9.6. Asymptotische oplossing van een singulier storingsprobleem voor een kwartvlak

In dit hoofdstuk zijn tot nu toe partiële differentiaalvergelijkingen beschouwd van het type

$$L_\varepsilon\left[\Phi_\varepsilon\right] = h(x,y)\,, \tag{9.91}$$

waarbij het definitiegebied G eindig verondersteld is en de karakteristieken van de gereduceerde vergelijking

$$L_1\left[\Phi_\varepsilon\right] = h(x,y)$$

niet samenvallen met gedeelten van de rand van G. In het nu volgende onderzoeken wij een probleem waarbij dit juist wel het geval is. Wij zullen een konkreet geval behandelen, waarin (9.91) en G zodanig gekozen zijn dat de oplossing als integraal gegeven kan worden, waarna wij bepaalde methoden uit de asymptotiek te hulp roepen om het gedrag van de oplossing $\Phi_\varepsilon(x,y)$ te bepalen voor $\varepsilon \to 0$. Er zal vooral aandacht besteed worden aan het gedrag in de grenslaag, waarbij onze aanpak in vele aspekten verschilt met die van Grasman [4], die dit probleem eerder behandelde, en met die van Eckhaus en de Jager [3].

Wij beschouwen het volgende randwaardeprobleem

$$\begin{cases} \varepsilon\, \Delta\, \Phi_\varepsilon(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\, \Phi_\varepsilon(x,y) = 0, \ x > 0, \ y > 0, \\[2ex] \Phi_\varepsilon(x,0) = 0, \quad \Phi_\varepsilon(0,y) = \phi(y), \end{cases} \tag{9.92}$$

waarin $\phi(y)$ aan zekere voorwaarden voldoet, die later duidelijk zullen worden. Zoals in [3] is aangetoond zal bij $x \sim 0$, $y > 0$ de grenslaag ontstaan als $\varepsilon \to 0$, een parabolische grenslaag. Aan de hand van de keuze $\phi(y) = y^{-\frac{1}{2}}$ kan dit direkt geverifieerd worden, aangezien in dit geval de oplossing luidt

$$(9.93) \qquad \Phi_\varepsilon(x,y) = \sqrt{\frac{2}{r}}\ \sin\frac{1}{2}\theta\ \ \exp\left(\frac{r(\sin\theta-1)}{2\varepsilon}\right) \quad ,$$

waarin r en θ de poolkoördinaten zijn ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$). Het argument van de exponentiële functie is negatief voor $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, zodat voor deze θ-waarden

$$\Phi_\varepsilon(x,y) = O(\varepsilon^N),$$

als $\varepsilon \to 0$, voor elke positieve N. Deze schatting is echter niet uniform in θ, want voor die waarden van θ en r waarvoor

$$\frac{r(1-\sin\theta)}{2\varepsilon} = O(1),$$

als $\varepsilon \to 0$, is de invloed van de exponentiële functie in (9.93) verdwenen. De verzameling in het x-y-vlak waarvoor geldt

$$\frac{r(1-\sin\theta)}{2\varepsilon} = c$$

is de parabool

$$y = (x^2 - 4\varepsilon^2c^2)/4\varepsilon c,$$

buiten deze parabool begint de e-macht pas aan invloed te winnen. De oplossing van (9.92) met algemenere randfunctie $\phi(y)$ zal dit verschijnsel ook vertonen, er ontstaat eveneens een parabolische grenslaag.

Wij zullen nu de oplossing van (9.92) geven. Aangezien de beschouwde vergelijking konstante coëfficienten heeft kunnen we door middel van de substitutie

$$(9.94) \qquad V(x,y) = e^{-\omega y}\ \Phi_\varepsilon(x,y)$$

met $\omega = \frac{1}{2\varepsilon}$, de eerste orde afgeleide laten verdwijnen (zie hoofdstuk 1 van [1]).
De funktie $V(x,y)$ moet dan voldoen aan

$$\Delta V(x,y) - \omega^2 V(x,y) = 0, \quad x > 0, \; y > 0,$$

(9.95)

$$V(x,0) = 0, \; V(0,y) = e^{-\omega y} \phi(y),$$
$$\omega = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Laten wij proberen de variabelen te separeren, zodat wij veronderstellen dat

$$V(x,y) = f(x)\, g(y).$$

Voor f en g vinden wij dan

$$\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} - (\lambda^2 + \omega^2)\, f(x) = 0, \text{ dus } f(x) = \exp(\pm\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}\,x),$$

$$\frac{d^2 g(y)}{d\,y^2} + \lambda^2\, g(y) = 0, \text{ dus } g(y) = \exp(\pm\, i\lambda y),$$

waarin λ de separatie variabele is. Voor $g(y)$ kiezen wij $\sin \lambda y$ aangezien voor $y = 0$ dan aan de randwaarde voor $V(x,y)$ is voldaan en voor $f(x)$ de exponentiële functie met het negatieve argument om het gedrag voor $x \to \infty$ in de hand te houden. Superpositie van deze f en g t.o.v. de parameter λ levert

$$V(x,y) = \int_0^\infty \sin\lambda y \;\; \exp(-x\,\sqrt{\lambda^2 + \omega^2})\; c(\lambda)\; d\lambda,$$

waarin de willekeurige functie $c(\lambda)$ nader bepaald wordt uit de randwaarde voor $x = 0$, namelijk

$$e^{-\omega y}\,\phi(y) = \int_0^\infty \sin\lambda y \quad c(\lambda)\,d\lambda,$$

zodat

$$c(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega y}\,\phi(y)\,\sin\lambda y\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi i}\,\{\bar{\phi}(\omega - i\lambda) - \bar{\phi}(\omega + i\lambda)\}.$$

Hierin is

$$\bar{\phi}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\phi(t)dt.$$

Aangezien $c(\lambda)$ oneven is in λ kunnen wij V ook schrijven als

$$V(x,y) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \exp(i\lambda y - x\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}) \quad c(\lambda)\,d\lambda$$

en als wij nu $\lambda = \omega$ sht stellen en overgaan op poolcoördinaten ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) dan levert dit

$$V(x,y) = \frac{\omega}{2i}\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega r\,\mathrm{ch}(t-i\theta)}\,c(\omega\,\mathrm{sh}t)\,\mathrm{ch}t\,dt.$$

Door nu nog t te vervangen door $t + i\theta$ krijgen wij, indien de verschuiving van de nieuwe integratieweg naar de reële as is toegestaan, tenslotte

$$(9.96)\quad V(x,y) = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega r\,\mathrm{ch}t}\,\mathrm{ch}(t + i\theta)\,\{\bar{\phi}(\omega(1 + i\,\mathrm{sh}(t+i\theta)))$$

$$- \bar{\phi}(\omega(1 - i\,\mathrm{sh}(t+i\theta)))\}dt.$$

De opgave die wij ons stellen is het asymptotisch gedrag van de functie $V(x,y)$ te bepalen voor $\omega \to \infty$, speciaal in de buurt van de lijn $\theta = \frac{\pi}{2}$ (de grenslaag). Wij zullen dit probleem in drie fasen proberen op te lossen, allereerst voor de randfunctie $\phi(y) = 1$, om enig inzicht te verwerven voor het moeilijker geval, daarna voor $\phi(y) = y^{\nu-1}$ met $\mathrm{Re}\ \nu > 0$ om tenslotte met de gevonden resultaten het probleem voor een algemenere randfunctie $\phi(y)$ te behandelen.

Speciaal geval $\phi(y) \equiv 1$

De oplossing van (9.92) kan met (9.96) als uitgangspunt na enige algebraïsche manipulaties voor het geval $\phi(y) = 1$ worden geschreven als

$$(9.97) \qquad V(x,y) = \frac{\sin 2\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega r \mathrm{ch} t}\, dt}{\mathrm{ch}\, 2t + \cos 2\theta} \quad .$$

De standaardmethode om een integraal van dit type voor grote ω te ontwikkelen is de zadelpuntsmethode. Men bepaalt de zadelpunten van de funktie in de exponent, gaat dan na of de integratieweg vervangen kan worden door een weg door het zadelpunt die optimale informatie kan verschaffen over de waarde van de integraal en men voert enkele substituties uit om die informatie te verkrijgen. Bij (9.97) zijn de zadelpunten $t = 0, \pm ik\pi,\ k = 1,2,3,\ldots$ waarvan alleen $t = 0$ bruikbaar blijkt te zijn en de meest geschikte integratieweg voor dit zadelpunt is de reële t-as. Door de substitutie $u = \mathrm{sh}\frac{1}{2}t$ wordt dan (9.97) na enig rekenwerk

$$(9.98) \qquad V(x,y) = \frac{\sin 2\theta}{4\pi} e^{-\omega r} \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2\omega r t} f(t)dt\,,$$

met $\qquad f(t) = \dfrac{1}{(t-t_0)\ (t-t_1)\ \sqrt{1+t}}\,,$

waarin $\quad t_0 = -\dfrac{1-\sin\theta}{2}\,, \quad t_1 = -\dfrac{1+\sin\theta}{2}.$

De asymptotische ontwikkeling van deze integraal kan men nu verkrijgen door $f(t)$ in machten van t te ontwikkelen en de reeks dan in (9.98) te substitueren. Dit is echter alleen mogelijk als $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ aangezien $f(t)$ een pool van de eerste orde heeft voor $t = t_0$. De coëfficienten a_n van

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

zijn voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ niet gedefinieerd en voor $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ niet begrensd, zodat de substitutie van de reeks in (9.98) ons niet voor alle waarden van θ die ons probleem bepalen een bruikbare asymptotische ontwikkeling verschaft. Dit is niet zo vreemd want wij weten dat $V(x,y)$ zich juist bij de grenslaag $(\theta \sim \frac{\pi}{2})$ grillig gedraagt. De pool in $t = t_0$ veroorzaakt de moeilijkheden, de andere (voor $t = t_1$) blijft daarvoor ver genoeg van de oorsprong weg. Als wij b_{-1} het residu van $f(t)$ voor de pool in $t = t_0$ noemen dan kunnen we $f(t)$ opsplitsen in

$$f(t) = \frac{b_{-1}}{t - t_0} + g(t), \tag{9.99}$$

waarin

$$b_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta \sqrt{1 + \sin\theta}}$$

en

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n t^n \; ;$$

de reeks convergeert voor $|t| < |t_1|$ en de coëfficienten b_n zijn begrensd voor $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Substitutie van (9.99) in (9.98) levert dan

$$V(x,y) = b_{-1} \frac{\sin 2\theta}{4\pi} e^{-\omega r} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2\omega r t} \frac{dt}{t - t_0}$$

$$+ \frac{\sin 2\theta}{4\pi} e^{-\omega r} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2\omega r t} g(t)dt \quad .$$

Substitutie van (9.94) geeft voor $\Phi_\varepsilon(x,y)$ tenslotte de asymptotische ontwikkeling

$$(9.100)\quad \Phi_\varepsilon(x,y) \sim \operatorname{erfc}\sqrt{\omega r(1-\sin\theta)} + \frac{\sin 2\theta}{4\pi}\, e^{-\omega r(1-\sin\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(2\omega r)^{n+\frac{1}{2}}}$$

voor $\omega r \to \infty$, uniform in $0 \leq \theta$ _ $\pi/2$.
Het asymptotisch gedrag van $\Phi_\varepsilon(x,y)$ wordt voor $\theta \to \pi/2$ dus volledig bepaald door de errorfunktie, aangezien de tweede term rechts in (9.100) vanwege de factor $\sin 2\theta$ verdwijnt als $\theta \to \pi/2$. De errorfunktie is de grenslaagfunktie; in de omgeving van de rand $x = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$) speelt deze term een belangrijke rol, daarbuiten is de term asymptotisch te verwaarlozen t.o.v. de andere termen van de reeks.
De methode de pool af te splitsen als het zadelpunt en de pool dicht bij elkaar liggen ontlenen we aan van der Waerden [10].

Opmerking 9.7. De asymptotische ontwikkeling (9.100) geldt voor $\omega r \to \infty$, dus niet voor het gebied in het x-y vlak waarvoor $r = O(\varepsilon)$; voor deze omgeving kan echter een andere methode gevolgd worden.

Het geval $\phi(y) = y^{\nu-1}$

Als $2\nu - 1$ een natuurlijk getal is kan de vorige methode toegepast worden. Er ontstaat dan een analoge representatie als (9.98) voor $V(x,y)$, maar nu heeft $f(t)$ een pool van de orde $2\nu - 1$ die als $\theta \to \frac{\pi}{2}$ de oorsprong nadert. Afsplitsing is mogelijk in de vorm

$$(9.101)\qquad f(t) = \sum_{n=1}^{2\nu-1} \frac{b_{-n}}{(t-t_0)^n} + g(t)$$

en de eindige reeks geeft na substitutie in de integraal $2\nu-1$ termen, die uitgedrukt kunnen worden in Whittaker functies (zie [7]).

Voor $\theta \to \frac{\pi}{2}$ zijn echter alle termen singulier, terwijl de som daarvan eindig is en de randfunktie oplevert. Bovendien zijn de coëfficienten b_{-n} in het algemeen niet in konkrete vorm te geven. Door deze twee aspekten is het probleem niet erg overzichtelijk meer en toepassing van de resultaten op een algemenere randfunktie $\phi(y)$ is niet meer te realiseren. We zullen daarom een andere, hoewel analoge, methode volgen, waarbij slechts verondersteld wordt dat Re $\nu > 0$.

Uitgangspunt is ook nu weer representatie (9.96).

De integrand bestaat uit twee termen en we noemen de integraal met de eerste term $V_1(r,\theta)$, zodat

$$(9.102) \quad V_1(r,\theta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega r\,\mathrm{ch}t}\, \mathrm{ch}(t+i\theta)\bar{\phi}\, (\omega(1+i\,\mathrm{sh}(t+i\theta)))dt.$$

Dan geldt

$$(9.103) \qquad V(x,y) = V_1(r,\theta) - V_1(r,-\theta)$$

en alleen de eerste term in het rechterlid van (9.104) levert voor $\theta \to \pi/2$ de randfunctie op, de andere term verdwijnt in dat geval. We beschouwen daarom eerst (9.102) waarin

$$\phi(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

zodat

$$(9.104) \quad V_1(r,\theta) = \frac{\Gamma(\nu)}{2\pi\ \omega^{\nu-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega r\,\mathrm{ch}t}\, \mathrm{ch}(t+i\theta)\, \frac{dt}{\{1+i\,\mathrm{sh}(t+i\theta)\}^{\nu}}\ .$$

Stel nu $u = i\ \mathrm{sh}\frac{1}{2}t$, dan gaat (9.104) over in

$$(9.105) \quad V_1(r,\theta) = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi i\ \omega^{\nu-1}}\, e^{-\omega r} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{2\omega r u^2}\, f(u)du$$

met

$$f(u) = \left(\frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}} \cos\theta + 2u\sin\theta\right) \{1 + 2u\sqrt{1-u^2}\cos\theta - (1-2u^2)\sin\theta\}^{-\nu}.$$

Aangezien niet verondersteld wordt dat ν een geheel getal is kan de singulariteit van $f(u)$ dicht bij de oorsprong (voor $u = u_0 = -\sqrt{(1-\sin\theta)/2}$) niet afgesplitst worden. Deze singulariteit is van zodanige aard dat $f(u)\,(u-u_0)^{2\nu-1}$ analytisch is in een omgeving van u_0, zodat voor u in die omgeving

$$(9.106)\quad f(u)\,(u-u_0)^{2\nu-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(u-u_0)^k .$$

De coëfficienten zijn voor $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ begrensde functies van θ, de eerste zijn

$$(9.107)\quad \begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{1+\sin\theta}{4}\right)^{\nu-1}, \\ a_1 &= \frac{1}{4}(2\nu-3)\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}\left(\frac{1+\sin\theta}{4}\right)^{\nu-2} . \end{aligned}$$

Wij krijgen nu een asymptotische ontwikkeling voor $V_1(r,\theta)$ als we de ontwikkeling voor $f(u)$ uit (9.106) in (9.105) invullen en integratie en sommatie verwisselen, met als gevolg

$$V_1(r,\theta) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{\pi i\,\omega^{\nu-1}} e^{-\omega r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{2\omega r u^2} \left(u + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}\right)^{k+1-2\nu} du$$

en na evaluatie van de integralen

$$(9.108)\quad V_1(r,\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\nu)\,(4r)^{\nu-1}\, e^{-\omega r\left(\frac{1+\sin\theta}{2}\right)} \;.$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D_{k+1-2\nu}\left(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)}\right)}{(4\omega r)^{k/2}}$$

voor $\omega r \to \infty$; hierin is $D_\nu(z)$ een parabolische cylinderfunctie.

Deze ontwikkeling voor $V_1(r,\theta)$ geldt alleen in de grenslaag aangezien de reeks zijn asymptotische eigenschappen daarbuiten verliest. Als namelijk het argument van de parabolische cylinderfunctie groot wordt geldt voor vaste k

$$a_k \frac{D_{k+1-2\nu}\left(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)}\right)}{(4\omega r)^{k/2}} = O((\omega r)^{\frac{1}{2}-\nu}\exp(-\frac{\omega r}{2}(1-\sin\theta))).$$

De termen in de reeks zijn in dit geval dus van gelijke orde, waardoor de reeks zijn betekenis verliest. Een voordeel is echter dat in (9.108) de eerste term voor $\theta \to \frac{\pi}{2}$ exact de randfunctie oplevert, namelijk voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ geldt

$$a_0 = 2^{1-\nu} \ ,$$

$$a_k = 0 \quad \text{voor } k = 1,2,3,\ldots \ ,$$

zodat

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} V_1(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \Gamma(\nu)\ (4y)^{\nu-1}\ e^{-\omega y}\ 2^{1-\nu}\ D_{1-2\nu}(0)$$

$$= e^{-\omega y}\ y^{\nu-1} \ .$$

De ontwikkeling buiten de grenslaag kan gevonden worden op de klassieke manier met de zadelpuntsmethode evenals de ontwikkeling voor de tweede term $V_1(r,-\theta)$ in (9.103). Deze ontwikkeling volgt niet uit het vorige door θ te vervangen door $-\theta$ aangezien de coefficienten a_k in (9.108) niet begrensd zijn voor $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$. De integrand van $V_1(r,-\theta)$ heeft geen polen dicht bij de oorsprong, zodat de zadelpuntsmethode kan worden toegepast.

Het algemene geval

Wij geven alleen de asymptotische oplossing in de grenslaag en beschouwen eerst weer representatie (9.102) voor $V_1(r,\theta)$ waarbij wij veronderstellen dat

$$V_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \; V_1^{(n)} (r,\theta) \tag{9.109}$$

waarin de b_n via $\phi(y)$ gedefinieerd zijn,

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, y^n \tag{9.110}$$

en

$$V_1^{(n)}(r,\theta) = \frac{n!}{2\pi\,\omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega r \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(t+i\theta) \frac{dt}{\{1+i\operatorname{sh}(t+i\theta)\}^{n+1}}$$

$$\sim n!\sqrt{\frac{2}{\pi}} \; (4r)^n \; e^{-\omega r(\frac{1+\sin\theta}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; \frac{D_{k-1-2n}(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)})}{(4r\omega)^{k/2}} \; .$$

Substitutie van deze ontwikkeling voor $V_1^{(n)}$ in (9.109) geeft dan

$$V_1(r,\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\omega r(\frac{1+\sin\theta}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \; n! \; (4r)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \; \frac{D_{k-1-2n}(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)})}{(4r\omega)^{k/2}}$$

en het verwisselen van de sommaties levert

$$V_1(r,\theta) \;\sim\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(4\omega r)^{k/2}}$$

waarin

$$A_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\; e^{-\omega r(\frac{1+\sin\theta}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \; n! \; a_k(n) \; (4r)^n \; D_{k-1-2n}(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)}) \; .$$

Wij zullen de eerste coëfficienten A_0 en A_1 bepalen, daarvoor hebben wij nodig $a_0(n)$ en $a_1(n)$ die in (9.107) zijn aangegeven met $\nu-1 = n$ en voor de parabolische cylinderfunctie kiezen wij een geschikte integraalrepresentatie, voor $k = 0$

$$D_{-1-2n}\left(\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)}\right) = \frac{2^{-n-1}}{n!}\sqrt{2\omega r(1-\sin\theta)}\,.$$

$$\cdot\; e^{-\frac{1}{2}\omega r(1-\sin\theta)} \int_0^\infty e^{-\omega r(1-\sin\theta)t} \left(\frac{t}{1+t}\right)^n \frac{dt}{\sqrt{1+t}}\,.$$

Hieruit volgt met gebruikmaking van (9.110)

$$A_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; e^{-\omega y} \int_{x\sqrt{\frac{\omega}{v}}}^\infty \phi\left(v - \frac{\omega x^2}{t^2}\right) e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

met $v = \frac{r}{2}(1+\sin\theta)$.

A_0 is een grenslaagfunctie en levert voor $x = 0$ de randfunctie voor het V-probleem: $e^{-\omega y}\,\phi(y)$. Deze term lijkt veel op de eerste orde term die Eckhaus en de Jager [3] geven, daar is $v = y = r\sin\theta$. Het voordeel is dan dat de grenslaagterm nul is voor $\theta = 0$ en deze voldoet daarmee aan de randvoorwaarde langs de X-as.

Veel winst levert dit echter niet op aangezien deze term alleen voor $\theta \sim \frac{\pi}{2}$ een rol speelt en niet voor $\theta \sim 0$.

Voor A_1 vinden wij op overeenkomstige wijze

$$A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; \frac{e^{-\omega r}}{\omega r}\; \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}} \int_0^\infty e^{-\omega r(1-\sin\theta)t}\,.$$

$$\cdot\left\{\frac{vt}{1+t}\,\phi'\left(\frac{vt}{1+t}\right) + \left(\frac{vt}{1+t}\right)^2 \phi''\left(\frac{vt}{1+t}\right)\right\}dt,$$

terwijl A_2, A_3, ... kunnen worden bepaald indien a_2, a_3, ... bekend zijn.

Opmerking 9.8. Zoals eerder is opgemerkt is de ontwikkeling (9.108) niet geldig voor het gehele kwartvlak maar slechts in de grenslaan. Nader onderzoek heeft uitgewezen dat een analoge ontwikkeling als in (9.108) kan worden afgeleverd, die wel voor het gehele kwartvlak geldig is. Hiervoor wordt verwezen naar [8].

Literatuur

[1] Coolen, T.M.T., Förch, G.J.R., Jager, E.M. de, Pijls, H.G.J. — Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1, M.C. Syllabus 9.1. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1969.

[2] Courant, R., Hilbert, D. — Methods of Mathematical Physics. Vol. II, Intersc. Publ., 1962.

[3] Eckhaus, W., Jager, E.M. de — Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type. Archive for Rat. Mech. and Analysis 23. no. 1, (1966).

[4] Grasman, J. — On singular perturbations and parabolic boundary layers. Journ. Engin. Math. 2(1968), 163-172.

[5] Groen, P.P. de — An elliptic singular perturbation problem for non-differential parameters. MC rapport ZW-1970-001, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970.

[6] Levinson, N. — The first boundary value problem. Annals of Mathematics 51(1950).

[7] Oberhettinger, F. — On a modification of Watson's lemma. J. Res. Nat. Bur. Stand 63B(1959), 15-17.

[8] Temme, N.M. — Saddle point methods for a singular perturbation problem. Rapport TW 121 (verschijnt in 1970) Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[9] Višik, M.I., Lyusternik, L.A. — Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. Uspehi Mat. Nauk 12(1957). (American Mathematical Society Translation Series 2, 20(1962)).

[10] Waerden, B.L. van der — On the method of saddle points. Appl. Sci. Res. 82(1951), 33-45.

[11] Wasow, W. — Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta u - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda f(x,y)$. Duke Math. J. 11(1944).