

ALGÈBRE. — « Tapis de Cartier » pour les A-modules formels.

Note (*) de Michiel Hazewinkel, transmise par M. Jean Dieudonné.

On donne une généralisation pour le cas des A-modules formels de la théorie de relèvement des groupes formels commutatifs, dit « Tapis de Cartier ». Les énoncés et les preuves sont des généralisations directes de ceux esquissés par Cartier dans son *séminaire à l'I.H.E.S.* 1972, étant donnée la théorie de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels, résumée en ⁽¹⁾.

We give a generalisation for the case of formal A-modules of the theory of lifting formal groups which has become known as the "tapis de Cartier". Results and proofs are straightforward generalisations of those sketched by Cartier in his 1972 I.H.E.S. seminar, once one has available the Cartier-Dieudonné type classification theory which we described in an earlier Note.

Soit A l'anneau des entiers d'un corps K de valuation discrète de corps résiduel k à un nombre fini d'éléments $q = p^r$, $p = \text{car}(k)$. Soit π une uniformisante de K. Le corps K peut être soit de caractéristique zéro soit de $p > 0$. Soit B un A-algèbre. Dans une Note précédente on a présenté une théorie de Cartier-Dieudonné des A-modules formels et les notions divers associées : q -typification; module de courbes q -typiques $C_q(F; B)$; opérateur de Frobenius f_π et exponentielle de Artin-Hasse.

1. A-MODULES FORMELS DE LUBIN-TATE GÉNÉRALISÉS. — Soit B un A-algèbre local, sans A-torsion, d'idéal maximal πB , tel qu'il existe un endomorphisme $\sigma : B \rightarrow B$ tel que $\sigma(b) \equiv b^q \pmod{\pi B}$ pour tout $b \in B$. Soit M un B-module libre de type fini et soit $\eta : M \rightarrow M$ un endomorphisme σ -semi-linéaire de M (i. e. $\eta(bm) = \sigma(b) \eta(m)$). Choisissons une base e_1, \dots, e_h de M et soit D(η) la matrice de η par rapport à la base e_1, \dots, e_h . On pose

$$(1) \quad g_M(X) = X + \pi^{-1} D(\eta) \sigma_* g_M(X^q), \quad G_M(X, Y) = g_M^{-1}(g_M(X) + g_M(Y)),$$

où $g_M(X)$ est un h -tuple de séries formelles en X_1, \dots, X_h à coefficients dans $B \otimes_A K$; $X^q = (X_1^q, \dots, X_h^q)$ et $\sigma_* f(X)$ est la série formelle obtenue de $f(X)$ par l'application de σ à tous les coefficients de $f(X)$. Alors [d'après le lemme d'équation fonctionnelle ⁽²⁾] $G_M(X, Y)$ est un A-module formel sur B de A-logarithme $g_M(X)$. Soit $\varphi : (M, \eta) \rightarrow (M', \eta')$ un homomorphisme, i. e. $\varphi : M \rightarrow M'$ est un homomorphisme de B-modules et $\varphi \eta = \eta' \varphi$. Alors $G_{M'}^{-1}(E g_M(X))$ est un homomorphisme de A-modules formels $G_M \rightarrow G_{M'}$, où E est la matrice de φ par rapport aux bases choisies $\{e_1, \dots, e_h\}$ de M et $\{e'_1, \dots, e'_h\}$ de M'.

Supposons maintenant que σ soit un automorphisme et soit M^σ le B-module modifié $b^* m = \sigma^{-1}(b) m$. Alors $\eta : (M^\sigma, \eta) \rightarrow (M, \eta)$ est un homomorphisme et on trouve un morphisme $v(M) : \sigma_* G_M \rightarrow G_M$ de A-modules formels qui se réduit mod πB a morphisme de « Verschiebung » $(V)_q : \Gamma_M^{(q)} \rightarrow \Gamma_M$, où Γ_M est la réduction mod πB de G_M . On obtient ainsi une équivalence de catégories entre la catégorie des paires (M, η) et celle des paires $(G, v : \sigma_* G \rightarrow G)$ où G est un A-module formel sur B et v un homomorphisme de A-modules formels qui se réduit en $(V)_q$ modulo πB .

2. THÉORÈME DES FONCTEURS ADJOINTS. — Soit (M, η) comme ci-dessus et soit H un A-module formel sur B et $C_q(H; B)$ le $W_{q, \infty}^A(B) [f_\pi, V_q]$ -module des courbes q -typiques de H. Alors il y a une correspondance bi-univoque entre homomorphismes de A-modules formels $G_M \rightarrow H$ et homomorphismes B-linéaires $\alpha : M \rightarrow C_q(H; B)$, tel que $\alpha \eta = f_\pi \alpha$.

Ici la structure de B-module sur $C_q(H; B)$ est donnée par l'exponentielle $\Delta : B \rightarrow W_{q, \infty}^\pi(B)$, qui est caractérisé par $w_{q, n}^A \circ \Delta = \sigma^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Cette correspondance est donnée par un morphisme canonique $\alpha_0 : M \rightarrow C_q(G_M; B)$ défini par $g_M(\alpha_0(m)) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^{-i} \eta^i(m) t^i$.

3. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE G_M PAR RAPPORT A CERTAINES EXTENSIONS. — Supposons que $\sigma : B \rightarrow B$ soit un automorphisme, que B est complet et Hausdorff pour la topologie π -B-adique, et que M est un B-module libre de type fini avec des endomorphismes η, ζ , où η est σ -semi-linéaire et ζ σ^{-1} -semi-linéaire, tel que $\eta \zeta = \zeta \eta = \pi$ et $\zeta^r M \subset \pi M$, pour $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Soit $0 \rightarrow R^+ \rightarrow H \rightarrow H_1 \rightarrow 0$ une suite exacte de A-modules formels où R^+ est un A-module de type additif. Supposons en plus tout sous-A-module formel de type additif de dimension un se relève en un sous-A-module formel additif de dimension 1 de H . Alors pour tout homomorphisme de A-modules formels $\beta : G_M \rightarrow H_1$ il existe un relèvement unique $\tilde{\beta} : G_M \rightarrow H$, tel que $\gamma \tilde{\beta} = \beta$.

4. QUOTIENTS DE G_M PAR SOUS-A-MODULE FORMEL ADDITIF. — Soient M, B, η, ζ , comme ci-dessus en 3. Soit N un sous-module libre de type fini de M tel que M/N soit libre et $N + \pi M = \zeta M$. Alors on a une immersion canonique $N^+ \rightarrow G_M$ définie par $C_q(N^+; B) \rightarrow C_q(G_M; B)$, $n \mapsto \beta(n) - V_q \beta(\zeta^{-1} n)$ pour $n \in N$. Et il en résulte une suite exacte de A-modules formels

$$(2) \quad 0 \rightarrow N^+ \rightarrow G_M \rightarrow G \rightarrow 0.$$

Soit Γ sur $l = B/\pi B$ la réduction modulo πB de G . Alors le morphisme composé $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \rightarrow C_q(G; B) \rightarrow C_q(\Gamma; l)$ est un isomorphisme de B-modules qui identifie η avec f_π et ζ avec V_q .

La suite exacte (2) est l'extension universelle de G par un A-module formel additif.

5. RELÈVEMENTS. — Soit Γ un A-module formel de A-hauteur finie sur un corps parfait $l \supset k$. On prend $B = W_{q, \infty}^A(l)$, $M = C_q(\Gamma; l)$, $\eta = f_\pi$, $\zeta = V_q$. Alors toutes les hypothèses sur B, M, η, ζ des numéros 2, 3, 4 ci-dessus sont satisfaites. Soit G un A-module formel sur B qui relève Γ . (Un tel G existe toujours parce qu'il existe pour toute dimension donnée un A-module formel universel défini sur un anneau de polynômes $A[S_1, S_2, \dots]$ (3)). Alors il existe un homomorphisme unique $\beta : G_M \rightarrow G$, tel que $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \rightarrow C_q(G; B) \rightarrow C_q(\Gamma; l)$ est l'identité. Le noyau de β est un sous-A-module formel de type additif d'algèbre de Lie $N = \text{Ker}(\text{Lie}(\beta))$ et β est surjectif. En plus M/N est libre et $N + \pi M = \zeta M$. C'est-à-dire l'extension $0 \rightarrow N^+ \rightarrow G_M \rightarrow G \rightarrow 0$ obtenue à partir de Γ est du type construit en 4 ci-dessus. Comme corollaire on obtient que l'extension universelle par un A-module formel additif d'un relèvement G de Γ ne dépend pas du relèvement choisi.

(*) Séance du 3 janvier 1977.

(1) M. HAZEWINKEL (preprint).

(2) M. HAZEWINKEL, *Formal Groups and Applications* (à paraître, Acad. Pr.) § 10.2.

(3) M. HAZEWINKEL, *Loc. cit.*, § 21.4, 25.4.

THÉORIE DES GROUPES. — *Comparaison des représentations automorphes du groupe linéaire.* Note (*) de **Hervé Jacquet** et **Joseph Shalika**, présentée par M. Henri Cartan.

On donne un critère pratique pour reconnaître si deux représentations automorphes cuspidales du groupe linéaire sont équivalentes.

A practical criterion, to determine whether two automorphic cuspidal representations of the linear group are equivalent, is given.

1. REPRÉSENTATIONS GÉNÉRIQUES. — On note G_r , le groupe linéaire général d'ordre r , A_r , le sous-groupe des matrices diagonales, N_r , le sous-groupe des matrices triangulaires strictes supérieures, Z_r , le centre de G_r , et enfin P_r , le sous-groupe des matrices de la forme

$$p = \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in G_{r-1}.$$

On identifie G_{r-1} au sous-groupe des matrices p telles que $u = 0$ et on note U_r , le sous-groupe des matrices p telles que $h = 1$. Si F est un corps local (resp. global) on dénote par $\mathcal{S}(F)$ [resp. $\mathcal{S}(A)$] l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur F (resp. A). On choisit un caractère ψ non trivial de F (resp. A/F) et on définit un caractère θ_r de $N_r(F)$ [resp. $N_r(A)$] par la formule $\theta_r(n) = \prod \psi(n_{i,i+1})$, $1 \leq i \leq r-1$. On note K_r le sous-groupe compact maximal usuel de $G_r(F)$ [resp. $G_r(A)$]. Si F est local on écrira souvent G_r, P_r, \dots pour $G_r(F), P_r(F), \dots$. Si F est global on écrira G_r^*, P_r^*, \dots pour les espaces homogènes $G_r(F) \backslash G_r(A), P_r(F) \backslash P_r(A), \dots$. Suivant le contexte, on dénote par dp une mesure invariante à droite sur l'un des espaces $P_r(F), N_r(F) \backslash P_r(F), P_r(A), N_r(A) \backslash P_r(A), P_r^*$. On suppose maintenant F local. Soit π une représentation unitaire irréductible de $G_r(F)$ sur l'espace hilbertien H ; soit H_0 l'espace des vecteurs « lisses » de H . On dit que π est *générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur H_0 , qui soit continue pour la topologie naturelle de H_0 dans le cas archimédien, et satisfasse à

$$\lambda(\pi(n)v) = \theta_r(n)\lambda(v), \quad \text{pour } n \in N_r(F), v \in H_0.$$

Cette forme est alors unique à un facteur scalaire près, ce qui permet de définir l'espace $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ engendré par les fonctions W de la forme $W(g) = \lambda(\pi(g)v)$, avec v K -fini dans H_0 . On dira que π est fortement générique si de plus on a, pour tout g :

$$\int |W(pg)|^2 dp = \|v\|^2, \quad p \in N_r(F) \backslash P_r(F).$$

Au moins pour $r = 2, 3$, cette condition supplémentaire est en fait toujours satisfaite.

Soient maintenant π et π' des représentations génériques irréductibles de G_r . Pour W et W' dans les espaces correspondants et Φ dans $\mathcal{S}(F)$, on posera

$$(1.1) \quad \Psi(s, W', W, \Phi) = \int W'(g) \overline{W}(g) \Phi(\eta g) |\det g|^s dg, \quad g \in N_r(F) \backslash G_r(F).$$

On a noté η la matrice ligne à r éléments : $\eta = (0, 0, \dots, 0, 1)$. On a alors sans peine :

PROPOSITION (1.2). — *Supposons π et π' fortement génériques. Alors l'intégrale Ψ converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1$. Si de plus W' n'est pas nulle il existe Φ et W telles que $\Psi(1, W', W, \Phi) \neq 0$.*

2. LE CAS NON RAMIFIÉ. — On suppose F local et non archimédien; soit R l'anneau des entiers de F , ϖ une uniformisante et $q = |\varpi^{-1}|$. Les représentations admissibles et irréductibles « non ramifiées » de $G_r(F)$ sont paramétrées par les classes de conjugaison semi-simples du groupe $G_r(\mathbb{C})$. Si π et π' sont deux telles représentations correspondant à l et l' respectivement, on pose $L(s, \pi \times \pi') = \det(1 - l \otimes l' q^{-s})^{-1}$. Supposons de plus π et π' génériques (ce qui a un sens pour les représentations admissibles irréductibles) et le caractère ψ d'ordre zéro. Alors l'espace $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ est défini et contient une fonction canonique W K -invariante à droite et égale à 1 sur K .

Les mesures de K et $K \cap N_r$, étant prises égales à un, on a, d'après (1) :

PROPOSITION (2.2). — *Soient W et W' les fonctions canoniques pour π et π' respectivement et Φ la fonction caractéristique de R' . Alors, en désignant par $\bar{\pi}$ la représentation imaginaire conjuguée de π , on a : $\Psi(s, W', W, \Phi) = L(s, \pi' \times \bar{\pi})$.*

3. UNE INTÉGRALE GLOBALE. — Soient maintenant F un A -corps et π une représentation unitaire et irréductible du groupe $G_r(A)$; on suppose π automorphe et cuspidale et on désigne par $\mathcal{A}(\pi)$ le sous-espace correspondant des formes automorphes cuspidales et K -finies. On peut écrire $\pi = \otimes \pi_v$, où π_v est, pour chaque place v , une représentation unitaire irréductible générique du groupe local $G_r(F_v)$. Pour φ dans $\mathcal{A}(\pi)$ la fonction

$$(3.1) \quad W(g) = \int \varphi(ng) \bar{\theta}_r(n) dn, \quad n \in N_r^*$$

est arbitraire dans l'espace $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ engendré par les fonctions de la forme

$$(3.2) \quad g \mapsto \prod W_v(g_v), \quad W_v \in \mathcal{W}(\pi_v; \psi_v),$$

où, pour presque chaque v fini, W_v est l'élément canonique de $\mathcal{W}(\pi_v; \psi_v)$. Soit π' une autre représentation satisfaisant les mêmes hypothèses et ayant le même caractère central. Pour $W \in \mathcal{W}(\pi; \psi)$, $W' \in \mathcal{W}(\pi'; \psi)$ et $\Phi \in \mathcal{S}(A')$, on définit l'intégrale $\Psi(s, W', W, \Phi)$ par la formule (1.1), l'intégrale portant sur $N_r(A) \backslash G_r(A)$. Quand W et W' sont de la forme (3.2) et Φ est un produit, l'intégrale globale Ψ s'écrit comme produit infini d'intégrales locales. En particulier Ψ converge pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$. De plus Ψ se prolonge en fonction méromorphe de s ; pour le voir on introduit, d'abord pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$, la série d'Eisenstein « dégénérée »

$$(3.3) \quad \begin{cases} E(g, \Phi, s) = \sum f(\gamma g), \\ \gamma \in Z_r(F) P_r(F) \backslash G_r(F), \quad f(g) = |\det g|^s \int_I \Phi(\eta ag) |a|^{rs} d^\times a. \end{cases}$$

Alors pour $\varphi \in \mathcal{A}(\pi)$ et $\varphi' \in \mathcal{A}(\pi')$, on a

$$(3.4) \quad \int E(g, \Phi, s) \varphi'(g) \bar{\varphi}(g) dg = \Psi(s, W', W, \Phi).$$

où W et W' sont définies par (3.1) et l'intégrale porte sur $(Z_r \setminus G_r)^*$. En effet en remplaçant E par (3.3) dans (3.4) on obtient l'intégrale de $f \varphi' \bar{\varphi}$ sur le quotient $Z_r(\mathbf{A}) P_r(\mathbf{F}) \setminus G_r(\mathbf{A})$, intégrale que l'on peut écrire aussi

$$\int f(k) dk \int |\det p|^{s-1} \varphi' \bar{\varphi}(pk) dp, \quad k \in K, \quad p \in P_r^*.$$

D'après le lemme qui suit appliqué à l'intégrale intérieure, on obtient bien Ψ pour le membre de gauche de (3.4).

LEMME (3.5). — Soit φ une fonction lisse sur P_r^* , cuspidale le long de tout horicycle de G_r contenu dans P_r . Alors

$$\int_{P_r^*} \varphi \bar{\varphi}(p) dp = \int_{N_r(\mathbf{A}) \setminus P_r(\mathbf{A})} \overline{W W}(p) dp,$$

où W est définie, pour $g \in P_r$, par (3.1).

Comme dans (2) et (4) la formule de Poisson donne le prolongement méromorphe de E et donc d'après (3.3) de Ψ . De façon précise, on a

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(g, \Phi, s) = \frac{1}{s-1} \int_{\mathbf{A}^r} \Phi(x) dx + R(s), \\ \Psi = \frac{1}{s-1} \int \Phi(x) dx \int \varphi' \bar{\varphi}(g) dg + R'(s), \quad g \in (Z_r \setminus G_r)^*, \end{array} \right.$$

où R et donc aussi R' est holomorphe au point 1.

4. THÉORÈME. — Soient π et π' comme plus haut et S un ensemble fini contenant toutes les places infinies et les places finies v où l'une au moins des représentations π_v et π'_v est ramifiée. On suppose que π_v et π'_v sont fortement génériques pour $v \in S$ et que, pour $v \notin S$, $L(s, \pi_v \times \bar{\pi}_v) = L(s, \pi'_v \times \bar{\pi}'_v)$. Alors $\pi \simeq \pi'$.

En effet, on suppose, pour simplifier, ψ_v d'ordre zéro pour $v \notin S$. On prend W, W' de la forme (3.2) et Φ, Φ' décomposables dans $\mathcal{L}(\mathbf{A}^r)$. Pour $v \in S$, on suppose [cf. (1.2)], $\int \Phi'_v(x_v) dx_v \neq 0, \Psi(1, W'_v, W_v, \Phi_v) \neq 0$. Pour $v \notin S$ on suppose que W_v, W'_v sont canoniques et $\Phi'_v = \Phi_v$ est la fonction caractéristique de R_v^+ . Alors la fonction $\Psi(s, W', W, \Phi)$ a, d'après (3.6), un pôle au point 1 tandis que les deux fonctions A et B définies par

$$A(s) = \prod_{v \in S} \Psi(s, W'_v, W_v, \Phi_v), \quad B(s) = \prod_{v \in S} \Psi(s, W'_v, W'_v, \Phi'_v),$$

sont continues dans la bande $\text{Re}(s) \geq 1$ et holomorphes dans la bande $\text{Re}(s) > 1$. L'hypothèse et la proposition (2.2) entraînent, d'abord pour $\text{Re}(s) \geq 0$, puis pour $\text{Re}(s) > 1$,

$$B(s) \Psi(s, W', W, \Phi) = A(s) \Psi(s, W', W', \Phi').$$

Comme $A(1) \neq 0$ le second membre n'est pas borné dans un voisinage de 1; il en est donc de même de $\Psi(s, W', W, \Phi)$ qui a par conséquent un pôle au point 1. D'après (3.6) cela entraîne $\pi \simeq \pi'$.

C. Q. F. D.

(*) Séance du 24 janvier 1977.

- (¹) W. CASSELMAN et J. SHALIKA, *Unramified Whittaker Functions* (en préparation).
(²) R. GODEMENT, *Analyse spectrale des formes modulaires* (Séminaire Bourbaki, 1964/1965, n° 278).
(³) H. JACQUET, I. I. PIATETSKII-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Automorphic forms on GL (3)* (en préparation).
(⁴) H. JACQUET, J. SHALIKA, *A Non-Vanishing Theorem for Zeta-Functions of Simple Algebras* (à paraître dans *Inv. Math.*).

H. J. :

*Department of Mathematics,
Columbia University,
New York,
N. Y., 10027,
U.S.A.;*

J. S. :

*The Johns Hopkins University,
Baltimore,
Md, 21218,
U.S.A.*