

MODELIZACIÓN DE PROCESOS AREA-INTERACCIÓN GENERALIZADOS

P. Gregori¹, M.N.M. van Lieshout², J. Mateu³

¹Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I de Castelló, 12071 Castelló, España
E-mail: gregori@uji.mat.es

²Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
E-mail: Marie-Colette.van.Lieshout@cwi.nl

³Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I de Castelló, 12071 Castelló, España
E-mail: mateu@uji.mat.es

RESUMEN

Los procesos puntuales espaciales de Markov se utilizan para modelizar patrones puntuales regulares o agregados. Tras los modelos “pairwise-interaction”, se sabe que los modelos “area-interaction” y “weighted shot-noise” son más adecuados para patrones ligeramente agregados o regulares. El que se presenta aquí pretende añadir más flexibilidad a la hora de ajustar patrones de puntos y mantiene la posibilidad de ser simulado mediante “exact simulation”. Además se trata de un modelo no paramétrico desde el punto de vista de la estimación.

Palabras y frases clave: Markov point processes, area-interaction, weighted shot-noise, perfect simulation.

Clasificación AMS: 62M30.

1. Introducción

El trabajo está dividido en distintas secciones donde se exponen los procesos puntuales espaciales que motivan y desembocan en la definición de uno que generaliza a algunos de ellos. Se estudian las propiedades básicas y los posibles campos de aplicación.

Las densidades de procesos puntuales espaciales en una región W (generalmente en espacios abstractos, aunque aquí trabajamos en el plano) son funciones con argumento en el conjunto de configuraciones finitas de puntos de W , llamados eventos.

Los modelos de procesos puntuales se agrupan en familias parametrizadas por uno o varios parámetros que determinan el comportamiento de los patrones puntuales que éstas pueden generar.

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\beta, \gamma, \dots), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n(\mathbf{x})}\} \quad \beta, \gamma, \dots \text{ parámetros} \quad (1)$$

Los procesos puntuales de Gibbs (aquellos que atribuyen una densidad positiva a toda subconfiguración de una configuración de puntos para la cual la densidad ya es positiva) se pueden expresar siempre de la forma

$$p(\mathbf{x}) = \exp\{-v_0 - \sum_i v_1(x_i) - \sum_{i<j} v_2(x_i, x_j) - \sum_{i<j<k} v_3(x_i, x_j, x_k) - \dots\} \quad (2)$$

donde $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{n(\mathbf{x})}$, v_0 es constante y $v_k : W^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es función simétrica para cada $k = 1, 2, \dots$. Es decir, las interacciones existentes entre los puntos presentes en la configuración se pueden descomponer. Las funciones v_k se dicen potenciales de interacción y los procesos puntuales se pueden clasificar por el orden de interacción entre puntos. Diremos que un proceso puntual tiene interacción entre puntos de orden k si $k = \max\{j \in \mathbb{N} : v_j \not\equiv 0\}$.

Los procesos puntuales se dicen de Markov (Ripley et al. (1977)) cuando son de Gibbs, existe una relación simétrica \sim de vecindad, y las interacciones son nulas excepto para conjuntos de puntos que son vecinos dos a dos (llamados cliques). Todos los procesos que aparecen en este trabajo son procesos de Markov.

2. Proceso puntual de interacción por pares

Los procesos puntuales de Gibbs interacción entre puntos más baja posible se llaman pairwise interaction (interacción por pares), y han sido profundamente estudiados desde la aparición del proceso de Strauss (Strauss (1975)) o el proceso hard-core. En el caso de tener estacionariedad e isotropía estos procesos se pueden escribir de forma general como

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \prod_{i<j} \phi(d(x_i, x_j)) \quad (3)$$

donde ϕ es la función de interacción (la exponencial de la función potencial de interacción de orden 2).

Mientras el proceso hard-core únicamente modeliza patrones puntuales regulares (puesto que se trata de un proceso de Poisson condicionado a una distancia mínima entre puntos), el proceso definido por Strauss

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{S_R(\mathbf{x})}, \quad \beta, \gamma, R > 0 \quad (4)$$

($S_R(\mathbf{x})$ es el número de pares de puntos cuya interdistancia es menor que R), aunque no consigue ser una familia de densidades de procesos puntuales para todos los valores de sus parámetros, intuitivamente produce patrones de puntos regulares o agregados según el valor de dicho parámetro. Sin embargo no es adecuado para modelizar

patrones de puntos ligeramente alejados de la aleatoriedad espacial completa (ver Møller (1993)).

El modelo más rico de la familia de procesos puntuales de interacción por pares es el multiscale pairwise interaction introducido por Heikkinen et al. (1999), dado que presenta distintos niveles de interacción entre los puntos dependiendo de la distancia que los separa, y además sirve para aproximar cualquier proceso de interacción por pares, ya que su densidad viene dada por la fórmula

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \prod_{i < j} \phi(d(x_i, x_j)) \quad \phi(t) = \begin{cases} \gamma_1 & 0 \leq t < r_1 \\ \gamma_2 & r_1 \leq t < r_2 \\ \dots & \dots \\ \gamma_k & r_{k-1} \leq t < r_k \end{cases} \quad (5)$$

y ϕ es una función escalonada que puede aproximar cualquier función continua o no ($k \in \mathbb{N}$, $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k$ y $\gamma_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$).

Así, se trata del modelo adecuado para estimar los parámetros de cualquier proceso de interacción por pares (incluido el ‘parámetro’ ϕ). Otros modelos de este tipo son el proceso de Diggle (Diggle et al. (1994)) y el Very-Soft Core (Ogata et al. (1984) y Diggle et al. (1994)).

3. Proceso puntual de interacción de áreas

Generalizaciones a los procesos comentados en la sección anterior se obtienen fácilmente dando libertad al orden de interacción entre puntos. Por ejemplo, el proceso triplets consiste en permitir interacciones de ternas de puntos.

Aún así, los procesos definidos de esta forma tienen la particularidad de poseer una función intensidad condicional (de Papangelou λ) escalonada. Es decir si

$$\lambda(u; \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{p(\mathbf{x} \cup \{u\})}{p(\mathbf{x})} & , u \notin \mathbf{x} \\ \frac{p(\mathbf{x} \setminus \{u\})}{p(\mathbf{x})} & , u \in \mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

se fija \mathbf{x} y se toma como función de variable en W , ésta resulta ser escalonada en los casos citados anteriormente.

Una forma de suavizar la intensidad condicional es cambiar la densidad del proceso, de forma que, en lugar de contabilizar un número de puntos cuya interdistancia esté en cierto rango, se contabilice el área que dos puntos encierran conjuntamente dentro de un radio de acción $R > 0$.

El proceso de interacción de áreas (Baddeley et al. (1995)) viene definido por la densidad

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-A(\mathbf{x})} \quad (7)$$

donde $\beta > 0$ es un parámetro de intensidad, $A(\mathbf{x})$ representaría el área de la unión de los discos centrados en cada punto del proceso y de cierto radio dado $R > 0$, y $\gamma > 0$ el parámetro de fuerza de la interacción.

Es fácil comprobar que el orden interacción por puntos no es acotado, por la fórmula de inclusión-exclusión de la union de conjuntos. Un ejemplo gráfico que muestra la naturaleza más suave de la interacción en este modelo que, por ejemplo, en el de Strauss, es la representación de la intensidad condicional en una región $[0, 255]^2$ donde hay 8 puntos Figura ??).

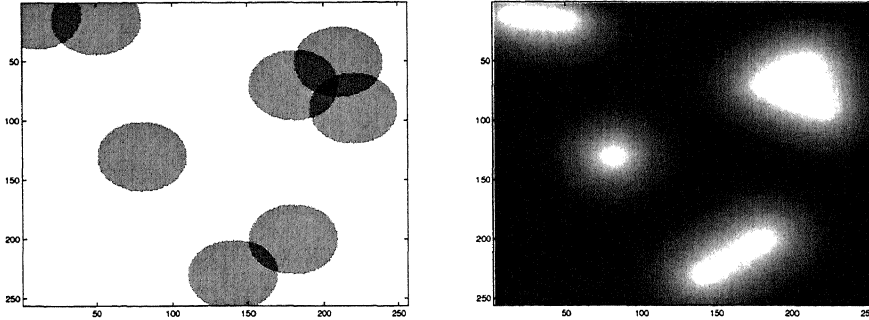


Figura 1: Configuración de un proceso de interacción de áreas con radio $R = 15$ dentro de un cuadrado de 256×256 y los correspondientes exponentes de la función intensidad condicional. Para $\gamma > 1$ las sombras claras indican valores altos, y viceversa si $\gamma < 1$.

Un resultado importante es la consecución del proceso de interacción de áreas como la marginalización del proceso bivalente de Widom–Rowlinson (penetrable spheres mixture model, Widom et al. (1970)). Dicho proceso bivalente se caracteriza por ser la superposición de dos procesos de Poisson, condicionados a que exista una interdistancia mínima entre puntos de distinto tipo. De hecho, su función de densidad es

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \beta_1^{n(\mathbf{x})} \beta_2^{n(\mathbf{y})} \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > r\} \quad (8)$$

donde $\beta_1, \beta_2 > 0$ son las intensidades respectivas.

La densidad del proceso de interacción de áreas tiene una expresión equivalente usando integrales de funciones como sigue:

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-\int_W \max_{x_i \in \mathbf{x}} \mathbf{1}\{a \in b(x_i, R)\} da} \quad (9)$$

Esta expresión servirá de punto de partida, junto a otra del siguiente modelo expuesto, para la generalización al modelo que se presenta.

La utilización del modelo de interacción de áreas es muy adecuada pues genera, en mayor medida, patrones ligeramente agregados o regulares, y además viene motivado por ejemplos intuitivos de aplicación a los contextos biológicos, en función de animales y comida circundante, o animales y depredadores en posiciones aleatorias. Además, este modelo admite extensiones a una forma menos estándar en la que las figuras que se toman para calcular las áreas son conjuntos compactos más generales que los discos.

4. Proceso puntual Shot-Noise con peso

El siguiente modelo de proceso puntual fue introducido en van Lieshout et al. (1998) y constituye un grado de extensión del proceso de interacción de áreas.

Se toma una función de Borel $\kappa : W \times W \rightarrow [0, \infty)$ donde $\kappa(a, x)$ mide la influencia que un punto x de la región ejerce sobre cada lugar que le rodea a . De este modo, si se tiene la realización de un proceso puntual cualquiera $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$, se genera una función de influencia del patrón puntual sobre el resto de la región $\xi_{\mathbf{x}}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \kappa(\cdot, x_i)$. Al proceso que genera este tipo de funciones se le llama proceso Shot-Noise. El proceso puntual cuya densidad viene dada por

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-\int_W f(\sum_{x_i \in \mathbf{x}} \kappa(a, x_i)) da} \quad (10)$$

se dice proceso Shot-Noise con peso. Los parámetros son los usuales y la función f que aparece se llama función potencial, y es la responsable de dar lugar a una gran cantidad de ejemplos. El proceso de interacción de áreas es el que se tiene al tomar $f(t) = \mathbf{1}\{t \geq 1\}$ cuando $\kappa(a, x) = \mathbf{1}\{a \in b(x, R)\}$.

Cabe notar que la familia de densidades está sobre parametrizada, pues la función f puede cambiarse por un múltiplo de ésta. La situación se resuelve, por ejemplo, tomando que $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$.

Las condiciones de buena definición de la familia de densidades se consiguen mediante restricciones sobre κ y f , por ejemplo $f(\xi_{\mathbf{x}}(a)) \leq Cn(\mathbf{x})$.

El problema de la inferencia, que se atacaba mediante aproximaciones a la máxima verosimilitud, o bien mediante el método de estimación de Takacs–Fiksel, o mediante las ecuaciones de pseudoverosimilitud, encontró un nuevo impulso tras el desarrollo del algoritmo de Kendall (Kendall (1998) y Kendall et al. (2000)), basado en el Dominated Coupled from the Past, que consigue la simulación exacta en procesos puntuales localmente estables (definición en sección ??).

5. Proceso puntual de interaction de áreas generalizado

5.1. Definiciones

El proceso que se define a continuación generaliza al proceso de interacción de áreas en el sentido de la expresión (??) usando la función de influencia introducida en los procesos Shot-Noise con peso. En ese sentido, si $\kappa : W \times W \rightarrow [0, \infty)$ es como se describía en la sección anterior, la densidad de un proceso de interacción de áreas generalizado viene dada por la expresión

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-\int_W \max_{x_i \in \mathbf{x}} \{\kappa(a, x_i)\} da} \quad (11)$$

donde los parámetros son los usuales.

Dado que $\kappa(a, x_i)$ describe el efecto que la presencia del punto x_i tiene sobre el lugar a que le rodea, es lógico asumir que ese efecto decrece en intensidad con la distancia, tomándose un truncamiento a partir de un rango $r > 0$. Asimismo, si no se posee información adicional es razonable suponer isotropía, es decir,

$$\kappa(a, b) = \kappa(d(a, b)) \quad (12)$$

donde se toma el abuso de notación $\kappa : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Ejemplos de función influencia son, para $r, \sigma > 0$,

$$\kappa(t) = \begin{cases} \mathbf{1}\{t \leq r\} & \text{Escalón} \\ \exp\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right] \mathbf{1}\{t \leq 2\sigma\} & \text{Campana} \\ \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} \mathbf{1}\{t \leq 3\sigma\} & \text{Cauchy} \\ 1 - \left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 \mathbf{1}\{t \leq \sigma\} & \text{Cuadrática} \end{cases}$$

todas con soporte compacto y normalizadas de manera que $\kappa(0) = 1$, ver Figura ??.

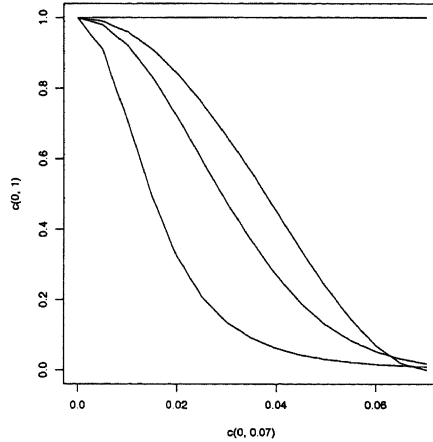


Figura 2: Gráfico de funciones influencia típicas. De arriba a abajo, **Escalón**, **Cuadrática**, **Campana** y **Cauchy**. Los parámetros de escala son $r = 0,07$, $\sigma = 0,07$, $\sigma = 0,035$ y $\sigma = 0,0233$ respectivamente.

De hecho, el proceso definido está sobrep parametrizado al igual que Shot-Noise con peso, y una forma de evitarlo es tomar el convenio $\kappa = \sup_{a,x} \kappa(a, x) = 1$.

5.2. Existencia y Markov

Una condición suficiente para la buena definición de la familia de procesos de interacción de áreas generalizados es la acotación de la función $\kappa(\cdot)$.

Por otro lado, el proceso es localmente estable, ya que la intensidad condicional resulta ser

$$\lambda(u; \mathbf{x}) = \beta \gamma^{-1} \int_W [\kappa(a, u) - \max_{x_i \in \mathbf{x}} \{\kappa(a, x_i)\}]^+ da \quad (13)$$

y está acotada por β si $\gamma \geq 1$ y por $\beta\gamma^{-\kappa|W|}$ si $\gamma < 1$. El hecho de tratarse de un proceso de Markov (Ripley et al. (1976)) se observa también de que la densidad es positiva para cualquier configuración y de que en la expresión de la intensidad condicional se pueden obviar los eventos x_i de \mathbf{x} tales que

$$\{a \in W : \kappa(a, x_i) \neq 0\} \cap \{a \in W : \kappa(a, u) \neq 0\} = \emptyset. \quad (14)$$

La relación de vecindad \sim que define el proceso de Markov sería precisamente $x \sim y$ si y sólo si

$$\{a \in W : \kappa(a, x) \neq 0\} \cap \{a \in W : \kappa(a, y) \neq 0\} \neq \emptyset. \quad (15)$$

5.3. Simulación

Para este modelo se puede usar cualquier método aproximado de simulación conocido, aunque se va a poder conseguir simulaciones directas (genuinas) de la distribución. Para ello, hay que comentar que si se define una relación de orden parcial entre las realizaciones de los procesos puntuales (la de inclusión $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$), entonces, este modelo cumple que $\lambda(u; \mathbf{x}) \leq \lambda(u; \mathbf{y})$ para $\gamma > 1$, y la desigualdad contraria si $\gamma < 1$. En otras palabras, $p(\cdot)$ se dice monótona si $\gamma > 1$ y antimonótona si $\gamma < 1$.

Siendo pues la densidad de un proceso de interacción de áreas generalizado localmente estable y monótona o antimonótona, dependiendo del valor de γ , se pueden extraer simulaciones exactas usando el algoritmo coupling from the past (Kendall et al. (2000), Propp et al. (1996)) que se resume a continuación:

Un proceso de Poisson dominante de intensidad $\kappa^* = \max\{\beta, \beta\gamma^{-\kappa|W|}\}$ se extiende retrocediendo en el tiempo desde 0 hasta $-n$ según un proceso espacial de nacimiento-muerte (birth-and-death process) de ratio de muerte unidad (Preston (1976)). Emparejado a éste, se inician dos procesos (superior e inferior) en el tiempo $-n$. El superior con el estado del proceso dominante en ese instante, y el inferior en estado vacío. Ambos se desarrollan hasta el instante inicial (tiempo 0) con transiciones gobernadas por el proceso dominante, de modo que éstos se van aproximando entre sí. Si en tiempo 0 los procesos no tienen el mismo estado, se repite retrocediendo hasta tiempo $-2n$. Cuando los procesos acaban con el mismo estado, se dice que se alcanzó la coalescencia, y el estado mostrado es una realización del proceso.

La mejor referencia al respecto es Kendall et al. (2000).

5.4. Inferencia: estimación de parámetros

Estimación paramétrica de β y γ

A partir de un patrón de puntos \mathbf{x} , si se conoce la expresión de la función $\kappa(\cdot)$ que gobierna la influencia de los puntos sobre la región, es posible realizar la estimación

sobre los parámetros β y γ . Si $\kappa(\cdot)$ también es desconocida se debe intentar un proceso de estimación no paramétrica al estilo de Heikkinen et al. (1999) y Berthelsen et al. (2001), que describimos en el siguiente punto.

Estimación Bayesiana no paramétrica

Al intentar estimar la función $\kappa(\cdot)$, entramos en un contexto Bayesiano. Para modelizar $\kappa(\cdot)$ a priori usaremos una densidad que proporcione funciones escalonadas (al estilo del proceso de interacción por pares multiscale (??)) con pequeños saltos. Un método similar se usó de forma pionera por Heikkinen y Penttinen en Heikkinen et al. (1999), y refinado por Berthelsen y Møller en Berthelsen et al. (2001).

Como se citó anteriormente, es lógico trabajar en un conjunto de funciones decrecientes.

$$\kappa \in \left\{ \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \mathbf{1}\{[r_{i-1}, r_i)\} : p \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} 1 = \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_p \geq \alpha_{p+1} = 0 \\ 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_p < r_{p+1} = r_{\max} < \infty \end{array} \right\}$$

donde r_{\max} es el rango máximo de influencia, determinado por el tamaño de la región o por inspección de los estadísticos como las funciones K (de Ripley) o J (van Lieshout et al. (1996)).

La densidad de un proceso de interacción de área generalizado para tal tipo de función escalonada queda

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-\sum_{i=0}^p \alpha_i [|U_{r_{i+1}}(\mathbf{x})| - |U_{r_i}(\mathbf{x})|]}$$

donde $U_r(\mathbf{x}) = \cup_{x \in \mathbf{x}} B(x, r) \cap W$ y que sería la versión del proceso multiscale, pero con interacción de áreas (que no de pares de puntos).

Nótese que $\kappa(\cdot)$ viene unívocamente determinada por un proceso puntual marcado $(r_i, \alpha_i)_{i=1}^p$ en el intervalo $[0, r_{\max}]$.

Elecciones a priori

La elección de densidades a priori para β y γ es más natural, en contraposición a κ , pues se debe encontrar un equilibrio entre la ‘realización esperada’ y la simplicidad-complejidad de la expresión de la densidad.

Para empezar, como en Berthelsen et al. (2001), β se tomará distribuida uniformemente en un intervalo $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ que contenga la intensidad observada $\frac{n(\mathbf{x})}{|W|}$.

Respecto al parámetro γ , distinguimos entre patrones regulares y agregados. En el primer caso, dado que γ es, teóricamente, un valor de $(0, 1)$, tomaríamos la distribución uniforme estándar. En el otro caso, consideraremos γ^{-1} distribuido uniformemente en $[0, 1]$; en otras palabras la densidad será $1/\gamma^2$ para $\gamma \in (1, \infty)$.

Para κ presentamos diversas opciones. En todos los casos, los puntos de discontinuidad se distribuyen según un proceso de Poisson de intensidad $\lambda > 0$ prefijado por el investigador en $[0, r_{\max}]$ (r_{\max} elegido de forma conservadora mediante el cálculo de las funciones K o J empíricas).

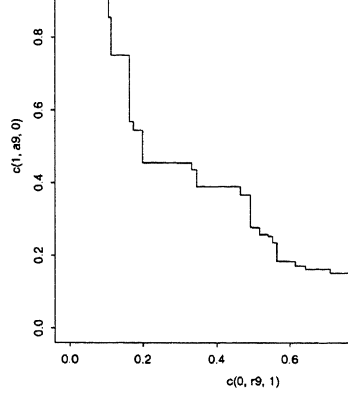


Figura 3: Realización, con $\lambda = 25$, de una función κ con distribución a priori del tipo ‘escalado’.

Caso ‘Uniforme’

Aquí cada marca α_i asociada al punto r_i sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, \alpha_{i-1}]$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Con ello, la densidad del proceso es

$$\pi_{\kappa}(\kappa) = e^{(1-\lambda)r_{\text{máx}}}\lambda^p \times \frac{\mathbf{1}\{1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_p > 0\}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}$$

con respecto al proceso puntual marcado $\text{Ps}(\text{Leb} \times \text{Leb})$ y donde $\kappa = (r_i, \alpha_i)_{i=1}^p$. La densidad posterior

$$p(\beta, \gamma, \kappa | \mathbf{x}) \propto \frac{1}{\beta_{\text{máx}} - \beta_{\text{mín}}} e^{(1-\lambda)r_{\text{máx}}}\lambda^p \times \frac{\mathbf{1}\{1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_p > 0\}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} \\ \times \alpha(\beta, \gamma, \kappa) \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{-\sum_{i=0}^p \alpha_i (|U_{r_{i+1}}(\mathbf{x})| - |U_{r_i}(\mathbf{x})|)}$$

donde $\kappa = (r_i, \alpha_i)_{i=1}^p$.

Caso ‘Exponencial’

Las marcas α_i se obtienen a partir de marcas δ_i distribuidas independiente y exponencialmente con intensidad $\lambda r_{\text{máx}}$. Así $\alpha_i = 1 - \sum_{j=1}^i \delta_j$.

La densidad de tal proceso, si $\kappa = (r_i, \delta_i)_{i=1}^p$ es

$$\pi_{\kappa}(\kappa) = e^{(1-\lambda)r_{\text{máx}}}\lambda^p \times \prod_{i=1}^p \left(\frac{\lambda r_{\text{máx}} e^{-\lambda r_{\text{máx}} \delta_j}}{e^{-\delta_j}} \right) \\ = e^{(1-\lambda)r_{\text{máx}}}\lambda^p (\lambda r_{\text{máx}})^p e^{-(\lambda r_{\text{máx}} - 1) \sum_{i=1}^p \delta_j}$$

con respecto al proceso puntual marcado $\text{Ps}(\text{Leb} \times \exp(1))$.

Nótese que esta densidad asigna probabilidad no nula a funciones κ no deseadas (ya que la suma de los δ_i 's podría exceder 1, haciendo que κ tome valores negativos). Hemos elegido aceptar tales funciones para disponer de una densidad con una expresión manejable, y lo que se hará es descartar la parte negativa de κ cuando se calcula la integral que aparece en la densidad del proceso.

Así, para el caso regular ($\gamma \in (0, 1)$) podemos escribir como densidad a posteriori de los parámetros

$$p(\beta, \gamma, \kappa | \mathbf{x}) \propto \frac{1}{\beta_{\max} - \beta_{\min}} e^{(1-\lambda)r_{\max}} \lambda^p (\lambda r_{\max})^p e^{-(\lambda r_{\max} - 1) \sum_{i=1}^p \delta_j} \\ \times \alpha(\beta, \gamma, \kappa) \beta^{n(\mathbf{x})} \\ \times \gamma^{-\sum_{i=0}^p \max(0, 1 - \sum_{j \leq i} \delta_j)} [|U_{r_{i+1}}(\mathbf{x})| - |U_{r_i}(\mathbf{x})|]$$

donde $\kappa = (r_i, \delta_i)_{i=1}^p$. En el caso agregado se obtiene una expresión similar.

Caso ‘Escalado’

Aún otra elección posible es $\alpha_{i+1} = C_{i+1} \alpha_i$ con $1 - C_{i+1}$ uniformemente distribuida en $(0, 2 \log(\lambda r_{\max}) / \lambda r_{\max})$. Nótese que

$$\mathbb{E} \left[\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right] = 1 - \frac{\log(\lambda r_{\max})}{\lambda r_{\max}}$$

es constante, como también la varianza del cociente de influencias. Más aún, la esperanza del último valor no nulo es $\mathbb{E} \alpha_N = 1 / (\lambda r_{\max})$.

El modelo descrito tiene como densidad

$$\pi(\kappa) = e^{(1-\lambda)r_{\max}} \lambda^{n(\kappa)} (2 - 2\mathbb{E}C_1)^{-n(\kappa)} \frac{\prod_{i=0}^{p-1} \mathbf{1}\left\{\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \in (2\mathbb{E}C_1 - 1, 1)\right\}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{p-1}}$$

Algoritmo de Metropolis–Hastings

Para la estimación de los valores β , γ y κ usaremos un algoritmo de Metropolis–Hastings en 3 pasos, uno para cada ‘parámetro’. Hay que tener en cuenta que el paso de κ es más complejo por tratarse de un proceso puntual en sí mismo.

La estructura del algoritmo (para cada uno de los 3 pasos) es la usual:

1. Se parte de un valor inicial del parámetro.
2. Se genera un valor propuesto (update) bajo cierta distribución de transición.
3. Se acepta o rechaza la actualización según el ‘acceptance ratio’.
4. Se vuelve al paso 2.

La particularidad del algoritmo para el paso de κ es el segundo punto, donde se requiere de técnicas de ‘importance sampling’ (Geyer (1994)) y de simulación exacta, posible en este caso.

Referencias

- Baddeley, A.; van Lieshout M.N.M. (1995): Area-interaction point processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 47, 601–619.
- Berthelsen, K.K.; Möller, J. (2001): Perfect simulation and inference for spatial point processes. Technical report, R-01-2009, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Submitted.
- Diggle, P.J.; Fiksel, T.; Grabarnik, P.; Ogata, Y.; Stoyan, D.; Tanemura M. (1994): On parameter estimation for pairwise interaction processes. *International Statistical Review* 62, 99–117.
- Geyer, C.J. (1994): On the convergence of Monte Carlo maximum likelihood calculations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 56, 261–274.
- Heikkinen, J.; Penttinen, A. (1999): Bayesian smoothing in the estimation of the pair potential function of Gibbs point processes. *Bernoulli* 5, no. 6, 1119–1136.
- Kendall, W.S. (1998): Perfect simulation for the area-interaction point process. In L. Acardi and C. Heyde, editors, *Proceedings of the Symposium on Probability towards the year 2000*, Berlin.
- Kendall, W.S.; Møller, J. (2000): Perfect Metropolis–Hastings simulation of locally stable spatial point processes. *Advances in Applied Probability (SGSA)* 32, 844–865.
- van Lieshout, M.N.M.; Baddeley, A.J. (1996): A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns. *Statistica Neerlandica* 50, 344–361.
- van Lieshout, M. N. M.; Molchanov, I. S. (1998): Shot-noise weighted processes: a new family of spatial point processes. *Communications in Statistics - Stochastic models* 14, 715–734.
- Møller, J. (1993): Spatial point processes and Markov chain Monte Carlo methods. *Lecture at Conference on Stochastic Processes and their Applications*, Amsterdam.
- Ogata, Y.; Tanemura, M. (1984): Likelihood analysis of spatial point patterns. *Journal of the Royal Statistical Society*, B46, 496–518.
- Preston, C.J. (1976). *Random fields*. Springer, Berlin.
- Ripley B.D.; Kelly F.P. (1977): Markov point processes. *Journal of the London Mathematical Society* 15, 188–192.
- Strauss, D.J. (1975): A model for clustering. *Biometrika* 63, 467–475.
- Widom, B.; Rowlinson, J.S. (1970): New model for the study of liquid-vapor phase transitions. *The Journal of Chemical Physics* 52, 1670–1684.