T})$ dus $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dan $n = 0$, dus formule (2) is juist. Stel nu $k_1 > 0$ of $k_2 > 0$. Uit $\lambda_0 \in \sigma(T_F) \cup \sigma(\tilde{T})$ en $\rho_\infty(T) \subset \rho(T_F) \cap \rho(\tilde{T})$ volgt $\lambda_0 \in \sigma(T)$, en λ_0 geïsoleerd punt van $\sigma(T)$. Ontwikkel $R(\lambda;T)$ in een Laurentreeks om λ_0:

$$R(\lambda;T) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{-k} B_k + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k A_k.$$

Als $k > k_1$ dan $B_{k|F} = 0$ dus $F \subset N(B_k)$.

Als $k > k_2$ dan $\tilde{B}_k = 0$ dus $R(B_k) \subset F$.

$B_{k_1+k_2+1} = B_{k_1+1} \circ B_{k_2+1} = 0$ want $R(B_{k_2+1}) \subset F \subset N(B_{k_1+1})$. Dus $B_k = 0$ voor $k > k_1+k_2$. Voorts geldt:

$$B_{k_1|F} \neq 0 \text{ dus } B_{k_1} \neq 0 \text{ en } \tilde{B}_{k_2} \neq 0 \text{ dus } B_{k_2} \neq 0.$$

Daaruit volgt: $R(\lambda;T)$ heeft in λ_0 een pool van de orde n met $k_1 \vee k_2 \leq n \leq k_1 + k_2$.

4. Een spektrum-bewarende inbedding.

4.1 Definitie. Zij E een komplekse Banachruimte. Zij
$m(E) := \{(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \mid \exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\}$. $m(E)$ is een Banachruimte t.o.v. de koördinaatsgewijze optelling en skalaire vermenigvuldiging en de norm

$$||(x_n)_n|| = \sup\{||x_n|| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Zij $c_o(E) := \{(x_n)_n \in m(E) \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. $c_0(E)$ is een gesloten lineaire deelruimte van $m(E)$. Definieer nu $\overline{E} := m(E)/c_0(E)$, en definieer een afbeelding $\eta_E : E \to \overline{E}$ door $\eta_E(x) = (x_n)_n + c_0(E)$, waarbij $x_n = x$ voor alle n. Zij F eveneens een komplekse Banachruimte en zij $T \in L(E,F)$. Definieer dan $\overline{T} : \overline{E} \to \overline{F}$ door $\overline{T}\,((x_n)_n + c_0(E)) = (Tx_n)_n + c_0(F)$.

4.2 Lemma. (Lotz [9], Satz 2.1; Satz 2.2; Satz 2.3).
(i) $\overline{E}$ is een Banachruimte, en voor de quotiëntnorm geldt:

$$||(x_n)_n + c_0(E)|| = \limsup\{||x_n|| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) $\eta_E : E \to \overline{E}$ is een isometrische lineaire afbeelding.
(iii) Als $T \in L(E,F)$ dan $\overline{T} \in L(\overline{E},\overline{F})$.
(iv) $\overline{S \circ T} = \overline{S} \circ \overline{T}$ en $\overline{I}_E = I_{\overline{E}}$
(v) De afbeelding $T \mapsto \overline{T}$ van $L(E,F)$ in $L(\overline{E},\overline{F})$ is een isometrische lineaire afbeelding. De afbeelding $T \mapsto \overline{T}$ van $L(E)$ is $L(\overline{E})$ is een isometrisch algebra-homomorfisme.
(vi) Als $T \in L(E,F)$ dan $\eta_F \circ T = \overline{T} \circ \eta_E$.

4.3 Stelling. (Lotz [9], Satz 2.4).
Zij $E \neq \{0\}$ en zij $T \in L(E)$. Dan geldt:
(i) $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$;
(ii) $P\,\sigma(\overline{T}) = A\,\sigma(\overline{T}) = A\,\sigma(T)$;
(iii) Als $\lambda \in \rho(T)$ dan $R(\lambda;\overline{T}) = \overline{R(\lambda;T)}$.

Bewijs:
Volgens Lemma 4.2 (v) geldt voor $\lambda \in \rho(T)$:

$$\overline{R(\lambda;T)}\ (\lambda I-\overline{T}) = (\lambda I-\overline{T})\ \overline{R(\lambda;T)} = I$$

Daaruit volgt $\sigma(\overline{T}) \subset \sigma(T)$. Uit de konstruktie van $\overline{E}$ volgt direkt dat $A\ \sigma(\overline{T}) \subset A\ \sigma(T)$ en $A\ \sigma(T) \subset P\ \sigma(\overline{T})$. Altijd geldt $P\ \sigma(\overline{T}) \subset A\ \sigma(\overline{T})$, dus

$$P\ \sigma(\overline{T}) = A\ \sigma(\overline{T}) = A\sigma(T).$$

Zij nu $\lambda \in \sigma(T) \setminus A\ \sigma(T)$. Zij $F = R(\lambda-T)$; dan $F \neq \{0\}$ en $F \neq E$. Zij $0 \neq f_0 \in F^{\perp}$ en $0 \neq x_0 \in E$. Definieer $U : E \to E$ door $U(x) = f_0(x).x_0$. Dan is $U \circ (\lambda-T) = 0$, dus volgens Lemma 4.2 (v) geldt dan $\overline{U}.(\lambda-\overline{T}) = 0$. Daar $\overline{U} \neq 0$ is $\lambda \in \sigma(\overline{T})$. Derhalve: $\sigma(T) \setminus A\ \sigma(T) \subset \sigma(\overline{T})$, dus $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$. Als $\lambda \in \rho(T)$ dan $R(\lambda;\overline{T}) = \overline{R(\lambda;T)}$.

5. De kompleksifikatie van een reële Banachruimte.

5.1 Definities. Zij E een reële lineaire ruimte. De kompleksifikatie E^c van E is de verzameling $E \times E$ waarin een optelling en een skalaire vermenigvuldiging gedefinieerd zijn door:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$(\alpha+i\beta)\ (x,y) \qquad := (\alpha x-\beta y,\ \beta x+\alpha y).$$

Men gaat gemakkelijk na dat E^c een komplekse lineaire ruimte is. Als E een genormeerde ruimte is, kunnen we in E^c een norm definiëren door:

$$||(x,y)||_c := \sup\{||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$(E^c, ||.||_c)$ is een komplekse genormeerde ruimte. E^c is een Banachruimte als en slechts als E een Banachruimte is. Definieer $J_E : E \to E^c$ door $J_E(x) = (x,0)$. J_E is een 1-1 duidige lineaire afbeelding van E in de reële restriktie $(E^c)_0$ van E^c. Als E een genormeerde ruimte is, dan is J_E een isometrie, en $J_E(E)$ is een gesloten lineaire deelruimte van $(E^c)_0$. We identificeren E met zijn beeld onder J_E. Voor $z = (x,y) \in E^c$ kunnen we dan schrijven:

$$z = (x,y) = (x,0) + i(y,0) = x + iy.$$

Deze schrijfwijze is uniek, dus $(E^c)_0 = E \oplus iE$.

Zij ook F een reële lineaire ruimte, en zij $T : E \to F$ een lineaire afbeelding. We definiëren de kompleksifikatie T^c van T door $T^c(x,y) := (Tx,Ty)$. Men gaat gemakkelijk na dat T^c een lineaire afbeelding is van E^c in F^c. Als E en F genormeerde ruimten zijn, en als $T \in L(E,F)$ dan is $T^c \in L(E^c,F^c)$ en $||T^c||_c = ||T||$. Verder geldt: $(S \circ T)^c = S^c \circ T^c$, $I_E{}^c = I_{E^c}$ en $T^c \circ J_E = J_F \circ T$. Wanneer we spreken over een spektrale eigenschap van T bedoelen we een spektrale eigenschap van T^c. In het biezonder:

$\sigma(T)$ is per definitie gelijk aan $\sigma(T^c)$.

5.2 Lemma. Zij E een komplekse Banachruimte met norm $||.||$ en zij E_r een gesloten reële deelruimte van E (d.w.z. : een gesloten lineaire deelruimte van de reële restriktie E_0 van E), met de eigenschap $E_0 = E_r \oplus i\, E_r$. Dan geldt:

(i) De projekties $P_1 : E_0 \to E_r$ en $P_2 : E_0 \to i\, E_r$ zijn begrensd;

(ii) De $||.||$-norm en de kompleksifikatie-norm $||.||_c$ (gedefinieerd door $||x+iy||_c := \sup\{||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$) zijn equivalent.

Bewijs:

(i) Men gaat gemakkelijk na dat de projekties gesloten zijn.

(ii) Zij $z = x + iy \in E$. Dan geldt $||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \leq ||x|| + ||y||$, dus $||z||_c = \sup\{||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq ||x|| + ||y|| =$
$= ||P_1 z|| + ||P_2 z|| \leq (||P_1|| + ||P_2||)||z||$.
Verder geldt:
$||x|| \leq \sup\{||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = ||z||_c$ en
$||y|| \leq \sup\{||x\cos\alpha + y\sin\alpha|| \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = ||z||_c$, dus
$||z|| = ||x+iy|| \leq ||x|| + ||y|| \leq 2\,||z||_c$.

Konklusie: $\frac{1}{2}||z|| \leq ||z||_c \leq (||P_1|| + ||P_2||)||z||$.

Literatuur

[1] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and Semigroups, Amer.Math.Soc. Coll. Publ. XXXI, Providence, R.I., (1957).

[2] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators I, Interscience Publ., New York, (1958).

[3] M.A. Naimark, Normed rings, P. Noordhoff N.V., Groningen (1964).

[4] A.E. Taylor, Introduction to functional analysis, John Wiley & Sons, New York, (1958).

[5] C.E. Rickart, General theory of Banach algebras, D. van Nostrand, Princeton, N.J., (1960).

[6] H. Bart en A. Holleman, Rapport no. 13 , Wiskundig Seminarium der Vrije Universiteit, Amsterdam, 1970.

[7] G. Bachman and L. Narici, Functional Analysis, Academic Press, New York, (1966).

[8] P.R. Halmos, Hilbert space problem book, D. van Nostrand, Princeton, N.J., (1967).

[9] H. Lotz, Über das Spektrum positiver Operatoren, Math. Zeitschrift 108 (1968), 15-32.