

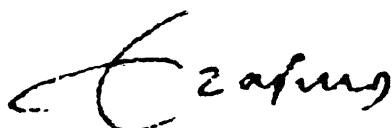
ECONOMETRIC INSTITUTE

UNE THÉORIE DE CARTIER-DIEUDONNÉ POUR
LES A-MODULES FORMELS SDP

ET

TAPIS DE CARTIER POUR LES A-MODULES FORMELS

M. HAZEWINKEL



REPRINT SERIES no. 199

The articles appeared in " C.R. Acad. Sc. Paris " , t. 284 Serie A (1977).

ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM, P.O. BOX 1738, ROTTERDAM, THE NETHERLANDS

ALGÈBRE. — *Une théorie de Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels.*
Note (*) de Michiel Hazewinkel, transmise par M. Jean Dieudonné.

On présente une théorie de classification de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels qui généralise la théorie développée par Cartier ⁽¹⁾ pour les groupes formels.

We present a classification theory for formal A-modules which generalizes Cartier's classification theory for formal groups via their topological groups of curves.

1. A-MODULES FORMELS. — Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k fini à q éléments, $q = p^r$, $p = \text{car}(k)$. Choisissons une fois pour toutes une uniformisante π de A. On notera K le corps de fractions de A, qui peut être soit de caractéristique 0 soit de caractéristique $p > 0$. Soit $B \in \text{Alg}_A$, la catégorie des A-algèbres (commutatifs avec 1). Un A-module formel sur B est une loi de groupe formel F sur B (de dimension finie ou infinie) munie d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow \text{End}_B(F)$ tel que $\rho_F(a) \equiv aX \pmod{\text{degré } 2}$ pour tout $a \in A$.

Si B est sans A-torsion, il existe un vecteur de séries formelles $f(X)$ à coefficients dans $B \otimes_A K$ tel que $f(X) \equiv X \pmod{\text{degré } 2}$, $F(X, Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$ et $\rho_F(a) = f^{-1}(af(X))$ pour tout $a \in A$. Un tel $f(X)$ est unique et on l'appelle le A-logarithme de (F, ρ_F) .

2. LE FONCTEUR W^A ET LE A-MODULE FORMEL \hat{W}^A . — Soit $w_{q,n}^A(Z_0, \dots, Z_n)$ le polynôme $Z_0^n + \pi Z_1^{q^{n-1}} + \dots + \pi^n Z_n$ à coefficients dans A, $n = 0, 1, \dots$. Alors il existe un foncteur unique $W^A : \text{Alg}_A \rightarrow \text{Alg}_A$ tel que les polynômes $w_{q,n}^A$ définissent des homomorphismes de A-algèbres fonctoriels $W^A(B) \rightarrow B$ et

$$W^A(B) = \{(b_0, b_1, \dots) \mid b_i \in B\}, W^A(\Phi)(b_0, b_1, \dots) = (\Phi(b_0), \Phi(b_1), \dots)$$

pour B, $\Phi \in \text{Alg}_A$ (comme foncteur en ensembles).

Le foncteur $W^A(-)$ possède un endomorphisme fonctoriel de A-algèbres σ^A et un endomorphisme fonctoriel ν de A-modules tels que $\sigma^A \nu = \pi$.

Si B est de caractéristique $p > 0$ on a $\sigma^A(b_0, b_1, \dots) = (b_0^q, b_1^q, \dots)$. Les polynômes d'addition de W^A définissent un A-module formel (de dimension infinie) que l'on notera \hat{W}^A . On a d'ailleurs un tel foncteur W^F et un A-module formel associé \hat{W}^F pour tout groupe formel de Lubin-Tate tordu ⁽²⁾. Le foncteur W^A a aussi été décrit en ⁽³⁾.

3. L'OPÉRATEUR f_π ET q -TYPIFICATION. — Soit FG_B^A la catégorie des A-modules formels sur B. Soit $C(-; B)$ le foncteur qui associe à tout $F \in \text{FG}_B^A$ son groupe topologique des courbes [voir ⁽¹⁾]. Les homomorphismes ρ_F définissent une structure de A-module topologique sur le foncteur $C(-; B)$.

Il existe deux endomorphismes fonctoriels ε_q et f_π de $C(-; B)$ pour tout $B \in \text{Alg}_A$ avec les propriétés suivantes :

- (i) ε_q et f_π commutent avec change de base;
- (ii) $\varepsilon_q \varepsilon_q = \varepsilon_q$ et $\varepsilon_q f_\pi = f_\pi \varepsilon_q$;

(iii) si B est sans A-torsion et $f(X)$ est le A-logarithme de $F \in \mathbf{FG}_B^A$, alors pour toute courbe $\gamma(t) \in C(F; B)$:

$$f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i t^i \rightarrow f(\varepsilon_q \gamma(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{q^i} t^{q^i}, f(\mathbf{f}_\pi \gamma(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi x_{q^n} t^n.$$

On notera $C_q(F; B)$ l'image de ε_q et les éléments de $C_q(F; B)$ seront appelés courbes q -typiques. Le sous-foncteur $C_q(-; B)$ est stable sous les opérateurs $V_q : \gamma(t) \rightarrow \gamma(t^q)$, $\langle c \rangle : \gamma(t) \rightarrow \gamma(ct)$, \mathbf{f}_π , et les opérateurs $[a]$, $a \in A$, induits par les endomorphismes $\rho_F(a)$ de F.

Entre ces opérateurs on a les relations suivantes :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \langle b \rangle V_q = V_q \langle b^q \rangle, \quad \mathbf{f}_\pi \langle b \rangle = \langle b^q \rangle \mathbf{f}_\pi, \quad \mathbf{f}_\pi V_q = [\pi], \\ [a] \text{ commute avec } \langle b \rangle, V_q \text{ et } \mathbf{f}_\pi, \quad [1] = \langle 1 \rangle = \text{id}, \\ [a+b] = [a] + [b], \quad [ab] = [a][b], \quad [a] = \sum_{n=0}^{\infty} V_q^n \langle \Omega_n(a) \rangle \mathbf{f}_\pi^n, \\ \langle b \rangle + \langle c \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} V_q^n \langle r_n(b, c) \rangle \mathbf{f}_\pi^n, \end{array} \right.$$

où les $r_n(b, c)$ sont des polynômes à coefficients dans A déterminés par

$$Z_1^{q^n} + Z_2^{q^n} = \sum_{i=0}^n \pi^i r_i(Z_1, Z_2) q^{n-i}$$

et les $\Omega_n(a) \in A$ sont déterminés par les relations $w_{q,n}^A(\Omega_0(a), \dots, \Omega_n(a)) = a$, pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$

4. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION. — Soit $\gamma_0(t)$ la courbe $(t, 0, 0, \dots)$ de $C_q(\hat{W}^A; B)$, i. e. la première composante de $\gamma_0(t)$ est la série formelle t et toutes les autres composantes sont zéro. Alors pour toute courbe q -typique $\gamma(t) \in C_q(F; B)$, $F \in \mathbf{FG}_B^A$ il existe un homomorphisme unique de A-modules formels $\alpha_\gamma : \hat{W}^A \rightarrow F$, tel que $\alpha_\gamma(\gamma_0(t)) = \gamma(t)$.

Grâce à ce théorème on peut écrire tout endomorphisme du foncteur $C_q(-; B)$ (comme foncteur en ensembles) sous la forme $\sum V_q^n \langle b_{n,m} \rangle \mathbf{f}_\pi^m$ où les $b_{n,m}$ sont tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il n'y a qu'un nombre fini de m tel que $b_{n,m} \neq 0$, et cette expression est unique.

On notera $\text{Cart}_A(B)$ l'algèbre des opérateurs de $C_q(-; B)$. Les relations (1) sont les règles de computation de $\text{Cart}_A(B)$.

5. L'ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES. — Soit $\mathbf{E}(A; B)$ la catégorie des $\text{Cart}_A(B)$ -modules C tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) V_q est injective, $C/V_q C$ est un B-module libre (la structure de B-module étant définie par les opérateurs $\langle b \rangle$);

(ii) C est complet et Hausdorff pour la topologie définie par les sous-groupes $V_q^n C$.

Alors $F \mapsto C_q(F; B)$ est une équivalence de catégories $\mathbf{FG}_B^A \rightarrow \mathbf{E}(A; B)$.

6. HAUTEUR ET DIMENSION. — Soit l une extension parfaite du corps résiduel k de A. Soit $F \in \mathbf{FG}_l^A$ de dimension finie et $C = C_q(F; l)$. Alors $C/[\pi] C$ est un espace vectoriel sur l et on définit $h(F) = \dim(C/[\pi] C)$. Si $h < \infty$ on a $h = \dim(F) + \dim_l(C/\mathbf{f}_\pi C)$. Si A est l'anneau des entiers d'une extension finie K du corps p -adique Q_p on a la relation $H = nh$ où H est la hauteur de F comme groupe formel sur A et $n = [K : Q_p]$.

7. DESCRIPTION DE $\text{Cart}_A(B)$. — Le sous-ensemble de $\text{Cart}_A(B)$ des éléments de la forme $\sum V_q^n \langle b_n \rangle f_\pi^n$ est un sous-A-algèbre de $\text{Cart}_A(B)$ qui s'identifie avec $W^A(B)$. L'algèbre $\text{Cart}_A(B)$ alors consiste de toutes les expressions $x_0 + \sum V_q^i x_i + \sum y_i f_\pi^i$, $x_i, y_i \in W^A(B)$ avec la seule condition que $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$. Si B est un corps parfait $W^A(B)$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel B et uniformisante π . En ce cas les règles de computation de $\text{Cart}_A(B)$ sont $f_\pi x = \sigma^A(x) f_\pi$, $x V_q = V_q \sigma^A(x)$, $f_\pi V_q = \pi = V_q f_\pi$.

8. CLASSIFICATION A ISOGÉNIE PRÈS. — Soit l une extension séparablement close de k , alors $\text{Cart}_A(l)$, « localisé par rapport à V_q » est un anneau sur lequel on peut classifier les modules de torsion de type fini, comme dans ⁽⁴⁾. Il en résulte que tout A-module formel sur l est isogène à une somme directe unique des A-modules formels $G_{1,0}^A, G_{n,m}^A, G_{n,\infty}^A$ avec $n, m \in \mathbb{N}, (n, m) = 1$. Les modules des courbes q -typiques de ces A-modules formels sont les quotients de $\text{Cart}_A(l)$ par les idéaux principaux à gauche engendrés par $f_\pi - 1, f_\pi^n - V_q^m, f_\pi^n$.

9. Les preuves de tout ce qui précède reposent d'une façon non triviale sur des constructions de A-modules formels universels et on utilise plusieurs fois le « lemme d'équation fonctionnelle » ⁽⁵⁾.

(*) Séance du 3 janvier 1977.

⁽¹⁾ P. CARTIER, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 50; *Ibid*, p. 129.

⁽²⁾ M. HAZEWINKEL (preprint).

⁽³⁾ E. DITERS, *Notes d'un cours*, Göttingen, 1975.

⁽⁴⁾ Yu. MANIN, *Usp. Mat. Nauk*, 18, n° 6, 1963, p. 3-90.

⁽⁵⁾ M. HAZEWINKEL, *Formal Groups and Applications* (à paraître) § 2.2 et 10.2; *J. Pure and Appl. Algebra, Adv. Math. et Compositio Math.* (à paraître).

Department of Mathematics,
Erasmus University,
50, Burg. Oudlaan,
Rotterdam,
Hollande.

ALGÈBRE. — « Tapis de Cartier » pour les A-modules formels.

Note (*) de Michiel Hazewinkel, transmise par M. Jean Dieudonné.

On donne une généralisation pour le cas des A-modules formels de la théorie de relèvement des groupes formels commutatifs, dit « Tapis de Cartier ». Les énoncés et les preuves sont des généralisations directes de ceux esquissés par Cartier dans son séminaire à l'I.H.E.S. 1972, étant donnée la théorie de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels, résumée en ⁽¹⁾.

We give a generalisation for the case of formal A-modules of the theory of lifting formal groups which has become known as the "tapis de Cartier". Results and proofs are straightforward generalisations of those sketched by Cartier in his 1972 I.H.E.S. seminar, once one has available the Cartier-Dieudonné type classification theory which we described in an earlier Note.

Soit A l'anneau des entiers d'un corps K de valuation discrète de corps résiduel k à un nombre fini d'éléments $q = p^r$, $p = \text{car}(k)$. Soit π une uniformisante de K. Le corps K peut être soit de caractéristique zéro soit de $p > 0$. Soit B un A-algèbre. Dans une Note précédente on a présenté une théorie de Cartier-Dieudonné des A-modules formels et les notions divers associées : q -typification; module de courbes q -typiques $C_q(F; B)$; opérateur de Frobenius f_π et exponentielle de Artin-Hasse.

1. A-MODULES FORMELS DE LUBIN-TATE GÉNÉRALISÉS. — Soit B un A-algèbre local, sans A-torsion, d'idéal maximal πB , tel qu'il existe un endomorphisme $\sigma : B \rightarrow B$ tel que $\sigma(b) \equiv b^q \pmod{\pi B}$ pour tout $b \in B$. Soit M un B-module libre de type fini et soit $\eta : M \rightarrow M$ un endomorphisme σ -semi-linéaire de M (i. e. $\eta(bm) = \sigma(b)\eta(m)$). Choisissons une base e_1, \dots, e_h de M et soit D(η) la matrice de η par rapport à la base e_1, \dots, e_h . On pose

$$(1) \quad g_M(X) = X + \pi^{-1} D(\eta) \sigma_* g_M(X^q), \quad G_M(X, Y) = g_M^{-1}(g_M(X) + g_M(Y)),$$

où $g_M(X)$ est un h -tuple de séries formelles en X_1, \dots, X_h à coefficients dans $B \otimes_A K$; $X^q = (X_1^q, \dots, X_h^q)$ et $\sigma_* f(X)$ est la série formelle obtenue de $f(X)$ par l'application de σ à tous les coefficients de $f(X)$. Alors [d'après le lemme d'équation fonctionnelle ⁽²⁾] $G_M(X, Y)$ est un A-module formel sur B de A-logarithme $g_M(X)$. Soit $\varphi : (M, \eta) \rightarrow (M', \eta')$ un homomorphisme, i. e. $\varphi : M \rightarrow M'$ est un homomorphisme de B-modules et $\varphi\eta = \eta'\varphi$. Alors $G_{M'}^{-1}(E g_M(X))$ est un homomorphisme de A-modules formels $G_M \rightarrow G_{M'}$, où E est la matrice de φ par rapport aux bases choisies $\{e_1, \dots, e_h\}$ de M et $\{e'_1, \dots, e'_h\}$ de M' .

Supposons maintenant que σ soit un automorphisme et soit M^σ le B-module modifié $b^* m = \sigma^{-1}(b)m$. Alors $\eta : (M^\sigma, \eta) \rightarrow (M, \eta)$ est un homomorphisme et on trouve un morphisme $v(M) : \sigma_* G_M \rightarrow G_M$ de A-modules formels qui se réduit mod πB à un morphisme de « Verschiebung » $(V)_q : \Gamma_M^{(q)} \rightarrow \Gamma_M$, où Γ_M est la réduction mod πB de G_M . On obtient ainsi une équivalence de catégories entre la catégorie des paires (M, η) et celle des paires $(G, v : \sigma_* G \rightarrow G)$ où G est un A-module formel sur B et v un homomorphisme de A-modules formels qui se réduit en $(V)_q$ modulo πB .

2. THÉORÈME DES FONCTEURS ADJOINTS. — Soit (M, η) comme ci-dessus et soit H un A-module formel sur B et $C_q(H; B)$ le $W_{q, \infty}^A(B) [f_\pi, V_q]$ -module des courbes q -typiques de H. Alors il y a une correspondance bi-univoque entre homomorphismes de A-modules formels $G_M \rightarrow H$ et homomorphismes B-linéaires $\alpha : M \rightarrow C_q(H; B)$, tel que $\alpha\eta = f_\pi\alpha$.

Ici la structure de B-module sur $C_q(H; B)$ est donnée par l'exponentielle $\Delta : B \rightarrow W_{q, \infty}^*(B)$, qui est caractérisé par $w_{q, n}^\Delta \circ \Delta = \sigma^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Cette correspondance est donnée par un morphisme canonique $\alpha_0 : M \rightarrow C_q(G_M; B)$ défini par $g_M(\alpha_0(m)) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^{-i} \eta^i(m) t^i$.

3. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE G_M PAR RAPPORT A CERTAINES EXTENSIONS. — Supposons que $\sigma : B \rightarrow B$ soit un automorphisme, que B est complet et Hausdorff pour la topologie π -B-adique, et que M est un B-module libre de type fini avec des endomorphismes η, ζ , où η est σ -semi-linéaire et ζ σ^{-1} -semi-linéaire, tel que $\eta\zeta = \zeta\eta = \pi$ et $\zeta^r M \subset \pi M$, pour $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Soit $0 \rightarrow R^+ \rightarrow H \rightarrow H_1 \rightarrow 0$ une suite exacte de A-modules formels où R^+ est un A-module de type additif. Supposons en plus tout sous-A-module formel de type additif de dimension un se relève en un sous-A-module formel additif de dimension 1 de H. Alors pour tout homomorphisme de A-modules formels $\beta : G_M \rightarrow H_1$ il existe un relèvement unique $\tilde{\beta} : G_M \rightarrow H$, tel que $\gamma\tilde{\beta} = \beta$.

4. QUOTIENTS DE G_M PAR SOUS-A-MODULE FORMEL ADDITIF. — Soient M, B, η, ζ , comme ci-dessus en 3. Soit N un sous-module libre de type fini de M tel que M/N soit libre et $N + \pi M = \zeta M$. Alors on a une immersion canonique $N^+ \rightarrow G_M$ définie par $C_q(N^+; B) \rightarrow C_q(G_M; B)$, $n \mapsto \beta(n) - V_q \beta(\zeta^{-1}n)$ pour $n \in N$. Et il en résulte une suite exacte de A-modules formels

$$(2) \quad 0 \rightarrow N^+ \rightarrow G_M \rightarrow G \rightarrow 0.$$

Soit Γ sur $l = B/\pi B$ la réduction modulo πB de G. Alors le morphisme composé $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \rightarrow C_q(G; B) \rightarrow C_q(\Gamma; l)$ est un isomorphisme de B-modules qui identifie η avec f_π et ζ avec V_q .

La suite exacte (2) est l'extension universelle de G par un A-module formel additif.

5. RELÈVEMENTS. — Soit Γ un A-module formel de A-hauteur finie sur un corps parfait $l \supset k$. On prend $B = W_{q, \infty}^*(l)$, $M = C_q(\Gamma; l)$, $\eta = f_\pi$, $\zeta = V_q$. Alors toutes les hypothèses sur B, M, η, ζ des numéros 2, 3, 4 ci-dessus sont satisfaites. Soit G un A-module formel sur B qui relève Γ . (Un tel G existe toujours parce qu'il existe pour toute dimension donnée un A-module formel universel défini sur un anneau de polynômes $A[S_1, S_2, \dots]$ ⁽³⁾). Alors il existe un homomorphisme unique $\beta : G_M \rightarrow G$, tel que $M \xrightarrow{\alpha_0} C_q(G_M; B) \rightarrow C_q(G; B) \rightarrow C_q(\Gamma; l)$ est l'identité. Le noyau de β est un sous-A-module formel de type additif d'algèbre de Lie $N = \text{Ker}(\text{Lie}(\beta))$ et β est surjectif. En plus M/N est libre et $N + \pi M = \zeta M$. C'est-à-dire l'extension $0 \rightarrow N^+ \rightarrow G_M \rightarrow G \rightarrow 0$ obtenue à partir de Γ est du type construit en 4 ci-dessus. Comme corollaire on obtient que l'extension universelle par un A-module formel additif d'un relèvement G de Γ ne dépend pas du relèvement choisi.

(*) Séance du 3 janvier 1977.

(1) M. HAZEWINKEL (preprint).

(2) M. HAZEWINKEL, *Formal Groups and Applications* (à paraître, Acad. Pr.) § 10.2.

(3) M. HAZEWINKEL, *Loc. cit.*, § 21.4, 25.4.