ECONOMETRIC INSTITUTE

# UNE THÉORIE DE CARTIER-DIEUDONNÉ POUR LES A-MODULES FORMELS

ET

# TAPIS DE CARTIER POUR LES A-MODULES FORMELS

M. HAZEWINKEL

REPRINT SERIES no. 199

The articles appeared in " C.R. Acad. Sc. Paris " , t. 284 Serie A (1977).

ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM, P.O. BOX 1738, ROTTERDAM, THE NETHERLANDS

ALGÈBRE. — *Une théorie de Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels.* Note (*) de **Michiel Hazewinkel**, transmise par M. Jean Dieudonné.

On présente une théorie de classification de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels qui généralise la théorie developpé par Cartier [1] pour les groupes formels.

*We present a classification theory for formal A-modules which generalizes Cartier's classification theory for formal groups* via *their topological groups of curves.*

1. A-MODULES FORMELS. — Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k$ fini à $q$ éléments, $q = p^r$, $p = \operatorname{car}(k)$. Choisissons une fois pour toutes une uniformisante $\pi$ de A. On notera K le corps de fractions de A, qui peut être soit de caractéristique 0 soit de caractéristique $p > 0$. Soit $B \in \mathbf{Alg}_A$, la catégorie des A-algèbres (commutatifs avec 1). Un A-module formel sur B est une loi de groupe formel F sur B (de dimension finie ou infinie) munie d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : A \to \operatorname{End}_B(F)$ tel que $\rho_F(a) \equiv a\,X \bmod (\text{degré } 2)$ pour tout $a \in A$.

Si B est sans A-torsion, il existe un vecteur de séries formelles $f(X)$ à coefficients dans $B \otimes_A K$ tel que $f(X) \equiv X \bmod (\text{degré } 2)$, $F(X, Y) = f^{-1}(f(X)+f(Y))$ et $\rho_F(a) = f^{-1}(af(X))$ pour tout $a \in A$. Un tel $f(X)$ est unique et on l'appelle le A-logarithme de $(F, \rho_F)$.

2. LE FONCTEUR $W^A$ ET LE A-MODULE FORMEL $\hat{W}^A$. — Soit $w^A_{q,n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ le polynôme $Z_0^{q^n}+\pi Z_1^{q^{n-1}}+\ldots+\pi^n Z_n$ à coefficients dans A, $n = 0, 1, \ldots$ Alors il existe un foncteur unique $W^A : \mathbf{Alg}_A \to \mathbf{Alg}_A$ tel que les polynômes $w^A_{q,n}$ définissent des homomorphismes de A-algèbres fonctoriels $W^A(B) \to B$ et

$$W^A(B) = \{(b_0, b_1, \ldots) \mid b_i \in B\},\ W^A(\Phi)(b_0, b_1, \ldots) = (\Phi(b_0), \Phi(b_1), \ldots)$$

pour B, $\Phi \in \mathbf{Alg}_A$ (comme foncteur en ensembles).

Le foncteur $W^A(-)$ possède un endomorphisme fonctoriel de A-algèbres $\sigma^A$ et un endomorphisme fonctoriel $\mathbf{v}$ de A-modules tels que $\sigma^A\,\mathbf{v} = \pi$.

Si B est de caractéristique $p > 0$ on a $\sigma^A(b_0, b_1, \ldots) = (b_0^q, b_1^q, \ldots)$. Les polynômes d'addition de $W^A$ définissent un A-module formel (de dimension infinie) que l'on notera $\hat{W}^A$. On a d'ailleurs un tel foncteur $W^F$ et un A-module formel associé $\hat{W}^F$ pour tout groupe formel de Lubin-Tate tordu [2]. Le foncteur $W^A$ a aussi été décrit en [3].

3. L'OPÉRATEUR $\mathbf{f}_\pi$ ET $q$-TYPIFICATION. — Soit $\mathbf{FG}^A_B$ la catégorie des A-modules formels sur B. Soit $C(-;B)$ le foncteur qui associe à tout $F \in \mathbf{FG}^A_B$ son groupe topologique des courbes [*voir* [1]]. Les homomorphismes $\rho_F$ définissent une structure de A-module topologique sur le foncteur $C(-;B)$.

Il existe deux endomorphismes fonctoriels $\varepsilon_q$ et $\mathbf{f}_\pi$ de $C(-;B)$ pour tout $B \in \mathbf{Alg}_A$ avec les propriétés suivantes :

(i) $\varepsilon_q$ et $\mathbf{f}_\pi$ commutent avec change de base;

(ii) $\varepsilon_q\,\varepsilon_q = \varepsilon_q$ et $\varepsilon_q\,\mathbf{f}_\pi = \mathbf{f}_\pi\,\varepsilon_q$;

(iii) si B est sans A-torsion et $f(X)$ est le A-logarithme de $F \in \mathbf{FG}_B^A$, alors pour toute courbe $\gamma(t) \in C(F; B)$ :

$$f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i t^i \quad \rightarrow \quad f(\varepsilon_q \gamma(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{q^i} t^{q^i}, f(\mathbf{f}_\pi \gamma(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi x_{qn} t^n.$$

On notera $C_q(F; B)$ l'image de $\varepsilon_q$ et les éléments de $C_q(F; B)$ seront appelés courbes $q$-typiques. Le sous-foncteur $C_q(-; B)$ est stable sous les opérateurs $\mathbf{V}_q : \gamma(t) \rightarrow \gamma(t^q)$, $\langle c \rangle : \gamma(t) \rightarrow \gamma(ct)$, $\mathbf{f}_\pi$, et les opérateurs $[a]$, $a \in A$, induits par les endomorphismes $\rho_F(a)$ de F.

Entre ces opérateurs on a les relations suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle b \rangle \mathbf{V}_q = \mathbf{V}_q \langle b^q \rangle, \quad \mathbf{f}_\pi \langle b \rangle = \langle b^q \rangle \mathbf{f}_\pi, \quad \mathbf{f}_\pi \mathbf{V}_q = [\pi], \\ [a] \text{ commute avec } \langle b \rangle, \mathbf{V}_q \text{ et } \mathbf{f}_\pi, \quad [1] = \langle 1 \rangle = \mathrm{id}, \\ [a+b] = [a]+[b], \quad [ab] = [a][b], \quad [a] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}_q^n < \Omega_n(a) > \mathbf{f}_\pi^n, \\ \langle b \rangle + \langle c \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}_q^n < r_n(b, c) > \mathbf{f}_\pi^n, \end{array} \right.$$

où les $r_n(b, c)$ sont des polynômes à coefficients dans A déterminés par

$$Z_1^{q^n} + Z_2^{q^n} = \sum_{i=0}^{n} \pi^i r_i(Z_1, Z_2)^{q^{n-i}}$$

et les $\Omega_n(a) \in A$ sont déterminés par les relations $w_{q,n}^A(\Omega_0(a), \ldots, \Omega_n(a)) = a$, pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

4. Théorème de représentation. — *Soit* $\gamma_0(t)$ *la courbe* $(t, 0, 0, \ldots)$ *de* $C_q(\hat{W}^A; B)$, *i. e. la première composante de* $\gamma_0(t)$ *est la série formelle t et toutes les autres composantes sont zéro. Alors pour toute courbe q-typique* $\gamma(t) \in C_q(F; B)$, $F \in \mathbf{FG}_B^A$ *il existe un homomorphisme unique de A-modules formels* $\alpha_\gamma : \hat{W}^A \rightarrow F$, *tel que* $\alpha_\gamma(\gamma_0(t)) = \gamma(t)$.

Grâce à ce théorème on peut écrire tout endomorphisme du foncteur $C_q(-; B)$ (comme foncteur en ensembles) sous la forme $\sum \mathbf{V}_q^n < b_{n,m} > \mathbf{f}^m$ où les $b_{n,m}$ sont tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il n'y a qu'un nombre fini de $m$ tel que $b_{n,m} \neq 0$, et cette expression est unique.

On notera $\mathrm{Cart}_A(B)$ l'algèbre des opérateurs de $C_q(-; B)$. Les relations (1) sont les règles de computation de $\mathrm{Cart}_A(B)$.

5. L'équivalence de catégories. — Soit $\mathbf{E}(A; B)$ la catégorie des $\mathrm{Cart}_A(B)$-modules C tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathbf{V}_q$ est injective, $C/\mathbf{V}_q C$ est un B-module libre (la structure de B-module étant définie par les opérateurs $\langle b \rangle$);

(ii) C est complet et Hausdorff pour la topologie définie par les sous-groupes $\mathbf{V}_q^n C$.

Alors $F \mapsto C_q(F; B)$ est une équivalence de catégories $\mathbf{FG}_B^A \rightarrow \mathbf{E}(A; B)$.

6. Hauteur et dimension. — Soit $l$ une extension parfaite du corps résiduel $k$ de A. Soit $F \in \mathbf{FG}_l^A$ de dimension finie et $C = C_q(F; l)$. Alors $C/[\pi] C$ est un espace vectoriel sur $l$ et on définit $h(F) = \dim(C/[\pi] C)$. Si $h < \infty$ on a $h = \dim(F) + \dim_l(C/\mathbf{f}_\pi C)$. Si A est l'anneau des entiers d'une extension finie K du corps $p$-adique $Q_p$ on a la relation $H = nh$ où H est la hauteur de F comme groupe formel sur A et $n = [K : Q_p]$.

7. DESCRIPTION DE $\mathrm{Cart}_A$ (B). — Le sous-ensemble de $\mathrm{Cart}_A$ (B) des éléments de la forme $\sum \mathbf{V}_q^n \langle b_n \rangle \mathbf{f}_\pi^n$ est un sous-A-algèbre de $\mathrm{Cart}_A$ (B) qui s'identifie avec $W^A$ (B). L'algèbre $\mathrm{Cart}_A$ (B) alors consiste de toutes les expressions $x_0+\sum \mathbf{V}_q^i x_i+\sum y_i \mathbf{f}_\pi^i$, $x_i, y_i \in W^A$ (B) avec la seule condition que $\lim_{i \to \infty} y_i = 0$. Si B est un corps parfait $W^A$ (B) est un anneau de valuation discrète de corps résiduel B et uniformisante $\pi$. En ce cas les règles de computation de $\mathrm{Cart}_A$ (B) sont $\mathbf{f}_\pi x = \sigma^A(x)\mathbf{f}_\pi$, $x\mathbf{V}_q = \mathbf{V}_q \sigma^A(x)$, $\mathbf{f}_\pi \mathbf{V}_q = \pi = \mathbf{V}_q \mathbf{f}_\pi$.

8. CLASSIFICATION A ISOGÉNIE PRÈS. — Soit $l$ une extension séparablement close de $k$, alors $\mathrm{Cart}_A$ ($l$), « localisé par rapport à $\mathbf{V}_q$ » est un anneau sur lequel on peut classifier les modules de torsion de type fini, comme dans [4]. Il en résulte que tout A-module formel sur $l$ est isogène à une somme directe unique des A-modules formels $G_{1,0}^A$, $G_{n,m}^A$, $G_{n,\infty}^A$ avec $n, m \in \mathbf{N}, (n, m) = 1$. Les modules des courbes $q$-typiques de ces A-modules formels sont les quotients de $\mathrm{Cart}_A$ ($l$) par les idéaux principaux à gauche engendrés par $\mathbf{f}_\pi - 1$, $\mathbf{f}_\pi^n - \mathbf{V}_q^m$, $\mathbf{f}_\pi^n$.

9. Les preuves de tout ce qui précède reposent d'une façon non triviale sur des constructions de A-modules formels universels et on utilise plusieurs fois le « lemme d'équation fonctionnelle » [5].

(*) Séance du 3 janvier 1977.

[1] P. CARTIER, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 50; *Ibid*, p. 129.

[2] M. HAZEWINKEL (preprint).

[3] E. DITTERS, *Notes d'un cours*, Göttingen, 1975.

[4] Yu. MANIN, *Usp. Mat. Nauk*, 18, n° 6, 1963, p. 3-90.

[5] M. HAZEWINKEL, *Formal Groups and Applications* (à paraître) § 2.2 et 10.2; *J. Pure and Appl. Algebra*, *Adv. Math.* et *Compositio Math.* (à paraître).

*Department of Mathematics,*
*Erasmus University,*
50, *Burg. Oudlaan,*
*Rotterdam,*
*Hollande.*

ALGÈBRE. — « *Tapis de Cartier* » *pour les* A-*modules formels.*

Note (*) de **Michiel Hazewinkel**, transmise par M. Jean Dieudonné.

On donne une généralisation pour le cas des A-modules formels de la théorie de relèvement des groupes formels commutatifs, dit « Tapis de Cartier ». Les énoncés et les preuves sont des généralisations directes de ceux esquissés par Cartier dans son *séminaire à l'I.H.E.S.* 1972, étant donnée la théorie de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels, résumée en ([1]).

*We give a generalisation for the case of formal* A-*modules of the theory of lifting formal groups which has become known as the "tapis de Cartier". Results and proofs are straightforward generalisations of those sketched by Cartier in his* 1972 I.H.E.S. seminar, *once one has available the Cartier-Dieudonné type classification theory which we described in an earlier Note.*

Soit A l'anneau des entiers d'un corps K de valuation discrète de corps résiduel $k$ à un nombre fini d'éléments $q = p^r$, $p = \operatorname{car}(k)$. Soit $\pi$ une uniformisante de K. Le corps K peut être soit de caractéristique zéro soit de $p > 0$. Soit B un A-algèbre. Dans une Note précédente on a présenté une théorie de Cartier-Dieudonné des A-modules formels et les notions divers associées : $q$-typification; module de courbes $q$-typiques $C_q(F; B)$; opérateur de Frobenius $\mathbf{f}_\pi$ et exponentielle de Artin-Hasse.

1. A-MODULES FORMELS DE LUBIN-TATE GÉNÉRALISÉS. — Soit B un A-algèbre local, sans A-torsion, d'idéal maximal $\pi$ B, tel qu'il existe un endomorphisme $\sigma : B \to B$ tel que $\sigma(b) \equiv b^q \bmod' \pi B$ pour tout $b \in B$. Soit M un B-module libre de type fini et soit $\eta : M \to M$ un endomorphisme $\sigma$-semi-linéaire de M (i. e. $\eta(bm) = \sigma(b)\,\eta(m)$). Choisissons une base $e_1, \ldots, e_h$ de M et soit $D(\eta)$ la matrice de $\eta$ par rapport à la base $e_1, \ldots, e_h$. On pose

$$(1) \qquad g_M(X) = X + \pi^{-1} D(\eta)\,\sigma_* g_M(X^q), \qquad G_M(X, Y) = g_M^{-1}(g_M(X) + g_M(Y)),$$

où $g_M(X)$ est un $h$-tuple de séries formelles en $X_1, \ldots, X_h$ à coefficients dans $B \otimes_A K$; $X^q = (X_1^q, \ldots, X_h^q)$ et $\sigma_* f(X)$ est la série formelle obtenue de $f(X)$ par l'application de $\sigma$ à tous les coefficients de $f(X)$. Alors [d'après le lemme d'équation fonctionnelle ([2])] $G_M(X, Y)$ est un A-module formel sur B de A-logarithme $g_M(X)$. Soit $\varphi : (M, \eta) \to (M', \eta')$ un homomorphisme, i. e. $\varphi : M \to M'$ est un homomorphisme de B-modules et $\varphi\eta = \eta'\varphi$. Alors $G_{M'}^{-1}(E\, g_M(X))$ est un homomorphisme de A-modules formels $G_M \to G_{M'}$, où E est la matrice de $\varphi$ par rapport aux bases choisies $\{e_1, \ldots, e_h\}$ de M et $\{e'_1, \ldots, e'_h\}$ de M'.

Supposons maintenant que $\sigma$ soit un automorphisme et soit $M^\sigma$ le B-module modifié $b * m = \sigma^{-1}(b)\, m$. Alors $\eta : (M^\sigma, \eta) \to (M, \eta)$ est un homomorphisme et on trouve un morphisme $\mathbf{v}(M) : \sigma_* G_M \to G_M$ de A-modules formels qui se réduit mod $\pi$ B a morphisme de « Verschiebung » $(V)_q : \Gamma_M^{(q)} \to \Gamma_M$, où $\Gamma_M$ est la réduction mod $\pi$ B de $G_M$. On obtient ainsi une équivalence de catégories entre la catégorie des pairs $(M, \eta)$ et celle des pairs $(G, \mathbf{v} : \sigma_* G \to G)$ où G est un A-module formel sur B et $\mathbf{v}$ un homomorphisme de A-modules formels qui se réduit en $(V)_q$ modulo $\pi$ B.

2. THÉORÈME DES FONCTEURS ADJOINTS. — *Soit* $(M, \eta)$ *comme ci-dessus et soit* H *un* A-*module formel sur* B *et* $C_q(H; B)$ *le* $W_{q,\infty}^A(B)\,[\mathbf{f}_\pi, V_q]$-*module des courbes q-typiques de* H. *Alors il y a une correspondence bi-univoque entre homomorphismes de* A-*modules formels* $G_M \to H$ *et homomorphismes* B-*linéaires* $\alpha : M \to C_q(H; B)$, *tel que* $\alpha\eta = \mathbf{f}_\pi\,\alpha$.

*Ici la structure de* B-*module sur* $C_q(H; B)$ *est donnée par l'exponentielle* $\Delta : B \to W^{\pi}_{q,\infty}(B)$, *qui est caractérisé par* $w^{A}_{q,n} \circ \Delta = \sigma^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Cette correspondence est donnée par un morphisme canonique $\alpha_0 : M \to C_q(G_M; B)$ défini par $g_M(\alpha_0(m)) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^{-i} \eta^i(m) t^{q^i}$.

3. Propriété universel de $G_M$ par rapport a certain extensions. — Supposons que $\sigma : B \to B$ soit un automorphisme, que B est complet et Hausdorff pour la topologie $\pi$ B-adique, et que M est un B-module libre de type finie avec des endomorphismes $\eta$, $\zeta$, où $\eta$ est $\sigma$-semi-linéaire et $\zeta$ $\sigma^{-1}$-semi-linéaire, tel que $\eta\zeta = \zeta\eta = \pi$ et $\zeta^r M \subset \pi M$, pour $r \in \mathbf{N}$ suffisamment grand.

Soit $0 \to R^+ \to H \to H_1 \to 0$ une suite exacte de A-modules formels où $R^+$ est un A-module de type additif. Supposons en plus tout sous-A-module formel de type additif. de dimension un se relève en un sous-A-module formel additif de dimension 1 de H. Alors pour tout homomorphisme de A-modules formels $\beta : G_M \to H_1$ il existe un relèvement unique $\tilde{\beta} : G_M \to H$, tel que $\gamma\tilde{\beta} = \beta$.

4. Quotients de $G_M$ par sous-A-module formel additif. — Soient M, B, $\eta$, $\zeta$, comme ci-dessus en 3. Soit N un sous-module libre de type fini de M tel que M/N soit libre et $N + \pi M = \zeta M$. Alors on a une immersion canonique $N^+ \to G_M$ définie par $C_q(N^+; B) \to C_q(G_M; B)$, $n \mapsto \beta(n) - \mathbf{V}_q \beta(\zeta^{-1} n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Et il en résulte une suite exacte de A-modules formels

$$0 \to N^+ \to G_M \to G \to 0. \tag{2}$$

Soit $\Gamma$ sur $l = B/\pi B$ la réduction modulo $\pi B$ de G. Alors le morphisme composé $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \to C_q(G; B) \to C_q(\Gamma; l)$ est un isomorphisme de B-modules qui identifie $\eta$ avec $\mathbf{f}_\pi$ et $\zeta$ avec $\mathbf{V}_q$.

La suite exacte (2) est l'extension universelle de G par un A-module formel additif.

5. Relèvements. — Soit $\Gamma$ un A-module formel de A-hauteur finie sur un corps parfait $l \supset k$. On prend $B = W^{A}_{q,\infty}(l)$, $M = C_q(\Gamma; l)$, $\eta = \mathbf{f}_\pi$, $\zeta = \mathbf{V}_q$. Alors toutes les hypothèses sur B, M, $\eta$, $\zeta$ des numéros 2, 3, 4 ci-dessus sont satisfaites. Soit G un A-module formel sur B qui relève $\Gamma$. (Un tel G existe toujours parce qu'il existe pour toute dimension donnée un A-module formel universel défini sur un anneau de polynômes $A[S_1, S_2, \ldots]$ ([3]). Alors il existe un homomorphisme unique $\beta : G_M \to G$, tel que $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \to C_q(G; B) \to C_q(\Gamma; l)$ est l'identité. Le noyau de $\beta$ est un sous-A-module formel de type additif d'algèbre de Lie N = Ker (Lie ($\beta$)) et $\beta$ est surjectif. En plus M/N est libre et $N + \pi M = \zeta M$. C'est-à-dire l'extension $0 \to N^+ \to G_M \to G \to 0$ obtenue à partir de $\Gamma$ est du type construit en 4 ci-dessus. Comme corollaire on obtient que l'extension universelle par un A-module formel additif d'un relèvement G de $\Gamma$ ne dépend pas du relèvement choisi.

(*) Séance du 3 janvier 1977.


([1]) M. Hazewinkel (preprint).

([2]) M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications* (à paraître, Acad. Pr.) § 10.2.

([3]) M. Hazewinkel, *Loc. cit.*, § 21.4, 25.4.


*Department of Mathematics,*
*Erasmus University,*
*50, Burg. Oudlaan,*
*Rotterdam, Hollande.*