4. GEWOGEN RESIDUEN METHODEN

4.1. Inleiding

In hoofdstuk 2 behandelden we randwaardeproblemen waarvan de oplossing beschouwd kan worden als het minimaliserend element van een convexe functionaal. Dit impliceert dat we ons beperkten tot symmetrische, positief definiete operatoren. In dit hoofdstuk zullen we zien dat de in hoofdstuk 2 behandelde Ritz-methode een bijzonder geval is van een uitgebreidere klasse van methoden: de gewogen residuen methoden. Tot deze klasse zullen nog een aantal bekende discretiseringsmethoden blijken te behoren zoals de collocatie- en de Galerkin-methode.

Voor een gewogen residuen methode wordt uitgegaan van de differentiaalvergelijking

(4.1.1) $$Lu = f$$

in een gegeneraliseerde vorm. Dit kan op verschillende manieren gebeuren en hiervoor zijn verschillende varianten mogelijk. Deze hebben echter alle gemeen dat de vergelijking vermenigvuldigd wordt met een "functie" v en geïntegreerd wordt over het gebied Ω. Formeel kunnen we dit als volgt beschrijven. Zij D een dichte deelverzameling van een separabele Banachruimte H en zij L een operator $L: D \to H$, dan heet u een "gegeneraliseerde" oplossing van (4.1.1) als elke lineaire operator $\ell: H \to \mathbb{R}$ het residu $Lu-f$ nul maakt. We kunnen dit schrijven als

(4.1.2a) $$\ell(Lu-f) = 0 \quad , \qquad \text{voor alle } \ell \in H^D,$$

of als

(4.1.2b) $$\langle Lu-f,\ell\rangle = 0 \quad , \qquad \text{voor alle } \ell \in H^D.$$

Hierin is H^D een deelverzameling van de duale ruimte van H.

Voorbeeld 4.1.1

Zijn de elementen van H begrensde functies, dan kunnen we het "inprodukt nemen" met alle delta-functies op Ω:

(4.1.3a) $\langle Lu,\delta_{x_0}\rangle = \langle f,\delta_{x_0}\rangle$, voor alle $x_0 \in \Omega$,

of

(4.1.3b) $\int_\Omega (Lu(x)-f(x))\delta(x-x_0)\, d\Omega = 0$, voor alle $x_0 \in \Omega$,

of

(4.1.3c) $Lu(x_0) = f(x_0)$, voor alle $x_0 \in \Omega$.

Een "gegeneraliseerde" oplossing komt in dit geval overeen met de klassieke oplossing.

Voorbeeld 4.1.2

Als H een Hilbert-ruimte is, kunnen we H^D identificeren met H en we kunnen schrijven

(4.1.4a) $(Lu-f,v)_H = 0$, voor alle $v \in H$,

ofwel

(4.1.4b) $\int_\Omega Luv\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega$, voor alle $v \in H$.

Dit is de *zwakke vorm* van de differentiaalvergelijking.

De discretisering van een continu probleem

De discretisering van het probleem $Lu = f$ wordt nu als volgt tot stand gebracht:

(i) Een eindigdimensionale ruimte $S_h \subset H$ wordt gekozen, opgespannen door de basiselementen $\{\phi_i\}_{i=1}^N$. De oplossing $u \in D$ wordt benaderd door een element $u_h \in S_h$. Dit wil zeggen dat de benadering u_h wordt beschreven als

(4.1.5) $u_h = \sum_{i=1}^N a_i\phi_i.$

S_h heet de *trial space*.

(ii) Een eindigdimensionale ruimte $V_h \subset H^D$ wordt gekozen, opgespannen door de *testfuncties* $\{\psi_i\}_{i=1}^N$. V_h heet de *test space*.

(iii) De benadering u_h wordt bepaald door het discreet analogon van (4.1.3). Hierdoor ontstaat een stelsel van N algebraïsche (of transcendente) vergelijkingen met N onbekenden

$$(4.1.6) \qquad \langle L(\sum_{i=1}^{N} a_i\phi_i),\psi_j\rangle = \langle f,\psi_j\rangle \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,N.$$

In het resterende gedeelte van dit hoofdstuk zullen we aannemen dat de operator L lineair is. Hierdoor kan het stelsel worden geschreven als

$$(4.1.7) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \langle L\phi_i,\psi_j\rangle = \langle f,\psi_j\rangle \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,N.$$

4.2. De collocatie methode

De collocatie methode ontstaat door discretisering van de gegeneraliseerde vergelijking zoals deze werd gegeven in voorbeeld 4.1.1. De functies $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ worden gekozen uit het definitiegebied D van de operator L. Als functies $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ worden N verschillende delta-functies δ_{x_0}, $x_0 \in \Omega$, gekozen. Het stelsel vergelijkingen luidt dan

$$(4.2.1) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i L\phi_i(x_j) = f(x_j) \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,N.$$

In welke mate de oplossing van het discrete probleem (4.2.1) de oplossing van het continue probleem (4.1.1) benadert, hangt geheel af van de keuze van $\{\phi_i\}$ en $\{x_j\}$. In de eerste plaats is het direkt duidelijk dat de matrix $(L\phi_i(x_j))$ niet singulier mag zijn.

De eindige-elementen-techniek kan, in het geval van een collocatie methode, worden toegepast in die zin dat voor $\{\phi_i\}$ stuksgewijze polynomen gekozen kunnen worden met een zo klein mogelijke drager. Hoewel het niet strikt noodzakelijk is, zal men in het algemeen het definitiegebied Ω in een aantal elementen verdelen en op elk element een gelijke wijze van discretiseren kiezen.

De collocatie methode lijkt niet bijzonder geschikt voor problemen in meer dimensies ($n > 1$) vanwege de strenge continuiteits-eisen die gesteld worden aan de functies ϕ_i. Voor tweepunts randwaardeproblemen is de methode interessanter. Enkele belangrijke foutschattingen worden gegeven door RUSSEL & SHAMPINE [1972] en DE BOOR & SWARTZ [1973].

Wij zullen hier niet verder ingaan op de collocatie methoden, maar toch is de volgende stelling zeker het vermelden waard.

Stelling 4.2.1

Zij L een (lineaire) m-de orde differentiaaloperator, zodanig dat $Lu = f$ eenduidig oplosbaar is. Laat $S_h \subset C^{m-1}[a,b]$ bestaan uit stuksgewijs (k-1)-de graads polynomen op een partitie π van het definitiegebied $[a,b]$

(4.2.2) $$\pi : \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\}.$$

Zij h gedefinieerd door

(4.2.3) $$h = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - x_{i-1}|.$$

(i) Dan zijn k-m steunpunten noodzakelijk op elk interval, en

(ii) er bestaat de foutschatting

$$\|D^j(u-u_h)\|_{0,\infty} \leq K\, h^{k-m}\, \|D^k u\|_{0,\infty}, \qquad j = 0,1,\ldots,m.$$

(iii) Als op $[x_{i-1},x_i]$ de nulpunten van het (k-m)-de verschoven Legendre-polynoom gekozen worden als steunpunten voor de collocatie, dan geldt voor de steunpunten $x_i \in \pi$ zelfs

(4.2.5) $$|D^j(u-u_h)(x_i)| = O(h^{2(k-m)}) \qquad , \quad j = 0,1,\ldots,m-1.$$

Bewijs Zie DE BOOR & SCHWARTZ [1973].

4.3. De Galerkin-methode

De Galerkin-methode ontstaat door het discretiseren van de gegeneraliseerde vergelijking zoals die gegeven is in voorbeeld 4.1.2. Hier neemt men $S_h = V_h \subset H$ een eindigdimensionale deelruimte opgespannen door $\{\phi_i\}_{i=1}^N$. De discrete vergelijking luidt

(4.3.1) $$\sum_{i=1}^{N} a_i\,(L\phi_i,\phi_j) = (f,\phi_j) \qquad , \quad j = 1,\ldots,N.$$

We zien, dat de Galerkin-methode samenvalt met de Ritz-methode, wanneer L een symmetrische, positief definiete operator is. De eindige elementen technieken zijn weer toepasbaar en leiden ook hier tot het gebruik van stuksgewijs polynomen ϕ_i met een kleine drager. De inproduct-vorm $(L\phi_i,\phi_j)$ maakt het mogelijk om, door partieel integreren, de differentiaal operator L over ϕ_i en ϕ_j te "verdelen". Hierdoor kan men, bij een operator van de orde 2m, basisfuncties $\phi_i \in H$ kiezen welke niet behoren tot $D = C^{2m}(\Omega)$. Het is voldoende, als de basisfuncties ϕ_i behoren tot $H^m(\Omega)$.

Op deze wijze kunnen, via de Galerkin-methode, de technieken van de klassieke eindige elementen methode, in principe ook worden toegepast op niet-symmetrische en niet-positief-definiete problemen. Convergentie en foutschattingen leveren echter meer moeilijkheden en hiervoor zullen aan de operator L en aan de discretisering toch bepaalde voorwaarden moeten worden opgelegd.

4.4. Een verband tussen de Galerkin- en de collocatie methode

In tegenstelling tot de collocatie methode, moet bij de Galerkin-methode een integraal uitgerekend worden voor de berekening van een element van de discrete operator $(L\phi_i,\phi_j)$. Deze integraal zal echter in de praktijk altijd benaderd worden met behulp van een integratie-regel. Wanneer we de differentiaal-operator L niet "verdelen" over ϕ_i en ϕ_j, wordt een matrix-element benaderd door

$$(4.4.1) \qquad (L\phi_i,\phi_j) \approx \sum_{k=1}^{M} w_k \, L\phi_i(x_k)\phi_j(x_k).$$

Passen we dezelfde integratieregel toe op het rechterlid, dan luidt de discrete vergelijking

$$(4.4.2) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{k=1}^{M} w_k \, L\phi_i(x_k)\phi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{M} w_k \, f(x_k)\phi_j(x_k).$$

Wanneer de matrix $(w_k\phi_j(x_k))$ vierkant is en niet-singulier, dan is het stelsel (4.4.2) equivalent met

$$(4.4.3) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \, L\phi_i(x_k) = f(x_k) \, , \qquad k = 1,\dots,N.$$

Dit is precies de discrete operator voor een collocatie-methode.

Opmerking 4.4.1.

Om de transformatie van een Galerkin- naar een collocatie-methode mogelijk te maken, kunnen we de operator L (van orde 2m) *niet* "verdelen" over ϕ_i en ϕ_j. Het is daarom noodzakelijk dat $\phi_i \in H^{2m}[a,b]$. Volgens Sobolov's lemma moet derhalve $\phi_i \in C^{2m-1}$.

Ter illustratie passen we de transformatie toe op het tweepunts randwaardeprobleem uit paragraaf 4.2. De integratie (4.4.1) wordt, zoals gebruikelijk bij een eindige elementen methode, elements-gewijs uitgevoerd. Willen we op elk element de nauwkeurigste kwadratuur-formule met steunpunten toepassen, dan leidt dit tot de Gauss-Legendre kwadratuur-formules welke een fout O(h) bezitten. Worden voor de functies ϕ_i (k-1)-de graads stuksgewijs polynomen gekozen, dan moet (opdat de matrix $w_k\phi_i(x_k)$ vierkant en niet-singulier is) gelden $K = k-m$.

De matrix $(L\phi_i,\phi_j)$ en het rechterlid (f,ϕ_j) kunnen, wanneer Gauss-Legendre-kwadratuur gebruikt wordt, berekend worden met een fout $O(h^{2(k-m)})$. Dit geeft ons een aanwijzing waarom de collocatie-methode nauwkeurig is wanneer juist de nulpunten van een Legendre-polynoom gekozen worden als steunpunten voor de collocatie.

4.5. Een globale foutschatting voor een Galerkin-methode

We beschouwen hier een tweepunts randwaardeprobleem op het interval [a,b]

$$(4.5.1)\qquad Lu \equiv u'' + pu' + qu = f,$$

met Dirichlet-randvoorwaarden. We nemen aan dat p, q en f voldoende glad zijn en begrensd

$$|p| \le P, \quad |q| \le Q \quad \text{op } [a,b].$$

Voor dit probleem geven we in deze paragraaf een foutschatting in een globale norm. Het bewijs laat zich zonder veel moeite uitbreiden voor het geval van een meerdimensionaal elliptisch probleem.

Stelling 4.5.1 (DOUGLAS & DUPONT [1974]).

Laat $u_h \in V_h \subset H^1[a,b]$ de Galerkin-oplossing zijn van $Lu = f$. Als V_h alle (stuksgewijs) polynomen van de graad kleiner dan k bevat, dan geldt

(4.5.2) $\quad \|u-u_h\|_0 + h\|u-u_h\|_1 \le K\ |u|_k\ h^k.$

Bewijs

Uit stelling 2.10.1 volgt dat, voor een voldoende gladde functie w,

(4.5.3) $\quad \inf_{v_h \in V_h} \|w-v_h\|_0 + h\|w-v_h\|_1 \le K\ |w|_k\ h^k.$

We zullen nu achtereenvolgens aantonen dat

(4.5.4) $\quad \|u-u_h\|_0 \le K_1 \|u-u_h\|_1\ h$

en dat

(4.5.5) $\quad \|u-u_h\|_1 \le K_2\ |u|_k\ h^{k-1}.$

Uit deze twee ongelijkheden volgt (4.5.2) direkt, wanneer gebruik gemaakt wordt van (4.5.3).

Is u de oplossing van Lu = f, dan geldt

(4.5.6) $\quad B(u,v) = (f,v) \qquad , \qquad$ voor alle $v \in H^1_0[a,b]$.

Hierin is

(4.5.7) $\quad B(u,v) = \int_a^b -u'v' + pu'v + quv\ dx$

een begrensde lineaire operator $H^1[a,b] \times H^1_0[a,b] \to \mathbb{R}$.

De Galerkin-benadering $u_h \in V_h$ wordt zodanig bepaald dat

(4.5.8) $\quad B(u_h,v_h) = (f,v_h) \qquad , \qquad$ voor alle $v_h \in V_h \cap H^1_0[a,b]$.

Voor het bewijs van de stelling introduceren we een functie z, die de oplossing is van het probleem

$$L^T z = u_h - u \qquad \text{op } [a,b]$$

met homogene Dirichlet-randvoorwaarden. Hier is L^T de geadjungeerde operator van L, zodat voor alle $w \in H^1[a,b]$ geldt

$$B(w,z) = (w,u_h-u).$$

In het bijzonder geldt

$$\|u_h-u\|_0^2 = B(u_h-u,z).$$

Uit (4.5.6) en (4.5.8) volgt dat $B(u-u_h,v_h) = 0$ voor alle $v_h \in V_h \cap H_0^1[a,b] = V_h$, zodat

$$\|u_h-u\|_0^2 = B(u_h-u,z-v_h) \le K_0\|u_h-u\|_1 \|z-v_h\|_1 \text{ voor alle } v_h \in V_h.$$

Derhalve geldt

$$\|u_h-u\|_0^2 \le K_0\|u_h-u\|_1 \inf_{v_h\in V_h} \|z-v_h\|_1 .$$

Omdat $u-u_h \in H^0[a,b]$ is $z \in H^2[a,b]$ en bestaat er een K_R, zodat

$$\|z\|_2 \le K_R\|u_h-u\|_0.$$

Met behulp van (4.5.3) krijgen we

$$\inf_{v_h\in V_h} \|z-v_h\|_1 \le K_I\|z\|_2\, h \le K_I\, K_R\|u_h-u\|_0\, h ,$$

zodat

$$\text{(4.5.9)} \qquad \|u_h-u\|_0 \le K_0 \|u_h-u\|_1\, K_I\, K_R\, h = K\|u_h-u\|_1\, h.$$

Hiermee is voldaan aan de ongelijkheid (4.5.4).

Voor elke $v \in H^1[a,b]$ geldt

$$|v|_1^2 \le (P+Q) \|v\|_0 \|v\|_1 + |B(u,v)|$$

en in het bijzonder geldt

$$|u-u_h|_1^2 \le (P+Q)\ \|u_h-u\|_0\ \|u_h-u\|_1 + \inf_{v_h\in V_h} |B(u-u_h,u-v_h)|.$$

Samen met (4.5.9) levert dit

$$\|u-u_h\|_1^2 \le \|u_h-u\|_1\ \{(P+Q+Kh)\|u_h-u\|_0 + K_0 \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_1\},$$

zodat

$$\|u-u_h\|_1 \le Kh(P+Q+Kh)\|u-u_h\|_1 + K_0 \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_1.$$

Hieruit volgt dat voor voldoende kleine h, namelijk als

$$Kh(P+Q+Kh) < 1,$$

geldt dat

$$\|u-u_h\|_1 \le \frac{K_0 \inf\limits_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_1}{1 - Kh(P+Q+Kh)} \le \frac{K_0\ K_3|u|_k\ h^{k-1}}{1 - Kh(P+Q+Kh)}.$$

Hiermee is voldaan aan (4.5.5), waarmee de stelling bewezen is.

4.6. Een puntsgewijze foutschatting voor een Galerkin-methode

In deze paragraaf geven we een puntsgewijze foutschatting voor het probleem (4.5.1).

Zoals we reeds zagen (paragraaf 2.10), kunnen stuksgewijze polynomen van de graad k-1 een voldoende gladde functie *over het gehele interval* [a,b] benaderen met een globale fout $O(h^k)$. De puntsgewijze foutschatting, die we hier zullen afleiden, geeft echter het verschil tussen de berekende en de exacte oplossing van de differentiaalvergelijking *op een aantal - van te voren bekende - punten*. We zullen zien dat het, met de Galerkin-methode berekende, stuksgewijs polynoom dat de oplossing van het probleem (4.5.1) benadert, op de steunpunten $x_i \in \pi$ veel nauwkeuriger is dan $O(h^k)$, namelijk $O(h^{2k-2})$. We merken op dat een overeenkomstig verschijnsel te zien was bij de collocatie-methode: vergelijk de foutschattingen (4.2.4), (4.2.5) en (4.2.6).

Stelling 4.6.1 (DOUGLAS & DUPONT [1974]).

Laat $u_h \in V_h$ de Galerkin-oplossing zijn van Lu = f (zie paragraaf 4.5). Als

V_h alle stuksgewijs polynomen van de graad kleiner dan k over een partitie $\pi : \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ bevat en als de stuksgewijze polynomen uit V_h bovendien discontinue afgeleiden in de steunpunten $x_i \in \pi$ toelaten, dan geldt

(4.6.1) $\quad |(u-u_h)(x_i)| \le K \, \|u\|_k \, h^{2k-2}.$

Bewijs

Uit (4.5.6) en (4.5.8) volgt

$$B(u_h-u,v_h) = 0 \qquad , \text{ voor alle } v_h \in V_h.$$

Laat $G(x,\xi)$ de Greense functie zijn voor de vergelijking (4.5.1), dan geldt

$$w(x) = -\,(Lw,G(x,\cdot)).$$

De Greense functie heeft de volgende eigenschappen:

(i) $G(x,\xi) = G(\xi,x)$;

(ii) $G(x,\cdot) \in C_0^0[a,b] \cap H^1[a,x] \cap H^1[x,b]$;

(iii) $L^T G(x,\cdot) = 0$ op $[a,x)$ en op $(x,b]$;

(iv) $(\partial/\partial\xi)G(x,\xi)|_{\xi=x+0} - (\partial/\partial\xi)G(x,\xi)|_{\xi=x-0} = 1$.

We kunnen nu voor een vast punt $x \in (a,b)$ de volgende foutschatting geven:

$$|(u_h-u)(x)| = |(L(u_h-u),G(x,\cdot))| = |B(u_h-u,G(x,\cdot))| =$$

$$= |B(u_h-u,G(x,\cdot)-v_h)| \le$$

$$\le K_0 \|u-u_h\|_1 \, \|G(x,\cdot)-v_h\|_1, \text{ voor alle } v_h \in V_h.$$

Aangezien $G(x,\cdot)$ glad is op $[a,x)$ en $(x,b]$ en aangezien de discontinue afgeleide op een steunpunt door de functies uit V_h gerepresenteerd kan worden, geldt voor elke $x_i \in \pi$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|G(x_i,\cdot)-v_h\|_1 \le K_I \, \|G(x_i,\cdot)\|_k^* \, h^{k-1},$$

$$\|G(x_i,\cdot)\|_k^* = \|G(x_i,\cdot)\|_{H^k[a,x_i]} + \|G(x_i,\cdot)\|_{H^k[x_i,b]}.$$

Gecombineerd met het resultaat van stelling 4.5.1 levert dit

$$|(u_h-u)(x_i)| \leq K_0\, K\, \|u\|_k\, h^{k-1}\, K_I\, \|G(x_i,\cdot)\|_k^*\, h^{k-1}.$$

zodat de stelling bewezen is.

Opmerking

We merken op dat de Lagrange-polynomen voldoen aan de voorwaarden die in deze stelling gesteld worden aan een basisfunctie voor V_h. De Hermite-polynomen voldoen niet, omdat deze op de steunpunten geen discontinuïteiten in de afgeleide kunnen representeren.

4.7. De invloed van numerieke kwadratuur op de nauwkeurigheid van een Galerkin-methode

Is u_h de Galerkin-benadering van de vergelijking

$$B(u,v) = \ell(v) \quad , \quad \text{voor alle } v \in V \tag{4.7.1}$$

met B een bilineaire en ℓ een lineaire operator, dan wordt u_h beschreven door

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i\, \phi_i \quad ,$$

waarin (a_i) de oplossing is van het lineaire stelsel

$$\sum_{i=1}^{N} B(\phi_i,\phi_j)\, a_i = \ell(\phi_j) \quad , \quad j = 1,\dots,N. \tag{4.7.2}$$

De matrix-elementen $B(\phi_i,\phi_j)$ en de elementen van het rechterlid $\ell(\phi_i)$ zijn integralen. Voor de praktijk is het een vraag van fundamenteel belang, met welke nauwkeurigheid deze integralen berekend moeten worden. Het is een redelijke eis, te verlangen dat de integralen zó nauwkeurig worden uitgerekend dat de maximale orde van nauwkeurigheid in de berekening van u_h gegarandeerd is. Anderzijds is het nauwkeurig berekenen van de integralen een overbodige moeite, wanneer daardoor de berekende oplossing u_h geen nauwkeuriger benadering wordt van de exacte oplossing u. Deze twee overwegingen geven een duidelijk criterium voor de nauwkeurigheid waarmee de kwadratuur uitgevoerd moet worden.

We geven het discrete Galerkin-probleem aan met

(4.7.3) $\quad B(u_h,v_h) = \ell(v_h), \qquad$ voor alle $v_h \in V_h$.

Het lineaire stelsel dat in feite wordt opgelost - d.w.z. het stelsel waarin de matrix $B(\cdot,\cdot)$ en de vector $\ell(\cdot)$ gestoord zijn door kwadratuurfouten - geven we aan met

(4.7.4) $\quad B^*(u_h^*,v_h) = \ell^*(v_h), \qquad$ voor alle $v_h \in V_h$.

Adaptieve kwadratuurprocedures waarmee de integralen met een gewenste absolute of relatieve nauwkeurigheid worden uitgerekend, verrichten in het algemeen meer werk dan voor het doel noodzakelijk is. We kunnen namelijk, na enige analyse, van te voren aangeven *met welke orde van nauwkeurigheid* de integraal berekend moet worden.

Beschouwen we bijvoorbeeld het randwaardeprobleem

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a \le x \le b,$$

(4.5.7) $\quad u(a) = u(b) = 0,$

p, q en f voldoende glad.

Zij $\{\phi_i\}$ een basis van V_h, de ruimte van continue functies die op ieder deelsegment van de partitie

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

een polynoom van de graad kleiner dan k zijn en die in a en b de waarde 0 aannemen. Dan wordt de oplossing van (4.7.3) bepaald door (4.7.2), waarin

(4.7.6)

$$B(\phi_i,\phi_j) = \sum_{m=1}^{N} B_m(\phi_i,\phi_j) = \sum_{m=1}^{N} \int_{x_{m-1}}^{x_m} [-\phi_i'\phi_j' + p\phi_i'\phi_j + q\phi_i\phi_j]dx;$$

$$\ell(\phi_j) = \sum_{m=1}^{N} \ell_m(\phi_j) = \sum_{m=1}^{N} \int_{x_{m-1}}^{x_m} f\phi_i \, dx.$$

In de praktijk nemen we genoegen met de oplossing u_h^* van (4.7.4), waarin

$$
(4.7.7)\qquad
\begin{aligned}
B^*(\phi_i,\phi_j) &= \sum_{m=1}^{N} B_m^*(\phi_i,\phi_j);\\
\ell^*(\phi_j) &= \sum_{m=1}^{N} \ell_m^*(\phi_j).
\end{aligned}
$$

Hierin zijn $B_m^*(\cdot,\cdot)$ en $\ell_m^*(\cdot)$ benaderingen van $B_m(\cdot,\cdot)$, respectievelijk $\ell_m(\cdot)$, die verkregen worden door het toepassen van een kwadratuurregel op het interval $[x_{m-1},x_m]$.

Stelling 4.7.1 Zij $B(u,v)$ een begrensde, sterk coërcieve bilineaire vorm, i.e. er bestaan positieve constantes c_1 en c_2 met

$$|B(u,v)| \le c_1 \|u\|_1 \|v\|_1, \qquad \text{voor alle } u,v \in H_0^1[a,b];$$

$$|B(u,u)| \ge c_2 \|u\|_1^2 \quad , \qquad \text{voor alle } u \in H_0^1[a,b].$$

Zij $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ een kwasi-uniforme partitie van $[a,b]$, i.e. er bestaat een positieve constante λ, onafhankelijk van de partitie, met

$$h = \max_i(x_i-x_{i-1}) \le \lambda \min_i(x_i-x_{i-1}).$$

Zij u_h de oplossing van (4.7.4), waarin $B^*(\cdot,\cdot)$ en $\ell^*(\cdot)$ door (4.7.7) zijn bepaald.

Indien nu $B_m^*(\cdot,\cdot)$ en $\ell_m^*(\cdot)$ worden verkregen door een kwadratuur van de orde $t \ge 2k-2$ op het interval $[x_{m-1},x_m]$ toe te passen (i.e. een kwadratuur die alle polynomen van de graad kleiner dan $2k-2$ exact integreert), dan gelden voor voldoend kleine h de volgende foutschattingen:

$$|u(x_i)-u_h^*(x_i)| = O(h^{2k-2}), \qquad i = 1,\ldots,N-1;$$

$$\|u-u_h^*\|_j \qquad = O(h^{k-j}), \qquad j = 0,1.$$

Bewijs Zie DOUGLAS & DUPONT [1974] en HEMKER [1975]. □

LITERATUUR

DE BOOR, C. & B. SWARTZ, *Collocation at Gaussian points*, SIAM J. Num. Anal., 10, p.582-606 (1973).

DOUGLAS, J. & T. DUPONT, *Galerkin Approximations for the Two Point Boundary Problem using Continuous Piecewise Polynomial Spaces*, Num. Math. 22, p.99-109 (1974).

HEMKER, P.W., *Galerkin's Method and Lobatto points*, NW 24/75, MC, 1975.

RUSSEL, R.D. & L.F. SHAMPINE, *A collocation method for boundary value problems, Parts I and II*, Num. Math. 19, p.1-28 (1972).